

Ф. И. ФЕДОРОВ

ТЕОРИЯ  
ГИРОТРОПИИ



АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР  
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Ф. И. ФЕДОРОВ

---

# ТЕОРИЯ ГИРОТРОПИИ

---

МИНСК  
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА И ТЕХНИКА»  
1976

Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск, «Наука и техника», 1976, 456 с.

Излагается общая феноменологическая теория оптических свойств гиротропных кристаллов, обладающих также анизотропией диэлектрической или магнитной проницаемости и поглощения. В основу рассмотрения положены прямые (бескоординатные) методы тензорного исчисления, позволяющие в значительной степени упростить решение самых сложных и запутанных задач кристаллооптики. Необходимый математический аппарат в доступной форме подробно излагается в последней главе книги.

Поскольку гиротропные свойства кристаллов теснейшим образом связаны с проявлениями обычной анизотропии, вначале дано развернутое изложение ковариантной теории оптических свойств негиротропных кристаллов, в том числе магнитных и поглощающих. Большое внимание уделено граничным задачам, включая прохождение через кристаллические пластинки. Основную часть содержания книги составляют оригинальные результаты автора и его сотрудников.

Книга может быть полезна широкому кругу лиц, интересующихся вопросами кристаллооптики и распространения электромагнитных волн в анизотропных средах, в том числе студентам, аспирантам, научным работникам и инженерам. Изложенный в ней математический аппарат может найти применение также при решении других задач кристаллофизики, например в теории магнитных свойств кристаллов.

Таблиц 1. Иллюстраций 21. Библиографий — 168 названий.

#### Рецензенты:

доктор физико-математических наук А. М. Самсон,  
кандидат физико-математических наук Б. А. Сотский

20405—112  
Ф ————— доп.— 76  
М316—76

© Издательство «Наука и техника», 1976.

## ОТ АВТОРА

Гиротропию можно рассматривать как один из видов анизотропии среды. Действительно, ее наличие, как и в случае обычной анизотропии, приводит к двойному преломлению света в среде, а математически она проявляется в тензорном характере связи между напряженностями электромагнитного поля и индукциями. Будучи свойством, как правило, значительно слабее выраженным, чем обычная анизотропия, гиротропия обладает рядом специфических особенностей. Теория оптических свойств гиротропных сред значительно сложнее, чем теория сред, обладающих анизотропией диэлектрической или магнитной проницаемости, либо поглощения. Наряду с весьма большим прикладным значением в различных вопросах науки и техники свойство гиротропии представляет чрезвычайный интерес с теоретической стороны.

Настоящая книга посвящена изложению общей феноменологической теории оптических свойств гиротропных кристаллов всех классов симметрии, обладающих наряду с гиротропией также другими видами анизотропии. Явление гиротропии освещается в весьма обширной журнальной и монографической литературе. Для данной книги характерно широкое и последовательное использование при построении теории ковариантных (бескоординатных) методов прямого тензорного исчисления. Эти методы были применены к оптике негиротропных кристаллов свыше 20 лет тому назад в диссертации автора [4], а затем в монографии [5]. С тех пор они получили дальнейшее развитие и применение (см. [6]), подтвердившее их адекватность рассматриваемой проблеме и высокую эффективность. Для удобства читателя все необходимые математические сведения из линейной алгебры и тензорного исчисления приводятся в последней, четвертой главе книги. Прямые тензорные методы получают все большее применение к другим проблемам кристаллофизики, поэтому материал в четвертой главе приведен с некоторым запасом, чтобы учесть интересы не только оптиков, но и других читателей.

Гиротропные свойства кристаллов самым тесным образом переплетаются с проявлениями обычной анизотропии. Без учета последних невозможно строить теорию гиротропных

сред. Поэтому первая глава книги целиком посвящена развернутому изложению теории оптических свойств негиротропных кристаллов. Часть содержания этой главы основана на материале, помещенном в монографии [5], давно ставшей библиографической редкостью. Однако около половины главы составляют результаты позднейших исследований, опубликованных ранее лишь в виде журнальных статей.

Многие из вопросов, излагаемых в данной монографии, составляли содержание курса оптики, читанного автором на протяжении примерно 15 лет в Белорусском государственном университете им. В. И. Ленина. Они излагались также в спецкурсах, которые автор читал в течение нескольких семестров для студентов и аспирантов физического факультета МГУ им. Ломоносова. Большая часть содержания книги представляет собой результат оригинальных исследований автора, частично совместных с учениками и сотрудниками. При изложении автор стремился к максимальной простоте и доступности, насколько это было возможно для рассматриваемых достаточно сложных вопросов.

Считаю своим долгом выразить благодарность В. В. Филиппову, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний, а также Е. Ю. Ангеловой, Л. М. Барковскому, Н. С. Петрову и В. Г. Лещенко за помощь, оказанную при подготовке книги к печати.

*Минск, июль 1975 г.*

**Ф. ФЕДОРОВ**

**ОСНОВЫ ОПТИКИ НЕГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛОВ  
В КОВАРИАНТНОМ ИЗЛОЖЕНИИ**

**§ 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА  
И МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.  
СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ**

Как известно, электромагнитное поле в различных средах описывается уравнениями Максвелла (см., например, [1])

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного поля;  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  — векторы электрической и магнитной индукции;  $\mathbf{I}$  — вектор плотности электрического тока;  $\rho$  — плотность свободных электрических зарядов;  $c$  — скорость света в вакууме. Однако нетрудно видеть, что одних уравнений (1.1), (1.2) заведомо недостаточно для того, чтобы однозначно определить электромагнитное поле. Действительно, введем в рассмотрение два произвольных векторных поля  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ , с помощью которых определим новые поля  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{D}'$  следующим образом [2]:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{P}}, \quad \mathbf{V}' = \mathbf{B} - \operatorname{rot} \mathbf{P}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{D}' = \mathbf{D} + \operatorname{rot} \mathbf{Q}. \quad (1.4)$$

Легко убедиться, что векторы  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{D}'$ ,  $\mathbf{H}'$  будут удовлетворять тем же уравнениям (1.1), (1.2), что и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ .

Таким образом, уравнения (1.1), (1.2) сами по себе при заданных источниках  $\mathbf{I}$  и  $\rho$  не могут определить векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  однозначно ввиду полной произвольности полей  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ .

Для того чтобы задача стала определенной, необходимо добавить дополнительные соотношения между величинами,

входящими в (1.1), (1.2). Эти соотношения носят название *уравнений связи*, или *материальных уравнений*. Уравнения Максвелла (1.1), (1.2) универсальны, т. е. сохраняют свою форму неизменной независимо от того, какими свойствами обладает среда, в которой рассматривается электромагнитное поле. В отличие от этого уравнения связи существенно зависят от свойств среды, чем и обусловлено второе их название — *материальные уравнения*.

Обычно уравнения связи имеют характер линейных соотношений между индукциями и соответствующими полями. В частности, для прозрачных оптически неактивных сред они записываются в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.5)$$

где диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  и магнитная проницаемость  $\mu$  являются скалярными величинами в случае изотропных сред и тензорами второго ранга ( $\epsilon = (\epsilon_{ab})$ ,  $\mu = (\mu_{ab})$ ) в случае кристаллов. В последнем случае соотношения (1.5) в развернутой форме с помощью индексов выражаются следующим образом (см. § 25):

$$D_a = \epsilon_{ab} E_b, \quad B_a = \mu_{ab} H_b. \quad (1.6)$$

В ходе дальнейшего изложения мы будем использовать запись уравнений связи (и любых других векторно-тензорных соотношений) как в форме (1.6), так и в прямой безындексной форме (1.5). При этом в соответствии с положенными в основу (см. гл. IV) прямыми бескоординатными методами тензорного исчисления, как правило, будем отдавать предпочтение более простой записи в форме (1.5). Форма (1.6) будет использоваться большей частью с целью пояснения, а также при рассмотрении тензоров третьего или более высокого ранга. Напомним (см. § 25), что в (1.6) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3.

Общий трехмерный тензор второго ранга содержит 9 независимых компонент. Однако возможный вид тензоров  $\epsilon$  и  $\mu$  может быть ограничен исходя из требований закона сохранения энергии. Чтобы получить соотношение, выражающее этот закон, мы поступим обычным образом (см., например, [1]). Полагая  $\mathbf{I} = 0$ , что означает отсутствие электропроводности или поглощения электромагнитных волн, перепишем первые уравнения (1.1), (1.2) в форме

$$[\nabla \mathbf{E}] + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad -[\nabla \mathbf{H}] + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = 0. \quad (1.7)$$

Здесь  $\nabla = (\nabla_a)$  — дифференциальный векторный оператор трехмерного градиента. Умножим уравнения (1.7) скалярно соответ-

ственно на  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  и сложим. Используя известное соотношение

$$\mathbf{H}[\nabla\mathbf{E}] - \mathbf{E}[\nabla\mathbf{H}] = \text{div}[\mathbf{EH}], \quad (1.7a)$$

получаем\*)

$$c \text{div}[\mathbf{EH}] + (\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}) = 0. \quad (1.8)$$

Это равенство будет выражать закон сохранения энергии, если второй член является полной производной по времени

$$\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}}) = \partial\omega/\partial t. \quad (1.9)$$

При этом соотношение (1.8) примет форму уравнения непрерывности

$$\text{div} \mathbf{S} + \partial\omega/\partial t = 0, \quad (1.10)$$

где

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] \quad (1.11)$$

имеет смысл вектора плотности потока энергии (вектора Пойнтинга), а  $\omega$  — плотности энергии электромагнитного поля.

Подставляя в (1.8) выражения (1.5) для  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}} &= \mathbf{E}\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \mathbf{H}\mu\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{H}\mu\mathbf{H}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{E}\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \mathbf{H}\mu\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{E}}\varepsilon\mathbf{E} - \dot{\mathbf{H}}\mu\mathbf{H}). \end{aligned}$$

Первый член справа имеет нужный вид производной по времени, а второй член может быть представлен в форме (см. § 26)

$$\mathbf{E}(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\dot{\mathbf{E}} + \mathbf{H}(\mu - \tilde{\mu})\dot{\mathbf{H}}. \quad (1.11a)$$

Он обращается в нуль при любых полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лишь в том случае, если

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}, \quad \mu = \tilde{\mu}, \quad (1.12)$$

т. е. когда тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости симметричны.

Кроме того, мы можем наложить на тензоры  $\varepsilon$  и  $\mu$  дополнительные ограничения исходя из выражения для энергии электрического и магнитного полей

$$\omega_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}\varepsilon\mathbf{E}, \quad \omega_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}\mu\mathbf{H}. \quad (1.13)$$

\*) Разумеется, соотношение (1.8) будет справедливо и для штрихованных величин (1.3), (1.4), поскольку последние одновременно с нештрихованными удовлетворяют уравнениям Максвелла.



Очевидно, при наличии поля  $\mathbf{E}$  в среде его энергия не может ни равняться нулю, ни быть отрицательной. Отсюда следует, что квадратичная форма  $\mathbf{E}\epsilon\mathbf{E}$  при любых  $\mathbf{E} \neq 0$  принимает положительные значения. Это означает, что тензор  $\epsilon$  является *положительно определенным* и, в частности, *неособенным*:  $|\epsilon| \neq 0$ . Поэтому всегда существует обратный тензор  $\epsilon^{-1}$ . Аналогично заключаем, что всеми этими свойствами обладает и тензор  $\mu$ .

При условии (1.12) выражение для плотности энергии может быть записано в виде

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) = \quad (1.14)$$

$$= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{H}\mu\mathbf{H}) = \quad (1.15)$$

$$= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D}\epsilon^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mu^{-1}\mathbf{B}). \quad (1.16)$$

Таким образом, из требования, чтобы закон сохранения энергии был справедлив в общепринятой форме (1.10), вытекают определенные ограничения вида уравнений связи (1.5). Опыт полностью подтверждает, что оптические свойства прозрачных неактивных кристаллов правильно описываются симметричными тензорами  $\epsilon$  и  $\mu$ . Дальнейшие ограничения вида этих тензоров следуют из учета более частных свойств среды, а именно ее кристаллографической симметрии (§ 14).

Основную роль в оптике играют плоские электромагнитные волны, которые характеризуются следующей зависимостью напряженностей поля от координат и времени:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\varphi), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\varphi), \quad \varphi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}. \quad (1.17)$$

Здесь  $\varphi$  — фаза волны,  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$  — круговая (циклическая) частота,  $\nu$  — частота,  $T$  — период волны,

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n}, \quad (1.18)$$

$\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\lambda$  — длина волны,  $v$  — фазовая скорость волны в среде (скорость перемещения поверхности равных фаз),  $\mathbf{n}$  — единичный вектор фазовой (волновой) нормали, перпендикулярный к плоскости равных фаз (фазовой плоскости),  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор. Отношение фазовой скорости волны в вакууме  $c$  к  $v$ :

$$c/v = n \quad (1.19)$$

называется показателем преломления среды. С помощью (1.18) фазу  $\varphi$  можно представить в виде

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{1}{c} \mathbf{m} \mathbf{r} \right), \quad (1.20)$$

где

$$\mathbf{m} = n\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \quad (1.21)$$

есть *вектор рефракции* \*). Как будет видно из дальнейшего, этот вектор играет в оптике кристаллов весьма фундаментальную роль и входит практически во все основные соотношения теории.

Наибольший интерес представляют *гармонические* плоские волны, выражения для которых удобнее всего записывать в комплексной форме:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\varphi}. \quad (1.22)$$

Здесь

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}'_0 + i\mathbf{E}''_0, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}'_0 + i\mathbf{H}''_0 \quad (1.23)$$

есть трехмерные *комплексные векторные амплитуды*, которые предполагаются не зависящими от координат и времени. Разумеется, при этом индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  будут выражаться в виде, аналогичном (1.22):  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i\varphi}$ ;  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i\varphi}$ . Подставляя эти выражения для векторов поля в уравнения Максвелла (1.7), можно привести последние к виду

$$\mathbf{B} = [\mathbf{m}\mathbf{E}], \quad \mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}]. \quad (1.24)$$

Возможность использования комплексных выражений (1.22), (1.23) для физических полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  обусловлена линейностью уравнений Максвелла. Однако в тех случаях, когда приходится вычислять нелинейные выражения, зависящие от  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , необходимо переходить к вещественным частям. Так, вектор Пойнтинга и плотность энергии (см. (1.11), (1.13)) через поля вида (1.22) выражаются следующим образом \*\*):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi} [\mathbf{E} + \mathbf{E}^*, \quad \mathbf{H} + \mathbf{H}^*], \quad (1.25)$$

$$\omega = \frac{1}{32\pi} [(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \varepsilon (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) + (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) \mu (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)]. \quad (1.25a)$$

\*) Вектор рефракции был введен в [3]. Он широко используется в [4—6] и многочисленных других работах.

\*\*\*) Звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Эти выражения для плотности и потока энергии могут быть представлены в виде

$$w = \bar{w} + w', \quad S = \bar{S} + S', \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{32\pi} (E_\varepsilon E^* + E^* \varepsilon E + H_\mu H^* + H^* \mu H) = \\ &= \frac{1}{16\pi} (E_\varepsilon E^* + H_\mu H^*), \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} w' &= \frac{1}{32\pi} (E_\varepsilon E + E^* \varepsilon E^* + H_\mu H + H^* \mu H^*) = \\ &= \frac{1}{16\pi} \operatorname{Re} (E_\varepsilon E + H_\mu H), \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\bar{S} = \frac{c}{16\pi} ([EH^*] + [E^*H]) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [EH^*], \quad (1.29)$$

$$S' = \frac{c}{16\pi} ([EH] + [E^*H^*]) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [EH]. \quad (1.30)$$

Если подставить сюда выражения (1.22) для полей  $E$  и  $H$ , то получим

$$\bar{w} = \frac{1}{16\pi} (E_0 \varepsilon E_0^* + H_0 \mu H_0^*), \quad \bar{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E_0 H_0^*], \quad (1.31)$$

$$w' = \frac{1}{16\pi} \operatorname{Re} [(E_0 \varepsilon E_0 + H_0 \mu H_0) e^{2i\varphi}], \quad S' = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [(E_0 H_0) e^{2i\varphi}]. \quad (1.32)$$

Таким образом, слагаемые  $\bar{w}$ ,  $\bar{S}$  и  $w'$ ,  $S'$  имеют существенно различный характер. В то время как  $\bar{w}$  и  $\bar{S}$  являются постоянными, величины  $w'$  и  $S'$  для плоской монохроматической волны периодически изменяются с частотой, вдвое большей, чем частота изменения полей  $E$  и  $H$ . Если усреднить выражения (1.25), (1.25а) для  $w$  и  $S$  по времени, то слагаемые  $w'$  и  $S'$  исчезнут и останутся лишь  $\bar{w}$  и  $\bar{S}$ . Последние представляют собой, таким образом, средние по времени значения плотности энергии и вектора плотности потока энергии плоской электромагнитной волны. В случае световых волн, ввиду их большой частоты, на опыте обычно фиксируются именно средние значения плотности и потока энергии. Поэтому в дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать не мгновенные значения энергетических величин (1.25), (1.26), а их средние значения (1.27), (1.29), не оговаривая этого и используя для них обозначения  $w$  и  $S$ .

Нетрудно видоизменить общий вывод закона сохранения энергии (1.10) так, чтобы он был пригоден для комплексных векторов электромагнитного поля. Для этого наряду с уравнениями Максвелла (1.7) рассмотрим уравнения для комплексно сопряженных полей

$$[\nabla \mathbf{E}^*] + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}^* = 0, \quad -[\nabla \mathbf{H}^*] + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}^* = 0. \quad (1.33)$$

Умножим первое уравнение (1.7) на  $\mathbf{H}^*$ , а второе — на  $\mathbf{E}^*$ , уравнения (1.33) — соответственно на  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  и сложим четыре полученных равенства. Это дает после соответствующей перегруппировки членов

$$(\mathbf{H}^* [\nabla \mathbf{E}] - \mathbf{E} [\nabla \mathbf{H}^*]) + (\mathbf{H} [\nabla \mathbf{E}^*] - \mathbf{E}^* [\nabla \mathbf{H}]) + \\ + \frac{1}{c} (\mathbf{E}^* \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{E} \dot{\mathbf{D}}^*) + \frac{1}{c} (\mathbf{H}^* \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}}^*) = 0. \quad (1.34)$$

Используя для первых двух членов в скобках соотношение (1.7а), получаем для них выражение  $\text{div}([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}])$ . В свою очередь последние члены в (1.34) могут быть написаны в виде (см. (1.5))\*

$$\mathbf{E}^* \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{E} \dot{\mathbf{D}}^* = \mathbf{E}^* \epsilon \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{E} \epsilon \dot{\mathbf{E}}^* = \mathbf{E}^* \epsilon \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^* \epsilon \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \epsilon \mathbf{E}^*) \quad (1.35)$$

и аналогично

$$\mathbf{H}^* \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}}^* = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}^* \mu \mathbf{H}). \quad (1.36)$$

Здесь существенную роль играет симметрия тензоров  $\epsilon$  и  $\mu$ , благодаря которой мы имеем  $\mathbf{E} \epsilon \mathbf{E}^* = \dot{\mathbf{E}}^* \epsilon \mathbf{E}$  и  $\mathbf{H} \mu \mathbf{H}^* = \dot{\mathbf{H}}^* \mu \mathbf{H}$  (см. § 25). В результате равенство (1.34) принимает форму (1.10), где  $\omega = \omega_e + \omega_m$  и

$$\omega_e = \frac{1}{16\pi} \mathbf{E}^* \epsilon \mathbf{E} = \frac{1}{16\pi} \mathbf{E}^* \mathbf{D} = \frac{1}{16\pi} \mathbf{E} \mathbf{D}^* = \frac{1}{16\pi} \mathbf{D} \epsilon^{-1} \mathbf{D}^*, \quad (1.37)$$

$$\omega_m = \frac{1}{16\pi} \mathbf{H}^* \mu \mathbf{H} = \frac{1}{16\pi} \mathbf{H}^* \mathbf{B} = \frac{1}{16\pi} \mathbf{H} \mathbf{B}^* = \frac{1}{16\pi} \mathbf{B} \mu^{-1} \mathbf{B}^*, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi} ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]) = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]. \quad (1.39)$$

Очевидно, при вещественных полях эти соотношения переходят в (1.11), (1.13) — (1.16). Из вывода ясно, что их пригод-

\*) Предполагается вещественность  $\epsilon$  и  $\mu$ :  $\epsilon = \epsilon^*$ ,  $\mu = \mu^*$ .

ность не ограничивается случаем плоских монохроматических волн и что закон сохранения энергии (1.10) при таких  $\omega$  и  $\mathbf{S}$  справедлив для любых комплексных полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла (1.7).

Для плоских волн в изотропной среде, согласно (1.24), (1.5),

$$\mu \mathbf{H} = [\mathbf{mE}], \quad (\mathbf{mH} = 0), \quad (1.40)$$

$$\varepsilon \mathbf{E} = -[\mathbf{mH}], \quad (\mathbf{mE} = 0), \quad (1.41)$$

где  $\varepsilon, \mu$  — скаляры. Если  $\varepsilon, \mu, \mathbf{m}$  вещественны, то, умножая уравнение (1.40) скалярно на  $\mathbf{H}^*$  и уравнение, комплексно сопряженное к (1.41), — на  $\mathbf{E}$ , получаем

$$\mathbf{H} \mu \mathbf{H}^* = \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E}^* = \mathbf{m} [\mathbf{EH}^*], \quad (1.42)$$

$$[\mathbf{EH}^*] = \frac{1}{\mu} [\mathbf{E} [\mathbf{mE}^*]] = \frac{1}{\mu} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{m} = \frac{1}{\varepsilon} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{m}. \quad (1.43)$$

Следовательно, согласно (1.37) — (1.39),  $\omega_e = \omega_m$  и

$$\omega = \frac{\mathbf{m}^2}{8\pi\mu} |\mathbf{E}|^2 = \frac{\mathbf{m}^2}{8\pi\varepsilon} |\mathbf{H}|^2, \quad (1.44)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi\mu} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{m} = \frac{c}{8\pi\varepsilon} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{m} = \frac{c}{\mathbf{m}^2} \omega \mathbf{m} = \frac{c}{n} \omega \mathbf{n} = \omega \mathbf{v}, \quad (1.45)$$

где  $\mathbf{v} = \omega \mathbf{n}$  — вектор фазовой скорости волн в среде. Равенство (1.45) имеет простой физический смысл и выражает то свойство, что поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную к потоку, равен количеству энергии, содержащемуся в прямом цилиндре длиной  $v$ , построенном на этой площадке.

Подставляя (см. (1.40))  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} [\mathbf{mE}]$  в уравнение (1.41), получаем  $(\mathbf{m}^2 - \varepsilon\mu) \mathbf{E} = 0$ . Следовательно, в изотропных средах плоские волны вида (1.22) могут распространяться лишь при условии

$$\mathbf{m}^2 = n^2 = \varepsilon\mu. \quad (1.46)$$

При этом, согласно (1.44),

$$\omega = \frac{\varepsilon}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 = \frac{\mu}{8\pi} |\mathbf{H}|^2. \quad (1.47)$$

В немагнитных изотропных средах ( $\mu = 1$ ) соотношение (1.46) принимает вид

$$\mathbf{m}^2 = n^2 = \varepsilon. \quad (1.48)$$

Следовательно, в этом случае фазовая скорость плоской электромагнитной волны и соответственно показатель преломле-

ния целиком определяются диэлектрической проницаемостью среды. Поскольку значение  $\epsilon$  в общем случае зависит от частоты распространяющейся волны:  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ , то это повлечет за собой соответствующую зависимость от  $\omega$  показателя преломления (дисперсия). В настоящей книге мы не будем рассматривать явление дисперсии, считая частоту  $\omega$  фиксированной.

## § 2. КОВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПЛОСКИХ ВОЛН \*)

Если рассматривать электрическое или магнитное поле в фиксированной точке пространства, то ввиду периодичности функций (1.22) конец реального вектора  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$  будет описывать замкнутую кривую. Форма этой кривой определяет *поляризацию* плоской волны. Обычно для определения поляризации используется разложение вектора  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{H}$ ) по взаимно перпендикулярным осям в фазовой плоскости волны (см., например, [10, 11] и другие руководства). В отличие от этого мы используем в данной книге инвариантные характеристики поляризации, не связанные с выбором какой-либо системы координат, предложенные в [4, 5, 7—9]. При таком подходе поляризация волны определяется непосредственно по свойствам комплексной векторной амплитуды  $\mathbf{E}_0$  или  $\mathbf{H}_0$ . Поскольку соотношения, характеризующие кривую поляризации, нелинейны, то, как отмечалось выше, нам придется перейти к вещественной части выражений (1.22). Вектор  $\mathbf{E}$ , согласно (1.22), (1.23), может быть представлен в виде

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}'_0 + i\mathbf{E}''_0) e^{i\varphi} = \mathbf{E}' + i\mathbf{E}'' \quad (2.1)$$

а его вещественная часть  $\mathbf{E}'$ , имеющая непосредственный физический смысл, равна:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{R} = \mathbf{E}'_0 \cos \varphi - \mathbf{E}''_0 \sin \varphi \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что конец вектора  $\mathbf{E}'$  описывает плоскую кривую, так как он представляется линейной комбинацией двух постоянных векторов  $\mathbf{E}'_0$  и  $\mathbf{E}''_0$  с переменными скалярными коэффициентами  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ .

Уравнение (2.2) есть уравнение кривой поляризации в векторной параметрической форме. Будем рассматривать  $\mathbf{E}'$  как радиус-вектор и для исключения  $\varphi$  умножим его векторно один раз на  $\mathbf{E}'_0$  и другой раз на  $\mathbf{E}''_0$ . В результате получим

$$[\mathbf{R}\mathbf{E}'_0] = [\mathbf{E}'_0\mathbf{E}'_0] \sin \varphi, \quad [\mathbf{R}\mathbf{E}''_0] = [\mathbf{E}'_0\mathbf{E}''_0] \cos \varphi.$$

---

\*) Излагаемые в § 2 методы ковариантного описания поляризации развиты в [4—9].

Возводя в квадрат и складывая эти равенства, находим уравнение кривой

$$[RE'_0]^2 + [RE''_0]^2 = [E'_0E''_0]^2. \quad (2.3)$$

Следует помнить, что здесь  $\mathbf{R}$  является двумерным радиусом-вектором, лежащим в плоскости ( $\mathbf{E}'_0$  и  $\mathbf{E}''_0$ ). Ясно, что кривая второго порядка, выражаемая уравнением (2.3), не может быть ни параболой, ни гиперболой, так как длина вектора  $\mathbf{R}$  в силу (2.2) ограничена. Таким образом, уравнение (2.3) определяет в общем случае эллипс. В случае круговой поляризации квадрат длины радиуса-вектора  $\mathbf{R}$  должен быть постоянен, что приводит к условиям (см. (2.2))

$$E_0'^2 - E_0''^2 = E'_0E''_0 = 0. \quad (2.4)$$

Легко проверить, что при этом (2.3) превращается в уравнение окружности радиуса  $|E'_0| = |E''_0|$ , следовательно, условия (2.4) дают инвариантный критерий круговой поляризации.

В случае, когда  $\mathbf{E}'_0$  и  $\mathbf{E}''_0$  взаимно перпендикулярны, но не равны по длине:

$$E'_0E''_0 = 0, \quad |E'_0| \neq |E''_0|, \quad (2.5)$$

получаем «канонический» эллипс, причем  $\mathbf{E}'_0$  и  $\mathbf{E}''_0$  по величине и направлению дают полуоси эллипса. Действительно, выбирая, например, направление  $\mathbf{E}'_0$  за ось  $x$ , а  $\mathbf{E}''_0$  за ось  $y$ , получим

$$[RE'_0]^2 = E_0'^2 y^2, \quad [RE''_0]^2 = E_0''^2 x^2$$

и вследствие (2.5)  $[E'_0E''_0]^2 = E_0'^2 E_0''^2$ . При этом (2.3) переходит в  $x^2/E_0''^2 + y^2/E_0'^2 = 1$ , т. е. в уравнение эллипса с полуосями  $|E'_0|$  и  $|E''_0|$ .

В случае линейной поляризации вектор  $\mathbf{R}$  должен сохранять свое направление, т. е. изменение его при изменении  $\varphi$  должно быть параллельно самому вектору  $\mathbf{R}$ . Условие для этого может быть записано в виде

$$[\mathbf{R}\mathbf{R}'] = 0, \quad \mathbf{R}' = d\mathbf{R}/d\varphi. \quad (2.6)$$

Из (2.2) находим  $\mathbf{R}' = -E'_0 \sin \varphi - E''_0 \cos \varphi$ , откуда  $[\mathbf{R}\mathbf{R}'] = -[E'_0E''_0]$ , следовательно, условие (2.6) дает

$$[E'_0E''_0] = 0. \quad (2.7)$$

Действительно, при этом из (2.2) ясно, что  $\mathbf{R}$  направлен вдоль  $\mathbf{E}'_0 \parallel \mathbf{E}''_0$ . Таким образом, условие (2.7) является инвариантным

критерием линейной поляризации. Его можно выразить также в форме

$$\mathbf{E}_0'' = \alpha \mathbf{E}_0', \quad (2.8)$$

при этом вещественный множитель  $\alpha$  может принимать значения 0 и  $\infty$ , что соответствует частным случаям  $\mathbf{E}_0'' = 0$  и  $\mathbf{E}_0' = 0$ . Так же просто решается в данной трактовке вопрос о направлении вращения вектора  $\mathbf{E}$  в случае круговой поляризации. Последнее определяется направлением вектора  $[\mathbf{R}\mathbf{R}']$ , образующего правый винт с направлением вращения вектора  $\mathbf{E}$ . Вследствие равенства  $[\mathbf{R}\mathbf{R}'] = -[\mathbf{E}_0'\mathbf{E}_0'']$  имеем:

$$\text{при } n[\mathbf{E}_0'\mathbf{E}_0''] > 0 \text{ свет поляризован вправо,} \quad (2.9)$$

$$\text{при } n[\mathbf{E}_0'\mathbf{E}_0''] < 0 \text{ свет поляризован влево.} \quad (2.10)$$

Здесь имеется в виду обычное определение направления обращения (см., например, [10]), соответствующее наблюдению *навстречу лучу света*.

Если ни одно из условий (2.4), (2.5), (2.7) не выполняется, то мы имеем дело с общим случаем эллиптической поляризации. Чтобы найти в этом случае величину и направление главных осей эллипса поляризации (2.3), нужно определить значения  $\varphi$  (см. (2.2)), при которых  $\mathbf{R}^2$  принимает экстремальные значения. Для соответствующего расчета удобно представить (2.2) в виде

$$\mathbf{R} = \xi \mathbf{E}_0' + \eta \mathbf{E}_0'', \quad \xi^2 + \eta^2 = 1, \quad (2.11)$$

тогда дело сведется к нахождению максимума от функции

$$f(\xi, \eta) = \mathbf{R}^2 - \lambda(\xi^2 + \eta^2 - 1), \quad (2.12)$$

где  $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа. Условия экстремума  $\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$  дают

$$(\mathbf{E}_0''^2 - \lambda)\xi + \mathbf{E}_0'\mathbf{E}_0''\eta = 0, \quad \mathbf{E}_0'\mathbf{E}_0''\xi + (\mathbf{E}_0'^2 - \lambda)\eta = 0. \quad (2.13)$$

Умножив эти равенства соответственно на  $\xi$  и  $\eta$  и сложив, получим

$$\lambda = \xi^2 \mathbf{E}_0'^2 + \eta^2 \mathbf{E}_0''^2 + 2\xi\eta \mathbf{E}_0'\mathbf{E}_0'' = \mathbf{R}_{\text{extr}}^2. \quad (2.14)$$

С другой стороны, из линейных однородных уравнений (2.13) имеем, поскольку  $\xi$  и  $\eta$  не равны одновременно нулю,



$$\begin{vmatrix} E_0'^2 - \lambda & E_0' E_0'' \\ E_0' E_0'' & E_0''^2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (E_0'^2 + E_0''^2) \lambda + [E_0' E_0'']^2 = 0. \quad (2.15)$$

Отсюда находим квадраты полуосей эллипса, который описывает конец вектора  $\mathbf{R}$ ,

$$\lambda_1 = R_{\max}^2 = a^2 = \frac{1}{2} (E_0'^2 + E_0''^2 + \sqrt{(E_0'^2 + E_0''^2)^2 - 4 [E_0' E_0'']^2}), \quad (2.16)$$

$$\lambda_2 = R_{\min}^2 = b^2 = \frac{1}{2} (E_0'^2 + E_0''^2 - \sqrt{(E_0'^2 + E_0''^2)^2 - 4 [E_0' E_0'']^2}).$$

Находя соответствующие отношения  $\xi/\eta$  из (2.13) и подставляя в (2.11), определяем направления главных осей эллипса поляризации:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\parallel [E_0'' [E_0' E_0'']] - \lambda_1 E_0' \parallel [E_0' [E_0' E_0']] - \lambda_1 E_0'', \\ \mathbf{b} &\parallel [E_0'' [E_0' E_0'']] - \lambda_2 E_0' \parallel [E_0' [E_0' E_0']] - \lambda_2 E_0''. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из (2.16) следует

$$a^2 + b^2 = E_0'^2 + E_0''^2, \quad a^2 b^2 = [E_0' E_0'']^2. \quad (2.18)$$

Общие формулы (2.16), как легко видеть, охватывают и частные случаи круговой и линейной поляризации. В первом случае (см. (2.4)) подкоренное выражение обращается в нуль и мы получаем для радиуса окружности колебаний

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{R}| = |E_0'| = |E_0''|. \quad (2.19)$$

Во втором случае  $[E_0' E_0''] = 0$  и  $b^2 = 0$ , а для максимальной длины вектора  $\mathbf{R}$  получаем\*

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{R}| = \sqrt{E_0'^2 + E_0''^2} = |E_0| = |E|. \quad (2.20)$$

Еще более удобные и компактные соотношения получаются, если производить вычисления непосредственно с комплексной амплитудой  $E_0$ , не переходя к векторам  $E_0'$ ,  $E_0''$ . Уравнение эллипса (2.3) можно представить в виде

$$|[\mathbf{R} E_0]|^2 = \frac{1}{4} |[E_0 E_0^*]|^2. \quad (2.21)$$

\*) В случае комплексного вектора  $|E_0|$  означает его модуль, т. е. положительный квадратный корень из скалярного произведения самого вектора на комплексно сопряженный к нему:  $|E_0| = \sqrt{E_0 E_0^*} = \sqrt{E_0'^2 + E_0''^2}$  (см. § 27).

Входящий сюда радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , поскольку он веществен и лежит в плоскости  $\mathbf{E}'_0$ ,  $\mathbf{E}''_0$  или, что то же самое, в плоскости  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{E}_0^*$ , должен иметь вид

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} (\alpha \mathbf{E}_0 + \alpha^* \mathbf{E}_0^*). \quad (2.22)$$

Подставляя (2.22) в (2.21), находим для комплексного скаляра  $\alpha$

$$|\alpha|^2 = 1. \quad (2.23)$$

Главные оси эллипса (2.21) соответствуют экстремуму  $\mathbf{R}^2$  при условии (2.23). Как обычно, образуем функцию

$$f(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{4} (\alpha^2 \mathbf{E}_0^2 + \alpha^{*2} \mathbf{E}_0^{*2} + 2\alpha\alpha^* |\mathbf{E}_0|^2) - \lambda (\alpha\alpha^* - 1),$$

где  $\lambda$  — неопределенный множитель;  $\alpha$  и  $\alpha^*$  должны здесь рассматриваться как независимые переменные, поскольку они выражаются через два независимых параметра — вещественную и мнимую части  $\alpha$ . Приравнявая нулю производные от  $f$  по  $\alpha$  и  $\alpha^*$ , получим

$$\mathbf{E}_0^2 \alpha + (|\mathbf{E}_0|^2 - 2\lambda) \alpha^* = 0, \quad (|\mathbf{E}_0|^2 - 2\lambda) \alpha + \mathbf{E}_0^{*2} \alpha^* = 0. \quad (2.24)$$

Умножая эти уравнения на  $\alpha$ ,  $\alpha^*$  и складывая, находим с учетом (2.23)

$$\lambda = \frac{1}{4} (\alpha^2 \mathbf{E}_0^2 + \alpha^{*2} \mathbf{E}_0^{*2} + 2|\alpha \mathbf{E}_0|^2) = \mathbf{R}_{\text{extr}}^2. \quad (2.25)$$

С другой стороны, имеем уравнение для  $\lambda$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_0^2 & |\mathbf{E}_0|^2 - 2\lambda \\ |\mathbf{E}_0|^2 - 2\lambda & \mathbf{E}_0^{*2} \end{vmatrix} = |\mathbf{E}_0^2|^2 - (|\mathbf{E}_0|^2 - 2\lambda)^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{2} (|\mathbf{E}_0|^2 \pm |\mathbf{E}_0^2|). \quad (2.26)$$

Верхний знак соответствует большой полуоси, нижний — малой, так что

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} (|\mathbf{E}_0|^2 + |\mathbf{E}_0^2|), \quad \mathbf{b}^2 = \frac{1}{2} (|\mathbf{E}_0|^2 - |\mathbf{E}_0^2|). \quad (2.27)$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_0|^2 &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2, & |\mathbf{E}_0^2| &= \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2, \\ \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 &= \frac{1}{4} (|\mathbf{E}_0|^4 - |\mathbf{E}_0^2|^2) = -\frac{1}{4} [\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*]^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Мы пользуемся здесь для комплексных векторов  $\mathbf{E}$  соотношениями (см. § 27)

$$|\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E}\mathbf{E}^*, \quad [|\mathbf{E}\mathbf{E}^*|^2 = \mathbf{E}^2\mathbf{E}^{*2} - (\mathbf{E}\mathbf{E}^*)^2 = |\mathbf{E}^2|^2 - |\mathbf{E}|^4. \quad (2.29)$$

Поскольку

$$|\mathbf{E}_0|^2 = |\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E}'_0 + \mathbf{E}''_0, \quad (2.30)$$

$$|\mathbf{E}_0^2| = |\mathbf{E}^2| = \sqrt{(\mathbf{E}'_0{}^2 - \mathbf{E}''_0{}^2)^2 + 4(\mathbf{E}'_0\mathbf{E}''_0)^2}, \quad (2.31)$$

то формулы (2.27) совпадают с (2.16). Для  $\alpha$  получаем из (2.24)

$$\frac{\alpha}{\alpha^*} = \frac{2\lambda - |\mathbf{E}_0|^2}{\mathbf{E}_0^2} = \frac{\mathbf{E}_0^{*2}}{2\lambda - |\mathbf{E}_0|^2}. \quad (2.32)$$

Умножая здесь числитель и знаменатель на  $\alpha$  и учитывая (2.23), (2.26), получаем

$$\alpha^2 = \pm \frac{|\mathbf{E}_0^2|}{\mathbf{E}_0^2} = \pm \frac{\mathbf{E}_0^{*2}}{|\mathbf{E}_0^2|}. \quad (2.33)$$

Таким образом, параметр  $\alpha$  для большой полуоси имеет значение

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{|\mathbf{E}_0^2|}{\mathbf{E}_0^2}}, \quad \alpha^* = \pm \sqrt{\frac{|\mathbf{E}_0^2|}{\mathbf{E}_0^{*2}}} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{E}_0^2}{|\mathbf{E}_0^2|}} \quad (2.34)$$

и для малой полуоси

$$\alpha = \pm i \sqrt{\frac{|\mathbf{E}_0^2|}{\mathbf{E}_0^2}}, \quad \alpha^* = \mp i \sqrt{\frac{\mathbf{E}_0^2}{|\mathbf{E}_0^2|}}. \quad (2.35)$$

Здесь по желанию могут быть выбраны верхние или нижние знаки. Выбирая, например, в (2.34) верхний знак, а в (2.35) нижний и подставляя эти параметры в (2.22), получаем

$$\mathbf{R}_{\max} = \mathbf{a} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{|\mathbf{E}_0^2|}{\mathbf{E}_0^2}} \mathbf{E}_0 + \sqrt{\frac{|\mathbf{E}_0^2|}{\mathbf{E}_0^{*2}}} \mathbf{E}_0^* \right), \quad (2.36)$$

$$\mathbf{R}_{\min} = \mathbf{b} = \frac{-i}{2} \left( \sqrt{\frac{|\mathbf{E}_0^2|}{\mathbf{E}_0^2}} \mathbf{E}_0 - \sqrt{\frac{|\mathbf{E}_0^2|}{\mathbf{E}_0^{*2}}} \mathbf{E}_0^* \right). \quad (2.37)$$

Легко видеть, что  $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$ ,

Формулы (2.36), (2.37) означают, что векторы большой ( $\mathbf{a}$ ) и малой ( $\mathbf{b}$ ) полуосей эллипса, описываемого вектором  $\mathbf{E}$ , по величине и направлению задаются соответственно вещественной и мнимой частями комплексного вектора

$$\mathbf{E}_0^r = \sqrt{\frac{|\mathbf{E}_0^2|}{\mathbf{E}_0^2}} \mathbf{E}_0 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}. \quad (2.38)$$

Этот вектор отличается от  $E_0$  лишь умножением на скалярный комплексный унимодулярный множитель  $\sqrt{|E_0^2|/E_0^2}$ . Такое умножение как бы «преобразует» вектор  $E_0$  и соответствующий эллипс к главным осям. Отметим еще, что из (2.38) следует

$$E_{0r}^2 = |E_0^2|. \quad (2.39)$$

В качестве критерия для направления обращения, учитывая, что

$$[EE^*] = -2i [E_0^* E_0^*], \quad (2.40)$$

получим (см. (2.9), (2.10)), что вектор  $i[EE^*]$  должен образовывать правый винт с направлением обращения вектора  $E$ . Отсюда вытекают следующие условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{in} [EE^*] > 0 & \text{ — правополяризованный свет,} \\ \operatorname{in} [EE^*] < 0 & \text{ — левополяризованный свет.} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Формулы (2.21), (2.26)—(2.31), (2.36)—(2.39) остаются также в силе, если вместо комплексной амплитуды  $E_0$  брать полный вектор поля  $E = E_0 e^{i\varphi}$ , так как фазовый множитель  $e^{i\varphi}$  сокращается. Вектор  $E_r$ , получаемый из  $E$  согласно соотношению (2.38), мы будем называть приведенным. Следует отметить, что при умножении вектора  $E$  на произвольный комплексный скалярный множитель  $\beta$  приведенный вектор  $E_r$  умножается на модуль  $|\beta|$  этого множителя. Поэтому в результате такого умножения форма и ориентация эллипса колебаний остаются неизменными и лишь его размеры увеличиваются в  $|\beta|$  раз. Следовательно, приведенный вектор для полного вектора поля  $E = E_0 e^{i\varphi}$  и для векторной амплитуды  $E_0$  будет один и тот же.

Направление обращения также не меняется при умножении вектора на произвольный скалярный комплексный множитель  $\beta$ . Действительно, при этом  $[EE^*]$  умножается на  $|\beta|^2$ , и, следовательно, знак произведения  $i[EE^*]$  остается неизменным. Таким образом, умножение вектора  $E$  на произвольное постоянное комплексное число не изменяет ничего, кроме размеров эллипса колебаний. Учтя это, можно легко установить соотношение поляризации двух колебаний  $E$  и  $E_1$ , происходящих в одной плоскости и удовлетворяющих условию  $EE_1 = 0$ . Если  $n$  — нормаль к плоскости  $E$ ,  $E_1$ , то  $nE = nE_1 = 0$  и, следовательно,  $E_1 = \beta[nE] = [nE_2]$ , где  $E_2 = \beta E$ . Так как  $n$  — единичный вещественный вектор, то  $R_1 = [nR_2]$  (2.2) и  $R_1^2 = R_2^2$ , т. е. вещественные векторы  $R_1$  и  $R_2$  в процессе периодического изменения всегда остаются равными и перпендикулярными друг

к другу. Поэтому описываемые ими эллипсы имеют одинаковую форму, размеры и направление обхода, но расположены взаимно перпендикулярно. Эллипс  $E$  отличается от эллипса  $E_2$  лишь размерами благодаря множителю  $\beta$  (рис. 2.1). Если  $\beta$  — комплексное число:  $\beta = |\beta|e^{i\delta}$ , то вектор  $E_1$  в своем изменении опережает по фазе вектор  $E$  на величину  $\delta$ .

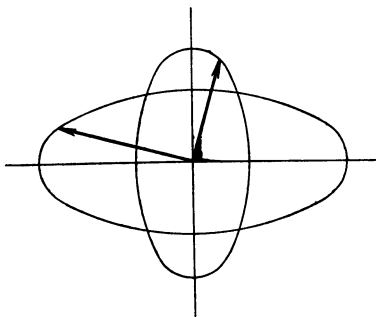


Рис. 2.1

Отсюда, согласно (1.24), вытекает, что при вещественном векторе рефракции вектор  $V$  описывает кривую такой же формы, как и вектор  $E$ , но ориентированную перпендикулярно к ней. То же самое справедливо для кривых, описываемых векторами  $D$  и  $H$ .

Из (2.36), (2.37), (2.40) следует, что при замене вектора  $E$  на комплексно сопряженный вектор  $E^*$  эллипс колебаний сохраняет свои размеры, форму и ориентацию, но направление обхода меняется на обратное.

Условие линейной поляризации, согласно (2.7), (2.40), имеет вид

$$[EE^*] = 0. \quad (2.42)$$

В случае же круговой поляризации (см. (2.4), (2.31)) мы получаем

$$E^2 = 0. \quad (2.43)$$

Отметим, что в силу общих соотношений, справедливых для любых комплексных векторов (см. § 27),

$$|[EE_1]|^2 = [EE_1][E^*E_1^*] = |E|^2|E_1|^2 - |E^*E_1|^2, \quad (2.44)$$

для линейной поляризации должно быть

$$|E|^2 = |E^2|, \quad (2.45)$$

а для круговой поляризации

$$|E|^4 + [EE^*]^2 = 0, \quad (2.46)$$

или

$$|E|^2 = |[EE^*]|. \quad (2.47)$$

При этом для радиуса окружности, согласно (2.19), получаем

$$|R| = \frac{1}{2} |E + E^*| = \frac{1}{2} |E - E^*|, \quad (2.48)$$

или

$$|\mathbf{R}| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{E}|. \quad (2.49)$$

С помощью вектора нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости комплексного вектора  $\mathbf{E}$  также можно получить полезные соотношения, характеризующие циркулярную (круговую) поляризацию. Условие (2.43) можно рассматривать как условие ортогональности вектора  $\mathbf{E}$  самому себе. С другой стороны,  $\mathbf{E}\mathbf{n} = 0$ , поэтому вектор  $\mathbf{E}$ , как ортогональный к двум векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{n}$ , может быть представлен в виде их векторного произведения:

$$\mathbf{E} = \beta [\mathbf{n}\mathbf{E}]. \quad (2.50)$$

Скалярное умножение на  $\mathbf{E}$  дает  $\mathbf{E}^2 = 0$ , т. е. условие (2.43). Умножая векторно на  $\mathbf{n}$ , имеем

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}] = \beta [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{E}]] = -\beta\mathbf{E}. \quad (2.51)$$

Сравнение (2.50) и (2.51) дает  $\beta = \pm i$ . Таким образом,

$$\mathbf{E} = \pm i [\mathbf{n}\mathbf{E}]. \quad (2.52)$$

После скалярного умножения на  $\mathbf{E}^*$  получаем

$$i\mathbf{n}[\mathbf{E}\mathbf{E}^*] = \pm |\mathbf{E}|^2. \quad (2.53)$$

Согласно (2.41), здесь верхний (нижний) знак отвечает правому (левому) направлению обращения по кругу.

Следует снова отметить, что в (2.41) — (2.53) мы можем подразумевать под  $\mathbf{E}$  как полный переменный вектор волны, так и его комплексную амплитуду  $\mathbf{E}_0$ .

О форме кривой поляризации можно судить также с помощью отношения

$$\gamma = |\mathbf{E}^2|/|\mathbf{E}|^2. \quad (2.54)$$

Действительно, отношение квадратов полуосей эллипса поляризации, согласно (2.27), равно

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad (2.55)$$

т. е. полностью определяется параметром  $\gamma$ . Для случая линейной поляризации, как вытекает из (2.42),

$$\mathbf{E}^* = \beta\mathbf{E}, \quad (2.56)$$

где  $\beta$  — комплексный скаляр. Взяв модули от обеих частей и учтя, что  $|\mathbf{E}^*| = |\mathbf{E}|$ , получим

$$|\beta| = 1. \quad (2.57)$$

Умножив (2.56) скалярно на  $\mathbf{E}$  и снова взяв модули от обеих частей, получим теперь  $|\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}^2|$ , что совпадает с (2.45). Нетрудно показать, что и, наоборот, из (2.45) вытекает (2.42). Таким образом, для линейной поляризации параметр  $\gamma$  принимает значение, равное единице. В случае круговой поляризации, как следует из (2.43),  $\gamma = 0$ . Наконец, в общем случае эллиптической поляризации, поскольку  $0 < \mathbf{b}^2 < \mathbf{a}^2$ , мы имеем, согласно (2.55),  $0 < \gamma < 1$ . Таким образом, получаем еще один критерий вида поляризации:

$$\begin{aligned} \gamma = 0 & \text{ — круговая поляризация,} \\ 0 < \gamma < 1 & \text{ — эллиптическая поляризация,} \\ \gamma = 1 & \text{ — линейная поляризация.} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Очевидно, необходимым и достаточным условием совпадения формы кривых поляризации для двух различных векторов  $\mathbf{E}$  является совпадение соответствующих отношений  $\gamma$ .

Общие соотношения (2.36) — (2.58), определяющие поляризацию, обладают тем преимуществом, что они, во-первых, ковариантны, т. е. не зависят от выбора системы координат, и, во-вторых, формулируются для переменного комплексного вектора  $\mathbf{E}(\mathbf{H})$  в целом, ввиду чего для их применения нет необходимости производить разделение вектора  $\mathbf{E}$  на амплитуду и фазовый множитель.

Согласно общим определениям § 27, очевидно, что характер поляризации света непосредственно связан с типом вектора  $\mathbf{E}$  в том смысле, что линейному, круговому либо эллиптическому вектору  $\mathbf{E}$  соответствует линейная, круговая либо эллиптическая поляризация плоской волны.

Эффективность изложенной выше ковариантной трактовки поляризации можно проиллюстрировать на примере задачи о разложении произвольно поляризованной волны на сумму двух волн, поляризованных по кругу в разных направлениях. Пусть задана произвольно поляризованная плоская гармоническая волна, электрическое поле которой  $\mathbf{E}$  (2.1) перпендикулярно к единичному вещественному вектору  $\mathbf{n}$ :  $\mathbf{E}\mathbf{n} = 0$ . Напишем тождество

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-, \quad \mathbf{E}_\pm = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \pm i[\mathbf{nE}]). \quad (2.59)$$

Очевидно,  $\mathbf{nE}_\pm = 0$  и

$$i[\mathbf{nE}_\pm] = \frac{i}{2} ([\mathbf{nE}] \pm i[\mathbf{n}[\mathbf{nE}]]) = \pm \frac{1}{2} (\mathbf{E} \pm i[\mathbf{nE}]) = \pm \mathbf{E}_\pm, \quad (2.60)$$

следовательно,  $E_{\pm}$  удовлетворяют условиям (2.52), характеризующим волны, поляризованные по кругу с противоположными направлениями обращения. Соотношение (2.59) показывает, что волна любой поляризации однозначно разлагается в сумму двух циркулярно поляризованных волн. Если исходная волна  $E$  линейно поляризована, то, согласно (2.42),  $[EE^*]=0$ . При этом

$$\begin{aligned} |E_{\pm}|^2 &= \frac{1}{4} (E \pm i[nE])(E^* \mp i[nE^*]) = \\ &= \frac{1}{4} (|E|^2 + [nE][nE^*]) = \frac{1}{2} |E|^2, \end{aligned} \quad (2.61)$$

т. е. (см. (2.49)) обе круговые волны имеют одинаковую амплитуду.

В заключение настоящего параграфа приведем также формулы, характеризующие поляризацию с помощью отношения комплексных амплитуд электрического (или магнитного) вектора поля волны. Пусть в фазовой плоскости волны выбрана декартова система координат  $XOY$ , причем направления осей  $X$  и  $Y$  образуют правый репер с вектором фазовой нормали  $n$ . Обозначим через  $E_x$  и  $E_y$  проекции комплексной векторной амплитуды  $E_0$  на оси  $X$  и  $Y$ . Это будут некоторые комплексные числа.

$$E_x = a_1 e^{i\delta_1}, \quad E_y = a_2 e^{i\delta_2}. \quad (2.62)$$

Рассмотрим отношение

$$\xi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{a_2}{a_1} e^{i\delta}, \quad \delta = \delta_2 - \delta_1, \quad E_y = \xi E_x. \quad (2.63)$$

Легко видеть, что комплексная величина  $\xi$  полностью определяет поляризацию вектора  $E$ . Например, в случае линейной поляризации, согласно (2.56), (2.57), имеем  $E_x^* = e^{i\alpha} E_x$ ,  $E_y^* = e^{i\alpha} E_y$ , следовательно,

$$\xi^* = \frac{E_y^*}{E_x^*} = \frac{E_y}{E_x} = \xi. \quad (2.64)$$

Таким образом, линейной поляризации отвечает вещественное значение  $\xi$ ; при этом  $\delta = k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Очевидно, и наоборот, если  $\xi = \xi^*$ , то вектор  $E$  линейно поляризован. Действительно, вычисляя при  $\xi = \xi^*$  выражения для  $|E|^2$  и  $|E^2|$ , находим:

$$|E|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 = (1 + \xi^2) |E_x|^2 = |E_x^2 + E_y^2| = |E^2|,$$

что, согласно (2.45), означает линейную поляризацию.



Заметим, что в этом случае угол  $\chi$ , образуемый направлением вектора  $\mathbf{E}$  с осью  $x$ , определяется равенством

$$\operatorname{tg} \chi = \xi. \quad (2.65)$$

В случае круговой поляризации должно быть (см. (2.43))

$$\mathbf{E}^2 = E_x^2 + E_y^2 = (1 + \xi^2) E_x^2 = 0,$$

следовательно,

$$\xi = \pm i. \quad (2.66)$$

Сравнивая с (2.63), видим, что при этом  $a_1 = a_2$  ( $|E_x| = |E_y|$ ) и разность фаз  $\delta = 2k\pi \pm \pi/2$ . Наоборот, из (2.66) следует круговая поляризация вектора  $\mathbf{E}$ . Ясно, что любые другие значения  $\xi$ , кроме (2.64), (2.66), будут определять эллиптическую поляризацию. Направление обхода эллипса, согласно (2.41), определяется знаком выражения  $\operatorname{in}[\mathbf{E}\mathbf{E}^*]$ . Поскольку при данном выборе осей координат  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ , то

$$\operatorname{in}[\mathbf{E}\mathbf{E}^*] = i[E_x E_y^* - E_y E_x^*] = i|E_x|^2(\xi^* - \xi) = 2|E_x|^2 \operatorname{Im} \xi. \quad (2.67)$$

Следовательно, направление обхода определяется знаком мнимой части отношения  $\xi$  таким образом, что  $\operatorname{Im} \xi > 0$  ( $< 0$ ) соответствует право (лево) поляризованный свет.

Задание  $\xi$  определяет не только характер поляризации (линейную, круговую, эллиптическую) и направление обхода, но и форму и ориентацию эллипса. Действительно, согласно (2.55), отношение полуосей характеризуется равенством

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{E}^2|}{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{E}^2|}. \quad (2.68)$$

Подставляя сюда

$$|\mathbf{E}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 = (1 + |\xi|^2) |E_x|^2, \quad (2.69)$$

$$|\mathbf{E}^2| = \sqrt{(E_0^2 + E_y^2)(E_x^{*2} + E_y^{*2})} = \sqrt{(1 + \xi^2)(1 + \xi^{*2})} |E_x|^2,$$

находим

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1 + |\xi|^2 - \sqrt{(1 + |\xi|^2)^2 + (\xi - \xi^*)^2}}{1 + |\xi|^2 + \sqrt{(1 + |\xi|^2)^2 + (\xi - \xi^*)^2}}. \quad (2.70)$$

Если  $\xi = -\xi^* = i\xi_0$ , то отсюда следует

$$b/a = |\xi_0| = |\xi|. \quad (2.71)$$

Обозначим через  $\chi$  угол, образуемый большой осью эллипса вектора  $\mathbf{E}$  с осью  $x$ . Чтобы найти его, определим компоненты вектора  $\mathbf{a}$  (2.36) по осям координат (см. (2.69), (2.70))

$$a_x = |E_x| \sqrt{1 + |\xi|^2} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (2.72)$$

$$a_y = |E_x| \sqrt{1 + |\xi|^2} \operatorname{Re} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

Очевидно,  $\operatorname{tg} \chi = a_y/a_x$ , однако удобнее вычислять тангенс удвоенного угла  $\chi$ :

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 - a_y^2} = \frac{\xi + \xi^*}{1 - |\xi|^2}. \quad (2.73)$$

Формулы (2.67), (2.70), (2.73) однозначно определяют форму, ориентацию и направление обращения для эллипса вектора  $\vec{E}$ .

Еще один способ описания поляризации (см. [4, 5]) получим, вводя комплексный угол  $\theta$  путем соотношения

$$\xi = \operatorname{tg} \theta. \quad (2.74)$$

Считая  $\theta = \alpha + i\beta$  и вспоминая, что  $\operatorname{tg} i\beta = i \operatorname{th} \beta$ , без труда найдем с помощью (2.64), (2.66), (2.67)

$$\text{в случае линейной поляризации: } \theta = \theta^*, \quad (2.75)$$

$$\text{в случае круговой поляризации: } \theta = \pm i\infty, \quad (2.76)$$

для правого (левого) направления обращения:

$$\operatorname{Im} \theta > 0 \quad (< 0). \quad (2.77)$$

Соответственно из (2.70), (2.73) имеем

$$\frac{b}{a} = |\operatorname{th}(\operatorname{Im} \theta)|, \quad (2.78)$$

$$\chi = \operatorname{Re} \theta. \quad (2.79)$$

В некоторых случаях последние формулы оказываются удобными для вычислений.

### § 3. ЧАСТИЧНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ. ПАРАМЕТРЫ СТОКСА И ТЕНЗОР ПУЧКА

При решении самых разнообразных задач современной оптики возникает необходимость изучать поляризационные свойства световых пучков. Последние могут быть поляризованы полностью (линейно, циркулярно или эллиптически), частично либо совсем не поляризованы (естественный свет). В процессе взаимодействия светового пучка со средой состояние поляризации его изменяется и метод описания свойств

пучка должен давать возможность наиболее просто учитывать эти изменения. Широкое применение для этих целей получил метод параметров Стокса [11—16]. Эти параметры могут быть введены следующим образом. Пусть мы имеем простую волну, т. е. плоскую монохроматическую однородную волну с определенной поляризацией в однородной изотропной среде. Выбирая в фазовой плоскости волны два произвольных взаимно перпендикулярных направления, находим проекции  $E_1$ ,  $E_2$  комплексного электрического вектора поля волны  $\mathbf{E}$  на эти направления и образуем следующие комбинации:

$$S_1 = |E_1|^2 + |E_2|^2, \quad S_2 = |E_1|^2 - |E_2|^2, \quad (3.1)$$

$$S_3 = 2 \operatorname{Re}(E_1 E_2^*), \quad S_4 = -2 \operatorname{Im}(E_1 E_2^*),$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Вещественные величины  $S_h$  называются параметрами Стокса рассматриваемой простой волны. Из (3.1) следует, что эти параметры являются линейными комбинациями величин  $E_a E_b^*$  ( $a, b = 1, 2$ ). Если световой пучок является результатом суперпозиции некоторого числа некогерентных простых волн с одним и тем же направлением волновой (фазовой) нормали  $\mathbf{n}$ , то для него параметры Стокса получаются путем суммирования выражений (3.1) по всем простым волнам, входящим в пучок. Этот случай рассматривается ниже (см. (3.4), (3.5)).

Из параметров Стокса лишь  $S_1$  и  $S_4$  имеют непосредственный физический смысл. А именно  $S_1$  с точностью до множителя  $1/8\pi$  равен средней плотности энергии волны или ее интенсивности. Что же касается  $S_4$ , то этот параметр пропорционален плотности потока момента количества движения (спинового момента) световой волны. Параметры  $S_2, S_3, S_4$  для простой плоской волны выражаются через величины, характеризующие ее поляризацию, а именно (см. [15])

$$S_2 = -S_1 \cos 2\beta \cos 2\chi,$$

$$S_3 = S_1 \cos 2\beta \sin 2\chi, \quad (3.2)$$

$$S_4 = S_1 \sin 2\beta.$$

Здесь  $\chi$  есть угол, образуемый большой осью эллипса поляризации волны с направлением оси  $x_1$ , а  $\operatorname{tg} \beta = b/a$ , где  $b$ —малая и  $a$ —большая полуоси эллипса поляризации. Очевидно,  $\operatorname{tg} \beta = 0$  или  $\operatorname{tg} \beta = \infty$  для линейной поляризации и  $\operatorname{tg} \beta > 0$  ( $\operatorname{tg} \beta < 0$ ) характеризует правовинтовую (левовинтовую) поляризацию, т. е. такую, когда направление вращения вектора  $\mathbf{E}$  образует правый (левый) винт с фазовой нормалью  $\mathbf{n}$ . Для простой волны, т. е.

монохроматического полностью поляризованного света, согласно (3.2), справедливо соотношение

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2. \quad (3.3)$$

Таким образом, в этом простейшем частном случае из четырех параметров Стокса только три независимы. Однако для частично поляризованного пучка соотношение (3.3) не имеет места. В общем случае, когда световой пучок представляет собой набор некогерентных волн с различными состояниями поляризации, параметры Стокса определяются соотношениями

$$S_k = \sum_s S_k^{(s)}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (3.4)$$

где

$$S_1^{(s)} = |E_1^{(s)}|^2 + |E_2^{(s)}|^2, \quad S_2^{(s)} = |E_1^{(s)}|^2 - |E_2^{(s)}|^2, \\ S_3^{(s)} = 2 \operatorname{Re} (E_1^{(s)} E_2^{(s)*}), \quad S_4^{(s)} = -2 \operatorname{Im} (E_1^{(s)} E_2^{(s)*}). \quad (3.5)$$

Здесь  $E_1^{(s)}$ ,  $E_2^{(s)}$  — компоненты электрического вектора отдельной  $s$ -й волны в фазовой плоскости. При этом (см. [14—16]) вместо (3.3) имеем

$$S_1^2 \geq S_2^2 + S_3^2 + S_4^2. \quad (3.6)$$

Знак равенства имеет место *только для полностью поляризованного пучка*. В общем же случае отношение

$$p = \frac{\sqrt{S_2^2 + S_3^2 + S_4^2}}{S_1} \leq 1 \quad (3.7)$$

определяет *степень поляризации пучка*.

Несмотря на весьма широкую распространенность параметров Стокса (3.5), их использование в некоторых отношениях связано с известными неудобствами.

Прежде всего соотношения (3.1) имеют смысл исключительно в том случае, когда система координат выбрана весьма частным образом, а именно так, что фазовая плоскость волны является координатной плоскостью  $x_1, x_2$ . Иными словами, формулы (3.1) не имеют ковариантного характера. Поэтому при каждом изменении направления волновой нормали пучка в результате взаимодействия со средой (отражение, преломление, рассеяние и т. п.) нужно учитывать соответствующее изменение координатной системы.

Величины  $S_k$  в своей совокупности не имеют определенного закона преобразования при общем повороте системы координат. При поворотах двумерной системы координат  $x_1, x_2$  в фазовой плоскости параметры  $S_1$  и  $S_4$  остаются инвариантами,

а  $S_2, S_3$  меняются как компоненты двумерного вектора (испытывающего поворот на удвоенный угол). По отношению же к ортогональным преобразованиям *трехмерного* пространства параметры  $S_k$  вообще не образуют замкнутой системы величин. Таким образом, параметры Стокса  $S_k$  представляют собой набор величин, обладающих неодинаковыми трансформационными свойствами, ввиду чего употребляемое иногда название *вектор-параметр Стокса* [16] можно рассматривать лишь как условное\*). С этим тесно связано то обстоятельство, что матрица преобразования параметров  $S_k$  при взаимодействии светового пучка с веществом в общем случае имеет излишне сложный и громоздкий вид [16] и ее получение связано с довольно трудоемкими вычислениями [17].

Указанные недостатки устраняются при переходе к ковариантному описанию светового пучка [18]. Как уже отмечалось, вся информация, которая содержится в параметрах  $S_k$ , происходит из четырех величин  $E_a E_b^*$ , которые могут быть объединены в  $2 \times 2$  матрицу

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} |E_1|^2 & E_1 E_2^* \\ E_2 E_1^* & |E_2|^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ab}^0 = E_a E_b^*. \quad (3.8)$$

Аналогичные квадратичные комплексные функции поля введены, например, в [19] для описания частично поляризованного света. Это вполне соответствует основным положениям теории, согласно которым наблюдаемые величины квадратично выражаются через функции поля. Поэтому матрица (3.8) является аналогом квантовомеханической матрицы плотности (см. [15]). Однако применимость матрицы (3.8) опять-таки ограничена такой системой координат, для которой волновая нормаль  $\mathbf{n}$  совпадает с осью  $x_3$  и поэтому все отмеченные выше недостатки остаются в силе и для нее. Описание поляризации с помощью матрицы (3.8) также не является ковариантным.

Рассмотрим общий случай некогерентного светового пучка. Последний, как уже упоминалось, представляет собой суперпозицию многих волн, имеющих случайные фазы и различную поляризацию, но обладающих одинаковой скоростью и направлением распространения. Оба последних условия объединяются в требование, чтобы все волны, входящие в пучок, имели один и тот же вектор рефракции  $\mathbf{m}$ . Только в этом случае пучок будет представлять собой устойчивое образование, сохраняющее свою целостность с течением времени (\*\*).

\*) Поэтому в [15] название «вектор» взято в кавычки.

\*\*) Здесь имеются в виду *однородные* волны (см. § 6).

Ковариантное описание свойств светового пучка достигается при использовании матрицы

$$\Phi = \sum_s \mathbf{E}^{(s)} \cdot \mathbf{E}^{(s)*}, \quad \mathbf{nE}^{(s)} = \mathbf{nE}^{(s)*} = 0, \quad (3.9)$$

где суммирование распространяется на все некогерентные простые волны  $\mathbf{E}^{(s)}$ , входящие в пучок. Существенно то, что диады, входящие в (3.9), задаются в полном трехмерном пространстве, поэтому определение (3.9) является полностью ковариантным, т. е. оно не изменяет своего вида при любом повороте декартовой системы координат. Разумеется, при выборе  $\mathbf{n} \parallel x_3$  мы снова вернемся к матрице типа (3.8). Однако в этом нет никакой нужды, так как при использовании прямых методов тензорного исчисления все расчеты с матрицей  $\Phi$  (3.9) будут более простыми, чем с матрицей (3.8), являясь одновременно более общими.

Поскольку диада  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$  есть тензор и сумма любого числа тензоров также является тензором, то величина  $\Phi$  представляет собой трехмерный ортогональный тензор. Мы будем называть его тензором *светового пучка*. Тот факт, что величина  $\Phi$  имеет строго тензорный характер, играет важную роль, так как из него сразу следует закон ее изменения при ортогональных преобразованиях  $O$  ( $O\bar{O} = 1$ ) системы координат (см. § 29)

$$\Phi' = O \Phi O^{-1}. \quad (3.10)$$

Тензор светового пучка обладает следующими общими свойствами. Поскольку  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)^+ = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ , то он является эрмитовым:

$$\Phi^+ = \tilde{\Phi}^* = \Phi, \quad \Phi^* = \tilde{\Phi}. \quad (3.11)$$

Из условий  $\mathbf{nE}^{(s)} = 0$  вытекает (см. (3.9))

$$\Phi \mathbf{n} = \mathbf{n} \Phi = 0. \quad (3.12)$$

Поэтому тензор пучка обязательно имеет собственное значение, равное нулю, которому соответствует собственный вектор  $\mathbf{n}$ . Отсюда следует также, что  $|\Phi| = 0$ , следовательно (см. § 26), тензор  $\Phi$  является *планальным* (§ 26), т. е. он всегда может быть представлен в виде суммы не более чем двух диад.

Рассмотрим квадратичную форму

$$F = \mathbf{u}^* \Phi \mathbf{u} = \sum_s |\mathbf{uE}^{(s)}|^2 \geq 0, \quad (3.13)$$

где  $\mathbf{u}$  — произвольный трехмерный вектор, в общем случае комплексный. Согласно (3.13), тензор пучка  $\Phi$  является неотрицательно определенным. Из (3.11) следует, что собственные значения  $\Phi$  вещественны, а из (3.13), что они положительны (или

равны нулю). Напомним (см. § 28), что из эрмитового характера  $\Phi$  следует также, что его собственные векторы  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ , относящиеся к различным собственным значениям  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , взаимно ортогональны в смысле  $\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^* = 0$ .

Покажем, что все параметры Стокса  $S_h$  (3.4), (3.5) полностью определяются заданием тензора  $\Phi$  (3.9). Разумеется, при этом должен быть задан и вектор фазовой нормали  $\mathbf{n}$ . Рассмотрим произвольные круговые векторы в фазовой плоскости (см. § 2)

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{e}^* = \mathbf{e}_- =$$
(3.14)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{n} = \mathbf{e}_2 \mathbf{n} = 0,$$
(3.15)

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^{*2} = \mathbf{e} \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{e} \mathbf{e}^* = 1, \quad [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] = i [\mathbf{e} \mathbf{e}^*] = \mathbf{n}.$$

С помощью векторов  $\mathbf{e}, \mathbf{e}^*$  и тензора  $\Phi$  можно построить следующие инварианты:

$$I_1 = \mathbf{e}^* \Phi \mathbf{e} = I_1^*, \quad I_2 = \mathbf{e} \Phi \mathbf{e}^* = I_2^*, \quad I_3 = \mathbf{e} \Phi \mathbf{e}. \quad (3.16)$$

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — орты осей координат  $x_1, x_2$  в фазовой плоскости. Тогда, очевидно,  $\mathbf{e}_1 \mathbf{E}^{(s)} = E_1^{(s)}$ ,  $\mathbf{e}_2 \mathbf{E}^{(s)} = E_2^{(s)}$ . С учетом этого из (3.16), (3.15), (3.9) получаем

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum_s [(|E_1^{(s)}|^2 + |E_2^{(s)}|^2) - i(E_2^{(s)} E_1^{(s)*} - E_1^{(s)} E_2^{(s)*})]$$

и аналогично

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_s [(|E^{(s)}|^2 + |E_2^{(s)}|^2) + i(E_2^{(s)} E_1^{(s)*} - E_1^{(s)} E_2^{(s)*})],$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \sum_s [(|E^{(s)}|^2 - |E_2^{(s)}|^2) + i(E_1^{(s)} E_2^{(s)*} + E_2^{(s)} E_1^{(s)*})].$$

Отсюда сразу следует (см. (3.4), (3.5))

$$S_1 = I_1 + I_2, \quad S_4 = I_1 - I_2, \quad S_2 = 2 \operatorname{Re} I_3,$$
(3.17)

$$S_3 = 2 \operatorname{Im} I_3, \quad S_2^2 + S_3^2 = 4 |I_3|^2.$$

Таким образом, знание  $\Phi$  и ориентации фазовой плоскости полностью определяет параметры Стокса. Следовательно, с точки зрения доставляемой информации параметры Стокса и тензор пучка равносильны. Однако, как будет видно из дальнейшего, применение тензора  $\Phi$  позволяет описывать свойства пучка гораздо более просто и естественно, чем использование параметров Стокса.

Как известно (§ 26), простейшим инвариантом тензора является его след. Для тензора  $\Phi$  он равен:

$$\Phi_t = \sum_s \mathbf{E}^{(s)} \mathbf{E}^{(s)*} = \sum_s |\mathbf{E}^{(s)}|^2 = \sum_s I_s = I, \quad (3.18)$$

где  $I$  — интенсивность пучка, т. е. средняя плотность энергии \*) ( $I_s$  — интенсивности отдельных некогерентных волн). Таким образом, важная характеристика пучка — интенсивность равна основному инварианту тензора светового пучка, его следу. Очевидно,  $I = I_1 + I_2 = S_1$  (см. (3.17)).

Рассмотрим теперь свойства тензора  $\Phi$  для частного случая пучка, состоящего из одной простой волны, т. е. полностью поляризованного. При этом он сводится к единственной диаде

$$\Phi = \mathbf{E} \mathbf{E}^*. \quad (3.19)$$

Каждый трехмерный тензор  $\gamma$  обладает тремя инвариантами  $\gamma_t$ ,  $\bar{\gamma}_t$ ,  $|\gamma|$  (см. § 26). Однако для тензора (3.19)  $\bar{\Phi} = 0$ ,  $|\Phi| = 0$ , поэтому он имеет лишь один инвариант

$$\Phi_t = |\mathbf{E}|^2 = I. \quad (3.20)$$

Легко видеть далее, что

$$\Phi^2 = \Phi_t \Phi. \quad (3.21)$$

Взяв след от этого равенства, получим

$$(\Phi^2)_t = (\Phi_t)^2. \quad (3.22)$$

Это соотношение можно рассматривать также как следствие условия  $\bar{\Phi}_t = 0$ , поскольку вообще (см. (26.78))

$$\bar{\Phi}_t = \frac{1}{2} [(\Phi_t)^2 - (\Phi^2)_t]. \quad (3.23)$$

Отметим, что инвариант тензора  $\Phi$

$$K = (\Phi^2)_t \quad (3.23a)$$

играет важную роль при описании световых пучков. Самый общий трехмерный эрмитов тензор  $\beta = \beta^+$  всегда может быть представлен в виде суммы трех диад (§ 28):

$$\beta = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^* + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^* + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3^*, \quad (3.24)$$

где  $\lambda_a$ ,  $\mathbf{u}_a$  — собственные значения и собственные векторы  $\Phi$ . Вследствие (3.12) всегда можно считать  $\lambda_3 = 0$ ,  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{n}$ , т. е.

\*) Согласно (1.44), (1.45), в изотропных средах  $\omega$  и  $S$  пропорциональны  $|\mathbf{E}|^2$ , т. е.  $I$ .



всегда справедливо следующее выражение для  $\Phi$ :

$$\Phi = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^*. \quad (3.25)$$

Характеристическое уравнение для такого тензора  $\Phi$  имеет вид (2.6.75)

$$|\lambda - \Phi| = \lambda^3 - \Phi_i \lambda^2 + \bar{\Phi}_i \lambda = 0. \quad (3.26)$$

При условии (3.22)  $\bar{\Phi}_i = 0$ , и мы получим

$$\lambda^2 (\lambda - \Phi_i) = 0, \quad (3.27)$$

т. е. два корня обращаются в нуль:  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_1 = \Phi_i$ . Выражение (3.25) для  $\Phi$  в данном случае должно принимать форму

$$\Phi = \Phi_i \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{u} = \sqrt{\Phi_i} \mathbf{u}_1. \quad (3.28)$$

Таким образом, если тензор пучка имеет вид (3.19), то, согласно § 26,

$$\bar{\Phi}_i = 0 \quad (3.29)$$

и, наоборот, из (3.29) необходимо следует (3.19). Тензор пучка принимает вид (3.19) и в том случае, если пучок содержит несколько простых волн при условии, что все они когерентны, так как в этом случае их электрические векторы складываются в один результирующий вектор

$$\sum_s \mathbf{E}^{(s)} = \mathbf{E},$$

из которого и образуется тензор пучка (3.19). В этом случае отдельные волны  $\mathbf{E}^{(s)}$  неразличимы и пучок будет *полностью поляризованным*.

Следовательно, равенство (3.22) или (3.29) является общим необходимым и достаточным инвариантным условием полной поляризации светового пучка.

Пусть это условие выполнено, тогда возникает вопрос о состоянии поляризации света. Для его решения можно использовать еще два инварианта, связанные с тензором  $\Phi$  (см. (2.41), (2.54)),

$$M = i(\mathbf{n} \times \Phi)_i = i\mathbf{n} [EE^*], \quad (3.30)$$

$$L = (\Phi\Phi^*)_i = (\Phi\bar{\Phi})_i = |E^2|^2. \quad (3.31)$$

Легко убедиться, что  $M = S_4$  (см. (3.1)). С помощью этих инвариантов состояние поляризации определяется очень просто (см. § 2). Линейная поляризация имеет место при  $M = 0$  (2.42), направление ее задается единичным вектором

$$\mathbf{p} = \Phi \mathbf{g} / \sqrt{(\Phi \mathbf{g})^2}, \quad (3.32)$$

где  $\mathbf{g}$  — совершенно произвольный вектор, непараллельный  $\mathbf{n}$  (он может быть даже комплексным). Круговой поляризации соответствует  $L=0$ , при этом  $M=\pm|E|^2$  (2.47) и знак  $+$  ( $-$ ) соответствует право (лево) поляризованному свету. Вместо  $L=0$  можно рассматривать, как условие круговой поляризации, равенство  $M=\pm I$ . В общем случае эллиптической поляризации  $M\neq 0$ ,  $L\neq 0$ , при этом полуоси эллипса определяются равенствами (см. (2.27))

$$a^2 = \frac{1}{2}(I + \sqrt{L}), \quad b^2 = \frac{1}{2}(I - \sqrt{L}), \quad (3.33)$$

а правое (левое) направление обращения характеризуется положительным (отрицательным) знаком инварианта  $M$ . Векторы полуосей эллипса поляризации  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  можно определить также с помощью «приведенного» вектора (2.38)

$$\mathbf{E}_r = \sqrt{\frac{I|\langle \Phi \mathbf{g} \rangle|^2}{|\langle \Phi \mathbf{g} \rangle|^2 (\Phi \mathbf{g})^2}} \Phi \mathbf{g} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \quad (\mathbf{a}\mathbf{b} = 0). \quad (3.34)$$

В качестве  $\mathbf{g}$  можно взять, например, вектор  $\mathbf{e}_1$  (3.15).

Таким образом, в случае полной поляризации тензор пучка  $\Phi$  через посредство своих инвариантов  $I$ ,  $M$ ,  $L$  дает полное описание состояния поляризации.

Обратимся теперь к противоположному крайнему случаю — естественному свету. При этом все направления, перпендикулярные к волновой нормали  $\mathbf{n}$ , будут равноправными, т. е. световой пучок будет обладать поперечной изотропией и  $\mathbf{n}$  будет для него являться осью симметрии бесконечного порядка. Любой тензор, описывающий поперечно-изотропную систему с осью  $\mathbf{n}$ , должен иметь вид  $a + b\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$ , где  $a$ ,  $b$  — скаляры, т. е. такой тензор должен быть одноосным (§ 26). Следовательно, для естественного света тензор пучка имеет форму  $\Phi = a + b\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$ . Но, согласно (3.12),  $\Phi\mathbf{n} = (a+b)\mathbf{n} = 0$ , т. е.  $b = -a$ . Поэтому для естественного света (см. § 26)

$$\Phi = a(1 - \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = -a\mathbf{n}\times^2. \quad (3.35)$$

Взяв след, получим  $\Phi_t = 2a$ ,  $a = \Phi_t/2 = I/2$ , поэтому

$$\Phi = \frac{1}{2} \Phi_t (1 - \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) = -\frac{1}{2} I \mathbf{n}\times^2. \quad (3.36)$$

Возводя в квадрат это тензорное равенство и учитывая, что  $\mathbf{n}\times^3 = -\mathbf{n}\times$ , получим

$$\Phi^2 = -\frac{1}{4} (\Phi_t)^2 \mathbf{n}\times^2 = \frac{1}{2} \Phi_t \Phi. \quad (3.37)$$

Взяв след от этого равенства, найдем

$$(\Phi^2)_t = \frac{1}{2} (\Phi_t)^2. \quad (3.38)$$

Поскольку это соотношение есть прямое следствие того факта, что свет является естественным, то оно является необходимым условием для данного свойства пучка. Однако (3.38) является также достаточным условием для того, чтобы свет был естественным, т. е. полностью деполаризованным. Действительно, из (3.25) находим

$$\Phi_t = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (\Phi^2)_t = \lambda_1^2 + \lambda_2^2. \quad (3.39)$$

При этом из (3.38) следует  $\lambda_1 = \lambda_2$ , поэтому

$$\Phi = \lambda_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^*) = \lambda_1 (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}), \quad (3.40)$$

поскольку  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$  равно единичному тензору (см. § 28). Таким образом, из (3.38) и общего условия (3.8) следует (3.36), т. е. соотношение (3.38) является общим *необходимым и достаточным* инвариантным условием для того, чтобы пучок состоял из естественного света. Заметим, что (3.25) при  $\lambda_1 = \lambda_2$  можно написать в виде  $(\mathbf{E}_1 = \sqrt{\lambda_1} \mathbf{u}_1, \mathbf{E}_2 = \sqrt{\lambda_2} \mathbf{u}_2)$

$$\Phi = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2^*, \quad |\mathbf{E}_1|^2 = |\mathbf{E}_2|^2, \quad \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* = 0, \quad (3.41)$$

т. е. рассматривать  $\Phi$  как результат суперпозиции двух полностью поляризованных простых волн с одинаковой интенсивностью ( $|\mathbf{E}_1|^2 = |\mathbf{E}_2|^2$ ) и взаимно ортогональными поляризациями ( $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* = 0$ ). Такой случай, следовательно, неотличим от естественного света [19].

В общем случае частично поляризованного света имеем, согласно (3.26),

$$\lambda (\lambda^2 - \Phi_t \lambda + \bar{\Phi}_t) = \lambda (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) = 0, \quad (3.42)$$

причем собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  равны (см. (3.26)):

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (\Phi_t + \sqrt{2(\Phi^2)_t - (\Phi_t)^2}), \quad (3.43)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} (\Phi_t - \sqrt{2(\Phi^2)_t - (\Phi_t)^2}).$$

Поскольку  $\lambda_1, \lambda_2$  вещественны как собственные значения эрмитовского тензора, то должно быть  $(\Phi^2)_t \geq \frac{1}{2} (\Phi_t)^2$ , а из неотри-

цательности  $\lambda_2$  (3.13) следует  $(\Phi_i)^2 \geq 2(\Phi^2)_i - (\Phi_i)^2$ , т. е.  $(\Phi^2)_i \leq (\Phi_i)^2$ . Итак, для частично поляризованного пучка

$$\frac{1}{2} (\Phi_i)^2 \leq (\Phi^2)_i \leq (\Phi_i)^2, \quad (3.44)$$

причем знаки равенства соответствуют предельным случаям естественного и полностью поляризованного света (см. (3.22), (3.38)).

Общее выражение (3.25) для  $\Phi$  можно написать в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \lambda_2 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^*) = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \lambda_2 (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}), \quad \lambda_1 > \lambda_2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Тем самым пучок, описываемый тензором  $\Phi$ , представляется в виде суперпозиции полностью поляризованной части  $\Phi^p = \lambda_p \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^*$ ,  $\lambda_p = \lambda_1 - \lambda_2$  и естественного света  $\Phi^n = -\lambda_n \mathbf{n} \times \mathbf{n}$ ,  $\lambda_n = \lambda_2$ . Относительный вклад той и другой части в полную интенсивность пучка характеризуется соответственно выражениями

$$p = \frac{(\Phi^p)_i}{\Phi_i} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\sqrt{2(\Phi^2)_i - (\Phi_i)^2}}{\Phi_i} = \frac{\sqrt{2K - I^2}}{I} \quad (3.46)$$

и

$$q = \frac{(\Phi^n)_i}{\Phi_i} = \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1 - \frac{\sqrt{2K - I^2}}{I} = 1 - p. \quad (3.47)$$

Величину  $p$ , очевидно, можно назвать *степенью поляризации* светового пучка, а  $q$  — *степенью деполаризации*. Согласно (3.25), самый общий (монохроматический) световой пучок может быть представлен в виде суперпозиции двух простых волн со взаимно ортогональными поляризациями. Поэтому степень поляризации (3.46) будет равна отношению разности интенсивностей этих двух волн к их сумме:

$$p = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (3.48)$$

Здесь мы считаем  $I_{\max} = \lambda_1$ ,  $I_{\min} = \lambda_2$ , как это следует из общих экстремальных свойств собственных значений эрмитовских матриц (§ 28). Из (3.46), (3.22) сразу следует, что для полностью поляризованной волны  $p = 1$ , а используя (3.38), находим, что для естественного света  $p = 0$ .

Фундаментальный физический смысл тензора светового пучка заключается в следующем. Пусть  $\mathbf{u}$  — произвольный нормированный ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = 1$ ) комплексный вектор в фазовой плоскости пучка ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ). Такой вектор мы можем рассматривать как символ идеального поляризационного прибора (анал-

лизатора), пропускающего (без поглощения) строго поляризованный свет, поляризация которого определяется вектром  $\mathbf{u}$ . Последнее следует понимать в смысле § 2, т. е. условие  $[\mathbf{u}\mathbf{u}^*] = 0$  означает линейный поляризатор (призма Николя),  $\mathbf{u}^2 = 0$  — круговой поляризатор и  $\mathbf{u} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$  — эллиптический поляризатор. Тогда эрмитовская квадратичная форма

$$F = \mathbf{u}^* \Phi \mathbf{u} = I_{\mathbf{u}} \quad (3.49)$$

дает интенсивность света, который пропускает поляризатор  $\mathbf{u}$  из пучка, описываемого тензором  $\Phi$ .

Если мы имеем дело с полностью поляризованным светом, то  $\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$  и

$$I_{\mathbf{u}} = |\mathbf{E}^* \mathbf{u}|^2. \quad (3.49a)$$

Это выражение определяет ту часть энергии произвольного, полностью поляризованного пучка света, которую пропускает любой заданный поляризатор  $\mathbf{u}$ . Отметим, что часто выражение (3.48) понимают в ином смысле, рассматривая  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  как соответствующие значения интенсивности, пропускаемой линейным поляризатором при всевозможных ориентациях последнего (см., например, [16, 20]), причем величину  $p$  (3.48) также называют степенью поляризации. При таком понимании для поляризованной по кругу волны мы имели бы  $p=0$ , т. е. то значение, которое характеризует естественный свет. Такую терминологию следует признать совершенно неудовлетворительной с принципиальной точки зрения, так как поляризованная по кругу простая волна отнюдь не в меньшей степени поляризована, чем волна с линейной поляризацией, для которой  $p=1$  (в смысле [16, 20]). Сверх того, есть существенные основания считать круговую поляризацию более основным видом поляризации, чем линейную, поскольку именно такой поляризации соответствуют собственные значения  $\pm 1$  оператора спина фотона (см., например, [21]). Правильнее определять эту характеристику поляризации как *степень линейности поляризации*. Обозначая ее  $p_l$ , можно дать ей следующее определение:

$$p_l = \frac{F_{\max}^l - F_{\min}^l}{F_{\max}^l + F_{\min}^l}, \quad (3.50)$$

где  $F^l$  находится из (3.49), причем  $\mathbf{u}$  является единичным вещественным вектором, принимающим всевозможные направления, перпендикулярные к  $\mathbf{n}$  (линейный анализатор).

Выше (см. (3.23a)) мы уже отмечали, что наряду с инвариантами  $I$ ,  $M$ ,  $L$  (3.20), (3.30), (3.31) важную роль играет также инвариант  $K = (\Phi^2)_t$ , как это следует из соотношений (3.44), (3.46), (3.47). Однако инварианты  $I$ ,  $K$ ,  $M$ ,  $L$  в самом общем случае не являются независимыми. Чтобы убедиться в

этом, разложим  $\Phi$  на сумму симметричной и антисимметричной частей:

$$\Phi = \Phi^0 + \Phi', \quad \Phi^0 = \frac{1}{2} (\Phi + \check{\Phi}), \quad \Phi' = \frac{1}{2} (\Phi - \check{\Phi}).$$

Поскольку  $\Phi$  — эрмитовский тензор, то  $\Phi^0$  будет вещественной, а  $\Phi'$  — чисто мнимой его частью, поэтому в равенстве (3.12)  $\Phi \mathbf{n} = \Phi^0 \mathbf{n} + \Phi' \mathbf{n} = 0$  каждое слагаемое по отдельности должно равняться нулю:  $\Phi^0 \mathbf{n} = \Phi' \mathbf{n} = 0$ . Как и всякий антисимметричный тензор,  $\Phi'$  должен быть дуален (§ 26) некоторому вектору, т. е. можно написать  $\Phi' = i \mathbf{v}^\times$ . Но в таком случае  $\Phi' \mathbf{n} = i [\mathbf{v} \mathbf{n}] = 0$ , т. е.  $\mathbf{v} = C \mathbf{n}$ . Таким образом, тензор пучка всегда может быть представлен в виде

$$\Phi = \Phi^0 + i C \mathbf{n}^\times, \quad \Phi^0 = \check{\Phi}^0 = \Phi^{0*}. \quad (3.51)$$

Отсюда имеем

$$M = i (\mathbf{n}^\times \Phi)_t = i (\mathbf{n}^\times \Phi^0)_t - C (\mathbf{n}^\times)_t^2 = 2C,$$

так как след от произведения симметричной и антисимметричной матриц  $(\mathbf{n}^\times \Phi^0)_t$  всегда равен нулю (§ 25). Таким образом, получаем еще одно выражение для тензора пучка

$$\Phi = \Phi^0 + i \frac{M}{2} \mathbf{n}^\times. \quad (3.52)$$

Легко видеть, что

$$K = (\Phi^2)_t = (\Phi^{02})_t + (\Phi'^2)_t, \quad (3.53)$$

$$L = (\Phi \check{\Phi})_t = (\Phi^{02})_t - (\Phi'^2)_t,$$

поэтому  $K$ ,  $L$  и  $M$  связаны соотношением

$$K - L = 2 (\Phi'^2)_t = 4C^2 = M^2. \quad (3.54)$$

К этому общему соотношению в частных случаях полностью поляризованного или естественного света, согласно (3.22), (3.38), добавляются условия  $K = I^2$  или  $K = \frac{1}{2} I^2$ .

Сопоставляя инварианты тензора  $\Phi$  с параметрами Стокса, нетрудно установить соотношения

$$K = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2), \quad L = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - S_4^2), \quad (3.55)$$

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2K - M^2 = 2L + M^2 = K + L.$$

С учетом того, что  $S_4 = M$ , эти три соотношения равносильны между собой. Докажем последнее из них. Поскольку  $S_1 = \Phi_t = I$ , то, используя (3.17), (3.16), (3.53), ему можно придать вид

$$(\Phi_t)^2 + 4 |\mathbf{e} \Phi \mathbf{e}|^2 = (\Phi^2)_t + (\Phi \Phi^*)_t. \quad (3.56)$$

Для доказательства этого равенства учтем (см. § 26), что  $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* + \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \Phi(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* + \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e})$  и аналогично  $\Phi^* = \Phi^*(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* + \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e})$ . С помощью этих соотношений и условия эрмитовости:  $\Phi^* = \tilde{\Phi}$ ,  $\mathbf{a}\Phi^*\mathbf{b} = \mathbf{a}\tilde{\Phi}\mathbf{b} = \mathbf{b}\Phi\mathbf{a}$  нетрудно показать, что

$$(\Phi\Phi^*)_i = 2|\mathbf{e}\Phi\mathbf{e}|^2 + 2\mathbf{e}\Phi\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}^*\Phi\mathbf{e}.$$

Теперь условие (3.56) сводится к следующему (см. § 26):

$$\begin{aligned} (\Phi_i)^2 - (\Phi^2)_i &= 2(\mathbf{e}\Phi\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}^*\Phi\mathbf{e} - \mathbf{e}\Phi\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*\Phi\mathbf{e}^*) = \\ &= 2[\mathbf{e}\mathbf{e}^*][\Phi\mathbf{e}^*, \Phi\mathbf{e}] = 2[\mathbf{e}\mathbf{e}^*]\tilde{\Phi}[\mathbf{e}^*\mathbf{e}]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Но, согласно (3.15),  $[\mathbf{e}\mathbf{e}^*] = -i\mathbf{n}$  и  $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_i + \Phi^2 - \Phi_i\Phi$  (см. § 26). Поскольку  $\Phi\mathbf{n} = \tilde{\Phi}\mathbf{n} = 0$  (3.12), то  $[\mathbf{e}\mathbf{e}^*]\tilde{\Phi}[\mathbf{e}^*\mathbf{e}] = \tilde{\Phi}_i[\mathbf{e}\mathbf{e}^*][\mathbf{e}^*\mathbf{e}] = \tilde{\Phi}_i$ , что (см. (3.23)) доказывает равенство (3.57) и, следовательно, (3.56).

Приведем сводку различных выражений для тензора пучка, полученных выше.

I. Исходное определение тензора  $\Phi$  (3.9), (3.11), (3.12):

$$\Phi = \sum_s \mathbf{E}^{(s)} \cdot \mathbf{E}^{(s)*} = \Phi^+, \quad \Phi\mathbf{n} = \Phi^*\mathbf{n} = \tilde{\Phi}\mathbf{n} = 0.$$

Основные инварианты:

$$I = \Phi_i, \quad M = i(\mathbf{n} \times \Phi)_i, \quad K = (\Phi^2)_i.$$

Условия:

$$\text{полной поляризации } K = I^2,$$

$$\text{естественного света } K = \frac{1}{2}I^2.$$

Степень поляризации:  $\rho = \sqrt{2K - I^2}/I$ .

II.  $\Phi = \lambda_1\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \lambda_2\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^*$  (см. (3.25)),

$$\mathbf{u}_a^* \cdot \mathbf{u}_b = \delta_{ab}, \quad \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0;$$

$$I = \lambda_1 + \lambda_2, \quad M = i(\lambda_1\mathbf{n}[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^*] + \lambda_2\mathbf{n}[\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^*]), \quad K = \lambda_1^2 + \lambda_2^2.$$

Условия:

$$\text{полной поляризации } \lambda_2 = 0,$$

$$\text{естественного света } \lambda_1 = \lambda_2.$$

Степень поляризации:  $\rho = (\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

Смысл этого представления заключается в том, что всякий монохроматический пучок света можно представить как результат суперпозиции двух полностью поляризованных взаимно ортогонально (в общем случае эллиптически) пучков,

причем  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  характеризуют поляризации, а  $\lambda_1, \lambda_2$  — соответственно интенсивности слагаемых пучков. Это представление единственно, причем  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  являются собственными векторами тензора  $\Phi$ , а физически они определяют те поляризационные приборы, при прохождении через которые пучок дает максимальную ( $\lambda_1$ ) и минимальную ( $\lambda_2$ ) интенсивности.

III.  $\Phi = \lambda_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* - \lambda_n \mathbf{n} \times \mathbf{n}^2$  (см. (3.45)),

$$\mathbf{u} \mathbf{u}^* = 1, \quad \mathbf{u} \mathbf{n} = 0, \quad \lambda_p \geq 0, \quad \lambda_n \geq 0,$$

$$I = \lambda_p + 2\lambda_n, \quad M = i\lambda_p \mathbf{n} [\mathbf{u} \mathbf{u}^*], \quad K = \lambda_p^2 + 2\lambda_n (\lambda_n + \lambda_p).$$

Условия:

полной поляризации  $\lambda_n = 0$ ,

естественного света  $\lambda_p = 0$ .

Степень поляризации:  $p = \lambda_p / (\lambda_p + 2\lambda_n)$ .

Это представление соответствует разложению пучка на полностью поляризованную часть ( $\lambda_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*$ ) и естественный свет ( $-\lambda_n \mathbf{n} \times \mathbf{n}^2$ ). Такое разложение также единственно. Вектор  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  (см. представление II) определяется с помощью поляризационного прибора, пропускающего максимальную интенсивность, а  $\lambda_n$  есть минимальная интенсивность, пропускаемая прибором. Параметры  $\lambda_p, \lambda_n$  связаны с  $\lambda_1, \lambda_2$  соотношениями (3.45):

$$\lambda_p = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \lambda_n = \lambda_2.$$

IV.  $\Phi = \Phi^0 + \frac{i}{2} M \mathbf{n} \times \mathbf{n}$  (см. (3.52)),

$$\Phi^0 = \Phi^{0*} = \tilde{\Phi}^0 = \lambda'_1 \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}'_1 + \lambda'_2 \mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}'_2,$$

$$\mathbf{u}'_a \mathbf{u}'_a = \mathbf{u}'_a, \quad \mathbf{u}'_a \mathbf{u}'_b = \delta_{ab}, \quad \mathbf{u}'_a \mathbf{n} = 0, \quad \lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq 0;$$

$$I = \Phi_t^0 = \lambda'_1 + \lambda'_2, \quad K = (\Phi^{02})_t + \frac{1}{2} M^2 = \lambda'^2_1 + \lambda'^2_2 + \frac{1}{2} M^2.$$

Условия:

полной поляризации  $(\Phi_t^0)^2 - (\Phi^{02})_t = M^2/2 = 2\lambda'_1 \lambda'_2$ ,

естественного света  $2(\Phi^{02})_t - (\Phi_t^0)^2 + M^2 = 0$ .

Степень поляризации:  $p = \sqrt{2(\Phi^{02})_t - (\Phi_t^0)^2 + M^2} / \Phi_t^0$ .

Это представление, также единственное, разделяет симметричную и антисимметричную (вещественную и мнимую) части тензора  $\Phi$ . Физически это соответствует выделению в явном виде члена, определяющего момент количества движения пучка  $M$ .



При рассмотрении различных свойств пучка будет удобным то или другое из приведенных выражений. Например, исходя из формы IV, мы заключаем, что для эллиптически поляризованного света тензор  $\Phi$  не может быть симметричным, так как тогда  $M$  равнялось бы нулю. Следовательно, симметричный тензор  $\Phi$  может представлять лишь смесь линейно поляризованного света с естественным.

Из представления IV ясно также, что, используя только линейный анализатор, нельзя полностью определить свойства пучка в общем случае. Действительно, для такого анализатора, характеризуемого вектором  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{u}^2 = 1$ , пропускаемая интенсивность  $\mathbf{u}\Phi\mathbf{u} = \mathbf{u}\Phi^0\mathbf{u}$  при любых ориентациях вектора  $\mathbf{u}$  будет определяться только симметричной частью тензора пучка (поскольку  $\mathbf{u}\mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0$ ) и никаких сведений об инварианте  $M$  мы не получим. Если же присоединить сюда измерения интенсивности, пропущенной круговым анализатором (пластинкой в четверть волны), то можно с помощью трех измерений полностью определить тензор пучка  $\Phi$ . При решении этой задачи удобнее всего исходить из представления IV. Определив положения линейного анализатора (вектор  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}\mathbf{n} = 0$ ), соответствующие максимуму и минимуму пропускаемой интенсивности  $\mathbf{u}\Phi\mathbf{u}$ , найдем  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  и  $\lambda'_1 = I_{\max}$ ,  $\lambda'_2 = I_{\min}$ . После этого применяем круговой анализатор, характеризуемый круговым вектором  $\mathbf{u}$  (§ 2), который обладает свойствами

$$\mathbf{u}^2 = 0, \quad |\mathbf{u}|^2 = 1, \quad \mathbf{u} = \pm i[\mathbf{n}\mathbf{u}]. \quad (3.58)$$

Интенсивность света, пропускаемого в этом случае, определяется формулой (3.49):

$$I_0 = \mathbf{u}^*\Phi\mathbf{u} = \mathbf{u}^*\Phi^0\mathbf{u} + \frac{i}{2} M\mathbf{u}^*[\mathbf{n}\mathbf{u}] = \mathbf{u}^*\Phi^0\mathbf{u} \pm \frac{1}{2} M. \quad (3.59)$$

Вектор  $\mathbf{u}$  можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}'_1 \pm i\mathbf{u}'_2),$$

поэтому (см. представление IV)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*\Phi^0\mathbf{u} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}'_1 \mp i\mathbf{u}'_2)(\lambda'_1\mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}'_1 + \lambda'_2\mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}'_2)(\mathbf{u}'_1 \pm i\mathbf{u}'_2) = \\ &= \frac{1}{2} (\lambda'_1 + \lambda'_2) = \frac{1}{2} I. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Поскольку  $I$  определяется прямым измерением полной интенсивности пучка, то из (3.59) сразу находим  $M$ :

$$M = \pm (2I_0 - I). \quad (3.61)$$

Знак, согласно сказанному выше, связан с направлением обращения в световом пучке. Чтобы представить  $\Phi$  в виде II или III, достаточно найти собственные векторы и собственные значения тензора IV, после чего нетрудно перейти к другим формам.

Таким образом, тензор светового пучка  $\Phi$ , во-первых, полностью описывает наблюдаемые свойства пучка и, во-вторых, входящие в него величины и, следовательно, весь тензор могут быть определены путем несложных экспериментов. Фундаментальный характер тензора  $\Phi$  очевиден.

Однако значение тензора пучка не ограничивается тем, что он полностью описывает свойства заданного светового пучка. С его помощью можно также описать изменения, которые претерпевает световой пучок в результате взаимодействия с веществом (отражение, преломление, рассеяние и т. п.). При этом использование  $\Phi$  значительно быстрее и проще приводит к цели, чем рассмотрение параметров Стокса.

Вследствие линейности и однородности уравнений электродинамики и граничных условий электрическое поле световой волны в результате взаимодействия со средой испытывает линейное преобразование<sup>\*</sup>). Предположим, что матрица  $\gamma$  этого преобразования не зависит от состояния поляризации волны. Тогда для всех простых некогерентных волн  $E^{(s)}$ , входящих в пучок, будем иметь

$$E'^{(s)} = \gamma E^{(s)}, \quad E'^{(s)*} = \gamma^* E^{(s)*} = E^{(s)*} \gamma^+ \quad (3.62)$$

и тензор  $\Phi$  изменится следующим образом:

$$\Phi' = \sum_s E'^{(s)} \cdot E'^{(s)*} = \sum_s \gamma E^{(s)} \cdot E^{(s)*} \gamma^+ = \gamma \Phi \gamma^+. \quad (3.63)$$

Полученная общая формула преобразования тензора пучка при взаимодействии со средой несравненно проще, чем громоздкая общая матрица преобразования параметров Стокса [14—16].

В качестве иллюстрации применения соотношения (3.63) найдем преобразование светового пучка элементарным объемом любой среды с хаотическим (изотропным) расположением молекул [22].

Излучение, падающее на среду, возбуждает в молекулах последней дипольные моменты

$$p = \beta E, \quad (3.64)$$

где  $\beta$  — тензор, относительно которого не будем пока делать никаких ограничивающих предположений. Таким образом, мы предполагаем лишь то общее свойство, что вектор дипольного

\*: Мы отвлекаемся здесь от нелинейных оптических явлений.

момента молекулы является линейной однородной функцией вектора возбуждающего электрического поля. Поле  $E'$  излучения диполя по направлению  $n'$ , как известно [19], выражается следующим образом ( $r$  — расстояние от диполя (3.64) до точки наблюдения):

$$E' = f [n' [n'p]] = fn' \times^2 p, \quad f = \omega^2/c^2 r^2. \quad (3.65)$$

Следовательно, согласно (3.62), (3.64), (3.65),

$$E' = \gamma E, \quad \gamma = fn' \times^2 \beta \quad (3.66)$$

и, согласно (3.63), тензор пучка вторичного излучения выражается следующим образом:

$$\Phi' = \Sigma E' \cdot E'^* = \gamma \Phi \gamma^+ = N f^2 n' \times^2 \overline{\beta \Phi \beta^+} n' \times^2, \quad (3.67)$$

где горизонтальная квадратная скобка означает усреднение по молекулам. Здесь сумма распространяется на все  $N$  молекул в единице объема среды и может быть заменена произведением  $N$  на среднее по молекулам:

$$\Sigma \beta_{ik} \beta_{lm}^+ = N \overline{\beta_{ik} \beta_{lm}^+}. \quad (3.68)$$

Таким образом, задача сводится к усреднению произведений компонент тензоров  $\beta$  и  $\beta^+$  по всевозможным ориентациям молекул.

Рассмотрим в общем виде вопрос об усреднении по всем направлениям компонент двух тензоров  $\beta$ ,  $\beta'$  и их произведений. Среднее от тензора  $\overline{\beta}$  также будет тензором, но таким, для которого все направления равноправны, т. е. это среднее должно быть пропорционально единичному тензору:  $\overline{\beta_{ik}} = C \delta_{ik}$ . Поскольку след тензора не меняется при поворотах осей координат (и соответственно молекул), т. е. является инвариантом, то  $\overline{\beta_{ii}} = \overline{\beta_{tt}} = 3C = \beta_{tt}$ , поэтому

$$\overline{\beta_{ik}} = (\overline{\beta})_{ik} = \frac{1}{3} \beta_{tt} \delta_{ik}. \quad (3.69)$$

Из тех же соображений следует, что  $\overline{\beta_{ik} \beta'_{lm}}$  также должно выражаться через компоненты единичного тензора:

$$\overline{\beta_{ik} \beta'_{lm}} = a \delta_{ik} \delta_{lm} + b \delta_{il} \delta_{km} + c \delta_{im} \delta_{kl}. \quad (3.70)$$

Свертывая по  $i$ ,  $k$ , затем по  $k$ ,  $m$  и, наконец, по  $k$ ,  $l$ , получаем отсюда с учетом (3.69) соотношения

$$\overline{\beta_{ii} \beta'_{lm}} = \overline{\beta_{tt} \beta'_{lm}} = \frac{1}{3} \beta_{tt} \beta'_{tt} \delta_{lm} = (3a + b + c) \delta_{lm},$$

$$\overline{\beta_{ik}\beta'_{ik}} = \overline{(\beta\beta')_{il}} = \frac{1}{3}(\overline{\beta\beta'})_t \delta_{il} = (a + 3b + c) \delta_{il}, \quad (3.71)$$

$$\overline{\beta_{ik}\beta'_{km}} = \overline{(\beta\beta')_{im}} = \frac{1}{3}(\overline{\beta\beta'})_t \delta_{im} = (a + b + 3c) \delta_{im}.$$

Сокращая на  $\delta_{ik}$  и складывая эти уравнения, находим  $a + b + c = \frac{1}{15}(\beta_i\beta'_i + (\overline{\beta\beta'})_t + (\beta\beta')_t)$ , после чего, вычитая это равенство из уравнений (3.71), находим

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{30} [4\beta_i\beta'_i - (\overline{\beta\beta'})_t - (\beta\beta')_t], \\ b &= \frac{1}{30} [4(\overline{\beta\beta'})_t - \beta_i\beta'_i - (\beta\beta')_t], \\ c &= \frac{1}{30} [4(\beta\beta')_t - \beta_i\beta'_i - (\overline{\beta\beta'})_t]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Подставив (3.70) в (3.67), получим

$$\Phi' = Nf^2 \mathbf{n}' \times \mathbf{x}^2 (a\Phi + b\tilde{\Phi} + c\Phi_t) \mathbf{n}' \times \mathbf{x}^2; \quad (3.73)$$

при этом в формулах (3.71) следует положить  $\beta' = \beta^+$ .

Простые формулы (3.72), (3.73) обладают чрезвычайно большой универсальностью. В них содержатся результаты, относящиеся к рэлеевскому рассеянию на изотропных и анизотропных молекулах [10, 23, 24], к преобразованию света люминесцирующим объемом с линейными, плоскими и пространственными осцилляторами [17, 20, 25] и т. д. Все эти случаи получаются, если тензору  $\beta$  придать ту или иную частную форму.

Так, рассеянию на изотропных молекулах соответствует  $\beta = \beta^+ = \chi$ , где  $\chi$  — скалярная поляризуемость молекулы. При этом из (3.71) следует  $a = \chi^2$ ,  $b = c = 0$ , а из (3.72) —

$$\Phi' = Nf^2 \chi^2 \mathbf{n}' \times \mathbf{x}^2 \Phi \mathbf{n}' \times \mathbf{x}^2. \quad (3.74)$$

Поскольку  $n^2 = \epsilon = 1 + 4\pi N\chi$ , то  $N\chi^2 = \frac{1}{N} \left( \frac{n^2 - 1}{4\pi} \right)^2$  и (3.74)

приводит к известной формуле Рэля. Действительно, пусть падающий свет линейно поляризован, тогда  $\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$  и, согласно (3.18), интенсивность света, рассеянного в направлении  $\mathbf{n}'$  (см. [10, 23, 24]),

$$I' = \Phi'_t = \frac{1}{N} \left( \frac{(n^2 - 1)\omega^2}{4\pi c^2 r} \right)^2 [\mathbf{n}' \cdot [\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}]]^2 = \frac{1}{N} \left( \frac{(n^2 - 1)\omega^2}{4\pi c^2 r} \right)^2 I \sin^2\theta. \quad (3.75)$$

Здесь  $I = E^2$  — интенсивность падающего света;  $\theta$  — угол ( $n', E$ ).

Если рассеяние происходит на анизотропных молекулах, то следует положить  $\beta = \beta^* = \check{\beta} = \beta^+ = \beta'$ . При этом из (3.72) следует

$$a = \frac{1}{15} [2(\beta_t)^2 - (\beta^2)_t], \quad b = c = \frac{1}{30} [3(\beta^2)_t - (\beta_t)^2] \quad (3.76)$$

и формула (3.73) приводит к тем же результатам, которые для соответствующего случая получены в [10, 23, 24].

Ряд других примеров применения тензора пучка (3.9) приведен в [22].

#### § 4. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ПРОЗРАЧНЫХ НЕМАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ \*

В прозрачных немагнитных кристаллах  $\mu = 1$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{I} = 0$  и уравнения Максвелла (1.7) для плоских гармонических волн принимают вид (см. (1.24))

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -[\mathbf{mH}] = -\mathbf{m} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = -\epsilon^{-1} \mathbf{m} \times \mathbf{H}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{mE}] = \mathbf{m} \times \mathbf{E}. \quad (4.2)$$

Исключая  $\mathbf{H}$  или  $\mathbf{E}$ , получаем

$$(1 + \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times^2) \mathbf{E} = 0, \quad (4.3)$$

$$(1 + \mathbf{m} \times \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = 0. \quad (4.4)$$

Нетривиальные решения этих уравнений существуют соответственно при условиях

$$|1 + \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times^2| = 0, \quad (4.5)$$

$$|1 + \mathbf{m} \times \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times| = 0. \quad (4.6)$$

Используя (26.29а) при  $\lambda = 1$  и учитывая, что  $|\mathbf{m} \times| = 0$ , получаем для первого из этих детерминантов

$$\begin{aligned} & 1 + (\epsilon^{-1} \mathbf{m} \times^2)_t + \overline{(\epsilon^{-1} \mathbf{m} \times^2)}_t = \\ & = 1 + (\epsilon^{-1} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - m^2))_t + \left( \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \cdot \frac{m\epsilon}{|\epsilon|} \right)_t = \\ & = 1 + m\epsilon^{-1} m - m^2 (\epsilon^{-1})_t + \frac{1}{|\epsilon|} m^2 m \epsilon m = 0. \end{aligned} \quad (4.6a)$$

Мы применили здесь соотношения, приведенные в § 26. Вследствие известных свойств (25.50) следов от матриц  $(\epsilon^{-1} \mathbf{m} \times^2)_t =$

\*) Излагаемая здесь ковариантная теория была развита в [4, 5, 26].

$= (\mathbf{m}^\times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{m}^\times)_t$  и  $\overline{(\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{m}^\times)_t} = \overline{(\mathbf{m}^\times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{m}^\times)_t}$ , следовательно, оба детерминанта (4.5), (4.6) совпадают. Таким образом, поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , удовлетворяющие уравнениям Максвелла (4.1), (4.2), существуют при условии, если удовлетворяется уравнение

$$\mathbf{m}^2 \mathbf{m} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} + \mathbf{m} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) \mathbf{m} + |\boldsymbol{\varepsilon}| = 0. \quad (4.7)$$

Это есть основное уравнение кристаллооптики, называемое уравнением нормалей Френеля\*). Учитывая, что  $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$ , его можно написать в форме

$$A n^4 + B n^2 + |\boldsymbol{\varepsilon}| = 0, \quad (4.8)$$

где

$$A = n \boldsymbol{\varepsilon} n, \quad B = (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} n^\times)_t = n (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) n. \quad (4.9)$$

Из (4.8) ясно, что при заданном направлении фазовой нормали  $\mathbf{n}$  мы имеем в общем случае два различных значения для показателя преломления  $n$ , т. е. каждому  $\mathbf{n}$  соответствуют две волны с различными фазовыми скоростями  $v = c/n$ . Такие две волны мы будем называть *изонормальными*.

Уравнение (4.4) можно написать в виде

$$\mathbf{n}^\times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n}^\times \mathbf{H} = \lambda \mathbf{H}, \quad \lambda = -1/n^2. \quad (4.10)$$

Отсюда следует, что  $\lambda$  является собственным значением матрицы  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n}^\times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n}^\times$ , а  $\mathbf{H}$  — соответствующим собственным вектором. Двум корням уравнения (4.8) соответствуют два уравнения (4.10):

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}_1 = \lambda_1 \mathbf{H}_1, \quad \boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}_2 = \lambda_2 \mathbf{H}_2. \quad (4.11)$$

Умножая первое из них на  $\mathbf{H}_2$ , а второе на  $\mathbf{H}_1$  и вычитая, получаем, учитывая симметрию матрицы  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 = 0$ . Следовательно, если показатели преломления двух изонормальных волн различны ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ), то соответствующие им векторы магнитного поля волны в любой момент времени и в любой точке удовлетворяют условию

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 = 0 \quad (n_1 \neq n_2). \quad (4.12)$$

Из уравнений Максвелла (4.1), (4.2) следует далее, что векторы магнитного поля и электрической индукции плоской волны *транссверсальны*:

$$\mathbf{n} \mathbf{D} = \mathbf{n} \mathbf{H} = 0. \quad (4.13)$$

Для электрического поля волны это свойство в общем случае не имеет места:  $\mathbf{n} \mathbf{E} \neq 0$ . Однако из  $\mathbf{n} \mathbf{D} = n \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} = 0$  следует, что

\*) В инвариантной форме (4.7) уравнение нормалей было получено в [4] (см. также [5]).

электрическое поле трансверсально по отношению к вектору  $\varepsilon \mathbf{n}$ .

Написав уравнения (4.1) для двух изонормальных волн

$$\mathbf{D}_1 = -n_1 [\mathbf{n} \mathbf{H}_1], \quad \mathbf{D}_2 = -n_2 [\mathbf{n} \mathbf{H}_2] \quad (4.14)$$

и скалярно перемножив их, получим вследствие (4.12), (4.13) соотношение

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 = 0 \quad (n \neq n_2). \quad (4.15)$$

Из (4.12) — (4.14) следует, что  $\mathbf{n} \perp \mathbf{D}_1 \perp \mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{n} \perp \mathbf{H}_2 \perp \mathbf{H}_1$ , поэтому  $\mathbf{D}_1 \parallel \mathbf{H}_2$  и аналогично  $\mathbf{D}_2 \parallel \mathbf{H}_1$ .

Для электрических полей  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  двух изонормальных волн соотношения вида (4.12), (4.15), вообще говоря, не имеют места. Однако, согласно (4.2), можно написать  $\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_1 = \mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2 = 0$ . Поскольку  $\mathbf{D}_1 \parallel \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_2 \parallel \mathbf{D}_1$ , то отсюда следует

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_2 \mathbf{D}_1 = \mathbf{E}_1 \varepsilon \mathbf{E}_2 = \mathbf{D}_1 \varepsilon^{-1} \mathbf{D}_2 = 0. \quad (4.16)$$

Рассмотрим векторное произведение уравнения (4.1) на комплексно сопряженное к нему и аналогично поступим с уравнением (4.2). Получим

$$[\mathbf{D} \mathbf{D}^*] = [\varepsilon \mathbf{E}, \varepsilon \mathbf{E}^*] = [[\mathbf{m} \mathbf{H}] [\mathbf{m} \mathbf{H}^*]] = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} [\mathbf{H} \mathbf{H}^*], \quad (4.17)$$

$$[\mathbf{H} \mathbf{H}^*] = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} [\mathbf{E} \mathbf{E}^*]. \quad (4.18)$$

Поскольку (см. (26.55))

$$[\mathbf{D} \mathbf{D}^*] = \bar{\varepsilon} [\mathbf{E} \mathbf{E}^*], \quad (4.19)$$

то получим два уравнения для векторов  $[\mathbf{E} \mathbf{E}^*]$  и  $[\mathbf{H} \mathbf{H}^*]$ . Исключив из них  $[\mathbf{H} \mathbf{H}^*]$ , найдем

$$(\bar{\varepsilon} - n^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}) [\mathbf{E} \mathbf{E}^*] = 0.$$

Отсюда следует, что  $[\mathbf{E} \mathbf{E}^*]$  отлично от нуля лишь при условии  $|\bar{\varepsilon} - n^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}| = 0$ . Вычислив этот детерминант по формуле (26.89) с учетом (26.22), (26.24), получим уравнение

$$\mathbf{m}^2 \mathbf{m} \varepsilon \mathbf{m} - |\varepsilon| = 0. \quad (4.20)$$

Из соотношений (4.17) — (4.19) ясно, что равенство нулю любого из векторов  $[\mathbf{E} \mathbf{E}^*], [\mathbf{H} \mathbf{H}^*], [\mathbf{D} \mathbf{D}^*]$  влечет за собой равенство нулю двух других. Таким образом, эти векторы все одновременно равны нулю либо отличны от нуля. При условии (4.20) из уравнения нормалей (4.7) следует

$$n^2 \mathbf{n} (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}) \mathbf{n} = 2 |\varepsilon|.$$

Возведем это равенство в квадрат и подставим из (4.20)  $n^4 = |\epsilon|/n\epsilon n$ ; получим

$$(n(\bar{\epsilon}_t - \bar{\epsilon})n)^2 = 4|\epsilon|n\epsilon n, \quad (4.21)$$

но это есть не что иное, как условие равенства нулю дискриминанта уравнения (4.8):  $B^2 - 4A|\epsilon| = 0$ . Следовательно, уравнение (4.20) есть условие равенства корней уравнения нормалей (4.7) или равенства фазовых скоростей обеих изонормальных волн.

Вспомним, что, согласно § 2, равенство нулю выражений  $[EE^*]$ ,  $[DD^*]$ ,  $[HH^*]$  означает линейную поляризацию векторов  $E$ ,  $D$ ,  $H$ . Полученный выше результат показывает, что все векторы поля плоской гармонической волны в прозрачном кристалле  $E$ ,  $D$ ,  $H$  линейно поляризованы во всех случаях (т. е. для всех направлений фазовой нормали  $n$ ), кроме тех, когда выполняется условие (4.20). Направления  $n$ , для которых справедливо (4.20), или, другими словами, вдоль которых совпадают скорости обеих изонормальных волн в кристалле, называются его *оптическими осями*, или *бинормальями*. Из (4.21) ясно, что направления бинормалей зависят лишь от вида тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ .

Поскольку, как мы показали, в прозрачных негиротропных кристаллах плоские световые волны линейно поляризованы, то векторные амплитуды  $E_0$  и  $H_0$  можно считать вещественными. В уравнениях Максвелла (4.1), (4.2) фазовые множители  $e^{i\varphi}$  сокращаются и они всегда справедливы для  $E_0$ ,  $D_0$ ,  $H_0$ . Ниже мы будем писать  $E$ ,  $D$ ,  $H$ , подразумевая под этим *вещественные* векторные амплитуды, которые можно непосредственно подставлять в энергетические соотношения (1.11) — (1.16). Из уравнения (4.1), (4.2) получаем, умножая первое на  $E$  и второе на  $H$ :

$$ED = m[EH] = H^2. \quad (4.22)$$

Таким образом, электрическая и магнитная энергии плоской волны в кристалле равны между собою, так что

$$\omega = \frac{1}{8\pi}(ED + H^2) = \frac{1}{4\pi}ED = \frac{1}{4\pi}H^2. \quad (4.23)$$

Введем единичный вектор луча  $s$ , параллельный вектору Пойнтинга:

$$s = \frac{S}{|S|} = \frac{[EH]}{|[EH]|}, \quad s^2 = 1. \quad (4.24)$$

Поскольку  $s$  — перпендикулярен к  $H$ , то он лежит в одной плоскости с векторами  $E$ ,  $D$ ,  $n$ , причем  $s$ ,  $E$ ,  $H$  и  $n$ ,  $D$ ,  $H$  образуют две правые ортогональные тройки векторов. Поэтому угол между векторами  $D$  и  $E$  равен углу между  $n$  и  $s$ . Каждой из



двух изонормальных волн, соответствующих заданной фазовой нормали  $\mathbf{n}$ , отвечает свой вектор луча, причем  $s_1 \parallel [\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_1]$ ,  $s_2 \parallel [\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2]$ .

Скорость течения энергии, или *лучевая скорость*, определяется следующим образом:

$$u = \frac{|\mathbf{S}|}{w} = c \frac{|[\mathbf{E}\mathbf{H}]|}{\mathbf{H}^2}, \quad \mathbf{u} = us. \quad (4.25)$$

Согласно (4.22), (4.24), имеем  $\mathbf{H}^2 = |[\mathbf{E}\mathbf{H}]| sm$ , следовательно,

$$u = \frac{c}{ms} = \frac{c}{s}, \quad (4.26)$$

где

$$s = ms = nms \quad (4.27)$$

есть *лучевой показатель преломления*.

Поскольку  $\mathbf{s} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , то можно написать

$$\mathbf{E} = a [\mathbf{s}\mathbf{H}].$$

После векторного умножения на  $\mathbf{m}$  получаем отсюда  $[\mathbf{m}\mathbf{E}] = -a\mathbf{H}.ms$ . Сравнение с (4.2) дает  $a = -1/s$ , следовательно,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{s} [\mathbf{s}\mathbf{H}]. \quad (4.28)$$

Аналогично из  $\mathbf{s} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{D}$  следует  $\mathbf{H} = b [\mathbf{s}\mathbf{D}]$ . Векторное умножение на  $\mathbf{m}$  и сравнение с уравнением Максвелла  $\mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}]$  дает  $b = 1/s$  и

$$\mathbf{H} = \frac{1}{s} [\mathbf{s}\mathbf{D}]. \quad (4.29)$$

Выпишем уравнения Максвелла для плоских гармонических волн рядом с только что полученными соотношениями:

$$\text{I} \begin{cases} \mathcal{D} = -n[\mathbf{n}\mathbf{H}], \\ \mathbf{H} = n[\mathbf{n}\mathbf{E}], \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{1}{s} [\mathbf{s}\mathbf{H}], \\ \mathbf{H} = \frac{1}{s} [\mathbf{s}\mathbf{D}], \\ \mathbf{E} = \varepsilon^{-1}\mathbf{D}. \end{cases} \quad (4.30)$$

С помощью соотношения (4.27) уравнения I могут быть получены из II таким же путем, как система II была получена из I. Таким образом, обе системы эквивалентны между собою. Сравнение их, естественно, приводит к введению наряду с

вектором нормальной рефракции  $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$  вектора лучевой рефракции \*)

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}/s, \quad (4.31)$$

причем, согласно (4.27),

$$m\mathbf{p} = 1. \quad (4.32)$$

Используя  $\mathbf{p}$ , можно написать вектор плотности потока энергии в виде

$$\mathbf{S} = c\omega\mathbf{p}, \quad (4.33)$$

откуда имеем:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{S}}{c\omega} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2}, \quad p^2 = \frac{1}{s^2} = \frac{E^2}{H^2}. \quad (4.34)$$

Системы I, II можно теперь записать следующим образом:

$$\text{I. } \mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{m}\mathbf{E}], \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad (4.35)$$

$$\text{II. } \mathbf{E} = -[\mathbf{p}\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{p}\mathbf{D}], \quad \mathbf{E} = \varepsilon^{-1}\mathbf{D}. \quad (4.36)$$

Очевидно, обе системы получаются одна из другой с помощью замены

$$\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{D}, \quad \varepsilon \rightleftharpoons \varepsilon^{-1}, \quad \mathbf{m} \rightleftharpoons \mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \rightleftharpoons \mathbf{s}, \quad n \rightleftharpoons s^{-1}, \quad (4.37)$$

причем соотношение (4.32) не меняется. Поскольку обе системы имеют совершенно одинаковую структуру, то любому соотношению (4.3)—(4.27) будет соответствовать правильное соотношение, полученное путем замены (4.37). В этом состоит так называемый *принцип дуализма* в оптике прозрачных немагнитных кристаллов \*\*. Таким путем из (4.7) получается уравнение

$$p^2 \bar{r}\varepsilon p + p(\varepsilon_t - \varepsilon)p + 1 = 0, \quad (4.38)$$

которое называют уравнением лучей. Аналогично (4.7) при заданном направлении луча  $\mathbf{s}$  оно дает два значения лучевого показателя преломления  $s$  (4.26), (4.27), каждому из которых соответствует своя волна. Эти две волны называются *изорадиальными* [4, 5]. При условии, аналогичном (4.20):

$$p^2 \bar{r}\varepsilon p - 1 = 0, \quad (4.39)$$

лучевые скорости обеих изорадиальных волн совпадают. Соответствующие направления лучей  $\mathbf{s}$  называются *вторичными оптическими осями*, или *бирадиальными*. Для векторов поля двух изорадиальных волн справедливы соотношения, получающиеся из (4.13), (4.15), (4.16) с помощью принципа дуализма:

\*) Вектор лучевой рефракции впервые введен в [4] (см. также [5]).

\*\*) Это свойство называют также «принципом переноса» ([27], стр. 41), «соотношением дуальности» ([28], стр. 652), «правилом взаимного соответствия» ([11], стр. 620).

$$\rho\mathbf{E} = \rho\mathbf{H} = \rho\epsilon^{-1}\mathbf{D} = 0, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = \mathbf{D}_1\epsilon^{-1}\mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_1\epsilon\mathbf{E}_2 = 0. \quad (4.41)$$

Следует иметь в виду, что сформулированный выше принцип дуализма относится к распространению плоских гармонических волн в прозрачном неограниченном кристалле.

Рассмотрение оптических свойств кристаллов чрезвычайно сильно упрощается при использовании *аксиального* представления (см. § 26) для тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ .

Как показано в § 14, для кристаллов средних сингоний (три-, тетра-, гексагональных) тензор  $\epsilon$  является одноосным, т. е. может быть представлен в форме (26.110). Однако мы используем это представление не для самого тензора  $\epsilon$ , а для обратного ему тензора  $\epsilon^{-1}$ :

$$\epsilon^{-1} = \frac{1}{\epsilon_0} + \left( \frac{1}{\epsilon_e} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \text{с.с.} \quad (4.42)$$

Здесь  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_e$  — собственные значения тензора  $\epsilon$ , который имеет вид

$$\epsilon = \epsilon_0 + (\epsilon_e - \epsilon_0) \text{с.с.} \quad (4.43)$$

Согласно § 26, всякий тензор вида  $a + \mathbf{bc}$  имеет собственный вектор, перпендикулярный к  $\mathbf{c}$ , которому соответствует собственное значение  $a$ , а также собственный вектор, параллельный  $\mathbf{c}$ , которому соответствует собственное значение  $a + b$ .

Рассмотрим уравнение (4.4) для магнитного поля плоской волны в кристалле, причем подставим в него выражение (4.42) для  $\epsilon^{-1}$ . Поскольку

$$\mathbf{m} \times \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{m} \times^2 + \left( \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_e} \right) [\mathbf{mc}] \cdot [\mathbf{mc}],$$

то уравнение (4.4) с учетом того, что  $\mathbf{mH} = 0$ , принимает вид

$$\left( 1 - \frac{\mathbf{m}^2}{\epsilon_0} + \left( \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_e} \right) [\mathbf{mc}] \cdot [\mathbf{mc}] \right) \mathbf{H} = 0. \quad (4.44)$$

Это уравнение можно написать в виде

$$\alpha \mathbf{H} = 0, \quad \alpha = a' + b' \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}', \quad (4.45)$$

где

$$a' = 1 - \frac{\mathbf{m}^2}{\epsilon_0}, \quad b' = \left( \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_e} \right) [\mathbf{mc}]^2, \quad \mathbf{c}' = \frac{[\mathbf{mc}]}{|[\mathbf{mc}]|} (\mathbf{c}'^2 = 1). \quad (4.46)$$

Из (4.45) заключаем, что вектор  $\mathbf{H}$  является собственным вектором тензора  $\alpha$ , причем ему соответствует собственное значение, равное нулю. Согласно общим свойствам одноосного тензора  $\alpha$  (§ 26), один из его собственных векторов, который мы обозначим  $\mathbf{H}_0$ , должен быть перпендикулярен к  $\mathbf{c}'$ :  $\mathbf{H}_0 \mathbf{c}' = 0$ . Кроме того, любой вектор  $\mathbf{H}$  должен быть перпендикулярен к  $\mathbf{m}$ , т. е.  $\mathbf{H}^0 \mathbf{m} = 0$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{H}_0 \parallel [\mathbf{m}\mathbf{c}'] \parallel [\mathbf{m}[\mathbf{m}\mathbf{c}]], \quad \mathbf{E}_0 \parallel [\mathbf{m}\mathbf{c}]. \quad (4.47)$$

Собственному вектору  $\mathbf{H}_0$  отвечает собственное значение  $a'$ , которое следует приравнять нулю. С учетом (4.46) получаем

$$\mathbf{m}^2 = n_0^2 = \epsilon_0, \quad (4.48)$$

т. е. для такой волны показатель преломления не зависит от направления волновой нормали. Это так называемая *обыкновенная волна* в одноосном кристалле. Плоскость, параллельная фазовой нормали  $\mathbf{n}$  и оптической оси  $\mathbf{c}$ , называется *главным сечением* одноосного кристалла. Соотношение (4.47) выражает поэтому тот факт, что обыкновенная волна в одноосном кристалле поляризована в плоскости главного сечения. В то же время собственному вектору  $\mathbf{H}_e$ , параллельному  $\mathbf{c}'$ :

$$\mathbf{H}_e \parallel \mathbf{c}' \parallel [\mathbf{m}\mathbf{c}], \quad \mathbf{E}_e \parallel [\mathbf{m}[\mathbf{m}\mathbf{c}]], \quad (4.49)$$

соответствует собственное значение  $a' + b'$ . Приравнявая последнее к нулю, получаем

$$1 - \frac{\mathbf{m}^2}{\epsilon_0} + \left( \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_e} \right) [\mathbf{m}\mathbf{c}]^2 = 0,$$

откуда следует, поскольку  $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}^2 = 1$ , для соответствующего показателя преломления  $n = n_e$

$$n_e^2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_e}{n e n} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_e}{\epsilon_0 + (\epsilon_e - \epsilon_0)(n\mathbf{c})^2}. \quad (4.50)$$

Мы получили *необыкновенную* волну, показатель преломления которой зависит от направления  $\mathbf{n}$ .

Из (4.49) следует, что необыкновенная волна поляризована перпендикулярно плоскости главного сечения одноосного кристалла. Легко убедиться, что  $n_o = n_e$  лишь при условии  $(n\mathbf{c})^2 = 1$ , т. е. когда  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{c}$ . Следовательно, фазовые скорости совпадают лишь вдоль одного направления  $\mathbf{c}$  в кристалле, которое и является его оптической осью (бинормалью). Поэтому кристалл, характеризуемый диэлектрическим тензором вида (4.43), называется одноосным. К числу таких кристаллов относятся все кристаллы средних сингоний.

В более общем случае тензор  $\epsilon$  и соответственно тензор  $\epsilon^{-1}$  имеет аксиальное представление вида (26.111):

$$\epsilon^{-1} = a + b(\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1), \quad \mathbf{c}_1^2 = \mathbf{c}_2^2 = 1. \quad (4.51)$$

Такой тензор имеет собственный вектор, параллельный вектору  $[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]$ , которому соответствует собственное значение  $a$ , а также собственные векторы, параллельные  $\mathbf{c}_1 \pm \mathbf{c}_2$ , которым отвечают собственные значения  $a + b(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \pm 1)$ .

Подставляя (4.51) в (4.4), получаем аналогично (4.45) уравнение

$$\alpha \mathbf{H} = 0, \quad \alpha = a' + b'(\mathbf{c}'\mathbf{c}'' + \mathbf{c}''\mathbf{c}'), \quad (4.52)$$

где

$$a' = am^2 - 1, \quad b' = b\sqrt{[\mathbf{m}\mathbf{c}_1]^2 [\mathbf{m}\mathbf{c}_2]^2}, \quad (4.53)$$

$$\mathbf{c}' = \frac{[\mathbf{m}\mathbf{c}_1]}{\sqrt{[\mathbf{m}\mathbf{c}_1]^2}}, \quad \mathbf{c}'' = \frac{[\mathbf{m}\mathbf{c}_2]}{\sqrt{[\mathbf{m}\mathbf{c}_2]^2}}, \quad \mathbf{c}'^2 = \mathbf{c}''^2 = 1.$$

Как и в случае одноосных кристаллов, вектор  $\mathbf{H}$  является собственным вектором тензора  $\alpha$  (4.52), отвечающим нулевым собственным значениям. Один из собственных векторов:  $\mathbf{H} \parallel [\mathbf{c}'\mathbf{c}''] \parallel \mathbf{m}$ . Однако поскольку  $\mathbf{m}\mathbf{H} = 0$ , то такой вектор не существует. Остаются векторы

$$\mathbf{H}_\pm \parallel \mathbf{c}' \pm \mathbf{c}'' = \frac{[\mathbf{m}\mathbf{c}_1]}{\sqrt{[\mathbf{m}\mathbf{c}_1]^2}} \pm \frac{[\mathbf{m}\mathbf{c}_2]}{\sqrt{[\mathbf{m}\mathbf{c}_2]^2}}, \quad (4.54)$$

которым соответствуют уравнения для показателей преломления

$$a' + b'(\mathbf{c}'\mathbf{c}'' \pm 1) = am^2 - 1 + b([\mathbf{m}\mathbf{c}_1][\mathbf{m}\mathbf{c}_2] \pm \sqrt{[\mathbf{m}\mathbf{c}_1]^2[\mathbf{m}\mathbf{c}_2]^2}) = 0. \quad (4.55)$$

Отсюда находим выражения

$$\frac{1}{n_\pm^2} = a + b([\mathbf{n}\mathbf{c}_1][\mathbf{n}\mathbf{c}_2] \pm \sqrt{[\mathbf{n}\mathbf{c}_1]^2[\mathbf{n}\mathbf{c}_2]^2}) \quad (4.56)$$

как общие решения уравнения нормалей (4.7). Очевидно, равенство  $n_+ = n_-$  возможно лишь при условии  $[\mathbf{n}\mathbf{c}_1]^2[\mathbf{n}\mathbf{c}_2]^2 = 0$ , т. е. когда  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{c}_1$  или  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{c}_2$ . Следовательно,  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$  являются бинормальными кристалла, который в этом случае называется двуосным. К двуосным относятся кристаллы низших сингоний — ромбической, моноклинной и триклинной.

Выражения (4.47) — (4.50), (4.54), (4.56) дают общее решение задачи о свойствах волн, распространяющихся в прозрачных немагнитных негиротропных кристаллах.

Многие закономерности распространения света в прозрачных кристаллах могут быть сделаны наглядными путем использования некоторых геометрических поверхностей [10]. Таких поверхностей различного типа можно построить довольно много, однако наиболее информативными из них являются две поверхности, к рассмотрению которых мы перейдем.

Наиболее непосредственный физический смысл имеет так называемая *волновая поверхность*. Она представляет собой геометрическое место точек, до которых дойдет к моменту времени  $t=1$  волновое возмущение, возникшее в некоторой точке  $O$  в момент времени  $t=0$ . Следовательно, эта поверхность лишь масштабом отличается от реальной поверхности фронта электромагнитной волны, распространяющейся из точечного источника по всем направлениям. Поэтому она и называется волновой поверхностью. Поверхность фронта волны является совокупностью точек, до которых к данному моменту дошла энергия волнового возмущения. Радиус-вектор, проведенный из источника (точки  $O$ ) в любую точку волновой поверхности, представляет собой путь, пройденный энергией волны за единицу времени в данном направлении. Но этот путь по определению равен лучевой скорости. Отсюда ясно, что волновая поверхность может быть определена так же, как геометрическое место концов векторов лучевых скоростей для всевозможных направлений в кристалле. Поэтому ее называют также поверхностью лучевых скоростей, или лучевой поверхностью (поверхность  $S$ ). Поскольку в кристаллах по любому направлению луч может распространяться с двумя различными скоростями, то волновая поверхность состоит из двух полостей.

Согласно определению волновой поверхности, все ее точки начинают колебаться в один и тот же момент времени, следовательно, они имеют одинаковую фазу колебаний. Таким образом, эта поверхность является также поверхностью равных фаз. На достаточно большом расстоянии от точечного источника колебаний — центра волновой поверхности  $O$  — любой ее небольшой участок можно считать плоским. Именно таким путем и реализуются обычно плоские волны. Перпендикуляр к такой плоской площадке, все точки которой обладают равной фазой, будет, по определению, фазовой (волновой) нормалью к плоской волне. Мы можем, очевидно, применить эти понятия также к случаю, когда волновая поверхность рассматривается на небольшом удалении от источника. При этом размеры площадки, которую можно считать плоской, будут, естественно, уменьшаться, а ее ориентация будет определяться плоскостью, касательной к волновой поверхности в данном месте. Отсюда следует, что волновая (фазовая) нормаль  $n$  является геометрической нормалью к волновой (лучевой) поверхности (см. рис. 4.1, где  $S$  — волновая поверхность).

Очевидно (см. (4.31), (4.26)), вектор лучевой рефракции

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{u}{c} \mathbf{s} = \frac{1}{c} \mathbf{u}$$

с точностью до постоянного множителя  $c^{-1}$  равен вектору  $\mathbf{u}$  лучевой скорости волны, следовательно,  $\mathbf{p}$  можно рассматривать как радиус-вектор волновой поверхности. Таким образом, последнюю можно определить так же, как геометрическое место концов векторов лучевой рефракции.

Наряду с этим, опираясь на принцип дуализма, можно по аналогии ввести понятие поверхности нормалей  $N$ , или поверхности нормальных показателей

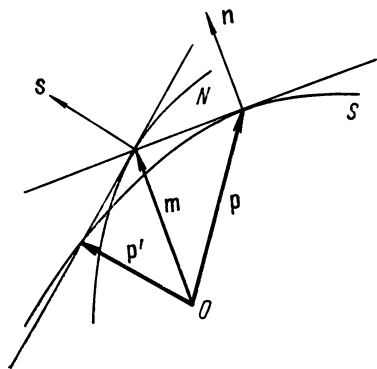


Рис. 4.1

преломления, или также поверхности рефракции. Она является геометрическим местом концов векторов  $\mathbf{m}$  нормальной рефракции, проведенных во всех возможных направлениях. Таким образом, радиусом-вектором поверхности нормалей служит вектор рефракции  $\mathbf{m}$ .

В соответствии с этими свойствами уравнением волновой поверхности  $S$  будет являться уравнение лучей (4.38), в котором  $\mathbf{p}$  рассматривается как радиус-вектор произвольной точки

$S$ . Аналогично этому уравнением поверхности нормалей  $N$  является уравнение нормалей (4.7), где  $\mathbf{m}$  играет роль радиуса-вектора. Обе указанные поверхности тесным образом связаны между собой. Согласно (4.32), между радиусами-векторами лучевой поверхности  $\mathbf{p}$  и поверхности рефракции  $\mathbf{m}$  существует соотношение  $\mathbf{m}\mathbf{p} = 1$ . При заданном  $\mathbf{m}$  это соотношение можно рассматривать как уравнение плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{p}$ , на которой должен лежать конец вектора  $\mathbf{p}$ . Такие плоскости можно построить для каждого вектора  $\mathbf{m}$ , удовлетворяющего уравнению (4.7), т. е. для каждой точки поверхности рефракции. Каждая такая плоскость  $P$  будет проходить через некоторую точку лучевой поверхности и будет касаться ее в этой точке, так как  $P$  перпендикулярна к  $\mathbf{n}$  — нормали лучевой поверхности. Следовательно, лучевая поверхность является огибающей семейства плоскостей  $\mathbf{p}\mathbf{m} = 1$ , для которых  $\mathbf{m}$  удовлетворяет уравнению (4.7). С другой стороны, если проведем через точку  $\mathbf{p}$  волновой поверхности касательную плоскость и опустим на нее перпендикуляр из центра  $O$ , то, согласно рис. 4.1, основание этого перпендикуляра будет концом вектора  $\mathbf{m}$ , т. е. будет лежать на поверхности нормалей. Повторяя это построение для всех точек лучевой поверхности, мы приходим к заключению, что поверхность нормалей является геометрическим местом оснований перпенди-

куляров, опущенных из центра  $O$  на плоскости, касательные к волновой поверхности (см. рис. 4.1). Иными словами, поверхность нормалей есть подэра волновой поверхности. Следовательно, наоборот, волновая поверхность есть антиподэра поверхности нормалей \*).

Замечательным следствием принципа дуализма является то, что каждая из поверхностей  $S$ ,  $N$  обладает по отношению к другой свойствами, которые другая имеет по отношению к ней. В частности, мы можем также утверждать, что, наоборот, волновая поверхность  $S$  есть подэра поверхности нормалей  $N$ , а последняя — антиподэра по отношению к  $S$ .

Чтобы убедиться в этом, вспомним, что если уравнение поверхности имеет вид  $F(\mathbf{r}) = \text{const}$ , то вектор геометрической нормали  $\mathbf{N}$  к ней в точке  $\mathbf{r}$  пропорционален производной от  $F$  по радиусу-вектору

$$\mathbf{N} \parallel \frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (4.57)$$

В соответствии с вышеописанными свойствами волновой поверхности, или поверхности лучей,

$$S(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 \bar{\mathbf{r}} \mathbf{p} - \mathbf{p}(\varepsilon_t - \varepsilon) \mathbf{p} + 1 = 0 \quad (4.58)$$

вектор фазовой нормали  $\mathbf{n}$  или нормальной рефракции  $\mathbf{m}$  направлен по геометрической нормали к  $S(\mathbf{p})$ :

$$\mathbf{m} \parallel \frac{1}{2} \frac{\partial S(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \bar{\mathbf{r}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p}^2 \bar{\mathbf{r}} \mathbf{p} - (\varepsilon_t - \varepsilon) \mathbf{p}. \quad (4.59)$$

Поскольку  $\mathbf{m} \mathbf{p} = 1$ , то

$$\mathbf{m} = \frac{\bar{\mathbf{r}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p}^2 \bar{\mathbf{r}} \mathbf{p} - (\varepsilon_t - \varepsilon) \mathbf{p}}{2 \mathbf{p}^2 \bar{\mathbf{r}} \mathbf{p} - \mathbf{p}(\varepsilon_t - \varepsilon) \mathbf{p}}$$

или, если учесть уравнение (4.58),

$$\mathbf{m} = \frac{\bar{\mathbf{r}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p}^2 \bar{\mathbf{r}} \mathbf{p} - (\varepsilon_t - \varepsilon) \mathbf{p}}{\mathbf{p}^2 \bar{\mathbf{r}} \mathbf{p} - 1}. \quad (4.60)$$

Согласно принципу взаимности, всякое соотношение, в частности (4.60), остается справедливым при замене (4.37), откуда следует

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\mathbf{m} \bar{\varepsilon}^{-1} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m}^2 \bar{\varepsilon}^{-1} \mathbf{m} - (\varepsilon_t^{-1} - \varepsilon^{-1}) \mathbf{m}}{\mathbf{m}^2 \mathbf{m} \bar{\varepsilon}^{-1} \mathbf{m} - 1} = \\ &= \frac{\mathbf{m} \bar{\varepsilon} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m}^2 \bar{\varepsilon} \mathbf{m} - (\bar{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon}) \mathbf{m}}{\mathbf{m}^2 \mathbf{m} \bar{\varepsilon} \mathbf{m} - |\varepsilon|}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

\*) По определению, если поверхность  $K$  есть подэра поверхности  $M$ , то  $M$  называется антиподэрой  $K$ .



Но легко убедиться, что аналогично (4.60) этот результат можно получить, если рассматривать  $\mathbf{p}$  как геометрическую нормаль к поверхности рефракции (4.7):

$$N(\mathbf{m}) = m^2 \mathbf{m} \varepsilon \mathbf{m} - m(\bar{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})\mathbf{m} + |\varepsilon| = 0, \quad (4.62)$$

т. е. воспользоваться соотношением

$$\mathbf{p} \parallel \frac{1}{2} \frac{\partial N(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} = m \varepsilon \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} + m^2 \varepsilon \mathbf{m} - (\bar{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon}) \mathbf{m} \quad (4.63)$$

и условием  $\mathbf{p} \mathbf{m} = 1$ .

Таким образом, вектор лучевой рефракции  $\mathbf{p}$  есть нормаль к поверхности  $N(\mathbf{m})$ , а вектор нормальной рефракции  $\mathbf{m}$  есть нормаль к поверхности лучей  $S(\mathbf{p})$ . Налицо полная взаимность и каждая из этих поверхностей может рассматриваться как подэра (антиподэра) по отношению к другой.

В справедливости соотношения (4.61) нетрудно убедиться также непосредственно на основании уравнений Максвелла (4.3), (4.2)

$$(\varepsilon + m^2) \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{m} \mathbf{E}] \quad (4.64)$$

и свойств  $\mathbf{p} \parallel [\mathbf{E} \mathbf{H}]$ ,  $\mathbf{p} \mathbf{m} = 1$ . Первое из уравнений (4.64) дает  $(\varepsilon - m^2) \mathbf{E} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \mathbf{E}$ , следовательно,

$$\mathbf{E} \parallel (\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m}, \quad \mathbf{H} \parallel [\mathbf{m}, (\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m}], \quad (4.65)$$

или

$$\mathbf{E} \parallel \overline{(\varepsilon - m^2) \mathbf{m}}, \quad \mathbf{H} \parallel [\mathbf{m}, \overline{(\varepsilon - m^2) \mathbf{m}}]. \quad (4.66)$$

Поскольку  $\mathbf{m} \mathbf{D} = m \varepsilon \mathbf{E} = 0$ , то отсюда имеем

$$m \varepsilon (\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m} = 0, \quad (4.67)$$

что является иной формой уравнения нормалей (4.7). Можно также написать

$$\begin{aligned} m \varepsilon (\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m} &= m (\varepsilon - m^2 + m^2) (\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m} = \\ &= m^2 (1 + \mathbf{m} (\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m}) = 0, \end{aligned}$$

что приводит к еще одной разновидности уравнения нормалей:

$$\mathbf{m} (\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m} + 1 = 0. \quad (4.68)$$

Из (4.34) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \parallel [\mathbf{E} \mathbf{H}] &\parallel [(\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m}, [\mathbf{m}, \overline{(\varepsilon - m^2) \mathbf{m}}]] = \\ &= \mathbf{m} \overline{(\varepsilon - m^2)} (\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} (\varepsilon - m^2)^{-1} \mathbf{m} \cdot \overline{(\varepsilon - m^2) \mathbf{m}} \end{aligned}$$

или с учетом (4.68)

$$\mathbf{p} \parallel \overline{\mathbf{m}(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m}^2)} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m}^2)^{-1} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} + \overline{(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m}^2)} \mathbf{m}. \quad (4.69)$$

Используя соотношения (26.80), (26.77)

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m}^2} &= \mathbf{m}^4 + \mathbf{m}^2(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_t) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \end{aligned}$$

и  $\mathbf{p}\mathbf{m} = 1$ , можно легко убедиться, что (4.69) принимает вид (4.61). В одноосных кристаллах, как легко убедиться с помощью (4.43), для тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  имеет место следующее соотношение:

$$(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_o)(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_e) = 0. \quad (4.70)$$

Таким образом,  $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (\boldsymbol{\varepsilon}_o + \boldsymbol{\varepsilon}_e)\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_o\boldsymbol{\varepsilon}_e$ , т. е. квадрат (и высшие степени) тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  выражается через его первую степень. Соотношение (4.70)\*) позволяет сильно упростить общее уравнение нормалей (4.7). Поскольку (см. (26.77)) в данном случае

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_t &= \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_t) = (\boldsymbol{\varepsilon}_o + \boldsymbol{\varepsilon}_e)\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_o\boldsymbol{\varepsilon}_e - (2\boldsymbol{\varepsilon}_o + \boldsymbol{\varepsilon}_e)\boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= -\boldsymbol{\varepsilon}_o(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_e), \end{aligned}$$

то уравнение (4.7) принимает вид  $(|\boldsymbol{\varepsilon}| = \boldsymbol{\varepsilon}_0^2 \boldsymbol{\varepsilon}_e)$

$$\mathbf{m}^2 \mathbf{m} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} - \boldsymbol{\varepsilon}_o \mathbf{m} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} - \boldsymbol{\varepsilon}_o \boldsymbol{\varepsilon}_e \mathbf{m}^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_0^2 \boldsymbol{\varepsilon}_e = (\mathbf{m}^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_o)(\mathbf{m} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} - \boldsymbol{\varepsilon}_o \boldsymbol{\varepsilon}_e) = 0,$$

т. е. оно распадается на два уравнения:

$$\mathbf{m}^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_o = 0, \quad n^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_o, \quad (4.71)$$

$$\mathbf{m} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} - \boldsymbol{\varepsilon}_o \boldsymbol{\varepsilon}_e = 0, \quad n^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_o \boldsymbol{\varepsilon}_e / \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}. \quad (4.72)$$

Первое из них описывает обыкновенную, второе — необыкновенную волну в одноосном кристалле. Уравнение (4.71) имеет тот же вид, что и уравнение нормалей в изотропной среде, чем и обусловлено название соответствующей волны — «обыкновенная». Ее скорость не зависит от направления  $\mathbf{n}$ .

С помощью определения  $\mathbf{p} \parallel \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{m}}$  и условия  $\mathbf{p}\mathbf{m} = 1$  без

труда получаем из уравнений (4.71), (4.72)

$$\mathbf{p} = \mathbf{m}/\mathbf{m}^2 \quad (4.73)$$

для обыкновенной волны и

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} / \boldsymbol{\varepsilon}_o \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (4.74)$$

для необыкновенной волны.

\*) Оно является так называемым *минимальным уравнением* для тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  одноосного кристалла (см. § 25).

## § 5. ПРОЗРАЧНЫЕ МАГНИТНЫЕ КРИСТАЛЛЫ

В предыдущих параграфах мы рассматривали распространение света в кристаллах, не обладающих магнитными свойствами и соответственно полагали  $\mu = 1$ . При учете магнитной анизотропии уравнения Максвелла для плоских гармонических волн принимают вид (1.24):

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{m}\mathbf{E}], \quad (5.1)$$

$$\mathbf{m}\mathbf{D} = \mathbf{m}\mathbf{B} = 0, \quad (5.2)$$

а уравнения связи—форму (1.5):

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (5.3)$$

где тензор магнитной проницаемости  $\mu$ , как и  $\epsilon$ , является вещественным, симметричным и положительно определенным (см. § 1).

Общая теория оптических свойств прозрачных магнитных кристаллов в ковариантной форме была развита в [4,29—34,5]. Уравнения (5.1), (5.3) можно написать в форме

$$\mathbf{E} = -\epsilon^{-1}\mathbf{m}\times\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{m}\times\mathbf{E}. \quad (5.4)$$

Исключая отсюда  $\mathbf{H}$  либо  $\mathbf{E}$ , получаем

$$(1 + \epsilon^{-1}\mathbf{m}\times\mu^{-1}\mathbf{m}\times)\mathbf{E} = 0, \quad (5.5)$$

$$(1 + \mu^{-1}\mathbf{m}\times\epsilon^{-1}\mathbf{m}\times)\mathbf{H} = 0. \quad (5.6)$$

Условия наличия нетривиальных решений для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеют вид

$$|1 + \epsilon^{-1}\mathbf{m}\times\mu^{-1}\mathbf{m}\times| = 0, \quad |1 + \mu^{-1}\mathbf{m}\times\epsilon^{-1}\mathbf{m}\times| = 0. \quad (5.7)$$

Раскрывая ковариантным путем эти детерминанты (см. § 26), получаем в обоих случаях одно и то же уравнение

$$\mathbf{m}\epsilon\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}\mu\mathbf{m} - \mathbf{m}\mu((\bar{\epsilon}\mu)_t - \bar{\epsilon}\mu)\mathbf{m} + |\epsilon\mu| = 0, \quad (5.8)$$

которое и является уравнением нормалей для магнитных кристаллов. Написав его в виде

$$An^4 - Bn^2 + C = 0, \quad (5.9)$$

где

$$A = \mathbf{m}\epsilon\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}\mu\mathbf{m}, \quad B = \mathbf{m}\mu((\bar{\epsilon}\mu)_t - \bar{\epsilon}\mu)\mathbf{m}, \quad C = |\epsilon\mu|, \quad (5.10)$$

убеждаемся, что оно, как и в случае немагнитных кристаллов (§ 4), дает два значения показателя преломления  $n$ , которым соответствуют две волны, распространяющиеся с различными фазовыми скоростями. Поступая, как в § 4 (см. (4.17) -- (4.20)), вычисляем выражения

$$[DD^*] = \bar{\varepsilon}[EE^*] = m.m[HH^*], \quad (5.11)$$

$$[BB^*] = \bar{\mu}[HH^*] = m.m[EE^*]. \quad (5.12)$$

Исключая из этих уравнений  $[HH^*]$ , находим соотношение

$$(\bar{\varepsilon} - m.m\bar{\mu}^{-1}m.m)[EE^*] = 0, \quad (5.13)$$

откуда следует, что  $[EE^*]$  отлично от нуля лишь при условии

$$|\bar{\varepsilon} - m\bar{\mu}^{-1}m.m| = 0.$$

Это соотношение в раскрытом виде (см. § 26) сводится к уравнению

$$m\bar{\varepsilon}m.m\bar{\mu}m - |\varepsilon\mu| = 0, \quad (5.14)$$

которое обобщает аналогичное равенство (4.20) для немагнитных кристаллов.

Таким же путем, как в § 4, нетрудно показать, что уравнение (5.14) является условием равенства нулю дискриминанта уравнения нормалей (5.8), т. е. условием совпадения показателей преломления и, следовательно, фазовых скоростей двух волн, отвечающих некоторому направлению фазовой нормали  $\mathbf{n}$ . Направления  $\mathbf{n}$ , для которых наряду с (5.8) выполняется условие (5.14), будут, очевидно, оптическими осями (бинормальями) магнитного кристалла. Таким образом, для всех направлений, отличных от бинормалей, обе изонормальные волны поляризованы линейно, как и в случае немагнитных кристаллов (§ 4).

Легко убедиться, что все приведенные в этом параграфе соотношения остаются справедливыми, если произвести одновременную перестановку величин

$$\mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H}, \quad \varepsilon \rightleftharpoons \mu, \quad m \rightleftharpoons -m. \quad (5.15)$$

Возможность такой замены составляет содержание *второго принципа дуализма* (см. [4, 30, 5]), или принципа магнито-электрической симметрии. Наряду с этим в случае однородных магнитных кристаллов сохраняет силу и первый принцип дуализма (§ 4), допускающий замену (4.37), которую теперь следует дополнить перестановками  $\mathbf{H} \rightleftharpoons \mathbf{B}$ ,  $\mu \rightleftharpoons \mu^{-1*}$ .

В оптике магнитных кристаллов также может быть использовано представление тензоров в аксиальной форме (ср. § 4), позволяющее значительно упростить теорию их свойств.

Как показано в [35] (см. § 28), любой вещественный несимметричный тензор  $\beta$ , который может быть симметризован путем умножения на некоторую вещественную симметричную

\*) Принцип дуализма (4.37) был обобщен на случай прозрачных магнитных кристаллов в [4, 29, 31, 5].

матрицу  $\alpha = \tilde{\alpha}$ , обладает аксиальным представлением следующего вида:

$$\beta = a + b(c' \cdot \alpha c'' + c'' \cdot \alpha c'). \quad (5.16)$$

Легко убедиться, что произведение  $a\beta$  является симметричной матрицей.

Пусть  $d_i$ —собственные векторы и  $\lambda_i$ —собственные значения тензора  $\beta$ :

$$\beta d_i = \lambda_i d_i.$$

Тогда (см. § 28)

$$a = \lambda_2, \quad (5.17)$$

где  $\lambda_2$  — среднее по величине собственное значение ( $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ ),

$$b = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2 d_1 \alpha d_2}, \quad (5.18)$$

$$c' = d_1 + \kappa d_3, \quad c'' = d_1 - \kappa d_3, \quad (5.19)$$

$$\kappa^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{d_1 \alpha d_1}{d_3 \alpha d_3}. \quad (5.20)$$

Из этих соотношений нетрудно выразить собственные векторы и собственные значения тензора  $\beta$  через величины  $a$ ,  $b$ ,  $c'$ ,  $c''$ ,  $\alpha$ . Очевидно, вектор

$$q_0 = \alpha^{-1} [c' c''] \quad (5.21)$$

является собственным вектором матрицы  $\beta$ , отвечающим собственному значению  $a$ . Двумя другими собственными векторами будут

$$q_{\pm} = \sqrt{c'' \alpha c'' c'} \pm \sqrt{c' \alpha c' c''}. \quad (5.22)$$

Соответствующие собственные значения определяются выражением

$$a + b(c' \alpha c'' \pm \sqrt{c' \alpha c' c'' \alpha c''}). \quad (5.23)$$

Уравнение (5.6) можно написать в виде

$$(1 + \mu^{-1} m^{\times} \gamma^{-1} \mu^{-1} m^{\times}) \mathbf{H} = 0, \quad \gamma = \mu^{-1} \varepsilon. \quad (5.24)$$

Входящий сюда тензор  $\gamma^{-1} = \varepsilon^{-1} \mu$  симметризуется при умножении слева на  $\mu$ , поэтому он может быть представлен в форме (5.16):

$$\gamma^{-1} = \varepsilon^{-1} \mu = a + b(c' \cdot \mu c'' + c'' \cdot \mu c'). \quad (5.25)$$

Подставляя это выражение в (5.24), получаем

$$\{1 + a(\mu^{-1} m^{\times})^2 - b\mu^{-1} ([mc'] \cdot [mc''] + [mc''] \cdot [mc'])\} \mathbf{H} = 0. \quad (5.26)$$

Преобразуем второй член этого уравнения (см. (26.61)):

$$(\mu^{-1}m \times)^2 \mathbf{H} = \frac{1}{|\mu|} [\mu \mathbf{m}, [m\mathbf{H}]] = -\frac{m\mu m}{|\mu|} \mathbf{H},$$

так как  $m\mu\mathbf{H} = m\mathbf{V} = 0$  согласно (5.2).

Таким образом, уравнение (5.26) принимает вид

$$[A + B(\mathbf{C}' \cdot \mu \mathbf{C}'' + \mathbf{C}'' \cdot \mu \mathbf{C}')] \mathbf{H} = 0, \quad (5.27)$$

где

$$A = a \frac{m\mu m}{|\mu|} - 1, \quad B = b, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{C}' = \mu^{-1} [m\mathbf{c}'], \quad \mathbf{C}'' = \mu^{-1} [m\mathbf{c}''].$$

Согласно (5.27),  $\mathbf{H}$  является собственным вектором тензора, стоящего в квадратных скобках, причем соответствующие собственные значения равны нулю. Этот тензор имеет ту же структуру, что и тензор (5.16), собственные векторы и собственные значения которого задаются выражениями (5.17), (5.21) — (5.23). Очевидно, что решение (5.21)

$$\mathbf{H} \parallel \mu^{-1} [\mathbf{C}'\mathbf{C}''] \parallel [[m\mathbf{c}'] [m\mathbf{c}'']] \parallel m$$

не имеет физического смысла, так как в этом случае  $\mathbf{D} = -[m\mathbf{H}] = 0$ . Таким образом, остаются два решения (5.22)

$$\mathbf{H}_{\pm} = \sqrt{\mathbf{C}'' \mu \mathbf{C}'} \pm \sqrt{\mathbf{C}' \mu \mathbf{C}''}. \quad (5.29)$$

Условие равенства нулю соответствующих собственных значений (5.23) гласит

$$a \frac{m\mu m}{|\mu|} - 1 + b(\mathbf{C}' \mu \mathbf{C}'' \pm \sqrt{\mathbf{C}' \mu \mathbf{C}' \cdot \mathbf{C}'' \mu \mathbf{C}''}) = 0. \quad (5.30)$$

Подставляя (5.28) в (5.29), получаем

$$\mathbf{H}_{\pm} = \mu^{-1} \left( \frac{[m\mathbf{c}']}{\sqrt{[m\mathbf{c}'] \mu^{-1} [m\mathbf{c}']}} \pm \frac{[m\mathbf{c}'']}{\sqrt{[m\mathbf{c}''] \mu^{-1} [m\mathbf{c}'']}} \right). \quad (5.31)$$

Это соотношение определяет ориентацию магнитных векторов двух волн, отвечающих заданному направлению фазовой нормали  $\mathbf{n}$ . Соответствующие показатели преломления определяются из уравнения (5.30)

$$\frac{1}{n_{\pm}^2} = a \frac{n\mu n}{|\mu|} + b([n\mathbf{c}'] \mu^{-1} [n\mathbf{c}''] \pm \sqrt{[n\mathbf{c}'] \mu^{-1} [n\mathbf{c}'] \cdot [n\mathbf{c}''] \mu^{-1} [n\mathbf{c}'']}). \quad (5.32)$$

Эти соотношения эквивалентны уравнению нормалей (5.8). Совпадение скоростей обеих пзонормальных волн имеет место, очевидно, при условиях

$$[\mathbf{nc}'] \mu^{-1} [\mathbf{nc}'] = 0, \quad [\mathbf{nc}'' ] \mu^{-1} [\mathbf{nc}'' ] = 0. \quad (5.33)$$

Вследствие положительной определенности тензора  $\mu^{-1}$  и вещественности векторов  $\mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{c}''$  это сводится к  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{c}''$ . Таким образом, векторы  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$ , входящие в двандное представление (5.25) тензора  $\gamma^{-1} = \varepsilon^{-1} \mu$ , имеют прямой физический смысл — они определяют направления оптических осей (би-нормалей) магнитного кристалла.

Из (5.31) сразу получаем направления векторов магнитной индукции  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ :

$$\mathbf{B} = \frac{[\mathbf{nc}']}{\sqrt{[\mathbf{nc}'] \mu^{-1} [\mathbf{nc}']}} \pm \frac{[\mathbf{nc}'' ]}{\sqrt{[\mathbf{nc}'' ] \mu^{-1} [\mathbf{nc}'' ]}}. \quad (5.34)$$

Как видим, использование аксиального представления (5.16) позволяет даже в наиболее сложном случае самой общей магнитной и диэлектрической анизотропии получить в явном виде компактные и легко обозримые выражения для показателей преломления и для векторов  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  плоской волны через вектор волновой нормали  $\mathbf{n}$  и параметры кристалла.

Пользуясь уравнениями Максвелла  $\mathbf{D} = -[\mathbf{mH}]$ ,  $\mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D}$ , можно без труда найти отсюда и направления векторов  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ .

Из полученных соотношений следует, что оптические свойства магнитных кристаллов в основном определяются структурой тензора  $\gamma = \mu^{-1} \varepsilon$  или обратного ему  $\gamma^{-1} = \varepsilon^{-1} \mu$  (5.25). С его помощью можно осуществить классификацию прозрачных магнитных кристаллов по их оптическим свойствам. В § 4 мы видели, что в зависимости от вида тензора  $\varepsilon$  в аксиальном представлении немагнитные прозрачные кристаллы подразделяются на три типа: двуосные —  $\varepsilon^{-1} = a + b(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}')$ , одноосные —  $\varepsilon^{-1} = a + bc \cdot \mathbf{c}$  и оптически изотропные —  $\varepsilon^{-1} = a$ . К первому типу относятся кристаллы низших сингоний, ко второму — средних сингоний и к третьему — кристаллы кубической сингонии.

Аналогично заключаем, что общий вид тензора  $\gamma^{-1}$  (5.25) относится к *двуосным* магнитным кристаллам. Если же  $\mathbf{c}' = \mathbf{c}''$ , т. е.

$$\gamma^{-1} = \varepsilon^{-1} \mu = a + bc \cdot \mu, \quad (5.35)$$

то мы имеем дело с одноосным магнитным кристаллом. Заметим, что все кристаллы средних сингоний одноосны. Более того, поскольку для них (§ 14)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\varepsilon_e - \varepsilon_0) \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \mu = \mu_0 + (\mu_e - \mu_0) \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad (5.36)$$

то  $\varepsilon \mu = \mu \varepsilon$ ,  $\gamma = \tilde{\gamma}$  и

$$\gamma^{-1} = a + bc \cdot \mathbf{c}. \quad (5.37)$$

При этом тензор  $\gamma$  обладает симметрией вращения относительно оси  $s$  в отличие от случая (5.35), где такая симметрия отсутствует.

Обращаясь к общей формуле (5.32), получим для показателей преломления изонормальных волн в случае (5.35)

$$\frac{1}{n_{+}^2} = a \frac{\mu \mu \mu}{|\mu|} + 2b [\mu c] \mu^{-1} [nc], \quad \frac{1}{n_{-}^2} = a \frac{\mu \mu \mu}{|\mu|}. \quad (5.38)$$

Следовательно, несмотря на наличие лишь одной оптической оси  $s$ , в этих кристаллах оба показателя преломления зависят от направления  $\mu$ . Это свойство имеет место и в случае (5.37).

Наконец, возможен случай, когда матрица тензора  $\gamma^{-1}$  пропорциональна единичной:  $\gamma^{-1} = \epsilon^{-1} \mu = a$ . При этом  $\mu = a\epsilon$ , т. е. тензоры магнитной и диэлектрической проницаемости пропорциональны один другому. Этот случай получается из общей формулы (5.25), если положить  $b=0$ . Из (5.32) следует тогда

$$n_{+}^2 = n_{-}^2 = \frac{|\mu|}{a \mu \mu \mu} = \frac{a |\epsilon|}{\mu \epsilon \mu}, \quad \frac{|\mu|}{a \mu \mu \mu} = 1. \quad (5.39)$$

Таким образом, для любого  $\mu$  показатели преломления обеих изонормальных волн имеют одно и то же значение, которое, однако, зависит от направления  $\mu$ . Поэтому кристаллы такого типа были названы *однопреломляющими* [29, 4, 32, 5]. Уравнение (5.26) принимает в данном случае форму

$$(1 + a(\mu^{-1} \mathbf{m} \times)^2) \mathbf{H} = 0.$$

Поскольку (см. (26.61))  $\mu^{-1} \mathbf{m} \times \mu^{-1} = (\mu \mathbf{m}) \times / |\mu|$ , то с учетом (5.39) получим

$$\left( 1 + \frac{a}{|\mu|} (\mu \mathbf{m}) \times \mathbf{m} \times \right) \mathbf{H} = \frac{a}{|\mu|} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{m} = 0,$$

т. е. единственным условием, ограничивающим  $\mathbf{H}$ , является его перпендикулярность к вектору  $\mu \mathbf{n}$ . Аналогично получаем  $\mathbf{n} \in \mathbf{E} = 0$ , следовательно,  $\mathbf{H}(\mathbf{E})$  может быть поляризован произвольным образом в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mu \mathbf{n} \parallel \epsilon \mathbf{n}$ . При этом из  $\mathbf{D} \mathbf{H} = 0$  следует  $\mathbf{E} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ .

В принципе возможно существование однопреломляющих кристаллов любой сингонии. Из (5.39) и (4.50) ясно, что в однопреломляющих кристаллах средних сингоний зависимость  $n$  от  $\mu$  имеет тот же характер, что в необыкновенной волне в одноосных немагнитных кристаллах.

Сейчас мы покажем, что теорию свойств *однородных* магнитных кристаллов путем некоторого переопределения основных величин вообще можно свести к теории немагнитных кристаллов (см. [36, 34]).



Напишем уравнения Максвелла (1.7) для однородного магнитного кристалла в виде

$$\epsilon \dot{\mathbf{E}} = c \nabla \times \mathbf{H}, \quad \mu \dot{\mathbf{H}} = -c \nabla \times \mathbf{E}. \quad (5.40)$$

Рассмотрим матрицу  $\sqrt{\mu}$ , равную квадратному корню из симметричной, положительно определенной матрицы тензора магнитной проницаемости. Такая матрица всегда существует [37], и ее также можно выбрать симметричной и положительно определенной. Умножив уравнения (5.40) на  $\sqrt{\mu}^{-1}$ , запишем их в виде

$$(\sqrt{\mu}^{-1} \epsilon \sqrt{\mu}^{-1}) (\sqrt{\mu} \dot{\mathbf{E}}) = c (\sqrt{\mu}^{-1} \nabla \times \sqrt{\mu}^{-1}) (\sqrt{\mu} \mathbf{H}), \quad (5.41)$$

$$(\sqrt{\mu} \dot{\mathbf{H}}) = -c (\sqrt{\mu}^{-1} \nabla \times \sqrt{\mu}^{-1}) (\sqrt{\mu} \mathbf{E}). \quad (5.42)$$

Вследствие постоянства  $\mu$  можем написать (см. (26.61))

$$\sqrt{\mu}^{-1} \nabla \times \sqrt{\mu}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} (\sqrt{\mu} \nabla) \times. \quad (5.43)$$

Введем обозначения

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{|\mu|}} \mathbf{E} = \mathbf{E}', \quad \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{|\mu|}} \mathbf{H} = \mathbf{H}', \quad (5.44)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\mu|}} \nabla = \nabla', \quad \sqrt{\mu}^{-1} \epsilon \sqrt{\mu}^{-1} = \epsilon'.$$

В результате уравнения (5.41), (5.42) после деления на  $\sqrt{|\mu|}$  будут иметь вид

$$\epsilon' \dot{\mathbf{E}}' = c \nabla' \times \mathbf{H}', \quad \dot{\mathbf{H}}' = -c \nabla' \times \mathbf{E}'. \quad (5.45)$$

Аналогично уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  или

$$\nabla \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \mu \mathbf{H} = 0 \quad (5.46)$$

можно написать в виде

$$(\nabla \sqrt{\mu}) (\sqrt{\mu}^{-1} \epsilon \sqrt{\mu}^{-1}) \sqrt{\mu} \mathbf{E} = 0, \quad (\nabla \sqrt{\mu}) (\sqrt{\mu} \mathbf{H}) = 0,$$

или, деля на  $\sqrt{|\mu|}$ , учитывая (5.41) и то, что вследствие симметрии  $\sqrt{\mu}$  имеем  $\nabla \sqrt{\mu} = \sqrt{\mu} \nabla$ , — в виде

$$\nabla' \epsilon' \mathbf{E}' = 0, \quad \nabla' \mathbf{H}' = 0. \quad (5.47)$$

Сравнивая (4.45), (4.47) с соответствующими уравнениями для немагнитных кристаллов, видим, что первая система уравнений получается из второй путем замены всех величин на

штрихованные. Применительно к плоским волнам это равносильно переходу от системы (5.1) к системе

$$\varepsilon' \mathbf{E}' = -[\mathbf{m}' \mathbf{H}'], \quad \mathbf{H}' = [\mathbf{m}' \mathbf{E}'], \quad (5.48)$$

которая отличается от (5.1), (5.2) переопределением полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  в соответствии с (5.44), а штрихованный вектор рефракции  $\mathbf{m}'$  равен:

$$\mathbf{m}' = \frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{\sqrt{|\mu|}} \mathbf{m} = n \mathbf{n}', \quad \mathbf{n}' = \frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{\sqrt{|\mu|}} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}'^2 = \frac{n \mu n}{|\mu|} \neq 1. \quad (5.49)$$

Таким образом, любое соотношение оптики однородных магнитных кристаллов может быть получено из соответствующего соотношения для немагнитных кристаллов путем замены (5.44), (5.49)\*.

Прделаем в уравнении нормалей (4.7) упомянутую замену:

$$\mathbf{m}'^2 \cdot \mathbf{m}' \varepsilon' \mathbf{m}' + (\mathbf{m}' \times^2 \bar{\varepsilon}')_t + |\varepsilon'| = 0. \quad (5.50)$$

При этом, согласно (5.44), (5.49),

$$\mathbf{m}'^2 = \frac{\mu \bar{\mu} \mathbf{m}}{|\mu|}, \quad \mathbf{m}' \varepsilon' \mathbf{m}' = \frac{\mathbf{m} \varepsilon \mathbf{m}}{|\mu|}, \quad |\varepsilon'| = |\mu^{-1} \varepsilon| = \frac{|\varepsilon|}{|\mu|},$$

$$\bar{\varepsilon}'_1 = \overline{\sqrt{\mu}^{-1} \varepsilon \sqrt{\mu}^{-1}} = \frac{\sqrt{\bar{\mu}} \bar{\varepsilon} \sqrt{\bar{\mu}}}{|\mu|}, \quad \left( \overline{\sqrt{\mu}^{-1}} = \frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{\sqrt{|\mu|}} \right), \quad (5.51)$$

$$(\mathbf{m}' \times^2 \bar{\varepsilon}')_t = \frac{1}{|\mu|^2} ((\sqrt{\bar{\mu}} \mathbf{m}) \times^2 \sqrt{\bar{\mu}} \bar{\varepsilon} \sqrt{\bar{\mu}})_t =$$

$$= \frac{1}{|\mu|^2} \mathbf{m} (\mu \bar{\varepsilon} - (\mu \bar{\varepsilon})_t) \mu \mathbf{m}.$$

Подставляя эти выражения в (5.50), получим уравнение нормалей (5.8) для магнитных кристаллов. Аналогично условие (4.20) для бинормалей в случае магнитных кристаллов принимает вид (5.14).

Симметричный вещественный положительно определенный тензор  $\varepsilon'^{-1}$  (5.44) всегда может быть представлен в аксиальной форме (4.52):

$$\varepsilon'^{-1} = a' + b' (\mathbf{c}'_1 \cdot \mathbf{c}'_2 + \mathbf{c}'_1 \cdot \mathbf{c}'_2), \quad \mathbf{c}'_1{}^2 = \mathbf{c}'_2{}^2 = 1. \quad (5.52)$$

\*) Заметим, что это относится не только к оптическим, но и к другим физическим свойствам однородных магнитных кристаллов, поскольку уравнения Максвелла принимают вид (5.45), (5.47) для любых электромагнитных полей, а не только для плоских волн.

Соответственно уравнение (4.55) запишется в виде

$$a'm'^2 + b' ([m'c'_1] [m'c'_2] \pm \sqrt{[m'c'_1]^2 [m'c'_2]^2}) = 1 \quad (5.53)$$

и выражение для  $\mathbf{H}'_{\pm}$  (см. (4.54)):

$$\mathbf{H}'_{\pm} \parallel \frac{[m'c'_1]}{[m'c'_1]} \pm \frac{[m'_1 c'_2]}{[m'c'_2]} \quad (5.54)$$

Сравним (5.52) с соотношением (5.25) для тензора  $\gamma^{-1}$ , который выражается через  $\epsilon'$  (5.44) следующим образом:

$$\gamma^{-1} = \sqrt{\bar{\mu}}^{-1} \epsilon'^{-1} \sqrt{\bar{\mu}}, \quad (5.55)$$

т. е. отличается от  $\epsilon'^{-1}$  (5.44) преобразованием подобия. Поэтому  $\gamma^{-1}$  и  $\epsilon'^{-1}$  имеют одинаковые собственные значения и минимальные (характеристические) полиномы. Осуществляя над  $\epsilon'^{-1}$  (5.52) преобразование (5.55), получаем

$$\gamma^{-1} = a' + b' (\sqrt{\bar{\mu}}^{-1} c'_1 \cdot \sqrt{\bar{\mu}} c'_2 + \sqrt{\bar{\mu}}^{-1} c'_2 \cdot \sqrt{\bar{\mu}} c'_1). \quad (5.56)$$

Сравнивая с (5.25), находим

$$\begin{aligned} a' &= a, \quad b' = b, \quad c'_1 = \sqrt{\bar{\mu}} c', \quad c'_2 = \sqrt{\bar{\mu}} c'', \\ [ \sqrt{\bar{\mu}} \mathbf{n}, c'_1 ] [ \sqrt{\bar{\mu}} \mathbf{n}, c'_2 ] &= [ \mathbf{nc}' ] \bar{\mu} [ \mathbf{nc}'' ], \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$[ \sqrt{\bar{\mu}} \mathbf{n}, c'_1 ]^2 = [ \mathbf{nc}' ] \bar{\mu} [ \mathbf{nc}' ], \quad [ \sqrt{\bar{\mu}} \mathbf{n}, c'_2 ]^2 = [ \mathbf{nc}'' ] \bar{\mu} [ \mathbf{nc}'' ].$$

С учетом (5.49), подставляя эти выражения в (5.53), получаем уравнение (5.30). Аналогично получаем из (5.54) с помощью (5.49), (5.57) соотношение (5.31).

Таким образом, все соотношения теории магнитных кристаллов автоматически получаются из соответствующих соотношений для немагнитных кристаллов в результате переопределения величин по формулам (5.44), (5.49), (5.57).

Отметим, что в работе [34] был развит аналогичный подход, основанный на введении в магнитных однородных кристаллах метрики, причем метрический тензор  $\mathbf{g}$  определялся через тензор магнитной проницаемости:

$$\mathbf{g} = \mu \sqrt{|\bar{\mu}|}.$$

При этом приходится учитывать различие между ковариантными ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ) и контравариантными ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ) величинами. Изложенный в настоящем параграфе метод позволяет обойтись без введения ко- и контравариантных векторов.

## § 6. НЕОДНОРОДНЫЕ ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ \*)

Неоднородными волнами, как известно, называются экспоненциально затухающие (или усиливающиеся в средах с отрицательным коэффициентом поглощения) плоские волны, у которых в отличие от однородных волн плоскости равных фаз и равных амплитуд непараллельны (см., например, [1]). Такие волны возникают, например, в диэлектриках при полном отражении и в проводящих (поглощающих) средах при наклонном падении на них света. Поскольку в принципе любая среда является в некоторой мере поглощающей, то неоднородные волны представляют собой весьма распространенное явление.

Мы ограничимся здесь рассмотрением неоднородных волн в изотропных средах. Соответственно будем исходить из уравнений Максвелла (1.24), (1.5):

$$\epsilon \mathbf{E} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad \mu \mathbf{H} = [\mathbf{m}\mathbf{E}], \quad (6.1)$$

где  $\epsilon$ ,  $\mu$  — скалярные проницаемости. При этом  $\mathbf{m}\mathbf{E} = \mathbf{m}\mathbf{H} = 0$ . Исключив из этих уравнений  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{H}$ ), получим

$$\mathbf{m}^2 = \epsilon\mu. \quad (6.2)$$

Последнее соотношение выражает условие, при котором в данной среде возможны плоские волны вида (1.22), (1.20). В случае прозрачных сред, несмотря на вещественность  $\epsilon$  и  $\mu$ , этому условию можно удовлетворить в предположении, что вектор рефракции  $\mathbf{m}$  является комплексным вектором

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' - i\mathbf{m}'', \quad (6.3)$$

если имеют место равенства

$$\mathbf{m}'^2 - \mathbf{m}''^2 = \epsilon\mu = n^2, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{m}'\mathbf{m}'' = 0. \quad (6.5)$$

Таким образом, вещественная и мнимая части комплексного вектора рефракции в изотропном диэлектрике должны быть взаимно ортогональны. С помощью (6.3) получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda_0} \mathbf{m}''\mathbf{r}} e^{i\varphi'}, \quad \varphi' = \omega \left( t - \frac{1}{c} \mathbf{m}'\mathbf{r} \right). \quad (6.6)$$

Здесь  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме. Представление  $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{n}^*$ ,  $\mathbf{n}^2 = 1$ ) для полного вектора рефракции  $\mathbf{m}$  теперь невозможно, т. е.  $\mathbf{m}$  нельзя выразить в виде произведения скаля-

\*) Общая теория неоднородных волн была развита в ковариантной форме в работах [4, 9, 38—40, 5].

ра  $n$  и вектора  $\mathbf{n}$ , имеющих прямой физический смысл. Тем не менее для вещественной и мнимой частей комплексного вектора рефракции  $\mathbf{m}$  по отдельности можно написать

$$\mathbf{m}' = n' \mathbf{n}', \quad \mathbf{m}'' = n'' \mathbf{n}'' \quad (n'^2 = n''^2 = 1). \quad (6.7)$$

Очевидно, уравнения  $\mathbf{n}' \mathbf{r} = \text{const}$  и  $\mathbf{n}'' \mathbf{r} = \text{const}$  будут определять соответственно плоскости равной фазы и равной амплитуды (фазовая и амплитудная плоскости), ввиду чего естественно назвать  $\mathbf{n}'$  *фазовой* (волновой) нормалью, а  $\mathbf{n}''$  — *амплитудной* нормалью. На основании (6.5) мы приходим к выводу, что в изотропном диэлектрике затухающая волна всегда неоднородна, причем фазовая и амплитудная плоскости взаимно перпендикулярны. Абсолютные величины вещественной и мнимой частей комплексного вектора рефракции  $\mathbf{m}$  имеют следующий смысл:  $n'$  есть показатель преломления для фазовой скорости, а  $n''$  — коэффициент экстинкции; отношение  $\kappa = n''/n'$  есть коэффициент поглощения. Мы будем называть  $\mathbf{m}'$  вещественным вектором рефракции, а  $\mathbf{m}''$  — вектором экстинкции.

Хотя волна (6.6) при условиях (6.4), (6.5) формально удовлетворяет уравнениям Максвелла, тем не менее в неограниченной среде такие волны невозможны, так как где-либо на бесконечности их амплитуда становится сколь угодно большой. Решение (6.6), удовлетворяющее требованию конечности амплитуды (а следовательно, и энергии) волны, возможно лишь в ограниченной среде. В этом случае к соотношениям (6.4), (6.5) добавляются условия на граничной поверхности, в результате чего  $\mathbf{m}'$  и  $\mathbf{m}''$  могут быть определены.

До сих пор мы предполагали среду прозрачной, т. е. непоглощающей свет. Явление поглощения света средой можно феноменологически описать, предположив, что среда обладает электропроводностью. При этом под воздействием электрического поля волны в среде возникают электрические токи, связанные с выделением тепла и соответственно с диссипацией энергии. Поэтому в уравнениях Максвелла (1.1) теперь следует сохранить член, содержащий ток проводимости  $\mathbf{I}$ , и дополнить их уравнением связи

$$\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E}, \quad (6.8)$$

где  $\sigma$  — электропроводность. В случае кристаллов  $\sigma$  является тензором, который аналогично  $\epsilon$  и  $\mu$  обычно предполагается симметричным и положительно определенным.

Ограничиваясь изотропными средами, как прежде, рассматриваем плоские гармонические волны  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\varphi}$ , ... с фазой (1.20)  $\varphi = \omega \left( t - \frac{1}{c} \mathbf{m} \mathbf{r} \right)$ . Подстановка в уравнения

Максвелла (1.1), (1.2) с учетом (6.8) приводит к уравнениям

$$(\epsilon^0 - i\tau) \mathbf{E} = -[\mathbf{mH}], \quad \mu\mathbf{H} = [\mathbf{mE}], \quad (6.9)$$

где

$$\tau = \frac{4\pi}{\omega} \sigma, \quad \mathbf{D} = \epsilon^0 \mathbf{E}, \quad (6.10)$$

т. е.  $\epsilon^0$  обозначает вещественную диэлектрическую проницаемость. Если ввести комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon = \epsilon^0 - i\tau, \quad (6.11)$$

то уравнения (6.9) принимают вид (ср. (6.1))

$$\epsilon \mathbf{E} = -[\mathbf{mH}], \quad \mu\mathbf{H} = [\mathbf{mE}] \quad (6.12)$$

и отличаются от соответствующих уравнений для прозрачных сред лишь заменой вещественной величины  $\epsilon$  на комплексную. Теперь можно без всяких выкладок использовать многие соотношения, полученные выше. Однако при сохранении формы этих соотношений их физическое содержание в связи с комплексным характером  $\epsilon$  претерпевает существенные изменения. В частности, хотя уравнение (6.2)  $\mathbf{m}^2 = \epsilon\mu$  внешне сохраняет свою форму, однако в раскрытом виде оно гласит

$$\mathbf{m}^2 = \mathbf{m}'^2 - \mathbf{m}''^2 - 2i\mathbf{m}'\mathbf{m}'' = (\epsilon^0 - i\tau)\mu, \quad (6.12a)$$

откуда следует (при вещественном  $\mu$ )

$$\mathbf{m}'^2 - \mathbf{m}''^2 = \epsilon^0\mu, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{m}'\mathbf{m}'' = \tau\mu/2. \quad (6.14)$$

Следовательно, в поглощающих средах в отличие от прозрачных векторы  $\mathbf{m}'$  и  $\mathbf{m}''$  никогда не могут быть перпендикулярны друг к другу. Однако условие (6.14) не запрещает  $\mathbf{m}'$  и  $\mathbf{m}''$  быть параллельными. Последний случай соответствует *однородным* затухающим волнам, т. е. такие волны также могут распространяться в поглощающих средах. Таким образом, в поглощающих средах плоскости равных фаз и равных амплитуд могут образовывать между собой любой угол. В то же время для неоднородных волн в прозрачных средах эти плоскости, как мы видели, всегда взаимно перпендикулярны.

Подчеркнем, что поскольку  $\tau$  и  $\mu$  положительны, то векторы  $\mathbf{m}'$  и  $\mathbf{m}''$  в поглощающих средах всегда образуют между собой *острый угол*.

Согласно общим свойствам комплексных трехмерных векторов (§ 27), мы можем кратко определить однородные и неоднородные волны следующим образом: однородные (неодно-

родные) волны есть плоские волны с линейным (нелинейным) вектором рефракции.

Различие между неоднородными волнами в прозрачных и поглощающих средах определяется тем, что в первом случае  $m^2 = \epsilon\mu = m^{*2}$ , т. е. эллиптический комплексный вектор рефракции является *каноническим* (§ 27), а во втором случае это не имеет места \*). Хотя  $m \neq n\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^*$ , но мы можем по-прежнему определить посредством формулы  $n^2 = \epsilon\mu = m^2$  показатель преломления  $n$  поглощающей среды, который теперь, очевидно, будет комплексным.

Заметим, что в прежних руководствах [27, 28, 41, 42, 10, 11 и др.] для описания распространения неоднородных волн использовались комплексные углы преломления, что делало теорию довольно запутанной. Использование комплексного вектора рефракции, впервые введенного в [4] (см. также [9, 38—40, 5]), позволяет рассматривать свойства неоднородных волн при помощи тех же ковариантных методов, которые развиты для описания однородных волн, и значительно упрощает их теорию \*\*).

Рассмотрим вопрос о поляризации неоднородных волн, используя ковариантные методы § 2. Из (6.1) следует

$$\frac{|\mathbf{H}^2|}{|\mathbf{H}|^2} = \frac{|[\mathbf{m}\mathbf{E}]^2|}{[\mathbf{m}\mathbf{E}][\mathbf{m}^*\mathbf{E}^*]} = \frac{|m^2| \cdot |\mathbf{E}^2|}{|m|^2 |\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{m}^*\mathbf{E}|^2}, \quad (6.15)$$

причем

$$\begin{aligned} |m^2| &= \sqrt{m^2 m^{*2}} = \sqrt{(m'^2 - m''^2)^2 + 4(m'm'')^2} = \\ &= \sqrt{(m'^2 + m''^2)^2 - 4[m'm'']^2}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$|m| = \sqrt{m m^*} = \sqrt{m'^2 + m''^2}. \quad (6.17)$$

Для однородных волн  $[m m^*] = 0$ , следовательно,  $m^* = \alpha m$ , где  $\alpha$  — скаляр, поэтому  $m^* \mathbf{E} = m \mathbf{E} = 0$ . Кроме того,  $|m|^2 = |m^2|$  (§ 27), следовательно,

$$\frac{|\mathbf{H}^2|}{|\mathbf{H}|^2} = \frac{|\mathbf{E}^2|}{|\mathbf{E}|^2}, \quad (6.18)$$

т. е. формы кривых, описываемых  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , будут одинаковы (см. (2.54), (2.55)). Именно поэтому имеет смысл понятие поляризации для однородной волны в целом.

\*) Поскольку в изотропных средах  $m^2 = \epsilon\mu \neq 0$ , то вектор  $\mathbf{m}$  не может быть круговым. Поэтому вышеприведенное определение можно уточнить, сказав, что для неоднородных волн вектор рефракции является *эллиптическим*.

\*\*\*) Значительно позже работ [4, 9, 38—40, 5] приведенные в них результаты частично были получены в [43].

Нормали к плоскостям комплексных векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  соответственно параллельны векторам  $[\mathbf{E}\mathbf{E}^*]$  и  $[\mathbf{H}\mathbf{H}^*]$ . Поэтому условие совпадения плоскостей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеет вид  $\mathbf{H}[\mathbf{E}\mathbf{E}^*]=0$  или  $\mathbf{E}[\mathbf{H}\mathbf{H}^*]=0$  (§ 27). С помощью (6.1) это условие можно написать в виде

$$[\mathbf{m}\mathbf{E}][\mathbf{E}\mathbf{E}^*] = -\mathbf{m}\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}^2 = 0. \quad (6.19)$$

В случае однородных волн, как показано выше,  $\mathbf{m}\mathbf{E}^*=0$ , следовательно, условие (6.19) выполняется, т. е. плоскости  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  всегда совпадают. Эти свойства, общеизвестные для однородных волн, не имеют места для неоднородных волн, поскольку теперь  $|\mathbf{m}^2| \neq |\mathbf{m}|^2$  и в общем случае  $\mathbf{m}^* \mathbf{E} \neq 0$ ,  $\mathbf{E}^2 \neq 0$ . Невыполнение условий (6.18), (6.19) означает, что в неоднородных волнах кривые, описываемые  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , не только не совпадают, но и лежат в разных плоскостях. Поэтому обычное понимание поляризации как некоторого свойства электромагнитной волны в целом для неоднородных волн неприменимо [4, 9, 38—40, 5]. Единственным исключением является случай круговой поляризации. Действительно, возводя в квадрат любое из уравнений (6.1), получим с помощью (6.2)

$$\epsilon \mathbf{E}^2 = \mu \mathbf{H}^2. \quad (6.20)$$

Следовательно, условия  $\mathbf{E}^2=0$  и  $\mathbf{H}^2=0$  всегда имеют место одновременно. С другой стороны, при  $\mathbf{E}^2=\mathbf{H}^2=0$  условие (6.19) удовлетворяется, т. е. имеет место не только совпадение формы кривых  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , но и совпадение их плоскостей.

Поскольку  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{m}\mathbf{E} = 0$ , то, согласно § 27, имеем

$$\mathbf{E} = \pm \frac{i}{\sqrt{\mathbf{m}^2}} [\mathbf{m}\mathbf{E}] = \pm \frac{i}{\sqrt{\epsilon\mu}} [\mathbf{m}\mathbf{E}] = \pm \frac{i}{n} [\mathbf{m}\mathbf{E}]. \quad (6.21)$$

В таком виде может быть выражено условие для круговой поляризации в случае как однородных, так и неоднородных волн. С помощью уравнений Максвелла (6.1) это соотношение можно написать также в виде

$$\mathbf{E} = \pm i \sqrt{\mu/\epsilon} \mathbf{H}, \quad (6.22)$$

т. е. в случае круговой поляризации комплексные векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  отличаются лишь скалярным множителем. Отсюда снова следует, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  одновременно являются круговыми векторами и плоскости их совпадают\*). Мы видим, что при заданном векторе рефракции  $\mathbf{m}$  существуют два вида круговой поляризации неоднородной волны соответственно двум знакам в соотношениях (6.21), (6.22). Чтобы различать эти две возможности, условимся по аналогии с однородными волнами

\*) Вообще соотношение  $\mathbf{E}=\alpha\mathbf{H}$  при наличии уравнений (6.1) можно рассматривать как признак круговой поляризации.



(см. (2.52)) в случае  $\mathbf{E} = +\frac{i}{n}[\mathbf{mE}]$  говорить о «правой» кру-

говой поляризации и в случае  $\mathbf{E} = -\frac{i}{n}[\mathbf{mE}]$  — о «левой» кру-

говой поляризации неоднородной волны. При этом следует, однако, иметь в виду, что для неоднородных волн эта терминология носит формальный характер и ей не соответствуют те простые наглядные геометрические представления, которые имели место в случае однородных волн. Особая роль круговой поляризации проявляется также в том, что всякая неоднородная волна  $\mathbf{E}$  аналогично однородной (см. § 27) однозначно может быть представлена в виде суммы правой и левой круговых неоднородных волн с тем же комплексным вектором рефракции, что у исходной волны. Напишем искомое представление в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-, \quad (6.23)$$

причем

$$\mathbf{E}^\pm = \pm \frac{i}{n}[\mathbf{mE}^\pm]. \quad (6.24)$$

Умножая (6.23) векторно на  $i\mathbf{m}/n$ , получаем с помощью (2.24)

$$\frac{i}{n}[\mathbf{mE}] = \mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-.$$

Последнее соотношение вместе с (6.23) дает (ср.(2.59))

$$\mathbf{E}^\pm = \frac{1}{2} \left( \mathbf{E} \pm \frac{i}{n}[\mathbf{mE}] \right). \quad (6.25)$$

Как следует из этого вывода, разложение (6.23), (6.25) является совершенно однозначным.

Более детальное исследование свойств неоднородных волн можно осуществить с помощью общего решения уравнений Максвелла (6.1) для таких волн. Всякий комплексный вектор можно разложить по трем линейно независимым взаимно ортогональным векторам  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m}^*$  и  $[\mathbf{mm}^*]$  (см. § 27). Поскольку  $\mathbf{mE} = \mathbf{mH} = 0$ , то подобное разложение для  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  не будет содержать  $\mathbf{m}$ , т. е. будет иметь вид

$$\mathbf{E}_0 = a'[\mathbf{mm}^*] + b'[\mathbf{m}[\mathbf{mm}^*]], \quad \mathbf{H}_0 = a''[\mathbf{mm}^*] + b''[\mathbf{m}[\mathbf{mm}^*]].$$

Подставляя эти выражения в (6.12), находим  $\epsilon b' = -a''$ ,  $a' = \mu b''$ . В результате, изменив обозначения постоянных, получим:

$$\mathbf{E}_0 = a'[\mathbf{m}[\mathbf{mm}^*]] + \mu b'[\mathbf{mm}^*], \quad (6.26)$$

$$\mathbf{H}_0 = b'[\mathbf{m}[\mathbf{mm}^*]] - \epsilon a'[\mathbf{mm}^*]. \quad (6.27)$$

Эти выражения тождественно, т. е. при любых значениях скалярных комплексных параметров  $a'$ ,  $b'$ , удовлетворяют основным уравнениям (6.12). Они дают, следовательно, *общее решение* уравнений Максвелла для плоских неоднородных волн с заданным вектором рефракции  $\mathbf{m}$  в любой изотропной среде, как прозрачной, так и поглощающей. Аналогичное решение для однородных волн нельзя написать, так как из одного *линейного* вектора рефракции  $\mathbf{m}$  нельзя построить трех линейно независимых векторов, по которым можно было бы разложить  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$ . Если ввести формально по аналогии с однородными волнами комплексный единичный вектор

$$\mathbf{n} = \mathbf{m}/n, \quad n^2 = 1, \quad (6.28)$$

а также единичный вещественный вектор

$$\mathbf{n}_0 = [\mathbf{n}'\mathbf{n}'']/|[\mathbf{n}'\mathbf{n}'']|, \quad n_0^2 = 1, \quad (6.29)$$

являющийся ортом вектора рефракции  $\mathbf{m}$  (см. § 27), и учесть (6.2), (6.7), то из (6.26), (6.27) получим (поскольку  $[\mathbf{m}\mathbf{m}^*] = +2in'n''|[\mathbf{n}'\mathbf{n}'']|n_0$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= 2in'n''|[\mathbf{n}'\mathbf{n}'']|(a'n[\mathbf{n}\mathbf{n}_0] + \mu b'\mathbf{n}_0) = \\ &= 2i|[\mathbf{m}'\mathbf{m}'']| \sqrt{\mu} (\sqrt{\varepsilon} a'[\mathbf{n}\mathbf{n}_0] + \sqrt{\mu} b'\mathbf{n}_0), \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{H}_0 = 2i|[\mathbf{m}'\mathbf{m}'']| \sqrt{\varepsilon} (\sqrt{\mu} b'[\mathbf{n}\mathbf{n}_0] - \sqrt{\varepsilon} a'\mathbf{n}_0), \quad (6.31)$$

или если ввести комплексные коэффициенты  $a = 2i|[\mathbf{m}'\mathbf{m}'']| \sqrt{\varepsilon} a'$ ,  $b = 2i|[\mathbf{m}'\mathbf{m}'']| \sqrt{\mu} b'$ :

$$\mathbf{E}_0 = \sqrt{\mu} (a[\mathbf{n}\mathbf{n}_0] + b\mathbf{n}_0), \quad (6.32)$$

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\varepsilon} (b[\mathbf{n}\mathbf{n}_0] - a\mathbf{n}_0). \quad (6.33)$$

Очевидно, соотношения (6.32), (6.33) могут быть написаны не только для амплитуд  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$ , но и для полных векторов поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , в последнем случае  $a$  и  $b$  будут зависеть от  $\varphi$ :  $a = a_0 e^{i\varphi}$ ,  $b = b_0 e^{i\varphi}$ . Несмотря на то что неоднородные волны по своей природе гораздо сложнее однородных, наличие общих выражений (6.32), (6.33) чрезвычайно упрощает задачу исследования всех их свойств.

С помощью (6.32) находим после простых вычислений, считая  $\mu = \mu^*$ ,  $\varepsilon = \varepsilon^*$ ,  $|[\mathbf{n}'\mathbf{n}'']| = 1$ , т. е. в прозрачной среде,

$$\mathbf{E}_0^2 = \mu(a^2 + b^2), \quad (6.34)$$

$$|\mathbf{E}_0|^2 = \mu(|a|^2 |n|^2 + |b|^2), \quad (6.35)$$

$$|\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*| = 2i\mu \left( \frac{n'n''}{n^2} |a|^2 n_0 - \text{Im}(ab^* \mathbf{n}) \right). \quad (6.36)$$

Соответствующие выражения для  $\mathbf{H}_0$  получаются сразу, если учесть, что (6.32) переходит в (6.33) при замене  $\mathbf{E}_0 \rightarrow \mathbf{H}_0$ ,  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow -a$ ,  $\mu \rightarrow \varepsilon$ . Таким образом,

$$\mathbf{H}_0^2 = \varepsilon(a^2 + b^2) = \frac{\varepsilon}{\mu} \mathbf{E}_0^2, \quad (6.37)$$

$$|\mathbf{H}_0|^2 = \varepsilon(|b|^2 |\mathbf{n}|^2 + |a|^2), \quad (6.38)$$

$$[\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^*] = 2i\varepsilon \left( \frac{n'n''}{n^2} |b|^2 \mathbf{n}_0 + \text{Im}(a^* b \mathbf{n}) \right). \quad (6.39)$$

Из (6.36) следует  $i\mathbf{n}_0 [\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*] = -2\mu \frac{n'n''}{n^2} |a|^2 < 0$ , поэтому век-

тор  $i[\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*]$ , образующий с направлением обращения по эллипсу левый винт, всегда направлен под тупым углом к вектору  $\mathbf{n}_0$ . То же утверждение справедливо и для  $i[\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^*]$ . В остальном вектор  $i[\mathbf{E}\mathbf{E}^*]$  (или  $i[\mathbf{H}\mathbf{H}^*]$ ), а следовательно, и плоскость изменения  $\mathbf{E}(\mathbf{H})$  при заданном  $\mathbf{m}$  могут быть ориентированы произвольно. Если  $[\mathbf{E}\mathbf{E}^*] = 0$ , то, согласно (6.36),  $a = 0^*$ . В таком случае  $b \neq 0$  (иначе  $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ , т.е. поле отсутствует) и, следовательно,  $[\mathbf{H}\mathbf{H}^*] \neq 0$ . Наоборот, если  $[\mathbf{H}\mathbf{H}^*] = 0$ , то  $b = 0$  и  $a \neq 0$ ,  $[\mathbf{E}\mathbf{E}^*] \neq 0$ .

Таким образом, лишь один из векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  может быть линейным, и в этом случае он направлен вдоль вектора  $\mathbf{n}_0$ , параллельного линии пересечения фазовой и амплитудной плоскостей. Второй из векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  при этом может быть только эллиптическим. Пусть, например,  $[\mathbf{H}\mathbf{H}^*] = 0$ ,  $b = 0$ , тогда (см. (6.29), (6.32))  $\mathbf{E} = \sqrt{\mu} a [\mathbf{n}\mathbf{n}_0]$  и поскольку  $[\mathbf{n}\mathbf{n}_0]^2 = 1$ , то полуоси эллипса  $\mathbf{E}$  направлены вдоль вещественной и мнимой частей вектора  $[\mathbf{n}\mathbf{n}_0]$ . Параметр  $\gamma$  (см. (2.54)) равен  $\gamma = 1/|\mathbf{n}|^2$ , следовательно, отношение полуосей эллипса равно

$$\frac{|\mathbf{n}|^2 - 1}{|\mathbf{n}|^2 + 1} = \frac{|\mathbf{m}|^2 - |\mathbf{m}'|^2}{|\mathbf{m}|^2 + |\mathbf{m}'|^2}. \quad (6.40)$$

Таким образом, эллипс  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости вектора рефракции, совпадает по форме с эллипсом  $\mathbf{m}$  и расположен перпендикулярно ему (§ 2). Направление обхода, как легко проверить, образует левый винт с направлением вектора  $\mathbf{n}_0$ . Ту же форму и ориентацию (в той же плоскости) будет иметь эллипс для  $\mathbf{H}$  при линейном векторе  $\mathbf{E}$ . В наиболее общем случае как  $\mathbf{E}$ , так и  $\mathbf{H}$  будут эллиптическими векторами, причем формы эллипсов различны и они лежат в разных плоскостях. Для совпадения формы эллипсов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  необходимо и доста-

\*) Ввиду линейной независимости векторов  $\mathbf{n}_0$  и  $\mathbf{n}$  оба члена в выражении (6.36) должны обращаться в нуль.

точно, чтобы выполнялось условие (6.18), что дает, согласно (6.34), (6.35), (6.37), (6.38),

$$(|a|^2 - |b|^2)(|n|^2 - 1) = 0. \quad (6.41)$$

Так как  $|n|^2 > |n^2| = 1$ , то искомое условие имеет вид

$$|a| = |b|. \quad (6.42)$$

Рассмотрим случай круговой поляризации. Из  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{H}^2 = 0$  следует (см. (6.34), (6.37))

$$a^2 + b^2 = 0. \quad (6.43)$$

С другой стороны, условие  $[\mathbf{E}\mathbf{E}^*] \parallel [\mathbf{H}\mathbf{H}^*]$  дает (см. (6.36), (6.39))

$$\frac{|a|^2}{|b|^2} = \frac{ab^*}{-ba^*} = \frac{-a^*b}{ab^*}, \quad (6.44)$$

откуда следует (6.43) и наоборот. Таким образом, условия круговой поляризации и совпадения плоскостей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  эквивалентны. Из (6.43) при этом следует  $b = \pm ia$ . Учитывая это, находим из (6.36) направление нормали к плоскости векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$

$$i[\mathbf{E}\mathbf{E}^*] \parallel \frac{n'n''}{n^2} \mathbf{n}_0 \pm \text{Re } \mathbf{n}. \quad (6.45)$$

Плотность электрической и магнитной энергии и вектор Пойнтинга для плоских волн, в том числе неоднородных, в прозрачной изотропной среде выражаются формулами (см. (1.25))

$$\omega_e = \frac{\varepsilon}{32\pi} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)^2, \quad \omega_m = \frac{\mu}{32\pi} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)^2, \quad (6.46)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi} [\mathbf{E} + \mathbf{E}^*, \mathbf{H} + \mathbf{H}^*]. \quad (6.47)$$

Учитывая соотношения (6.6), можем написать

$$\omega_e = \frac{\varepsilon}{16\pi} (|\mathbf{E}|^2 + \text{Re } \mathbf{E}^2) = \bar{\omega}_e + \omega'_e, \quad (6.48)$$

где

$$\bar{\omega}_e = \frac{\varepsilon}{16\pi} |\mathbf{E}|^2 = \frac{\varepsilon}{16\pi} e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0} m'' r} |\mathbf{E}_0|^2, \quad (6.49)$$

$$\omega'_e = \frac{\varepsilon}{16\pi} \text{Re } \mathbf{E}^2 = \frac{\varepsilon}{16\pi} e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0} m'' r} \text{Re} (\mathbf{E}_0^2 e^{2i\varphi'}). \quad (6.50)$$

Очевидно, среднее от  $\omega'_e$  равно нулю ( $\overline{\omega'_e} = 0$ ). Аналогичным образом можно представить магнитную энергию  $\omega_m = \overline{\omega_m} + \omega'_e$ , где

$$\overline{\omega_m} = \frac{\mu}{16\pi} |\mathbf{H}|^2, \quad \omega'_m = \frac{\mu}{16\pi} \operatorname{Re} \mathbf{H}^2. \quad (6.51)$$

Умножая первое уравнение (6.1) на  $\mathbf{E}$ , а второе на  $\mathbf{H}$  и сравнивая, получаем  $\omega'_e = \omega'_m$ , т. е. переменные части электрической и магнитной энергий в прозрачных средах равны между собой. Иначе обстоит дело со средними энергиями. Согласно (6.35), (6.38), имеем

$$\frac{\overline{\omega_e}}{\overline{\omega_m}} = \frac{|a|^2 |\mathbf{n}|^2 + |b|^2}{|b|^2 |\mathbf{n}|^2 + |a|^2}. \quad (6.52)$$

Очевидно, в общем случае  $\overline{\omega_e} \neq \overline{\omega_m}$ . В зависимости от значений  $a$  и  $b$  отношение (6.52) может меняться от  $|\mathbf{n}|^2 = \frac{|\mathbf{m}|^2}{|\mathbf{m}^2|} = \frac{n'^2 + n''^2}{n'^2 - n''^2} = \frac{n'^2 + n''^2}{\epsilon\mu}$  при  $b = 0$  до  $\frac{1}{|\mathbf{n}|^2} = \frac{\epsilon\mu}{n'^2 + n''^2}$  при  $a = 0$ . Таким образом, наименьшее возможное отношение энергий (6.52) соответствует линейному вектору  $\mathbf{E}$ . Наоборот, при линейном  $\mathbf{H}$  магнитная энергия будет наименьшей по сравнению с электрической.

Равенство  $\overline{\omega_e} = \overline{\omega_m}$  имеет место при условии  $|a| = |b|$  (так как  $|\mathbf{n}|^2 > 1$ ). Из (6.42), видим, что тогда эллипсы для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеют одинаковую форму. Наоборот, из совпадения формы эллипсов следует равенство энергий. Таким образом, в неоднородных волнах в отличие от однородных соотношение между электрической и магнитной энергиями зависит от характера «поляризации» волны.

Подставив в (6.46), (6.47)  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} [\mathbf{mE}]$  из (6.1), получим для полной плотности и потока энергии неоднородных волн следующие выражения:

$$\omega = \overline{\omega} + \omega', \quad \omega' = \omega'_e + \omega'_m = \frac{\epsilon}{8\pi} \operatorname{Re} \mathbf{E}^2, \quad (6.53)$$

$$\overline{\omega} = \overline{\omega_e} + \overline{\omega_m} = \frac{1}{16\pi\mu} ((\mathbf{m}^2 + |\mathbf{m}|^2) |\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{m}^* \mathbf{E}|^2), \quad (6.54)$$

$$\mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}} + \mathbf{S}', \quad \mathbf{S}' = \frac{c}{8\pi\mu} \operatorname{Re} (\mathbf{E}^2 \mathbf{m}), \quad (6.55)$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi\mu} (|\mathbf{E}|^2 \operatorname{Re} \mathbf{m} - i [\operatorname{Im} \mathbf{m}, [\mathbf{E} \mathbf{E}^*]]). \quad (6.56)$$

Очевидно,  $\overline{\omega'} = 0$ ,  $\overline{S'} = 0$ . Кроме того, легко убедиться в том, что

$$\overline{S n''} = 0, \quad \overline{S n'} = v \overline{\omega}, \quad (6.57)$$

где  $v = c/n'$  — фазовая скорость неоднородных волн. Следовательно, средний поток энергии в неоднородной волне всегда направлен перпендикулярно вектору экстинкции  $\mathbf{m}''$ . Проекция же вектора  $\mathbf{S}$  на вектор рефракции  $\mathbf{m}'$  удовлетворяет соотношению, которое в случае однородных волн справедливо для вектора  $\mathbf{S}$  в целом:  $\mathbf{S n} = v \omega$ .

Используя (6.35), (6.36), можем написать вместо (6.54), (6.56):

$$\overline{\omega} = \frac{n'^2}{8\pi} e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0} \mathbf{m}'' \cdot \mathbf{r}} (|a|^2 + |b|^2), \quad (6.58)$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0} \mathbf{m}'' \cdot \mathbf{r}} \left( (|a|^2 + |b|^2) \mathbf{m}' - 2 \frac{n' n''}{n} \text{Im}(ab^*) \mathbf{n}_0 \right). \quad (6.59)$$

Переменная часть вектора потока энергии  $\mathbf{S}'$  исчезает в случае круговой поляризации рассматриваемой неоднородной волны ( $\mathbf{E}^2 = 0$ ). В общем же случае о поведении вектора  $\mathbf{S}' \sim \text{Re}(\mathbf{E}_0^2 e^{2i\varphi'} \mathbf{m})$  можно судить с помощью тех же ковариантных критериев, которые были установлены в § 2 для поляризации. Так как вектор  $\mathbf{E}_0^2 \mathbf{m}$ , играющий роль векторной амплитуды для  $\mathbf{S}'$ , лишь скалярным множителем отличается от  $\mathbf{m}$ , то вид кривой, описываемой концом вектора  $\mathbf{S}'$  (отложенного от конца вектора  $\overline{\mathbf{S}}$ ), определяется комплексным вектором рефракции  $\mathbf{m}$  (§ 2). Следовательно,  $\mathbf{S}'$  описывает эллипс, большая и малая полуоси которого по величине и направлению пропорциональны соответственно вещественному вектору рефракции  $\mathbf{m}'$  и вектору экстинкции  $\mathbf{m}''$ .

Направление обхода по отношению к вектору  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярному к плоскости эллипса, определяется, согласно (2.41), знаком выражения

$$i \mathbf{n}_0 [\mathbf{m m}^*] = -2n' n'' < 0.$$

Следовательно, направление обращения вектора  $\mathbf{S}'$  по эллипсу всегда образует правый винт с направлением  $\mathbf{n}_0 = [\mathbf{n}' \mathbf{n}'']$ . Полный вектор  $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}} + \mathbf{S}'$  будет в общем случае описывать конус с эллиптическим сечением.

Обратимся к случаю *поглощающих* изотропных сред. Распространяющиеся в них волны, как однородные, так и неоднородные, будут затухающими. Что касается однородных волн, то их свойства в отношении поляризации будут аналогичны свойствам однородных волн в прозрачных средах: эллипсы векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  будут подобны по форме, расположе-

ны взаимно перпендикулярно в фазовой плоскости волны и направления обхода будут одинаковыми. Однако даже в случае однородных волн имеется известное различие между прозрачными и поглощающими средами.

Для однородных волн  $\mathbf{n}' = \mathbf{n}'' = \mathbf{n}$  и, согласно (6.13), (6.14), имеем в поглощающей среде

$$n'^2 - n''^2 = \varepsilon^0 \mu, \quad n' n'' = \frac{1}{2} \mu \tau. \quad (6.60)$$

При этом (см. (6.3))

$$\mathbf{m} = n \mathbf{n}, \quad n = n' - i n'' = n' (1 - i \kappa), \quad (6.61)$$

где

$$\kappa = \frac{n''}{n'} \quad (6.62)$$

есть коэффициент поглощения. Взяв модуль от обеих частей уравнения (6.2), получим в этом случае

$$|\mathbf{m}|^2 = |n|^2 = n'^2 + n''^2 = |\varepsilon \mu| = \mu |\varepsilon|. \quad (6.63)$$

Вместе с (6.60) это дает

$$n'^2 = \frac{1}{2} (|\varepsilon \mu| + \varepsilon^0 \mu), \quad n''^2 = \frac{1}{2} (|\varepsilon \mu| - \varepsilon^0 \mu). \quad (6.64)$$

Поскольку (см. (6.11))

$$|\varepsilon \mu| = \mu \sqrt{\varepsilon^{02} + \tau^2} = \varepsilon^0 \mu \sqrt{1 + \rho^2}, \quad \rho = \frac{\tau}{\varepsilon^0} = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon^0}, \quad (6.65)$$

то, обозначив

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon^0 \mu}, \quad n_0^2 = \varepsilon^0 \mu = n'^2 - n''^2, \quad (6.66)$$

получим

$$n'^2 = \frac{n_0^2}{2} (\sqrt{1 + \rho^2} + 1), \quad (6.67)$$

$$n''^2 = \frac{n_0^2}{2} (\sqrt{1 + \rho^2} - 1). \quad (6.68)$$

Для коэффициента поглощения будем соответственно иметь

$$\kappa = \sqrt{\frac{n''^2}{n'^2}} = \frac{1}{\rho} (\sqrt{1 + \rho^2} - 1). \quad (6.69)$$

Отсюда видим, что коэффициент поглощения  $\kappa$  не зависит от магнитной проницаемости (если последняя вещественна) и выражается лишь через параметр  $\rho$ . Очевидно,  $\kappa$  может изменяться в пределах от  $\kappa=0$  (при  $\sigma=0$ ) до  $\kappa=1$  (при  $\sigma=\infty$ ).

Уравнения (6.1) можно теперь написать в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu}{n} [\mathbf{nH}], \quad \mathbf{H} = \frac{n}{\mu} [\mathbf{nE}]. \quad (6.70)$$

Обозначим

$$n = |n| e^{-i\delta}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{n''}{n'} = \kappa, \quad (6.71)$$

тогда из второго уравнения (6.70) имеем

$$\mu \mathbf{H} = |n| e^{-i\delta} [\mathbf{nE}]. \quad (6.72)$$

Согласно (6.6),

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i\varphi} = (\mathbf{E}'_0 + i\mathbf{E}''_0) e^{i\varphi}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{i\varphi} = (\mathbf{H}'_0 + i\mathbf{H}''_0) e^{i\varphi}, \end{aligned} \quad (6.73)$$

где

$$\varphi = \varphi' + \frac{2\pi i}{\lambda_0} \mathbf{m}'' \mathbf{r}.$$

Следовательно (см. (6.63)),

$$\mathbf{H}_0 e^{i\varphi} = \frac{|n|}{\mu} [\mathbf{n}, \mathbf{E}_0 e^{i(\varphi-\delta)}]. \quad (6.74)$$

Если  $\delta=0$  (прозрачные среды), то вещественные векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  одновременно достигают экстремальной длины, всегда оставаясь взаимно перпендикулярными. В поглощающих же средах ( $\delta \neq 0$ ), согласно (6.74), фаза вектора  $\mathbf{H}$  отстает от фазы вектора  $\mathbf{E}$  на величину  $\delta$ , следовательно, эллипсы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  обходятся не синфазно. Таким образом, например, когда вектор  $\mathbf{E}$  совпадает с большой осью эллипса, вектор  $\mathbf{H}$  еще не достигает максимального значения. Это отставание тем больше, чем больше  $\sigma$ , т. е. чем сильнее поглощение, причем поскольку  $0 < \kappa < 1$ , то  $0 < \delta < \pi/4$  (6.71).

Для неоднородных волн в поглощающих средах остаются в силе формулы (6.30)—(6.35), однако соотношения (6.36), (6.38), (6.39) претерпевают некоторые изменения, поскольку  $\varepsilon^* \neq \varepsilon$  и  $|\mathbf{n}'\mathbf{n}''| \neq 1$ ,  $n \neq n^*$ :

$$[\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*] = 2i\mu \left( \frac{|\mathbf{m}'\mathbf{m}''|}{|n|^2} |a|^2 \mathbf{n}_0 - \operatorname{Im}(ab^*\mathbf{n}) \right), \quad (6.75)$$

$$|\mathbf{H}_0|^2 = |\varepsilon| (|b|^2 |n|^2 + |a|^2), \quad (6.76)$$

$$[\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^*] = 2i |\varepsilon| \left( \frac{|\mathbf{m}'\mathbf{m}''|}{|n|^2} |b|^2 \mathbf{n}_0 + \operatorname{Im}(a^*b\mathbf{n}) \right). \quad (6.77)$$



В основном выводы, относящиеся к поляризации неоднородных волн в прозрачных изотропных средах, сохраняют силу и в случае поглощающих изотропных сред. Это относится к случаю линейной поляризации одного из векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  или к их круговой поляризации, а также к условию (6.42) совпадения формы эллипсов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Заметим, что в случае круговой поляризации (или совпадения плоскостей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ), согласно (6.75), (6.43), мы имеем

$$[\mathbf{E}\mathbf{E}^*] = C(\mathbf{in} + \mathbf{in}^* \pm [\mathbf{nn}^*]). \quad (6.78)$$

Таким образом, единичный вектор нормали  $\mathbf{N}$  к плоскости векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в случае круговой поляризации неоднородной волны в изотропной среде (как прозрачной, так и поглощающей) определяется одним из двух соотношений:

$$i\mathbf{N}_+ = \langle \mathbf{in}, \mathbf{in}^* \rangle, \quad i\mathbf{N}_- = \langle \mathbf{in}^*, \mathbf{in} \rangle, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{\mathbf{m}^2}}, \quad (6.79)$$

где

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + [\mathbf{ab}]}{1 - \mathbf{ab}} \quad (6.80)$$

— формула «композиции» двух векторов (см. § 29).

Отметим, что в неоднородных волнах плоскость вектора  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$  никогда не может быть перпендикулярна к плоскости вектора рефракции  $\mathbf{m}$ . Действительно, для этого должно выполняться равенство  $[\mathbf{E}\mathbf{E}^*][\mathbf{m}\mathbf{m}^*] = 0$  или  $[\mathbf{E}\mathbf{E}^*]\mathbf{n}_0 = 0$ . Но, согласно (6.75), тогда должно быть  $a = 0$ , т. е.  $[\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*] = 0$ , а в этом случае вектору  $\mathbf{E}$  не соответствует определенная плоскость.

Общие соотношения для плотности энергии поля и вектора Пойнтинга плоской волны в поглощающей изотропной среде имеют тот же вид (6.46), (6.51), что и в диэлектрике, причем в (6.49), (6.50) под  $\epsilon$  подразумевается вещественная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon^0$  (6.11). Поскольку  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} [\mathbf{m}\mathbf{E}]$ , то из (6.51), (6.13), (6.14) имеем для переменной части энергии магнитного поля

$$\omega'_m = \frac{1}{32\pi\mu} (\mathbf{m}^2\mathbf{E}^2 + \mathbf{m}^{*2}\mathbf{E}^{*2}) = \frac{1}{16\pi} (\epsilon^0 \operatorname{Re} \mathbf{E}^2 + \tau \operatorname{Im} \mathbf{E}^2). \quad (6.81)$$

Таким образом, в отличие от неоднородных волн в диэлектриках переменная часть магнитной энергии поля волны не равна соответствующей электрической энергии, а превосходит ее на величину  $\omega'_e - \omega'_m = \tau \operatorname{Im} \mathbf{E}^2 / 16\pi$ , пропорциональную электропроводности среды (6.10). Кроме того, разность  $\omega'_e - \omega'_m$  зависит от поляризации и в случае круговой поляризации обращается в нуль.

Заметим, что *средние* электрическая и магнитная энергии поля волны оказываются *различными* также в случае *однородных* волн:  $[\mathbf{m}\mathbf{m}^*] = 0$ . Действительно, согласно (6.49), (6.51), при этом (см. (6.13))

$$\frac{\bar{\omega}_m}{\omega_e} = \frac{\mu |\mathbf{H}|^2}{\epsilon^0 |\mathbf{E}|^2} = \frac{|[\mathbf{m}\mathbf{E}]|^2}{\epsilon^0 \mu |\mathbf{E}|^2} = \frac{|\mathbf{m}|^2}{\epsilon^0 \mu} = \frac{n'^2 + n''^2}{n'^2 - n''^2} \quad (6.82)$$

или, согласно (6.66)—(6.68),

$$\frac{\bar{\omega}_m}{\omega_e} = \sqrt{1 + \rho^2}. \quad (6.83)$$

Таким образом, и средняя магнитная энергия превышает электрическую, притом тем больше, чем больше  $\rho$ , т. е. электропроводность (см. (6.65)). Для однородных волн в поглощающих изотропных средах имеем также, согласно (6.55) — (6.56),

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi\mu} (n' |\mathbf{E}|^2 + \text{Re}(n\mathbf{E}^2)) \mathbf{n}, \quad (6.84)$$

т. е. поток энергии параллелен волновой нормали, причем

$$\bar{\mathbf{S}} = v \bar{\omega} \mathbf{n}, \quad v = c/n'. \quad (6.85)$$

Отметим, что в общем случае неоднородных волн в поглощающей среде условие (6.18) совпадения формы эллипсов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  по-прежнему сводится к (6.42). Однако в отличие от неоднородных волн в прозрачных средах это условие не равносильно равенству средних энергий  $\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_m$ , которое в поглощающих средах имеет вид  $\epsilon (|a|^2 |n|^2 + |b|^2) = |e| (|b|^2 |n|^2 + |a|^2)$ .

Для среднего вектора Пойнтинга (6.56) в случае неоднородной волны в поглощающей изотропной среде получим, согласно (6.75),

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} = & \frac{cK}{8\pi} \left\{ \left( |a|^2 \frac{\text{Re } m^2}{|n|^2} + |b|^2 \right) \mathbf{m}' + \right. \\ & \left. + 2|a|^2 \frac{\mathbf{m}' \mathbf{m}''}{|n|^2} \mathbf{m}'' - 2[\mathbf{m}' \mathbf{m}''] \text{Im} \left( \frac{ab^*}{n} \right) \right\}, \quad (6.86) \end{aligned}$$

где  $K = e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0} \mathbf{m}'' \mathbf{r}}$  (см. (6.6)). Следовательно, средний вектор потока энергии в поглощающей среде имеет составляющие как в плоскости комплексного вектора рефракции  $\mathbf{m}$ , так и перпендикулярно к ней. Переменная часть потока энергии  $\mathbf{S}'$ , согласно (6.55), лежит в плоскости вектора  $\mathbf{m}$ .

## § 7. ПОГЛОЩАЮЩИЕ НЕМАГНИТНЫЕ КРИСТАЛЛЫ

Как и в изотропных средах (см. § 6), поглощение света в кристаллах может быть описано путем учета электропроводности среды. При этом в дополнительном уравнении связи  $\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E}$  величина  $\sigma$  будет иметь тензорный характер. Аналогично (6.12) основные уравнения Максвелла приводятся к виду

$$\varepsilon' \mathbf{E} = -[\mathbf{mH}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{mE}], \quad (7.1)$$

где  $\varepsilon'$  — комплексный тензор диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\tau, \quad \tau = \frac{4\pi}{\omega} \sigma. \quad (7.2)$$

Тензор электропроводности  $\sigma$  предполагается симметричным, следовательно, таким же является и комплексный тензор  $\varepsilon'$ :

$$\sigma = \tilde{\sigma}, \quad \varepsilon' = \tilde{\varepsilon}'. \quad (7.2a)$$

Теорией оптических свойств поглощающих кристаллов занимались Фойгт [44], Друде [41], Берек [45—47] и многие другие исследователи. Однако общая и строгая теория таких сред ими не была построена. Более того, в их трудах встречаются некоторые неверные утверждения общего характера, которые вошли и в позднейшую научную литературу [10, 27, 28]. Причиной такого положения является сложность и запутанность соотношений, характеризующих распространение электромагнитных волн в поглощающих кристаллах при обычном координатном подходе.

Строгая теория оптических свойств всех возможных видов поглощающих кристаллов была развита в [4, 48—64, 5] на ковариантной основе. Важную роль в ее упрощении играет доказанная в [4, 56, 5] возможность представления произвольного симметричного комплексного тензора в аксиальной форме (4.51) (см. § 28). Мы воспользуемся таким представлением для обратного комплексного диэлектрического тензора (7.2):

$$\varepsilon'^{-1} = a + b(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}'). \quad (7.3)$$

Здесь  $a, b$  — комплексные скаляры,  $\mathbf{c}', \mathbf{c}''$  — комплексные векторы. В отличие от § 4 мы не можем здесь в общем случае нормировать векторы  $\mathbf{c}', \mathbf{c}''$  посредством условий  $\mathbf{c}'^2 = \mathbf{c}''^2 = 1$ , потому что эти векторы могут быть и круговыми. В кристаллах средних сингоний симметричные вещественные тензоры диэлектрической проницаемости и электропроводности, согласно § 14, должны иметь вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}^*, \quad \mathbf{c}^2 = 1, \quad (7.4)$$

где  $\mathbf{c}$  — единичный вещественный вектор, параллельный оси симметрии высшего порядка. Вследствие этого комплексный тензор диэлектрической проницаемости (7.2) принимает аналогичную форму

$$\epsilon' = \epsilon'_o + \epsilon'_1 \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \epsilon'_1 = \epsilon'_e - \epsilon'_o \quad (7.5)$$

с комплексными  $\epsilon'_e, \epsilon'_o$ .

Повторяя в точности вычисления, приведенные в § 4 (см. (4.42) — (4.50)), мы приходим снова к соотношениям, определяющим показатель преломления и электромагнитное поле обыкновенных волн (штрихи опускаем):

$$m_o^2 = \epsilon_o, \quad (7.6)$$

$$\mathbf{H}_o \parallel [m_o [m_o \mathbf{c}]], \quad \mathbf{E}_o \parallel [m_o \mathbf{c}] \quad (7.7)$$

и необыкновенных волн

$$m_e m_e = \epsilon_o \epsilon_e, \quad (7.8)$$

$$\mathbf{H}_e \parallel [m_e \mathbf{c}], \quad \mathbf{E}_e \parallel [m_e [m_e \mathbf{c}]]. \quad (7.9)$$

Если волна является однородной, т. е.  $m = n\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^*$ ,  $n^2 = 1$ , то все поля  $\mathbf{E}_o, \mathbf{H}_o, \mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e$  будут представляться линейными векторами:  $\mathbf{H}_o \parallel [n [n \mathbf{c}]]$  и т. д. Таким образом, однородные волны в поглощающих кристаллах средних сингоний всегда линейно поляризованы так же, как в соответствующих прозрачных кристаллах. Что касается неоднородных волн, то их свойства могут быть исследованы с помощью формул (7.6) — (7.9) и соотношений § 6.

В кристаллах низших сингоний, воспользовавшись представлением (7.3) и повторив вычисления § 4, получим

$$am_{\pm}^2 + b([m_{\pm} \mathbf{c}'] [m_{\pm} \mathbf{c}'] \pm \sqrt{[m_{\pm} \mathbf{c}']^2 [m_{\pm} \mathbf{c}']^2}) = 1, \quad (7.10)$$

$$\mathbf{H}_{\pm} \parallel \sqrt{[m_{\pm} \mathbf{c}']^2 [m_{\pm} \mathbf{c}']} \pm \sqrt{[m_{\pm} \mathbf{c}']^2 [m_{\pm} \mathbf{c}']}. \quad (7.11)$$

Эти формулы полностью определяют все оптические свойства любых поглощающих кристаллов низших сингоний. Поскольку здесь не предполагается линейность вектора рефракции  $\mathbf{m}$ , то они пригодны как для однородных, так и для неоднородных волн.

В случае однородных волн  $m_{\pm} = n_{\pm} \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^*$ ,  $n^2 = 1$  и формулы (7.10), (7.11) для изонормальных волн принимают вид (см. (4.51) — (4.56))

$$\frac{1}{n_{\pm}^2} = a + b([n \mathbf{c}'] [n \mathbf{c}'] \pm \sqrt{[n \mathbf{c}']^2 [n \mathbf{c}']^2}), \quad (7.12)$$

$$\mathbf{H}_{\pm} \parallel \sqrt{[n \mathbf{c}']^2 [n \mathbf{c}']} \pm \sqrt{[n \mathbf{c}']^2 [n \mathbf{c}']}. \quad (7.13)$$

Из (7.12) ясно, что комплексные показатели преломления обеих изонормальных волн совпадают ( $n_+ = n_-$ ) лишь в случае, когда имеет место одно из равенств

$$[nc']^2 = 0, \quad [nc'']^2 = 0. \quad (7.14)$$

Вещественные направления  $n$ , удовлетворяющие условиям  $[nc']^2 = 0$  или  $[nc'']^2 = 0$ , как и в случае прозрачных кристаллов, называются оптическими осями кристалла. При распространении вдоль этих направлений у обеих изонормальных волн совпадают не только фазовые скорости, но и коэффициенты поглощения. При любом другом направлении фазовой нормали  $n$  обе изонормальные волны имеют различные поляризации, фазовые скорости и коэффициенты поглощения. Свойство изонормальных волн с различной поляризацией поглощаться в различной степени получило название *дихроизма*. Для однородных волн в поглощающих кристаллах средних сингоний, согласно (7.7), (7.9), обе изонормальные волны линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. Поскольку в общем случае они имеют различные коэффициенты поглощения\*), то здесь имеет место *линейный дихроизм*. В случае поглощающих кристаллов низших сингоний выражения (7.13), очевидно, представляют в общем случае две эллиптически поляризованных волны, причем

$$H_+ H_- = 0. \quad (7.15)$$

Таким образом, в поглощающих кристаллах низших сингоний две изонормальные однородных волны имеют взаимно перпендикулярные подобные между собой эллипсы поляризации, с одинаковым направлением обхода (§ 2). Поскольку при этом комплексные показатели преломления (и коэффициенты поглощения) различны (см. (7.12)), то мы встречаемся здесь с *эллиптическим дихроизмом*. Нетрудно убедиться, что в поглощающих кристаллах с комплексным тензором  $\epsilon$  (7.2), (7.3) не может быть кругового дихроизма. Действительно, для последнего необходимо, чтобы две изонормальных волны с круговой поляризацией имели различные показатели поглощения. Однако, согласно (7.13), круговая поляризация получается лишь при условии

$$H_{\pm}^2 \sim 2\sqrt{[nc']^2 [nc'']^2} ([nc'] [nc''] \pm \sqrt{[nc']^2 [nc'']^2}) = 0, \quad (7.16)$$

но при этом уравнение (7.12) дает совпадающие значения для комплексных показателей преломления  $n_{\pm}$ , а значит, и для

\*) Заметим, что в поглощающих кристаллах возможны направления  $n$ , вдоль которых совпадают коэффициенты поглощения обеих изонормальных волн при различных коэффициентах преломления и наоборот. Эти и другие свойства поглощающих кристаллов рассмотрены в работах [57—61].

коэффициентов поглощения, т. е. круговой дихроизм отсутствует.

Итак, поглощающие кристаллы средних сингоний, вообще говоря, обладают свойством линейного дихроизма, а кристаллы низших сингоний эллиптически дихроичны.

Условие (7.16) может удовлетворяться только при  $[\mathbf{nc}']^2 = 0$  или  $[\mathbf{nc}'']^2 = 0$ . Действительно, равенство нулю выражения в скобках, входящего в (7.16), возможно, согласно (7.12), лишь если  $am_{\pm}^2 - 1 = 0$ . Но в этом случае аналогично §4 получаем, что  $\mathbf{H} = C\mathbf{m}$ , откуда следует  $\mathbf{E} = -\epsilon^{-1}[\mathbf{mH}] = 0$ , т. е. поле отсутствует.

Таким образом, равенства (7.14) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы однородная волна в поглощающем кристалле была поляризована по кругу. Одновременно эти же условия необходимы и достаточны для того, чтобы комплексные показатели (7.12) двух изонормальных волн совпадали. Следовательно, круговая поляризация волн и совпадение показателей преломления изонормальных однородных волн в немагнитных (негиротропных) кристаллах всегда имеют место одновременно [5].

Если известно, что вектор  $\mathbf{H}$  поляризован по кругу, то уравнение нормалей для соответствующей волны принимает весьма компактную форму. В этом случае, согласно § 27, для вектора  $\mathbf{H}$  справедливо соотношение

$$\mathbf{H} = \pm \frac{i}{\sqrt{m^2}} [\mathbf{mH}]. \quad (7.16a)$$

Поскольку  $\mathbf{H}$  удовлетворяет уравнению

$$(1 + \mathbf{m} \times \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = 0,$$

то, заменив  $\mathbf{m} \times \mathbf{H} = \pm i \sqrt{m^2} \mathbf{H}$ , получим

$$(1 \pm i \sqrt{m^2} \mathbf{m} \times \epsilon^{-1}) \mathbf{H} = 0,$$

откуда следует

$$|1 \pm i \sqrt{m^2} \mathbf{m} \times \epsilon^{-1}| = 1 - m^2 m \epsilon^{-1} m = 0,$$

или

$$m^2 \cdot m \epsilon m - |\epsilon| = 0.$$

Мы получили уже известное нам условие (4.20), определяющее оптические оси, обобщенное на случай поглощающих кристаллов. Из него следует в случае однородных волн простое выражение для комплексного показателя преломления волны, распространяющейся вдоль оптической оси произволь-

ного немагнитного кристалла (прозрачного или поглощающего):

$$n^4 = \frac{|e|}{\pi e \pi}. \quad (7.166)$$

В § 28 показано, что совокупность направлений  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющих условиям (7.14), характерна для любого комплексного симметричного тензора и не зависит от того, каким способом этот тензор представлен в форме (7.3) \*). Как уже упоминалось, такие направления  $\mathbf{n}$  называются оптическими осями поглощающего кристалла. Набор этих осей в решающей степени определяет основные оптические свойства поглощающего кристалла. Напомним, что в случае прозрачных кристаллов число оптических осей лежит в основе их классификации и также определяет все их основные свойства. При этом все кристаллы средних сингоний оптически одноосны, а кристаллы низших сингоний оптически двуосны.

В случае поглощающих кристаллов ситуация значительно более сложная. Прежде всего следует иметь в виду, что в поглощающих кристаллах оптические оси (как направления, вдоль которых совпадают показатели преломления) могут быть двух типов. Согласно § 27, решения уравнения

$$[\mathbf{n}\mathbf{c}]^2 = 1, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}^*, \quad \mathbf{n}^2 = 1 \quad (7.17)$$

имеют вид

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\pm} = \frac{\sqrt{\mathbf{c}^{*2}\mathbf{c}} + \sqrt{\mathbf{c}^2\mathbf{c}^*} \pm i[\mathbf{c}\mathbf{c}^*]}{|\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c}^2|}. \quad (7.18)$$

Если вектор  $\mathbf{c}$  линейный ( $[\mathbf{c}\mathbf{c}^*] = 0$ ), то

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_+ = \mathbf{n}_- = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}^*}{2|\mathbf{c}|}, \quad (7.19)$$

т.е. линейному вектору  $\mathbf{c}$  соответствует одна оптическая ось, параллельная ему. Если вектор  $\mathbf{c}$  круговой ( $\mathbf{c}^2 = \mathbf{c}^{*2} = 0$ ), то

$$\mathbf{n} = \pm i \frac{[\mathbf{c}\mathbf{c}^*]}{|\mathbf{c}|^2}, \quad (7.20)$$

т.е. мы опять-таки имеем одну оптическую ось, перпендикулярную к плоскости кругового вектора  $\mathbf{c}$ , — орт вектора  $\mathbf{c}$  (§ 27). Наконец, в общем случае эллиптического вектора  $\mathbf{c}$  выражение (7.18) определяет две оптические оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной к плоскости вектора  $\mathbf{c}$  и проходящей через большую ось эллипса  $\mathbf{c}$ . При этом направления

\*) Согласно § 28, комплексный симметричный тензор может быть представлен в форме (7.3), вообще говоря, тремя различными способами.

оптических осей  $n_+$  и  $n_-$  расположены симметрично относительно плоскости  $c$  и образуют с ней угол  $\psi$ , определяемый условием (см. § 27)

$$|\sin \psi| = |n_{\pm} N_c| = |[\mathbf{c}\mathbf{c}^*]^2|/|\mathbf{c}|^2 (|\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c}^2|) = 1 - |\mathbf{c}^2|/|\mathbf{c}|^2. \quad (7.21)$$

Если вектор  $c$  линейный, то условие  $[\mathbf{nc}]^2=0$  равносильно условию  $[\mathbf{nc}]=0$  (см. § 27). В этом случае выражения (7.13) при  $[\mathbf{nc}']=0$  или  $[\mathbf{nc}'']=0$  не определяют  $\mathbf{H}$ . Последнее означает, что  $\mathbf{H}$  может быть произвольно поляризован в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{n}$ . Но это как раз то свойство, которым обладают электромагнитные плоские волны в изотропных средах (и при распространении вдоль оптических осей прозрачных кристаллов). Поэтому оптические оси, соответствующие линейным векторам  $c$  (7.17), мы будем называть *изотропными оптическими осями* [4, 5].

Если же вектор  $c$  круговой или эллиптический, то из  $[\mathbf{nc}]^2=0$  не следует  $[\mathbf{nc}]=0$ . Поэтому при  $[\mathbf{nc}']^2=0$ , согласно (7.13), имеем

$$\mathbf{H} \parallel [\mathbf{nc}'], \quad \mathbf{H}^2 = 0. \quad (7.22)$$

Следовательно, в этих случаях направлению  $\mathbf{n}$  соответствует определенная круговая поляризация вектора  $\mathbf{H}$ . Поэтому такие направления были названы *круговыми оптическими осями* [4, 5].

Таким образом, любая оптическая ось характеризуется тем, что вдоль нее может распространяться однородная плоская волна с *единственным значением показателя преломления* (в общем случае комплексного). Различие же между изотропной и круговой оптическими осями сводится к тому, что вдоль первой может распространяться волна любой поляризации, а вдоль второй — только волна с определенной круговой поляризацией.

Резюмируя, можем сказать, что, согласно (7.17)—(7.20), *линейному вектору  $c$  отвечает одна изотропная оптическая ось*, параллельная  $c$ ; *круговому вектору  $c$  отвечает одна круговая оптическая ось*, перпендикулярная к плоскости  $c$ ; *эллиптическому вектору  $c$  отвечают две круговых оптических оси*, симметрично расположенные относительно плоскости  $c$  и лежащие в одной плоскости с большой осью эллипса  $c$ .

Чтобы рассмотреть различные кристаллы низших сингоний с точки зрения возможного числа и характера оптических осей, нужно вспомнить (см. § 28), что тензор (7.3) имеет в качестве собственных векторов

$$[\mathbf{c}'\mathbf{c}''] \quad (7.23)$$

и

$$\sqrt{\mathbf{c}''^2}\mathbf{c}' \pm \sqrt{\mathbf{c}'^2}\mathbf{c}'', \quad (7.24)$$



а в качестве соответствующих собственных значений  $a$  и  $a + b(\mathbf{c}'\mathbf{c}'' \pm \sqrt{\mathbf{c}'^2\mathbf{c}''^2})$ . Теперь перейдем к конкретным сингониям.

**Ромбическая сингония.** В этом случае кристалл имеет три взаимно перпендикулярных плоскости симметрии или оси симметрии 2-го порядка. В отношении свойств тензора второго ранга эти элементы симметрии равноправны (см. § 14). Следствием их является наличие у тензора трех *вещественных* взаимно перпендикулярных собственных векторов. Заметим прежде всего, что в ромбических поглощающих кристаллах, у которых все собственные значения (комплексные) различны, ни один из векторов  $\mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{c}''$  не может быть круговым. Действительно, при  $\mathbf{c}'^2=0$  или  $\mathbf{c}''^2=0$  собственные значения (7.15) совпали бы между собой, и в этом случае (см. (26.104)) тензор (7.3) свелся бы к тензору для одноосного кристалла (7.5). Таким образом, векторы  $\mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{c}''$  могут быть только линейными или эллиптическими и, следовательно, их можно нормировать:  $\mathbf{c}'^2=\mathbf{c}''^2=1$ . Тогда собственные векторы (7.24) принимают вид  $\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}''$ . Поскольку собственные векторы должны быть вещественны (линейны), то  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$  могут быть либо оба линейными, либо оба эллиптическими, так как сумма и разность линейного вектора с эллиптическим не могут одновременно дать линейные векторы.

Отсюда следует, что ромбические поглощающие кристаллы могут иметь либо две изотропных оптических оси, либо четыре круговых оптических оси. В первом случае можно считать  $\mathbf{c}'=\mathbf{c}''^*$ ,  $\mathbf{c}''=\mathbf{c}'^*$ ,  $\mathbf{c}'^2=\mathbf{c}''^2=1$ , и соотношение (7.13) показывает, что однородные волны в таких ромбических кристаллах будут линейно поляризованы для всех направлений нормали  $\mathbf{n}$ . Второй случай, когда  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$  — эллиптические векторы, является наиболее общим для ромбических кристаллов. Покажем, что при этом комплексные показатели преломления вдоль всех четырех круговых оптических осей совпадают. Согласно (7.12), (7.14), для оптической оси имеем в общем случае

$$\frac{1}{n^2} = a + b[\mathbf{nc}'][\mathbf{nc}''] = a + b(\mathbf{c}'\mathbf{c}'' - \mathbf{nc}' \cdot \mathbf{nc}''). \quad (7.25)$$

Формула (7.18) для нормированных векторов ( $\mathbf{c}^2=1$ ) принимает вид

$$n_{\pm} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}^* \pm i[\mathbf{cc}^*]}{1 + |\mathbf{c}|^2}. \quad (7.26)$$

Пусть  $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ ; соответствующие направления  $n_{\pm}$  обозначим  $n_{\pm}'$ , при этом  $n_{+}'\mathbf{c}' = n_{-}'\mathbf{c}' = 1$ . С другой стороны,

$$n_{\pm}'\mathbf{c}'' = \frac{(\mathbf{c}' + \mathbf{c}'^*)\mathbf{c}'' \pm i[\mathbf{c}'\mathbf{c}'^*]\mathbf{c}''}{1 + |\mathbf{c}'|^2}. \quad (7.27)$$

Если векторы  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$  лежат в одной плоскости, то, согласно § 27,  $[\mathbf{c}'\mathbf{c}''^*]\mathbf{c}''=0$  и наоборот, из  $[\mathbf{c}'\mathbf{c}''^*]\mathbf{c}''=0$  следует, что векторы  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$  компланарны. В этом случае формула (7.27) дает  $n_+\mathbf{c}''=n_-\mathbf{c}''$ . Таким образом (см. (7.25)), комплексные показатели преломления, соответствующие двум круговым оптическим осям  $n'_\pm$ , сопряженным с одним и тем же эллиптическим вектором  $\mathbf{c}'$ , совпадают между собой тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$ , входящие в представление (7.3) тензора  $\epsilon^{-1}$ , лежат в одной плоскости. Для ромбических кристаллов последнее условие всегда выполняется. Действительно, собственный вектор  $[\mathbf{c}'\mathbf{c}'']$  тензора (7.3) всегда является линейным:  $[\mathbf{c}'\mathbf{c}'']=C\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}=\mathbf{u}^*$ , поэтому  $\mathbf{c}'\mathbf{u}=\mathbf{c}''\mathbf{u}=0$ , т. е.  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$  лежат в одной плоскости, перпендикулярной к вещественному вектору  $\mathbf{u}$ .

Полагая в (7.26)  $\mathbf{c}=\mathbf{c}''$ ,  $n_\pm=n'_\pm$  и учитывая отмеченное выше свойство, можем написать (см. (7.27))

$$n'_\pm\mathbf{c}'' = \frac{\mathbf{c}'\mathbf{c}'' + \mathbf{c}'^*\mathbf{c}''}{1 + |\mathbf{c}'|^2}, \quad n''_\pm\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{c}''\mathbf{c}' + \mathbf{c}''^*\mathbf{c}'}{1 + |\mathbf{c}'|^2}. \quad (7.28)$$

На основании ортогональности собственных векторов  $(\mathbf{c}' + \mathbf{c}'')(\mathbf{c}' - \mathbf{c}'')=0$  и их линейности  $(\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}'')^* = C(\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}'')$  имеем:

$$(\mathbf{c}' + \mathbf{c}'')(\mathbf{c}'^* - \mathbf{c}''^*) = 0, \quad (\mathbf{c}' - \mathbf{c}'')(\mathbf{c}'^* + \mathbf{c}''^*) = 0,$$

откуда следует

$$|\mathbf{c}'|^2 = |\mathbf{c}''|^2, \quad \mathbf{c}'\mathbf{c}''^* = \mathbf{c}''\mathbf{c}'^*.$$

Таким образом (см. (7.28)),

$$n'_\pm\mathbf{c}'' = n''_\pm\mathbf{c}', \quad n'_\pm\mathbf{c}' = n''_\pm\mathbf{c}'' = 1, \quad (7.29)$$

т. е. комплексные показатели преломления (7.25) совпадают для всех четырех круговых оптических осей в поглощающем ромбическом кристалле. Разумеется, это справедливо и для двух изотропных оптических осей в рассмотренном ранее более простом случае ромбического кристалла, поскольку последний можно рассматривать как частный случай ромбического кристалла с четырьмя круговыми оптическими осями.

С помощью (7.29) легко убедиться также в том, что

$$|n'_+(\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}'')| = |n'_-(\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}'')| = |n''_+(\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}'')| = |n''_-(\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}'')|. \quad (7.30)$$

Это означает, что все четыре оптических оси  $n'_\pm$ ,  $n''_\pm$  образуют одинаковые углы с каждым из собственных направлений ромбического кристалла (т. е. с осями симметрии второго порядка или нормальными к плоскостям симметрии).

**Моноклинные сингония.** В моноклинные кристаллах имеется одна ось симметрии второго порядка или равносильная ей

(в отношении свойств тензоров второго ранга) плоскость симметрии. Согласно § 14, при этом тензор  $\varepsilon^{-1}$  должен иметь вещественный собственный вектор, параллельный оси второго порядка или перпендикулярный плоскости симметрии. Как показано в § 28, всегда можно выбрать такое представление (7.3), что упомянутый вещественный собственный вектор будет параллелен вектору  $[c'c'']$ . При этом оба вектора  $c'$  и  $c''$  будут лежать в основной плоскости моноклинного кристалла (плоскости симметрии или плоскости, перпендикулярной к оси второго порядка). Очевидно, векторы  $c'$ ,  $c''$  не могут быть одновременно линейными, ибо в этом случае мы имели бы рассмотренный выше частный случай ромбического кристалла. Рассмотрим вначале случай, когда ни один из векторов  $c'$ ,  $c''$  не является круговым.

Если оба вектора  $c'$ ,  $c''$  эллиптические, то мы имеем четыре круговых оптических оси. При этом пара оптических осей, сопряженных с каждым из векторов  $c'$  или  $c''$ , будет расположена симметрично относительно основной плоскости кристалла. Кроме того, вдоль обеих осей  $n'_{\pm}$ , сопряженных с  $c'$ , комплексные показатели преломления будут одинаковы, так же как и вдоль осей  $n''_{\pm}$ . Однако показатели, соответствующие  $n'_{\pm}$ , не будут совпадать с теми, которые соответствуют  $n''_{\pm}$  в отличие от ромбических кристаллов. Этот случай моноклинного поглощающего кристалла является наиболее общим.

Когда один из векторов  $c'$  или  $c''$  линейный, то ему соответствует изотропная ось, лежащая в основной плоскости. Такой кристалл имеет, следовательно, две круговых и одну изотропную оптических оси.

Наконец, возможен случай, когда эллиптические векторы  $c'$ ,  $c''$  совпадают между собой:  $c' = c'' = c$  ( $[cc^*] \neq 0$ ). Тогда комплексный диэлектрический тензор принимает форму

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon' c \cdot c, \quad \varepsilon' = \varepsilon_e - \varepsilon_0, \quad [cc^*] \neq 0, \quad c^2 = 1. \quad (7.31)$$

Хотя по внешнему виду этот тензор совпадает с тензором (7.5) для поглощающих кристаллов средних сингоний, однако благодаря эллиптичности вектора  $c$  описывает кристалл с совершенно иными оптическими свойствами. Подчеркнем также, что ни в ромбических, ни в триклинных кристаллах комплексный тензор  $\varepsilon$  не может иметь вида (7.31). Моноклинный кристалл, описываемый (7.31), будет иметь две круговых оптических оси, симметричные относительно главной плоскости кристалла, и комплексные показатели преломления вдоль обеих этих осей будут совпадать.

Поскольку тензор  $\varepsilon$  имеет форму (7.31), совпадающую с (4.43), то, повторяя вычисления, приведенные в § 4, придем к соотношениям, аналогичным (4.49):

$$H_o = C [m_o [m_o c]], \quad m_o^2 = \varepsilon_o, \quad (7.32)$$

$$H_e = C [mc], \quad m_e \varepsilon m_e = \varepsilon_o \varepsilon_e. \quad (7.33)$$

Следовательно, в таких моноклинных поглощающих кристаллах существует обыкновенная волна (7.32) и необыкновенная волна (7.33). Однако в отличие от кристаллов средних сингоний волны (7.32), (7.33) поляризованы эллиптически, и вместо одной изотропной оптической оси имеется две круговых оптических оси  $n_{\pm}$ , определяемые формулой (7.26).

Пусть теперь один из векторов  $c'$ ,  $c''$  в моноклинном кристалле является круговым. Если и второй вектор круговой, то, поскольку оба вектора лежат в одной и той же основной плоскости кристалла, имеются две возможности. Напомним, что, согласно § 27, два круговых вектора  $c'$  и  $c''$ , лежащих в одной плоскости, обязательно связаны одним из соотношений:

$$c'' = Cc'^* \quad (7.34)$$

или

$$c'' = Cc'. \quad (7.35)$$

В случае (7.34) формула (7.3) принимает вид

$$\varepsilon^{-1} = a + b(c'.c'^* + c'^*.c'). \quad (7.36)$$

Но, согласно (28.1), при нормировке  $|c'| = 1$  имеем

$$c'.c'^* + c'^*.c' = 1 - c_o.c_o,$$

где  $c_o$  — вещественный единичный вектор, орт кругового вектора  $c'$  (§ 27). Ясно, что при этом тензор (7.36) сводится к тензору для поглощающего кристалла средних сингоний (7.5). Таким образом, тензор нового типа (и соответственно кристалл с новыми оптическими свойствами) мы получим лишь в случае (7.35). При этом тензор  $\varepsilon$  принимает вид

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \varepsilon'c.c, \quad c^2 = 0, \quad |c| = 1. \quad (7.37)$$

Он отличается от (7.31) тем, что вектор  $c$  является не эллиптическим, а круговым. Такой кристалл можно рассматривать как частный случай по отношению к (7.31), однако с тем существенным отличием, что он имеет лишь одну круговую оптическую ось, определяемую формулой (7.20).

Таким образом, при наличии поглощения возможно существование оптически одноосных моноклинных кристаллов, которые, однако, резко отличаются по своим свойствам от одноосных поглощающих кристаллов средних сингоний вследствие эллиптической (а не линейной) поляризации распространяющихся в них однородных волн и вследствие того, что единственная оптическая ось будет круговой, а не изотропной.

Кроме того, при круговом векторе  $c'$  второй вектор  $c''$  может быть либо эллиптическим, либо линейным. В первом случае мы получим моноклинный кристалл с тремя круговыми оптическими осями, одна из которых перпендикулярна к основной плоскости, а две другие симметрично наклонены по отношению к ней. Во втором случае мы получим моноклинный кристалл с двумя оптическими осями — одной изотропной, лежащей в основной плоскости, и второй круговой, перпендикулярной к ней.

Следовательно, возможно существование шести типов различных по оптическим свойствам поглощающих кристаллов моноклинной сингонии. Из них четыре типа имеют только круговые оптические оси, числом от одной до четырех. Кроме того, два типа имеют одну изотропную оптическую ось в сочетании с одной либо двумя круговыми оптическими осями.

Отметим, что во всех типах моноклинных кристаллов, имеющих круговой вектор  $c'$  (или  $c''$ ), согласно (28.86), два собственных значения  $\epsilon$  совпадают и, согласно (28.86), этот круговой вектор является собственным вектором тензора  $\epsilon^{-1}$  (и  $\epsilon$ ). При этом в случае оптически одноосного моноклинного кристалла с тензором (7.37) все три собственных значения совпадают и равны  $\epsilon_0$ . Что касается собственных векторов, то их у тензора (7.37) только два:  $c$  и  $[cc^*]$ . Легко видеть, что для этого тензора справедливо соотношение  $(\epsilon - \epsilon_0)^2 = 0$ , которое является его минимальным уравнением. Поскольку оно имеет кратные корни, то тензор (7.37) не может быть приведен к диагональному виду ни в каком базисе (см. § 28). То же самое справедливо и для других случаев, когда вектор  $c'$  является круговым.

**Триклинная сингония.** Для поглощающих кристаллов, относящихся к этой сингонии в представлении (7.3), векторы  $c'$ ,  $c''$ , очевидно, не могут одновременно быть линейными, так как это приводит к частному случаю ромбического кристалла. Векторы  $c'$ ,  $c''$  не могут также оба быть круговыми, так как мы получим случай моноклинного кристалла. Действительно, согласно (26.47), имеем при  $c'^2 = c''^2 = 0$

$$[c'c'']. [c'c''] = [c'c'']^2 + c'c'' (c'.c'' + c''.c'),$$

или

$$c'.c'' + c''.c' = c'c'' + \frac{1}{c'c''} d.d, \quad d = [c'c'']. \quad (7.38)$$

Следовательно, этот случай сводится к тензору типа (7.31), характеризующему частный случай моноклинного кристалла. Заметим, что  $c'$  и  $c''$  не могут лежать в одной плоскости, иначе мы придем к кристаллам моноклинной сингонии.

Если оба вектора  $c'$ ,  $c''$  эллиптические, то мы получаем наиболее общий случай триклинного кристалла, имеющего 4 круговых оптических оси. В отличие от аналогичного моноклинного кристалла все эти оси могут быть произвольным образом расположены в пространстве и соответствующие комплексные коэффициенты преломления все различны между собою.

Если  $c'$  — эллиптический, а  $c''$  — линейный векторы, то соответствующий кристалл имеет две круговых и одну изотропную оптических оси с разными показателями преломления и произвольно ориентированные.

Если  $c'$  — круговой, а  $c''$  — эллиптический векторы, то кристалл имеет три произвольно ориентированных круговых оптических оси с различными показателями преломления. У моноклинного кристалла с таким же набором осей последние лежат в одной плоскости и для двух из них показатели преломления совпадают.

Если  $c'$  — круговой, а  $c''$  — линейный, то триклинный кристалл имеет одну круговую и одну изотропную оптических оси, которые произвольно ориентированы в отличие от соответствующего моноклинного кристалла, в котором эти оси должны быть взаимно перпендикулярны.

Частные случаи по отношению к двум последним получаются при наложении условия  $c'c''=0$ . Легко проверить, что из выражения (7.3) для тензора  $\epsilon^{-1}$  при условиях  $c'^2=c'c''=0$ ,  $c''^2=1$  следует

$$(\epsilon^{-1} - a)^3 = 0. \quad (7.39)$$

Если  $c''$  — эллиптический вектор, то, согласно (§ 27), из условия  $c'c''=0$  следует, что  $c'$  пропорционален одному из круговых векторов  $e_{\pm}$ , входящих в представление (27.57) вектора  $c''$ . Это означает, что круговая оптическая ось, сопряженная с вектором  $c'$ , совпадает с одной из круговых оптических осей, сопряженных с вектором  $c''$ , так что в результате кристалл имеет лишь две круговых оптических оси. Такой триклинный кристалл радикально отличается по оптическим свойствам от моноклинного кристалла с двумя круговыми оптическими осями, так как у него нет деления на обыкновенную и необыкновенную волны и комплексные показатели преломления вдоль обеих оптических осей различны.

Если  $c''$  — линейный вектор, то условие  $c'c''=0$  означает, что он параллелен орту вектора  $c'$  и, следовательно, соответствующая  $c'$  изотропная оптическая ось совпадает с круговой оптической осью, сопряженной с круговым вектором  $c'$ . Поэтому такой триклинный кристалл имеет только *одну изотропную оптическую ось* аналогично кристаллам средних сингоний. Однако оптические свойства данного кристалла не имеют ничего общего со свойствами поглощающих кристаллов средних

сингоний, так как в нем нет разделения на обыкновенные и необыкновенные волны и распространяется эллиптически (а не линейно) поляризованный свет.

Заметим, что все рассмотренные выше шесть разновидностей триклинных поглощающих кристаллов могут быть получены из наиболее общего случая, соответствующего двум эллиптическим векторам  $\mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{c}''$  и четырем круговым оптическим осям  $\mathbf{n}'_{\pm}$ ,  $\mathbf{n}''_{\pm}$ . Различные частные случаи получаются, когда мы совмещаем какие-либо две из четырех осей. При этом если совмещенные круговые оптические оси имеют одинаковое направление обращения, то в результате получается одна круговая ось с тем же направлением обращения. Совмещение же двух круговых осей с противоположными направлениями обращения дает изотропную оптическую ось (см. § 27).

Изложенные здесь результаты были получены в [4, 52] (см. также [5]). Прежняя теория поглощающих кристаллов Фойгта — Друде содержала ряд неверных утверждений. Она опиралась на так называемый «принцип переноса» [27], согласно которому все соотношения оптики поглощающих кристаллов должны получаться из соответствующих соотношений для прозрачных кристаллов путем формальной замены вещественных векторов главных осей обычного тензора диэлектрической проницаемости на комплексные векторы «главных осей» комплексного тензора (7.2). При этом ошибочно предполагалось, что такие «комплексные главные оси» всегда существуют. Последнее предположение равносильно допущению, что комплексный симметричный тензор (7.2) всегда может быть приведен к диагональному виду или, что то же самое, он всегда имеет три линейно независимых собственных вектора (которые и являются комплексными главными осями). На основании этих предпосылок в теории Фойгта — Друде предполагалось, что все поглощающие кристаллы низших сингоний обладают четырьмя круговыми (или поворотными, винтовыми) оптическими осями и не предусматривалось наличия у них изотропных оптических осей. В результате все поглощающие кристаллы низших сингоний относились по оптическим свойствам к одному (четырёхосному) типу, аналогично двuosным прозрачным кристаллам.

Однако, как указано в [4, 48], симметричный комплексный тензор диэлектрической проницаемости (7.2) отнюдь не всегда приводится к диагональному виду и поэтому «принцип переноса» неверен. Кроме того, даже в простейшем случае ромбических кристаллов, когда у  $\epsilon$  имеется три вещественных главных оси, т. е. он всегда приводится к диагональному виду, возможно наличие изотропных оптических осей. У моноклинных же и триклинных кристаллов неприводимость  $\epsilon$  к диагональному виду должна быть обычным явлением (см., например, (7.39)).

Поэтому общая и полная теория оптических свойств поглощающих кристаллов наиболее естественно, просто и наглядно может быть построена лишь на ковариантной основе, не связанной с выбором каких-либо фиксированных систем координат. Приведенное выше рассмотрение, выполненное на этой основе, показывает, что поглощающие кристаллы низших сингоний могут быть разделены на 14 разновидностей (вместо одной по теории Фойгта—Друде), отличающихся по своим оптическим свойствам. При этом ромбическая сингония насчитывает два типа, а моноклинная и триклинная — по 6 типов кристаллов. Ниже приводится подробная классификация возможных видов поглощающих кристаллов всех сингоний по числу и характеру их оптических осей.

### *I. Кубическая сингония (и изотропные среды)*

Оптическая изотропия. Тензор  $\epsilon = \epsilon_0$  является скалярной матрицей.

### *II. Средние сингонии*

Тензор  $\epsilon$  имеет вид (7.5):

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon' \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \epsilon' = \epsilon_e - \epsilon_o, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}^*, \quad \mathbf{c}^2 = 1.$$

Минимальное уравнение

$$(\epsilon - \epsilon_o)(\epsilon - \epsilon_e) = 0. \quad (7.40)$$

Тензор  $\epsilon$  приводится к диагональному виду. Имеется одна изотропная ось, параллельная  $\mathbf{c}$  (оси симметрии высшего порядка). Существует разделение на обыкновенную и необыкновенную волны. Однородные волны линейно поляризованы.

### *III. Низшие сингонии*

Тензор  $\epsilon^{-1}$  имеет вид (7.3):

$$\epsilon^{-1} = a + b(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}'),$$

где  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$  могут быть линейными, круговыми или эллиптическими векторами. Оптические оси определяются условиями

$$[\mathbf{n}'_{\pm} \mathbf{c}']^2 = 0, \quad [\mathbf{n}''_{\pm} \mathbf{c}'']^2 = 0,$$

или

$$\mathbf{n}'_{\pm} = \frac{\sqrt{\mathbf{c}'^{*2}} \mathbf{c}' + \sqrt{\mathbf{c}'^2} \mathbf{c}'' \pm i[\mathbf{c}' \mathbf{c}''^*]}{|\mathbf{c}'|^2 + |\mathbf{c}''|^2},$$

$$\mathbf{n}''_{\pm} = \frac{\sqrt{\mathbf{c}''^{*2}} \mathbf{c}'' + \sqrt{\mathbf{c}''^2} \mathbf{c}' \pm i[\mathbf{c}'' \mathbf{c}'^*]}{|\mathbf{c}''|^2 + |\mathbf{c}'|^2}. \quad (7.41)$$



Характеристическое уравнение

$$(\epsilon^{-1} - a)[(\epsilon^{-1} - a - bc'c'')^2 - b'c'^2c''^2] = 0. \quad (7.42)$$

### Ромбические кристаллы

1. Четыре круговых оптических оси. Это общий случай ромбического поглощающего кристалла. Векторы  $c'$  и  $c''$  в представлении (7.2) оба являются эллиптическими ( $c'^2 = c''^2 = 1$ ) и лежат в главной плоскости кристалла. Все собственные векторы тензора  $\epsilon$  вещественны и совпадают с элементами

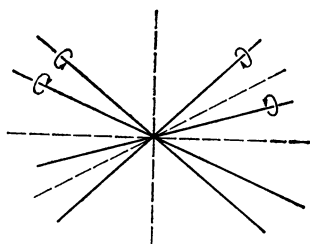


Рис. 7.1

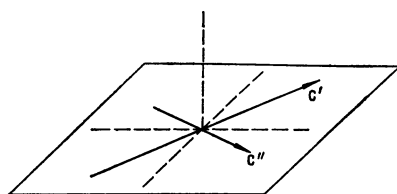


Рис. 7.2

симметрии кристалла. Оптические оси симметрично расположены относительно главных осей тензора  $\epsilon$ , им соответствуют одинаковые показатели преломления. На рис. 7.1 штрихами обозначены главные оси тензора  $\epsilon$ , а сплошными линиями — оптические оси.

2. Две изотропных оптических оси. Векторы  $c'$  и  $c''$  вещественны и единичны. Они совпадают с оптическими осями и лежат в главной плоскости кристалла (рис. 7.2). Однородные волны в таких кристаллах линейно поляризованы.

### Моноклинные кристаллы

Векторы  $c'$ ,  $c''$  лежат в главной плоскости кристалла.

1. Четыре круговых оптических оси. Векторы  $c'$ ,  $c''$  эллиптические. Оптические оси расположены попарно симметрично относительно главной плоскости (рис. 7.3). Показатели преломления для каждой такой пары осей совпадают.

2. Две круговых и одна изотропная оптические оси.  $c'$  — линейный вектор,  $c''$  — эллиптический. Изотропная оптическая ось совпадает с  $c'$  и лежит в главной плоскости. На рис. 7.4 круговые оптические оси отличаются от изотропной наличием стрелок, указывающих направление обращения.

3. Две круговых оптических оси (рис. 7.5).  $c' = c'' = c$  — эллиптический вектор. Тензор  $\epsilon$  имеет вид (7.31) с эллиптическим вектором  $c$ . Существует разделение на обыкновенную и

необыкновенную волны. Минимальное уравнение тензора  $\epsilon$  совпадает с (7.40).

В случаях 1—3 тензор  $\epsilon$  приводится к диагональному виду.

4. Три круговых оптических оси.  $c'$  — круговой вектор,  $c''$  — эллиптический. Оптическая ось, отвечающая круговому вектору, перпендикулярна к главной плоскости (рис. 7.6).

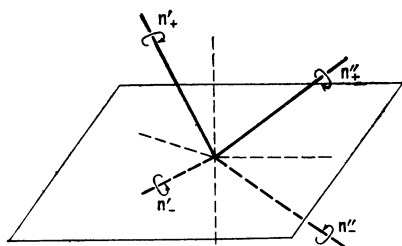


Рис. 7.3

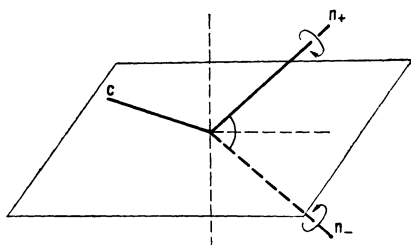


Рис. 7.4

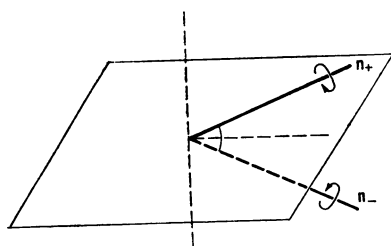


Рис. 7.5

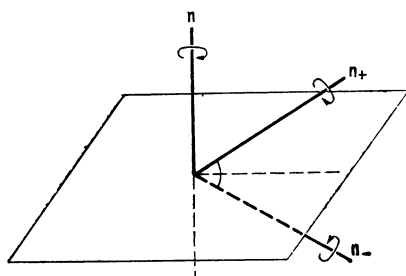


Рис. 7.6

5. Одна круговая и одна изотропная оптические оси.  $c'$  — круговой вектор,  $c''$  — линейный (рис. 7.7).

6. Одна круговая оптическая ось.  $c' = c'' = c$  — круговой вектор,

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon' c \cdot c, \quad c^2 = 0.$$

Минимальное уравнение:  $(\epsilon - a)^2 = 0$ .

В случаях 4—6 тензор  $\epsilon$  не приводится к диагональному виду.

### Триклинные кристаллы

1. Четыре круговых оптических оси.  $c'$ ,  $c''$  — эллиптические векторы.

2. Две круговых и одна изотропная оптические оси.  $c'$  — линейный вектор,  $c''$  — эллиптический. В этих случаях тензор  $\epsilon$  приводится к диагональному виду. В остальных случаях тензор  $\epsilon$  неприводим к диагональному виду.

3. Три круговых оптических оси.  $c'$  — круговой вектор,  $c''$  — эллиптический.

4. Одна круговая и одна изотропная оптические оси.  $c'$  — круговой вектор,  $c''$  — линейный.

5. Две круговых оптических оси.  $c'$  — круговой вектор,  $c''$  — эллиптический,  $c'c''=0$ .

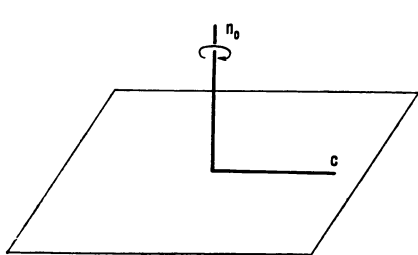


Рис. 7.7

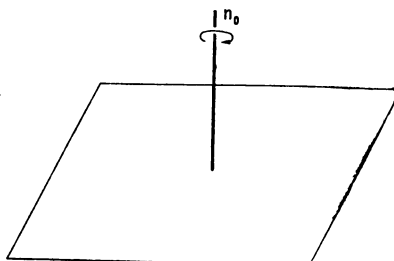


Рис. 7.8

6. Одна изотропная оптическая ось.  $c'$  — круговой,  $c''$  — линейный вектор,  $c'c''=0$ .

В случаях 5 и 6 минимальное уравнение тензора  $\epsilon^{-1}$  (7.2) имеет вид  $(\epsilon^{-1}-a)^3=0$ .

В отличие от моноклинных кристаллов с аналогичным набором оптических осей (рис. 7.3—7.8) в триклинных кристаллах все оптические оси могут иметь совершенно произвольное взаимное расположение и все соответствующие им комплексные показатели преломления различаются между собой.

Рассмотрим подробнее вопрос о распространении волн в поглощающих кристаллах вдоль направлений круговых оптических осей. До сих пор во всем предыдущем изложении мы имели в виду, что любому заданному направлению волновой нормали  $\mathbf{n}$ , будь то в изотропной среде или в кристалле, соответствовали две независимых волны с различными поляризациями. В кристаллах эти две волны были названы изонормальными. В изотропных средах или вдоль направлений изотропных оптических осей в кристаллах могут распространяться волны с любым состоянием поляризации, которое всегда может быть представлено как результат суперпозиции двух независимых волн с какими-либо фиксированными состояниями поляризации. Круговые оптические оси в поглощающих кристаллах принципиально отличаются от всех остальных направлений в том отношении, что, согласно (7.22), им соответствует единственное возможное состояние поляризации. Действительно, согласно (7.22), (7.26), с точностью до произвольного скалярного множителя магнитное поле волн, распространяющихся

ся вдоль круговых оптических осей, выражается следующим образом:

$$\mathbf{H}_{\pm} = [\mathbf{n}_{\pm}\mathbf{c}] = \frac{\pm i(\mathbf{c}^* - |\mathbf{c}|^2\mathbf{c}) - [\mathbf{c}\mathbf{c}^*]}{1 + |\mathbf{c}|^2} \quad (\mathbf{c}^2 = 1). \quad (7.43)$$

Легко убедиться, что при этом

$$[\mathbf{n}_{\pm}\mathbf{H}_{\pm}] = \mp i\mathbf{H}_{\pm}. \quad (7.44)$$

Следовательно, согласно (2.52),  $\mathbf{H}_{+}$  ( $\mathbf{H}_{-}$ ) соответствует право- (лево)циркулярно поляризованной волне с фазовой нормалью  $\mathbf{n}_{+}$  ( $\mathbf{n}_{-}$ ).

Если вектор  $\mathbf{c}$  круговой, то  $\mathbf{c}^2 = 0$  и, согласно (7.20),

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\pm} = \pm i \frac{[\mathbf{c}\mathbf{c}^*]}{|\mathbf{c}|^2},$$

причем для  $\mathbf{H}$  в соответствии с (7.13), (7.22) получаем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\pm} = [\mathbf{n}_{\pm}\mathbf{c}] = \pm \frac{i}{|\mathbf{c}|^2} [[\mathbf{c}\mathbf{c}^*]\mathbf{c}] = \mp i\mathbf{c}. \quad (7.45)$$

Поскольку множитель  $\pm i$  не играет роли, то направлению (7.20) при круговом  $\mathbf{c}$  соответствует опять-таки лишь один независимый вектор  $\mathbf{H} = \mathbf{C}\mathbf{c}$ .

Однако то свойство, что заданному направлению фазовой нормали в любой среде соответствует два линейно независимых решения уравнений Максвелла в виде плоских волн, имеет слишком фундаментальный характер, чтобы оно могло терять силу для каких-то направлений  $\mathbf{n}$ . Это тем более очевидно, что переход от произвольного направления  $\mathbf{n}$  к направлению круговой оптической оси всегда можно совершить непрерывным путем и при этом одно из двух независимых решений никак не может скачкообразно исчезнуть. Действительно, как показал еще Фохт [65], вдоль направления круговой оптической оси  $\mathbf{n}$  также могут распространяться две независимых волны, которые, однако, отличаются не поляризацией, а более фундаментальным образом. Приводимое ниже рассмотрение этого вопроса основано на работе [64].

В отличие от § 1 мы будем искать решение уравнения Максвелла

$$[\nabla\mathbf{H}] = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}, \quad [\nabla\mathbf{E}] = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}}, \quad \nabla\mathbf{H} = \nabla\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (7.46)$$

в более общей форме, чем (1.22), а именно:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\zeta) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(\zeta) e^{i\omega t}, \quad (7.47)$$

где

$$\zeta = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}r, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}^*, \quad n^2 = 1. \quad (7.48)$$

Обычные решения (1.22)

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - n\zeta)}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - n\zeta)}$$

отличаются от (7.47), (7.48) тем, что для  $\mathbf{H}(\zeta)$  и  $\mathbf{E}(\zeta)$  выбирается гармоническая зависимость  $e^{-in\zeta}$ . Подчеркнем, что функции (7.47) также имеют характер плоских волн, но более общего вида.

Подставляя (7.47), (7.48) в (7.46), приходим к системе уравнений

$$[\mathbf{nH}'] = i\mathbf{D}, \quad [\mathbf{nE}'] = -i\mathbf{H}, \quad \mathbf{nH}' = \mathbf{nD}' = 0, \quad (7.49)$$

где штрих означает производную по  $\zeta$ . Умножим первое уравнение (7.49) на  $\mathbf{n}^\times$  и возьмем производную по  $\zeta$ :

$$\mathbf{H}'' = -i[\mathbf{nD}'] = -i[\mathbf{n}, \epsilon\mathbf{E}']. \quad (7.50)$$

С другой стороны, умножая второе уравнение (7.49) на  $(\mathbf{n}\epsilon)^\times$ , получим

$$\mathbf{E}' = \frac{i}{\mathbf{n}\epsilon\mathbf{n}} (\mathbf{n}\epsilon)^\times \mathbf{H}. \quad (7.51)$$

Подставляя (7.51) в (7.50), найдем

$$\mathbf{H}'' = \kappa\mathbf{H}, \quad (7.52)$$

где (см. (26.58))

$$\kappa = \frac{1}{\mathbf{n}\epsilon\mathbf{n}} \mathbf{n}^\times \epsilon (\mathbf{n}\epsilon)^\times = \frac{1}{\mathbf{n}\epsilon\mathbf{n}} \mathbf{n}^\times \epsilon^{-2} \bar{\epsilon} = \frac{|\epsilon|}{\mathbf{n}\epsilon\mathbf{n}} \mathbf{n}^\times \epsilon^{-1}. \quad (7.53)$$

Нас интересуют направления волновой нормали  $\mathbf{n}$ , совпадающие с круговыми оптическими осями поглощающего кристалла, для которого  $\epsilon^{-1}$  имеет вид (7.3). В этом случае, согласно (7.166), имеем

$$|\epsilon|/\mathbf{n}\epsilon\mathbf{n} = n^4, \quad (7.54)$$

где  $n$  — комплексный показатель преломления вдоль рассматриваемой круговой оптической оси.

Интегрируя равенство  $\mathbf{nH}' = 0$ , получим  $\mathbf{nH} = C$ , где  $C$  — константа. Однако поле, содержащее постоянную составляющую в направлении  $\mathbf{n}$ , не имеет отношения к оптическим полям, поэтому  $C = 0$ . Из  $\mathbf{nH} = 0$  следует теперь, что решение уравнения (7.52) можно искать в виде

$$\mathbf{H}(\zeta) = f_1(\zeta) \mathbf{e} + f_2(\zeta) \mathbf{e}^*, \quad (7.55)$$

где  $e$  — фиксированный круговой вектор (см. (27.25)),

$$e^2 = e^{*2} = 0, \quad |e| = 1, \quad [ne] = ie, \quad [ne^*] = -ie^*. \quad (7.55a)$$

Действительно, выражение (7.55) вытекает из того, что любой трехмерный вектор может быть представлен в аксиальной базе  $n, e, e^*$  (§ 27), а благодаря условию трансверсальности  $nH=0$  компонента  $H$  вдоль  $n$  отсутствует. Подставляя (7.55) в (7.52) и умножая на  $e, e^*$ , получим

$$f'' = Af, \quad (7.56)$$

где

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} exe^* & e^*xe^* \\ exe & e^*xe \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

Таким образом,  $f$  является двумерным вектором, а  $A$  — постоянной  $2 \times 2$ -матрицей. Если бы  $f$  и  $A$  были числами, то общее решение уравнения (7.56) имело бы хорошо известный вид

$$f = e^{\sqrt{A}t} f_+^0 + e^{-\sqrt{A}t} f_-^0, \quad (7.58)$$

где  $f_{\pm}^0$  — произвольные числовые константы. Но это решение полностью пригодно и в нашем случае, когда  $A$  — постоянная матрица, если  $f_{\pm}^0$  — произвольные постоянные двумерные векторы. При этом, разумеется, под  $\sqrt{A}$  следует понимать  $2 \times 2$ -матрицу:

$$\sqrt{A} = \gamma, \quad \gamma^2 = A. \quad (7.59)$$

Справедливость этого утверждения следует из того, что

$$e^{\gamma \zeta} = 1 + \gamma \zeta + \frac{1}{2} \gamma^2 \zeta^2 + \dots + \frac{1}{k!} \gamma^k \zeta^k + \dots,$$

$$(e^{\gamma \zeta})' = \gamma + \gamma^2 \zeta + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \gamma^k \zeta^{k-1} + \dots = \gamma e^{\gamma \zeta}, \quad (7.59a)$$

$$(e^{\gamma \zeta})'' = \gamma^2 e^{\gamma \zeta} = A e^{\gamma \zeta}.$$

Итак, чтобы получить решение системы уравнений (7.56), достаточно найти матрицу  $\gamma$  (7.59), являющуюся квадратным корнем из матрицы  $A$ . При вычислении матрицы  $A$ , согласно (7.57), (7.53), (7.54), следует учитывать, что (см. (4.51))

$$e^{-1} = a + b(c' \cdot c'' + c'' \cdot c'), \quad n = -i[ee^*], \quad (7.60)$$

и поскольку  $n$  — круговая оптическая ось, то

$$[nc']^2 = 0 \quad (7.61)$$

или  $[\mathbf{nc}'']^2 = 0$ . Подставив выражение для  $\mathbf{n}$  (7.60) в (7.61), получим

$$[\mathbf{c}' [\mathbf{ee}^*]]^2 = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}' \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{c}' \mathbf{e})^2 = -2\mathbf{c}' \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*, \quad (7.62)$$

откуда следует, что либо  $\mathbf{c}' \mathbf{e} = 0$ , либо  $\mathbf{c}' \mathbf{e}^* = 0$ . Заметим, что не может быть одновременно  $\mathbf{c}' \mathbf{e} = \mathbf{c}' \mathbf{e}^* = 0$ , так как в таком случае  $\mathbf{c}' = C[\mathbf{ee}^*]$  и, следовательно,  $\mathbf{c}'$  будет линейным вектором, которому соответствует изотропная, а не круговая оптическая ось. Учтем, кроме того, что, согласно (7.55а),  $\mathbf{en}^{\times 2} = -\mathbf{n}^{\times 2} \mathbf{e} = -\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}^* \mathbf{n}^{\times 2} = -\mathbf{e}^*$ . В результате получаем для элементов матрицы  $A$  (7.57) следующие выражения при  $\mathbf{c}' \mathbf{e} = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \mathbf{e} \mathbf{e}^* &= \mathbf{e}^* \mathbf{e} \mathbf{e} = A_{11} = A_{22} = -n^4 (a + bc' \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{c}'' \mathbf{e}), \\ \mathbf{e} \mathbf{e} \mathbf{e} &= A_{21} = 0, \quad \mathbf{e}^* \mathbf{e} \mathbf{e}^* = A_{12} = -2n^4 bc' \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{c}'' \mathbf{e} \end{aligned} \quad (7.63)$$

и при  $\mathbf{c}' \mathbf{e}^* = 0$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = -n^4 (a + bc' \mathbf{e} \cdot \mathbf{c}'' \mathbf{e}^*), \\ A_{12} &= 0, \quad A_{21} = -2n^4 bc' \mathbf{e} \cdot \mathbf{c}'' \mathbf{e}^*. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Рассмотрим формулу (7.25) для показателей преломления вдоль оптических осей. Согласно (7.60),

$$[\mathbf{nc}'] = i[\mathbf{c}' [\mathbf{ee}^*]] = i(\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}' \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{c}' \mathbf{e}),$$

поэтому при  $\mathbf{c}' \mathbf{e} = 0$  имеем  $[\mathbf{nc}'] = ic' \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}$ , а при  $\mathbf{c}' \mathbf{e}^* = 0$  будет  $[\mathbf{nc}'] = -ic' \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*$ . В первом случае, согласно (7.25), получим

$$\mathbf{e} \mathbf{e}^{-1} \mathbf{e}^* = 1/n^2 = a + ibc' \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} [\mathbf{nc}'] = a + bc' \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{c}'' \mathbf{e},$$

а во втором случае аналогично имеем

$$\mathbf{e} \mathbf{e}^{-1} \mathbf{e}^* = 1/n^2 = a + bc' \mathbf{e} \cdot \mathbf{c}'' \mathbf{e}^*.$$

С учетом этих соотношений получим для матрицы  $A$ , согласно (7.63),

$$\begin{aligned} A &= -n^2 \begin{pmatrix} 1 & 2g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -n^2 (1 + 2g\rho), \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ g &= n^2 bc' \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{c}'' \mathbf{e} \end{aligned} \quad (7.65)$$

и, согласно (7.64),

$$A = -n^2 (1 + 2g_1 \vec{\rho}), \quad g_1 = n^2 bc' \mathbf{e} \cdot \mathbf{c}'' \mathbf{e}^*, \quad \rho^2 = \vec{\rho}^2 = 0. \quad (7.66)$$

Легко видеть, что в любых случаях минимальное уравнение для  $A$  имеет вид  $(A + n^2)^2 = 0$ . Поскольку оно имеет двукратный корень  $-n^2$ , то матрица  $A$  неприводима к диагональному виду (§ 25). Именно это обстоятельство и обуславливает особый характер решений уравнений Максвелла для плоских волн в случае круговых оптических осей. Поскольку  $\rho^2 = 0$ , то

не представляет никакого труда найти матрицу  $\gamma = \sqrt{A}$ . Легко проверить, что эта матрица в случае (7.65) имеет вид

$$\sqrt{A} = \gamma = \pm in(1 + g\rho) \quad (7.67)$$

и в случае (7.66)

$$\sqrt{A} = \gamma = \pm in(1 + g_1\tilde{\rho}). \quad (7.68)$$

Матрицы  $e^{\pm n\zeta}$ , входящие в решение (7.58), в случае (7.67) имеют вид (см. (7.48))

$$e^{\pm n\zeta} = e^{\pm in\zeta} e^{\pm ing\rho\zeta} = e^{\pm i \frac{\omega}{c} mr} (1 \pm ing\rho\zeta), \quad m = n\rho, \quad (7.69)$$

и в случае (7.68)

$$e^{\pm n\zeta} = e^{\pm i \frac{\omega}{c} mr} (1 \pm ing_1\tilde{\rho}\zeta). \quad (7.70)$$

Здесь учтено разложение (7.59a) и свойство  $\rho^2 = \tilde{\rho}^2 = 0$ .

Скалярный множитель  $e^{\pm i \frac{\omega}{c} mr}$  вместе с  $e^{i\omega t}$ , входящим в (7.47), дает общий фазовый множитель  $e^{i\omega(t \pm \frac{1}{c} mr)}$ , характерный для плоской волны. Два знака в экспоненте этого множителя соответствуют двум противоположным направлениям распространения фазы с одной и той же фазовой скоростью, т. е. двум волнам, движущимся навстречу одна другой. Ограничиваясь, как обычно, рассмотрением одной такой волны, возьмем нижний знак в экспоненте фазового множителя. При этом последний примет обычный вид (1.20), (1.22). Соответственно в общем решении (7.58) оставляем один второй член. Таким образом, решение уравнения (7.56), (7.57) возьмем в виде

$$f = e^{-ikmr} (1 - ing\rho\zeta) f^0, \quad k = \omega/c, \quad (7.71)$$

при  $c'e = 0$  и в виде

$$f = e^{-ikmr} (1 - ing_1\tilde{\rho}\zeta) f^0 \quad (7.72)$$

при  $c'e^* = 0$ . Здесь

$$f^0 = \begin{pmatrix} f_1^0 \\ f_2^0 \end{pmatrix} \quad (7.73)$$

— произвольный постоянный двумерный вектор, следовательно, как и должно быть, полученное решение будет представлять собой суперпозицию двух линейно независимых волн и соответственно будет зависеть от двух произвольных констант  $f_1^0, f_2^0$ .

Чтобы получить решение для  $\mathbf{H}(\zeta)$  (7.55) в явном виде, используем (7.57), (7.65) и (7.71)—(7.73). В результате получим при  $c'e = 0$

$$f_1 = e^{-ikmr} (f_1^0 - if_2^0 kg mr), \quad f_2 = e^{-ikmr} f_2^0 \quad (7.74)$$



и при  $c'e^* = 0$

$$f_1 = e^{-ikmr} f_1^0, \quad f_2 = e^{-ikmr} (f_2^0 - if_1^0 k g_1 mr). \quad (7.75)$$

Окончательно для  $\mathbf{H}$  (7.47), (7.55) получается выражение при  $c'e = 0$

$$\mathbf{H} = e^{i\varphi} [f_1^0 \mathbf{e} + f_2^0 (\mathbf{e}^* - ik g_1 mr \cdot \mathbf{e})], \quad (7.76)$$

$$\varphi = \omega t - kn\zeta = \omega \left( t - \frac{1}{c} mr \right)$$

и при  $c'e^* = 0$

$$\mathbf{H} = e^{i\varphi} [f_1^0 (\mathbf{e} - ik g_1 mr \cdot \mathbf{e}^*) + f_2^0 \mathbf{e}^*]. \quad (7.77)$$

Мы видим, что в каждом из рассматриваемых двух случаев наряду с обычной волной, поляризованной по кругу ( $f_1^0 \mathbf{e} e^{i\varphi}$  или  $f_2^0 \mathbf{e}^* e^{i\varphi}$ ) вдоль круговой оптической оси, возможно распространение также волны иного типа, у которой амплитуда содержит линейную зависимость от координат  $f_2^0 (\mathbf{e}^* - ik g_1 mr \cdot \mathbf{e}) e^{i\varphi}$  или  $f_1^0 (\mathbf{e} - ik g_1 mr \cdot \mathbf{e}^*) e^{i\varphi}$ . У волн  $e^{i\varphi} \mathbf{e}$  или  $e^{i\varphi} \mathbf{e}^*$  амплитуда убывает экспоненциально ввиду комплексного значения показателя преломления  $n$ . У новых волн, которые можно назвать волнами Фохта, характер изменения амплитуды иной, поскольку наряду с экспоненциальным фактором имеется еще линейная зависимость от координат. Напишем

$$mr = n\pi r = nd, \quad (7.78)$$

где  $d$  — расстояние, пройденное фазовой плоскостью волны по направлению нормали  $\mathbf{n}$ . Тогда квадрат модуля той части амплитуды, которая линейно зависит от  $d$ , при  $c'e = 0$  имеет вид

$$|\mathbf{e}^* - ik g_1 nd \mathbf{e}|^2 = 1 + k^2 d^2 |g_1 n|^2. \quad (7.79)$$

Аналогично при  $c'e^* = 0$  имеем

$$|\mathbf{e} - ik g_1 nd \mathbf{e}^*|^2 = 1 + k^2 d^2 |g_1 n|^2. \quad (7.79a)$$

Согласно этой зависимости, энергия волны должна была бы квадратично возрастать с увеличением  $d$ . Однако этот рост заведомо будет подавляться благодаря экспоненциальному затуханию, вызванному множителем  $e^{i\varphi}$ .

Заметим, что из (7.49), (7.76) вытекают следующие выражения для электрической индукции и электрического поля волны Фохта:

$$\mathbf{D} = in [(f_1^0 + g f_2^0 - in \zeta g f_2^0) \mathbf{e} - f_2^0 \mathbf{e}^*], \quad (7.79b)$$

$$\mathbf{E} = in [(f_1^0 + g f_2^0 - in \zeta g f_2^0) \varepsilon^{-1} \mathbf{e} - f_2^0 \varepsilon^{-1} \mathbf{e}^*].$$

Аналогично из (7.49), (7.77) имеем

$$\mathbf{E} = in [(f_1^0 + g_1 f_2^0 - in \zeta g_1 f_2^0) \mathbf{e}^{-1} \mathbf{e}^* - f_2^0 \mathbf{e}^{-1} \mathbf{e}]. \quad (7.79\text{в})$$

Интересным свойством волн Фохта является то, что их поляризация меняется в зависимости от глубины проникновения в кристалл. Действительно, отбрасывая фазовый множитель  $e^{i\varphi}$  и полагая  $f_1^0=0$ , можем написать для амплитуды магнитного поля выражение (при  $c'e=0$ )

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}^* - ikd g n \mathbf{e}. \quad (7.79\text{г})$$

Отсюда следует (см. (7.79))  $|\mathbf{H}_0|^2 = 2kd |ng|$ ,  $|\mathbf{H}_0|^2 = 1 + k^2 d^2 |ng|^2$ . Таким образом, параметр, определяющий поляризацию, равен (см. (2.54))

$$\frac{|\mathbf{H}_0|^2}{|\mathbf{H}_0|^2} = \frac{2kd |ng|}{1 + k^2 d^2 |ng|^2}$$

и отношение квадратов полуосей эллипса (2.55)—

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{(1 - kd |ng|)^2}{(1 + kd |ng|)^2}. \quad (7.80)$$

Очевидно, при  $d=0$  мы имеем круговую поляризацию, соответствующую вектору  $\mathbf{e}^*$  (см. (7.79а)), а при увеличении  $d$  от нуля до  $d_0 = (k|ng|)^{-1}$  поляризация меняется от круговой до линейной. Из (7.65) ясно, что  $g$  — сравнительно малая величина, поскольку она пропорциональна параметру  $b$  (7.60), который характеризует анизотропию кристалла. Однако поскольку волновое число  $k$  для оптических волн велико, то  $d_0$  мало. При  $d=d_0$  получим линейную поляризацию, а при  $d > d_0$  формулу (7.80) можно написать в виде

$$\frac{b}{a} = \frac{d - d_0}{d + d_0} \quad (d > d_0 = (k|ng|)^{-1}).$$

При дальнейшем увеличении  $d$  поляризация будет изменяться от линейной ко все более округлому эллипсу. При  $d=\infty$  свет снова будет циркулярно поляризованным соответственно вектору  $\mathbf{e}$  (7.79а), т. е. с противоположным направлением обращения.

Таким образом, в тонком слое кристалла толщиной  $d_0$  поляризация волны Фохта быстро меняется от круговой ( $\mathbf{e}^*$ ) до линейной, а затем на всей остальной бесконечной толщине кристалла происходит постепенное изменение поляризации от линейной до круговой, соответствующей вектору  $\mathbf{e}$  (см. (7.76)). В этом рассуждении мы не учитываем затухания, связанного с фактором  $e^{i\varphi}$ , которое не меняет формы кривой поляризации, а только уменьшает ее размеры.

В [4, 5] (см. §4) было введено понятие *вектора лучевой рефракции* применительно к оптике прозрачных немагнитных кристаллов. Этот вектор  $\mathbf{p}$  (4.31) по направлению параллелен вектору потока энергии  $\mathbf{S}$ , а его величина обратна показателю преломления для лучевой скорости  $s$ . С помощью вектора  $\mathbf{p}$  систему обычных уравнений Максвелла для плоских волн (4.35)

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{m}\mathbf{E}], \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (7.81)$$

можно записать в равносильной форме (см. (4.36))

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{p}\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{p}\mathbf{D}], \quad \mathbf{E} = \varepsilon^{-1}\mathbf{D}, \quad (7.82)$$

откуда следует *принцип дуализма*, т. е. возможность получать правильные соотношения путем замены

$$\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{D}, \quad \varepsilon \rightleftharpoons \varepsilon^{-1}, \quad \mathbf{m} \rightleftharpoons \mathbf{p}, \quad (7.83)$$

причем  $\mathbf{mp} = 1$ .

Определить вектор лучевой рефракции для поглощающих кристаллов в общем случае по формуле (4.34) затруднительно, поскольку неясно, как ввести плотность электромагнитной энергии поля в случае поглощающих сред [66]. В [67] соотношения (4.73), (4.74) были применены к случаю неоднородных волн в прозрачных одноосных кристаллах. При этом получается комплексный вектор лучевой рефракции, который определенным образом связан с потоком энергии неоднородных волн в одноосных кристаллах, причем соблюдается принцип дуализма. В [68] было показано, что принцип дуализма (7.81)—(7.83) может быть распространен также на случай плоских волн (однородных и неоднородных) в поглощающих немагнитных кристаллах средних сингоний.

Мы покажем сейчас, что принцип дуализма является справедливым для любых поглощающих (негиротропных) кристаллов, причем вектор  $\mathbf{p}$ , входящий в уравнения (7.82), может быть введен независимо от энергетических соотношений.

Будем исходить из уравнений (7.81) для любых поглощающих кристаллов, т. е. считать  $\varepsilon$  симметричным комплексным тензором общего вида, а  $\mathbf{m}$  — комплексным вектором. Из этой системы следуют соотношения

$$\mathbf{E}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{m}\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{m}\mathbf{D} = 0,$$

откуда заключаем, что вектор  $\mathbf{E}$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{E} = C[\varepsilon\mathbf{m}, \mathbf{H}]. \quad (7.84)$$

Обобщив это соотношение, напишем

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{p}_1 \mathbf{H}], \quad (7.85)$$

где вектор  $p_1$  в общем случае должен выражаться следующим образом:

$$p_1 = C_1' \varepsilon m + C_1'' H. \quad (7.86)$$

Аналогично из равенств  $HD = Hm = 0$  (7.81) следует

$$H = [p_2 D], \quad (7.87)$$

где

$$p_2 = C_2' m + C_2'' D. \quad (7.88)$$

Умножив уравнения (7.85), (7.87) векторно на  $m$ , получим

$$[mE] = mp_1 H, \quad [mH] = -mp_2 D.$$

Сравнивая с (7.81), имеем

$$mp_1 = mp_2 = 1, \quad (7.89)$$

поэтому  $C_1' = (mem)^{-1}$ ,  $C_2' = (m^2)^{-1}$  и вместо (7.86), (7.88) можем написать

$$p_1 = \frac{1}{mem} (\varepsilon m + C_1'' H), \quad p_2 = \frac{1}{m^2} (m + C_2'' D). \quad (7.90)$$

Уравнения (7.85), (7.87) совпадут с первыми двумя уравнениями (7.82) при условии  $p_1 = p_2 = p$  или

$$\frac{1}{mem} (\varepsilon m + C_1'' H) = \frac{1}{m^2} (m + C_2'' D). \quad (7.91)$$

Из равенства (4.66) имеем  $D \sim \varepsilon (\varepsilon - m^2) m$ . С другой стороны, из (4.4), (26.58) следует

$$\begin{aligned} (1 + m^\times \varepsilon^{-1} m^\times) H &= \left( 1 + \frac{1}{|\varepsilon|} \varepsilon (\varepsilon m)^\times m^\times \right) H = \\ &= \left( 1 + \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} (m.m\varepsilon - mem) \right) H = 0 \end{aligned} \quad (7.92)$$

или

$$(\bar{\varepsilon} - mem) H = meH.m, \quad H \sim \overline{(\bar{\varepsilon} - mem)} m. \quad (7.93)$$

Подставив выражения для  $D$  и  $H$  в (7.91), получим

$$\frac{1}{mem} (\varepsilon m + C_1 (\overline{\bar{\varepsilon} - mem}) m) = \frac{1}{m^2} (m + C_2 \varepsilon \overline{(\varepsilon - m^2)} m). \quad (7.94)$$

Здесь  $C_1, C_2$  — скалярные константы, подлежащие определению. Умножим (7.91) на  $[m, \varepsilon m]$  и учтем соотношения (§ 26)  $[m, \varepsilon m] \times \times (\bar{\varepsilon} - mem) m = [(\bar{\varepsilon} - mem) m, (\bar{\varepsilon} - mem)\varepsilon m] m = mem.m \bar{\varepsilon} [m, \varepsilon m]$ ,

$[m, \varepsilon m] \varepsilon (\varepsilon - m^2) m = [\varepsilon m, m] (\varepsilon - m^2) m = m^2 m \varepsilon [m, \varepsilon m]$ . В результате получим  $C_1 = C_2 = C$ . Чтобы найти  $C$ , используем условие  $pE = 0$  или (см. (7.90))

$$mE + CDE = 0. \quad (7.95)$$

Поскольку, согласно (4.66),  $E = (\varepsilon - m^2) m$ , то после некоторых преобразований с учетом уравнения нормалей

$$m \varepsilon (\varepsilon - m^2) m = m^2 (\varepsilon - m^2) + m (\varepsilon - m^2) m = 0 \quad (7.96)$$

получим

$$mE = -|\varepsilon - m^2|,$$

$$ED = m (\varepsilon - m^2) \varepsilon (\varepsilon - m^2) m = |\varepsilon - m^2| (m^2 m \varepsilon m - |\varepsilon|).$$

При этом из (7.95) следует

$$C = \frac{1}{m^2 m \varepsilon m - |\varepsilon|}$$

и окончательно (см. (7.91), (7.93))

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{m^2} \left( m + \frac{\varepsilon (\varepsilon - m^2) m}{m^2 m \varepsilon m - |\varepsilon|} \right) = \\ &= \frac{1}{m \varepsilon m} \left( \varepsilon m + \frac{(\varepsilon - m \varepsilon m) m}{m^2 m \varepsilon m - |\varepsilon|} \right). \end{aligned} \quad (7.97)$$

Следует иметь в виду, что эти два выражения для вектора  $p$  равны между собой не тождественно, а в силу уравнения нормалей (7.96) (это относится и к условию  $mp = 1$ ).

Выражению (7.97) для  $p$  можно также придать следующую форму:

$$\begin{aligned} p &= \frac{(m^4 \varepsilon - |\varepsilon|) m + [m [\varepsilon m, m]]}{m^2 (m^2 m \varepsilon m - |\varepsilon|)} = \\ &= \frac{m \varepsilon m + m^2 \varepsilon + \bar{\varepsilon} - \varepsilon_t}{m^2 m \varepsilon m - |\varepsilon|} m. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Таким образом, мы показали, что из обычных уравнений Максвелла для плоских волн (7.81) следуют уравнения (7.82), в которых вектор  $p$  определяется из (7.97). Поскольку при выводе уравнений (7.82) мы вовсе не использовали выражений для вектора потока энергии  $S$  и скорости течения энергии  $u$  (§ 4), то уравнения (7.82) справедливы независимо от того, как определяются эти энергетические величины. Тем не менее мы сохраним за вектором  $p$  прежнее название: вектор

лучевой рефракции. Кроме того, поскольку мы доказали в самом общем случае справедливость уравнений (7.82), которые связаны с (7.81) заменой (7.83), то тем самым принцип дуализма (§ 4) распространяется не только на поглощающие кристаллы всех сингоний, но и на неоднородные волны как в прозрачных, так и в поглощающих кристаллах. При этом вектор лучевой рефракции  $\mathbf{p}$ , как следует из (7.97), при комплексных  $\epsilon$  или  $\mathbf{m}$  также в общем случае будет *комплексным*.

Рассмотрим, какой вид примут два выражения (7.97) для вектора  $\mathbf{p}$  в случае немагнитных кристаллов средних сингоний. Для последних (см. § 26) тензор  $\epsilon$  удовлетворяет соотношениям:

$$\epsilon = \epsilon_o + \epsilon' \text{c.c.}, \quad \epsilon' = \epsilon_e - \epsilon_o, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}^*, \quad \mathbf{c}^2 = 1,$$

$$(\epsilon - \epsilon_o)(\epsilon - \epsilon_e) = 0, \quad \epsilon^2 = (\epsilon_o + \epsilon_e)\epsilon - \epsilon_o\epsilon_e,$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_o(\epsilon_e - \epsilon' \text{c.c.}), \quad \bar{\epsilon}_t = \epsilon_o(2\epsilon_e + \epsilon_o),$$

с помощью которых нетрудно показать после простых преобразований справедливость равенств

$$\overline{(\epsilon - m^2)} m = (m^2 - \epsilon_o)(m^2\epsilon - \epsilon_o\epsilon_e) m, \quad (7.99)$$

$$\overline{(\epsilon - m\epsilon m)} m = (m\epsilon m - \epsilon_o\epsilon_e)(m\epsilon m - \epsilon_o\epsilon) m. \quad (7.100)$$

Если учесть, что для таких кристаллов уравнение нормалей распадается на два (§ 4)

$$m^2 - \epsilon_o = 0, \quad m\epsilon m - \epsilon_o\epsilon_e = 0, \quad (7.101)$$

то для обыкновенных волн ( $m_o^2 = \epsilon_o$ ) первое из выражений (7.97) с учетом (7.99) дает

$$p_o = m_o/m_o^2 = m_o/\epsilon_o, \quad (7.102)$$

а для необыкновенных волн из выражения (7.97), (7.100) следует

$$p_e = \frac{\epsilon m_e}{m_e \epsilon m_e} = \frac{\epsilon m_e}{\epsilon_o \epsilon_e} \quad (7.103)$$

в соответствии с (4.73), (4.74).

Все приведенные здесь соотношения без труда обобщаются на случай плоских волн в магнитных поглощающих кристаллах\*), для которых уравнения Максвелла имеют вид (5.1), (5.2)

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{mH}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{mE}], \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (7.104)$$

\*) Обобщение рассматриваемого принципа дуализма на случай однородных волн в магнитных прозрачных кристаллах было впервые дано в [4, 31, 5].

Поскольку  $m\epsilon E = BE = 0$ ,  $m\mu H = DH = 0$ , то аналогично (7.85), (7.87) можем написать

$$E = [p_1 B], \quad H = [p_2 D], \quad (7.105)$$

где

$$p_1 = C'_1 \epsilon m + C''_1 B, \quad p_2 = C'_2 \mu m + C''_2 D. \quad (7.106)$$

Тем же путем, как и прежде, убеждаемся, что  $p_1 m = p_2 m = 1$ , и, предполагая  $p_1 = p_2 = p$ , получаем

$$p = \frac{1}{m\epsilon m} (\epsilon m + C_1 B) = \frac{1}{m\mu m} (\mu m + C_2 D). \quad (7.107)$$

Возьмем для  $D$  и  $B$  выражения, вытекающие из уравнений Максвелла, получающихся при исключении  $E$  и  $H$  из (5.1), (5.3):

$$(1 + m \times \mu^{-1} m \times \epsilon^{-1}) D = 0, \quad (1 + m \times \epsilon^{-1} m \times \mu^{-1}) B = 0, \quad (7.108)$$

откуда следует

$$D \sim \epsilon (\overline{\mu\epsilon - m\mu m}) m, \quad B \sim \mu (\overline{\epsilon\mu - m\epsilon m}) m. \quad (7.109)$$

При этом

$$C_1 = C_2 = C = \frac{1}{m\epsilon m \cdot m\mu m - |\epsilon\mu|}. \quad (7.110)$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{m\epsilon m} \left( \epsilon m + \frac{\mu (\overline{\epsilon\mu - m\epsilon m}) m}{m\epsilon m \cdot m\mu m - |\epsilon\mu|} \right) = \\ &= \frac{1}{m\mu m} \left( \mu m + \frac{\epsilon (\overline{\mu\epsilon - m\mu m}) m}{m\epsilon m \cdot m\mu m - |\epsilon\mu|} \right), \end{aligned} \quad (7.111)$$

и наряду с системой (7.104) оказывается справедливой следующая система уравнений:

$$E = -[pB], \quad H = [pD], \quad E = \epsilon^{-1} D, \quad H = \mu^{-1} B. \quad (7.112)$$

Системы (7.104) и (7.112) переходят одна в другую при перестановке

$$E \rightleftharpoons D, \quad H \rightleftharpoons B, \quad \epsilon \rightleftharpoons \epsilon^{-1}, \quad \mu \rightleftharpoons \mu^{-1}, \quad m \rightleftharpoons p. \quad (7.113)$$

Тем самым принцип дуализма обобщается и на случай *магнитных поглощающих кристаллов*. Из него, в частности, вытекает, что вектор нормальной рефракции может быть получен из соотношений (7.111) с помощью замены (7.113), что дает

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{p\bar{e}p} \left( |\mu| \bar{e}p + |\epsilon| \frac{\bar{\mu} (\overline{\epsilon^{-1} \mu^{-1} - p\epsilon^{-1} p}) p}{p \bar{e} p \cdot p \bar{\mu} p - 1} \right) = \\ &= \frac{1}{p\bar{\mu}p} \left( |\epsilon| \bar{\mu} p + |\mu| \frac{\bar{\epsilon} (\overline{\mu^{-1} \epsilon^{-1} - p\mu^{-1} p}) p}{p \bar{e} p \cdot p \bar{\mu} p - 1} \right). \end{aligned} \quad (7.114)$$

Заметим, что, как следует из (7.111), (7.114), во всех случаях изменение знака  $m$  влечет за собой изменение знака  $p$  и наоборот.

### § 8. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА НА ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛА

Еще Максвелл показал, что граничные условия на поверхности раздела двух сред, характеризующихся различными параметрами, можно получить как частный, предельный случай уравнений поля (см., например, [5]). Для этого следует проинтегрировать первые уравнения (1.1) и (1.2) по малому прямоугольному контуру, прилегающему с обеих сторон к поверхности раздела. Аналогично вторые уравнения (1.1), (1.2) следует проинтегрировать по малому плоскому объему, с основаниями, параллельными граничной поверхности. После перехода к пределу, когда стороны контура либо грани объема сливаются с граничной поверхностью, получаются известные граничные условия [5]

$$[\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II}, \mathbf{q}] = 0, \quad (8.1)$$

$$[\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}, \mathbf{q}] = 0, \quad (8.2)$$

$$(\mathbf{D}_I - \mathbf{D}_{II}) \mathbf{q} = 0, \quad (8.3)$$

$$(\mathbf{B}_I - \mathbf{B}_{II}) \mathbf{q} = 0. \quad (8.4)$$

Здесь индексы I и II обозначают величины, относящиеся к первой и второй среде соответственно,  $\mathbf{q}$  — единичный вектор нормали к граничной поверхности, направленный из первой среды во вторую. При этом мы предполагаем отсутствие поверхностных зарядов и токов.

При выводе этих соотношений существенным является предположение о том, что векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  ограничены по величине в точках упомянутого малого контура или объема, прилегающего к поверхности. Если это требование не выполняется, то в граничных условиях могут появиться дополнительные члены.

Следует отметить, что граничные условия (8.1), (8.4) в сочетании с выражением (1.11) для вектора плотности потока энергии обеспечивают сохранение энергии на границе раздела двух сред. Соответствующее условие сводится к непрерывности нормальной составляющей вектора потока энергии на границе

$$(\mathbf{S}_I - \mathbf{S}_{II}) \mathbf{q} = \frac{c}{4\pi} ([\mathbf{E}_I \mathbf{H}_I] - [\mathbf{E}_{II} \mathbf{H}_{II}]) \mathbf{q} = 0. \quad (8.5)$$



Напомним, что в соотношении (1.11) следует брать *вещественные* значения полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Если умножить скалярно соотношение (8.1) на  $-\mathbf{H}_I$  и (8.2) на  $\mathbf{E}_{II}$ , то, сложив их, после простых преобразований получим равенство (8.5).

Такой же результат получится, если для  $S$  взять выражение (1.29). В этом случае следует взять сумму произведений (8.1) на  $-\mathbf{H}_I^*$ , (8.2) на  $\mathbf{E}_{II}^*$ , равенства  $[\mathbf{E}_I^* - \mathbf{E}_{II}^*, \mathbf{q}] = 0$  на  $-\mathbf{H}_I$  и равенства  $[\mathbf{H}_I^* - \mathbf{H}_{II}^*, \mathbf{q}] = 0$  на  $\mathbf{E}_{II}$ . В результате получим

$$\operatorname{Re}([\mathbf{E}_I \mathbf{H}_I^*] - [\mathbf{E}_{II} \mathbf{H}_{II}^*]) \mathbf{q} = (S_I - S_{II}) \mathbf{q} = 0. \quad (8.6)$$

Если поля на поверхности раздела двух сред имеют характер плоских гармонических волн, то из граничных условий (8.1)–(8.4) вытекают определенные соотношения между характеризующими их параметрами [3–6]. Эти условия могут удовлетворяться лишь при равенстве фаз  $\varphi = \omega(t - \frac{1}{c} \mathbf{m} \mathbf{r})$  для

всех волн — падающей, отраженных и преломленных. Отсюда следуют соотношения ( $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  — векторы рефракции различных волн)

$$\mathbf{m}_0 \mathbf{r} = \mathbf{m}_1 \mathbf{r} = \mathbf{m}_2 \mathbf{r} = \dots,$$

справедливые для всех точек граничной плоскости, т. е. при  $\mathbf{r} \mathbf{q} = 0$ . Поэтому  $(\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_1) \mathbf{r} = (\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_2) \mathbf{r} = 0$  или  $\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_1 \parallel \mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_2 \parallel \mathbf{q}$ , что можно написать в виде

$$[\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_1, \mathbf{q}] = [\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_2, \mathbf{q}] = 0 \quad (8.7)$$

или

$$[\mathbf{m}_0 \mathbf{q}] = [\mathbf{m}_1 \mathbf{q}] = [\mathbf{m}_2 \mathbf{q}] = \mathbf{a}, \quad (8.8)$$

где  $\mathbf{a}$  — некоторый вектор, постоянный для всех рассматриваемых волн — падающей ( $\mathbf{m}_0$ ), отраженной ( $\mathbf{m}_1$ ) и преломленной ( $\mathbf{m}_2$ ). Равенства (8.8) выражают геометрические законы отражения и преломления света на границе раздела любых двух сред в общей векторной форме [3–6]. Во-первых, из (8.8) сразу заключаем, что векторы рефракции всех волн и нормаль к границе раздела лежат в одной плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{a}$ , — плоскости падения. Используя определение вектора рефракции  $\mathbf{m} = n \mathbf{n}$ , легко убедиться также, что в (8.8) содержатся закон отражения и закон Снеллиуса.

Учитывая уравнения Максвелла (1.24) для плоских волн, с помощью (8.8) можно без труда показать, что условие (8.3) является прямым следствием (8.2), а (8.4) — следствием (8.1). Таким образом, для плоских волн независимыми являются лишь условия (8.1), (8.2).

Умножив равенства (8.8) векторно на  $\mathbf{q}$ , получим

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{b} + \eta_k \mathbf{q}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (8.9)$$

где

$$\mathbf{b} = [q\mathbf{a}], \quad \eta_k = m_k q = \pm \sqrt{m_k^2 - a^2}, \quad (8.10)$$
$$a\mathbf{b} = a\mathbf{q} = b\mathbf{q} = 0, \quad b^2 = a^2, \quad a = [bq].$$

Таким образом, все векторы рефракции  $\mathbf{m}_k$  отличаются лишь скалярными параметрами  $\eta_k$ . Вектор  $\mathbf{b}$  ( $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$ ), лежащий на линии пересечения плоскости падения и граничной плоскости, одинаков для всех векторов рефракции. Он равен общей проекции всех  $\mathbf{m}_k$  на граничную плоскость.

Наибольший практический интерес представляет случай падения плоской волны из изотропной среды на поверхность кристалла. При этом известен вектор  $\mathbf{m}_0$ , а также вектор  $\mathbf{q}$ , определяющий ориентацию границы раздела. Следовательно, известны также векторы  $\mathbf{a}$  (8.8) и  $\mathbf{b}$  (8.10). Чтобы найти векторы рефракции отраженной и преломленных волн  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ , следует использовать наряду с соотношениями (8.8) — (8.10) также уравнение нормалей (4.7), которое в случае изотропной среды принимает вид  $m^2 - \epsilon = 0$ . Если рассматривать  $\mathbf{m}$  как радиус-вектор, то уравнению (4.7) соответствует двуполостная поверхность нормалей  $N$  (§ 4). В изотропной среде она вырождается в сферу. Параметры  $\eta_k$  находятся путем подстановки выражений (8.9) в (4.7) — для кристалла и в уравнение  $m^2 = \epsilon$  — для изотропной среды. При этом для отраженной волны получим одно значение вектора рефракции  $\mathbf{m}_1$ , которому соответствует отрицательное значение  $\eta_1$ , поскольку вектор  $\mathbf{m}_1$  направлен от границы в первую среду. Для преломленной волны после подстановки (8.9) в (4.7) в общем случае получится полное уравнение четвертой степени для  $\eta_2$ . Из его корней следует выбрать два, соответствующих волнам, направленным во вторую среду, т. е., как правило, с положительным знаком  $\eta_2$  \*).

Аналогично следует поступать, когда заданная плоская волна падает внутри кристалла на его границу с изотропной средой, только в этом случае получится одна преломленная и две отраженных волны. На границе между двумя кристаллами могут возникать две отраженных и две преломленных волны, однако этот случай может быть практически реализован лишь на так называемых *плоскостях двойникования* в кристаллах.

Очевидно, при падении волны на границу двух изотропных сред возникает одна отраженная и одна преломленная волны.

Во всех случаях решение граничной задачи следует начинать с определения векторов рефракции отраженных и пре-

\*) В кристаллах возможны случаи, когда вектор нормали преломленной волны направлен в первую среду, но вектор потока энергии направлен во вторую среду.

ломленных волн, что осуществляется с помощью соотношений (8.9) и (4.7). Вторая и более сложная часть задачи заключается в определении комплексных векторных амплитуд электромагнитного поля отраженных и преломленных волн по амплитуде падающей волны. Использование ковариантных методов позволяет сильно упростить решение этой задачи (см. [3—5, 38, 39, 49, 69—81]), которое в ином случае сопряжено с довольно громоздкими вычислениями.

Согласно § 4, 5, заданному вектору рефракции соответствует вполне определенная по поляризации волна в кристалле\*). Иными словами, для заданного  $\mathbf{m}$  векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  плоской волны в кристалле определены с точностью до произвольного скалярного комплексного множителя. Так, в одноосном кристалле имеем (см. (4.47))

$$\mathbf{H}_o = C_o [\mathbf{m}_o [m_o \mathbf{c}]], \quad \mathbf{H}_e = C_e [m_e \mathbf{c}]. \quad (8.11)$$

Аналогично в двуосном кристалле, согласно (4.54),

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= C_1 (\sqrt{[m_1 c'']^2} [m_1 c'] + \sqrt{[m_1 c']^2} [m_1 c'']), \\ \mathbf{H}_2 &= C_2 (\sqrt{[m_2 c'']^2} [m_2 c'] - \sqrt{[m_2 c']^2} [m_2 c'']). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Соответствующие соотношения справедливы для магнитных (§ 5) и поглощающих (§ 7) кристаллов. Следовательно, задача определения отраженных или преломленных волн в кристалле сводится к отысканию коэффициентов  $C_1$ ,  $C_2$  ( $C_o$ ,  $C_e$ ).

Для определенности рассмотрим случай падения плоской волны из изотропной среды на кристалл, причем обе среды предполагаются немагнитными. В этом случае граничные условия (8.2), (8.4) объединяются в одно векторное уравнение. Действительно, если  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , то  $\mathbf{B}_I = \mathbf{H}_I$ ,  $\mathbf{B}_{II} = \mathbf{H}_{II}$  и  $(\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}) \mathbf{q} = 0$ , поэтому разность  $\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}$  одновременно параллельна и перпендикулярна вектору  $\mathbf{q}$ , т. е. она равна нулю. Таким образом, учитывая, что (8.3) есть следствие (8.1), в качестве граничных условий для немагнитных кристаллов возьмем следующие:

$$\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II} = 0, \quad [\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II}, \mathbf{q}] = 0. \quad (8.13)$$

В рассматриваемом случае, когда первая среда изотропна, можно написать

$$\mathbf{H}_I = \mathbf{H} + \mathbf{H}', \quad \mathbf{H}_{II} = \mathbf{H}'_1 + \mathbf{H}''_2, \quad (8.14)$$

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E} + \mathbf{E}', \quad \mathbf{E}_{II} = \mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}''_2, \quad (8.15)$$

\*) За исключением случая, когда фазовая нормаль волны совпадает с изотропной оптической осью.

где  $\mathbf{H}$  — вектор магнитного поля падающей волны;  $\mathbf{H}'$  — отраженной;  $\mathbf{H}_1''$ ,  $\mathbf{H}_2''$  — преломленных волн; аналогично справедливо для векторов электрического поля  $\mathbf{E}$ . Обозначим через  $\mathbf{h}_1''$ ,  $\mathbf{h}_2''$  базисные векторы магнитного поля волны в кристалле (например, согласно (8.11), в случае одноосного кристалла можно взять  $\mathbf{h}_1'' = [\mathbf{m}_0[\mathbf{m}_0\mathbf{c}]]$ ,  $\mathbf{h}_2'' = [\mathbf{m}_e\mathbf{c}]$ ). Тогда для преломленных волн будем иметь

$$\mathbf{H}_1'' = C_1'' \mathbf{h}_1'', \quad \mathbf{H}_2'' = C_2'' \mathbf{h}_2''. \quad (8.16)$$

Рассмотрим вначале случай, когда в кристалле возникают не две волны (8.16), а одна (например,  $C_2'' = 0$ ,  $C_1'' = 1$ ). Ей будут соответствовать вполне определенные падающая волна ( $\mathbf{h}_1$ ) и отраженная волна ( $\mathbf{h}_1'$ ). Аналогично, если  $C_1'' = 0$ ,  $C_2'' = 1$ , то преломленной волне будет соответствовать падающая волна  $\mathbf{h}_2$  и отраженная волна  $\mathbf{h}_2'$ . Для электрических полей рассматриваемых волн примем соответственные обозначения  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_1'$ ,  $\mathbf{e}_1''$ ;  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_2'$ ,  $\mathbf{e}_2''$  и вместо общего случая рассмотрим вначале две частные задачи, отвечающие граничным условиям (см. (8.13))

$$\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_1' - \mathbf{h}_1'' = 0, \quad [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1' - \mathbf{e}_1'', \mathbf{q}] = 0 \quad (8.17)$$

или

$$\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_2' - \mathbf{h}_2'' = 0, \quad [\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2' - \mathbf{e}_2'', \mathbf{q}] = 0. \quad (8.18)$$

При этом, согласно уравнению Максвелла (4.1), имеем

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{n^2} [\mathbf{m}\mathbf{h}_1], \quad \mathbf{e}_1' = -\frac{1}{n^2} [\mathbf{m}'\mathbf{h}_1'], \quad \mathbf{e}_1'' = -\varepsilon^{-1} [\mathbf{m}_1'' \mathbf{h}_1''], \quad (8.19)$$

где  $n$  — показатель преломления изотропной среды;  $\varepsilon$  — диэлектрический тензор кристалла (который может быть комплексным);  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m}'$ ,  $\mathbf{m}_1''$ ,  $\mathbf{m}_2''$  — векторы рефракции соответственно падающей, отраженной и обеих преломленных волн. Аналогичные соотношения справедливы для  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_2'$ ,  $\mathbf{e}_2''$ :

$$\mathbf{e}_2 = -\frac{1}{n^2} [\mathbf{m}\mathbf{h}_2], \quad \mathbf{e}_2' = -\frac{1}{n^2} [\mathbf{m}'\mathbf{h}_2'], \quad \mathbf{e}_2'' = -\varepsilon^{-1} [\mathbf{m}_2'' \mathbf{h}_2'']. \quad (8.20)$$

Векторы  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_1'$  и  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_1'$  были названы в [4,5] *главными векторами поляризации и главными векторами колебаний* падающей и отраженной волн.

Рассмотрим систему (8.17). Второе ее уравнение с учетом (8.19) перепишем в виде

$$[\mathbf{q}, [\mathbf{m}\mathbf{h}_1] + [\mathbf{m}'\mathbf{h}_1']] = -n^2 [\varepsilon^{-1} [\mathbf{m}_1'' \mathbf{h}_1''], \mathbf{q}] \quad (8.21)$$

и подставим в него  $\mathbf{h}'_1 = \mathbf{h}''_1 - \mathbf{h}_1$ , что следует из первого уравнения. Согласно (8.7)—(8.9),  $m'^2 = m^2 = b^2 + \eta^2 = b^2 + \eta'^2$ , поэтому

$$\eta' = -\eta, \quad m - m' = 2\eta q \quad (8.22)$$

и уравнение (8.21) принимает вид

$$2\eta q \times^2 \mathbf{h}_1 = q \times (n^2 \varepsilon^{-1} m_1'' \times - m' \times) \mathbf{h}_1'',$$

или после умножения на  $m \times q \times$  и учета равенств  $q \times^3 = -q \times$ ,  $m \times q \times = q.m - \eta$ ,  $m \mathbf{h}_1 = 0$

$$2\eta^2 \mathbf{h}_1 = m \times q \times^2 \mathbf{g}'_1, \quad \mathbf{g}'_1 = (n^2 \varepsilon^{-1} m_1'' \times - m' \times) \mathbf{h}_1''. \quad (8.23)$$

Поскольку уравнения (8.17) симметричны относительно  $m$ ,  $\mathbf{h}_1$  и  $m'$ ,  $\mathbf{h}'_1$ , то из (8.23) сразу следует в результате перестановки этих величин

$$2\eta^2 \mathbf{h}'_1 = m' \times q \times^2 \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{g}_1 = (n^2 \varepsilon^{-1} m_1'' \times - m \times) \mathbf{h}_1''. \quad (8.24)$$

Тем же путем из системы (8.18) получаются решения, которые можно выписать сразу по аналогии с (8.23), (8.24)

$$2\eta^2 \mathbf{h}_2 = m \times q \times^2 \mathbf{g}'_2, \quad \mathbf{g}'_2 = (n^2 \varepsilon^{-1} m_2'' \times - m' \times) \mathbf{h}_2'', \quad (8.25)$$

$$2\eta^2 \mathbf{h}'_2 = m' \times q \times^2 \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{g}_2 = (n^2 \varepsilon^{-1} m_2'' \times - m \times) \mathbf{h}_2''. \quad (8.26)$$

Соотношения (8.23)—(8.26) содержат в себе всю теорию отражения и преломления света на границе изотропной среды и произвольного немагнитного кристалла.

Если вторая среда также является изотропной, то в качестве векторов  $\mathbf{h}'_1$  и  $\mathbf{h}'_2$  можно взять  $\mathbf{a}$  и  $[\mathbf{m}_2 \mathbf{a}]$ .

Из частных решений (8.23)—(8.26) легко получается самое общее решение [4, 5]. Вектор  $\mathbf{H}''$  преломленной волны, согласно (8.14)—(8.16), в общем случае имеет вид

$$\mathbf{H}'' = C'_1 \mathbf{h}'_1 + C''_2 \mathbf{h}'_2. \quad (8.27)$$

Соответственно для падающей и отраженной волн мы должны написать

$$\mathbf{H} = C_1 \mathbf{h}_1 + C_2 \mathbf{h}_2, \quad \mathbf{H}' = C'_1 \mathbf{h}'_1 + C'_2 \mathbf{h}'_2. \quad (8.28)$$

Аналогичные выражения будут справедливы для электрических полей:  $\mathbf{E}'' = C'_1 \mathbf{e}'_1 + C'_2 \mathbf{e}'_2$  и т. д. Подставляя эти выражения в граничные условия (8.13)—(8.15), увидим, что они удовлетворяются при условиях

$$C_1 = C'_1 = C''_1, \quad C_2 = C'_2 = C''_2. \quad (8.29)$$

Таким образом, процесс нахождения волн отраженных и преломленных на поверхности раздела изотропной среды и кристалла распадается на следующие этапы.

I. По известному вектору рефракции  $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \eta\mathbf{q}$  падающей волны с помощью уравнений нормалей находим вектор рефракции отраженной волны  $\mathbf{m}' = \mathbf{b} - \eta\mathbf{q}$  и векторы рефракции  $\mathbf{m}_1''$ ,  $\mathbf{m}_2''$  обеих преломленных в кристалле волн.

II. С помощью  $\mathbf{m}_1''$ ,  $\mathbf{m}_2''$  находим векторы  $\mathbf{h}_1''$ ,  $\mathbf{h}_2''$  (см. (8.11), (8.12)).

III. По формулам (8.23)—(8.26) находим  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ ,  $\mathbf{h}_1'$ ,  $\mathbf{h}_2'$ .

IV. Заданный вектор  $\mathbf{H}$  магнитного поля падающей волны представляем в виде линейной комбинации  $\mathbf{H} = C_1\mathbf{h}_1 + C_2\mathbf{h}_2$ . Коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  находятся путем умножения  $\mathbf{H}$ , например, на  $\mathbf{a}$  и  $[\mathbf{m}\mathbf{a}]$  и решения полученной системы двух уравнений. В результате получим

$$C_1 = \frac{\mathbf{m}[\mathbf{H}\mathbf{h}_2]}{\mathbf{m}[\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2]}, \quad C_2 = \frac{\mathbf{m}[\mathbf{h}_1\mathbf{H}]}{\mathbf{m}[\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2]}. \quad (8.30)$$

V. Зная  $C_1$ ,  $C_2$ , по формулам (8.27)—(8.29) получаем окончательные выражения для полей отраженной и преломленных волн.

Рассмотрим в качестве примера отражение от одноосного кристалла. Пусть  $\mathbf{m}_o$ ,  $\mathbf{m}_e$  — векторы рефракции преломленных обыкновенной и необыкновенной волн. Тогда соответствующие главные векторы падающей волны будут определяться соотношениями (см. (8.11), (8.23), (8.25))

$$2\eta\mathbf{h}_1 = (\eta + \eta_o)[\mathbf{m}[\mathbf{m}_o\mathbf{c}]], \quad (8.31)$$

$$2\eta\mathbf{h}_2 = (\eta + \eta_e)[\mathbf{m}\mathbf{c}] - \left(1 - \frac{n^2}{\epsilon_o}\right)\mathbf{m}_e\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}. \quad (8.32)$$

Соответственно для отраженной волны получим

$$2\eta\mathbf{h}_1' = (\eta - \eta_o)[\mathbf{m}'[\mathbf{m}_o\mathbf{c}]], \quad (8.33)$$

$$2\eta\mathbf{h}_2' = (\eta - \eta_e)[\mathbf{m}'\mathbf{c}] + \left(1 - \frac{n^2}{\epsilon_o}\right)\mathbf{m}_e\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}. \quad (8.34)$$

Эти простые формулы позволяют во всех деталях рассмотреть свойства отраженных от одноосного кристалла волн, включая и случай поглощающих немагнитных одноосных кристаллов [4, 5].

Выражения для главных векторов  $\mathbf{h}_1'$ ,  $\mathbf{h}_2'$  магнитного поля отраженной волны, вытекающие из (8.24), (8.26), могут быть написаны в иной, более компактной форме:

$$\mathbf{h}'_1 = \frac{1}{2\eta(\eta + \eta''_1)} [\mathbf{m}', (n^2 - \varepsilon) \mathbf{e}''_1], \quad (8.35)$$

$$\mathbf{h}'_2 = \frac{1}{2\eta(\eta + \eta''_2)} [\mathbf{m}', (n^2 - \varepsilon) \mathbf{e}''_2], \quad (8.36)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрический тензор второй среды. Докажем, например, совпадение выражений (8.24) и (8.35) для  $\mathbf{h}'_1$ :

$$\frac{1}{\eta} [\mathbf{m}', \mathbf{q}^{\times 2} (n^2 \varepsilon^{-1} \mathbf{m}''^{\times} - \mathbf{m}^{\times}) \mathbf{h}_1''] = \frac{1}{\eta + \eta''_1} [\mathbf{m}', (n^2 - \varepsilon) \mathbf{e}''_1]. \quad (8.37)$$

Как известно, любые два вектора равны между собою, если совпадают результаты их скалярного умножения на три произвольных линейно независимых вектора. В качестве таких векторов можно взять  $\mathbf{m}'$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{a}$ . Нетрудно проверить, что правая и левая части векторного равенства (8.37) дают одинаковый результат при умножении на эти три вектора. Тем самым доказывается равенство (8.35). Точно таким же способом можно убедиться в справедливости равенства (8.36).

Заметим, что при этом удобно использовать соотношение

$$\mathbf{a}(\varepsilon - m''^2) \mathbf{E}'' = 0, \quad (8.38)$$

справедливое на границе любого немагнитного кристалла. Действительно, из уравнений

$$\varepsilon \mathbf{E}'' = -[\mathbf{m}'' \mathbf{H}''], \quad \mathbf{H}'' = [\mathbf{m}'' \mathbf{E}''], \quad \mathbf{a} = [\mathbf{m}'' \mathbf{q}]$$

следует

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\varepsilon - m''^2) \mathbf{E}'' &= -[\mathbf{m}'' \mathbf{q}][\mathbf{m}'' \mathbf{H}''] - m''^2 [\mathbf{m}'' \mathbf{q}'] \mathbf{E}'' = \\ &= -m''^2 \mathbf{q} \mathbf{H}'' + m''^2 \mathbf{q} [\mathbf{m}'' \mathbf{E}''] = 0. \end{aligned}$$

Учитывая (8.19), вместо (8.35) можно написать также

$$\mathbf{h}'_1 = \frac{1}{2\eta(\eta + \eta''_1)} \mathbf{m}'^{\times} (1 - n^2 \varepsilon^{-1}) \mathbf{m}''^{\times} \mathbf{h}_1'' \quad (8.39)$$

и аналогичное выражение для  $\mathbf{h}'_2$ . После умножения на  $\mathbf{m}'^{\times}$  отсюда легко получается также соотношение

$$\mathbf{e}'_{1,2} = \frac{1}{2n^2 \eta(\eta + \eta''_{1,2})} \mathbf{m}'^{\times 2} (\varepsilon - n^2) \mathbf{e}''_{1,2}. \quad (8.40)$$

Из соотношений (8.31)—(8.34) как частный случай получаются формулы для отражения и преломления света на границе раздела двух изотропных сред. Однако эти формулы могут быть без труда получены и непосредственно. Пусть  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$ ,

$\mathbf{H}''$  — магнитные поля падающей, отраженной и преломленной волн соответственно. Для соответствующих электрических полей можем написать, согласно (4.36),

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{p}\mathbf{H}], \quad \mathbf{E}' = -[\mathbf{p}'\mathbf{H}'], \quad \mathbf{E}'' = -[\mathbf{p}''\mathbf{H}''], \quad (8.41)$$

где (см. (4.73))

$$\mathbf{p} = \mathbf{m}/m^2, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{m}'/m'^2, \quad \mathbf{p}'' = \mathbf{m}''/m''^2 \quad (8.42)$$

— векторы лучевой рефракции всех трех волн. Граничные условия имеют в данном случае вид

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}' - \mathbf{H}'' = 0, \quad [\mathbf{q}, \mathbf{E} + \mathbf{E}' - \mathbf{E}''] = 0. \quad (8.43)$$

Учтем, что  $\mathbf{m}\mathbf{H} = \mathbf{m}'\mathbf{H}' = \mathbf{m}''\mathbf{H}'' = 0$ , ввиду чего (см. (8.9), (8.10))

$$\mathbf{m}'\mathbf{H} = (\mathbf{m}' - \mathbf{m})\mathbf{H} = (\eta' - \eta)\mathbf{q}\mathbf{H}, \quad \mathbf{m}'\mathbf{H}'' = (\eta' - \eta'')\mathbf{q}\mathbf{H}''. \quad (8.44)$$

Если теперь умножить первое уравнение (8.43) на  $\mathbf{m}'$ , то с учетом последних формул и (8.22) получим

$$\mathbf{q}\mathbf{H}'' = \frac{2\eta}{\eta + \eta''} \mathbf{q}\mathbf{H}. \quad (8.45)$$

С другой стороны, используя (8.41) и исключая  $\mathbf{H}'$ , второе уравнение (8.43) можно привести к виду

$$[\mathbf{q}[\mathbf{p}'' - \mathbf{p}', \mathbf{H}'']] = [\mathbf{q}[\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{H}]]$$

или после раскрытия векторных произведений к виду

$$(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{q}\mathbf{H}'' - \mathbf{q}(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{H}'' = (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{q}\mathbf{H} - \mathbf{q}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{H}. \quad (8.46)$$

С помощью (8.45) отсюда находим  $\mathbf{H}''$

$$\mathbf{H}'' = \frac{1}{\mathbf{q}(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}')} \left\{ \mathbf{q}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{H} + \mathbf{q}\mathbf{H} \cdot \left( \frac{2\eta}{\eta + \eta''} (\mathbf{p}'' - \mathbf{p}') - (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right) \right\}. \quad (8.47)$$

Учитывая (8.42), (8.9), (8.10) и равенства  $n^2 = \mathbf{a}^2 + \eta^2$ ,  $n''^2 = \mathbf{a}^2 + \eta''^2$ ,  $\mathbf{m}\mathbf{m}'' = \mathbf{a}^2 + \eta\eta''$ , нетрудно получить соотношения

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \frac{2\eta}{n^2} \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}'' - \mathbf{p}' = \frac{\eta + \eta''}{n^2 n''^2} ((\eta - \eta'')\mathbf{b} + \mathbf{m}\mathbf{m}'' \cdot \mathbf{q}). \quad (8.48)$$

С их помощью выражение (8.47) приводится к виду

$$\mathbf{H}'' = \frac{2\eta}{(\eta + \eta'')\mathbf{m}\mathbf{m}''} (\mathbf{m}''^2\mathbf{H} + (\eta - \eta'')\mathbf{q}\mathbf{H} \cdot \mathbf{m}''). \quad (8.49)$$



Но, согласно (8.44),  $(\eta - \eta'') \mathbf{qH} = (\mathbf{m} - \mathbf{m}'') \mathbf{H} = -\mathbf{m}'' \mathbf{H}$ , поэтому из (8.49) следует окончательно для магнитного поля преломленной волны

$$\mathbf{H}'' = -\frac{2\eta \mathbf{m}'' \times^2 \mathbf{H}}{(\eta + \eta'') \mathbf{m} \mathbf{m}''} = -C \mathbf{n}'' \times^2 \mathbf{H}, \quad C = \frac{2\eta n''}{(\eta + \eta'') \mathbf{m} \mathbf{n}''}. \quad (8.50)$$

Имея  $\mathbf{H}''$ , сразу находим из (8.43) магнитное поле отраженной волны

$$\mathbf{H}' = -(1 + C \mathbf{n}'' \times^2) \mathbf{H}. \quad (8.51)$$

В случае нормального падения  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}' = \mathbf{n}'' = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{b} = 0$ ,  $\eta = n$ ,  $\eta'' = n''$ ,  $\mathbf{m} \mathbf{n}'' = n$  и формулы (8.50), (8.51) дают

$$\mathbf{H}'' = \frac{2n''}{n'' + n} \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}' = \frac{n'' - n}{n'' + n} \mathbf{H}. \quad (8.52)$$

Чтобы найти электрическое поле  $\mathbf{E}''$ , используем соотношения  $\mathbf{E}'' = -[\mathbf{p}'' \mathbf{H}'']$ ,  $\mathbf{H} = [\mathbf{m} \mathbf{E}]$ . Умножив равенство (8.50) на  $-\mathbf{p}'' \times$ , получим

$$\mathbf{E}'' = C \mathbf{p}'' \times \mathbf{n}'' \times^2 \mathbf{m} \times \mathbf{E}. \quad (8.53)$$

Поскольку (см. (8.42))

$$\mathbf{p}'' \times \mathbf{n}'' \times^2 = \frac{\mathbf{n}'' \times^3}{n''} = -\frac{\mathbf{n}'' \times}{n''},$$

то электрическое поле преломленной волны равно

$$\mathbf{E}'' = -\frac{2\eta}{\eta + \eta''} \frac{\mathbf{n}'' \times \mathbf{n} \times}{\mathbf{n}'' \mathbf{n}} \mathbf{E}. \quad (8.54)$$

Аналогичным путем находим для электрического поля отраженной волны

$$\mathbf{E}' = -\frac{\eta - \eta''}{\mathbf{a}^2 (\eta + \eta'')} \left( \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \frac{\mathbf{n}' \mathbf{n}''}{\mathbf{m} \mathbf{n}''} [\mathbf{n}' \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{n} \mathbf{a}] \right) \mathbf{E}. \quad (8.55)$$

Последнее выражение можно преобразовать к более компактному виду:

$$\mathbf{E}' = -\frac{\eta - \eta''}{2\eta} \mathbf{n}' \times^2 \mathbf{E}'' = \frac{\eta - \eta''}{\eta + \eta''} \frac{\mathbf{n}' \times^2 \mathbf{n}'' \times \mathbf{n} \times}{\mathbf{m} \mathbf{n}''} \mathbf{E}. \quad (8.56)$$

После простых преобразований получаем отсюда

$$\mathbf{H}' = [\mathbf{m}' \mathbf{E}'] = \frac{\eta - \eta''}{2\eta} [\mathbf{m}' \mathbf{E}''] = -\frac{\eta - \eta''}{2\eta n''} \mathbf{m}' \times \mathbf{n}'' \times \mathbf{H}. \quad (8.57)$$

Легко видеть, что это соотношение является частным случаем (8.35), (8.36) при  $\varepsilon = n''^2$ . В случае нормального падения (ср.

(8.52) формулы (8.54), (8.55) принимают вид

$$\mathbf{E}'' = \frac{2n}{n + n''} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}' = \frac{n - n''}{n + n''} \mathbf{E}. \quad (8.58)$$

Полученные выше компактные ковариантные выражения (8.50) для  $\mathbf{H}''$  и (8.54) для  $\mathbf{E}''$  допускают простую и наглядную геометрическую интерпретацию. Легко убедиться, что входящая в (8.50) матрица

$$\gamma = -\mathbf{n}'' \times \mathbf{n}'' = 1 - \mathbf{n}'' \cdot \mathbf{n}'' \quad (8.59)$$

является *проективной* (см. § 26), поскольку  $\gamma^2 = \gamma$ . Любой вектор  $\mathbf{A}$  можно представить в виде

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{n}'' \cdot \mathbf{n}'' \mathbf{A} - \mathbf{n}''^2 \mathbf{A}. \quad (8.60)$$

Первый член этого разложения представляет собой проекцию вектора  $\mathbf{A}$  на направление  $\mathbf{n}''$ , а второй член — проекцию  $\mathbf{A}$  на плоскость  $P''$ , перпендикулярную к  $\mathbf{n}''$ . Таким образом, вектор *магнитного поля преломленной волны  $\mathbf{H}''$  (8.50) с точностью до скалярного множителя  $C$  равен ортогональной проекции вектора магнитного поля падающей волны  $\mathbf{H}$  на фазовую плоскость  $P''$  преломленной волны (рис. 8.1). Тем самым устанавливается геометрическая связь между поляризациями падающей и преломленной волн, поскольку скалярный множитель  $C$  влияет лишь на интенсивность. Указанное свойство позволяет, в частности, быстро оценивать изменение формы эллипса поляризации падающей волны при преломлении. Так, из рис. 8.1 ясно, что все хорды эллипса поляризации падающей волны, параллельные плоскости падения, в эллипсе преломленной волны претерпевают одинаковое относительное уменьшение, поскольку умножаются на косинус угла между волновыми нормалью падающей и преломленной волн  $\mathbf{n}\mathbf{n}''$ .*

Обращаясь к формуле (8.54), видим, что матрица

$$\gamma_1 = -\frac{\mathbf{n}'' \times \mathbf{n}''}{\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{n}''} = 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}''}{\mathbf{n}\mathbf{n}''} \quad (8.61)$$

также является проективной:  $\gamma_1^2 = \gamma_1$ . Поскольку  $\mathbf{n}'' \gamma_1 = 0$ , то любой вектор  $\mathbf{A}$  под действием этой матрицы превращается в вектор  $\mathbf{A}_1 = \gamma_1 \mathbf{A}$ , который перпендикулярен к  $\mathbf{n}''$ :  $\mathbf{n}'' \mathbf{A}_1 = 0$ . Следовательно, матрица  $\gamma_1$  также проектирует все векторы на фазовую плоскость преломленной волны. Однако в отличие от (8.60) теперь имеет место разложение

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1}{\mathbf{n}\mathbf{n}''} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'' \mathbf{A} + \gamma_1 \mathbf{A}, \quad (8.62)$$

т. е. любой вектор  $\mathbf{A}$  представляется в виде суммы вектора  $\gamma_1 \mathbf{A}$ , лежащего в плоскости  $P''$ , и вектора, параллельного  $\mathbf{n}$ . Это означает, что матрица  $\gamma_1$  осуществляет не ортогональную, а косоугольную проекцию на плоскость  $P''$  (см. § 26), причем направление проектирования параллельно фазовой нормали  $\mathbf{n}$  падающей волны. Легко видеть, что при этом в противоположность рис. 8.1 хорды эллипса  $\mathbf{E}$ , параллельные плоскости падения, будут испытывать не сокращение, а удлинение, пропорциональное тому же косинусу  $\mathbf{nn}''$ .

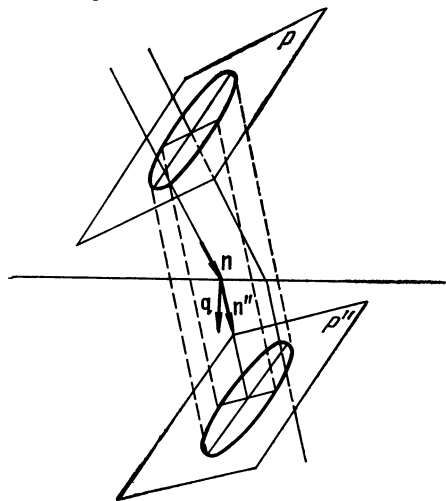


Рис. 8.1

перпендикулярную к  $\mathbf{n}'$ . Следовательно, электрический вектор отраженной волны с точностью до множителя  $\frac{\eta - \eta''}{2\eta}$  ра-

вен ортогональной проекции электрического вектора преломленной волны на фазовую плоскость  $P' \perp \mathbf{n}'$ . Отсюда следует, в частности, что при  $\mathbf{n}'\mathbf{n}'' = 0$ , т. е. когда фазовые плоскости отраженной и преломленной волн взаимно перпендикулярны, в отраженной волне может присутствовать лишь проекция вектора  $\mathbf{E}$ , перпендикулярная к плоскости падения. Таким образом, в этом случае отраженная волна будет линейно поляризована в плоскости падения при любой поляризации падающей волны. Условие  $\mathbf{n}'\mathbf{n}'' = 0$  определяет угол падения, называемый *углом Брюстера*, или углом полной поляризации.

Изложенный выше подход, основанный на использовании главных векторов, непригоден в случае падения света из кристалла на границу изотропной среды. Причина заключается в том, что в кристалле при этом возникают две отраженных волны (см. рис. 8.2), поскольку прямая  $AB$  пересекает поверхность нормалей в кристалле в двух точках. В результате получаем два вектора рефракции  $\mathbf{m}'_1$  и  $\mathbf{m}'_2$  отраженных волн, которым по формулам (8.12) соответствуют определенные с точ-

ности, будут испытывать не сокращение, а удлинение, пропорциональное тому же косинусу  $\mathbf{nn}''$ . Поскольку для однородных падающих волн эллипсы поляризации ( $\mathbf{H}$ ) и колебаний ( $\mathbf{E}$ ) перпендикулярны друг к другу и имеют одинаковую форму, то это свойство сохранится и в преломленной волне.

Что касается соотношения (8.56), то  $(-\mathbf{n}' \times \mathbf{n}'')$  является оператором ортогонального проектирования на плоскость, пер-

ностью до скалярных множителей векторы  $\mathbf{H}'_1 = C_1 \mathbf{h}'_1$ ,  $\mathbf{H}'_2 = C_2 \mathbf{h}'_2$ . Во второй (изотропной) среде возникает волна  $\mathbf{H}''$  с вектором рефракции  $\mathbf{m}''$ . Таким образом, общие уравнения граничных условий (8.13) в данном случае принимают вид (с учетом того, что в обеих средах  $\mu = 1$ )

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}'_1 + \mathbf{H}'_2 - \mathbf{H}'' = 0, \quad (8.63)$$

$$[\mathbf{E} + \mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2 - \mathbf{E}'', \mathbf{q}] = 0, \quad (8.64)$$

где  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  — векторы поля падающей волны. Сюда входят три неизвестных волны:  $\mathbf{H}'_1$ ,  $\mathbf{H}'_2$ ,  $\mathbf{H}''$  в отличие от уравнений (8.17), (8.18), куда входило лишь две неизвестных волны, по одной в каждой среде.

Поэтому на границе кристалл — изотропная среда нельзя ввести главные векторы поляризации и получить соотношения, аналогичные (8.23), (8.24).

В случае поглощающего кристалла построение, соответствующее рис. 8.2, не может быть реализовано. Используя аксиальную форму (4.51) комплексного тензора  $\epsilon^{-1}$ , мы получаем (см. (4.55)) уравнения

$$am^2 + b([\mathbf{m}\mathbf{c}'][\mathbf{m}\mathbf{c}''] \pm \sqrt{[\mathbf{m}\mathbf{c}']^2 [\mathbf{m}\mathbf{c}'']^2}) = 1. \quad (8.65)$$

Если подставить сюда выражение  $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \eta \mathbf{q}$  для вектора рефракции (см. (8.9)) и избавиться от радикала, то мы придем в общем случае к полному уравнению четвертой степени относительно параметра  $\eta$  \*). Из четырех его корней следует выбрать два таких, для которых *средний* по времени вектор Пойнтинга будет направлен от границы раздела внутрь кристалла. При этом один из корней будет удовлетворять уравнению (8.65) с верхним знаком, а второй — тому же уравнению с нижним знаком. Полученным значениям  $\mathbf{m}'_1$  (знак плюс в (8.65)) и  $\mathbf{m}'_2$  (знак минус) будут соответствовать в кристалле векторы магнитного поля (см. (8.12))

$$\mathbf{h}'_1 = \sqrt{[\mathbf{m}'_1 \mathbf{c}'']^2} [\mathbf{m}'_1 \mathbf{c}'] + \sqrt{[\mathbf{m}'_1 \mathbf{c}']^2} [\mathbf{m}'_1 \mathbf{c}''], \quad (8.66)$$

$$\mathbf{h}'_2 = \sqrt{[\mathbf{m}'_2 \mathbf{c}'']^2} [\mathbf{m}'_2 \mathbf{c}'] - \sqrt{[\mathbf{m}'_2 \mathbf{c}']^2} [\mathbf{m}'_2 \mathbf{c}'']. \quad (8.67)$$

\*) Последнее уравнение можно получить также непосредственно, подставляя  $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \eta \mathbf{q}$  в уравнение нормалей (4.7) для комплексного  $\epsilon$ .

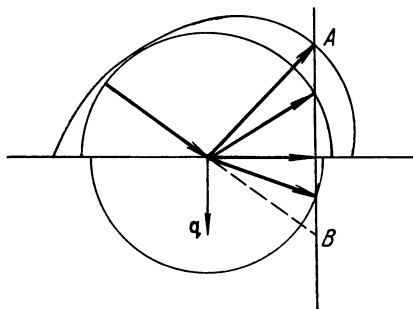


Рис. 8.2

После отыскания  $m'_1$ ,  $m'_2$ ,  $m''$ ,  $h'_1$ ,  $h'_2$  решение системы (8.63)–(8.64) проще всего может быть получено следующим путем. Полагаем  $H'_1 = C_1 h'_1$ ,  $H'_2 = C_2 h'_2$  и учитываем, что, согласно § 6, мы можем написать для всех векторов электрического поля выражения

$$E = -[pH], \quad E'_1 = -[p'_1 H'_1], \quad E'_2 = -[p'_2 H'_2], \quad E'' = -[p'' H''], \quad (8.68)$$

где векторы лучевой рефракции  $p$  в общем случае однозначно определяются соотношением (4.61) по соответствующим векторам нормальной рефракции  $m$ . Подставляя (8.68) в (8.64), имеем

$$[q, [pH]] + [p'_1 H'_1] + [p'_2 H'_2] - [p'' H''] = 0. \quad (8.69)$$

Если исключить отсюда  $H''$  с помощью (8.63):

$$H'' = H + H'_1 + H'_2, \quad (8.70)$$

то получим уравнение

$$C_1 [q [p'_1 - p'', h'_1]] + C_2 [q [p'_2 - p'', h'_2]] = -[q [p - p'', H]]. \quad (8.71)$$

Это уравнение решается путем умножения его на  $[p'_2 - p'', h'_2]$  и  $[p'_1 - p'', h'_1]$ . В результате сразу получаем

$$C_1 = \frac{q [[p'_2 - p'', h'_2] [p - p'', H]]}{q [[p'_1 - p'', h'_1] [p'_2 - p'', h'_2]]}, \quad (8.72)$$

$$C_2 = - \frac{q [[p'_1 - p'', h'_1] [p - p'', H]]}{q [[p'_1 - p'', h'_1] [p'_2 - p'', h'_2]]}.$$

Зная  $H'_1 = C_1 h'_1$  и  $H'_2 = C_2 h'_2$ , по формуле (8.70) находим вектор  $H''$  магнитного поля преломленной волны в изотропной среде:

$$H'' = C_1 h'_1 + C_2 h'_2 + H. \quad (8.73)$$

Ковариантное решение этой задачи для прозрачных одноосных кристаллов иным путем было впервые получено в [77, 78, 80].

Отметим, что этим методом может быть решена также рассмотренная выше задача об отражении и преломлении света на границе изотропная среда — кристалл. При этом вместо (8.63), (8.64) мы будем иметь (см. (8.13)–(8.15)) уравнения

$$H + H' - H_1 - H_2 = 0, \quad [E + E' - E_1 - E_2, q] = 0, \quad (8.74)$$

где  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$  — падающая и отраженная волны;  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  — волны в кристалле. Обозначая  $\mathbf{H}_1 = C_1 \mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{H}_2 = C_2 \mathbf{h}_2$ , можно легко убедиться, что решение уравнений (8.74) сразу получается из (8.72), (8.73) путем замены

$$\mathbf{h}_1' \rightarrow -\mathbf{h}_1, \quad \mathbf{h}_2' \rightarrow -\mathbf{h}_2, \quad \mathbf{H}'' \rightarrow -\mathbf{H}', \quad \mathbf{p}_1' \rightarrow \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_2' \rightarrow \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}'' \rightarrow \mathbf{p}' \quad (8.75)$$

и имеет вид

$$C_1 = - \frac{\mathbf{q} [ [\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}', \mathbf{h}_2] [\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{H}] ]}{\mathbf{q} [ [\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}', \mathbf{h}_1'] [\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}', \mathbf{h}_2] ] }, \quad (8.76)$$

$$C_2 = \frac{\mathbf{q} [ [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}', \mathbf{h}_1] [\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{H}] ]}{\mathbf{q} [ [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}', \mathbf{h}_1] [\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}', \mathbf{h}_2] ] },$$

$$\mathbf{H}' = C_1 \mathbf{h}_1 + C_2 \mathbf{h}_2 - \mathbf{H}. \quad (8.77)$$

Соотношения (8.72), (8.73) и аналогичные им (8.76), (8.77) дают в сравнительно простой форме решение общей задачи об отражении и преломлении плоских волн на границах кристалл — изотропная среда и изотропная среда — кристалл для произвольного немагнитного (негиротропного) кристалла, в частности поглощающего. Заметим, что при нековариантном подходе решение этих задач чрезвычайно громоздко. Относительная простота общих выражений (8.72), (8.76) обусловлена использованием векторов лучевой рефракции, введенных в [4, 5]. Таким образом, общие соотношения, установленные в § 7, имеют не только принципиальное, но и практическое значение, поскольку они позволяют существенно упростить решение граничной задачи. Разумеется, из (8.72) — (8.77) в случае изотропных сред получаются соотношения (8.50), (8.51), а в случае одноосных кристаллов решение (8.72), (8.73) сводится к (8.30) — (8.34).

Формулы (8.72), (8.73) сильно упрощаются в случае нормального падения. При этом вектор  $\mathbf{q}$  перпендикулярен ко всем векторам  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{h}_1$  и т. д. Легко видеть, что если  $\mathbf{H} = A_1 \mathbf{h}_1'$ , то из (8.71) следует

$$C_1 \mathbf{h}_1' \cdot \mathbf{q} (\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}'') + C_2 \mathbf{h}_2' \cdot \mathbf{q} (\mathbf{p}_2' - \mathbf{p}'') = - A_1 \mathbf{h}_1' \cdot \mathbf{q} (\mathbf{p} - \mathbf{p}'').$$

Поскольку  $\mathbf{h}_1'$  и  $\mathbf{h}_2'$  линейно независимы, то это означает, что

$$C_2 = 0, \quad C_1 = - \frac{\mathbf{q} (\mathbf{p} - \mathbf{p}'')}{\mathbf{q} (\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}'')} A_1 \quad (8.78)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{H}'' = (C_1 + A_1) \mathbf{h}_1' = \frac{\mathbf{q} (\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}'')}{\mathbf{q} (\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}'')} A_1 \mathbf{h}_1'. \quad (8.79)$$

Поскольку при нормальном падении все векторы рефракции параллельны  $\mathbf{q}$ , можно написать

$$\mathbf{m} = -\mathbf{m}'_1 = -\mathbf{m}'_2 = n\mathbf{q}, \quad n'_1 = n, \quad \mathbf{m}'' = n''\mathbf{q}. \quad (8.80)$$

С другой стороны, согласно (4.32), всегда  $\mathbf{m}\mathbf{p} = 1$ , следовательно, мы имеем

$$\mathbf{q}\mathbf{p} = \frac{\mathbf{m}\mathbf{p}}{n} = \frac{1}{n}, \quad \mathbf{q}\mathbf{p}'_1 = -\frac{1}{n}, \quad \mathbf{q}\mathbf{p}'' = \frac{1}{n''}, \quad (8.81)$$

ввиду чего выражение (8.79) принимает вид

$$\mathbf{H}'' = \frac{2n}{n+n''} A_1 \mathbf{h}'_1. \quad (8.82)$$

Таким образом, в этом случае все векторы магнитного поля пропорциональны  $\mathbf{h}'_1$ . Аналогично, если  $\mathbf{H} = A_2 \mathbf{h}_2$ , то

$$\mathbf{q}\mathbf{p}'_2 = -\frac{1}{n}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{\mathbf{q}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'')}{\mathbf{q}(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'')} A_2 = \frac{n'' - n}{n'' + n} A_2 \quad (8.83)$$

и

$$\mathbf{H}'' = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p})}{\mathbf{q}(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'')} A_2 \mathbf{h}'_2 = \frac{n - n'_2}{n'' - n'_2} A_2 \mathbf{h}'_2. \quad (8.83a)$$

Обращаясь к формулам (8.78), (8.79), получаем для нормального падения при  $\mathbf{H} = A_1 \mathbf{h}_1$  в результате замены (8.75)

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\mathbf{q}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}')} A_1, \quad \mathbf{H}' = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)}{\mathbf{q}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')} A_1 \mathbf{h}_1.$$

С помощью (8.81) получаем отсюда

$$\mathbf{H}' = \frac{n_1 - n}{n_1 + n} A_1 \mathbf{h}_1. \quad (8.84)$$

Аналогично находим при  $\mathbf{H} = A_2 \mathbf{h}_2$

$$\mathbf{H}' = \frac{n_2 - n}{n_2 + n} A_2 \mathbf{h}_2. \quad (8.85)$$

Поле отраженной волны для общего случая  $\mathbf{H}' = A_1 \mathbf{h}_1 + A_2 \mathbf{h}_2$  получается из (8.84), (8.85) путем сложения

$$\mathbf{H}' = \frac{n_1 - n}{n_1 + n} A_1 \mathbf{h}_1 - \frac{n_2 - n}{n_2 - n} A_2 \mathbf{h}_2. \quad (8.86)$$

Случай падения света на поглощающий кристалл, когда фазовая нормаль преломленной волны совпадает с его круго-

вой оптической осью, имеет специфические особенности (см. § 7). В работе [64] дано решение этой задачи.

Рассмотрим баланс потоков энергии при отражении и преломлении плоских волн на границе двух произвольных анизотропных (негиротропных) сред. При задании определенной простой монохроматической падающей волны в самом общем случае мы будем иметь дело с пятью волнами: падающей, двумя отраженными и двумя преломленными. Такая ситуация возникает при падении волны из анизотропной среды на границу с другой анизотропной средой. Мы предполагаем, что обе среды могут обладать произвольной анизотропией диэлектрических и магнитных свойств, а также проводимости. Более того, мы допускаем, что любые из пяти рассматриваемых волн могут быть также неоднородными, т. е. их векторы нормальной рефракции могут быть комплексными нелинейными векторами.

Согласно (8.6), на границе любых двух сред всегда справедливо соотношение  $S_{Iq} = S_{IIq}$ . Выражение для среднего потока энергии в первой (или во второй) среде имеет вид (поскольку

$$\mathbf{E}_I = \sum_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{H}_I = \sum_k \mathbf{H}_k$$

$$S_I = \sum_k S_k + \sum_{k \neq l} S_{kl}, \quad (8.87)$$

где (см. (1.29))

$$S_k = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_k \mathbf{H}_k^*] \quad (8.88)$$

— векторы Пойнтинга для различных волн, существующих в первой (второй) среде и

$$S_{kl} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} ([\mathbf{E}_k \mathbf{H}_l^*] + [\mathbf{E}_l \mathbf{H}_k^*]) \quad (8.89)$$

— векторы, характеризующие средние потоки энергии, появляющиеся в результате интерференции  $k$ -й и  $l$ -й волн (*интерференционные потоки*).

Для любой пары волн, существующих в одной и той же (первой либо второй) среде, справедливы уравнения Максвелла

$$\varepsilon \mathbf{E}_k = -[\mathbf{m}_k \mathbf{H}_k], \quad \mu \mathbf{H}_k = [\mathbf{m}_k \mathbf{E}_k], \quad (8.90)$$

$$\varepsilon \mathbf{E}_l = -[\mathbf{m}_l \mathbf{H}_l], \quad \mu \mathbf{H}_l = [\mathbf{m}_l \mathbf{E}_l], \quad (8.91)$$

в которых все величины являются комплексными. Выпишем также уравнения, комплексно сопряженные к (8.91):

$$\varepsilon^* \mathbf{E}_l^* = -[\mathbf{m}_l^* \mathbf{H}_l^*], \quad \mu^* \mathbf{H}_l^* = [\mathbf{m}_l^* \mathbf{E}_l^*]. \quad (8.92)$$



Умножим скалярно уравнения (8.90) на  $E_l^*$  и  $H_l^*$  соответственно, а уравнения (8.92) на  $-E_k$ ,  $-H_k$  и сложим результаты. Мы получим

$$(m_k - m_l^*)([E_k H_l^*] + [E_l^* H_k]) = E_l^* \varepsilon E_k - E_k \varepsilon^* E_l + \\ + H_l^* \mu H_k - H_k \mu^* H_l = E_l^* (\varepsilon - \varepsilon^+) E_k + H_l^* (\mu - \mu^+) H_k. \quad (8.93)$$

До сих пор мы не вводили никаких ограничивающих предположений относительно свойств каждой из двух сред и характера распространяющихся в них волн. Теперь введем следующее предположение, относящееся к векторам рефракции рассматриваемых волн. Пусть вектор  $\mathbf{a}$  (8.8), одинаковый для всех волн, является *вещественным*. В таком случае, согласно (8.9), (8.10),

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{b} + \eta_k \mathbf{q}, \quad \mathbf{m}_l = \mathbf{b} + \eta_l \mathbf{q}, \quad (8.94)$$

причем из вещественности  $\mathbf{a}$  следует вещественность  $\mathbf{b} = [\mathbf{q}\mathbf{a}]$ . Заметим, что поскольку  $\eta_k, \eta_l$  могут быть комплексными числами, то любой из векторов  $\mathbf{m}_k$  и  $\mathbf{m}_l$  может быть комплексным и притом нелинейным:

$$[\mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^*] = (\eta_k - \eta_k^*) [\mathbf{q}\mathbf{b}] = (\eta_k - \eta_k^*) \mathbf{a} \neq 0.$$

В этом случае

$$\mathbf{m}_k - \mathbf{m}_l^* = (\eta_k - \eta_l^*) \mathbf{q}, \quad \eta_k - \eta_l^* \neq 0 \quad (8.95)$$

и соотношение (8.93) принимает вид

$$\mathbf{q} ([E_k H_l^*] + [E_l^* H_k]) = \frac{1}{\eta_k - \eta_l^*} (E_l^* (\varepsilon - \varepsilon^+) E_k - \\ - \varepsilon^+ E_k + H_l^* (\mu - \mu^+) H_k). \quad (8.96)$$

Вещественная часть этого равенства дает, согласно (8.89),

$$q S_{kl} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\eta_k - \eta_l^*} (E_l^* (\varepsilon - \varepsilon^+) E_k + H_l^* (\mu - \mu^+) H_k) \right]. \quad (8.97)$$

Отсюда следует, что при  $\varepsilon^+ = \varepsilon$ ,  $\mu^+ = \mu$ , т. е. если тензоры  $\varepsilon$  и  $\mu$  рассматриваемой среды являются эрмитовыми, то интерференционные потоки всех волн, возникающих в ней на границе с любой другой средой (при условии  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ ), имеют компоненту, нормальную к границе, равную нулю. Если обе среды имеют эрмитовы тензоры  $\varepsilon$  и  $\mu$ , то из  $\mathbf{S}_1 \mathbf{q} = \mathbf{S}_{II} \mathbf{q}$  и (8.87) следует

$$\mathbf{S} \mathbf{q} = \mathbf{S}'_1 \mathbf{q} + \mathbf{S}'_2 \mathbf{q} - \mathbf{S}_1 \mathbf{q} - \mathbf{S}_2 \mathbf{q}, \quad (8.98)$$

где  $\mathbf{S}$  — вектор Пойнтинга падающей волны;  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$  — то же для отраженных волн и  $\mathbf{S}'_1, \mathbf{S}'_2$  для преломленных волн. Это равенство имеет простой физический смысл — оно означает, что на границе раздела двух сред средняя интенсивность падающей волны равна сумме средних интенсивностей всех отраженных и преломленных волн. Иными словами, равенство (8.98) выражает закон сохранения энергии электромагнитных волн при отражении и преломлении на границе двух сред. Еще раз подчеркнем, что доказанное свойство (при  $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$ ,  $\epsilon^+ = \epsilon$ ,  $\mu^+ = \mu$ ) справедливо также, когда любые из волн *неоднородны* \*), следовательно, оно относится и к случаю полного отражения. Более того, это свойство справедливо и тогда, когда вторая среда является *изотропной поглощающей*. Действительно, хотя в этом случае во второй среде нарушается условие  $\epsilon^+ = \epsilon$ , однако интерференционный поток в ней будет вообще отсутствовать; поскольку в изотропной среде всегда имеется лишь одна преломленная волна.

Соотношение (8.98) можно представить в другой форме. Введем обозначения:

$$r_1 = -\frac{\mathbf{S}_1 \mathbf{q}}{\mathbf{S} \mathbf{q}}, \quad r_2 = -\frac{\mathbf{S}_2 \mathbf{q}}{\mathbf{S} \mathbf{q}}, \quad r_1 + r_2 = r, \quad (8.98a)$$

$$d_1 = \frac{\mathbf{S}'_1 \mathbf{q}}{\mathbf{S} \mathbf{q}}, \quad d_2 = \frac{\mathbf{S}'_2 \mathbf{q}}{\mathbf{S} \mathbf{q}}, \quad d_1 + d_2 = d.$$

Здесь  $r_1, r_2$  — коэффициенты отражения двух отраженных волн; соответственно  $d_1, d_2$  — коэффициенты прохождения для обеих преломленных волн;  $r, d$  — коэффициенты отражения и прохождения света на рассматриваемой границе. Очевидно, из (8.98) следует равенство

$$r + d = 1, \quad (8.98b)$$

которое является еще одной формой закона сохранения энергии электромагнитных волн на границе двух сред.

Из общего соотношения (8.97) следует также тот важный вывод, что нарушение закона сохранения энергии волн на границе возможно лишь при условии *неэрмитовости* тензора  $\epsilon$  или  $\mu$  в одной из сред. В таком случае формула (8.97) позволяет определить потери энергии волн при отражении и преломлении.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим некоторые универсальные закономерности, относящиеся к свойствам света, отраженного на границе среды, обладающей весьма общими свойствами [72, 5]. Относительно первой среды будем предполагать, что она является изотропной и прозрачной. От-

\*) При условии, что вектор экстинкции параллелен  $\mathbf{q}$ .

носителем волны, падающей на поверхность второй среды, будем предполагать, что она является плоской монохроматической однородной волной с определенным состоянием поляризации. Что же касается второй среды, то ее свойства мы ограничим единственным условием — она должна быть *линейной*. Последнее означает, что векторы индукций  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  в рассматриваемой среде должны линейно зависеть от напряженностей электромагнитного поля \*). Иными словами, уравнения связи (см. § 1) должны быть линейными. Вследствие линейности уравнений Максвелла, граничных условий и уравнений связи магнитный вектор отраженной волны  $\mathbf{H}'$  должен линейно выражаться через магнитный вектор \*\*\*) падающей волны  $\mathbf{H}$  (см., например, (8.51)):

$$\mathbf{H}' = R\mathbf{H}, \quad (8.99)$$

где  $R$  — некоторое линейное преобразование (матрица). Разумеется, аналогичное уравнение справедливо и для электрических векторов падающей ( $\mathbf{E}$ ) и отраженной ( $\mathbf{E}'$ ) волны:

$$\mathbf{E}' = R'\mathbf{E}. \quad (8.100)$$

Поскольку среда, в которой распространяется падающая волна, является изотропной непроводящей, то средняя энергия отраженной волны (см. (1.47)) пропорциональна  $\epsilon|\mathbf{E}'|^2 = \mu|\mathbf{H}'|^2$ . Так как, согласно § 25, из (8.99), (8.100) следует

$$\mathbf{H}^* = R^*\mathbf{H} = \mathbf{H}^*R^+ = \mathbf{H}^*R^+, \quad \mathbf{E}'^* = \mathbf{E}^*R'^+, \quad (8.101)$$

где  $R^+$  означает эрмитовски сопряженную к  $R$  матрицу, то

$$|\mathbf{H}'|^2 = \mathbf{H}^*R^+R\mathbf{H} = \mathbf{H}^*T\mathbf{H}, \quad |\mathbf{E}'|^2 = \mathbf{E}^*T'\mathbf{E}, \quad (8.102)$$

где  $T = R^+R = T^+$ ,  $T' = T'^+$  эрмитовские (самосопряженные) матрицы. Таким образом, средняя энергия отраженной волны является эрмитовской квадратичной формой от магнитного (электрического) вектора падающей волны. Поскольку энергия отраженной волны пропорциональна  $\epsilon|\mathbf{E}'|^2 = \mu|\mathbf{H}'|^2$ , то коэффициент отражения равен  $r = |\mathbf{H}'|^2/|\mathbf{H}|^2 = |\mathbf{E}'|^2/|\mathbf{E}|^2$ . Если нормировать поле падающей волны так, чтобы  $|\mathbf{H}|^2 = 1$ , то  $r = |\mathbf{H}'|^2 = \mathbf{H}^*T\mathbf{H}$ . Аналогично при нормировке  $|\mathbf{E}|^2 = 1$  получим  $r = |\mathbf{E}'|^2 = \mathbf{E}^*T'\mathbf{E}$ . Матрицы  $T$  и  $T'$  зависят от направления волновой нормали  $\mathbf{n}$  падающей волны, ориентации отражающей поверхности и свойств кристалла, характеризующихся тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости  $\epsilon$ ,  $\mu$ , электропроводности  $\sigma$  и т. д. Следовательно, матрицы  $T$ ,  $T'$  постоянны.

\*) Кроме того, само собой разумеется, как во всей данной книге, что среды *однородны*.

\*\*) Здесь подразумеваются векторные амплитуды магнитного поля волны без фазового множителя.

ны при фиксированном направлении нормали падающей волны  $\mathbf{n}$ .

Рассматривая всевозможные поляризации вектора  $\mathbf{H}(\mathbf{E})$  в фазовой плоскости падающей волны при одном и том же  $\mathbf{n}$  и при условии  $|\mathbf{H}|^2=1$  ( $|\mathbf{E}|^2=1$ ), мы будем получать различные значения коэффициента отражения  $r$ . Выясним, при какой поляризации падающей волны коэффициент отражения принимает экстремальные значения. Это будет задача на экстремум эрмитовской квадратичной формы

$$r(\mathbf{H}) = \mathbf{H}^* T \mathbf{H}, \quad r(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^* T' \mathbf{E} \quad (8.103)$$

при добавочном условии  $\mathbf{H}^* \mathbf{H} = 1$  ( $\mathbf{E}^* \mathbf{E} = 1$ ). Как известно, векторы  $\mathbf{H}(\mathbf{E})$ , при которых достигается соответствующий экстремум, являются собственными векторами матрицы  $T(T')$  эрмитовой формы. Так как векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}'$  определяются каждый двумя комплексными компонентами в соответствующих фазовых плоскостях, то матрица  $T$  имеет две строки и два столбца и соответственно два собственных вектора  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ , определяемых условиями

$$T \mathbf{H}_1 = r_1 \mathbf{H}_1, \quad T \mathbf{H}_2 = r_2 \mathbf{H}_2, \quad (8.104)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  обозначают соответствующие собственные значения матрицы  $T$ . Аналогично для электрических векторов, отвечающих экстремальному отражению, должно быть

$$T' \mathbf{E}_1 = r'_1 \mathbf{E}_1, \quad T' \mathbf{E}_2 = r'_2 \mathbf{E}_2. \quad (8.105)$$

Согласно общей теории эрмитовских квадратичных форм,  $r_1$  и  $r_2$  равны экстремальным значениям форм (8.103) при условии  $|\mathbf{H}|^2=1$  ( $|\mathbf{E}|^2=1$ ), т. е. они и дают минимальное и максимальное значения коэффициента отражения. Соответствующие собственные векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  при условии, что  $r_1 \neq r_2$ , ортогональны между собой в следующем смысле (см. § 25):

$$\mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^* \mathbf{H}_1 = 0, \quad \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^* \mathbf{E}_1 = 0. \quad (8.106)$$

Соответствующие векторы отраженной волны  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{E}'$  также ортогональны между собой в том же смысле. Действительно, согласно (8.99) и (8.101),

$$\mathbf{H}_1^* \mathbf{H}'_2 = \mathbf{H}_1^* R^+ R \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1^* T \mathbf{H}_2$$

или, согласно (8.104) и (8.106),

$$\mathbf{H}_1^* \mathbf{H}'_2 = r_2 \mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_2 = 0. \quad (8.107)$$

Из полученных соотношений вытекают следующие утверждения:

1. При падении света из изотропной прозрачной среды на любую среду для заданного направления волновой нормали па-

дающей волны всегда существует *одна и только одна* пара таких векторов магнитного (электрического) поля падающей волны  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ , связанных соотношением  $\mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_2 = 0$ , что им соответствуют векторы магнитного поля отраженной волны  $\mathbf{H}'_1, \mathbf{H}'_2$ , связанные таким же соотношением  $\mathbf{H}'_1^* \mathbf{H}'_2 = 0$ . Действительно, из  $\mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}'_1^* \mathbf{H}'_2 = 0$  и (8.99) следует, что  $\mathbf{H}_1^* \mathbf{T} \mathbf{H}_2 = 0$ , т. е. двумерный вектор  $\mathbf{H}_1$  ортогонален к двум векторам  $\mathbf{H}_2$  и  $\mathbf{T} \mathbf{H}_2$ , которые, следовательно, отличаются только числовым множителем, что приводит к (8.104).

2. Векторы  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  являются собственными векторами эрмитовской матрицы  $T = R^+ R$  (см. (8.99)).

3. Векторам  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  соответствуют наибольшее и наименьшее значения коэффициента отражения.

4. При обычном (неполном) отражении от прозрачных сред матрица  $T$  вещественна и симметрична, а значит и ее собственные векторы вещественны, т. е.  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  — линейные векторы (§ 2). Поэтому в данном случае максимальный и минимальный коэффициенты отражения достигаются только при линейной поляризации падающего света.

5. Если векторы  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  нелинейны, что возможно, например, при отражении от поглощающих кристаллов, то это означает, что экстремальное отражение получается, вообще говоря, при некоторой эллиптической поляризации падающей волны. В этом случае, согласно (8.106), эллипсы  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  будут подобны, их большие оси будут взаимно перпендикулярны и направления обхода противоположны (§ 2). Это справедливо и для эллипсов  $\mathbf{H}'_1, \mathbf{H}'_2$ .

6. При полном отражении от прозрачных сред  $|\mathbf{H}'|^2 = |\mathbf{H}|^2$  для всех  $\mathbf{H}$ , следовательно,  $T = 1$ , откуда  $R^+ = R^{-1}$ , т. е. матрица  $R$  должна быть *унитарна*.

7. При отражении от изотропной среды векторы  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ , соответствующие экстремальным коэффициентам отражения, являются линейными и расположены в плоскости падения и перпендикулярно к ней, так же как и векторы  $\mathbf{H}'_1, \mathbf{H}'_2$  отраженной волны.

Аналогичные утверждения справедливы для векторов  $\mathbf{E}$  падающей и отраженной волн.

В частном случае простого отражения от прозрачных кристаллов направления  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ , названные главными азимутами, рассматривались Корню [95, 96, 28]. Помимо обобщения этого понятия на случай отражения от любых сред мы установили выше важное свойство, которое придает главным азимутам существенное физическое значение: им соответствуют экстремальные коэффициенты отражения.

Определение векторов  $\mathbf{H}_1$  или  $\mathbf{H}_2$  можно осуществить экспериментально путем подбора такой поляризации падающей волны, которой соответствовал бы наибольший (наименьший) коэффициент отражения. Найдя  $\mathbf{H}_1$ , можно определить  $\mathbf{H}_2$  на основании соотношения (8.106). Свойство (8.107) может служить для проверки. Наряду с этим  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  могут быть найдены следующим образом. Производя определение поляризации и интенсивности отраженной волны для каких-либо двух независимых направлений поляризации падающей волны, т. е. определяя векторы  $\mathbf{H}'$  по заданным  $\mathbf{H}$ , можно вычислить матрицу  $R^*$ ). Тогда задача сводится к приведению матрицы  $T = R + R^*$  к диагональному виду. Собственные значения матрицы  $T$  дадут экстремальные коэффициенты отражения  $r_1, r_2$ , а собственные векторы — соответственно  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ . Зная  $r_1, r_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ , нетрудно определить коэффициент отражения  $r$ , соответствующий любой поляризации падающей волны  $\mathbf{H}$ . Для этого разлагаем  $\mathbf{H}$  по  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ :

$$\mathbf{H} = c_1 \mathbf{H}_1 + c_2 \mathbf{H}_2.$$

Если  $|\mathbf{H}|^2 = |\mathbf{H}_1|^2 = |\mathbf{H}_2|^2 = 1$ , то  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ . Для коэффициента отражения получим

$$\begin{aligned} r = |\mathbf{H}'|^2 &= \mathbf{H}^* T \mathbf{H} = (c_1^* \mathbf{H}_1^* + c_2^* \mathbf{H}_2^*) (c_1 r_1 \mathbf{H}_1 + c_2 r_2 \mathbf{H}_2) = \\ &= r_1 |c_1|^2 + r_2 |c_2|^2. \end{aligned} \quad (8.108)$$

Разумеется, аналогичные рассуждения могут быть применены к векторам электрического поля падающей и отраженной волн.

## § 9. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ СВЕТА

В предыдущем параграфе была рассмотрена общая теория отражения и преломления света на поверхности различных сред. На практике обычно большой интерес представляют различные частные случаи, связанные, например, с конкретной ориентацией кристалла либо с условиями, при которых наступает полное отражение и т. д. Настоящий параграф посвящен рассмотрению ряда таких случаев \*\*).

Прежде всего мы рассмотрим явление *полного отражения*, представляющее большой принципиальный и практический интерес. Вначале мы ограничимся случаем полного отражения на границе двух прозрачных изотропных сред.

<sup>\*)</sup> Очевидно, для этого проще всего взять падающую волну, линейно поляризованную в плоскости падения и перпендикулярно к ней.

<sup>\*\*)</sup> Отметим, что многостороннее рассмотрение явления отражения света на современном уровне содержится в монографии В. А. Кизеля [97].

Будем обозначать через  $\epsilon$  ( $\epsilon_1$ ) диэлектрическую проницаемость первой (второй) среды и предположим, что обе среды немагнитны. В таком случае для вектора рефракции  $\mathbf{m}$  и показателя преломления  $n$  плоских волн в первой среде будет справедливо известное равенство

$$\mathbf{m}^2 = n^2 = \epsilon \quad (9.1)$$

и соответственно для вектора рефракции  $\mathbf{m}''$  и показателя преломления  $n''$  во второй среде

$$\mathbf{m}''^2 = n''^2 = \epsilon_1. \quad (9.2)$$

Подчеркнем, что эти соотношения справедливы во всех случаях, т. е. как для однородных, так и для неоднородных волн (§ 6).

Линейные граничные условия (8.1), (8.4) имеют универсальное значение, в частности они справедливы как для однородных, так и для неоднородных волн. Отсюда следует, что вытекающие из них соотношения (8.8), (8.10) также пригодны в обоих этих случаях. Пусть из первой среды наклонно падает на поверхность второй среды плоская однородная световая волна с вектором рефракции  $\mathbf{m}$ . Очевидно, при этом должно выполняться условие

$$\mathbf{m}\mathbf{q} > 0, \quad (9.3)$$

т. е. волновая нормаль  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$ ) должна составлять острый угол с вектором  $\mathbf{q}$  нормали к границе, направленным во вторую среду. Согласно (8.9), мы имеем

$$\mathbf{m} = \mathbf{b} + \eta\mathbf{q}, \quad (9.4)$$

причем из условий (9.1), (9.3) следует (поскольку  $\mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2$ )

$$\eta = +1; \quad \overline{\mathbf{m}^2 - \mathbf{a}^2} = \sqrt{\epsilon - \mathbf{a}^2} > 0. \quad (9.5)$$

Вектор рефракции отраженной волны  $\mathbf{m}'$  удовлетворяет тому же условию (9.1):

$$\mathbf{m}'^2 = n^2 = \epsilon.$$

Однако в соответствующем выражении (9.4)

$$\mathbf{m}' = \mathbf{b} + \eta'\mathbf{q} \quad (9.6)$$

параметр  $\eta'$  должен быть отрицательным:

$$\eta' = \mathbf{m}'\mathbf{q} = -\sqrt{\epsilon - \mathbf{a}^2}. \quad (9.7)$$

Что касается преломленной волны, то нас здесь будет интересовать случай, когда она является неоднородной. В § 6 были рассмотрены общие свойства плоских неоднородных волн в изотропных прозрачных средах. Такие волны возникают при

полном отражении, когда параметр  $\eta'' = \sqrt{m''^2 - a^2}$  (см. (8.10)) является чисто мнимым, что возможно при условии  $\epsilon_1 = m''^2 < a^2$ . Поскольку  $a^2 = [mq]^2 = n^2 \sin^2 \psi$ , где  $\psi$  — угол падения, то должно быть  $m''^2 = n''^2 < n^2 \sin^2 \psi$ . Следовательно, полное отражение возможно только в том случае, когда показатель преломления второй среды ( $n''$ ) меньше показателя преломления первой среды ( $n$ ). Кроме того, должно быть

$$\sin \psi > \frac{n''}{n} = \sin \psi_0, \quad (9.8)$$

т. е. угол падения  $\psi$  должен быть больше фиксированного угла  $\psi_0$ , называемого *предельным углом полного отражения* для данных двух сред. Введем для этого случая обозначение

$$\eta'' = i\eta_1, \quad \eta_1 = \pm \sqrt{a^2 - n''^2}. \quad (9.9)$$

Подчеркнем, что двузначность этого выражения имеет принципиальный характер. Она связана с тем, что вектор рефракции  $\mathbf{m}'' = \mathbf{b} + \eta'' \mathbf{q}$  (см. (8.9)) должен удовлетворять уравнению второй степени  $m''^2 = \epsilon_1$ . Поскольку выражение (8.9) для  $\mathbf{m}''$  удовлетворяет уравнениям, вытекающим из граничных условий (8.8), и, сверх того, в общем случае кристалла вектор рефракции внутри среды при всех обстоятельствах должен удовлетворять уравнению нормалей (4.7), то упомянутая неоднозначность параметра  $\eta''$  для преломленной волны неизбежно имеет место в любой граничной задаче. Следует отчетливо представлять себе, что, *используя только граничные условия, невозможно сделать выбор между различными значениями  $\eta''$* . Для такого выбора необходимо привлекать дополнительные соображения, независимые от граничных условий. Одним из наиболее общих и естественных условий, позволяющих сделать указанный выбор, является требование, чтобы средний вектор потока энергии преломленной волны  $\overline{\mathbf{S}}''$  был направлен внутрь второй среды, т. е. чтобы было

$$\overline{\mathbf{S}}'' \mathbf{q} > 0. \quad (9.10)$$

Для обычного преломления однородных волн на границе двух изотропных сред, когда  $\mathbf{S}'' \parallel \mathbf{m}''$ , последнее условие равносильно неравенству  $\mathbf{m}'' \mathbf{q} = \eta'' > 0$ . Однако в случае полного отражения условие (9.10) не приводит к цели, поскольку, как можно показать, при этом  $\overline{\mathbf{S}}'' \mathbf{q} = 0$ . Согласно (6.3), (8.9), (9.9), имеем

$$\mathbf{m}'' = \mathbf{m}_1'' - i\mathbf{m}_2'' = \mathbf{b} + i\eta_1 \mathbf{q}, \quad \mathbf{m}_1'' = \mathbf{b}, \quad \mathbf{m}_2'' = -\eta_1 \mathbf{q}. \quad (9.11)$$

Таким образом, при полном отражении (см. § 6) плоской волны в преломленной волне фазовая нормаль всегда направ-



лена параллельно границе раздела (и плоскости падения), а амплитудная нормаль перпендикулярна к границе раздела, следовательно, плоскости равных амплитуд параллельны границе.

Выражение (6.6) для электрического поля преломленной волны принимает вид

$$E'' = E_0'' e^{k_0 \eta_1 r q} e^{i\varphi'}, \quad k_0 = 2\pi/\lambda_0. \quad (9.12)$$

При неограниченном углублении внутрь второй среды, очевидно,  $rq \rightarrow +\infty$ , следовательно, при  $\eta_1 > 0$  амплитуда электрического поля и его энергия будут принимать бесконечно большие значения, что физически неприемлемо. Таким образом, эти соображения приводят к условию  $\eta_1 < 0$ , т. е. (см. (9.9) \*)

$$\eta'' = i\eta_1 = -i\sqrt{a^2 - n''^2}, \quad m'' = +\sqrt{a^2 - n''^2}q. \quad (9.13)$$

Для того чтобы более подробно рассмотреть случай полного отражения, представим общие выражения (8.55), (8.54) для электрического поля отраженной и преломленной волн в ином виде [4, 69, 5]. А именно в формулы

$$E' = \frac{\eta - \eta''}{a^2(\eta + \eta'')} \left( a \cdot a + \frac{m' m''}{m m''} [n' a] \cdot [n a] \right) E, \quad (9.14)$$

$$E'' = -\frac{2\eta}{\eta + \eta''} \frac{m'' \times m \times}{m'' m} E \quad (9.15)$$

подставим для  $E$ ,  $E'$ ,  $E''$  выражения

$$\begin{aligned} E &= Aa + B[na], \quad n = m/\sqrt{m^2} = m/n, \\ E' &= A'a + B'[n'a], \quad n' = m'/n', \\ E'' &= A''a + B''[n''a], \quad n'' = m''/n''. \end{aligned} \quad (9.16)$$

В результате получим соотношения

$$A'a + B'[n'a] = \frac{\eta - \eta''}{\eta + \eta''} \left( Aa + \frac{m' m''}{m m''} B[n'a] \right),$$

$$A''a + B''[n''a] = \frac{2\eta}{(\eta + \eta'') m m''} (m m'' \cdot Aa + n n'' B[n'a]),$$

из которых следует

$$A' = \frac{\eta - \eta''}{\eta + \eta''} A, \quad A'' = \frac{2\eta}{\eta + \eta''} A, \quad (9.17)$$

\*) Заметим, что в некоторых особых случаях вместо (9.10) или (9.13) приходится использовать иные условия для определения  $\eta''$  (см. [82]).

$$B' = \frac{(\eta - \eta'') m' m''}{(\eta + \eta'') m m''} B, \quad B'' = \frac{2\eta n n''}{(\eta + \eta'') m m''} B. \quad (9.18)$$

Иначе эти равенства можно написать в виде [4, 69, 5]

$$\frac{A}{\eta + \eta''} = \frac{A'}{\eta - \eta''} = \frac{A''}{2\eta}, \quad (9.19)$$

$$\frac{B/A}{m m''} = \frac{B'/A'}{m' m''} = \frac{B''/A''}{n n''}. \quad (9.20)$$

Последнее соотношение с учетом (8.9), (8.10) принимает форму

$$\frac{B/A}{a^2 + \eta \eta''} = \frac{B'/A'}{a^2 - \eta \eta''} = \frac{B''/A''}{n n''}. \quad (9.21)$$

При переходе к углам падения ( $\psi$ ) и преломления ( $\psi''$ ) получим

$$\eta = n \cos \psi, \quad \eta'' = n'' \cos \psi'', \quad a^2 = n^2 \sin^2 \psi = n''^2 \sin^2 \psi'', \quad (9.22)$$

откуда следует закон Снеллиуса

$$n''/n = \sin \psi / \sin \psi''. \quad (9.23)$$

Подставляя (9.22) в (9.17), (9.18), получим известные формулы Френеля для волновых амплитуд, перпендикулярных ( $A, A', A''$ ) и параллельных ( $B, B', B''$ ) плоскости падения:

$$A' = \frac{\sin(\psi'' - \psi)}{\sin(\psi'' + \psi)} A, \quad A'' = \frac{2 \cos \psi \sin \psi''}{\sin(\psi'' + \psi)} A, \quad (9.24)$$

$$B' = \frac{\operatorname{tg}(\psi - \psi'')}{\operatorname{tg}(\psi + \psi'')} B, \quad B'' = \frac{2 \cos \psi \sin \psi''}{\sin(\psi + \psi'') \cos(\psi - \psi'')} B. \quad (9.25)$$

В случае полного отражения от прозрачной немагнитной изотропной среды, используя (9.19), (9.21), (9.11), получаем для соотношений между амплитудами электрического вектора, перпендикулярными и параллельными плоскости падения:

$$\frac{A}{\eta + i\eta_1} = \frac{A'}{\eta - i\eta_1} = \frac{A''}{2\eta}, \quad (9.26)$$

$$\frac{B/A}{a^2 + i\eta\eta_1} = \frac{B'/A'}{a^2 - i\eta\eta_1} = \frac{B''/A''}{n n''}. \quad (9.27)$$

Эти соотношения представляют собой формулы Френеля для случая полного отражения. Из (9.11) вытекает, во-первых, что при полном отражении волна во второй (менее оптически плотной) среде будет неоднородной, поскольку  $[m'' m''^*] = -2i\eta_1 a \neq 0$ . Во-вторых, плоскость комплексного вектора рефракции  $m''$

параллельна плоскости падения, причем вещественный вектор рефракции  $\vec{m}_1 = \mathbf{b} = [\mathbf{q}\mathbf{a}]$  направлен вдоль линии пересечения плоскости падения и плоскости раздела сред, а вектор экстинкции  $\vec{m}_2 = \eta - \eta_1 \mathbf{q}$  направлен по нормали  $\mathbf{q}$  внутрь второй среды. Отсюда следует далее, что полученное в § 6 общее выражение для электрического поля неоднородной волны (6.32) дает разложение на составляющие: перпендикулярную ( $\sqrt{\mu} b \mathbf{n}_0$ ) и параллельную ( $\sqrt{\mu} a [\mathbf{m} \mathbf{n}_0]$ ) плоскости падения. Следовательно, полагая в формулах § 6  $\mu = 1$ ,  $\vec{m}_1 = \mathbf{b}$ ,  $\vec{m}_2 = -\eta_1 \mathbf{q}$ ,  $A/B = b/a$  и учитывая (9.26), (9.27), мы непосредственно получим соотношения, характеризующие свойства неоднородных волн во второй среде при полном отражении.

Обращаясь к вектору Умова — Пойнтинга, заключаем на основании (6.59), что средний поток энергии во второй среде всегда параллелен поверхности раздела сред. Что же касается переменной части потока энергии, то, согласно (6.55), этот вектор изменяется в плоскости вектора  $\vec{m}$ , параллельной плоскости падения. Таким образом, средний поток энергии не имеет компоненты, нормальной к поверхности раздела, а это означает, что в среднем энергия не проходит во вторую среду, т. е. отражение действительно является полным. Но вектор  $\vec{S}$  в общем случае не лежит в плоскости падения, поскольку, согласно (6.59), (9.12),

$$\vec{S} \cdot \mathbf{n}_0 = -\frac{c \eta_1 |a|}{4\pi n''} e^{2k \cdot \eta_1 r \mathbf{q}} \operatorname{Im}(ab^*), \quad (\mathbf{n}_0 \parallel [\vec{m} \vec{m}^*] \parallel \mathbf{a}), \quad (9.28)$$

а это выражение в общем случае отлично от нуля. Выражение (9.28) определяет «боковую» компоненту потока энергии. Поскольку, согласно общим законам электромагнитного поля, импульс поля пропорционален вектору Умова — Пойнтинга, то появление боковой компоненты  $\vec{S}$  в преломленной волне при условии ее отсутствия в падающей и отраженной волнах означает несохранение импульса поля. Так как справедлив закон сохранения полного импульса, то отсюда вытекает, что избыточный импульс должен компенсироваться механической отдачей среды.

Как известно, из теории Эйхенвальда [83] вытекает, что при полном отражении ограниченного светового пучка, линейно поляризованного нормально или перпендикулярно плоскости падения, должно иметь место смещение его вдоль линии пересечения плоскостей падения и раздела, т. е. в направлении вектора  $\mathbf{b}$ . Это смещение, обнаруженное в опытах Гооса и Хэнхен [84], связано с формой кривых потока энергии во второй среде.

Наличие боковой компоненты у вектора  $\mathbf{S}''$  означает, что в общем случае поляризации падающей волны кривые потока энергии во второй среде не лежат в плоскости падения, но проходят (в среднем) под некоторым углом к ней. Отсюда следует, что в общем случае наряду с упомянутым продольным смещением отраженного пучка (в направлении  $\mathbf{b}$ ) аналогичным образом должно иметь место поперечное или боковое смещение пучка (в направлении  $\mathbf{a}$ ), приводящее к выходу его из первоначальной плоскости падения. Это боковое смещение было предсказано в [38, 39] и впоследствии обнаружено на опыте (см. [85—93]).

Из (9.28) следует, что боковой поток исчезает при

$$\operatorname{Im}(ab^*) = \frac{i}{2} |b|^2 \left( \frac{a^*}{b^*} - \frac{a}{b} \right) = \frac{i}{2} |b|^2 \left( \frac{B^{**}}{A^{**}} - \frac{B''}{A''} \right) = 0. \quad (9.29)$$

Очевидно, это условие выполняется при  $A''=0$  или  $B''=0$ , чему соответствует, согласно (9.26), (9.27),  $A=0$  или  $B=0$ , т. е. падающая волна, линейно поляризованная в плоскости падения или перпендикулярно к ней. Кроме того, условие (9.29) имеет место при  $(B''/A'')^* = B''/A''$ , чему соответствует, согласно (9.27),

$$\frac{B/A}{B^*/A^*} = \frac{a^2 + i\eta\eta_1}{a^2 - i\eta\eta_1} = \frac{mm''}{mm''^*}. \quad (9.30)$$

Заметим, что это условие определяет только разность фаз амплитуд  $A$ ,  $B$ . Действительно, обозначив  $B/A = |B/A|e^{i\delta}$ , получим из (9.30)

$$\operatorname{tg} \delta = \eta\eta_1/a^2.$$

Поскольку  $B/A$  не есть вещественное число, то мы получаем эллиптическую поляризацию падающей волны. При этом отношение  $|B|/|A|$  может быть произвольным.

В выражении (9.28) для бокового потока энергии, полагая  $A''=b$ ,  $B''=a$  (ср. (9.16), (6.32)), множитель (9.29) можно выразить через амплитуды падающей волны  $A$ ,  $B$  с помощью соотношений (9.26), (9.27). В результате получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(ab^*) &= \frac{i}{2} (A''B''^* - A''^*B'') = 2i \frac{\eta^2 n n''}{\eta^2 + \eta_1^2} \times \\ &\times |A|^2 \left( \frac{B^*/A^*}{a^2 - i\eta\eta_1} - \frac{B/A}{a^2 + i\eta\eta_1} \right). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Отсюда ясно, что боковой поток энергии преломленной волны зависит не только от угла падения ( $\eta$ ,  $\eta_1$ ,  $\mathbf{a}$ ) и энергии падающей волны ( $|A|$ ,  $|B|$ ), но и от ее поляризации. Чтобы опреде-

лить, при какой поляризации боковой поток имеет наибольшую величину, нужно найти максимум выражения

$$F = i|A|^2 \left( \frac{B^*/A^*}{a^2 - i\eta\eta_1} - \frac{B/A}{a^2 + i\eta\eta_1} \right) \quad (9.32)$$

при заданной энергии падающей волны, т. е. при условии

$$|A|^2 + |B|^2 = C \quad (9.33)$$

и при постоянных  $a$ ,  $\eta$ ,  $\eta_1$ . Вводя переменную  $\xi = B/A$ , находим из (9.33)  $|A|^2 = \frac{C}{(1 + \xi\xi^*)}$ , после чего функция  $F$  принимает вид

$$F = iC \frac{\xi^*/s^* - \xi/s}{1 + \xi\xi^*}, \quad s = a^2 + i\eta\eta_1. \quad (9.34)$$

Условие экстремума  $\partial F / \partial \xi^* = 0$  приводит к соотношению  $\xi^2 = -s/s^*$ . Отсюда следует  $|\xi| = 1$ , т. е.  $|A| = |B|$ . Далее,

$$\frac{\xi^2}{s^2} = -\frac{1}{|s|^2}, \quad \frac{\xi}{s} = \pm \frac{i}{|s|} = -\frac{\xi^*}{s^*}. \quad (9.35)$$

Для экстремального значения  $F$  получаем (см.(9.32))

$$F = \pm \frac{C}{|s|} = \pm \frac{C}{|a^2 + i\eta\eta_1|}. \quad (9.36)$$

Два знака соответствуют двум противоположным направлениям бокового потока. Отметим, что из (9.35) следует

$$\frac{B/A}{B^*/A^*} = -\frac{mm''}{mm''*}. \quad (9.37)$$

Сравнивая с (9.30), видим, что в этом случае разность фаз  $B$  и  $A$  отличается на  $\pi/2$  от разности фаз, соответствующей случаю отсутствия бокового потока.

Таким образом, максимальное значение бокового потока достигается при вполне определенной эллиптической поляризации падающей волны. При этом  $\bar{S}''$  образует с плоскостью падения угол  $\theta$ , определяемый соотношением (6.59):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\bar{S}'' a}{S'' b}. \quad (9.38)$$

Поскольку опыты с эллиптической поляризацией гораздо сложнее, чем с линейной, то выясним, при какой линейной поляризации падающего луча боковой поток энергии будет мак-

симален. Для этого в выражении (9.32) положим  $(B/A)^* = B/A = \text{ctg } \chi$ , где  $\chi$  — угол, образуемый вектором  $\mathbf{E}$  падающей волны с плоскостью падения. Поскольку (см. (9.33))  $|A|^2 = C/(1 + \text{ctg}^2 \chi) = C \sin^2 \chi$ , то из (9.32) легко получаем, что максимум бокового потока при линейной поляризации падающего света достигается, когда  $\chi = 45^\circ$ . При этом  $A = B$  и, согласно (9.28), (9.31), имеем

$$\bar{S}^n_{n_0} = \frac{nc}{2\pi} \frac{|a|\eta^3\eta_1^2}{(n^2 - n''^2)(a^4 + \eta^2\eta_1^2)} Ce^{2k_0\eta_1 r_0}.$$

Поскольку при полном отражении средний поток энергии через границу раздела отсутствует ( $\bar{S}q = 0$ , (6.57)), то поле во второй среде с присущей ему энергией может создаваться лишь за счет переменной составляющей вектора Умова — Пойнтинга.

В связи с этим общепринятое понимание процесса полного отражения было таково: полнота отражения обусловлена тем, что энергия в среднем не проходит через границу раздела, наличие же поля во второй среде объясняется тем, что поток энергии на время заходит во вторую среду (ныряет в нее в одном месте, по выражению А. А. Эйхенвальда, чтобы затем вынырнуть в другом [83]). Однако из выражения (6.55) сразу ясно, что при круговой поляризации неоднородной волны во второй среде полностью отсутствует не только средний, но и мгновенный поток энергии через границу раздела. В то же время поле во второй среде не равно нулю, что вытекает из соотношений (9.26), (9.27). В таком случае приведенное выше объяснение наличия поля во второй среде становится несостоятельным. Отсюда следует принципиальная недостаточность теории полного отражения, не учитывающей ограниченности падающей волны в пространстве или во времени. Очевидно, рассматриваемый особый случай представляет принципиальный интерес и поэтому его экспериментальное исследование является весьма желательным. Рассмотрим, какова должна быть при этом поляризация падающей волны. Из  $E^2 = 0$  следует  $B''/A'' = \pm i$ . Поэтому, согласно (9.27),

$$\frac{B}{A} = \pm \frac{-\eta\eta_1 + ia^2}{nn''}. \quad (9.39)$$

Таким образом, падающая волна должна быть поляризована эллиптически. Для отношения полуосей эллипса получаем из (2.55) после некоторых вычислений  $b/a = n''/n$ . Это отношение для рассматриваемого случая не зависит от угла падения и равно относительному показателю преломления обеих сред. Используя (2.36), можно определить угол  $\chi$ , образуемый

большой осью эллипса колебаний с плоскостью падения. Он определяется соотношением

$$\operatorname{tg} 2\chi = \pm \frac{2n_r \cos \psi \sqrt{\sin^2 \psi - n_r^2}}{2n_r^2 - (1 + n_r^2) \sin^2 \psi}, \quad (9.40)$$

где  $\psi$  — угол падения;  $n_r = n''/n < 1$  — относительный показатель преломления.

Для крайних случаев предельного угла полного отражения ( $a^2 = n''^2$ ,  $\eta_1 = \sqrt{n^2 - n''^2}$ ) и скользящего падения ( $a^2 = n^2$ ,  $\eta_1 = 0$ ) с помощью (9.39) получаем соответственно  $\chi = \pi/2$  и  $\chi = 0$ . Для отраженной волны в этом случае, согласно (9.27), получим

$$\frac{B'}{A'} = \mp \frac{\eta\eta_1 + ia^2}{nn''} = - \left( \frac{B}{A} \right)^*. \quad (9.41)$$

Следовательно, эллипс колебаний отраженной волны будет иметь ту же форму (и размеры), что и для падающей, но угол  $\chi$  и направление обращения будут иметь противоположный знак.

В рассматриваемом случае для полного вектора плотности потока энергии во второй среде получается после некоторых вычислений простое выражение (см. (6.55), (6.56))

$$\mathbf{S}'' = \bar{\mathbf{S}}'' = \frac{ca^2}{4\pi} |A''|^2 e^{2k_0 \eta_1 r} \left( \mathbf{b} \pm \frac{\eta_1}{n''} \mathbf{a} \right) \quad (9.42)$$

и соответственно для полной плотности энергии

$$w'' = \frac{a^4}{4\pi} |A''|^2 e^{2k_0 \eta_1 r}. \quad (9.43)$$

Таким образом,

$$\mathbf{S}'' = w\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \frac{c}{a^2} \left( \mathbf{b} \pm \frac{\eta_1}{n''} \mathbf{a} \right), \quad (9.44)$$

где вектор  $\mathbf{u}$  следует рассматривать как скорость течения энергии. Простое вычисление показывает, что  $|\mathbf{u}| = c/n''$ , т. е.  $|\mathbf{u}|$  равно фазовой скорости однородных волн во второй среде. Направление течения энергии образует в данном случае с плоскостью падения угол, тангенс которого равен  $\pm \eta_1/n''$ . Отметим еще раз, что при данном рассмотрении, основанном на предположении о стационарном состоянии неограниченной падающей волны, остается невыясненным вопрос о том, каким образом создается поток энергии (9.44) во второй среде без прохождение его через поверхность раздела. Решение этого вопроса, по-видимому, требует учета пространственной ограниченности падающего пучка света.

Пусть однородная световая волна падает из изотропной прозрачной среды на поверхность изотропной поглощающей среды [4, 40, 5]. Общие соотношения (8.7), (8.10) будут справедливы и в этом случае. Будем считать обе среды немагнитными ( $\mu=1$ ). Вводя комплексную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1 = \epsilon^0 - i\tau$  (см. (6.11)) поглощающей среды, получим, согласно (6.12a), (8.9), (8.10),

$$\mathbf{m}''^2 = n''^2 = \epsilon_1, \quad \mathbf{m}'' = \mathbf{b} + \eta'' \mathbf{q}, \quad \eta'' = \sqrt{\epsilon_1 - \mathbf{a}^2}. \quad (9.45)$$

В отличие от границы двух прозрачных сред теперь  $\eta''$  не будет ни вещественным (обычное отражение), ни чисто мнимым (полное отражение). Таким образом,

$$\eta'' = \eta_1'' - i\eta_2''. \quad (9.46)$$

Очевидно, вектор рефракции  $\mathbf{m}''$  всегда будет нелинейным, за исключением единственного случая  $\mathbf{b} = \mathbf{a} = 0$ , т. е.  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{q}$ . Следовательно, при падении света на поглощающую среду в ней будет возникать неоднородная волна во всех случаях, кроме нормального падения. При этом плоскость комплексного вектора  $\mathbf{m}''$  всегда совпадает с плоскостью падения. Написав (ср. (6.3))

$$\mathbf{m}'' = \mathbf{m}_1'' - i\mathbf{m}_2'', \quad (9.47)$$

получим

$$\mathbf{m}_1'' = \mathbf{b} + \eta_1'' \mathbf{q}, \quad \mathbf{m}_2'' = \eta_2'' \mathbf{q}. \quad (9.48)$$

Согласно (6.6), (9.48), для того чтобы энергия волны убывала при углублении в среду, необходимо, чтобы  $\eta_2'' > 0$ . Этим условием определяется знак корня из комплексного числа (9.45). Кроме того, очевидно, при непрерывном переходе к прозрачной второй среде, т. е. при  $\sigma \rightarrow 0$  (см. (6.8), (6.10)), мы должны получить обычные формулы Френеля на границе двух прозрачных сред. Отсюда следует, что  $\eta_1''$  также должно быть положительной величиной ( $\eta_1'' > 0$ ). Таким образом, требование, чтобы при предельном переходе к случаю  $\sigma = 0$  получались известные формулы для прозрачных сред, позволяет решить принципиальный вопрос о выборе знака при извлечении корня для определения  $\eta''$  (см. (9.9), (9.45), (9.46)) в поглощающих средах\*).

Таким образом, вектор экстинкции  $\mathbf{m}_2''$  и амплитудная нормаль преломленной неоднородной волны, как и в случае полного отражения на границе прозрачных сред, перпендикулярны

\*) По-видимому, впервые это требование было сформулировано в [4] (стр. 92, формула (6.16)).



к границе. Что же касается вещественного вектора рефракции  $m_1''$  (фазовой нормали), то он образует с  $q$  угол  $\psi''$ , причем

$$\operatorname{tg} \psi'' = |a|/\eta_1''. \quad (9.49)$$

Следовательно, в отношении фазовой скорости преломленной волны проводящая среда ведет себя подобно диэлектрику, обладающему показателем преломления  $n_\psi$ , значение которого можно получить из закона Снеллиуса:

$$n_\psi = n \frac{\sin \psi}{\sin \psi''} = \frac{|a|}{\sin \psi''} = \sqrt{a^2 + \eta_1''^2} = \sqrt{a^2 + (\operatorname{Re} \sqrt{\epsilon_1 - a^2})^2}. \quad (9.50)$$

Однако определенный таким путем показатель преломления  $n_\psi$  нельзя считать характеризующим свойства среды, так как он зависит от угла падения ( $|a|$ ).

Обращаясь к вектору потока энергии, на основании (6.55) заключаем, что переменная во времени часть потока параллельна плоскости падения и описывает эллипс, лишь размерами отличающийся от эллипса, соответствующего комплексному вектору  $m''$ . Постоянная во времени часть потока, согласно (6.86), наряду с компонентой, параллельной плоскости падения, в общем случае может содержать слагающую, перпендикулярную к этой плоскости. Эта компонента отлична от нуля при условии  $\operatorname{Im}(ab^*/n'') = |b|^2 \operatorname{Im}(a/bn'') \neq 0$ . Сопоставив (6.32) с (9.16) и используя (9.21), находим

$$\frac{a}{bn''} = \frac{B''}{A''n''} = \frac{nB/A}{a^2 + \eta\eta''}. \quad (9.51)$$

Поскольку  $n = n^*$ , то условия отсутствия бокового потока аналогичны соответствующим условиям (9.29), (9.30) для случая полного отражения. В частности, боковой поток преломленной волны во второй (поглощающей) среде также будет отсутствовать при линейной поляризации падающей волны параллельно или перпендикулярно плоскости падения. Последнее, впрочем, можно было предвидеть исходя из соображений симметрии. Условие (9.30) для отсутствия бокового потока теперь запишется в виде (см. (9.51))

$$\operatorname{Im} \left( \frac{a}{bn''} \right) = \frac{in}{2} \left( \frac{B^*/A^*}{a^2 + \eta\eta''^*} - \frac{B/A}{a^2 + \eta\eta''} \right) = 0, \\ \frac{B^*/A^*}{B/A} = \frac{a^2 + \eta\eta''^*}{a^2 + \eta\eta''}. \quad (9.52)$$

В работе [94] было отмечено, что по аналогии со случаем полного отражения [83, 84] при отражении от поглощающей

изотропной среды должно иметь место продольное смещение отраженного луча. Как уже отмечалось выше, в [38, 39] было предсказано боковое смещение луча при полном отражении, подтвержденное на опыте в [85] и других работах. В полной аналогии с этим мы можем утверждать, что в общем случае поляризации падающей волны *при отражении от поглощающей изотропной среды также должно иметь место боковое смещение отраженного луча* [40]. Оно обусловлено наличием перпендикулярной к плоскости падения компоненты среднего потока энергии неоднородной преломленной волны (см. (6.86), (9.45), (9.48))

$$\vec{S}_1^* = -\frac{cn_2''}{4\pi} e^{-2k_0 m_2'' r} \operatorname{Im} \left( \frac{ab^*}{n''} \right) a. \quad (9.53)$$

Зависимость этого выражения от поляризации падающей волны может быть исследована по аналогии со случаем полного отражения [4].

В предыдущем параграфе было установлено общее соотношение (8.98), справедливое, когда в обеих граничных средах тензоры  $\epsilon$  и  $\mu$  являются эрмитовыми либо вторая среда является хотя и поглощающей, но изотропной. При этом в обеих средах отсутствуют нормальные компоненты интерференционных потоков и вся энергия, приходящая на границу с падающей волной, уходит от нее с отраженными и преломленными волнами.

Большой принципиальный интерес представляют случаи, когда указанные условия не выполнены и, следовательно, существует интерференционный поток через границу раздела. При этом возникают некоторые затруднения с интерпретацией явления, которые неоднократно обсуждались в литературе [98—101].

Мы рассмотрим простейший случай нормального падения однородной волны из поглощающей изотропной среды на ее границу с прозрачной изотропной средой [102]. Будем предполагать обе среды немагнитными.

Пусть  $n''$  ( $n''^2 = \epsilon_1$ ) — показатель преломления второй (прозрачной) среды. В первой (поглощающей) среде, согласно (6.11), (6.12a),  $m^2 = n^2 = \epsilon^0 - i\tau = \epsilon$ ,  $n = n'(1 - i\kappa)$ . При нормальном падении для падающей волны  $m_0 = nq$ , причем (см. (6.61), (6.69))

$$n'^2 = \frac{1}{2} n_0^2 (\sqrt{1 + \rho^2} + 1), \quad \kappa = \frac{1}{\rho} (\sqrt{1 + \rho^2} - 1),$$

где  $\rho = \tau/\epsilon^0$ ,  $n_0^2 = \epsilon^0$ .

Будем обозначать через  $S_{01}$  средний во времени интерференционный поток, появляющийся благодаря наличию в пер-

вой среде падающей ( $\mathbf{m}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ ) и отраженной ( $\mathbf{m}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ ) волн. Согласно (8.89), имеем

$$S_{01} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} ([\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_1^*] + [\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_0^*]). \quad (9.54)$$

Используя уравнения Максвелла  $\mathbf{H}_0 = [\mathbf{m}_0 \mathbf{E}_0]$ ,  $\mathbf{H}_1 = [\mathbf{m}_1 \mathbf{E}_1]$ , находим

$$S_{01} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{m}_1^* + \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{m}_0^*). \quad (9.55)$$

Для отраженной волны  $\mathbf{m}_1 = -\mathbf{m}_0 = -n\mathbf{q}$  и (см. (8.58))

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 = \frac{n - n''}{n + n''} \mathbf{E}_0.$$

С учетом этих соотношений получим из (9.55)

$$\begin{aligned} S_{01} &= \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{q} \operatorname{Re} \left[ n^* \left( \frac{n - n''}{n + n''} - \frac{n^* - n''}{n^* + n''} \right) \right] = \\ &= \frac{c}{4\pi} \frac{n'' |\mathbf{E}_0|^2}{|n + n''|^2} \mathbf{q} \operatorname{Re} (|n|^2 - n^{*2}) = \frac{c}{2\pi} \frac{n'^2 n'' \kappa^2}{|n + n''|^2} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Поскольку множитель, стоящий перед вектором  $\mathbf{q}$ , положителен, то интерференционный поток направлен туда же, куда и  $\mathbf{q}$ , т. е. из первой (поглощающей) среды во вторую.

В случае границы двух изотропных сред соотношение (8.98), если оно справедливо, принимает вид

$$S_2 \mathbf{q} - S_1 \mathbf{q} = S_0 \mathbf{q}, \quad (9.57)$$

или  $r + d = 1$ , где

$$r = -S_1 \mathbf{q} / S_0 \mathbf{q}, \quad d = S_2 \mathbf{q} / S_0 \mathbf{q}. \quad (9.58)$$

Здесь  $r(d)$  — энергетический коэффициент отражения (прохождения) света на границе (ср. (8.98а)). Согласно (9.54), (9.56), вместо (9.57) мы будем иметь теперь

$$S_2 \mathbf{q} - S_1 \mathbf{q} - S_{01} \mathbf{q} = S_0 \mathbf{q}. \quad (9.59)$$

Возникает вопрос: как определить в этом случае энергетические коэффициенты отражения и прохождения. Очевидно, ответ на этот вопрос зависит от того, куда направлен интерференционный поток  $S_{01}$ . Если бы он был направлен в сторону, противоположную  $\mathbf{q}$ , то его следовало добавлять к потоку энергии отраженной волны. Однако, согласно (9.56), этот поток направлен во вторую среду и, следовательно, его следует

складывать с потоком  $S_2$  в единый поток проходящей волны. Таким образом, мы должны ввести определения

$$r = -\frac{S_1 q}{S_0 q}, \quad d = \frac{S_2 q - S_{01} q}{S_0 q}, \quad (9.60)$$

в соответствии с которыми равенство (9.59) принимает вид  $r+d=1$ . Поскольку (см. (8.58))

$$E_2 = E'' = \frac{2n}{n+n''} E_0,$$

то из (8.88) следует с учетом уравнений Максвелла ( $m_2 = n'' q$ )

$$S_0 = \frac{cn'}{8\pi} |E_0|^2 q,$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E_1 [m_1^* E_1^*]] = -\frac{cn'}{8\pi} |E_1|^2 q = \\ &= -\frac{cn'}{8\pi} \left| \frac{n-n''}{n+n''} \right|^2 |E_0|^2 q, \end{aligned} \quad (9.61)$$

$$S_2 = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E_2 [m_2^* E_2^*]] = \frac{cn''}{8\pi} |E_2|^2 q = \frac{cn'' |n|^2}{2\pi |n+n''|^2} |E_0|^2 q.$$

Отсюда с учетом (9.56), (9.60) находим\*

$$r = \left| \frac{n-n''}{n+n''} \right|^2, \quad d = \frac{4n'n''}{|n+n''|^2}. \quad (9.62)$$

Те же выражения (9.62) были получены в работе [102] на основании иных соображений. А именно, как показано в [102], лишь в том случае, когда интерференционный поток относится к проходящему свету, можно избежать противоречия с термодинамикой. Если бы этот поток относился к отраженной волне, то коэффициенты прохождения света через границу рассматриваемых сред в одном и другом направлении были бы различными, что привело бы к возможности создания светового вентиля, запрещенного вторым началом термодинамики.

Не следует думать, что интерференционный поток следует относить к проходящему свету во всех случаях падения света из изотропной поглощающей среды на изотропную прозрачную среду. Рассмотрим более общий случай для тех же сред,

\* Заметим, что при рассмотрении этого вопроса в работе [100] используются вещественные части отношений комплексных потоков, т. е. величины, которым трудно приписать физический смысл.

когда падающая волна является неоднородной. При этом, однако, мы будем предполагать, что в векторе рефракции падающей волны  $\mathbf{m} = \mathbf{m}' - i\mathbf{m}''$  (см. (6.3)) оба вектора  $\mathbf{m}'$  и  $\mathbf{m}''$  лежат в одной плоскости с  $\mathbf{q}$  — плоскости падения ( $[\mathbf{m}'\mathbf{m}'']\mathbf{q} = 0$ ). Далее, будем предполагать  $\mathbf{m}'\mathbf{q} > 0$ , т. е. фазовая скорость падающей волны направлена к границе, а также  $\mathbf{m}''\mathbf{q} > 0$ , т. е. амплитуда волны убывает при приближении к границе (см. (6.6)). Будем обозначать вектор рефракции отраженной волны  $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}'_1 - i\mathbf{m}''_1$  и соответственно для преломленной волны  $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}'_2 - i\mathbf{m}''_2$ . В силу общих соотношений (8.8) — (8.10), которые полностью остаются в силе и для комплексных векторов рефракции, будем иметь

$$\mathbf{a} = [\mathbf{m}\mathbf{q}] = [\mathbf{m}_1\mathbf{q}] = [\mathbf{m}_2\mathbf{q}] = (a' - ia'')\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_1 \parallel [\mathbf{m}'\mathbf{q}] \parallel [\mathbf{m}''\mathbf{q}],$$

$$a_1^2 = 1, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1^*, \quad a' = |[\mathbf{m}'\mathbf{q}]|, \quad a'' = |[\mathbf{m}''\mathbf{q}]|, \quad (9.63)$$

а также

$$\mathbf{m} = \mathbf{b} + \eta\mathbf{q}, \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{b} + \eta_1\mathbf{q}, \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{b} + \eta_2\mathbf{q},$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{q}\mathbf{a}] = (a' - ia'')[\mathbf{q}\mathbf{a}_1] = (a' - ia'')\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1^*, \quad b_1^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} \eta &= \eta' - i\eta'' = |\eta| e^{-i\alpha}, \quad \eta_1 = -\eta, \quad \eta_2 = \eta'_2 - i\eta''_2 = \\ &= |\eta_2| e^{-i\alpha_2}, \quad \varepsilon = \varepsilon^0 - i\tau = |\varepsilon| e^{-i\alpha_0}. \end{aligned} \quad (9.64)$$

При этом все величины  $\eta'$ ,  $\eta''$ ,  $\eta'_2$ ,  $\eta''_2$  положительны. Последнее означает, что отраженная волна имеет фазовую скорость, направленную от границы в первую среду и затухает в этом направлении. Преломленная волна во второй (прозрачной) среде, как следует из (9.63), (9.64), также будет в данном случае неоднородной, причем  $\mathbf{m}'_2\mathbf{m}''_2 = 0$  (см. (6.5)). Условия  $\eta'_2 = \mathbf{m}'_2\mathbf{q} > 0$ ,  $\eta''_2 = \mathbf{m}''_2\mathbf{q} > 0$  означают, что фазовая скорость преломленной волны направлена от границы во вторую среду и при углублении в нее волна затухает.

Аналогично (9.54) в первой среде будет существовать интерференционный поток (считаем среды немагнитными)

$$S_{01} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} ([\mathbf{E}^* [\mathbf{m}_1\mathbf{E}_1]] + [\mathbf{E}_1^* [\mathbf{m}\mathbf{E}]]) \quad (9.65)$$

Согласно (9.16), для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_1$  можно использовать выражения

$$\mathbf{E} = A\mathbf{a}_1 + \frac{B}{\sqrt{\varepsilon}} [\mathbf{m}\mathbf{a}_1], \quad \mathbf{E}_1 = A_1\mathbf{a}_1 + \frac{B_1}{\varepsilon} [\mathbf{m}_1\mathbf{a}_1],$$

причем из (9.19), (9.21) имеем\*)

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\eta - \eta_2}{\eta + \eta_2}, \quad \frac{B_1}{B} = \frac{A_1}{A} \frac{a^2 - \eta\eta_2}{a^2 + \eta\eta_2} = \frac{\varepsilon\eta_2 - \varepsilon_2\eta}{\varepsilon\eta_2 + \varepsilon_2\eta},$$

где  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^*$  — диэлектрическая проницаемость второй среды. Подставляя эти соотношения в (9.65) и учитывая (9.63), (9.64), получим после ряда преобразований

$$S_{01}q = \frac{c}{2\pi} |\eta a|^2 |\eta_2| \left[ \frac{|A|^2}{|\eta + \eta_2|^2} \sin \alpha \sin (\alpha - \alpha_2) - \frac{|\varepsilon| \varepsilon_2 |B|^2}{|\varepsilon\eta_2 + \varepsilon_2\eta|} \sin (\alpha - \alpha_0) \sin (\alpha - \alpha_0 - \alpha_2) \right]. \quad (9.66)$$

Пусть, например,  $B=0$ , т. е. электрический вектор падающей неоднородной волны линейно поляризован перпендикулярно к плоскости падения. Тогда знак  $S_{01}q$  определяется знаком выражения

$$|\eta|^2 |\eta_2| \sin \alpha \sin (\alpha - \alpha_2) = \eta'' (\eta'' \eta_2' - \eta' \eta_2'').$$

Поскольку  $\varepsilon = a^2 + \eta^2$ ,  $\varepsilon_2 = a^2 + \eta_2^2$ , где  $\varepsilon$  ( $\varepsilon_2$ ) — комплексная (вещественная) диэлектрическая проницаемость первой (второй) среды, то между  $\eta$  и  $\eta_2$  существует связь:

$$\eta_2^2 = \eta^2 + \varepsilon_2 - \varepsilon. \quad (9.67)$$

Величины  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_2$  могут принимать самые различные значения, поэтому в общем случае знак множителя  $\eta'' \eta_2' - \eta' \eta_2''$  может быть как положительным, так и отрицательным. Таким образом, мы приходим к выводу, что в зависимости от параметров поглощающей и прозрачной изотропных сред и вектора рефракции падающей волны, нормальный интерференционный поток  $S_{01}q$  падающей и отраженной волн на границе может быть направлен как во вторую среду, так и в первую. Более того, из (9.66) следует, что знак  $S_{01}q$  в общем случае может меняться в зависимости от соотношения между  $|A|$  и  $|B|$ , т. е. от поляризации падающей волны, даже в том случае, когда все остальные характеристики обеих сред и падающей волны фиксированны. В соответствии с этим в разных случаях интерференционный поток может быть отнесен либо к прошедшей, либо к отраженной волне. Заметим, что все вышеприведенные рассуждения сохраняют силу и в том случае, когда обе среды являются изотропными поглощающими (т. е.  $\varepsilon_2$  — также комплексная величина).

\*) Очевидно, соотношения (9.16) — (9.21) сохраняют силу и для неоднородных волн.

В рассмотренных выше двух случаях отличный от нуля нормальный интерференционный поток создавался за счет падающей и отраженной волн в первой (изотропной поглощающей) среде. Рассмотрим в известном смысле противоположный случай, когда такой поток существует во второй среде. Это будет иметь место, например, при падении света из прозрачной изотропной среды на поверхность поглощающего кристалла. Для упрощения будем считать поглощающий кристалл одноосным и обе среды немагнитными.

При падении однородной волны из прозрачной изотропной среды на поверхность поглощающего одноосного кристалла в нем возникает в общем случае две неоднородных волны с векторами рефракции  $\mathbf{m}_o$  (обыкновенная волна) и  $\mathbf{m}_e$  (необыкновенная волна). Считая для обыкновенной преломленной волны  $\mathbf{E}_o = C_o [\mathbf{m}_o \mathbf{c}]$  (см. (7.7)), получаем из уравнений Максвелла (7.1)  $\mathbf{H}_o = C_o [\mathbf{m}_o [\mathbf{m}_o \mathbf{c}]]$ . Для необыкновенной преломленной волны мы возьмем вместо (7.9) выражения  $\mathbf{H}_e = C_e [\mathbf{m}_e \mathbf{c}]$  и  $\mathbf{E}_e = -C_e [\mathbf{p}_e \mathbf{H}_e] = -C_e [\mathbf{p}_e [\mathbf{m}_e \mathbf{c}]]$  (см. (7.85)), где, согласно (7.103),  $\mathbf{p}_e = \varepsilon \mathbf{m}_e / \varepsilon_o \varepsilon_e$ . Интерференционный поток обеих преломленных волн будет равен (см. (8.89))

$$S_{oe} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} ([\mathbf{E}_o \mathbf{H}_e^*] + [\mathbf{E}_e \mathbf{H}_o^*]) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (C_o C_e^* [[\mathbf{m}_o \mathbf{c}] [\mathbf{m}_e^* \mathbf{c}]] - C_e C_o^* [[\mathbf{p}_e [\mathbf{m}_e \mathbf{c}]] [\mathbf{m}_o^* [\mathbf{m}_o \mathbf{c}]]]).$$

После ряда преобразований с учетом соотношений  $\mathbf{p}_e \mathbf{m}_e = 1$ ,  $\mathbf{p}_e \mathbf{c} = \mathbf{m}_e \mathbf{c} / \varepsilon_o$ ,  $\mathbf{m}_o^2 = \varepsilon_o = \mathbf{a}^2 + \eta_o^2$ ,  $\eta_o = \mathbf{m}_o \mathbf{q}$ ,  $\eta_e = \mathbf{m}_e \mathbf{q}$  получим

$$S_{oe\mathbf{q}} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{ac} \operatorname{Re} \left[ C_o C_e^* (\eta_e^* - \eta_o) \mathbf{q} \mathbf{c} + \frac{C_e C_o^*}{\varepsilon_o} (\varepsilon_o \mathbf{m}_o^* \mathbf{c} - \varepsilon_o^* \mathbf{m}_e \mathbf{c}) \right]. \quad (9.68)$$

Отсюда видим прежде всего, что нормальный интерференционный поток отсутствует при всех углах падения и любой поляризации падающего света, если  $\operatorname{ac} = 0$ , т. е. когда бинормаль кристалла лежит в плоскости падения. Этот поток равен нулю также, если  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$ . Заметим, что в обоих этих случаях плоскость падения совпадает с плоскостью симметрии кристалла (относительно тензора  $\varepsilon$ ). Рассмотрим случай  $\mathbf{q} \mathbf{c} = 0$ , когда бинормаль кристалла параллельна плоскости раздела сред. При этом из (9.68) имеем

$$S_{oe\mathbf{q}} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{ac} \cdot \operatorname{bc} \operatorname{Re} \left[ C_e C_o^* \left( 1 - \frac{\varepsilon_o^*}{\varepsilon_o} \right) \right]. \quad (9.69)$$

Согласно (8.27)—(8.29), коэффициенты  $C_o$  и  $C_e$  определяют поляризацию падающей волны при заданном векторе рефракции  $\mathbf{m}$ . Следовательно, они могут выбираться произвольно. Пусть,

например,  $C_e C_o^* = \kappa$  есть вещественное положительное число. Поскольку  $\varepsilon_o^* / \varepsilon_c = e^{i\alpha}$ , то (9.69) принимает вид

$$S_{oe} \mathbf{q} = \frac{c\kappa}{8\pi} \mathbf{ac.bc} (1 - \cos \alpha).$$

В зависимости от направления  $\mathbf{s}$  в плоскости раздела это выражение может иметь любой знак. Но, кроме того, знак нормальной компоненты потока, очевидно, зависит от  $C_o$ ,  $C_e$ , т. е. от поляризации падающей волны. Это обстоятельство уже отмечалось выше в случае двух изотропных сред (см. (9.66)).

Таким образом, мы приходим к заключению, что нормальные компоненты интерференционных потоков в любой из двух граничащих сред в общем случае могут иметь различное направление в зависимости от параметров сред, их ориентации (в случае кристаллов), а также поляризации падающей волны и, по-видимому, угла падения. Соответственно в зависимости от этих факторов интерференционные потоки будут давать вклад либо в коэффициент отражения, либо в коэффициент прохождения света на границе.

Отражение света может быть использовано для определения оптических параметров отражающей среды. Такой метод является наиболее целесообразным в случае сильно поглощающих сред, которые даже в тонком слое почти не пропускают света. Эта задача издавна привлекала к себе внимание исследователей [41, 42, 10, 11]. Тем не менее до настоящего времени определение оптических констант поглощающих изотропных сред и кубических кристаллов по наблюдению свойств отраженного ими света не нашло широкого применения. Причиной этого является, по-видимому, сравнительная сложность и довольно невысокая точность классической процедуры определения характеристик отраженного эллиптически поляризованного света с помощью компенсатора и анализатора. Однако в последнее время в этом отношении положение несколько изменилось. В частности, были разработаны методы измерения ориентации осей эллипса поляризации и эллиптичности, основанные на использовании эффекта Фарадея в сочетании с электронными схемами, обладающие значительно более высокой точностью, чем обычные измерения с помощью николя [103]. Наряду с этим созданы установки, позволяющие значительно повысить точность измерения коэффициента отражения, в частности и при нормальном падении. Эти и другие усовершенствования в области экспериментальной техники исследования поляризационных и энергетических характеристик световых волн позволяют по-новому подойти к решению задачи.



В [41, 42, 10, 11] изложен так называемый метод «главного угла падения» для определения параметров оптически изотропных поглощающих сред по отраженному свету. Этот метод связан с отысканием такого угла падения света, линейно поляризованного под углом  $45^\circ$  к плоскости падения, при котором большая ось эллипса колебаний отраженной волны перпендикулярна к плоскости падения. К довольно сложной процедуре нахождения этого угла приходится прибегать для того, чтобы упростить расчетные соотношения. В некоторых случаях главный угол падения может быть весьма близок к  $90^\circ$ , что еще более затрудняет измерения. Однако и после этого в формулах обычно пренебрегают некоторыми членами [41, 42, 10]. Таким образом, на результате сказываются не только экспериментальные, но и расчетные неточности.

В [4, 40, 5] был изложен точный в расчетном отношении метод, пригодный при любых углах падения, основанный на определении характеристик эллиптической поляризации отраженного света с помощью компенсатора.

Ниже излагаются два новых метода [81] для оптически изотропных поглощающих сред. Эти методы, будучи в экспериментальном отношении проще других известных методов, в то же время являются совершенно универсальными и основаны на точных формулах.

Пусть  $\epsilon = \epsilon^0 - i\tau = n'^2(1 - i\kappa)^2$  (см. (6.11), (6.61)) — комплексная диэлектрическая проницаемость поглощающей среды;  $n'$  — коэффициент преломления;  $\kappa$  — коэффициент поглощения;  $\epsilon_0 = n_0^2$  — диэлектрическая проницаемость прозрачной среды, граничащей с поглощающей;  $A(A')$  — комплексная амплитуда электрического вектора падающей (отраженной) волны, перпендикулярная к плоскости падения;  $B(B')$  — соответствующая амплитуда, параллельная плоскости падения (9.16);  $\psi$  — угол падения. Тогда основные соотношения, определяющие отраженную волну (формулы Френеля), согласно (9.19), (9.21), имеют вид

$$A' = \frac{\eta - \eta''}{\eta + \eta''} A, \quad (9.70)$$

$$B' = \frac{(\eta - \eta'')(a^2 - \eta\eta'')}{(\eta + \eta'')(a^2 + \eta\eta'')} B, \quad (9.71)$$

где

$$\eta = n_0 \cos \psi, \quad \eta'' = \sqrt{\epsilon - a^2} = \alpha + i\beta, \quad a^2 = n_0^2 \sin^2 \psi. \quad (9.72)$$

Коэффициенты отражения для амплитуд  $A$  и  $B$  равны

$$r_{\perp} = \left| \frac{A'}{A} \right|^2, \quad r_{\parallel} = \left| \frac{B'}{B} \right|^2. \quad (9.73)$$

Угол  $\chi'(\chi)$ , образуемый большой осью эллипса поляризации отраженной (падающей) волны с нормалью к плоскости падения, определяется соотношением (см. (2.63), (2.73))

$$\operatorname{tg} 2\chi' = \frac{\xi' + \xi'^*}{1 - |\xi'|^2}, \quad \xi' = \frac{B'}{A'}, \quad \xi = \frac{B}{A}. \quad (9.74)$$

Заметим, что, согласно (9.70), (9.71), при  $\psi = \pi/4$  для отражения от любых прозрачных либо поглощающих изотропных сред справедливо следующее простое соотношение (см. [81]):

$$r_{\parallel} = r_{\perp}^2. \quad (9.75)$$

Выполнение этого условия для любых азимутов падения (ориентации плоскости падения) может служить гарантией того, что отражающая среда оптически изотропна. В частности, с помощью (9.75) можно отличить изотропную среду от одноосного прозрачного или поглощающего кристалла в случае, когда оптическая ось последнего ориентирована перпендикулярно к его отражающей поверхности.

Если отражающая среда прозрачна, то ее коэффициент преломления очень просто определяется с помощью (9.70) — (9.74) различными способами. Помимо измерения коэффициента отражения  $r$  при нормальном падении ( $n = (1 + \sqrt{r}) / (1 - \sqrt{r})$ ) или угла Брюстера  $\psi_0$  ( $n = \operatorname{tg} \psi_0$ ) можно отметить еще два простых способа:

1) измерение  $r_{\perp}$  при  $\chi = \pi/4$ :

$$n = \sqrt{1 + r_{\perp}} / (1 - \sqrt{r_{\perp}}); \quad (9.76)$$

2) измерение  $\chi'$  для линейно поляризованного падающего света при  $\chi = \psi = \pi/4$ :

$$n = \sin \chi' + \cos \chi'. \quad (9.77)$$

Первый из них удобнее и, по-видимому, точнее измерения  $r$  при нормальном падении, которое требует специальных устройств. Аналогично второй способ проще, чем определение угла Брюстера, так как последнее требует измерений при непрерывно меняющемся угле падения.

Для поглощающих сред решение задачи резко усложняется. Одного измерения нормального коэффициента отражения недостаточно, так как требуется определять два параметра  $n'$  и  $k$ . Если добавить измерение при наклонном падении, то получается два соотношения, которые приводят к уравнению восьмой степени для искомой величины.

Описанные ниже два метода отличаются сравнительной простотой как измерительной процедуры, так и используемых

точных расчетных формул. При этом для измерений не требуется компенсатор.

На основании (9.70), (9.73) можно написать

$$\frac{1 - r_{\perp}}{1 + r_{\perp}} = \frac{|\eta + \eta''|^2 - |\eta - \eta''|^2}{|\eta + \eta''|^2 + |\eta - \eta''|^2} = \frac{\eta(\eta'' + \eta'^*)}{\eta^2 + |\eta''|^2} = \frac{2\eta\alpha}{\eta^2 + |\eta''|^2}. \quad (9.78)$$

С другой стороны, согласно (9.70), (9.71), (9.73),

$$\frac{r_{\parallel}}{r_{\perp}} = \frac{|\mathbf{a}^2 - \eta\eta''|^2}{|\mathbf{a}^2 + \eta\eta''|^2}, \quad \frac{r_{\perp} - r_{\parallel}}{r_{\perp} + r_{\parallel}} = \frac{2\mathbf{a}^2\eta\alpha}{\mathbf{a}^4 + \eta^2|\eta''|^2}. \quad (9.79)$$

Если известна комплексная величина  $\eta''$ , то  $\varepsilon$  определяется без труда из (9.72):

$$\varepsilon = \mathbf{a}^2 + \eta''^2 = \mathbf{a}^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta. \quad (9.80)$$

Разделив (9.78) на (9.79), получим

$$\frac{\mathbf{a}^4 + \eta^2|\eta''|^2}{\eta^2 + |\eta''|^2} = \mathbf{a}^2 \frac{(1 - r_{\perp})(r_{\perp} + r_{\parallel})}{(1 + r_{\perp})(r_{\perp} - r_{\parallel})} = \rho.$$

Отсюда и из (9.78) находим

$$|\eta''|^2 = \frac{\eta^2\rho - \mathbf{a}^4}{\eta^2 - \rho}, \quad \alpha = \frac{\eta_0^4(1 - r_{\perp})\cos 2\psi}{2\eta(\eta^2 - \rho)(1 + r_{\perp})} \quad (9.81)$$

и окончательно

$$\varepsilon^0 = 2\alpha^2 - |\eta''|^2 + \mathbf{a}^2, \quad \tau = \varepsilon^0\alpha \sqrt{|\eta''|^2 - \alpha^2}. \quad (9.82)$$

Таким образом, для определения комплексной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  по этому методу требуется лишь измерить коэффициенты отражения  $r_{\perp}$  и  $r_{\parallel}$  для любого угла падения, отличного от  $\pi/4$ . Последнее ограничение связано с тем, что при  $\psi = \pi/4$  соотношения (9.78) и (9.79) совпадают (см. (9.75)).

Удобнее всего взять  $\psi = \pi/3$ . Тогда, считая  $n=1$  (воздух), получаем

$$|\eta''|^2 = \frac{9 - \rho}{4(\rho - 1)}, \quad \alpha = \frac{2(1 - r_{\perp})}{(\rho - 1)(1 + r_{\perp})}, \quad (9.83)$$

$$\rho = 3 \frac{(1 - r_{\perp})(r_{\perp} + r_{\parallel})}{(1 + r_{\perp})(r_{\perp} - r_{\parallel})}.$$

Второй метод основан на использовании соотношений (9.74). Из (9.70), (9.71), (9.74) следует

$$\xi' = \frac{\mathbf{a}^2 - \eta\eta''}{\mathbf{a}^2 + \eta\eta''} \xi. \quad (9.84)$$

Пусть падающий свет линейно поляризован с азимутом колебаний  $\chi = \pi/4$ . Тогда  $\xi = 1$  и первая из формул (9.74) дает

$$\frac{a^4 - \eta^2 |\eta''|^2}{2a^2 \eta \alpha} = \operatorname{tg} 2\chi'. \quad (9.85)$$

Пусть теперь азимут колебаний  $\chi$  падающего линейно поляризованного света таков, что  $\chi' = \pi/4$ . Заметим, что такой азимут  $\chi$  всегда существует, так как при изменении  $\chi$  от 0 до  $\pi/2$  угол  $\chi'$  меняется непрерывно также от 0 до  $\pi/2$ , следовательно, он обязательно должен принимать значение  $\pi/4$ . При таком  $\chi$  мы имеем  $\xi = \operatorname{tg} \chi$ ,  $\operatorname{tg} 2\chi' = \infty$ , т. е.  $|\xi'|^2 = 1$ . Согласно (9.84), это дает соотношение  $|a^2 - \eta \eta''| / |a^2 + \eta \eta''|^2 = \operatorname{ctg}^2 \chi$  или

$$\frac{2a^2 \eta \alpha}{a^4 + \eta^2 |\eta''|^2} = -\cos 2\chi. \quad (9.86)$$

Решая уравнения (9.85), (9.86), находим

$$|\eta''|^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \psi \frac{1 + \cos 2\chi \operatorname{tg} 2\chi'}{1 - \cos 2\chi \operatorname{tg} 2\chi'}, \quad \alpha = \frac{-\xi \cos 2\chi}{\eta (1 - \cos 2\chi \operatorname{tg} 2\chi')} \quad (9.87)$$

и затем по формулам (9.82) определяем  $\varepsilon^0$ ,  $\tau$ . Из (9.87) следует, что  $|\cos 2\chi \operatorname{tg} 2\chi'| < 1$ .

Таким образом, в обоих излагаемых методах используются два измерения при одном и том же произвольном угле падения, но при двух различных азимутах линейной поляризации падающего света. По первому методу измеряются коэффициенты отражения для перпендикулярных и параллельных плоскости падения амплитуд падающей волны. По второму методу определяется ориентация большой оси эллипса колебаний отраженного света, что может быть выполнено с помощью простого линейного анализатора (николь). Применение устройства, описанного в [103], должно повысить точность измерения на несколько порядков. Определение  $\varepsilon^0$  и  $\tau$  из этих измерений производится по простым точным формулам (9.83), (9.87), (9.82).

Оба эти метода (особенно второй) представляют возможность для простого определения параметров поглощающих изотропных сред и могут быть использованы для диагностики изотропных поглощающих минералов в отраженном свете\*).

Полное отражение света от прозрачных кристаллов имеет свои специфические особенности, связанные с наличием в кристалле двух преломленных волн с различными фазовыми ско-

\*) Следует отметить, что при этом не учитывается наличие поверхностного слоя, имеющего оптические характеристики, несколько отличающиеся от параметров внутри среды.

ростями (показателями преломления). Используя соотношения (8.8) — (8.10)

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{b} + \eta_k \mathbf{q}, \quad \mathbf{b} = [\mathbf{q}\mathbf{a}], \quad \eta_k = \mathbf{m}_k \mathbf{q},$$

можно сказать, что полное отражение от изотропной прозрачной среды наступает в том случае, когда величина  $\eta_k$  для преломленной волны становится чисто мнимой. Поскольку в кристалле имеется две преломленных волны, то условие полного отражения может относиться к одной из них либо к обеим вместе. В первом случае говорят о «частичном полном отражении». Мы рассмотрим этот вопрос несколько подробнее для одноосных кристаллов [4, 5].

Как указывалось в § 8, векторы рефракции обеих преломленных волн находятся путем подстановки выражения  $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \eta \mathbf{q}$  в уравнение нормалей (4.7). При этом в общем случае для  $\eta$  получается полное уравнение четвертой степени. Из четырех его корней следует выбрать такие два, чтобы соответствующие им волны были направлены во вторую среду. При этом следует помнить, что в кристаллах направление луча  $\mathbf{p}$  (потока энергии) не совпадает с направлением фазовой скорости  $\mathbf{n}$ . Поэтому когда мы говорим, что преломленная волна должна быть направлена во вторую среду, то под этим подразумевается условие  $\mathbf{p}\mathbf{q} > 0$ , т. е. имеется в виду направление лучевой скорости. В одноосных кристаллах, как прозрачных, так и поглощающих, задача упрощается вследствие того, что общее уравнение нормалей (4.7) распадается на два — уравнение (4.71)

$$\mathbf{m}_o^2 = \varepsilon_o \quad (9.88)$$

для обыкновенных волн и уравнение (4.72)

$$\mathbf{m}_e \varepsilon \mathbf{m}_e = \varepsilon_o \varepsilon_e \quad (9.89)$$

для необыкновенных волн. Подставляя в первое из них  $\mathbf{m}_o = \mathbf{b} + \eta_o \mathbf{q}$ , находим, как и в случае изотропных сред,  $\eta_o = \pm \sqrt{\varepsilon_o - \mathbf{a}^2}$ , где надлежит выбрать верхний знак, так как при этом  $\mathbf{p}_o \mathbf{q} > 0$ , где (см. (4.73))  $\mathbf{p}_o = \mathbf{m}_o / m_o^2 = \mathbf{m}_o / \varepsilon_o$  — вектор лучевой рефракции обыкновенной преломленной волны.

Аналогично, подставляя в (9.89)  $\mathbf{m}_e = \mathbf{b} + \eta_e \mathbf{q}$ , получаем квадратное уравнение относительно  $\eta_e$ :

$$\mathbf{q}\varepsilon \mathbf{q} \eta_e^2 + 2\mathbf{b}\varepsilon \mathbf{q} \eta_e + \mathbf{b}\varepsilon \mathbf{b} - \varepsilon_o \varepsilon_e = 0. \quad (9.90)$$

Из двух его решений следует выбрать то, для которого  $\mathbf{p}_e \mathbf{q} > 0$ . Поскольку, согласно (4.74),  $\mathbf{p}_e = \varepsilon \mathbf{m}_e / \varepsilon_o \varepsilon_e$ , то последнее условие сводится к виду

$$\mathbf{m}_e \varepsilon \mathbf{q} = (\mathbf{b} + \eta_e \mathbf{q}) \varepsilon \mathbf{q} > 0, \quad \eta_e > - \frac{\mathbf{b}\varepsilon \mathbf{q}}{\mathbf{q}\varepsilon \mathbf{q}}. \quad (9.91)$$

Решение уравнения (9.90), удовлетворяющее этому условию, имеет вид

$$\eta_e = \frac{1}{q\epsilon q} (-b\epsilon q + \sqrt{(b\epsilon q)^2 + q\epsilon q (\epsilon_o \epsilon_e - b\epsilon b)}).$$

Преобразуем подкоренное выражение (см. § 26):

$$(b\epsilon q)^2 - q\epsilon q \cdot b\epsilon b = [qb][\epsilon b, \epsilon q] = [qb] \bar{\epsilon} [bq] = -a\bar{\epsilon} a.$$

Таким образом,

$$\eta_e = \frac{1}{q\epsilon q} (-b\epsilon q + \sqrt{\epsilon_o \epsilon_e q\epsilon q - a\bar{\epsilon} a}). \quad (9.92)$$

Отсюда следует для вектора рефракции преломленной необыкновенной волны выражение

$$\begin{aligned} m_e &= \frac{1}{q\epsilon q} (q\epsilon q \cdot b - b\epsilon q \cdot q + i \sqrt{\epsilon_o \epsilon_e q\epsilon q - a\bar{\epsilon} a} q) = \\ &= \frac{1}{q\epsilon q} ([\epsilon q, a] + q \sqrt{\epsilon_o \epsilon_e q\epsilon q - a\bar{\epsilon} a}). \end{aligned} \quad (9.93)$$

Полное отражение невозможно ни для каких сред при нормальном падении, т. е. когда угол падения  $\psi$  равен нулю. При увеличении угла падения полное отражение (если оно возможно для данных сред) наступит после того, как нормальная компонента потока энергии во второй среде станет равной нулю. Угол падения, соответствующий этому условию ( $pq=0$ ), называется *предельным углом полного отражения*. Для обыкновенной волны (как и для изотропных сред) упомянутое условие сводится к равенству  $\eta_0 = \sqrt{\epsilon_o - a^2} = 0$  или  $a^2 = [mq]^2 = = n^2 \sin^2 \psi_0 = \epsilon_o$ , т. е. должно быть  $\epsilon_o < n^2 = \epsilon^0$ . При углах падения, превышающих  $\psi_0$ , получаем  $a^2 > \epsilon_o$  и величина  $\eta_0$  становится чисто мнимой. Выбор знака при  $\eta_0$  обычно определяется условием, чтобы при удалении от плоскости раздела волна затухала. Поскольку скорость обыкновенной волны не зависит от направления, то при любых срезах кристалла и любых ориентациях плоскости падения предельный угол полного отражения для этой волны будет постоянным. Очевидно, совокупность всех векторов рефракции падающей волны, отвечающих предельному углу полного отражения (при заданной ориентации границы кристалла), образует конус, который можно назвать *предельным конусом полного отражения*. Ясно, что для обыкновенной волны (как и для изотропных сред) этот конус будет круговым конусом с осью, нормальной к плоскости раздела, и с углом при вершине, равным  $2\psi_0$ .

Для необыкновенной волны картина является более сложной. Условие для предельного угла полного отражения теперь гласит (см. (9.91))  $\mathbf{p}_e \mathbf{q} = \mathbf{m}_e \varepsilon \mathbf{q} = 0$  или, если учесть (9.93),

$$\varepsilon_o \varepsilon_e \mathbf{q} \varepsilon \mathbf{q} - \bar{\alpha} \mathbf{a} = 0. \quad (9.94)$$

Условие  $\mathbf{m}_e \varepsilon \mathbf{q} = \mathbf{p}_e \varepsilon \mathbf{q} = 0$  означает, что для всех азимутов падения \*) векторы волновых нормалей преломленных необыкновенных волн, отвечающих предельному углу полного отражения, лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\varepsilon \mathbf{q}$  [5]. Что же касается предельного конуса полного отражения для необыкновенных волн, то соотношение (9.94) по существу является его уравнением. Чтобы убедиться в этом, перепишем (9.94) в виде

$$\frac{\varepsilon_o \varepsilon_e}{\varepsilon^0} \mathbf{q} \varepsilon \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}^2 - [\mathbf{m} \mathbf{q}] \bar{\varepsilon} [\mathbf{m} \mathbf{q}] = 0. \quad (9.95)$$

Мы ввели в первый член равенства (9.94) множитель  $\mathbf{m}^2/\varepsilon^0 = = \mathbf{m}^2/n^2 = 1$  ( $\varepsilon^0$  — диэлектрическая проницаемость изотропной среды, граничащей с кристаллом). В результате получается однородное уравнение второго порядка относительно вектора рефракции падающей волны  $\mathbf{m}$ . Если  $\mathbf{m}$  рассматривать как радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , то (9.95) и будет уравнением предельного конуса полного отражения для необыкновенных волн.

Покажем, что это будет эллиптический конус, осью которого является направление вектора  $\mathbf{q}$ . Для этого рассмотрим сечение конуса (9.95) плоскостью, перпендикулярной к  $\mathbf{q}$ , т. е. подставим вместо  $\mathbf{m}$  выражение  $\mathbf{m} = \mathbf{C} \mathbf{q} + \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r} \mathbf{q} = 0$ . После некоторых преобразований получим уравнение

$$\mathbf{r} \alpha \mathbf{r} = C^2 \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon^0} \mathbf{q} \varepsilon \mathbf{q}, \quad (9.96)$$

где тензор  $\alpha$  имеет вид

$$\alpha = \varepsilon_e \left( 1 - \frac{\mathbf{q} \varepsilon \mathbf{q}}{\varepsilon^0} \right) - (\varepsilon_e - \varepsilon_o) [\mathbf{q} \mathbf{c}] \cdot [\mathbf{q} \mathbf{c}]. \quad (9.97)$$

Поскольку правая часть (9.96) положительна ( $\varepsilon$  — положительно определенный тензор, см. § 1), то при всех направлениях  $\mathbf{r}$  в плоскости, параллельной поверхности кристалла, сле-

\*) Напомним, что азимутом падения называется угол, образуемый плоскостью падения с некоторым фиксированным направлением на границе раздела двух сред. В случае одноосных кристаллов этим направлением служит линия пересечения плоскости, проходящей через  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{s}$  (главной плоскости) с поверхностью кристалла.

ва также должна быть положительная величина. Собственные значения тензора  $\alpha$  равны (см. § 26):

$$\alpha_1 = \varepsilon_e \left( 1 - \frac{q\mathbf{e}q}{\varepsilon^0} \right), \quad \alpha_2 = \varepsilon_e \left( 1 - \frac{q\mathbf{e}q}{\varepsilon^0} \right) + \\ + (\varepsilon_o - \varepsilon_e) [q\mathbf{c}]^2 = \left( 1 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon^0} \right) q\mathbf{e}q. \quad (9.97a)$$

Оба эти числа должны быть положительны, откуда следует

$$\varepsilon_e < \varepsilon^0, \quad q\mathbf{e}q < \varepsilon^0. \quad (9.98)$$

Для оптически положительных кристаллов ( $\varepsilon_e > \varepsilon_o$ , § 4) имеем  $\varepsilon_o \leq q\mathbf{e}q \leq \varepsilon_e$ , для отрицательных кристаллов ( $\varepsilon_e < \varepsilon_o$ ), наоборот,  $\varepsilon_e \leq q\mathbf{e}q \leq \varepsilon_o$ . Поэтому в первом случае для возможности полного отражения необходимо одно условие  $\varepsilon_e < \varepsilon^0$ , а во втором — условие  $q\mathbf{e}q < \varepsilon^0$ , которое зависит от ориентации кристалла.

Если условия (9.98) выполнены, то (9.96) является уравнением эллипса в плоскости, перпендикулярной  $q$ . Отношение полуосей эллипса, согласно (9.97a), равно

$$\sqrt{\varepsilon_e(\varepsilon^0 - q\mathbf{e}q)} / \sqrt{q\mathbf{e}q(\varepsilon^0 - \varepsilon_e)}.$$

Очевидно, этот конус симметричен относительно главной плоскости падения.

В оптически положительных (отрицательных) кристаллах соответственно предельный угол полного отражения для необыкновенной волны достигает минимума (максимума) в главной плоскости кристалла и максимума (минимума) в плоскости, перпендикулярной к главной.

Детальное рассмотрение на ковариантной основе свойств неоднородных волн, возникающих в прозрачных одноосных кристаллах при полном отражении, впервые проведено в работе [104].

Рассмотрим теперь отражение и преломление света бесконечным поглощающим кристаллом при нормальном падении в случае, когда поверхность раздела перпендикулярна к правой круговой оси [64]. В первой (изотропной) среде векторы поля падающей ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ) и отраженной ( $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$ ) волн можно написать в виде линейных комбинаций ( $\mathbf{e} = i[\mathbf{n}\mathbf{e}]$ ,  $\zeta = k\mathbf{n}r$ , см. (7.48))

$$\mathbf{H} = e^{-in\zeta} (A\mathbf{e} + B\mathbf{e}^*), \quad \mathbf{E} = \frac{i}{n} e^{-in\zeta} (A\mathbf{e} - B\mathbf{e}^*), \quad (9.99)$$

$$\mathbf{H}' = e^{in\zeta} (A'\mathbf{e} + B'\mathbf{e}^*), \quad \mathbf{E}' = -\frac{i}{n} e^{in\zeta} (A'\mathbf{e} - B'\mathbf{e}^*).$$



Подставляя (9.99), (7.76), (7.79б) при  $\xi=0$  в граничные условия (8.13)  $\mathbf{H} + \mathbf{H}' - \mathbf{H}'' = 0$ ,  $[\mathbf{E} + \mathbf{E}' - \mathbf{E}'', \mathbf{q}] = 0$  ( $\mathbf{q} = \mathbf{n}$  — нормаль к поверхности раздела сред) и умножая затем скалярно на  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}^*$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} A + A' - f_1^0 &= 0, & B + B' - f_2^0 &= 0, \\ n_1(A - A') - n(f_1^0 - gf_2^0) &= 0, & n_1(B - B') - nf_2^0 &= 0, \end{aligned} \quad (9.100)$$

где  $n_1^4 = |\varepsilon|/n\varepsilon n$ ,  $g = \frac{1}{2} n_1^2 \mathbf{e}^* \varepsilon^{-1} \mathbf{e}^*$  (см. (7.54), (7.65)). Ее решения имеют вид

$$B' = \frac{n_1 - n}{n_1 + n} B, \quad A' = \frac{n_1 - n}{n_1 + n} A + \frac{2nn_1g}{(n_1 + n)^2} B, \quad (9.101)$$

$$f_2^0 = \frac{2n_1}{n_1 + n} B, \quad f_1^0 = \frac{2n_1}{n_1 + n} A + \frac{2nn_1}{(n_1 + n)^2} B. \quad (9.102)$$

Из этих соотношений видим, что если  $B=0$ , т. е. падающая волна имеет правую круговую поляризацию, то

$$B' = 0, \quad f_2^0 = 0, \quad A' = \frac{n_1 - n}{n_1 + n} A, \quad f_1^0 = \frac{2n_1}{n_1 + n} A. \quad (9.103)$$

В этом случае преломленная волна определяется соотношениями

$$\mathbf{H} = e^{-in_1 \zeta} f_1^0 \mathbf{e}, \quad \mathbf{D} = in_1 e^{-in_1 \zeta} f_1^0 \mathbf{e}. \quad (9.104)$$

Это означает, что преломленная волна будет обычной волной с чисто экспоненциальной зависимостью от пространственных координат ( $\zeta$ ). Поляризация преломленной волны является круговой и по направлению обхода совпадает с поляризацией падающей волны. При тех же условиях, если падающая волна имеет левую круговую поляризацию, т. е.  $A=0$ , мы получим

$$B' = \frac{n_1 - n}{n_1 + n} B, \quad A' = \frac{2nn_1g}{(n_1 + n)^2} B, \quad f_2^0 = \frac{2n_1}{n_1 + n} B, \quad (9.105)$$

$$f_1^0 = \frac{2nn_1g}{(n_1 + n)^2} B.$$

В общем случае преломленная волна будет определяться соотношениями (7.76), (7.79б), (9.101).

Таким образом, при нормальном падении правой круговой волны на поверхность кристалла, перпендикулярную правой круговой оси ( $\mathbf{c}'\mathbf{e}=0$ ), преломленная волна будет правой кру-

говой волной с чисто экспоненциальной зависимостью от  $\zeta$ . При падении волны с любой другой поляризацией (включая левую круговую) преломленная волна будет представлять собой суперпозицию левой круговой чисто экспоненциальной волны и правой круговой волны с амплитудой, линейно зависящей от  $\zeta$  — волны Фохта.

Аналогичный результат получается при нормальном падении света на поверхность кристалла, перпендикулярную левой круговой оси ( $c'e^* = 0$ ).

При полном отражении от прозрачных кристаллов возможны случаи, когда для преломленной волны будет получаться лишь одно значение комплексного нелинейного вектора рефракции  $m''$ . Этот случай для двуосного кристалла имеет место, когда вектор  $m''$  удовлетворяет одному из условий  $[m''c_1]^2 = 0$  или  $[m''c_2]^2 = 0$ , где  $c_1, c_2$  — оптические оси кристалла. Действительно, согласно (4.55), при этом два уравнения (4.55) сводятся к одному:  $am''^2 + b[m''c_1][m''c_2] = 1$ . Этот случай существенно отличается от рассмотренных в § 8 обычных случаев отражения и преломления и во многом аналогичен рассмотренному выше случаю (см. (9.99) и далее), когда преломленная волна распространяется вдоль круговой оптической оси поглощающего кристалла. Мы рассмотрим подробнее этот особый случай на примере полного отражения от прозрачного одноосного кристалла. Очевидно, при этом написанное выше условие принимает вид

$$[mc]^2 = m^2 - (mc)^2 = 0. \quad (9.106)$$

Легко убедиться, что при выполнении этого условия векторы рефракции обыкновенной и необыкновенной преломленной волн должны совпадать между собой. Действительно, согласно (4.71), (4.72), соответствующие уравнения нормалей имеют вид  $m^2 = \epsilon_o$  и  $m\epsilon m = \epsilon_o \epsilon_e$ . Поскольку  $\epsilon = \epsilon_o + (\epsilon_e - \epsilon_o)c.c$  (4.43), то второе уравнение имеет вид  $m\epsilon m = \epsilon_o m^2 + (\epsilon_e - \epsilon_o)(mc)^2 = \epsilon_o \epsilon_e$ . Если заменить в нем  $(mc)^2$  на  $m^2$ , согласно (9.106), то получим уравнение нормалей для обыкновенной волны  $m^2 = \epsilon_o$ .

Выясним, при каких условиях выполняется соотношение (9.106). Для этого надо рассмотреть уравнения  $m''^2 = (m''c)^2 = \epsilon_o$  в предположении, что  $m''$  является комплексным нелинейным вектором:  $m'' = m'_1 - im''_2$ . С другой стороны (см. (9.4)),  $m'' = b + \eta''q$ ,  $b = [qa]$ ,  $a = [mq]$ , где  $m$  — вектор рефракции волны в первой изотропной прозрачной среде ( $m^2 = n^2$ ). Аналогично (9.13) заключаем, что  $\eta'' = i\eta_1$ ,  $\eta_1 = -\sqrt{a^2 - \epsilon_o}$ . При этом уравнение  $m''^2 = \epsilon_o$  удовлетворяется и остается рассмотреть условие  $(m''c)^2 = (bc - i\eta_1qc)^2 = \epsilon_o$ . Поскольку  $\epsilon_o$  вещественно, то отсюда следуют два равенства  $bc \cdot qc = 0$  и  $(bc)^2 - \eta_1^2(qc)^2 = \epsilon_o$ .

Очевидно, предположение  $\mathbf{bc} = 0$  противоречит второму из этих равенств, так как  $\epsilon_0$  положительно. Таким образом, следует положить  $\mathbf{qc} = 0$  и  $(\mathbf{bc})^2 = \epsilon_0$  [74]. Из первого соотношения заключаем, что рассматриваемый особый случай возможен лишь тогда, когда оптическая ось кристалла параллельна его отражающей поверхности. Второе равенство позволяет определить соответствующие этому случаю направления вектора нормали

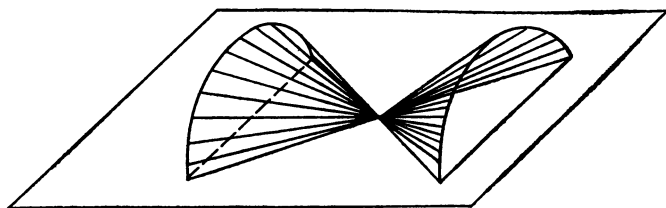


Рис. 9.1

падающей волны. Поскольку  $\mathbf{b} = [\mathbf{qa}] = [\mathbf{q}[\mathbf{mq}]]$ , то  $\mathbf{bc} = [\mathbf{cq}][\mathbf{mq}] = \mathbf{mc}$  (так как  $\mathbf{qc} = 0$ ). Написав рассматриваемое уравнение в виде

$$(\mathbf{mc})^2 = \frac{\epsilon_0}{n^2} m^2, \quad (9.106a)$$

убеждаемся, что оно представляет собой круговой конус с осью  $\mathbf{c}$  (если  $\mathbf{m}$  рассматривать как радиус-вектор). Угол  $\alpha$  между образующими  $\mathbf{m}$  конуса и его осью определяется условием

$$\cos \alpha = \mathbf{nc} = \sqrt{\epsilon_0/n^2}. \quad (9.106b)$$

Очевидно, нормали  $\mathbf{n}$  падающих волн, для которых удовлетворяется условие (9.106), являются образующими половины конуса (9.106a), лежащей над поверхностью раздела (см. рис. 9.1). При этом вместо двух линейно независимых чисто экспоненциальных решений уравнений Максвелла в виде обыкновенной и необыкновенной волн в кристалле получается лишь одно решение такого типа, представляющее собой волну, поляризованную по кругу, как следует из (4.47), (4.49). В то же время во всех других случаях в кристалле распространяются две линейно независимые экспоненциальные волны. Согласно (9.106a), при этом двойное преломление отсутствует в целом интервале ориентаций плоскостей падения при соответствующих углах падения. Напомним, что при обычном (неполном) отражении от прозрачных кристаллов двупреломление отсутствует только при совпадении нормали преломленной однородной волны с оптической осью. Такое

совпадение возможно, лишь когда оптическая ось лежит в плоскости падения и нормаль падающей волны имеет вполне определенное единственное направление.

При наличии одной преломленной и двух линейно независимых отраженных волн невозможно удовлетворить граничным условиям, число которых, как известно, равно четырем. Следовательно, рассматриваемый случай обладает специфическими особенностями, и мы рассмотрим его подробнее, следуя [74].

Аналогичная ситуация возникает и в поглощающих кристаллах.

В § 7 был рассмотрен случай распространения света в поглощающем кристалле низшей сингонии вдоль круговой оптической оси, когда в нем возникает лишь одна чисто экспоненциальная волна. Там было показано, что в этом случае в поглощающих кристаллах распространяется волна следующего вида (см. (7.76), (7.77)):

$$\mathbf{E} = (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \zeta) e^{i(\omega t - \zeta)}, \quad (9.107)$$

где  $\zeta = kmg$ ,  $k = \omega/c$ , а  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  — некоторые постоянные векторы \*). При наличии волны типа (9.107) полное число линейно независимых волн равно числу граничных условий и последние могут быть удовлетворены. Благодаря этому выше (см. (9.99) — (9.105)) мы смогли решить граничную задачу.

Однако там рассматривался случай *нормального* падения света на поглощающий кристалл, вырезанный перпендикулярно к круговой оптической оси. При этом внутри кристалла распространяется однородная волна ( $\mathbf{m}$  — линейный вектор) и на отражающей поверхности  $\zeta = 0$ . В результате граничные условия сводятся к системе алгебраических уравнений и решение граничной задачи не представляет трудностей.

В рассматриваемом сейчас случае, когда волна в кристалле неоднородна ( $\mathbf{m}$  — нелинейный вектор), удовлетворить граничным условиям волной вида (9.107) не удастся, несмотря на то что при этом получается нужное число линейно независимых волн (четыре). Причина заключается в том, что полное отражение, при котором возникают неоднородные волны, возможно лишь для наклонного падения, а при этом на отражающей поверхности  $\zeta$  не обращается в нуль и не является постоянной величиной. Поэтому мы попытаемся удовлетворить уравнениям Максвелла в данном особом случае волной следующего вида:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \zeta') e^{i(\omega t - \zeta)}, \quad (9.108)$$

\*) В § 7 рассматривалось выражение вида (9.107) для вектора  $\mathbf{H}$  (см. (7.76), (7.77)). Однако из уравнений Максвелла непосредственно следует аналогичное выражение для  $\mathbf{E}$ .

где  $\zeta' = k\mathbf{q}\mathbf{r}$  ( $\mathbf{q}$  — нормаль к поверхности раздела). Отличие (9.108) от (9.107) состоит в том, что линейная функция в скобках и экспонента зависят от разных переменных. Поэтому решение вида (9.108) является более общим, чем (9.107). Выбор его подсказывается граничными условиями. Действительно, на граничной поверхности  $\zeta' = k\mathbf{q}\mathbf{r}$  обращается в нуль, а экспоненциальный множитель, как всегда, сокращается, и граничные условия принимают обычный вид. Кроме того, из физических соображений естественно предположить, что амплитуда волны в случае бесконечной граничной поверхности будет зависеть лишь от глубины проникновения волны  $\zeta'$ .

Уравнения Максвелла (7.46) для полей, гармонически зависящих от времени ( $e^{i\omega t}$ ), имеют вид

$$[\nabla\mathbf{H}] - ik\epsilon\mathbf{E} = 0, \quad [\nabla\mathbf{E}] + ik\mathbf{H} = 0. \quad (9.109)$$

Исключая отсюда  $\mathbf{H}$  и подставляя в полученное уравнение выражение (9.108), находим

$$\alpha\mathbf{f}_1 + i\beta\mathbf{f}_2 + \zeta'\alpha\mathbf{f}_2 = 0, \quad (9.110)$$

где

$$\alpha = \mathbf{m}\cdot\mathbf{m} - \mathbf{m}^2 + \epsilon, \quad \beta = \mathbf{m}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{m} - 2\mathbf{m}\mathbf{q}. \quad (9.111)$$

Так как (9.110) должно выполняться тождественно, т. е. при любых  $\zeta'$ , то должно быть

$$\alpha\mathbf{f}_2 = 0, \quad (9.112)$$

$$\alpha\mathbf{f}_1 + i\beta\mathbf{f}_2 = 0. \quad (9.113)$$

Следовательно, ненулевые решения для  $\mathbf{f}_2$  существуют лишь при условии  $|\alpha| = 0$ , которое представляет собой обычное уравнение нормалей кристаллооптики в инвариантной форме (4.5)

$$|\mathbf{m}^{\times 2} + \epsilon| = 0. \quad (9.114)$$

Для случая прозрачных одноосных кристаллов ( $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon' \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$ ) при условии (9.106), как уже отмечалось, из (9.114) получается лишь одно значение показателя преломления  $\mathbf{m}^2 = \epsilon_0 = n_0^2$ . Отсюда вектор рефракции преломленной волны определяется однозначно, а именно\*

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_1 - i\mathbf{m}_2 = \mathbf{b} - i\eta_0\mathbf{q}, \quad (9.115)$$

\* В дальнейшем вектор рефракции преломленной волны будем обозначать через  $\mathbf{m}_0$ , чтобы отличить преломленную волну от падающей и отраженной, которым соответствуют векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{m}'$ .

где  $\eta_0 = \sqrt{a^2 - \epsilon_0}$ . Согласно общим соотношениям (7.17), (7.18), из (9.106) следует

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\pm} = \frac{\sqrt{m_0^{*2}} \mathbf{m}_0 + \sqrt{m_0^2 m_0^*} \pm i [m_0 m_0^*]}{|m_0|^2 + |m_0^*|^2}. \quad (9.115a)$$

При подстановке сюда (9.115) получаем

$$\mathbf{c}_{\pm} = \frac{n_0 \mathbf{b} \pm \eta_0 \mathbf{a}}{a^2}. \quad (9.116)$$

Следовательно, для всех  $\mathbf{m}_0$ , удовлетворяющих условию полного отражения ( $a^2 > \epsilon_0$ ), существуют два направления оптической оси кристалла  $\mathbf{c}_{\pm}$ , для которых реализуется рассматриваемый особый случай. Согласно (9.116), эти направления параллельны отражающей поверхности кристалла и лежат симметрично к плоскости падения ( $\mathbf{b}, \mathbf{q}$ ), образуя с ней угол  $\gamma$ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \eta_0 / \sqrt{\epsilon_0}. \quad (9.117)$$

С учетом вышесказанного из уравнения (9.112) при подстановке в него  $m_0^2 = \epsilon_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon' \mathbf{c}_{\pm} \cdot \mathbf{c}_{\pm}$  получим

$$(\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{m}_0 + \epsilon' \mathbf{c}_{\pm} \cdot \mathbf{c}_{\pm}) \mathbf{f}_2 = 0. \quad (9.118)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{f}_2 = \lambda [\mathbf{m}_0 \mathbf{c}_{\pm}]. \quad (9.119)$$

Для нахождения  $\mathbf{f}_1$  представим его в виде

$$\mathbf{f}_1 = \xi \mathbf{a} + \xi' \mathbf{b} + \xi'' \mathbf{q}. \quad (9.120)$$

Подставляя (9.120) в (9.113) с учетом (9.115), (9.116) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{q}$ , выражаем  $\xi'$ ,  $\xi''$  через  $\xi$  и  $\lambda$ . Окончательное выражение для  $\mathbf{f}_1$  тогда принимает вид

$$\mathbf{f}_1 = - \frac{i}{n_0 \epsilon'} \left\{ \frac{\epsilon'}{\eta_0} a^2 \xi [\mathbf{m}_0 \mathbf{c}_{\pm}] \mp i \lambda n_0 (2 [\mathbf{m}_0 \mathbf{q}] - \epsilon' \mathbf{q}) \right\}. \quad (9.121)$$

При этом следует учитывать также соотношение

$$[\mathbf{m}_0 \mathbf{c}_{\pm}] = \mp \frac{\eta_0}{a^2} [a^2 \mathbf{q} - i (\eta_0 \mathbf{b} \mp n_0 \mathbf{a})]. \quad (9.122)$$

Подстановка (9.119), (9.121) в (9.108) дает для  $\mathbf{E}$  следующее выражение:

$$\mathbf{E} = \{f_1^0 [\mathbf{m}_0 \mathbf{c}_{\pm}] \pm f_2^0 (\mathbf{d} \pm \epsilon' \zeta' [\mathbf{m}_0 \mathbf{c}_{\pm}])\} e^{-i\zeta}, \quad (9.123)$$

где введены обозначения

$$f_1^0 = -\frac{ia^2}{n_0\eta_0} \xi, \quad f_2^0 = \frac{\lambda}{\varepsilon'}, \quad \mathbf{d} = \varepsilon' \mathbf{q} - 2[m_0 \mathbf{a}]. \quad (9.124)$$

Выражение для  $\mathbf{H}$  находим, подставляя  $\mathbf{E}$  во второе из уравнений Максвелла (9.109):

$$\mathbf{H} = \{f_1^0 [m_0 [m_0 \mathbf{c}_{\pm}]] \pm f_2^0 (\mathbf{d}' \pm \varepsilon' \zeta' [m_0 [m_0 \mathbf{c}_{\pm}]])\} e^{-i\zeta}, \quad (9.125)$$

где

$$\mathbf{d}' = [m_0 \mathbf{d}] \pm i\varepsilon' [\mathbf{q} [m_0 \mathbf{c}_{\pm}]] = (\varepsilon' + 2\varepsilon_0) \mathbf{a} \mp \varepsilon' \eta_0 \mathbf{c}_{\pm}. \quad (9.126)$$

Итак, найденные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , зависящие от двух независимых параметров  $f_1^0$  и  $f_2^0$ , которые определяются из граничных условий, представляют собой суперпозицию двух неоднородных плоских волн, распространяющихся с одинаковой скоростью. Так как вектор, стоящий при  $f_1^0$ , является круговым ( $[m_0 \mathbf{c}_{\pm}]^2 = 0$ ), то соответствующая часть поля представляет неоднородную волну круговой поляризации. Вторая часть поля  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{H}$ ) с множителем  $f_2^0$  дает неоднородную волну переменной поляризации, так как ее комплексная амплитуда меняется с глубиной проникновения волны  $\zeta'$ .

Теперь мы имеем возможность решить задачу о полном отражении света на поверхности раздела изотропная среда — кристалл в рассматриваемом случае. Используем граничные условия для немагнитных сред:

$$[\mathbf{E} + \mathbf{E}' - \mathbf{E}'', \mathbf{q}] = 0, \quad \mathbf{H} + \mathbf{H}' - \mathbf{H}'' = 0. \quad (9.127)$$

Для падающей и отраженной волн в изотропной среде используем обычное разложение на компоненты, параллельные и перпендикулярные плоскости падения (см. (9.16)):

$$\mathbf{E} = A\mathbf{a} + B[\mathbf{na}], \quad \mathbf{E}' = A'\mathbf{a} + B'[\mathbf{n}'\mathbf{a}], \quad (9.128)$$

$$\mathbf{H} = A[\mathbf{ma}] - B\mathbf{na}, \quad \mathbf{H}' = A'[\mathbf{m}'\mathbf{a}] - B'\mathbf{na}.$$

Для преломленной волны соответствующие выражения для  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''$  имеют вид (9.123), (9.125), причем в них следует положить  $\zeta' = 0$ . Подставляя (9.128) и (9.123), (9.125) в (9.127), получаем

$$[(A + A')\mathbf{a} + B[\mathbf{na}] + B'[\mathbf{n}'\mathbf{a}] - f_1^0 [m_0 \mathbf{c}_{\pm}]] \mp f_2^0 \mathbf{d}, \mathbf{q}] = 0, \quad (9.129)$$

$$A[\mathbf{ma}] + A'[\mathbf{m}'\mathbf{a}] - (B + B')\mathbf{na} - f_1^0 [m_0 [m_0 \mathbf{c}_{\pm}]] \mp f_2^0 \mathbf{d}' = 0. \quad (9.130)$$

Для нахождения четырех скалярных параметров  $A'$ ,  $B'$ ,  $f_1^0$ ,  $f_2^0$  нужно перейти от системы из двух векторных уравнений к четырем скалярным, которые можно получить, умножая (9.129), (9.130) на некоторые линейно независимые векторы. Например, (9.130) умножим последовательно на  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{q}$ , а

(9.129) — на а. В результате придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 (B + B') na^2 \mp f_1^0 \eta_0 \varepsilon_0 \pm f_2^0 \varepsilon_0 (\varepsilon' + 2a^2) &= 0, \\
 (A - A') \eta a^2 - f_1^0 n_0 \eta_0^2 - f_2^0 n_0 \varepsilon' \eta_0 &= 0, \\
 (A + A') a^2 - i f_1^0 n_0 \eta_0 &= 0, \\
 (B - B') \eta a^2 \pm i f_1^0 n \eta_0^2 \mp 2 i f_2^0 n a^2 \eta_0 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{9.131}$$

где  $\eta = m\mathbf{q}$ . Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
 A' &= \frac{1}{\Delta} \{ [2a^2 (\eta + i\eta_0)(\varepsilon_0 \eta - in^2 \eta_0) + \\
 &\quad + \varepsilon' (\varepsilon_0 \eta^2 - n^2 \eta_0^2)] A \mp 2nn_0 \eta \eta_0 \varepsilon' B \}, \\
 B' &= \frac{1}{\Delta} \{ [2a^2 (\eta - i\eta_0)(\varepsilon_0 \eta + in^2 \eta_0) + \\
 &\quad + \varepsilon' (\varepsilon_0 \eta^2 - n^2 \eta_0^2)] B \pm nn_0 \eta \eta_0 \varepsilon' A \},
 \end{aligned}
 \tag{9.132}$$

$$f_1^0 = -\frac{2ia^2 \eta}{n_0 \eta_0 \Delta} \{ [2a^2 (\varepsilon_0 \eta - in^2 \eta_0) + \varepsilon_0 \varepsilon' \eta] A \mp \varepsilon' nn_0 \eta_0 B \},
 \tag{9.133}$$

$$f_2^0 = -\frac{2ia^2 \eta}{n_0 \Delta} \{ (\varepsilon_0 \eta - in^2 \eta_0) A \mp inn_0 (\eta - i\eta_0) B \},$$

где

$$\Delta = a^2 [2(\eta - i\eta_0)(\varepsilon_0 \eta - in^2 \eta_0) + \varepsilon' (n^2 - \varepsilon_0)].$$

Таким образом, в данном случае уравнения Максвелла и граничные условия могут быть удовлетворены лишь волнами вида (9.108). Одной из особенностей этих волн является то, что при углублении в кристалл энергия их будет убывать иначе, чем в случае обычных неоднородных волн, поскольку в амплитуду входит величина  $\zeta'$ , возрастающая с глубиной.

Условие (9.106) при нелинейном векторе  $\mathbf{m}$  может быть реализовано и в поглощающих кристаллах. При этом если  $\mathbf{m}$  является вектором (в общем случае комплексным), входящим в аксиальное представление обратного тензора диэлектрической проницаемости (7.3) (см. также (7.5)), то, согласно (7.10), уравнение нормалей приводит лишь к одному значению вектора рефракции, т. е. к отсутствию двулучепреломления, как и в соответствующем случае для прозрачных кристаллов (см. выше). Рассмотрим этот случай подробнее, ограничиваясь падением однородной плоской волны из прозрачной изотропной среды на поглощающий кристалл средней синго-



нии [76, 75]. Согласно (7.2), (7.5), комплексный тензор диэлектрической проницаемости для таких кристаллов равен  $\epsilon_1 = \epsilon'_0 + (\epsilon'_e - \epsilon'_0) \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{c}$  — единичный вещественный вектор оптической оси и  $\epsilon'_0 = \epsilon_0 - i\tau_0$ ,  $\epsilon'_e = \epsilon_e - i\tau_e$ . Как обычно, положим  $\mathbf{m}'' = \mathbf{m}''_1 - i\mathbf{m}''_2 = \mathbf{b} + \eta''\mathbf{q}$ , однако теперь, в отличие от предыдущего случая, параметр  $\eta''$  не будет чисто мнимым:

$$\eta''^2 = \epsilon_0' - \mathbf{a}^2 = \epsilon_0 - \mathbf{a}^2 - i\tau_0. \quad (9.134)$$

Как и в предыдущем случае, мы имеем два соотношения

$$\mathbf{m}''^2 = \epsilon_0' = (\mathbf{m}''\mathbf{c})^2, \quad (9.135)$$

первое из которых удовлетворяется вследствие (9.134), а второе дает

$$(\mathbf{bc} + \eta''\mathbf{qc})^2 = (\mathbf{bc})^2 + \eta''^2(\mathbf{qc})^2 + 2\eta''\mathbf{bc} \cdot \mathbf{qc} = \epsilon_0 - i\tau_0. \quad (9.136)$$

Используя (9.134), получаем отсюда

$$(\mathbf{bc})^2 - \mathbf{a}^2(\mathbf{qc})^2 + 2\eta''\mathbf{bc} \cdot \mathbf{qc} = (\epsilon_0 - i\tau_0)[\mathbf{qc}]^2. \quad (9.137)$$

Очевидно, равенства  $\mathbf{qc} = 0$  или  $\mathbf{bc} = 0$  противоречат этому соотношению, так как его левая часть будет при этом вещественна, а правая комплексна. При  $\mathbf{q} = \mathbf{c}$  имеем  $\mathbf{a} = 0$ , т. е. не интересующий нас случай нормального падения на кристалл параллельно его оптической оси (однородная волна). Исключим из (9.137)  $\eta''$  с помощью (9.134) и разделим вещественные и мнимые части в полученном соотношении. После ряда преобразований мы придем к следующей системе двух уравнений:

$$(\mathbf{bc})^2 - (\mathbf{ac})^2(\mathbf{qc})^2 = \epsilon_0[\mathbf{qc}]^4, \quad (9.138)$$

$$[\mathbf{ac}]^2 = |\epsilon_0'|[\mathbf{qc}]^2. \quad (9.139)$$

Поскольку

$$(\mathbf{bc})^2 = ([\mathbf{qa}]\mathbf{c})^2 = [\mathbf{ac}]^2 - \mathbf{a}^2(\mathbf{qc})^2, \quad (9.140)$$

то, вычитая уравнение (9.138) из уравнения (9.139), умноженного на  $[\mathbf{qc}]^2$ , получаем

$$2(\mathbf{ac})^2(\mathbf{qc})^2 = (|\epsilon_0'| - \epsilon_0)[\mathbf{qc}]^4. \quad (9.141)$$

При  $\mathbf{ac} = 0$  отсюда следует  $|\epsilon_0'| = \epsilon_0$ , т. е.  $\tau_0 = 0$  (отсутствие поглощения). Таким образом, условия (9.135) в случае поглощающих кристаллов не могут выполняться, если имеет место любое из равенств:  $\mathbf{ac} = 0$ ,  $\mathbf{bc} = 0$ ,  $\mathbf{qc} = 0$ .

Рассмотрим подробнее условия (9.139), (9.141), определяющие возможность выполнения соотношений (9.135). Введем в уравнение (9.139) вектор рефракции падающей волны

$m(m^2=n^2)$  и обозначим  $qc = \cos \theta$ . Уравнение (9.139) можно написать в виде

$$[c[qm]]^2 = (mc)^2 - n^2 \cos^2 \theta = |\epsilon'_0| \sin^2 \theta,$$

или

$$(mc)^2 = \xi m^2, \quad \xi = 1 - \left(1 - \frac{|\epsilon'_0|}{n^2}\right) \sin^2 \theta. \quad (9.142)$$

Очевидно, должно быть  $\xi < 1$ , откуда следует условие

$$|\epsilon'_0| < n^2, \quad (9.143)$$

аналогичное условию полного отражения. Это условие необходимо для отсутствия двупреломления. Если оно выполняется, то угол  $\theta$  может быть любым, за исключением крайних значений  $\theta=0$  ( $\mathbf{q}=\mathbf{c}$ ) и  $\theta=\pi/2$  ( $\mathbf{q}\mathbf{c}=0$ ).

Второе условие (9.141) после извлечения корня дает

$$ac = m[qc] = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (|\epsilon'_0| - \epsilon_0) \sin \theta \operatorname{tg} \theta}. \quad (9.144)$$

Значение  $a^2 = (ac)^2 + [ac]^2$  можно найти из (9.139), (9.144):

$$a^2 = \left( |\epsilon'_0| + \frac{|\epsilon'_0| - \epsilon_0}{2} \operatorname{tg}^2 \theta \right) \sin^2 \theta. \quad (9.145)$$

Отсюда находим угол падения ( $a^2 = n^2 \sin^2 \psi$ )

$$\sin^2 \psi = \left( \frac{|\epsilon'_0|}{n^2} - \frac{|\epsilon'_0| + \epsilon_0}{2n^2} \sin^2 \theta \right) \operatorname{tg}^2 \theta. \quad (9.146)$$

Поскольку  $0 < \sin^2 \psi < 1$ , то отсюда следует необходимость выполнения неравенств

$$|\epsilon'_0| + \frac{1}{2} (|\epsilon'_0| - \epsilon_0) \operatorname{tg}^2 \theta > 0$$

и

$$\sin^2 \theta \left( 1 + \frac{|\epsilon'_0|}{n^2} - \frac{|\epsilon'_0| + \epsilon_0}{2n^2} \sin^2 \theta \right) < 1.$$

Первое из них сводится к  $\sin^2 \theta < 2|\epsilon'_0|/(|\epsilon'_0| + \epsilon_0)$  и поэтому выполняется всегда. Второе приводит к квадратичному неравенству относительно  $\sin^2 \theta = x$ :

$$(|\epsilon'_0| + \epsilon_0) x^2 - 2(|\epsilon'_0| + n^2) x + 2n^2 > 0. \quad (9.147)$$

Корни полинома, стоящего слева, равны

$$x_{\pm} = \frac{|\epsilon'_0| + n^2 \pm \sqrt{(n^2 - \epsilon_0)^2 + \tau_0^2}}{|\epsilon'_0| + \epsilon_0}.$$

Таким образом, (9.147) можно написать в виде

$$(|\epsilon'_0| + \epsilon_0)(x - x_+)(x - x_-) > 0,$$

откуда ясно, что  $x = \sin^2 \theta$  должен быть либо больше  $x_+$ , либо меньше  $x_-$ . Первый вариант отпадает, так как уже  $(|\epsilon'_0| + n^2)/(|\epsilon'_0| + \epsilon_0) > 1$  (см. (9.143)). Следовательно, мы приходим к условию

$$\sin^2 \theta < \frac{|\epsilon'_0| + n^2 - \sqrt{(n^2 - \epsilon_0)^2 + \tau_0^2}}{|\epsilon'_0| + \epsilon_0}. \quad (9.148)$$

Правая часть может быть написана в виде

$$1 - \frac{\sqrt{(n^2 - \epsilon_0)^2 + \tau_0^2} - (n^2 - \epsilon_0)}{|\epsilon'_0| + \epsilon_0} (< 1).$$

Итак, отсутствие дупреломления в одноосных поглощающих кристаллах, граничащих с изотропной прозрачной средой, возможно при условиях (9.143) и (9.148). Первое из них устанавливает соотношение между параметрами изотропной среды и кристалла. Второе условие ограничивает угол между  $q$  и  $c$ :

$$\theta < \theta_0, \quad \sin^2 \theta_0 = \frac{|\epsilon'_0| + n^2 - \sqrt{(n^2 - \epsilon_0)^2 + \tau_0^2}}{|\epsilon'_0| + \epsilon_0}. \quad (9.149)$$

Если указанные условия выполнены, то формула (9.146) определяет необходимый угол падения плоской однородной волны из изотропной среды на кристалл. При этом азимут падения  $\rho$  находится из (9.144). Согласно последней формуле, для плоскости падения возможны два положения, симметричные относительно главной плоскости падения, причем

$$\sin^2 \rho = \frac{(b[qc])^2}{a^2[qc]^2} = \frac{(ac)^2}{a^2 \sin^2 \theta} = \frac{|\epsilon'_0| - \epsilon_0}{2a^2} \operatorname{tg}^2 \theta. \quad (9.150)$$

Сюда следует подставить значение  $a^2$  (9.145).

Перейдем теперь к решению граничной задачи для рассматриваемого особого случая. Аналогично рассмотренному выше случаю прозрачных кристаллов будем искать решение уравнений Максвелла (9.109) в форме (9.108).

Как уже отмечалось, решение вида (9.108) является более общим, чем полученное Фохтом решение вида (7.76), (7.77). Следует отметить, что волны фохтовского типа, т. е. *однородные* затухающие волны, векторная амплитуда которых линейно зависит от координат, вообще не могут возникать в поглощающих кристаллах средних сингоний, поскольку в них нет

круговых оптических осей, а имеется лишь изотропная оптическая ось (см. § 7).

Исключая из (9.109)  $\mathbf{H}$  и подставляя в полученное уравнение выражение (9.108) для  $\mathbf{E}$ , снова приходим к уравнениям (9.110), (9.111), из которых по-прежнему следуют соотношения (9.112), (9.113), (9.119), (9.120). С учетом (9.115) из (9.115а) находим

$$c_{\pm} = \frac{Mb + Nq \pm Pa}{Q}, \quad (9.151)$$

где

$$M = 2 \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon_0}, \quad N = 2 \operatorname{Re} (\eta_0 \sqrt{\varepsilon_0}), \quad \eta_0 = \pm \sqrt{\varepsilon_0 - a^2}, \quad (9.152)$$

$$P = 2 \operatorname{Im} \eta_0, \quad Q = a^2 + |\varepsilon_0'| + |\eta_0|^2.$$

Знак  $\eta_0$  определяется так, чтобы волна затухала в глубь кристалла.

Аналогично (9.121) имеем

$$f_1 = \lambda_0 [m_0 c_{\pm}] \pm \lambda g, \quad (9.153)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{-iQ\xi}{P\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad g = K[m_0 a] + Lq, \quad \delta = \varepsilon_e' - \varepsilon_0',$$

$$K = \frac{i(NL + 2\eta_0 \sqrt{\varepsilon_0} Q / \delta)}{Q^2 P \sqrt{\varepsilon_0}}, \quad L = \frac{2N \sqrt{\varepsilon_0} - iP a^2}{\eta_0 Q}. \quad (9.154)$$

При этом также учтено соотношение, вытекающее из (9.151),

$$[m_0 c_{\pm}] = \mp \frac{P}{Q} (a^2 \cdot q - (\eta_0 b \pm i \sqrt{\varepsilon_0} a)). \quad (9.155)$$

Из (9.108), (9.109) для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  находим

$$\mathbf{E} = \{\lambda_0 [m_0 c_{\pm}] \pm \lambda (g \pm \zeta' [m_0 c_{\pm}])\} e^{i(\omega t - \zeta)}, \quad (9.156)$$

$$\mathbf{H} = \{\lambda_0 [m_0 [m_0 c_{\pm}]] \pm \lambda (g_1 \pm \zeta' [m_0 [m_0 c_{\pm}]])\} e^{i(\omega t - \zeta)},$$

где  $\mathbf{g}_1 = [m_0 \mathbf{g}] \pm i[q[m_0 c_{\pm}]]$ . Выражения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , как и в случае прозрачных кристаллов, представляют собой суперпозицию двух неоднородных плоских волн. Волна с множителем  $\lambda_0$  в силу (9.106) поляризована по кругу, поляризация же другой волны (с множителем  $\lambda$ ) меняется с глубиной проникновения волны ( $\zeta'$ ). Хотя по внешнему виду формулы (9.156) не отличаются от соответствующих формул, полученных в (9.123), (9.125), они являются, однако, более общими. Дело в том, что фазовые и амплитудные плоскости неоднородных волн (9.156) не перпендикулярны между собой (как это было

в (9.123), (9.125)), а образуют некоторый угол. Очевидно, при отсутствии поглощения из (9.156) должны получаться все соотношения для неоднородных волн в прозрачных кристаллах. Действительно, при этом имеем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^* = \varepsilon, \quad \eta_0 = -\eta_0^*$$

вследствие чего из (9.152) получаем

$$M = 2\sqrt{\varepsilon_0}, \quad N = 0, \quad P = 2\eta_0, \quad Q = 2a^2.$$

Легко убедиться, что в результате формулы (9.153) — (9.156) совпадают с соответствующими соотношениями для прозрачных кристаллов.

Коэффициенты  $\lambda_0$  и  $\lambda$  находятся из граничных условий

$$[\mathbf{E} + \mathbf{E}' - \mathbf{E}'', \mathbf{q}] = 0, \quad \mathbf{H} + \mathbf{H}' - \mathbf{H}'' = 0. \quad (9.157)$$

Для падающей ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ) и отраженной ( $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$ ) волн используем разложение на компоненты, параллельные и перпендикулярные плоскости падения:

$$\mathbf{E} = A\mathbf{a} + B[\mathbf{na}], \quad \mathbf{E}' = A'\mathbf{a} + B'[\mathbf{n}'\mathbf{a}], \quad (9.158)$$

$$\mathbf{H} = A[\mathbf{ma}] - B\mathbf{na}, \quad \mathbf{H}' = A'[\mathbf{m}'\mathbf{a}] - B'\mathbf{na}.$$

Здесь  $\mathbf{m}' = n\mathbf{n}'$ , где  $\mathbf{n}'$  — единичный вектор волновой нормали отраженной волны. Поле преломленной волны на граничной поверхности определяется выражениями (9.156), где следует положить  $\zeta = 0$ . Подставив (9.158) и (9.156) в (9.157), получим

$$[(A + A')\mathbf{a} + B[\mathbf{na}] + B'[\mathbf{n}'\mathbf{a}] - \lambda_0[\mathbf{m}_0\mathbf{c}_\pm] \mp \lambda\mathbf{g}, \mathbf{q}] = 0, \quad (9.159)$$

$$A[\mathbf{ma}] + A'[\mathbf{m}'\mathbf{a}] - (B + B')\mathbf{na} - \lambda_0[\mathbf{m}_0[\mathbf{m}_0\mathbf{c}_\pm]] \mp \lambda\mathbf{g}_1 = 0. \quad (9.160)$$

Умножая (9.160) на  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{q}$ , а (9.159) на  $\mathbf{a}$ , переходим от двух векторных уравнений к системе из четырех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} n(B + B') \mp \lambda_0\varepsilon_0'\Phi \pm \lambda F &= 0, \\ \eta(A - A') + (-i\lambda_0\eta_0 + \lambda)\sqrt{\varepsilon_0'}\Phi &= 0, \\ A + A' - i\lambda_0\sqrt{\varepsilon_0'}\Phi &= 0, \end{aligned} \quad (9.161)$$

$$\eta(B - B') \mp \lambda_0\eta_0 n\Phi \mp \lambda n\eta_0 K = 0,$$

где  $\Phi = P/Q$ ,  $F = L - \varepsilon_0'K - i\eta_0\Phi$ .

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
 A' &= \frac{1}{\Delta} \{[(\eta - \eta_0)(\eta F - n^2 \eta_0 K) - \\
 &- i(\epsilon'_0 \eta + n^2 \eta_0) \Phi] A \mp 2n\eta \sqrt{\epsilon'_0} \Phi B\}, \\
 B' &= \frac{1}{\Delta} \{[(\eta + \eta_0)(\eta F - n^2 \eta_0 K) + i(\epsilon'_0 \eta - n^2 \eta_0) \Phi] B \pm \\
 &\pm 2in\eta\eta_0 (\sqrt{\epsilon'_0} + F/\sqrt{\epsilon'_0}) A\}, \quad (9.162) \\
 \lambda_0 &= \frac{-2i\eta}{\sqrt{\epsilon'_0} \Phi \Delta} [(\eta F - n^2 \eta_0 K) A \mp n \sqrt{\epsilon'_0} \Phi B], \\
 \lambda &= \frac{-2i\eta}{\sqrt{\epsilon'_0} \Delta} [(\epsilon'_0 \eta + n^2 \eta_0) A \mp in \sqrt{\epsilon'_0} (\eta + \eta_0) B], \\
 \Delta &= (\eta + \eta_0)(\eta F - n^2 \eta_0 K) + i(\epsilon'_0 \eta + n^2 \eta_0) \Phi.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае решить граничную задачу удастся лишь с помощью волн вида (9.108). По своему характеру они отличаются от всех известных до сих пор видов гармонических плоских волн. Последние можно подразделить на следующие группы: а) *Незатухающие* волны, векторная амплитуда которых постоянна. Такие волны распространяются в диэлектриках. б) *Затухающие однородные* волны, векторная амплитуда которых пропорциональна экспоненциально убывающему множителю, а плоскости равных фаз и равных амплитуд параллельны между собой. Такие волны возникают при нормальном падении света на поглощающую среду. в) *Затухающие однородные волны* (типа волн Фохта), векторная амплитуда которых имеет вид  $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{qr})e^{-\kappa \mathbf{qr}}$ , т. е. помимо экспоненциально убывающего множителя содержит линейную функцию от координат, причем в эту линейную функцию и в экспоненту входит одна и та же комбинация координат  $(\mathbf{qr})$ . Такие волны, как показал впервые Фохт [65], возникают при нормальном падении волны типа а) на поверхность поглощающего кристалла низшей сингонии, ориентированную перпендикулярно круговой оптической оси. г) *Затухающие неоднородные* плоские волны, векторная амплитуда которых экспоненциально убывает, но плоскости равных фаз не параллельны плоскостям равных амплитуд. Такие волны возникают при наклонном падении на поглощающую среду и при полном отражении от диэлектриков. При этом в первом случае плоскости равных фаз и равных амплитуд могут образовывать между собой любой угол, а во втором случае они взаимно перпендикулярны.

Волны (9.108) отличаются от волн типа б) и в) тем, что они неоднородны, а от волн типа г) тем, что их амплитуда, кроме экспоненциальной, содержит еще линейную зависимость от координат. Очевидно, рассмотренный здесь вид плоских неоднородных волн является наиболее общим по сравнению со всеми перечисленными. Действительно, придавая параметрам в формулах (9.108), (9.156) соответствующие значения, можно получить все вышеуказанные виды волн.

В заключение отметим, что волны рассматриваемого здесь вида могут возникать также при наклонном падении света на поглощающие кристаллы низших сингоний. Их существование было установлено в работах [74, 75].

## § 10. ПРОХОЖДЕНИЕ СВЕТА ЧЕРЕЗ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ

Световой пучок, проходящий через плоскопараллельную пластинку из любого вещества, изменяет свою интенсивность и состояние поляризации. Это обстоятельство играет фундаментальную роль в самых различных вопросах прикладной оптики. По существу пропускание света через надлежащим образом подобранные плоскопараллельные пластинки является до сих пор основным, наиболее удобным и простым способом изменения характеристик светового пучка в желательном направлении, например превращения естественного света в линейно поляризованный и т. д. Поэтому теория прохождения света через плоскопараллельные пластинки имеет чрезвычайно большое значение.

Мы рассмотрим вначале более простой и в то же время наиболее важный случай *нормального* падения света на бесконечную пластинку толщиной  $d$  из *немагнитного* (негиротропного) кристалла, ограниченную с обеих сторон изотропными средами. При этом (см. § 8) все векторы рефракции: падающей ( $\mathbf{m}$ ) и отраженной ( $\mathbf{m}'$ ), преломленной в пластинке ( $\mathbf{m}_1$ ), отраженной от нижней грани ( $\mathbf{m}'_1$ ) и прошедшей ( $\mathbf{m}''$ ) волн будут пропорциональны единичному вектору нормали к поверхности пластинки (рис. 10.1). Как показано в § 8, в случае нормального падения света на кристалл из изотропной среды или наоборот имеет место разделение волн, соответствующих двум изонормальным волнам, распространяющимся в кристалле. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда на кристаллическую пластинку падает плоская волна, вектор  $\mathbf{H}$  которой имеет поляризацию, совпадающую с поляризацией одной из двух изонормальных волн, распространяющихся вдоль нормали  $\mathbf{q}$  к пластинке. Общий случай будет тогда

получаться путем простого суммирования выражений, соответствующих двум возможным частным случаям.

Подчеркнем, что мы будем искать точное решение рассматриваемой задачи. Обычно ввиду ее сложности при практических вычислениях ограничиваются приближенным подходом, пренебрегая отражением волн на первой и второй гранях пластинки. Точный расчет для случая нормального падения света на плоскопараллельную пластинку из прозрачного немагнитного одноосного кристалла был выполнен в [73]. Приве-

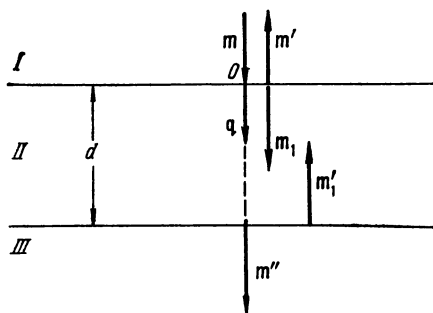


Рис. 10.1

денные ниже вычисления являются существенно более общими и в то же время более простыми.

При нормальном падении однородной волны на пластинку в последней будут распространяться однородные волны даже в случае поглощающего кристалла. Очевидно, прошедшая волна также будет однородной. Векторы рефракции различных волн имеют следующий вид:

$$\mathbf{m} = -\mathbf{m}' = n\mathbf{q}, \quad \mathbf{m}_1 = -\mathbf{m}'_1 = n_1\mathbf{q}, \quad \mathbf{m}'' = n''\mathbf{q}, \quad (10.1)$$

где  $n$ ,  $n_1$ ,  $n''$  — показатели преломления для I, II и III сред соответственно. Пусть  $\mathbf{h}_1$  — вектор поляризации распространяющейся в кристалле волны, соответствующей вектору рефракции  $\mathbf{m}_1$ . Опуская общий фазовый множитель  $e^{+i\omega t}$  (см. (1.22), 1.20)), будем иметь для магнитного поля различных волн следующие выражения ( $k_0 = \omega/c$ ):

$$\begin{aligned} \text{падающая волна в изотропной среде I: } \mathbf{H} &= C_1 \mathbf{h}_1 e^{-ik_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}, \\ \text{отраженная волна в среде I: } \mathbf{H}' &= C'_1 \mathbf{h}_1 e^{-ik_0 \mathbf{m}' \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} \text{преломленная волна в пластинке: } \mathbf{H}_1 &= A_1 \mathbf{h}_1 e^{-ik_0 \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}}, \\ \text{волна в пластинке, отраженная от нижней грани:} \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}'_1 = A'_1 \mathbf{h}_1 e^{-ik_0 \mathbf{m}'_1 \cdot \mathbf{r}},$$

$$\text{преломленная волна в изотропной среде III: } \mathbf{H}'' = C''_1 \mathbf{h}_1 e^{-ik_0 \mathbf{m}'' \cdot \mathbf{r}}.$$



Пусть точка  $O$  на верхней грани пластинки является началом системы координат. Тогда условие  $\mathbf{q}\mathbf{q}=0$  будет уравнением плоскости верхней грани пластинки, а  $\mathbf{q}\mathbf{q}=\mathbf{d}$  — уравнением нижней грани. Граничные условия (8.1), (8.2) на обеих гранях теперь могут быть написаны в следующем виде:

на верхней грани

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}' - \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}'_1 = 0, \quad [\mathbf{q}, \mathbf{E} + \mathbf{E}' - \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}'_1] = 0; \quad (10.3)$$

на нижней грани

$$\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}'_1 - \mathbf{H}'' = 0, \quad [\mathbf{q}, \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1 - \mathbf{E}''] = 0. \quad (10.4)$$

Поскольку на верхней грани  $\mathbf{q}\mathbf{r}=0$ , то с учетом (10.1) все экспоненциальные множители в выражениях (10.2) обращаются в единицу и соотношения (10.3) принимают вид

$$(C_1 + C'_1 - A_1 - A'_1) \mathbf{h}_1 = 0, \quad (10.5)$$

$$[\mathbf{q}, C_1 [\mathbf{p}\mathbf{h}_1] + C'_1 [\mathbf{p}'\mathbf{h}'_1] - A_1 [\mathbf{p}_1\mathbf{h}_1] - A'_1 [\mathbf{p}'_1\mathbf{h}'_1]] = 0. \quad (10.6)$$

Мы используем здесь соотношение (4.36)  $\mathbf{E} = -[\mathbf{p}\mathbf{H}]$ , причем  $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}''$  — векторы лучевой рефракции для соответствующих волн (10.2). На нижней грани пластинки  $\mathbf{q}\mathbf{r}=\mathbf{d}$ , поэтому на ней выражения для  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}'_1$  принимают вид (см. (10.1))

$$\mathbf{H}_1|_{\mathbf{q}\mathbf{r}=\mathbf{d}} = A_1 \mathbf{h}_1 e^{-i\delta_1}, \quad \mathbf{H}'_1|_{\mathbf{q}\mathbf{r}=\mathbf{d}} = A'_1 \mathbf{h}_1 e^{i\delta_1}, \quad \delta_1 = k_0 n_1 d. \quad (10.7)$$

Что же касается поля  $\mathbf{H}''$ , то соответствующий множитель  $e^{-ik_0 n'' d}$  можно включить в коэффициент  $C''_1$  (поскольку  $\mathbf{H}''$  входит лишь в условия (10.4) на одной нижней грани).

В результате граничные условия (10.4) могут быть записаны следующим образом:

$$(A_1 e^{-i\delta_1} + A'_1 e^{i\delta_1} - C''_1) \mathbf{h}_1 = 0, \quad (10.8)$$

$$[\mathbf{q}, A_1 e^{-i\delta_1} [\mathbf{p}_1\mathbf{h}_1] + A'_1 e^{i\delta_1} [\mathbf{p}'_1\mathbf{h}'_1] - C''_1 [\mathbf{p}''\mathbf{h}_1]] = 0. \quad (10.9)$$

В равенствах (10.6), (10.9) раскроем двойные векторные произведения. Учитывая, что

$$\mathbf{p}' = -\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}_1, \quad \mathbf{q}\mathbf{h}_1 = 0, \quad (10.10)$$

получим из (10.5)—(10.9) окончательно следующую систему четырех уравнений:

$$C_1 + C'_1 - A_1 - A'_1 = 0, \quad (10.11)$$

$$\mathbf{q}\mathbf{p}(C_1 - C'_1) - \mathbf{q}\mathbf{p}_1(A_1 - A'_1) = 0, \quad (10.12)$$

$$A_1 e^{-i\delta_1} + A'_1 e^{i\delta_1} - C''_1 = 0, \quad (10.13)$$

$$\mathbf{q}\mathbf{p}_1(A_1 e^{-i\delta_1} - A'_1 e^{i\delta_1}) - \mathbf{q}\mathbf{p}'' C''_1 = 0. \quad (10.14)$$

Из первых двух уравнений находим

$$A_1 = \frac{1}{2q\rho_1} [q(\rho_1 + \rho)C_1 + q(\rho_1 - \rho)C'_1], \quad (10.15)$$

$$A'_1 = \frac{1}{2q\rho_1} [q(\rho_1 - \rho)C_1 + q(\rho_1 + \rho)C'_1].$$

Подставив эти значения в уравнения (10.13), (10.14) и разрешая их относительно  $C'_1$  и  $C''_1$ , получим

$$C'_1 = \frac{q(\rho_1 - \rho) \cdot q(\rho_1 + \rho'') e^{i\delta_1} - q(\rho_1 + \rho) \cdot q(\rho_1 - \rho'') e^{-i\delta_1}}{q(\rho_1 - \rho) \cdot q(\rho_1 - \rho'') e^{-i\delta_1} - q(\rho_1 + \rho) \cdot q(\rho_1 + \rho'') e^{i\delta_1}} C_1, \quad (10.16)$$

$$C''_1 = \frac{4q\rho \cdot q\rho_1 C_1}{q(\rho_1 + \rho) \cdot q(\rho_1 + \rho'') e^{i\delta_1} - q(\rho_1 - \rho) \cdot q(\rho_1 - \rho'') e^{-i\delta_1}}. \quad (10.17)$$

При учете соотношений (8.81) формулы (10.15) — (10.17) принимают следующий вид:

$$A_1 = \frac{n}{2} ((n + n_1) C_1 + (n - n_1) C'_1), \quad (10.18)$$

$$A'_1 = \frac{n}{2} ((n - n_1) C_1 + (n + n_1) C'_1), \quad (10.19)$$

$$C'_1 = \frac{(n + n_1)(n'' - n_1) e^{-i\delta_1} - (n - n_1)(n'' + n_1) e^{i\delta_1}}{(n + n_1)(n'' + n_1) e^{i\delta_1} - (n - n_1)(n'' - n_1) e^{-i\delta_1}} C_1, \quad (10.20)$$

$$C''_1 = \frac{4n_1 n'' C_1}{(n + n_1)(n'' + n_1) e^{i\delta_1} - (n - n_1)(n'' - n_1) e^{-i\delta_1}}. \quad (10.21)$$

Если на поверхность пластинки падает волна, которая имеет поляризацию, совпадающую с поляризацией  $\mathbf{h}_2$  второй изонормальной волны в пластинке, соответствующей нормали  $\mathbf{q}$ , то аналогично (10.1) получим для векторов рефракции волн внутри пластинки  $\mathbf{m}_2 = -\mathbf{m}'_2 = n_2 \mathbf{q}$  и аналогично (10.2):

$$\mathbf{H} = C_2 \mathbf{h}_2 e^{-ik_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}' = C'_2 \mathbf{h}_2 e^{-ik_0 \mathbf{m}' \cdot \mathbf{r}},$$

$$\mathbf{H}_2 = A_2 \mathbf{h}_2 e^{-ik_0 \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}'_2 = A'_2 \mathbf{h}_2 e^{-ik_0 \mathbf{m}'_2 \cdot \mathbf{r}}, \quad (10.22)$$

$$\mathbf{H}'' = C''_2 \mathbf{h}_2 e^{-ik_0 \mathbf{m}'' \cdot \mathbf{r}}, \quad \delta_2 = k_0 n_2 d.$$

Решения граничной задачи получаются в этом случае сразу из соотношений (10.18) — (10.21) путем замены всех величин с ин-

дексом единица:  $C_1, C'_1, A_1, A'_1, \delta_1, C''_1, m_1, n_1$  на такие же величины с индексом два:  $C_2, C'_2, A_2, A'_2, \delta_2, C''_2, m_2, n_2$ . Общее решение равно сумме двух полученных частных решений:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (C_1 \mathbf{h}_1 + C_2 \mathbf{h}_2) e^{-ik_0 m r}, \quad \mathbf{H}' = (C'_1 \mathbf{h}_1 + C'_2 \mathbf{h}_2) e^{-ik_0 m' r}, \\ \mathbf{H}'' &= (C''_1 \mathbf{h}_1 + C''_2 \mathbf{h}_2) e^{-ik_0 m'' r}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Соотношения (10.18) — (10.23) пригодны для любых немагнитных (негиротропных) кристаллов при любой ориентации пластинки. Единственным особым случаем является тот, когда пластинка вырезана перпендикулярно круговой оптической оси кристалла (см. § 7). Для этого случая полное решение получено в работе [64].

Предположим, что толщина пластинки стремится к нулю. Тогда  $A = \delta_1 = 0$  и формулы (10.20), (10.21) дают

$$C'_1 = \frac{n'' - n}{n'' + n} C_1, \quad C''_1 = \frac{2n''}{n'' + n} C_1. \quad (10.24)$$

Но при  $d = 0$  вместо пластинки мы получаем границу раздела двух изотропных сред. Поскольку  $\mathbf{H} = C_1 \mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{H}' = C'_1 \mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{H}'' = C''_1 \mathbf{h}_1$ , то соотношения (10.24) действительно совпадают с формулами (8.52) для нормального падения света на границу двух изотропных сред.

Если пластинка является изотропной, то формулы (10.18) — (10.21) сразу дают общее решение при любой поляризации падающей волны в виде

$$\mathbf{H}' = C'_1 \mathbf{H} = \frac{(n - n_1)(n'' + n_1)e^{i\delta} - (n + n_1)(n'' - n_1)e^{-i\delta}}{(n - n_1)(n'' - n_1)e^{-i\delta} - (n + n_1)(n'' + n_1)e^{i\delta}} \mathbf{H}, \quad (10.25)$$

$$\mathbf{H}'' = C''_1 \mathbf{H} = \frac{4n_1 n'' \mathbf{H}}{(n + n_1)(n'' + n_1)e^{i\delta} - (n - n_1)(n'' - n_1)e^{-i\delta}}, \quad (10.26)$$

где  $\delta = k_0 n_1 d$ ,  $n_1$  — показатель преломления изотропной пластинки.

Существенно более сложной является задача в случае *наклонного* падения света на плоскопараллельную кристаллическую пластинку. При решении ее мы по-прежнему будем считать кристалл немагнитным. В остальном он может быть произвольным — одноосным или двуосным, прозрачным или поглощающим. Согласно (8.9), векторы рефракции всех волн будут иметь одну и ту же проекцию  $\mathbf{b}$  на параллельные грани пластинки (рис. 10.2). Как известно (§ 7), векторы рефракции всех преломленных и отраженных волн внутри пластинки получаются путем подстановки в уравнение нормалей (4.7) выражения  $\mathbf{b} + \eta \mathbf{q}$  для  $\mathbf{m}$  и отыскания двух решений для  $\eta$ , кото-

рым соответствуют средние векторы Пойнтинга, направленные внутрь пластинки. Поскольку при всех повторных отражениях волн внутрь пластинки вектор  $\mathbf{b}$  остается неизменным, то все волны, отходящие от верхней грани внутрь пластинки, могут обладать лишь двумя различными состояниями поляризации, соответствующими векторам рефракции  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  преломленных волн (см. рис. 10.2). Аналогично все волны, отражен-

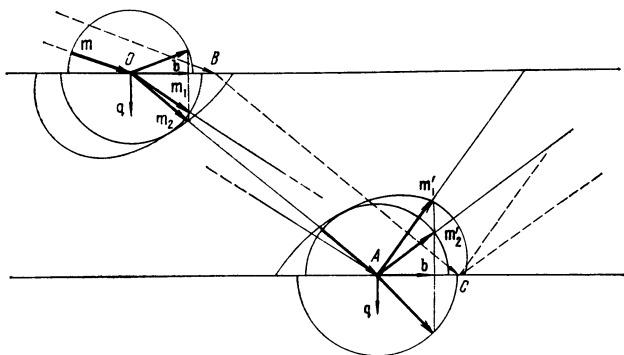


Рис. 10.2

ные от нижней грани пластинки, будут иметь лишь два различных состояния поляризации, соответствующие векторам рефракции  $\mathbf{m}'_1$  и  $\mathbf{m}'_2$  (см. рис. 10.2). Разумеется, волна, идущая, например, по линии  $BC$ , будет отставать по фазе от волны той же поляризации, идущей по линии  $OA$ , и это отставание при последующих отражениях будет сохраняться. Однако результат сведется к тому, что вектор магнитного поля волны с вектором рефракции  $\mathbf{m}_1$ , исходящей из точки  $B$ , будет отличаться от соответствующего вектора, исходящего из точки  $O$ , лишь комплексным скалярным множителем, характеризующим уменьшение амплитуды волны и сдвиг фазы. Поскольку мы рассматриваем идеализированный случай бесконечной плоской монохроматической волны, то в любой точке (например,  $B$ ) верхней грани пластинки для волны с каждым из двух возможных состояний поляризации будет существовать стационарное состояние, получающееся в результате суперпозиции всех волн, идущих по одной и той же линии ( $BC$ ). Эта суперпозиция, ввиду совпадения скоростей и поляризации рассматриваемых волн, будет сводиться к простому сложению упомянутых выше комплексных скалярных коэффициентов. То же самое справедливо для нижней грани пластинки. Благодаря этому векторы результирующего магнитного поля двух волн разной поляризации, отходящих от верхней грани внутрь

пластинки, могут быть написаны в форме, аналогичной (8.10):

$$\mathbf{H}_1 = A_1 \mathbf{h}_1 e^{-ik_0 \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}_2 = A_2 \mathbf{h}_2 e^{-ik_0 \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}}. \quad (10.27)$$

Соответственно для волн, отходящих от нижней грани, имеем

$$\mathbf{H}'_1 = A'_1 \mathbf{h}'_1 e^{-ik_0 \mathbf{m}'_1 \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}'_2 = A'_2 \mathbf{h}'_2 e^{-ik_0 \mathbf{m}'_2 \cdot \mathbf{r}}. \quad (10.28)$$

Для векторов рефракции всех волн имеем выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{b} + \eta \mathbf{q}, & \mathbf{m}' &= \mathbf{b} + \eta' \mathbf{q}, \\ \mathbf{m}_1 &= \mathbf{b} + \eta_1 \mathbf{q}, & \mathbf{m}_2 &= \mathbf{b} + \eta_2 \mathbf{q}, \\ \mathbf{m}'_1 &= \mathbf{b} + \eta'_1 \mathbf{q}, & \mathbf{m}'_2 &= \mathbf{b} + \eta'_2 \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

При этом во всех экспонентах формул (10.27), (10.28) также появляется общее слагаемое  $-ik_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}$ . Для волн в изотропных средах—падающей, отраженной и прошедшей через пластинку—имеем соответственно поля  $\mathbf{H} e^{-ik_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{H}' e^{-ik_0 \mathbf{m}' \cdot \mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{H}'' e^{-ik_0 \mathbf{m}'' \cdot \mathbf{r}}$ , следовательно, и здесь войдет общий экспоненциальный множитель  $e^{-ik_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}$ , который ввиду линейности всех соотношений сокращается. Поскольку векторы рефракции  $\mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{m}_2$ ,  $\mathbf{m}'_1$ ,  $\mathbf{m}'_2$  предполагаются известными, то известны также (см. (4.47), (4.48)) соответствующие векторы  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ ,  $\mathbf{h}'_1$ ,  $\mathbf{h}'_2$ , каждый из которых мы можем взять с совершенно произвольным скалярным множителем. Кроме того, имеются еще векторы поля падающей ( $\mathbf{H}$ ), отраженной ( $\mathbf{H}'$ ) и прошедшей через пластинку ( $\mathbf{H}''$ ) волн. Для этой совокупности семи волн справедливы следующие граничные условия (ср. (10.3), (10.4)):

на верхней грани пластинки

$$\begin{aligned} \mathbf{H} + \mathbf{H}' - \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}'_1 - \mathbf{H}'_2 &= 0, \\ [\mathbf{q}, \mathbf{E} + \mathbf{E}' - \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}'_1 - \mathbf{E}'_2] &= 0, \end{aligned} \quad (10.30)$$

на нижней грани пластинки

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}'_1 + \mathbf{H}'_2 - \mathbf{H}'' &= 0, \\ [\mathbf{q}, \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}'_1 + \mathbf{E}'_2 - \mathbf{E}''] &= 0. \end{aligned} \quad (10.31)$$

После сокращения на  $e^{-ik_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}$  выражения для всех полей будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} e^{-ik_0 \eta \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}' e^{-ik_0 \eta' \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}'' e^{-ik_0 \eta'' \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \\ \mathbf{H}_1 = A_1 \mathbf{h}_1 e^{-ik_0 \eta_1 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}_2 = A_2 \mathbf{h}_2 e^{-ik_0 \eta_2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}; \\ \mathbf{H}'_1 = A'_1 \mathbf{h}'_1 e^{-ik_0 \eta'_1 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}'_2 = A'_2 \mathbf{h}'_2 e^{-ik_0 \eta'_2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

На верхней грани пластинки  $\mathbf{q}\mathbf{r} = 0$ , на нижней грани  $\mathbf{q}\mathbf{r} = d$ .  
Введем обозначения:

$$\delta_1 = k_0 \eta_1 d, \quad \delta_2 = k_0 \eta_2 d, \quad \delta'_1 = k_0 \eta'_1 d, \quad \delta'_2 = k_0 \eta'_2 d. \quad (10.33)$$

Множитель  $e^{-ik_0 \eta d}$  включим в  $\mathbf{H}''$ , кроме того, учтем соотношения (см. (4.36))

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -[\mathbf{p}\mathbf{H}], \quad \mathbf{E}' = -[\mathbf{p}'\mathbf{H}'], \quad \mathbf{E}'' = -[\mathbf{p}''\mathbf{H}''], \\ \mathbf{E}_1 &= -[\mathbf{p}_1\mathbf{H}_1], \quad \mathbf{E}_2 = -[\mathbf{p}_2\mathbf{H}_2], \quad \mathbf{E}'_1 = -[\mathbf{p}'_1\mathbf{H}'_1], \\ \mathbf{E}'_2 &= -[\mathbf{p}'_2\mathbf{H}'_2]. \end{aligned} \quad (10.34)$$

В результате уравнения граничных условий (10.30), (10.31) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H} + \mathbf{H}' - A_1 \mathbf{h}_1 - A_2 \mathbf{h}_2 - A'_1 \mathbf{h}'_1 - A'_2 \mathbf{h}'_2 &= 0, \\ A_1 \mathbf{h}_1 e^{-i\delta_1} + A_2 \mathbf{h}_2 e^{-i\delta_2} + A'_1 \mathbf{h}'_1 e^{-i\delta'_1} + A'_2 \mathbf{h}'_2 e^{-i\delta'_2} - \mathbf{H}'' &= 0, \end{aligned} \quad (10.35)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{q}, [\mathbf{p}\mathbf{H}] + [\mathbf{p}'\mathbf{H}'] - A_1 [\mathbf{p}_1\mathbf{h}_1] - A_2 [\mathbf{p}_2\mathbf{h}_2] - \\ - A'_1 [\mathbf{p}'_1\mathbf{h}'_1] - A'_2 [\mathbf{p}'_2\mathbf{h}'_2]] &= 0, \\ [\mathbf{q}, A_1 e^{-i\delta_1} [\mathbf{p}_1\mathbf{h}_1] + A_2 e^{-i\delta_2} [\mathbf{p}_2\mathbf{h}_2] + A'_1 e^{-i\delta'_1} [\mathbf{p}'_1\mathbf{h}'_1] + \\ + A'_2 e^{-i\delta'_2} [\mathbf{p}'_2\mathbf{h}'_2] - [\mathbf{p}''\mathbf{H}'']] &= 0. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Рассмотрим вначале случай наклонного падения света на *изотропную* плоскопараллельную пластинку. При этом вместо двух преломленных волн  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  и двух отраженных  $\mathbf{H}'_1, \mathbf{H}'_2$  внутри пластинки будет существовать по одной волне каждого типа, поэтому граничные условия (10.30), (10.31) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H} + \mathbf{H}' - \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}'_1 &= 0, \\ [\mathbf{q}, [\mathbf{p}\mathbf{H}] + [\mathbf{p}'\mathbf{H}'] - [\mathbf{p}_1\mathbf{H}_1] - [\mathbf{p}'_1\mathbf{H}'_1]] &= 0 \end{aligned} \quad (10.37)$$

на верхней грани пластинки и

$$\begin{aligned} \mathbf{H} e^{-i\delta} + \mathbf{H}'_1 e^{i\delta} - \mathbf{H}'' &= 0, \\ [\mathbf{q}, [\mathbf{p}_1\mathbf{H}_1] e^{-i\delta} + [\mathbf{p}'_1\mathbf{H}'_1] e^{i\delta} - [\mathbf{p}''\mathbf{H}'']] &= 0 \end{aligned} \quad (10.38)$$

на нижней ее грани. При этом

$$\begin{aligned} \eta' &= -\eta, \quad \eta'_1 = -\eta_1, \\ \delta_1 = \delta_2 = -\delta'_1 = -\delta'_2 &= k_0 \eta_1 d = \delta. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Пусть  $\mathbf{H} = A\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{qH} = 0$ . Заметим, что для каждой из волн  $\mathbf{H}^{(k)}$  на границе двух сред условие  $\mathbf{qH}^{(k)} = 0$  равносильно тому, что  $\mathbf{H}^{(k)} = A_k\mathbf{a}$ , так как всегда  $\mathbf{m}^{(k)}\mathbf{H}^{(k)} = 0$  и  $\mathbf{a} = [\mathbf{m}^{(k)}\mathbf{q}]$ . Учтем, кроме того, что

$$\mathbf{bH}^{(k)} = (\mathbf{b} + \eta_k\mathbf{q} - \eta_k\mathbf{q})\mathbf{H}^{(k)} = (\mathbf{m}^{(k)} - \eta_k\mathbf{q})\mathbf{H}^{(k)} = -\eta_k\mathbf{qH}^{(k)}.$$

Поэтому, умножая первые уравнения (10.37), (10.38) на  $\mathbf{q}$  и на  $\mathbf{b}$ , получаем при условиях (10.39) и  $\mathbf{qH} = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{qH}' - \mathbf{qH}_1 - \mathbf{qH}'_1 &= 0, & \eta\mathbf{qH}' - \eta_1\mathbf{qH}_1 + \eta_1\mathbf{qH}'_1 &= 0, \\ e^{-i\delta}\mathbf{qH}_1 + e^{i\delta}\mathbf{qH}'_1 - \mathbf{qH}'' &= 0, & & (10.40) \\ \eta_1 e^{-i\delta}\mathbf{qH}_1 - \eta_1 e^{i\delta}\mathbf{qH}'_1 - \eta''\mathbf{qH}'' &= 0. \end{aligned}$$

Мы получили систему четырех однородных линейных уравнений для величин  $\mathbf{qH}'$ ,  $\mathbf{qH}_1$ ,  $\mathbf{qH}'_1$ ,  $\mathbf{qH}''$ , детерминант которой, как легко проверить, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ \eta & -\eta_1 & \eta_1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} & e^{i\delta} & -1 \\ 0 & \eta_1 e^{-i\delta} & -\eta_1 e^{i\delta} & -\eta'' \end{vmatrix} =$$

$$= (\eta + \eta_1)(\eta'' - \eta_1) e^{-i\delta} - (\eta - \eta_1)(\eta'' + \eta_1) e^{i\delta} \neq 0.$$

Поэтому  $\mathbf{qH}' = \mathbf{qH}_1 = \mathbf{qH}'_1 = \mathbf{qH}'' = 0$ , следовательно,  $\mathbf{H}' = A'\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{H}_1 = A_1\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{H}'_1 = A'_1\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{H}'' = A''\mathbf{a}$ . В результате система (10.37), (10.38) принимает вид

$$\begin{aligned} A + A' - A_1 - A'_1 &= 0, \\ \zeta A + \zeta' A' - \zeta_1 A_1 - \zeta'_1 A'_1 &= 0, & & (10.41) \\ e^{-i\delta} A_1 + e^{i\delta} A'_1 - A'' &= 0, \\ \zeta_1 e^{-i\delta} A_1 + \zeta'_1 e^{i\delta} A'_1 - \zeta'' A'' &= 0. \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение

$$\zeta_k = \mathbf{qP}^{(k)}, \quad (10.42)$$

где индекс  $k$  обозначает любую из волн. При этом ввиду изотропии всех сред

$$\zeta' = -\zeta, \quad \zeta'_1 = -\zeta_1.$$

Решение системы (10.41) имеет вид

$$A_1 = \frac{2\zeta\zeta_+}{\Delta_\zeta} A, \quad A_1' = \frac{2\zeta\zeta_-}{\Delta_\zeta} A, \quad A'' = \frac{4\zeta\zeta_1}{\Delta_\zeta} d, \quad (10.43)$$

$$A' = \frac{1}{\Delta_\zeta} ((\zeta - \zeta_1)\zeta_+ + (\zeta + \zeta_1)\zeta_-) A,$$

где

$$\zeta_\pm = (\zeta_1 \pm \zeta'') e^{\pm i\delta}, \quad \Delta_\zeta = (\zeta + \zeta_1)\zeta_+ + (\zeta - \zeta_1)\zeta_-.$$

Пусть теперь  $\mathbf{H} = B[\mathbf{m}\mathbf{a}]$ ,  $\mathbf{a}\mathbf{H} = 0$ . Аналогично предыдущему случаю из  $\mathbf{a}\mathbf{H}^{(k)} = 0$  следует  $\mathbf{H}^{(k)} = B_k[\mathbf{m}^{(k)}\mathbf{a}]$ . Умножая все уравнения (10.37), (10.38) на  $\mathbf{a}$  и учитывая, что  $\mathbf{a}\mathbf{p}^{(k)} = 0$ , получаем систему, аналогичную (10.40):

$$\mathbf{a}\mathbf{H}' - \mathbf{a}\mathbf{H}_1 - \mathbf{a}\mathbf{H}_1' = 0, \quad \zeta\mathbf{a}\mathbf{H}' - \zeta_1\mathbf{a}\mathbf{H}_1 + \zeta_1\mathbf{a}\mathbf{H}_1' = 0,$$

$$e^{-i\delta}\mathbf{a}\mathbf{H}_1 + e^{i\delta}\mathbf{a}\mathbf{H}_1' - \mathbf{a}\mathbf{H}'' = 0, \quad \zeta_1 e^{-i\delta}\mathbf{a}\mathbf{H}_1 - \zeta_1 e^{i\delta}\mathbf{a}\mathbf{H}_1' - \zeta''\mathbf{a}\mathbf{H}'' = 0,$$

из которой тем же путем следует  $\mathbf{a}\mathbf{H}^{(k)} = 0$  и

$$\mathbf{H}' = B'[\mathbf{m}'\mathbf{a}], \quad \mathbf{H}_1 = B_1[\mathbf{m}_1\mathbf{a}], \quad \mathbf{H}_1' = B_1'[\mathbf{m}_1'\mathbf{a}], \quad \mathbf{H}'' = B''[\mathbf{m}''\mathbf{a}]. \quad (10.44)$$

Поскольку  $\mathbf{q}[\mathbf{m}^{(k)}\mathbf{a}] = -\mathbf{a}^2$ , то умножение первых уравнений (10.37) и (10.38) на  $\mathbf{q}$  дает

$$B + B' - B_1 - B_1' = 0, \quad e^{-i\delta}B_1 + e^{i\delta}B_1' - B'' = 0. \quad (10.45)$$

Умножая те же уравнения на  $\mathbf{b}$  и учитывая, что  $\mathbf{b}[\mathbf{m}^{(k)}\mathbf{a}] = = [\mathbf{q}\mathbf{a}][\mathbf{m}^{(k)}\mathbf{a}] = \eta_k \mathbf{a}^2$ , находим

$$\eta(B - B') - \eta_1(B_1 - B_1') = 0, \quad \eta_1(e^{-i\delta}B_1 - e^{i\delta}B_1') - \eta''B'' = 0. \quad (10.46)$$

Система (10.45), (10.46) только заменой  $A \rightarrow B$ ,  $\zeta \rightarrow \eta$  отличается от (10.41) и соответственно ее решение сразу получается из (10.43) путем этой замены:

$$B_1 = \frac{2\eta\eta_+}{\Delta_\eta} B, \quad B_1' = \frac{2\eta\eta_-}{\Delta_\eta} B, \quad B'' = \frac{4\eta\eta_1}{\Delta_\eta} B,$$

$$B' = \frac{1}{\Delta_\eta} ((\eta - \eta_1)\eta_+ + (\eta + \eta_1)\eta_-) B, \quad (10.47)$$

$$\eta_\pm = (\eta_1 \pm \eta'') e^{\pm i\delta}, \quad \Delta_\eta = (\eta + \eta_1)\eta_+ + (\eta - \eta_1)\eta_-.$$

Общий случай поляризации падающей волны  $\mathbf{H} = A\mathbf{a} + B[\mathbf{m}\mathbf{a}]$  получается из рассматриваемых двух случаев путем простого суммирования результатов (10.43) и (10.47):



$$\begin{aligned} \mathbf{H}' &= A' \mathbf{a} + B' [\mathbf{m}' \mathbf{a}], & \mathbf{H}_1 &= A_1 \mathbf{a} + B_1 [\mathbf{m}_1 \mathbf{a}], \\ \mathbf{H}'_1 &= A'_1 \mathbf{a} + B'_1 [\mathbf{m}'_1 \mathbf{a}], & \mathbf{H}'' &= A'' \mathbf{a} + B'' [\mathbf{m}'' \mathbf{a}]. \end{aligned} \quad (10.48)$$

При вычислениях следует иметь в виду, что  $n_k^2 = a^2 + \eta_k^2$  и в изотропных средах (см. (10.42))  $\zeta_k = \eta_k/n_k^2$ . Поэтому

$$\zeta_k \pm \zeta_l = \frac{\eta_k}{n_k^2} \pm \frac{\eta_l}{n_l^2} = \frac{1}{n_k^2 n_l^2} (\eta_k \pm \eta_l)(a^2 \pm \eta_k \eta_l). \quad (10.49)$$

Если толщина пластинки равна нулю, то формулы (10.43), (10.47) должны переходить в формулы Френеля для отражения и преломления света на границе двух изотропных сред с показателями преломления  $n$  и  $n''$ . Действительно, из (10.43) при  $\delta=0$  следует

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\zeta - \zeta''}{\zeta + \zeta''} A = \frac{(\eta - \eta'')(a^2 - \eta\eta'')}{(\eta + \eta'')(a^2 + \eta\eta'')} A = \\ &= \frac{(\eta - \eta'') \mathbf{m}' \mathbf{m}''}{(\eta + \eta'') \mathbf{m} \mathbf{m}''} A, \\ A'' &= \frac{2\zeta}{\zeta + \zeta''} A = \frac{2\eta n''^2}{(\eta + \eta'') \mathbf{m} \mathbf{m}''} A. \end{aligned} \quad (10.50)$$

Соответственно из (10.47) находим

$$B' = \frac{\eta - \eta''}{\eta + \eta''} B, \quad B'' = \frac{2\eta}{\eta + \eta''} B. \quad (10.51)$$

Нетрудно убедиться, что эти формулы совпадают с теми, которые следуют из прямого решения соответствующей задачи (§ 8).

Если устремить толщину пластинки к бесконечности, то соотношения (8.47), (8.51) также должны переходить в формулы Френеля для границы раздела двух изотропных сред с показателями преломления  $n$  и  $n_1$ . Непосредственно из приведенных формул при  $d=\delta=\infty$  этого не получается. Однако если ввести ничтожно малое затухание, заменив  $\eta_1$  на  $\eta_1 - i\kappa$  ( $0 < \kappa \ll 1$ ), то при  $d \rightarrow \infty$  будет  $e^{-i\delta} \rightarrow 0$ ,  $e^{i\delta} \rightarrow \infty$ . В этом случае получаем из (10.43), (10.47)

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta + \zeta_1} A, & A_1 &= -\frac{2\zeta}{\zeta + \zeta_1} A_1, \\ B' &= \frac{\eta - \eta_1}{\eta + \eta_1} B, & B_1 &= \frac{2\eta}{\eta + \eta_1} B, \end{aligned} \quad (10.52)$$

что совпадает с (10.50), (10.51), если учесть, что теперь  $A_1, B_1$  являются амплитудами преломленной волны.

Во многих случаях решения для поля волн, отраженных и пропущенных пластинкой, удобно представить в виде

$$\mathbf{H}' = \alpha' \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}'' = \alpha'' \mathbf{H}, \quad (10.53)$$

где  $\alpha'$  и  $\alpha''$  — некоторые тензоры. Напомним, что именно такую форму имеют решения (8.50), (8.51), (8.54), (8.56). Поскольку  $\mathbf{m}'' \mathbf{H}'' = 0$ , то по аналогии с (27.91) будем искать оператор  $\alpha''$  в виде

$$\alpha'' = -\mathbf{m}'' \times \mathbf{x} \times, \quad \mathbf{x} \mathbf{a} = 0. \quad (10.54)$$

Таким образом, должно выполняться условие (см. (10.48))

$$A'' \mathbf{a} + B'' [\mathbf{m}'' \mathbf{a}] = -\mathbf{m}'' \times \mathbf{x} \times (\mathbf{A} \mathbf{a} + B [\mathbf{m} \mathbf{a}]). \quad (10.55)$$

Поскольку

$$[\mathbf{m}'' [\mathbf{x} \mathbf{a}]] = -\mathbf{m}'' \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}, \quad [\mathbf{x} [\mathbf{m} \mathbf{a}]] = -\mathbf{m} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a},$$

то условие (10.55) принимает вид

$$A'' \mathbf{a} + B'' [\mathbf{m}'' \mathbf{a}] = A \mathbf{m}'' \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + B \mathbf{m} \mathbf{x} \cdot [\mathbf{m}'' \mathbf{a}],$$

отсюда следует

$$\mathbf{m}'' \mathbf{x} = \frac{A''}{A} = \frac{4\zeta\zeta_1}{\Delta_\zeta}, \quad \mathbf{m} \mathbf{x} = \frac{B''}{B} = \frac{4\eta\eta_1}{\Delta_\eta}. \quad (10.56)$$

Вместе с условием  $\mathbf{a} \mathbf{x} = 0$  эти соотношения дают результаты скалярного умножения неизвестного вектора  $\mathbf{x}$  на три линейно независимых вектора  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m}''$  и  $\mathbf{a}$ . Как известно (см. (27.85)), при задании равенств

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{x} = b_1, \quad \mathbf{a}_2 \mathbf{x} = b_2, \quad \mathbf{a}_3 \mathbf{x} = b_3$$

вектор  $\mathbf{x}$  имеет вид

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]} (b_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] + b_2 [\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1] + b_3 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]). \quad (10.56a)$$

С помощью этой формулы находим из (10.56), (10.54)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= -\frac{1}{[\mathbf{m} \mathbf{m}''] \mathbf{a}} \left( \frac{A''}{A} [\mathbf{m} \mathbf{a}] - \frac{B''}{B} [\mathbf{m}'' \mathbf{a}] \right) = \\ &= \frac{4}{[\mathbf{m} \mathbf{m}''] \mathbf{a}} \left( \frac{\eta\eta_1}{\Delta_\eta} [\mathbf{m}'' \mathbf{a}] - \frac{\zeta\zeta_1}{\Delta_\zeta} [\mathbf{m} \mathbf{a}] \right). \end{aligned} \quad (10.57)$$

Совершенно аналогичным путем из условий

$$\mathbf{H}' = A' \mathbf{a} + B' [\mathbf{m}' \mathbf{a}] = -\mathbf{m}' \times \mathbf{y} \times (\mathbf{A} \mathbf{a} + B [\mathbf{m} \mathbf{a}]), \quad \mathbf{y} \mathbf{a} = 0, \quad (10.58)$$

находим вектор  $y$ , для чего достаточно в (10.57) заменить  $A''$ ,  $B''$ ,  $m''$  на  $A'$ ,  $B'$ ,  $m'$  (см. (10.43), (10.47)):

$$y = -\frac{1}{[mm']a} \left( \frac{A'}{A} [ma] - \frac{B'}{B} [m'a] \right), \quad \alpha' = -m' \times y \times. \quad (10.59)$$

Возвращаемся теперь к общему случаю наклонного падения света на анизотропную пластинку. Из уравнений (10.35) находим  $H'$  и  $H''$  и подставляем в уравнения (10.36), которые принимают форму

$$[q, A_1 f_1 + A_2 f_2 + A'_1 f'_1 + A'_2 f'_2] = [qf], \quad (10.60)$$

$$[q, A_1 e^{-i\delta_1} g_1 + A_2 e^{-i\delta_2} g_2 + A'_1 e^{-i\delta'_1} g'_1 + A'_2 e^{-i\delta'_2} g'_2] = 0, \quad (10.61)$$

где

$$\begin{aligned} f &= [p - p', H], & f_1 &= [p_1 - p'_1, h_1], & f_2 &= [p_2 - p'_2, h_2], \\ f'_1 &= [p'_1 - p', h'_1], & f'_2 &= [p'_2 - p', h'_2], \\ g_1 &= [p_1 - p'', h_1], & g_2 &= [p_2 - p'', h_2], \\ g'_1 &= [p'_1 - p'', h'_1], & g'_2 &= [p'_2 - p'', h'_2]. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Умножая каждое из этих векторных уравнений на  $a$  и  $b$ , получаем четыре скалярных уравнения для коэффициентов  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A'_1$ ,  $A'_2$ . Однако удобнее поступить следующим образом. Умножая уравнение (10.61) скалярно на векторы  $g'_2$  и  $g'_1$ , находим  $A'_1$  и  $A'_2$ :

$$A'_1 = \alpha_1 A_1 + \beta_1 A_2, \quad A'_2 = \alpha_2 A_1 + \beta_2 A_2, \quad (10.63)$$

причем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{\Delta} e^{-i(\delta_1 - \delta'_1)} q [g_1 g'_2], \\ \beta_1 &= -\frac{1}{\Delta} e^{-i(\delta_2 - \delta'_1)} q [g_2 g'_2], \end{aligned} \quad (10.64)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Delta} e^{-i(\delta_1 - \delta'_2)} q [g_1 g'_1], \quad \beta_2 = \frac{1}{\Delta} e^{-i(\delta_2 - \delta'_2)} q [g_2 g'_1], \quad (10.65)$$

$$\Delta = q [g'_1 g'_2].$$

Подставив эти значения в (10.60), получим уравнение

$$[q, A_1 (f_1 + \alpha_1 f'_1 + \alpha_2 f'_2) + A_2 (f_2 + \beta_1 f'_1 + \beta_2 f'_2)] = [qf]. \quad (10.66)$$

После скалярного умножения на векторы, стоящие при  $A_1$  и  $A_2$ , находим отсюда

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_1} \mathbf{q} [\mathbf{f}, \mathbf{f}_2 + \beta_1 \mathbf{f}'_1 + \beta_2 \mathbf{f}'_2],$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta_1} \mathbf{q} [\mathbf{f}, \mathbf{f}_1 + \alpha_1 \mathbf{f}'_1 + \alpha_2 \mathbf{f}'_2],$$

$$\Delta_1 = \mathbf{q} [\mathbf{f}_1 + \alpha_1 \mathbf{f}'_1 + \alpha_2 \mathbf{f}'_2, \mathbf{f}_2 + \beta_1 \mathbf{f}'_1 + \beta_2 \mathbf{f}'_2] = \quad (10.67)$$

$$= \mathbf{q} [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 + \beta_1 \mathbf{f}'_1 + \beta_2 \mathbf{f}'_2] - \mathbf{q} [\mathbf{f}_2, \alpha_1 \mathbf{f}'_1 + \alpha_2 \mathbf{f}'_2] +$$

$$+ (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \mathbf{q} [\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2].$$

Зная  $A_1, A_2$ , находим из (10.63)—(10.65)  $A'_1, A'_2$  и после этого с помощью (10.35) определяем поля отраженной и прошедшей через пластинку волн

$$\mathbf{H}' = A_1 \mathbf{h}_1 + A_2 \mathbf{h}_2 + A'_1 \mathbf{h}'_1 + A'_2 \mathbf{h}'_2 - \mathbf{H}, \quad (10.68)$$

$$\mathbf{H}'' = A_1 e^{-i\delta_1} \mathbf{h}_1 + A_2 e^{-i\delta_2} \mathbf{h}_2 + A'_1 e^{-i\delta'_1} \mathbf{h}'_1 + A'_2 e^{-i\delta'_2} \mathbf{h}'_2. \quad (10.69)$$

Тем самым задача решается до конца в самом общем случае пластинки из любого немагнитного кристалла.

Нетрудно проверить, что из соотношений (10.62) — (10.69), как частные случаи, получаются формулы (10.18) — (10.23) для нормального падения на пластинку из произвольного немагнитного кристалла и формулы (10.43), (10.47), (10.48) для наклонного падения на изотропную пластинку. Чтобы получить в явном виде окончательные выражения (10.68), (10.69) для самого общего случая наклонного падения на произвольную кристаллическую пластинку, необходимо выполнить несколько громоздкие вычисления. Это естественно, если учесть большую сложность столь общей задачи. Однако на практике обычно представляют интерес различные частные случаи, связанные со специальной ориентацией пластинки. Во всяком случае ковариантные формулы (10.62) — (10.69) позволяют получить искомый результат, по-видимому, кратчайшим путем.

В заключение данного параграфа рассмотрим некоторые общие закономерности, справедливые для прошедших и отраженных волн при наклонном падении на пластинку из произвольного немагнитного (негиротропного) кристалла. При этом мы предполагаем, что обе среды, окаймляющие пластинку, являются изотропными и прозрачными и все волны (кроме волн внутри пластинки) являются однородными.

Первая из этих закономерностей имеет геометрический характер и в известной мере аналогична геометрическим зако-

нам отражения и преломления на границе двух сред. Эта закономерность обусловлена тем, что, согласно § 8, вектор рефракции любой волны на границе двух сред определяется вектором  $\mathbf{b}$ , т. е. своей проекцией на границу раздела. Если пластинка является поглощающей, то при наклонном падении в ней обязательно возникает неоднородная волна с нелинейным комплексным вектором рефракции. Однако, несмотря на это, вытекающий из общих граничных условий закон (8.8), согласно которому вектор  $\mathbf{a} = [\mathbf{m}\mathbf{q}]$ , одинаков для всех волн (включая падающую), возникающих на границе, всегда сохраняет силу. Поэтому, если падающая волна имеет вещественный вектор рефракции  $\mathbf{m}$ , что было оговорено выше, то вектор  $\mathbf{a}$  будет вещественным для всех волн, а вместе с ним будет вещественным и вектор  $\mathbf{b} = [\mathbf{q}\mathbf{a}]$ , равный общей проекции всех векторов рефракции  $\mathbf{m}_k = \mathbf{b} + \eta_k \mathbf{q}$  на плоскость раздела. Для плоскопараллельной пластинки вектор нормали  $\mathbf{q}$  один и тот же для обеих граней, поэтому и  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  будут одинаковы для всех волн на обеих гранях. Отсюда, в частности, вытекают свойства:

а) каков бы ни был материал, толщина и ориентация однородной плоскопараллельной пластинки, угол отражения света равен углу падения;

б) независимо от материала, толщины и ориентации пластинки нормаль прошедшей волны будет направлена так же, как если бы пластинки не было и ограничивающие ее изотропные среды непосредственно соприкасались.

Другая закономерность относится к поляризации волн, прошедших пластинку и отраженных ею. Из линейности уравнений Максвелла и граничных условий следует, что поле отраженной и прошедшей волн линейно выражается через поле падающей волны:

$$\mathbf{H}' = \alpha' \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}'' = \alpha'' \mathbf{H}, \quad (10.70)$$

где  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  — некоторые  $3 \times 3$  тензоры. Поскольку  $\mathbf{n}\mathbf{H} = \mathbf{n}'\mathbf{H}' = \mathbf{n}''\mathbf{H}'' = 0$ , то можно написать

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= C_1 \mathbf{a} + C_2 [\mathbf{n}\mathbf{a}], & \mathbf{H}' &= C_1' \mathbf{a} + C_2' [\mathbf{n}'\mathbf{a}], \\ \mathbf{H}'' &= C_1'' \mathbf{a} + C_2'' [\mathbf{n}''\mathbf{a}]. \end{aligned} \quad (10.71)$$

Это есть не что иное, как обычное разложение падающей, отраженной и прошедшей волн на составляющие, лежащие в плоскости падения и перпендикулярные к ней. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} C_1' \mathbf{a} + C_2' [\mathbf{n}'\mathbf{a}] &= \alpha' (C_1 \mathbf{a} + C_2 [\mathbf{n}\mathbf{a}]), \\ C_1'' \mathbf{a} + C_2'' [\mathbf{n}''\mathbf{a}] &= \alpha'' (C_1 \mathbf{a} + C_2 [\mathbf{n}\mathbf{a}]). \end{aligned} \quad (10.72)$$

Умножая первое уравнение на  $\mathbf{a}$  и  $[\mathbf{n}'\mathbf{a}]$ , а второе на  $\mathbf{a}$  и  $[\mathbf{n}''\mathbf{a}]$ , получаем

$$C' = A'C, C'' = A''C, \quad (10.73)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix}, C'' = \begin{pmatrix} C''_1 \\ C''_2 \end{pmatrix}, \quad (10.74)$$

$$A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a}'\mathbf{a} & \mathbf{a}\mathbf{a}'[\mathbf{n}\mathbf{a}] \\ [\mathbf{n}'\mathbf{a}]\mathbf{a}'\mathbf{a} & [\mathbf{n}'\mathbf{a}]\mathbf{a}'[\mathbf{n}\mathbf{a}] \end{pmatrix}, \quad (10.75)$$

$$A'' = \begin{pmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a}''\mathbf{a} & \mathbf{a}\mathbf{a}''[\mathbf{n}\mathbf{a}] \\ [\mathbf{n}''\mathbf{a}]\mathbf{a}''\mathbf{a} & [\mathbf{n}''\mathbf{a}]\mathbf{a}''[\mathbf{n}\mathbf{a}] \end{pmatrix}. \quad (10.76)$$

Двумерные матрицы  $A'$ ,  $A''$  являются комплексными, даже если пластинки прозрачны (см. (10.25), (10.26)). Они, как и любые квадратные матрицы вообще, обладают собственными векторами. Пусть, например,  $C_0$  — собственный вектор матрицы  $A'$ :  $A'C_0 = \lambda C_0$ . Согласно (10.74),

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix}.$$

Задание этого двумерного вектора, как следует из (10.71) и § 2, определяет поляризацию падающей волны. Последняя задается отношением  $C_1^0/C_2^0$ . Первое из уравнений (10.73) приводится в этом случае к виду

$$C' = A'C_0 = \lambda C_0.$$

Но отсюда следует, что отношение компонент вектора  $C'$  для отраженной волны будет таким же, как для падающей волны, т. е. при такой поляризации падающей волны отраженная волна будет иметь ту же поляризацию.

Таким образом, мы приходим к выводу, что для любой пластинки существует такая поляризация падающей волны, что ей соответствует отраженная волна с точно такой же поляризацией\*). Поскольку двумерная матрица обычно обладает двумя независимыми собственными векторами, то на самом деле для любой пластинки при падении света под любым углом существует два таких различных состояния поляризации падающей волны, что отраженная волна имеет ту же поляризацию. Мы назовем эти состояния поляризации *собственными состояниями поляризации пластинки для отражения*.

\*) В том смысле, что  $C'_1/C'_2 = C_1^0/C_2^0$ .

Повторив дословно те же рассуждения для матрицы  $A''$  и второго уравнения (10.73), придем к аналогичному выводу, что для любой пластинки существуют два таких состояния поляризации падающей волны, что прошедшая волна будет иметь ту же поляризацию. Эти состояния назовем *собственными состояниями поляризации пластинки для прохождения*.

Поскольку матрицы  $A'$ ,  $A''$  различны, то собственные состояния поляризации пластинки для прохождения в общем случае отличаются от таковых для отражения. Кроме того, поскольку матрицы  $A'$ ,  $A''$ , вообще говоря, несимметричны, неэрмитовы и т. д., то о соотношении двух собственных состояний поляризации для прохождения (как и для отражения) в общем случае ничего сказать нельзя. Однако, например, для изотропной пластинки собственные состояния поляризации для отражения совпадают с таковыми для прохождения. Это будут состояния линейной поляризации перпендикулярно плоскости падения и параллельно ей (см. (10.43), (10.47), (10.48)). Аналогично будет обстоять дело, если плоскость падения параллельна плоскости симметрии кристалла, из которого вырезана пластинка.

Рассмотрим теперь прохождение электромагнитных волн при нормальном падении через плоскопараллельную кристаллическую пластинку, вырезанную из кристалла так, что круговая ось перпендикулярна к пластинке. В соответствии с соотношениями (7.76), (7.77), (7.79б, в), (9.99) в этом случае будем иметь:

а) на первой грани пластинки ( $\xi=0$ ):  
падающая волна

$$\mathbf{H} = A\mathbf{e} + B\mathbf{e}^*, \quad \mathbf{E} = \frac{i}{n}(A\mathbf{e} - B\mathbf{e}^*);$$

отраженная волна

$$\mathbf{H}' = A'\mathbf{e} + B'\mathbf{e}^*, \quad \mathbf{E}' = -\frac{i}{n}(A'\mathbf{e} - B'\mathbf{e}^*);$$

преломленная волна

$$\mathbf{H}_{d1} = f_1^0\mathbf{e} + f_2^0\mathbf{e}^*, \quad \mathbf{E}_{d1} = in' [(f_1^0 + gf_2^0)\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e} - f_2^0\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}^*];$$

отраженная от второй грани пластинки волна

$$\mathbf{H}_{r1} = f_1^{0'}\mathbf{e} + f_2^{0'}\mathbf{e}^*, \quad \mathbf{E}_{r1} = -in' [(f_1^{0'} + gf_2^{0'})\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e} + f_2^{0'}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}^*].$$

б) на второй грани пластинки ( $\xi = kd$ ;  $d$  — толщина пластинки):

падающая волна

$$\mathbf{H}_{d2} = e^{-in'\zeta} [(f_1^0 - ikgf_2^0\zeta) \mathbf{e} + f_2^0 \mathbf{e}^*],$$

$$\mathbf{E}_{d2} = in' e^{-in'\zeta} [(f_1^0 + gf_2^0 - in'\zeta gf_2^0) \varepsilon^{-1} \mathbf{e} - f_2^0 \varepsilon^{-1} \mathbf{e}^*].$$

При написании выражений для волны, отраженной от нижней грани, следует учесть одно важное обстоятельство. Как показано в § 7 (см. [4, 5]), круговые оси в поглощающих кристаллах обладают тем свойством, что если волна, распространяющаяся вдоль нее в одном направлении, является правой круговой, то в противоположном направлении будет распространяться левая круговая волна. Поэтому выражения для  $\mathbf{H}_{r2}$ ,  $\mathbf{E}_{r2}$  с учетом того, что  $\mathbf{e} = i[\mathbf{ne}]$ , необходимо брать в виде

$$\mathbf{H}_{r2} = e^{in'\zeta} [(f_1^{0'} + ikgf_2^{0'}) \mathbf{e} + f_2^{0'} \mathbf{e}^*],$$

$$\mathbf{E}_{r2} = -in' e^{in'\zeta} [(f_1^{0'} + gf_2^{0'} + in'gf_2^{0'}\zeta) \varepsilon^{-1} \mathbf{e} - f_2^{0'} \varepsilon^{-1} \mathbf{e}^*].$$

Наконец, преломленная (т. е. вышедшая из пластинки) волна будет иметь следующие векторы поля \*):

$$\mathbf{H}'' = A'' \mathbf{e} + B'' \mathbf{e}^*, \quad \mathbf{E}'' = \frac{i}{n} (A'' \mathbf{e} - B'' \mathbf{e}^*).$$

Подставляя эти соотношения в граничные условия для обеих граней пластинки и умножая затем скалярно на  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}^*$ , получаем систему уравнений:

$$A + A' - f_1^0 - f_1^{0'} = 0, \quad B + B' - f_2^0 - f_2^{0'} = 0,$$

$$n' (A - A') - n (f_1^0 - gf_2^0) + n (f_1^{0'} - gf_2^{0'}) = 0,$$

$$n' (B - B') - n (f_2^0 - f_2^{0'}) = 0,$$

$$e^{-in'\zeta} (f_1^0 - in'gf_2^0\zeta) + e^{in'\zeta} (f_1^{0'} + in'gf_2^{0'}\zeta) - A'' = 0, \quad (10.77)$$

$$e^{-in'\zeta} f_2^0 + e^{in'\zeta} f_2^{0'} - B'' = 0,$$

$$ne^{-in'\zeta} (f_1^0 - in'gf_2^0\zeta - gf_2^0) - ne^{in'\zeta} (f_1^{0'} + in'gf_2^{0'}\zeta - gf_2^{0'}) - n' A'' = 0,$$

$$n (e^{-in'\zeta} f_2^0 - e^{in'\zeta} f_2^{0'}) - n' B'' = 0.$$

\*) Мы предполагаем, что по обе стороны пластинки находится одна и та же среда с показателем преломления  $n$ ;  $n'$  — показатель преломления пластинки для волн, распространяющихся вдоль круговой оптической оси, перпендикулярной к пластинке.



Решая эту систему относительно неизвестных амплитуд отраженной ( $A'$ ,  $B'$ ) и прошедшей сквозь пластинку ( $A''$ ,  $B''$ ) волн, получаем соответственно

$$B' = \frac{1}{\Delta} (n'^2 - n^2)(1 - e^{-2in'\zeta}) B,$$

$$\Delta_{\pm} = (n + n')^2 \pm (n - n')^2 e^{-2in'\zeta}, \quad (10.78)$$

$$A' = \frac{1}{\Delta_-} (n'^2 - n^2)(1 - e^{-2in'\zeta}) A + 2 \frac{nn'g}{\Delta_-^2} [\Delta_+ (1 - e^{-2in'\zeta}) + 4in'\zeta (n'^2 - n^2) e^{-2in'\zeta}] B, \quad (10.79)$$

$$B'' = \frac{4nn'}{\Delta_-} e^{-in'\zeta} B, \quad (10.80)$$

$$A'' = 4 \frac{nn'}{\Delta_-} e^{-in'\zeta} A - 4 \frac{nn'g}{\Delta_-^2} e^{-in'\zeta} [(n'^2 - n^2)(1 - e^{-2in'\zeta}) + in'\zeta \Delta_+] B. \quad (10.81)$$

Соотношения (10.78) — (10.81) дают полное решение задачи об отражении и прохождении света через пластинку из произвольного поглощающего кристалла, плоскость которой перпендикулярна круговой оптической оси. Из этих выражений при  $g=0$  получаются обычные соотношения для амплитуд отраженной и прошедшей волн. При  $\zeta = \infty$ , т. е. когда пластинка имеет бесконечную толщину, из (10.78), (10.79) получаются соотношения, совпадающие с (9.101).

Аналогично случаю полубесконечной среды (§ 9) из (10.78) — (10.81) замечаем, что при  $B=0$  имеют место равенства

$$A' = \frac{1}{\Delta_-} (n'^2 - n^2)(1 - e^{-2in'\zeta}) A, \quad B' = 0, \quad (10.82)$$

$$A'' = 4 \frac{nn'}{\Delta_-} e^{-in'\zeta} A, \quad B'' = 0.$$

Это означает, что если на пластинку падает волна правой круговой поляризации в направлении правой круговой оси, то проходит сквозь пластинку только одна волна с той же поляризацией. Отраженная волна также будет поляризованной по кругу, причем направление вращения векторов поля остается тем же, что и в падающей волне. Однако поскольку отраженная волна распространяется в обратном направлении, то, согласно обычному определению, по отношению к своему вектору волновой нормали она будет волной с левой круговой поля-

ризацией. Амплитуды отраженной и прошедшей волн определяются теми же соотношениями, что и для чисто экспоненциальных волн. Это вполне понятно, так как в пластинке в этом случае распространяется одна круговая волна с обычной экспоненциальной зависимостью от координат. Если же на пластинку падает волна левой круговой либо произвольной поляризации, то в пластинке возникает волна, определяемая соотношениями (7.76), (7.77) и (7.79в), а отражение и прохождение света сквозь нее определяется общими формулами (10.78)—(10.81).

Таким образом, пластинки, вырезанные перпендикулярно круговым осям поглощающих кристаллов, обладают рядом специфических особенностей. Отличие от пластинок, перпендикулярных любому другому направлению, заключается прежде всего в том, что такие пластинки не изменяют правой (левой) круговой поляризации падающей волны, какова бы ни была ее толщина. В то же время при падении волны любой другой поляризации будет наблюдаться зависимость поляризации прошедшей волны от толщины пластинки. Далее, если направить свет на пластинку с обратной стороны, то правая и левая круговая поляризации поменяются ролями. Очевидно, указанные свойства могут быть использованы для определения направления и характера круговых осей в кристаллах.

Источники света, как правило, испускают естественный, неполяризованный свет. Поляризованный свет получают, заставляя луч естественного света определенным образом взаимодействовать со средой. Так, в результате отражения от прозрачной изотропной среды луча естественного света, падающего под углом Брюстера, получают линейно поляризованный свет. Гораздо более удобным средством получения линейной поляризованного света является известная призма Николя. Эта призма, как и другие аналогичные поляризаторы, основана на свойстве линейного двойного лучепреломления прозрачных кристаллов. Задача сводится лишь к тому, чтобы тем или другим способом выделить один из двух линейно поляризованных лучей, распространяющихся в таких кристаллах. В качестве поляризаторов могут быть использованы также поглощающие дихроичные кристаллы. Свойство дихроизма (см. § 7) заключается в различии коэффициентов поглощения двух поляризованных изонормальных волн, распространяющихся в поглощающих кристаллах. Если эти коэффициенты различаются в достаточной степени, то та из двух изонормальных волн, которая сильнее поглощается, почти не выходит за пределы пластинки кристалла с надлежаще выбранной толщиной. В результате из кристалла выходит практически только одна волна, обладающая меньшим поглощением, которая имеет определенную поляризацию.

В принципе любой кристалл благодаря наличию двойного преломления может служить для получения поляризованного света. Действительно, при преломлении падающего на его поверхность ограниченного по сечению светового пучка (см. рис. 8.1) возникают два луча, которые при достаточной толщине кристалла, выходя из него, пространственно разделяются (рис. 10.3). Каждый из вышедших лучей *A*, *B* будет обладать

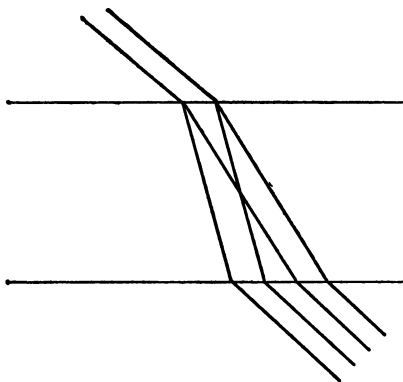


Рис. 10.3

определенной поляризацией, зависящей от свойств кристалла. Однако описанный простейший способ обычно не может быть реализован, так как расхождение преломленных лучей весьма мало и для получения двух разделенных лучей потребовался бы кристалл слишком большой толщины. Даже если бы такой кристалл был найден, соответствующее поляризационное устройство было бы весьма громоздким и неудобным. Поэтому в по-

ляризационных призмах используются лишь кристаллы с большой анизотропией (например, кальцит).

Итак, основным методом получения поляризованного света является пропускание светового луча через анизотропную среду. На этом основаны разнообразные типы поляризаторов, которые могут использоваться также в качестве анализаторов, т. е. приборов, служащих для определения степени и характера поляризации заданного светового пучка. Отсюда очевидно, что вопрос о воздействии анизотропных сред на свойства проходящего через них света имеет фундаментальное значение для всей оптики.

Характерной чертой анизотропных сред в отличие от изотропных является то, что в них при заданном векторе рефракции  $m$  (вещественном, комплексном, линейном или нелинейном) могут распространяться лишь такие плоские волны, которые обладают вполне определенным состоянием поляризации. При этом в процессе распространения волны внутри однородного кристалла это состояние поляризации остается неизменным, хотя волна может изменять свою интенсивность (например, вследствие поглощения).

Нетрудно определить в самом общем случае состояния поляризации, которые можно назвать характеристическими, нормальными или собственными состояниями поляризации заданного кристалла. Как показано в предыдущих параграфах (см.

(3.3), (3.4), (4.5), (4.6)), уравнение для поля  $\mathbf{E}$  плоских волн, распространяющихся в любом кристалле, имеет вид

$$A(\mathbf{m})\mathbf{E} = 0, \quad (10.83)$$

где  $A(\mathbf{m})$  — некоторый тензор, зависящий, помимо вектора рефракции  $\mathbf{m}$ , также от электрических и магнитных характеристик кристалла (например,  $A(\mathbf{m}) = 1 + \varepsilon^{-1}\mathbf{m}\times^2$  (3.3) и т. д.). Условие для нетривиальных решений уравнения (10.83) имеет вид  $|A| = 0$ . В случае линейного вектора рефракции имеем  $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$ , причем заданной волновой нормали  $\mathbf{n}$  соответствуют два вектора:  $\mathbf{m}_1 = n_1\mathbf{n}$  и  $\mathbf{m}_2 = n_2\mathbf{n}$ . В случае нелинейного вектора рефракции его значения  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  находятся из уравнения нормалей с учетом граничных условий (см. § 8). Пусть  $\bar{A}(\mathbf{m}_1) \neq 0$ ,  $\bar{A}(\mathbf{m}_2) \neq 0$ . Тогда из уравнений  $A(\mathbf{m}_1)\bar{A}(\mathbf{m}_1) = |A(\mathbf{m}_1)| = 0$ ,  $A(\mathbf{m}_2)\bar{A}(\mathbf{m}_2) = 0$  следует, что столбцы матриц  $\bar{A}(\mathbf{m}_1)$  и  $\bar{A}(\mathbf{m}_2)$  соответственно пропорциональны векторам  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ , являющимся решениями уравнений (см. (10.83))  $A(\mathbf{m}_1)\mathbf{E}_1 = 0$ ,  $A(\mathbf{m}_2)\mathbf{E}_2 = 0$ .

Согласно (26.77), для любых трехмерных матриц, вещественных или комплексных, справедливо соотношение

$$\bar{A} - \bar{A}_t = A(A - A_t). \quad (10.84)$$

Считая  $A = A(\mathbf{m})$ ,  $|A| = 0$ ,  $\bar{A} \neq 0$ , получаем после умножения на  $\bar{A}$

$$\bar{A}^2 = A_t \bar{A}. \quad (10.85)$$

Пусть  $\bar{A}_t \neq 0$ , тогда можно ввести матрицу

$$\gamma = \bar{A}/\bar{A}_t, \quad (10.86)$$

для которой вследствие (10.85) будет иметь место равенство

$$\gamma^2 = \gamma. \quad (10.87)$$

Матрицы, обладающие этим свойством (см. § 25), являются проективными.

В нашем случае матрица  $\gamma$  (10.86), действуя на любой вектор  $\mathbf{d}$ , будет выделять из него часть, являющуюся решением уравнения (10.83)  $A\mathbf{E} = 0$ . Согласно (10.86),  $\gamma_t = 1$ , следовательно (см. (26.70)), при условиях

$$|A| = 0, \quad \bar{A}_t \neq 0 \quad (10.88)$$

матрица  $\gamma$  (10.86) будет проективным оператором, выделяющим при действии на произвольный вектор  $\mathbf{d}$  ( $\gamma\mathbf{d} \neq 0$ ) соответствующее единственное (с точностью до произвольного множителя) решение уравнения  $A\mathbf{E} = 0$ . Если условие  $\bar{A}_t \neq 0$

выполняется для  $A_1 = A(\mathbf{m}_1)$  и  $A_2 = A(\mathbf{m}_2)$ , то соответствующие проективные операторы

$$\gamma_1 = \bar{A}_1 / \bar{A}_{1t}, \quad \gamma_2 = \bar{A}_2 / \bar{A}_{2t} \quad (10.89)$$

будут однозначно определять поляризации обеих волн, отвечающих векторам рефракции  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  (поскольку поляризация не меняется при умножении вектора  $\mathbf{E}$  на любой скалярный множитель (см. § 2)).

Таким образом, зная вектор рефракции  $\mathbf{m}$ , мы сразу можем написать выражение для поля  $\mathbf{E}$  соответствующей ему волны в кристалле

$$\mathbf{E} = C\gamma(\mathbf{m})\mathbf{d}, \quad \gamma(\mathbf{m}) = \bar{A}(\mathbf{m})/\bar{A}_t(\mathbf{m}), \quad (10.90)$$

где  $\mathbf{d}$  произвольный вектор (при условии  $\gamma(\mathbf{m})\mathbf{d} \neq 0$ ), а  $C$  — некоторое комплексное число. Разумеется, тем же способом можно получить и выражение для вектора  $\mathbf{H}$ . В случае немагнитных кристаллов при этом для матрицы  $A$  нужно будет использовать выражение (см. (3.4), (4.6))  $A = 1 + \mathbf{m} \times \mathbf{e}^{-1} \mathbf{m} \times$  и магнитное поле  $\mathbf{H}$  будет получаться с помощью этой же формулы (10.90). Аналогично могут быть найдены векторы индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ .

При прохождении через плоскопараллельную пластинку все векторы электромагнитного поля волны испытывают изменение. Поскольку уравнения Максвелла и граничные условия линейны, то это изменение имеет характер *линейного преобразования* соответствующего вектора волны. Поэтому изменившийся после прохождения вектор (например,  $\mathbf{H}'$ ) можно представить как результат действия на первоначальный вектор  $\mathbf{H}$  некоторого линейного оператора, т. е. матрицы (ср. § 8):

$$\mathbf{H}' = \beta \mathbf{H}. \quad (10.91)$$

Вследствие линейности этой связи тензор  $\beta$  не зависит от  $\mathbf{H}$  или  $\mathbf{H}'$  и является функцией только характеристик вещества, из которого изготовлены пластинки, ее ориентации и толщины. Очевидно, оператор  $\beta$  полностью определяет действие пластинки на электромагнитную волну произвольной поляризации и интенсивности с заданным вектором нормали  $\mathbf{n}$ .

Разумеется, оператор  $\beta$  может быть найден в результате строгого решения граничной задачи для пластинки (см. § 9). Мы ограничимся нормальным падением и будем рассматривать только прошедшую волну. Оба эти ограничения относятся к случаям, представляющим наибольший практический интерес. Хотя общее точное решение (10.21)—(10.23) для нормального падения не слишком сложно, однако широкое распространение получил упрощенный приближенный метод определения свойств света, прошедшего плоскопараллельную

пластинку по нормали. При использовании этого метода вместо точного решения граничной задачи учитывают лишь разность фаз двух изонормальных волн, на которые расщепляется падающая нормально волна внутри кристаллической пластинки. Так как скорости этих волн различны, то они подходят к нижней грани с некоторой разностью фаз, поэтому их суперпозиция на выходе из пластинки дает волну с поляризацией, отличающейся от поляризации падающей волны. В случае поглощающего кристалла необходимо учитывать также различие в затухании обеих изонормальных волн, проходящих пластинку.

При таком подходе не учитываются отражения волн на обеих гранях пластинки, которые приводят к дополнительному относительному различию амплитуд и фаз обеих волн на выходе из пластинки, поскольку они отражаются неодинаково.

Исходя из описанного приближенного метода, не представляет никакого труда сразу написать результат действия пластинки на проходящую через нее по нормали световую волну для самого общего случая поляризации падающего света. Пусть  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  — векторы поляризации обеих изонормальных волн, распространяющихся в направлении нормали к пластинке (совпадающей с волновой нормалью  $\mathbf{n}$ ). Вектор  $\mathbf{H}$  магнитного поля падающей нормально на пластинку волны может быть разложен по векторам  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  (см. (10.23)):

$$\mathbf{H} = C_1 \mathbf{h}_1 + C_2 \mathbf{h}_2. \quad (10.92)$$

На нижней грани пластинки волны  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$  приобретают фазовые множители  $e^{-i\delta_1}, e^{-i\delta_2}$ , где  $\delta_1 = k_0 n_1 d$ ,  $\delta_2 = k_0 n_2 d$ ,  $d$  — толщина пластинки,  $n_1, n_2$  — показатели преломления волн  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  (комплексные в общем случае). В результате для поля на выходе из пластинки получим выражение

$$\mathbf{H}'' = C_1 e^{-i\delta_1} \mathbf{h}_1 + C_2 e^{-i\delta_2} \mathbf{h}_2, \quad (10.93)$$

которое и дает окончательное решение задачи в данном приближенном подходе. Точное выражение для магнитного поля прошедшей волны, согласно (10.23), (10.21), гораздо более сложное:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'' = & \frac{4n_1 n'' C_1 \mathbf{h}_1}{(n + n_1)(n'' + n_1) e^{i\delta_1} - (n - n_1)(n'' - n_1) e^{-i\delta_1}} + \\ & + \frac{4n_2 n'' C_2 \mathbf{h}_2}{(n + n_2)(n'' + n_2) e^{i\delta_2} - (n - n_2)(n'' - n_2) e^{-i\delta_2}}. \quad (10.94) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что выражение (10.93) можно формально получить из (10.94), если в первом члене положить  $n = n'' = n$ , а во втором  $n = n'' = n_2$ . Очевидно, приближение, которому

отвечает формула (10.93), будет тем грубее, чем больше различаются между собой входящие в (10.94) показатели преломления  $n, n'', n_1, n_2$ . Более точно оценить степень приближения в формуле (10.93) можно, переписав выражение (10.94) в виде

$$\mathbf{H}'' = \xi_1 C_1 e^{-i\delta_1} \mathbf{h}_1 + \xi_2 C_2 e^{-i\delta_2} \mathbf{h}_2, \quad (10.95)$$

где

$$\xi_1 = \frac{4n_1 n''}{(n + n_1)(n'' + n_1) - (n - n_1)(n'' - n_1) e^{-2i\delta_1}}, \quad (10.96)$$

$$\xi_2 = \frac{4n_2 n''}{(n + n_2)(n'' + n_2) - (n - n_2)(n'' - n_2) e^{-2i\delta_2}}.$$

Формула (10.93) получилась бы при  $\xi_1 = \xi_2 = 1$ . Поскольку  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — комплексные числа, то даже в том случае, когда их модули близки к единице, эти множители могут заметно изменить фазы  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , входящие в (10.93). Таким образом, учет отражений волны на гранях пластинки приводит к дополнительному изменению не только амплитуд, но и фаз обеих волн на выходе по сравнению с формулой (10.93).

Несмотря на это выражение (10.93) для поля волны, прошедшей пластинку, как уже упоминалось, широко употребляется ввиду своей простоты. Нашей ближайшей задачей будет привести его к виду (10.91), т. е. найти оператор  $\beta$  в явном виде. Как было показано выше, аналогично (10.90) мы можем получить векторы, пропорциональные  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$ , соответствующие двум изонормальным волнам в кристаллической пластинке, путем действия на произвольный вектор проективных операторов (см. (10.89))

$$\gamma_1 = \bar{A}_1 / \bar{A}_{1t}, \quad \gamma_2 = \bar{A}_2 / \bar{A}_{2t}, \quad (10.97)$$

$$A_1 = A(n_1, \mathbf{n}), \quad A_2 = A(n_2, \mathbf{n}), \quad A(n, \mathbf{n}) = 1 + n^2 \mathbf{n} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n} \times.$$

Можно показать, что из условий

$$\gamma_1^2 = \gamma_1, \quad \gamma_{1t} = 1 \quad (10.98)$$

следует, что проективный оператор  $\gamma_1$  может быть представлен в виде

$$\gamma_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1, \quad \gamma_{1t} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 = 1, \quad (10.99)$$

где  $\mathbf{a}_1$  — вектор, пропорциональный собственному вектору  $\mathbf{h}_1$ , являющемуся решением уравнения

$$A_1 \mathbf{h}_1 = (1 + n_1^2 \mathbf{n} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n} \times) \mathbf{h}_1 = 0. \quad (10.100)$$

Действительно, в § 26 показано, что если некоторый тензор  $\beta$  обладает свойствами  $|\beta| = 0$ ,  $\bar{\beta} \neq 0$ , то  $\bar{\beta}$  является диадой. По-

сколько  $\gamma_1$  обладает этими свойствами, то выражение (10.99) верно. В силу проективных свойств  $\gamma_1$ , по определению  $\gamma_1 \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \mathbf{x} = C \mathbf{h}_1$ , откуда и следует, что  $\mathbf{a}_1$  пропорционально  $\mathbf{h}_1$ . Согласно (10.97), тензор  $A$  симметричен как в прозрачных, так и в поглощающих кристаллах благодаря симметричности тензора  $\varepsilon$ . Но в таком случае вектор  $\mathbf{b}_1$  также пропорционален  $\mathbf{h}_1$ , следовательно, мы имеем  $\gamma_1 = C_1 \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_1$ . Если нормировать  $\mathbf{h}_1$  согласно условию  $\mathbf{h}_1^2 = 1$ , то из  $\gamma_{1t} = 1$  вытекает  $C_1 = 1$ . Таким образом, можно положить

$$\gamma_1 = \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_1, \quad \gamma_2 = \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_2, \quad \mathbf{h}_1^2 = \mathbf{h}_2^2 = 1. \quad (10.101)$$

Если  $n_1 \neq n_2$ , то  $\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 = 0$ , что является следствием симметрии матрицы  $A$  (10.97). Действительно, уравнения (10.100) для  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$  можно написать в форме

$$\mathbf{n} \times \varepsilon^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{h}_1 = -\frac{1}{n_1^2} \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{n} \times \varepsilon^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{h}_2 = -\frac{1}{n_2^2} \mathbf{h}_2.$$

Умножая первое уравнение на  $\mathbf{h}_2$ , а второе на  $\mathbf{h}_1$  и вычитая, получаем благодаря симметрии тензора  $\varepsilon^{-1}$  и, как следствие, тензора  $\mathbf{n} \times \varepsilon^{-1} \mathbf{n} \times$

$$\left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 = 0,$$

откуда следует упомянутое утверждение. Соотношение  $\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 = 0$  при  $n_1 \neq n_2$  обобщает результат, полученный в § 4 для прозрачных кристаллов. Случай  $n_1 = n_2$  вообще требует особого рассмотрения, поскольку при этом  $\mathbf{h}^2 = 0$  (см. § 7) и нормировка  $\mathbf{h}^2 = 1$  невозможна. При этом также  $\bar{A}_{1t} = 0$ . Этот случай соответствует оптической оси кристалла, изотропной либо круговой.

Итак, за исключением единственного случая, когда нормаль к пластинке  $\mathbf{n}$  (она же фазовая нормаль волны) совпадает с направлением какой-либо из оптических осей кристалла, во всех остальных случаях мы можем построить проективные операторы, выделяющие два состояния поляризации, возможные для волн, проходящих кристаллическую пластинку по нормали. При этом необходимо знать только тензор  $\varepsilon$  для кристалла, из которого вырезана пластинка, ориентацию ее граней и толщину  $d$ . Из этих данных определяются также фазовые сдвиги  $\delta_1 = k_0 n_1 d$  и  $\delta_2 = k_0 n_2 d$  (см. (10.7), (10.22)), которые приобретают обе изонормальных волны, проходя через пластинку. Согласно (10.101), (10.92), с учетом того, что  $\mathbf{h}_1^2 = \mathbf{h}_2^2 = 1$ ,  $\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 = 0$ , имеем

$$\gamma_1 \mathbf{H} = C_1 \mathbf{h}_1, \quad \gamma_2 \mathbf{H} = C_2 \mathbf{h}_2, \quad (10.102)$$



следовательно (см. (10.93)),

$$\mathbf{H}'' = C_1 e^{-i\delta_1} \mathbf{h}_1 + C_2 e^{-i\delta_2} \mathbf{h}_2 = \beta \mathbf{H}, \quad \beta = e^{-i\delta_1} \gamma_1 + e^{-i\delta_2} \gamma_2. \quad (10.103)$$

Таким образом,  $\beta$  (10.103) является линейным оператором пластинки, преобразующим поле падающей волны  $\mathbf{H}$  в поле прошедшей волны  $\mathbf{H}''$  согласно (10.93). Разумеется, этот оператор  $\beta$ , как и формула (10.93), является приближенным. Выражение для точного оператора пластинки можно написать сразу, используя (10.95), (10.96), (10.102):

$$\beta = \xi_1 e^{-i\delta_1} \gamma_1 + \xi_2 e^{-i\delta_2} \gamma_2. \quad (10.104)$$

При определении матриц  $\gamma_1, \gamma_2$  мы исходили из тензора

$$A = 1 + \mathbf{m} \times \varepsilon^{-1} \mathbf{m} \times \quad (10.105)$$

и соотношений (10.88), (10.83). По определению тензор  $A$  и соответственно матрицы  $\gamma_1, \gamma_2, \beta$  заданы в полном трехмерном пространстве. Однако и  $\mathbf{H}$ , и  $\mathbf{H}''$  не выходят из плоскости, перпендикулярной к волновой нормали  $\mathbf{n}$ . Проективные операторы  $\gamma_1, \gamma_2$ , согласно (10.101), также действуют только в этой плоскости, поскольку в ней лежат векторы  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$  (в общем случае комплексные). Поэтому при описании преобразований, осуществляемых плоскопараллельной пластинкой над нормально падающей на нее волной, целесообразно перейти от полного трехмерного пространства к двумерному — фазовой плоскости волны, параллельной граням пластинки. В этом случае  $3 \times 3$ -матрицы  $\gamma_1, \gamma_2, \beta$  (10.101), (10.103), (10.104) можно рассматривать как  $2 \times 2$ -матрицы, определенные в фазовой плоскости. Подчеркнем, что в трехмерном пространстве детерминант матрицы  $\beta$  (10.103), (10.104) всегда равен нулю, так как она представляет собой сумму двух диад:

$$\beta = e^{-i\delta_1} \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_1 + e^{-i\delta_2} \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_2, \quad (10.106)$$

т. е. является планальным тензором (см. § 26). Если же рассматривать  $\beta$  как  $2 \times 2$ -матрицу, то ее детерминант отличен от нуля. Таким образом, в этом случае она является неособенной симметричной комплексной двухрядной квадратной матрицей. Заметим, что, хотя допустимы оба представления — трехмерное и двумерное, первое, естественно, является более общим. В частности, трехмерное представление применимо и при рассмотрении электрического вектора волны  $\mathbf{E}$ , который, как известно (§ 5, 7), внутри пластинки в общем случае не перпендикулярен к направлению волновой нормали  $\mathbf{n}$ , т. е. не лежит в фазовой плоскости. Очевидно, двумерное представление матриц  $\beta$  можно использовать лишь для рассмотрения трансверсальных векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$ .

Оператор пластинки (10.106) или (10.104) пригоден и для определения воздействия, оказываемого пластинкой на частично поляризованный или естественный свет. В этом случае нужно использовать приведенные в § 3 соотношения, относящиеся к тензору пучка. Ввиду того что электрический вектор  $\mathbf{E}$  в кристаллах не является трансверсальным, можно в данном случае модифицировать определение (3.9) тензора пучка и писать его в виде (см. [148])

$$\Phi = \sum_s \mathbf{H}^{(s)} \cdot \mathbf{H}^{(s)*}, \quad \mathbf{nH}^{(s)} = \mathbf{nH}^{(s)*} = 0. \quad (10.107)$$

Мы предполагаем здесь  $\mu=1$ . В таком случае изменение, которое претерпевает тензор пучка после прохождения пластинки, может быть описано с помощью соотношения, аналогичного (3.67):

$$\Phi = \sum_s \mathbf{H}''^{(s)} \cdot \mathbf{H}''^{(s)*} = \beta \Phi \beta^+. \quad (10.108)$$

Все поляризационные характеристики и интенсивность преобразованного пучка могут быть теперь определены с помощью соотношений, приведенных в § 3.

### УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ГИРОТРОПНЫХ СРЕД

#### § 11. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

В 1811 г. Араго обнаружил, что при прохождении линейно поляризованного света через пластинку кварца по направлению его оптической оси плоскость поляризации света испытывает поворот на некоторый угол, величина которого пропорциональна толщине пластинки. Несколько позже Био обнаружил аналогичный эффект в жидкостях и газах. Это явление получило не очень понятное название *оптической активности* или более точно — *оптической вращательной способности*. Используется также термин «гиротропия». Вскоре Френель показал, что такое поведение световой волны может быть объяснено, если предположить, что в среде имеет место *круговое двойное преломление* света.

Действительно, согласно (2.59), всякая линейно поляризованная волна всегда может быть представлена как результат суперпозиции двух циркулярно поляризованных волн с одинаковыми амплитудами и противоположными направлениями обращения. Если эти две волны распространяются с различными фазовыми скоростями, т. е. имеют различные показатели преломления  $n_+$  и  $n_-$  ( $n_+ > n_-$ ), то на прохождении пластинки толщиной  $d$  более медленная волна (например, имеющая скорость  $v_+ = c/n_+ < v_- = c/n_-$ ) затратит больше времени. Запаздывание во времени составит величину

$$\Delta t = d \left( \frac{1}{v_+} - \frac{1}{v_-} \right) = \frac{d}{c} (n_+ - n_-). \quad (11.1)$$

В обеих волнах полный оборот вектора  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{H}$ ) происходит за одно и то же время, равное периоду волны  $T = 2\pi/\omega$ . Поэтому запаздывающая волна подойдет ко второй грани пластинки с вектором  $\mathbf{E}_-$ , повернувшимся на угол больший, чем  $\mathbf{E}_+$ . Разность углов поворота будет равна  $\Delta\chi = \frac{\Delta t}{T} 2\pi = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_+ - n_-)$ , где  $\lambda_0 = cT$  — длина волны света в вакууме.

На второй грани пластинки обе волны, складываясь, снова дадут линейно поляризованную волну, вектор  $\mathbf{E}$  которой будет направлен по биссектрисе угла между  $\mathbf{E}_+$  и  $\mathbf{E}_-$ . Очевидно, что результирующий вектор  $\mathbf{E}$  испытает поворот *в сторону вращения более медленной волны* на угол  $\Delta\chi/2$ , т. е. на угол

$$\chi = \frac{\pi d}{\lambda_0} (n_+ - n_-). \quad (11.2)$$

Благодаря этому выводу Френеля вопрос об описании и объяснении свойств явления оптической активности сводится к рассмотрению того, каким образом в среде может возникнуть двойное круговое лучепреломление.

Свойством оптической активности могут обладать кристаллы, жидкости (в особенности растворы) и даже газы. При этом в некоторых случаях оптически активное кристаллическое вещество теряет свойство активности в растворенном (расплавленном, парообразном) состоянии, а в других случаях сохраняет его.

В веществах первого типа, очевидно, оптическая активность обусловлена характером расположения молекул в решетке кристалла. В веществах второго типа она, кроме того, должна быть связана с внутренней структурой самих молекул. Таким образом, свойство оптической активности может проявляться как на молекулярном уровне, так и на уровне макроскопического кристалла. Характерно, что вещества одного и другого типа встречаются в природе в двух модификациях, первая из которых правовращающая, а вторая левовращающая. При этом обе модификации имеют тождественный химический состав и другие физико-химические свойства. Разновидности молекул, различающиеся лишь тем, что одни вращают плоскость поляризации вправо, а другие влево, называются *оптическими изомерами*. В свою очередь разновидности одного и того же кристалла, вращающие плоскость поляризации в противоположные стороны, являются *энантиоморфными* друг к другу. И в том и в другом случае молекулы или кристаллы двух разновидностей различаются между собой преобразованием отражения в некоторой плоскости. Смесь равных количеств лево- и правовращающих изомеров одного и того же вещества не обладает свойством оптической активности. Такая смесь называется *рацемической*.

Явление оптической активности представляет огромный практический, а также научный интерес. Изучение этого явления сыграло чрезвычайно важную роль как в физике, так и в химии и биологии. Такой раздел химической науки, как стереохимия, обязан своим возникновением и развитием открытию вышеупомянутой оптической изомерии. По существу опти-

ческая активность является в химии основным средством изучения молекулярной структуры. Такая отрасль техники, как сахариметрия, целиком основана на явлении оптической активности. Значение оптически активных веществ в биологии необычайно велико. Еще Пастер обнаружил, что некоторые микроорганизмы способны питаться только определенным (правым или левым) изомером того или иного вещества. Многие важнейшие биохимические процессы связаны с участием оптически активных соединений. Оптические изомеры одного и того же вещества способны резко различаться некоторыми своими свойствами, в частности физиологическим действием. Так, левомицетин является активным антибиотиком, в то время как его правовращающий изомер полностью лишен этого свойства.

С чисто физической точки зрения явление оптической активности представляет особый интерес в первую очередь потому, что именно в нем проявляются некоторые специфические глубокие и тонкие закономерности электродинамики материальных сред. Трудно назвать другое физическое явление в основном классической природы, для объяснения которого было бы предложено такое большое количество разнообразных вариантов теории. С этим многообразием теорий неизбежно связано большое число ошибочных трактовок или отдельных неточностей, встречающихся в самых фундаментальных монографиях, в том числе принадлежащих перу весьма крупных ученых. Дискуссии, относящиеся к самым основным положениям теории оптически активных сред, не прекращаются до последнего времени (см. § 13).

Теорией оптической активности занимались многие ученые такого ранга, что их можно с полным основанием отнести к классикам науки. В их числе мы встретим имена Френеля, Био, Эйри, Коши, Мак-Куллага, Пастера, Брио, Буссинека, По-клингтона, П. Кюри, Гиббса, Гольдгаммера, Друде, Фойгта, Борна, Озеена, Дж. Томсона, Кирквуда, Кондона, Коттона, Джонса и многих других \*).

В настоящей книге из всех многообразных сторон явления оптической активности нас будет интересовать построение правильной феноменологической теории оптически активных кристаллов и развитие методов описания и изучения их оптических свойств.

Таким образом, свойство оптической активности непосредственно связано со структурой молекул. Но структура молекулы может проявиться во взаимодействии с электромагнитной волной лишь в том случае, если молекулу нельзя рассматривать как точку по сравнению с длиной волны. Иными

---

\*) Довольно полный исторический обзор исследований по теории оптической активности содержится в [105].

словами, расположенные в разных местах заряды, входящие в состав молекулы, должны по-разному реагировать на поле волны с длиной  $\lambda$ . Это различие обусловлено разностью фаз волны в разных точках молекулы и характеризуется отношением  $a/\lambda$ , где  $a$  — поперечник молекулы. Это отношение для видимого света имеет порядок  $\sim 10^{-3}$ , но, несмотря на малость этой величины, именно с ней связана сущность рассматриваемого явления.

Молекулярная теория оптической активности была построена одновременно и независимо друг от друга Борном [106, 10] и Озееном [107]. Неточности, допущенные в [106, 10], были исправлены в [108, 24].

Впоследствии вопросами квантовомеханической теории оптической активности занимался ряд исследователей [109—113]. Поскольку мы ограничиваемся в этой книге феноменологической трактовкой этого явления, то приведем здесь лишь некоторые соображения самого общего характера, позволяющие установить форму уравнений связи в оптически активных средах.

Как известно (см., например, [113]), электрическая индукция  $\mathbf{D}$  поля в среде определяется следующим образом:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (11.3)$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор электрического момента, который можно представить в виде суммы дипольных моментов  $\mathbf{p}$  всех молекул в единице объема. В свою очередь

$$\mathbf{p} = \sum_k \alpha^{(k)} \mathbf{E}^{(k)}, \quad (11.4)$$

где  $\alpha^{(k)}$  — тензор поляризуемости  $k$ -го атома, входящего в состав молекулы;  $\mathbf{E}^{(k)}$  — электрическое поле, действующее на  $k$ -й атом, причем

$$\mathbf{E}^{(k)} = \mathbf{E}(\mathbf{r}^{(k)}) = \mathbf{E}^0 + (\mathbf{r}^{(k)} \nabla) \mathbf{E}^0. \quad (11.5)$$

Здесь  $\mathbf{r}^{(k)}$  — радиус-вектор, определяющий положение  $k$ -го атома;  $\mathbf{E}^0$  — напряженность поля в центре молекулы. Если не учитывать взаимодействия атомов, то для индуцированного дипольного момента молекулы получится выражение

$$\mathbf{p} = \sum_k (\alpha^{(k)} + \alpha^{(k)} (\mathbf{r}^{(k)} \nabla)) \mathbf{E}^0,$$

или в компонентах

$$p_a = \sum_k (\alpha_{ab}^{(k)} + \alpha_{ab}^{(k)} r_c^{(k)} \partial/\partial x_c) E_b^0. \quad (11.6)$$

Если просуммировать эти выражения по всем молекулам в единице объема и обозначить

$$\mathbf{P} = \sum_{\nu=1} \mathbf{p}, \quad \alpha_{ab} = \sum_{\nu=1} \sum_k \alpha_{ab}^{(k)}, \quad \alpha_{abc}^0 = 4\pi \sum_{\nu=1} \sum_k \alpha_{ab}^{(k)} r_c^{(k)}, \quad (11.7)$$

то получим, отбрасывая нулевой индекс при  $\mathbf{E}$ ,

$$P_a = \alpha_{ab} E_b + \alpha_{abc}^0 \partial E_b / \partial x_c, \quad (\alpha_{ab}) = \alpha. \quad (11.8)$$

Подставляя в (11.3), находим

$$D_a = \epsilon_{ab} E_b + \alpha_{abc}^0 \nabla_c E_b, \quad (11.9)$$

где  $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha$  — тензор диэлектрической проницаемости среды. Легко убедиться, что учет взаимодействия атомов может изменить лишь конкретные значения компонент тензора второго ранга  $\epsilon_{ab}$  и тензора третьего ранга  $\alpha_{abc}^0$ , но не общий вид соотношения (11.9).

Пусть поле  $\mathbf{E}$  представляет собой плоскую волну  $\mathbf{E} = E_0 e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ . В таком случае формула (11.9) принимает вид

$$D_a = \epsilon_{ab} E_b - i\alpha_{abc} m_c E_b, \quad \alpha_{abc} = k_0 \alpha_{abc}^0, \quad k_0 = \omega/c, \quad (11.10)$$

где  $\mathbf{m}$  — вектор рефракции ( $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{m}$ ). Применим это соотношение к случаю среды, все свойства которой одинаковы по всем направлениям, т. е. изотропной. При этом тензоры  $\epsilon_{ab}$  и  $\alpha_{abc}$  не должны меняться при любых поворотах осей координат  $x_a$ . Отсюда следует, что тензор  $\epsilon_{ab}$  должен быть пропорционален единичному тензору:  $\epsilon_{ab} = \epsilon_0 \delta_{ab}$ , а тензор третьего ранга должен быть пропорционален единичному полностью антисимметричному псевдотензору Леви-Чивита  $e_{abc}$  (см. § 26):

$$\alpha_{abc} = \alpha e_{abc}. \quad (11.11)$$

В результате из (11.10) получим

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - i\alpha [\mathbf{m}\mathbf{E}]. \quad (11.12)$$

Нетрудно убедиться, что такое уравнение связи в совокупности с уравнениями Максвелла (1.24) для плоских волн

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{m}\mathbf{E}] \quad (11.13)$$

приводит к вращению плоскости поляризации. Действительно, считая среду изотропной и полагая  $\mu = 1$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ , имеем из (11.13), (11.12)

$$\epsilon \mathbf{E} - i\alpha [\mathbf{m}\mathbf{E}] + \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{E} = (\epsilon - \mathbf{m}^2 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - i\alpha \mathbf{m} \times) \mathbf{E} = 0. \quad (11.14)$$

Умножая это уравнение на  $\mathbf{m}$ , получаем  $\mathbf{mE} = 0$ , следовательно, (11.14) можно написать в виде

$$\mathbf{E} = i \frac{\alpha}{m^2 - \varepsilon} [\mathbf{mE}]. \quad (11.15)$$

Как показано в (§ 27), равенство  $\mathbf{e} = \kappa [\mathbf{ne}] (n^2 = 1)$  возможно лишь при  $\kappa = \pm i$ , поэтому из (11.15) следует ( $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$ )

$$\frac{\alpha n}{n^2 - \varepsilon} = \pm 1, \quad n^2 \mp \alpha n - \varepsilon = 0. \quad (11.16)$$

Это есть не что иное, как уравнение нормалей для данного случая. Действительно, согласно (11.14), должно быть

$$|\varepsilon + \mathbf{m}^{\times 2} - i\alpha \mathbf{m}^{\times}| = \varepsilon [(n^2 - \varepsilon)^2 - \alpha^2 n^2] = 0,$$

что равносильно (11.16). Итак, мы имеем две волны с показателями преломления

$$n = \frac{1}{2} (\sqrt{4\varepsilon + \alpha^2} \pm \alpha), \quad (11.16a)$$

которым соответствуют векторы  $\mathbf{E}$  (11.15)

$$\mathbf{E} = \pm i [\mathbf{nE}]. \quad (11.17)$$

Но, согласно (2.59), эти соотношения определяют две волны, поляризованные по кругу в разные стороны и распространяющиеся с различными фазовыми скоростями. Следовательно, в соответствии со сказанным выше в данной среде будет иметь место вращение плоскости поляризации распространяющегося в ней линейно поляризованного света. Величина угла поворота плоскости поляризации на единицу длины пути, пройденного волной в данной среде, определяется согласно (11.2):

$$\Delta\chi = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_+ - n_-).$$

Из (11.16) имеем ввиду малости  $\alpha$

$$n_{\pm} = n_0 \pm \alpha/2, \quad n_0 = \sqrt{\varepsilon}, \quad (11.18)$$

откуда следует

$$\Delta\chi = \pi\alpha/\lambda_0. \quad (11.19)$$

Таким образом, угол поворота плоскости поляризации пропорционален постоянной  $\alpha$ .

Поскольку в уравнении (11.14) и последующих уравнениях на вектор фазовой нормали  $\mathbf{n}$  не налагались никаких условий, то указанное вращение имеет место для всех направлений в одинаковой степени. В зависимости от знака постоянной  $\alpha$  вращение может происходить в правую либо в левую сторону.



Таким образом, учет дополнительного электрического дипольного момента, обусловленного распределением зарядов внутри молекулы, действительно позволяет объяснить вращение плоскости поляризации. Однако рассмотренное выше описание явления нельзя считать полным. Дело в том, что электрическое поле волны вызывает изменение не только дипольной электрической, но и магнитной поляризации молекулы, которую также следует учитывать в материальных уравнениях. Рассмотрим этот вопрос феноменологически, опираясь на свойства релятивистской инвариантности [113]. Согласно (11.6) — (11.8), имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \Delta\mathbf{P}, \quad (11.20)$$

где  $\mathbf{P}_0$  — «обычная» поляризация  $\alpha\mathbf{E}$ , а  $\Delta\mathbf{P}$  — добавочная электрическая поляризация, учитывающая структуру молекулы. Последняя, согласно (11.9), (11.12), для плоской волны имеет вид  $\Delta\mathbf{P} = -i\alpha[\mathbf{mE}]$  или с учетом уравнений Максвелла (11.13) при  $\mu = 1$

$$\Delta\mathbf{P} = -i\alpha\mathbf{H}. \quad (11.21)$$

Но, как известно, поля  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ , согласно релятивистской электродинамике материальных сред, объединяются в один антисимметричный  $4 \times 4$  тензор, который в блочной форме записывается следующим образом (см., например, [113]):

$$F = (F_{ik}) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^\times & i\mathbf{E} \\ -i\mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.22)$$

Аналогично поляризационные свойства среды характеризуются 4-тензором моментов:

$$M = (M_{ik}) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^\times & -i\mathbf{P} \\ i\mathbf{P} & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.23)$$

где  $\mathbf{M}$  — магнитный момент единицы объема среды.

Согласно (11.21), дополнительный электрический момент  $\Delta\mathbf{P}$  пропорционален магнитному полю  $\mathbf{H}$ . Векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{H}$  являются составными частями соответствующих тензоров. В силу требования релятивистской ковариантности из пропорциональности некоторых частей двух тензоров должна следовать пропорциональность этих тензоров в целом. Однако тензор дополнительных моментов

$$\Delta M = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{M}^\times & -i\Delta\mathbf{P} \\ i\Delta\mathbf{P} & 0 \end{pmatrix} \quad (11.24)$$

не может быть пропорционален тензору  $F$  (11.22), так как тогда  $\Delta\mathbf{P}$  был бы пропорционален  $\mathbf{E}$ , а не  $\mathbf{H}$ . Но каждому антисимметричному 4-тензору  $F$  может быть поставлен в соот-

ветствие дуальный ему антисимметричный тензор с помощью соотношения

$$F_{ik}^{\times} = \frac{i}{2} e_{iklm} F_{lm}, \quad (11.25)$$

где  $e_{iklm}$  — четырехмерный символ Леви-Чивита. Из определения (11.25) и равенства (11.22) следует

$$F^{\times} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{\times} & -i\mathbf{H} \\ +i\mathbf{H} & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.26)$$

Сопоставляя равенство (11.21) с выражениями (11.24), (11.26), видим, что можно положить

$$\Delta \mathbf{M} = -i\alpha F^{\times}, \quad (11.27)$$

откуда следует

$$\Delta \mathbf{M} = -i\alpha \mathbf{E}. \quad (11.28)$$

Таким образом, взаимодействие световой волны с зарядами молекулы должно наряду с дополнительным электрическим моментом (11.21) порождать аналогичный магнитный момент — дополнительную магнитную поляризацию (11.28). Заметим, что детальный молекулярный расчет [10, 24] приводит к тому же результату. Поскольку вообще  $\mathbf{V} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$ , то в данном случае получим

$$\mathbf{V} = \mathbf{H} - i\alpha \mathbf{E}. \quad (11.29)$$

Следовательно, теория, основанная на уравнении связи (11.12), неточна. На самом деле мы должны исходить из системы (11.13), (11.12), (11.29):

$$\varepsilon \mathbf{E} - i\alpha [\mathbf{mE}] = -[\mathbf{mH}], \quad \mathbf{H} - i\alpha \mathbf{E} = [\mathbf{mE}]. \quad (11.30)$$

Исключение  $\mathbf{H}$  дает уравнение

$$(\varepsilon + \mathbf{m}^{\times 2} - 2i\alpha \mathbf{m}^{\times}) \mathbf{E} = 0, \quad (11.31)$$

полностью совпадающее с (11.14), за исключением того, что благодаря учету магнитной поляризации постоянная  $\alpha$  заменяется на  $2\alpha$ , т. е. эффект удваивается. Таким образом, дополнительная магнитная поляризация приводит не к малой поправке, а к члену той же величины, что и основной член, который входит в уравнение связи (11.12) для электрических величин  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ . Поэтому в явлении оптической активности электрические и магнитные величины оказываются тесно связанными. Отсюда следует принципиальный вывод о том, что правильная теория явления оптической активности не может быть построена без одновременного учета дополнительных членов в уравнениях связи как для электрических, так и для магнитных векторов. Хотя наше рассмотрение ограничивалось случаем изотропной среды, однако совершенно очевидно, что предыдущее утверждение полностью справедливо и в общем

случае анизотропных сред, поскольку последние в пределе исчезающей анизотропии всегда переходят в изотропные.

К явлению оптической активности можно подойти и с более общей точки зрения теории пространственной дисперсии. Как известно, под обычной (частотной) дисперсией понимается зависимость показателя преломления или диэлектрического тензора от частоты волны, распространяющейся в среде:  $n = n(\omega)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ . Наряду с этим тензор  $\varepsilon$  может зависеть от волнового вектора  $\mathbf{k}$ :

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}), \quad \mathbf{D} = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}. \quad (11.32)$$

Существование зависимости тензора диэлектрической проницаемости от  $\mathbf{k}$  и составляет содержание термина «пространственная дисперсия». Тензор  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  можно разложить в ряд по степеням  $\mathbf{k}$ :

$$\varepsilon_{ab}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ab}(\omega) + i\alpha_{abc}(\omega) k_c + \alpha_{abcd}(\omega) k_c k_d \dots \quad (11.33)$$

Поскольку  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ , то второй член этого разложения описывает явление оптической активности, что явствует из сравнения с (11.10). Таким образом, оптическую активность (гиротропию) можно рассматривать как одно из проявлений (притом важнейшее) более общего свойства — пространственной дисперсии (см., например, [114]).

## § 12. УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Как было показано в предыдущем параграфе, уже самые общие соображения, связанные с необходимостью учета изменения фазы волны в пределах молекулы для объяснения гиротропии, приводят к уравнению связи (11.9):

$$D_a = \varepsilon_{ab} E_b + \alpha_{abc} \nabla_b E_c. \quad (12.1)$$

К такому соотношению можно прийти также на основании чисто формальных рассуждений, имеющих целью обобщить обычную *линейную* зависимость индукции от поля ( $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ). Не касаясь работ домаксвелловского периода, отметим, что Дж. У. Гиббс [115] предложил для описания оптической активности на основе электромагнитной теории света использовать уравнение связи между электрической индукцией и полем вида (12.1). Это предположение стало исходным пунктом для всех дальнейших работ по феноменологической теории явления оптической активности. Вопрос сводился к возможным обобщениям соотношения (12.1) и выяснению ограничений, которые могут быть наложены на элементы тензора третьего ранга  $\alpha_{abc}$ .

В монографии [66] для решения последнего вопроса был использован принцип симметрии кинетических коэффициентов

Онзагера. Согласно этому принципу, если мы имеем два соответствующих друг другу набора величин  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  и  $D^{(1)}$ ,  $D^{(2)}$ , связанных между собой посредством параметров, характеризующих некоторую среду, то должно иметь место соотношение

$$\int E^{(1)} D^{(2)} dV = \int E^{(2)} D^{(1)} dV, \quad (12.2)$$

где интегрирование производится по всему пространству, занимаемому полем. Подставляя сюда (12.1) и учитывая симметрию тензора  $\epsilon$ , получаем

$$\int E_a^{(1)} \alpha_{abc} \nabla_b E_c^{(2)} dV = \int E_a^{(2)} \alpha_{abc} \nabla_b E_c^{(1)} dV.$$

Считая среду однородной и, следовательно, коэффициенты  $\alpha_{abc}$  не зависящими от координат, можем написать

$$E_a^{(2)} \alpha_{abc} \nabla_b E_c^{(1)} = \nabla_b (E_a^{(2)} \alpha_{abc} E_c^{(1)}) - \alpha_{abc} E_c^{(1)} \nabla_b E_a^{(2)}.$$

Здесь первый член представляет собой дивергенцию, поэтому, согласно теореме Гаусса, при интегрировании по области, на границе которой поле исчезает, он обращается в нуль. Во втором члене в последнем равенстве переставляем немые индексы  $a$  и  $c$ . В результате соотношение (12.2) принимает вид

$$\int (\alpha_{abc} + \alpha_{cba}) E_a^{(1)} \nabla_b E_c^{(2)} dV = 0.$$

Ввиду произвольности  $E^{(1)}$  и  $E^{(2)}$  отсюда следует

$$\alpha_{abc} = -\alpha_{cba}, \quad (12.3)$$

т. е. тензор третьего ранга  $\alpha_{abc}$  должен быть антисимметричен по крайним индексам.

На тензор  $\alpha_{abc}$  можно наложить еще дополнительное условие, если предположить, что в рассматриваемой среде отсутствует поглощение. Диссипация энергии в периодическом поле (см., например, [66]) определяется средним по времени от интеграла  $-1/4\pi \int \mathbf{E} \dot{\mathbf{D}} dV$ , который при использовании комплексных величин следует заменить выражением

$$K = -\frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}}^* + \mathbf{E}^* \dot{\mathbf{D}}) dV = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \int \mathbf{E} \dot{\mathbf{D}}^* dV. \quad (12.4)$$

Пользуясь соотношением (12.1) и считая  $\mathbf{E} \sim \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ , получаем (поскольку  $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$ )

$$K = -\frac{\omega}{4\pi} \operatorname{Im} \int \mathbf{E} \dot{\mathbf{D}}^* dV = -\frac{\omega}{4\pi} \operatorname{Im} \int E_a (\epsilon_{ab} E_b^* + \alpha_{abc}^* \nabla_b E_c^*) dV. \quad (12.5)$$

Вследствие симметрии тензора  $\varepsilon = \varepsilon^*$  выражение  $\varepsilon_{ab} E_a E_b^*$  вещественно, следовательно,  $K$ , а вместе с ним и диссипация будет равна нулю, если интеграл  $\int E_a \alpha_{abc}^* \nabla_b E_c^* dV$  вещественен, т. е.

$$\begin{aligned} \int \alpha_{abc}^* E_a \nabla_b E_c^* dV &= \int \alpha_{abc} E_a^* \nabla_b E_c dV = - \int \alpha_{abc} E_c \nabla_b E_a^* dV = \\ &= - \int \alpha_{cba} E_a \nabla_b E_c^* dV. \end{aligned}$$

Отсюда следует  $\alpha_{abc}^* = -\alpha_{cba} = \alpha_{abc}$ , т. е. тензор  $\alpha_{abc}$  должен быть *вещественным*.

Используя псевдотензор Леви-Чивита  $e_{abc}$ , можем написать

$$\alpha_{abc} = e_{adc} \alpha_{db}, \quad (12.6)$$

откуда ясно, что свойство оптической активности, согласно [66], должно описываться псевдотензором второго ранга  $\alpha_{db}$ , который в общем случае не должен быть ни симметричным, ни антисимметричным, т. е. может содержать 9 независимых компонент. Учитывая (12.5), получаем (см. § 26)

$$\alpha_{abc} \nabla_b E_c = e_{adc} \alpha_{db} \nabla_b E_c = e_{adc} (\alpha \nabla)_d E_c = [\alpha \nabla, \mathbf{E}]_a,$$

вследствие чего соотношение (12.1) принимает вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + [\alpha \nabla, \mathbf{E}]. \quad (12.7)$$

В случае изотропной среды тензор  $\alpha$  должен быть скаляром. В применении к плоским волнам равенство (12.7) совпадает с (11.12), откуда получаются все последующие соотношения предыдущего параграфа (11.13)—(11.17) и, следовательно, вращение плоскости поляризации.

Однако феноменологическую теорию явления оптической активности, изложенную в [66], нельзя признать удовлетворительной по двум причинам. Во-первых, как следует из изложенного в предыдущем параграфе, такая теория находится в противоречии с молекулярной теорией явления [10], поскольку последняя с необходимостью приводит к требованию учета наряду с электрическим также дополнительного магнитного момента. Результатом этого является изменение также второго уравнения связи (11.29), за счет чего эффект удваивается\*). Вторая еще более существенная причина заключается в том, что теория, изложенная в [66], находится в противоречии также с законом сохранения энергии. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим баланс потоков энергии плоских волн для простейшего случая падения света из вакуума на гиротропную прозрачную изотропную среду, характеризуемую, согласно [66], уравнением связи (12.7) или (11.12). При этом мы

\*) К тому же приводят и феноменологические соображения, связанные с релятивистской ковариантностью (см. § 11).

используем метод, предложенный в [5] и обобщенный выше в § 8, позволяющий рассматривать данный вопрос, не решая сложной задачи об отражении и преломлении на границе двух сред.

Согласно [66], уравнения Максвелла для изотропно-гиротропной среды \*) имеют вид (см. (11.12))

$$\varepsilon \mathbf{E} - i\alpha [\mathbf{mE}] = -[\mathbf{mH}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{mE}]. \quad (12.8)$$

При преломлении в гиротропной среде возникнут две волны, относящиеся к которым величины будем обозначать индексами 1 и 2. Заменяя в первом уравнении (12.8)  $[\mathbf{mE}]$  на  $\mathbf{H}$ , напомним аналогично (8.90), (8.92)

$$-[\mathbf{m}_1 \mathbf{H}_1] = \varepsilon \mathbf{E}_1 - i\alpha \mathbf{H}_1, \quad [\mathbf{m}_1 \mathbf{E}_1] = \mathbf{H}_1, \quad (12.9)$$

$$-[\mathbf{m}_2 \mathbf{H}_2^*] = \varepsilon \mathbf{E}_2^* + i\alpha \mathbf{H}_2^*, \quad [\mathbf{m}_2 \mathbf{E}_2^*] = \mathbf{H}_2^*. \quad (12.10)$$

Здесь учтено, что векторы рефракции обеих преломленных волн вещественны. Умножим соответственно уравнения (12.9) на  $\mathbf{E}_2^*$  и  $\mathbf{H}_2^*$ , уравнения (12.10) — на  $-\mathbf{E}_1$ ,  $-\mathbf{H}_1$  и сложим результаты. Получим

$$(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) ([\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2^*] + [\mathbf{E}_2^* \mathbf{H}_1]) = -i\alpha (\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \mathbf{H}_1),$$

или (см. (8.9))

$$q ([\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2^*] + [\mathbf{E}_2^* \mathbf{H}_1]) = \frac{-i\alpha}{\eta_1 - \eta_2} (\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) [\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*] = -i\alpha q [\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*]. \quad (12.11)$$

Нетрудно убедиться, что правая часть этого соотношения отлична от нуля. Действительно (см. рис. 12.1), согласно (11.17), оба вектора  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  будут круговыми. Они могут быть представлены в виде (§ 27)

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_1 - i[\mathbf{n}_1 \mathbf{a}_1] = i[\mathbf{n}_1 \mathbf{E}_1], \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{a}_1 + i[\mathbf{n}_2 \mathbf{a}_1] = -i[\mathbf{n}_2 \mathbf{E}_2], \quad (12.12)$$

где  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$  — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости падения (см. (8.8)). Отсюда следует

$$[\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*] = i[\mathbf{E}_1 [\mathbf{n}_2 \mathbf{E}_2^*]] = i\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* - i\mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{n}_2 \mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_1 [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2] \cdot \mathbf{a}_1 + \\ + i((1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_2 + \mathbf{a}_1 [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2] \cdot [\mathbf{a}_1 \mathbf{n}_2]),$$

поэтому, согласно (12.11) и рис. 12.1,

$$\text{Re } q ([\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2^*] + [\mathbf{E}_2^* \mathbf{H}_1]) = -\alpha ((1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_2 q + \mathbf{a}_1 [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2] \cdot \mathbf{a}_1 [\mathbf{n}_2 q]) = \\ = 2\alpha \sin \frac{\chi}{2} \cos \left( \psi_0 + \frac{\chi}{2} \right). \quad (12.13)$$

\*) Под изотропно-гиротропной средой мы понимаем такую среду, в которой  $\varepsilon$  является скаляром и  $\alpha_{abc} = \alpha e_{abc}$ , где  $\alpha$  — скаляр.

Согласно § 8, отличие выражения (12.13) от нуля означает нарушение баланса потоков энергии на границе гиротропной среды. Поскольку в этой среде отсутствует диссипация энергии (см. (12.4), (12.5)), то поток энергии, подходящий к ее поверхности с падающей волной, должен полностью отводиться от этой поверхности отраженной и преломленными волнами. Нарушение

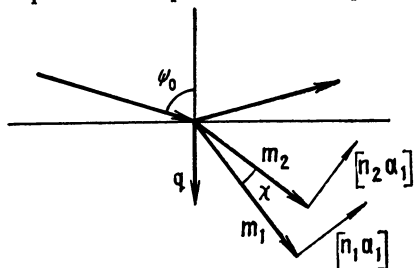


Рис. 12.1

этого требования означает несоблюдение закона сохранения энергии.

В работе [117] был применен иной подход к данной проблеме. К соотношению Гиббса (12.1) было присоединено аналогичное соотношение для магнитных величин

$$B_a = \mu_{ab} H_b + \beta_{abc} \nabla_b H_c \quad (12.14)$$

и вопрос об ограничениях, налагаемых на тензоры  $\alpha_{abc}$ ,  $\beta_{abc}$ , решался на основе закона сохранения энергии. Такой подход представляется вполне естественным, поскольку, как известно (§ 1), использование закона сохранения энергии позволяет получить правильные заключения относительно свойств симметрии  $\epsilon$  и  $\mu$ , т. е. вида уравнений связи в неактивных средах.

Исходя из соотношения (1.8), подставим выражения (12.1), (12.14) в выражение  $K = \mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}$ . Однако теперь в отличие от (1.9) мы наложим более общее требование, чтобы  $K$  выражалось в виде суммы производной по времени от некоторого скаляра и дивергенции от некоторого вектора. Следуя [117], мы можем представить  $\mathbf{E}\mathbf{D}$  в виде суммы двух равных членов

$$\frac{1}{2} \alpha_{abc} E_a \nabla_b \dot{E}_c, \text{ в одном из которых выделяем дивергенцию,}$$

а в другом—производную по времени

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha_{abc} E_a \nabla_b \dot{E}_c &= \frac{1}{2} \nabla_b (\alpha_{abc} E_a \dot{E}_c) - \frac{1}{2} \alpha_{abc} \dot{E}_c \nabla_b E_a = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_{abc} E_a \nabla_b E_c) - \frac{1}{2} \alpha_{abc} \dot{E}_a \nabla_b E_c. \end{aligned}$$

В итоге получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{D} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ab} E_a E_b) + \alpha_{abc} E_a \nabla_b \dot{E}_c = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ab} E_a E_b + \alpha_{abc} E_a \nabla_b E_c) + \nabla_b (\alpha_{abc} E_a \dot{E}_c) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\alpha_{abc} + \alpha_{cba}) \dot{E}_a \nabla_b E_c. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Подчеркнем, что здесь существенно предположение об однородности среды, т. е. независимости  $\alpha_{abc}$  от координат.

Очевидно, для того чтобы выражение для  $\mathbf{E}\mathbf{D}$  приняло требуемую форму, достаточно наложить на тензор  $\alpha_{abc}$  условие (12.3). Совершенно аналогично обстоит дело для члена  $\mathbf{H}\mathbf{B}$ , который при условии

$$\beta_{abc} = -\beta_{cba} \quad (12.16)$$

равен

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{B} = & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_{ab} H_a H_b + \beta_{abc} H_a \nabla_b H_c) + \\ & + \frac{1}{2} \nabla_b (\beta_{abc} H_a \dot{H}_c), \end{aligned} \quad (12.17)$$

т. е. также сводится к сумме производной по времени и дивергенции. Антисимметричные по двум индексам тензоры третьего ранга  $\alpha_{abc}$  и  $\beta_{abc}$  с помощью псевдотензора Леви-Чивита (см. § 26) можно представить в виде

$$\alpha_{abc} = e_{adc} \alpha_{db}, \quad \beta_{abc} = e_{adc} \beta_{db}, \quad (12.18)$$

где  $(\alpha_{db}) = \alpha$ ,  $(\beta_{db}) = \beta$  — соответствующие псевдотензоры второго ранга. Отсюда, умножая на  $e_{ad'c}$  и учитывая (26.10), находим

$$\alpha_{db} = \frac{1}{2} e_{adc} \alpha_{abc}, \quad \beta_{db} = \frac{1}{2} e_{adc} \beta_{abc}. \quad (12.19)$$

Используя (26.31), нетрудно показать, что

$$\alpha_{abc} \nabla_b E_c = [\alpha \nabla, \mathbf{E}]_a, \quad \beta_{abc} \nabla_b H_c = [\beta \nabla, \mathbf{H}]_a, \quad (12.20)$$

в результате чего уравнения связи (12.1), (12.14) принимают вид (см. [117])

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + [\alpha \nabla, \mathbf{E}] = (\varepsilon + (\alpha \nabla)^\times) \mathbf{E}, \quad (12.21)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + [\beta \nabla, \mathbf{H}] = (\mu + (\beta \nabla)^\times) \mathbf{H}. \quad (12.22)$$

Соответственно в уравнении (1.10) закона сохранения энергии имеем для вектора плотности потока энергии выражение

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] - \frac{1}{8\pi} (\tilde{\alpha} [\mathbf{E}\dot{\mathbf{E}}] + \tilde{\beta} [\mathbf{H}\dot{\mathbf{H}}]). \quad (12.23)$$

В свою очередь для плотности энергии находим

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}), \quad (12.24)$$

где  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  определяются уравнениями (12.21), (12.22).



Таким образом, в данном случае плотность энергии  $\omega$  (12.24), входящая в уравнение непрерывности (1.10), сохраняет обычный вид (1.14), хотя в индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  (12.21), (12.22) входят новые члены по сравнению с (1.5). В то же время вектор плотности потока энергии (12.23) приобретает добавочные члены по сравнению с обычным выражением (1.11). Необходимо подчеркнуть, что, как следует из приведенного вывода, тензоры  $\alpha$  и  $\beta$  полностью независимы друг от друга. Поэтому рассмотренные в [66] уравнения связи (12.1) вытекают из (12.21), (12.22) как частный случай, если положить  $\beta=0$ .

Мы видим, что из закона сохранения энергии следуют те же условия (12.3), налагаемые на тензоры оптической активности, которые были получены исходя из принципа симметрии кинетических коэффициентов. Разумеется, воспользовавшись этим принципом в применении к уравнениям связи (12.14), мы снова пришли бы к условиям (12.16). Следовательно, закон сохранения энергии и принцип Онзагера не противоречат друг другу в смысле условий, налагаемых на параметры среды, как того и следовало ожидать. Однако закон сохранения энергии дает больше, поскольку из него, кроме упомянутых ограничений на параметры, вытекают также явные выражения для вектора потока энергии  $\mathbf{S}$  и плотности энергии  $\omega$ , играющие основную роль во всех физических вопросах.

Приведенный выше вывод условий, налагаемых на тензоры оптической активности  $\alpha$  и  $\beta$  законом сохранения энергии, справедлив лишь в предположении однородности среды. Действительно, если  $\alpha_{abc}$  зависит от координат, то в соотношении (12.5) прибавится член вида  $(\nabla_b \alpha_{abc}) E_a \dot{E}_c$ , который при произвольном поле  $\mathbf{E}$  невозможно компенсировать\*).

Если мы обратимся к закону сохранения энергии для неактивных сред (1.10), (1.11), (1.13), то сразу убедимся, что он остается в силе вне связи с тем, зависят  $\epsilon$  и  $\mu$  от координат или нет, лишь бы удовлетворялись условия симметрии (1.12). Иными словами, ограничивающие условия, вытекающие из закона сохранения энергии, а следовательно, и вид уравнений связи одинаковы для однородных и неоднородных сред.

Легко видеть, что это свойство должно иметь общее значение, в частности, оно должно соблюдаться и для оптически активных (гиротропных) сред. Действительно, если закон сохранения энергии сформулирован в таком виде, что он теряет силу, когда параметры среды зависят от координат, то мы не сможем правильно списать, например, такое важное явление, как падение света на границу раздела двух различных сред. В самом деле, резкая граница двух сред является частным,

\*) Подчеркнем, что мы, разумеется, предполагаем среду равновесной (стационарной), т. е. ее параметры, включая  $\alpha$  и  $\beta$ , не зависят от времени.

предельным случаем неоднородности, т. е. тем случаем, когда, по нашему предположению, закон сохранения энергии не выполняется.

Отсюда вытекает важный вывод: следует искать такую формулировку закона сохранения энергии, которая была бы пригодна и в случае неоднородной среды.

Если не учитывать гиротропию, то сформулированное условие выполняется само собою, поскольку (см. § 1) равенство  $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{E}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{h}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}\mathbf{e} + \mathbf{H}\mathbf{h})$  справедливо как в случае  $\epsilon = \tilde{\epsilon} = \text{const}$ ,  $\mu = \tilde{\mu} = \text{const}$ , так и в случае  $\epsilon = \tilde{\epsilon} = \epsilon(\mathbf{r})$ ,  $\mu = \tilde{\mu} = \mu(\mathbf{r})$ . Одним из специфических отличий гиротропных сред является то, что аналогичное свойство для них не выполняется автоматически, о чем свидетельствуют соотношения (12.3), (12.16), которые достаточны для сохранения энергии в форме (1.10), (12.23), (12.24) в случае однородной среды и недостаточны в случае неоднородной среды.

Отсюда следует, что уравнения связи (12.1), (12.14) при условиях (12.3), (12.16) не могут обеспечить сохранение энергии на границе двух различных однородных сред. И на самом деле, непосредственный расчет, аналогичный (12.9)—(12.13), показывает, что при условиях (12.1), (12.3), (12.14), (12.16) для простейшего случая плоской волны, падающей на границу раздела двух изотропных сред (неактивной и активной), не соблюдается баланс энергии волн, приходящей к границе раздела и уходящих от нее \*).

Поэтому следует искать иной способ, отличный от условий (12.3), (12.16), для того чтобы удовлетворить закону сохранения энергии так, чтобы он оставался справедливым и для неоднородных сред.

Такой способ был использован в работе [118]. В основе по-прежнему лежат общие уравнения связи (12.1), (12.14), однако теперь мы будем учитывать также уравнения Максвелла. Поскольку нас интересуют свойства среды как таковой, независимо от наличия в ней зарядов или токов, то будем считать в (1.1), (1.2)  $\mathbf{I} = 0$ ,  $\rho = 0$ , т. е. воспользуемся уравнениями

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= [\nabla \mathbf{H}] = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= [\nabla \mathbf{E}] = - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}. \end{aligned} \tag{12.25}$$

\*) Это обстоятельство не было учтено также в монографии [114], где были использованы выражения (12.23), (12.24) для энергетических величин при ограничении случаем  $\beta = 0$  в соответствии с [66].

Следуя [118], умножим уравнения (12.1) и (12.14) на  $\varepsilon^{-1}$  и  $\mu^{-1}$  соответственно и запишем их в виде

$$E_a = \varepsilon_{ab}^{-1} D_b - \varepsilon_{ad}^{-1} \alpha_{abc} \nabla_b E_c, \quad H_a = \mu_{ab}^{-1} B_b - \mu_{ad}^{-1} \beta_{abc} \nabla_b H_c. \quad (12.26)$$

Введем обозначения

$$\varepsilon_{ad}^{-1} \alpha_{abc} = \alpha_{abc}^a + \alpha_{abc}^s, \quad \mu_{ad}^{-1} \beta_{abc} = \beta_{abc}^a + \beta_{abc}^s, \quad (12.27)$$

где

$$\alpha_{abc}^a = \frac{1}{2} (\alpha_{abc} - \alpha_{acb}) = -\alpha_{acb}^a,$$

$$\beta_{abc}^a = \frac{1}{2} (\beta_{abc} - \beta_{acb}) = -\beta_{acb}^a,$$

$$\alpha_{abc}^s = \frac{1}{2} (\alpha_{abc} + \alpha_{acb}) = \alpha_{acb}^s,$$

$$\beta_{abc}^s = \frac{1}{2} (\beta_{abc} + \beta_{acb}) = \beta_{acb}^s.$$

При этом аналогично (12.18)  $\alpha_{abc}^a$  и  $\beta_{abc}^a$  можно представить в виде

$$\alpha_{abc}^a = \alpha_{ad} e_{dbc}, \quad \beta_{abc}^a = \beta_{ad} e_{dbc}, \quad (12.28)$$

где  $e_{dbc}$  — псевдотензор Леви-Чивита,  $\alpha_{ad}$  и  $\beta_{ad}$  — псевдотензоры второго ранга, причем (ср. (12.19))

$$\alpha_{ad} = \frac{1}{2} e_{dbc} \alpha_{abc}, \quad \beta_{ad} = \frac{1}{2} e_{dbc} \beta_{abc}. \quad (12.29)$$

Из (12.28) следует (см. § 26 и (12.25))

$$\alpha_{abc}^a \nabla_b E_c = \alpha_{ad} [\nabla E]_d = -\frac{1}{c} \alpha_{ad} \dot{B}_d,$$

$$\beta_{abc}^a \nabla_b H_c = \beta_{ad} [\nabla H]_d = \frac{1}{c} \beta_{ad} \dot{D}_d.$$

Теперь из (12.26) находим с учетом (12.25)

$$\begin{aligned} E_a &= \varepsilon_{ab}^{-1} D_b + \frac{1}{c} \alpha_{ab} \dot{B}_b - \alpha_{abc}^s \nabla_b E_c, \\ H_a &= \mu_{ab}^{-1} B_b - \frac{1}{c} \beta_{ab} \dot{D}_b - \beta_{abc}^s \nabla_b H_c. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Умножая эти равенства скалярно на  $\dot{D}_a$  и  $\dot{B}_a$  соответственно и складывая, получаем после некоторых преобразований (см. [118])

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}} &= \dot{\mathbf{D}}\epsilon^{-1}\mathbf{D} + \dot{\mathbf{B}}\mu^{-1}\mathbf{B} + \\ &+ \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{D}}\alpha\dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{B}}\beta\dot{\mathbf{D}}) - (\dot{D}_a\alpha_{abc}^s\nabla_b E_c + \dot{B}_a\beta_{abc}^s\nabla_b H_c) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D}\epsilon^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mu^{-1}\mathbf{B}) + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} (\alpha - \tilde{\beta}) \dot{\mathbf{B}} - \\ &- (\dot{D}_a\alpha_{abc}^s\nabla_b E_c + \dot{B}_a\beta_{abc}^s\nabla_b H_c). \end{aligned}$$

Очевидно, написанное выражение будет полной производной по времени, если  $\tilde{\beta} = \alpha$  и  $\alpha_{abc}^s = \beta_{abc}^s = 0$ . При этом уравнения (12.26) принимают вид (см. (12.27), (12.28))

$$E_a = \epsilon_{ab}^{-1} D_b - \alpha_{ad} e_{dbc} \nabla_b E_c, \quad H_a = \mu_{ab}^{-1} B_b - \beta_{ad} e_{dbc} \nabla_b H_c,$$

или в безындексной форме

$$\mathbf{E} = \epsilon^{-1}\mathbf{D} - \alpha \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B} - \tilde{\alpha} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (12.31)$$

или также

$$\mathbf{D} = \epsilon(1 + \alpha\nabla\times)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(1 + \tilde{\alpha}\nabla\times)\mathbf{H}. \quad (12.32)$$

Из этих основных уравнений следует, что свойство оптической активности характеризуется псевдотензором второго ранга  $\alpha$  [118], который в общем случае содержит 9 независимых компонент \*).

При этих условиях в соотношении (1.10) вектор плотности потока энергии имеет обычный вид

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad (12.33)$$

а плотность энергии выражается следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D}\epsilon^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mu^{-1}\mathbf{B}), \quad (12.34)$$

что также внешне совпадает с выражением (1.16). Разумеется, на самом деле плотность энергии (12.24) отличается от (1.16) вследствие различия между уравнениями связи (1.5) и (12.32).

\*) Одновременно и независимо от [118] соотношения, равносильные (12.32), были получены в [119] значительно более громоздким путем. Аналогичные соотношения были получены также в [112] на основании квантово-механического рассмотрения.

Следует отметить, что уравнения связи (12.32) с принципиальной точки зрения весьма существенно отличаются как от материальных уравнений (12.1), (12.3), приведенных в [66], так и от более общих уравнений (12.1), (12.3), (12.14), (12.16), полученных в [117]. Главное отличие заключается в том, что вместо двух независимых тензоров  $\alpha$  и  $\beta$  гиротропия определяется одним тензором  $\alpha$ , который мы будем называть *тензором гирации*. При этом члены, описывающие оптическую активность в уравнениях связи для электрических и магнитных величин, обязательно должны учитываться одновременно.

Очевидно, в данном случае в отличие от (12.15) закон сохранения энергии одинаково справедлив для сред, как однородных, так и неоднородных, в которых тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  произвольным образом зависят от координат. Поэтому мы можем быть уверены, что при падении электромагнитной волны на границу раздела двух сред будет соблюдаться баланс энергии. Ниже это обстоятельство будет подтверждено в результате прямого расчета (см. (12.65) и далее).

Чтобы получить вещественные выражения для  $\mathbf{S}$  и  $\omega$  при использовании, как обычно, комплексных значений  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , в соотношениях (12.33), (12.34) нужно произвести замену:

$$\mathbf{E} \rightarrow \text{Re } \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*), \quad \mathbf{H} \rightarrow \text{Re } \mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)$$

и аналогично для  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ . Однако можно непосредственно получить закон сохранения энергии для усредненных по времени полей. Поступая так же, как в § 1, снова придем от уравнений Максвелла (1.7) к соотношению (1.34)

$$\begin{aligned} & (\mathbf{H}^* [\nabla \mathbf{E}] - \mathbf{E} [\nabla \mathbf{H}^*]) + (\mathbf{H} [\nabla \mathbf{E}^*] - [\mathbf{E}^* [\nabla \mathbf{H}]]) = \\ & = -\frac{1}{c} (\dot{\mathbf{D}} \mathbf{E}^* + \dot{\mathbf{D}}^* \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} \mathbf{H}^* + \dot{\mathbf{B}}^* \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (12.35)$$

причем левая часть приводится к уже известной форме

$$\text{div} ([\mathbf{E} \mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^* \mathbf{H}]) = \text{div} ([\mathbf{E} \mathbf{H}^*] + [\mathbf{E} \mathbf{H}^*]^*) = 2 \text{Re } \text{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}^*]. \quad (12.36)$$

С учетом (12.25) выражения (12.31) для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  имеют вид:

$$\mathbf{E} = \epsilon^{-1} \mathbf{D} + \frac{1}{c} \alpha \dot{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \tilde{\alpha} \dot{\mathbf{D}} \quad (12.37)$$

и комплексно сопряженные к ним

$$\mathbf{E}^* = \epsilon^{-1} \mathbf{D}^* + \frac{1}{c} \alpha \dot{\mathbf{B}}^*, \quad \mathbf{H}^* = \mu^{-1} \mathbf{B}^* - \frac{1}{c} \tilde{\alpha} \dot{\mathbf{D}}^*. \quad (12.38)$$

Подставив (12.36), (12.38) в (12.35), после простых преобразований получим

$$\operatorname{div} ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\mathbf{D}^* + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{B}^*). \quad (12.39)$$

Правая часть, очевидно, вещественна, поскольку

$$(\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\mathbf{D}^*)^* = \mathbf{D}^*\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\mathbf{D}^*$$

ввиду симметрии тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Аналогичное справедливо для второго члена. Соотношение (12.39) имеет форму

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \dot{\omega} = 0, \quad (12.40)$$

где

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]), \quad (12.41)$$

$$\omega = \omega_e + \omega_m,$$

$$\omega_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\mathbf{D}^*, \quad \omega_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{B}^*. \quad (12.42)$$

Аналогично тому, как в § 1, легко убедиться, что соотношения (12.40) — (12.42) в случае плоских монохроматических волн выражают закон сохранения энергии для усредненных по времени вектора Пойнтинга и плотности энергии.

Выпишем основные уравнения электродинамики гиротропных сред — уравнения Максвелла (1.7) и материальные уравнения (12.32):

$$[\nabla\mathbf{H}] - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = 0, \quad [\nabla\mathbf{E}] + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad (12.43)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} (1 + \alpha_1 \nabla \times) \mathbf{E}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\mu} (1 + \tilde{\alpha}_1 \nabla \times) \mathbf{H}. \quad (12.44)$$

Мы обозначили тензор гирации через  $\alpha_1$  вместо  $\alpha$ . Подставляя сюда выражения для плоских волн  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\Phi}$  и т. д., где  $\Phi = \omega \left( t - \frac{1}{c} \mathbf{m}\mathbf{r} \right)$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} (1 - i\alpha \mathbf{m} \times) \mathbf{E} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad (12.45)$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} (1 - i\tilde{\alpha} \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = [\mathbf{m}\mathbf{E}], \quad (12.46)$$

где

$$\alpha = k_0 \alpha_1, \quad k_0 = \omega/c. \quad (12.47)$$

В соотношениях (12.45), (12.46) заключена вся теория распространения плоских волн в гиротропных средах, относящихся к любой кристаллической симметрии. В случае кри-

сталлов кубической симметрии (и изотропных сред) величины  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  будут скалярами. Полагая  $\mu=1$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \epsilon \mathbf{E} - i\epsilon\alpha [\mathbf{mE}] &= -[\mathbf{mH}], \\ \mathbf{H} - i\alpha [\mathbf{mH}] &= [\mathbf{mE}]. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Сравним эту систему уравнений с (11.30). Если подставить  $[\mathbf{mH}]$  из первого уравнения (12.48) во второе и пренебречь квадратом малой величины  $\alpha$ , то получим

$$\mathbf{H} + i\epsilon\alpha \mathbf{E} = [\mathbf{mE}],$$

т. е. приходим к системе (11.30), в которой  $\alpha$  заменено на  $\epsilon\alpha$ . Таким образом, полученная из чисто феноменологических рассуждений с учетом лишь требования сохранения энергии система уравнений (12.44), (12.48) совпадает (для случая изотропных сред) с системой (11.30), полученной путем строгого молекулярного расчета\*). Поскольку (12.48) совпадает с (11.30), то (см. § 11) наши уравнения (12.44) действительно описывают явление вращения плоскости поляризации, т. е. гиротропные среды.

Уравнения (12.44) были получены из условия сохранения энергии поля для неограниченной среды. Однако, как было отмечено выше, уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения энергии, при материальных уравнениях (12.44) остается в силе и в случае любой зависимости тензора гирации  $\alpha_1$  от координат. Поэтому на границе гиротропных сред должен соблюдаться баланс потоков энергии падающей, отраженных и преломленных волн. Но это условие равносильно сохранению энергии поля только в отсутствие диссипации. Поэтому мы покажем сначала, что в среде, характеризуемой уравнениями связи (12.44), отсутствует диссипация энергии.

Условие отсутствия диссипации энергии в периодическом поле (см. [66]) имеет вид  $\int \mathbf{E} \mathbf{D} dV = 0$  или при использовании комплексных выражений для полей (см. (12.5))

$$\text{Im} \int \mathbf{E} \mathbf{D}^* dV = 0. \quad (12.49)$$

Однако в нашем случае это условие нуждается в обобщении в связи с тем, что в гиротропных средах, как уже не раз отмечалось выше, существует тесная связь между электрическими и магнитными величинами, проявляющаяся, в частности, в том, что один и тот же тензор гирации  $\alpha_1$  входит в выражения для  $\mathbf{D}$  и для  $\mathbf{B}$  (12.44). Поэтому вместо (12.49) в гиротропных

\*) На самом деле уравнения (12.44), (12.48) являются более точными, чем (11.30), поскольку при выводе последних пренебрегалось добавочной поляризацией, создаваемой магнитным полем волны [113, 106] как более слабым эффектом. Именно этим и обусловлено расхождение в величинах порядка  $\alpha^2$  между (11.30) и (12.48).

средах при отсутствии диссипации в периодическом поле должно выполняться более общее условие, симметричное относительно электрических и магнитных величин:

$$\operatorname{Im} \int (\mathbf{E}\mathbf{D}^* + \mathbf{H}\mathbf{B}^*) dV = 0. \quad (12.50)$$

Покажем, что из основной системы уравнений (12.43), (12.44) вытекает справедливость этого условия. Поскольку все поля пропорциональны  $e^{i\omega t}$ , то, согласно (12.43),

$$\nabla \times \mathbf{H} = +ik_0 \mathbf{D}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -ik_0 \mathbf{B}$$

и, следовательно, уравнения (12.44) принимают вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - i\varepsilon \alpha \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + i\mu \tilde{\alpha} \mathbf{D}. \quad (12.51)$$

Подставляя  $\mathbf{D}$  из первого уравнения во второе и  $\mathbf{B}$  из второго уравнения в первое, получаем

$$\begin{aligned} (1 - \kappa \tilde{\alpha}) \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} - i\kappa \mathbf{H}, \\ (1 - \tilde{\kappa} \alpha) \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + i\tilde{\kappa} \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (12.52)$$

где

$$\kappa = \varepsilon \alpha \mu. \quad (12.53)$$

Следовательно, при вещественных  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= (1 - \kappa \tilde{\alpha})^{-1} (\varepsilon \mathbf{E}^* + i\kappa \mathbf{H}^*), \\ \mathbf{B}^* &= (1 - \tilde{\kappa} \alpha)^{-1} (\mu \mathbf{H}^* - i\tilde{\kappa} \mathbf{E}^*). \end{aligned} \quad (12.54)$$

Согласно (26.94), имеем

$$(1 - \kappa \tilde{\alpha})^{-1} = 1 + \frac{|\kappa \tilde{\alpha}| + (1 - (\kappa \tilde{\alpha})_t) \kappa \tilde{\alpha} + (\kappa \tilde{\alpha})^2}{|1 - \kappa \tilde{\alpha}|}, \quad (12.55)$$

причем

$$|1 - \kappa \tilde{\alpha}| = 1 - (\kappa \tilde{\alpha})_t + \overline{(\kappa \tilde{\alpha})_t} - |\kappa \tilde{\alpha}|. \quad (12.56)$$

Вследствие известных свойств матриц (см. § 25)

$$(\alpha \beta)_t = (\beta \alpha)_t = (\tilde{\beta} \tilde{\alpha})_t = (\tilde{\alpha} \tilde{\beta})_t, \quad |\alpha| = |\tilde{\alpha}|,$$

имеем

$$(\kappa \tilde{\alpha})_t = (\tilde{\kappa} \alpha)_t, \quad \overline{(\kappa \tilde{\alpha})_t} = \overline{(\tilde{\kappa} \alpha)_t}, \quad |\kappa \tilde{\alpha}| = |\tilde{\kappa} \alpha|, \quad (12.57)$$

поэтому  $|1 - \kappa \tilde{\alpha}| = |1 - \tilde{\kappa} \alpha|$  и

$$\begin{aligned} (1 - \kappa \tilde{\alpha})^{-1} &= \xi + \eta \kappa \tilde{\alpha} + \zeta (\kappa \tilde{\alpha})^2, \\ (1 - \tilde{\kappa} \alpha)^{-1} &= \xi + \eta \tilde{\kappa} \alpha + \zeta (\tilde{\kappa} \alpha)^2, \end{aligned} \quad (12.58)$$



причем скалярные коэффициенты  $\xi, \eta, \zeta$  одинаковы в обеих формулах. С помощью (12.54), (12.58) находим

$$ED^* + \mathbf{H}\mathbf{B}^* = E\gamma_1 E^* + \mathbf{H}\gamma_2 \mathbf{H}^* - i(\mathbf{H}\gamma_3 E^* - E\gamma_4 \mathbf{H}^*), \quad (12.59)$$

где

$$\gamma_1 = (1 - \kappa\tilde{\alpha})^{-1} \varepsilon, \quad \gamma_2 = (1 - \tilde{\kappa}\alpha)^{-1} \mu, \quad (12.60)$$

$$\gamma_3 = (1 - \tilde{\kappa}\alpha)^{-1} \tilde{\kappa}, \quad \gamma_4 = (1 - \kappa\tilde{\alpha})^{-1} \kappa. \quad (12.61)$$

Из (12.53) следует

$$\tilde{\kappa}\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}, \quad (\tilde{\kappa}\alpha)^2 \varepsilon = \varepsilon\alpha\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}\alpha\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}, \quad (12.62)$$

$$\tilde{\kappa}\alpha\mu = \mu\tilde{\alpha}\varepsilon\mu, \quad (\tilde{\kappa}\alpha)^2 \mu = \mu\tilde{\alpha}\varepsilon\mu\tilde{\alpha}\varepsilon\mu.$$

Легко видеть, что все эти матрицы симметричны, откуда, согласно (12.58), (12.60), получаем, что симметричны также матрицы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (напомним, что  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ ,  $\tilde{\mu} = \mu$ ):

$$\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = \tilde{\gamma}_2. \quad (12.63)$$

В свою очередь из (12.58), (12.61) имеем

$$\gamma_3 = \xi\tilde{\kappa} + \eta\tilde{\kappa}\alpha\tilde{\kappa} + \zeta\tilde{\kappa}\alpha\tilde{\kappa}\alpha\tilde{\kappa},$$

$$\gamma_4 = \xi\kappa + \eta\kappa\alpha\kappa + \zeta\kappa\alpha\kappa\alpha\kappa,$$

откуда следует

$$\gamma_4 = \tilde{\gamma}_3. \quad (12.64)$$

Если учесть также, что все матрицы  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  вещественны, то становится ясным, что

$$E\gamma_1 E^* = E^*\gamma_1 E = (E\gamma_1 E^*)^*, \quad \mathbf{H}\gamma_2 \mathbf{H}^* = (\mathbf{H}\gamma_2 \mathbf{H}^*)^*$$

и

$$E\gamma_4 \mathbf{H}^* = \mathbf{H}^*\tilde{\gamma}_4 E = \mathbf{H}^*\gamma_3 E = (\mathbf{H}\gamma_3 E^*)^*.$$

Таким образом, в правой части уравнения (12.59) первые два члена вещественны, а в третьем члене в скобках стоит разность двух комплексно сопряженных выражений, поэтому третий член также веществен. Следовательно, условие (12.50) доказано.

Итак, в рассматриваемых нами гиротропных средах, характеризующихся уравнениями связи (12.44), отсутствует диссипация энергии. Поэтому на границе таких сред (см. § 8) нормальная составляющая интерференционного потока двух преломленных волн должна обращаться в нуль, что является необходимым условием для баланса потоков энергии волн при

отражении и преломлении в обычной форме (8.98). Согласно § 8, нужно показать, что

$$\operatorname{Re} \mathbf{q} ([\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2^*] + [\mathbf{E}_2^* \mathbf{H}_1]) = 0, \quad (12.65)$$

где  $\mathbf{q}$  — нормаль к поверхности гиротропной среды;  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  — электрические и магнитные векторы поля двух преломленных в гиротропной среде волн. С учетом (12.52), (12.54) выпишем уравнения (12.45), (12.46) для первой волны и сопряженные с ними для второй волны

$$-[\mathbf{m}_1 \mathbf{H}_1] = (1 - \tilde{\kappa} \alpha)^{-1} (\epsilon \mathbf{E}_1 - i \kappa \mathbf{H}_1), \quad (12.66)$$

$$[\mathbf{m}_1 \mathbf{E}_1] = (1 - \tilde{\kappa} \alpha)^{-1} (\mu \mathbf{H}_1 + i \tilde{\kappa} \mathbf{E}_1),$$

$$-[\mathbf{m}_2^* \mathbf{H}_2^*] = (1 - \tilde{\kappa} \alpha)^{-1} (\epsilon \mathbf{E}_2^* + i \kappa \mathbf{H}_2^*), \quad (12.67)$$

$$[\mathbf{m}_2^* \mathbf{E}_2^*] = (1 - \tilde{\kappa} \alpha)^{-1} (\mu \mathbf{H}_2^* - i \tilde{\kappa} \mathbf{E}_2^*).$$

Умножим уравнения (12.66) соответственно на  $\mathbf{E}_2^*, \mathbf{H}_2^*$ , а уравнения (12.67) — на  $-\mathbf{E}_1, -\mathbf{H}_1$  и сложим результаты. В итоге получим

$$(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2^*) ([\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2^*] + [\mathbf{E}_2^* \mathbf{H}_1]) = \mathbf{E}_2^* \gamma_1 \mathbf{E}_1 + \mathbf{H}_2^* \gamma_2 \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \gamma_1 \mathbf{E}_2^* - \\ - \mathbf{H}_1 \gamma_2 \mathbf{H}_2^* - i (\mathbf{E}_2^* \gamma_4 \mathbf{H}_1 + \mathbf{E}_1 \gamma_4 \mathbf{H}_2^* - \mathbf{H}_2^* \gamma_3 \mathbf{E}_1 - \mathbf{H}_1 \gamma_3 \mathbf{E}_2^*).$$

Вследствие свойств симметрии матриц  $\gamma$  (12.63), (12.64) правая часть обращается в нуль. Поэтому, считая  $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2^* = (\eta_1 - \eta_2^*) \mathbf{q}$ ,  $\eta_1 \neq \eta_2^*$  (§ 8), получаем

$$\mathbf{q} ([\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2^*] + [\mathbf{E}_2^* \mathbf{H}_1]) = 0, \quad (12.68)$$

т. е. соотношение (12.65) выполняется, а следовательно, как внутри рассматриваемой гиротропной среды, так и на ее границе соблюдается закон сохранения энергии.

### § 13. ДРУГИЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ СВЯЗИ

В предыдущем параграфе были получены общие уравнения связи (12.32) для произвольных оптически активных сред

$$\mathbf{D} = \epsilon (1 + \alpha \nabla \times) \mathbf{E}, \quad (13.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu (1 + \tilde{\alpha} \nabla \times) \mathbf{H}$$

и показано, что закон сохранения энергии (1.10) в обычной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \dot{\omega} = 0 \quad (13.2)$$

соблюдается, если вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  и плотность энергии  $\omega$  выражаются следующим образом:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad \omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D}\epsilon^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mu^{-1}\mathbf{B}). \quad (13.3)$$

Показано также, что в среде, описываемой уравнениями связи (13.1), отсутствует диссипация энергии, поскольку выполняется условие (12.50)

$$\operatorname{Im} \int (\mathbf{E}\mathbf{D}^* + \mathbf{H}\mathbf{B}^*) dV = 0. \quad (13.4)$$

Установлено, наконец, что при отражении и преломлении плоских гармонических волн на поверхности такой среды точно соблюдается баланс потоков энергии (8.98), поскольку для обеих преломленных в этой среде волн имеет место соотношение (12.65)

$$\operatorname{Re} q ([\mathbf{E}_I \mathbf{H}_2^*] + [\mathbf{E}_2^* \mathbf{H}_I]) = 0, \quad (13.5)$$

выполняющееся на основании обычных граничных условий

$$[\mathbf{E}_I - \mathbf{E}_{II}, \mathbf{q}] = 0, \quad (\mathbf{B}_I - \mathbf{B}_{II}) \mathbf{q} = 0, \quad (13.6a)$$

$$[\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}, \mathbf{q}] = 0, \quad (\mathbf{D}_I - \mathbf{D}_{II}) \mathbf{q} = 0. \quad (13.6b)$$

Таким образом, уравнения связи (13.1) совместно с уравнениями Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, \quad (13.7)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad (13.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}, \quad (13.9)$$

$$\nabla \mathbf{D} = 0 \quad (13.10)$$

и граничными условиями (13.6) образуют полную систему уравнений электродинамики гиротропных сред, точно удовлетворяющую всем необходимым условиям и свободную от противоречий.

Возникает вопрос, в каком отношении к этой теории находятся уравнения, описывающие гиротропию, введенные в [66, 117]. Этот вопрос был подвергнут детальному рассмотрению в ряде работ [2, 120—122, 124]. В работе [120] было показано, что путем некоторого переопределения векторов электромагнитного поля система уравнений (13.1), (13.6), (13.8) может быть приближенно приведена к уравнениям, введенным в [66]. Возможность упомянутого переопределения тесно связана с отмеченной в §1 (см. [2]) неоднозначностью решений уравнений Максвелла.

Следуя [120], из (13.1), (13.9) находим соотношение

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B} - \tilde{\alpha} \nabla \times \mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \tilde{\alpha} \dot{\mathbf{D}}. \quad (13.11)$$

Введем переопределенные векторы магнитной напряженности  $\mathbf{H}'$  и электрической индукции  $\mathbf{D}'$  следующим образом:

$$\mathbf{H}' = \mu^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{H} + \frac{1}{c} \tilde{\alpha} \dot{\mathbf{D}}, \quad (13.12)$$

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \nabla \times \tilde{\alpha} \mathbf{D} = (1 + \nabla \times \tilde{\alpha}) \mathbf{D}. \quad (13.13)$$

Эти соотношения следуют из (1.4), если положить  $\mathbf{Q} = \tilde{\alpha} \dot{\mathbf{D}}$ . Очевидно, согласно (13.10), будем иметь

$$\nabla \mathbf{D}' = 0. \quad (13.14)$$

С другой стороны, из (13.12), (13.9), (13.13) имеем

$$\nabla \times \mathbf{H}' = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{1}{c} \nabla \times \tilde{\alpha} \mathbf{D} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} + \nabla \times \tilde{\alpha} \mathbf{D}),$$

или

$$\nabla \times \mathbf{H}' = \frac{1}{c} \mathbf{D}'. \quad (13.15)$$

Уравнения (13.14), (13.15) имеют вид уравнений Максвелла (13.10), (13.9) для переопределенных векторов  $\mathbf{D}'$ ,  $\mathbf{H}'$ .

Подставим в (13.13) выражение (13.1) для  $\mathbf{D}$  и пренебрежем членом  $\nabla \times \tilde{\alpha} \varepsilon \alpha \nabla \times \mathbf{E}$ , квадратичным по тензору гирации  $\alpha$ . Получим

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon \alpha \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \tilde{\alpha} \varepsilon \mathbf{E}. \quad (13.16)$$

Согласно (26.88), можем написать

$$\varepsilon \alpha \nabla \times + \nabla \times \tilde{\alpha} \varepsilon = (\varepsilon \alpha) \nabla \times + \nabla \times (\tilde{\alpha} \varepsilon) \equiv (\varepsilon \alpha)_t \nabla \times - (\tilde{\alpha} \varepsilon \nabla) \times = (\gamma \nabla) \times, \quad (13.17)$$

где

$$\gamma = (\varepsilon \alpha)_t - \tilde{\alpha} \varepsilon = (\tilde{\alpha} \varepsilon)_t - \tilde{\alpha} \varepsilon. \quad (13.18)$$

В результате уравнение (13.16) принимает вид

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E} + [\gamma \nabla, \mathbf{E}], \quad (13.19)$$

т. е. оно совпадает с уравнением связи (12.7). Таким образом, переопределенная система уравнений Максвелла и уравнений связи выглядит следующим образом:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad (13.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}' = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}', \quad \nabla \mathbf{D}' = 0,$$

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E} + [\gamma \nabla, \mathbf{E}], \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}'. \quad (13.20a)$$

При  $\mu=1$  отсюда следует теория, изложенная в [66], которая, как следует из приведенного вывода, является приближенной.

В [66] не был рассмотрен вопрос о законе сохранения энергии в гиротропных средах, который является далеко не тривиальным. Искомые соотношения можно получить следующим образом (см. [120]). В силу (26.88) имеем

$$(\gamma \nabla)^\times \equiv \gamma_t \nabla^\times - \tilde{\gamma} \nabla^\times - \nabla^\times \gamma, \quad (13.21)$$

поэтому соотношение (13.19) можно написать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' &= \varepsilon \mathbf{E} + (\gamma_t - \tilde{\gamma}) [\nabla \mathbf{E}] - [\nabla, \gamma \mathbf{E}] \equiv \\ &\equiv \varepsilon \mathbf{E} + \tilde{\gamma}' \operatorname{rot} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \gamma' \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (13.22)$$

где

$$\gamma' = \frac{1}{2} \gamma_t - \gamma. \quad (13.22a)$$

Используя (13.7), уравнению (13.15) можно теперь придать форму

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{H}' - \frac{1}{c} \gamma' \dot{\mathbf{E}} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon \mathbf{E} - \frac{1}{c} \tilde{\gamma}' \dot{\mathbf{B}} \right). \quad (13.23)$$

Умножив это уравнение скалярно на  $\mathbf{E}$ , а уравнение (13.7) на  $\mathbf{H}' - \frac{1}{c} \gamma' \dot{\mathbf{E}}$  и взяв разность, получим после некоторых преобразований (см. (1.7a))  $\operatorname{div} \mathbf{S} + \dot{\omega} = 0$ , где

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \left[ \mathbf{E}, \mathbf{H}' - \frac{1}{c} \gamma' \dot{\mathbf{E}} \right], \quad (13.24)$$

$$\omega = \frac{1}{8\pi} \left( \mathbf{E} \left( \varepsilon \mathbf{E} - \frac{2}{c} \tilde{\gamma}' \dot{\mathbf{B}} \right) + \mathbf{B} \mu^{-1} \dot{\mathbf{B}} \right). \quad (13.25)$$

Однако вместо того чтобы проделывать указанный расчет, мы можем воспользоваться готовыми выражениями (13.3) для  $\mathbf{S}$  и  $\omega$  и перейти в них от первоначальных векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$  к переопределенным  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{D}'$ .

Действительно, из (13.13) имеем с точностью до величин второго порядка по параметрам активности

$$\mathbf{D} = (1 + \nabla^\times \tilde{\alpha})^{-1} \mathbf{D}' = (1 - \nabla^\times \tilde{\alpha}) \mathbf{D}'. \quad (13.26)$$

Затем из (13.12) с той же точностью находим

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} \tilde{\alpha} \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} \tilde{\alpha} \dot{\mathbf{D}}', \quad (13.27)$$

или после подстановки выражения (13.19) для  $\mathbf{D}'$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} \tilde{\alpha} \varepsilon \dot{\mathbf{E}}. \quad (13.28)$$

Уравнение (13.18) легко разрешается относительно  $\tilde{\alpha} \varepsilon$ . Взяв от него след, получим  $(\tilde{\alpha} \varepsilon)_t = \frac{1}{2} \gamma_t$ , после чего это же уравнение дает (см. (13.22))

$$\tilde{\alpha} \varepsilon = (\tilde{\alpha} \varepsilon)_t - \gamma = \frac{1}{2} \gamma_t - \gamma = \gamma'. \quad (13.29)$$

Таким образом, согласно (13.28),

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} \gamma' \dot{\mathbf{E}}. \quad (13.30)$$

Теперь ясно, что выражение (13.24) для  $\mathbf{S}$  есть не что иное, как выражение (13.3) с заменой (13.30). Аналогично член  $\mathbf{D} \varepsilon^{-1} \mathbf{D}$  в  $\omega$  (13.3), согласно (13.26), (13.19), представляется в виде

$$\mathbf{D} \varepsilon^{-1} \mathbf{D} = (\varepsilon \mathbf{E} + [\gamma \nabla, \mathbf{E}] - \nabla \times \tilde{\alpha} \varepsilon \mathbf{E}) \varepsilon^{-1} (\varepsilon \mathbf{E} + [\gamma \nabla, \mathbf{E}] - \nabla \times \tilde{\alpha} \varepsilon \mathbf{E})$$

или, учитывая (13.29) и оставляя члены первого порядка по параметрам оптической активности,

$$\mathbf{D} \varepsilon^{-1} \mathbf{D} = \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} + 2\mathbf{E} ((\gamma \nabla)^\times - \nabla \times \gamma') \mathbf{E}. \quad (13.31)$$

Но с учетом (13.29) соотношение (13.17) принимает вид

$$\tilde{\gamma}' \nabla \times + \nabla \times \gamma' \equiv (\gamma \nabla)^\times, \quad (13.32)$$

потому (см. (13.26))

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + ((\gamma \nabla)^\times - \nabla \times \gamma') \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} + \tilde{\gamma}' [\nabla \mathbf{E}]. \quad (13.33)$$

В результате из (13.31) имеем (см. также (13.7))

$$\mathbf{D} \varepsilon^{-1} \mathbf{D} = \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} + 2\mathbf{E} \tilde{\gamma}' \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} - \frac{2}{c} \mathbf{E} \tilde{\gamma}' \dot{\mathbf{B}}.$$

Подставляя это в  $\omega$  (13.3), получаем (13.25).

Таким же путем мы можем получить новые граничные условия для переопределенных векторов. Поскольку векторы

$\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в системе (13.20) не подвергаются переопределению, то для них сохраняются обычные граничные условия (13.6а). Что же касается  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$ , то здесь мы должны ввести в граничные условия (13.6б) переопределенные векторы с помощью уравнений (13.30), (13.26). В результате получаем новые граничные условия для  $\mathbf{H}'$ :

$$[\mathbf{H}'_I - \mathbf{H}'_{II}, \mathbf{q}] = \frac{1}{c} [\gamma'_I \dot{\mathbf{E}}_I - \gamma'_{II} \dot{\mathbf{E}}_{II}, \mathbf{q}]. \quad (13.34)$$

Соответствующие условия для  $\mathbf{D}'$  имеют вид

$$(\mathbf{D}'_I - \mathbf{D}'_{II}) \mathbf{q} = \mathbf{q} (\text{rot}(\tilde{\alpha}'_I \mathbf{D}'_I) - \text{rot}(\tilde{\alpha}'_{II} \mathbf{D}'_{II})). \quad (13.35)$$

Им можно придать иную форму, если учесть, что, согласно (13.19), (13.22), с упомянутой точностью

$$\tilde{\alpha}' \mathbf{D}' = \tilde{\alpha} \varepsilon \mathbf{E} = \gamma' \mathbf{E}, \quad (13.36)$$

следовательно (см. (13.26)),

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' - \text{rot} \gamma' \mathbf{E}. \quad (13.37)$$

Подставляя это значение  $\mathbf{D}$  в (13.6б), получим

$$(\mathbf{D}'_I - \mathbf{D}'_{II}) \mathbf{q} = \mathbf{q} \text{rot} (\gamma'_I \mathbf{E}_I - \gamma'_{II} \mathbf{E}_{II}). \quad (13.38)$$

Система уравнений (13.20) характерна тем, что в ней, так сказать, вся ответственность за свойство оптической активности возложена на уравнение связи между электрическими векторами  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{E}$ , поскольку в основных уравнениях тензор гирации  $\gamma$  нигде больше не входит. Однако из показанной в (1.3), (1.4) общей возможности переопределения всех электромагнитных величин (см. [2]) следует, что уравнения (13.20) реализуют лишь один из бесчисленного множества различных способов перехода к новым системам уравнений Максвелла. В работе [120] был указан другой возможный способ переопределения величин, который является дуальным по отношению к рассмотренному выше переопределению.

Как известно, обычные уравнения свободного электромагнитного поля в среде (1.1), (1.2), (1.5) при  $\rho=0$ ,  $\mathbf{I}=0$  инвариантны относительно преобразований дуальности, которые сводятся к следующей перестановке величин:

$$\mathbf{D} \rightarrow \pm \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mp \mathbf{D}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \pm \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mp \mathbf{E}, \quad \varepsilon \rightleftharpoons \mu. \quad (13.39)$$

Полученная в § 12 система уравнений свободного электромагнитного поля в гиротропных средах также инвариантна относительно дуальных преобразований (13.39), дополненных следующей заменой тензора гирации:

$$\alpha \rightleftharpoons \tilde{\alpha}. \quad (13.40)$$

Поскольку это свойство дуальности справедливо для основных уравнений (13.1) и уравнений Максвелла, то его можно применять к любым следствиям из них, в частности, к (13.19), (13.20), (13.24), (13.25), (13.30), (13.33), (13.34), (13.38). Таким путем получим новую приближенную систему уравнений электродинамики гиротропных сред [120]:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}, \quad \nabla \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}', \\ \nabla \times \mathbf{E}' &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}', \quad \nabla \mathbf{B}' = 0, \quad \mathbf{B}' = \mu \mathbf{H} + [\sigma \nabla, \mathbf{H}]; \end{aligned} \right\} \quad (13.41)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \sigma' \dot{\mathbf{H}}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \tilde{\sigma}' [\nabla \mathbf{H}]; \quad (13.42)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \left[ \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \sigma' \dot{\mathbf{H}}, \mathbf{H} \right], \quad (13.43)$$

$$\omega = \frac{1}{8\pi} \left( \mathbf{D} \epsilon^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{H} \left( \mu \mathbf{H} + \frac{2}{c} \tilde{\sigma}' \dot{\mathbf{D}} \right) \right);$$

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}, \mathbf{q}] &= 0, \quad (\mathbf{D}_I - \mathbf{D}_{II}) \mathbf{q} = 0, \\ [\mathbf{E}'_I - \mathbf{E}'_{II}, \mathbf{q}] &= -\frac{1}{c} [\sigma'_I \dot{\mathbf{H}}_I - \sigma'_{II} \dot{\mathbf{H}}_{II}, \mathbf{q}], \\ (\mathbf{B}'_I - \mathbf{B}'_{II}) \mathbf{q} &= \frac{1}{c} \mathbf{q} \text{rot} (\sigma'_I \mathbf{H}_I - \sigma'_{II} \mathbf{H}_{II}). \end{aligned} \right\} \quad (13.44)$$

Здесь тензоры  $\sigma$  и  $\sigma'$  получаются соответственно из  $\gamma$  (13.18) и  $\gamma'$  (13.22), (13.29) путем дуальной замены:

$$\sigma = (\alpha\mu)_t - \alpha\mu, \quad \sigma' = \frac{1}{2} \sigma_t - \sigma = \alpha\mu. \quad (13.45)$$

Заметим, что последняя система уравнений следует из соотношений (1.3), (1.4), если положить в них  $\mathbf{Q} = 0$ ,  $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{B}$ .

Таким образом, мы получили две различные, но в принципе совершенно равноправные приближенные системы уравнений электродинамики гиротропных сред. Однако, на самом деле, придавая в формулах (1.3), (1.4) произвольным векторам  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  различные значения, можно получить бесчисленное множество других формулировок. В частности (см [121]), предложенная в [117] теория с двумя тензорами гирации и уравнениями связи (см. § 12)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + [\beta \nabla, \mathbf{E}], \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + [\kappa \nabla, \mathbf{H}] \quad (13.46)$$



также может быть получена как приближенный частный случай из (13.1), если между тензорами  $\beta$ ,  $\kappa$  и основным тензором гирации  $\alpha$  установить соотношение

$$\alpha = \varepsilon^{-1} \left( \frac{1}{2} \beta_t - \beta \right) + \left( \frac{1}{2} \kappa_t - \kappa \right) \mu^{-1}. \quad (13.47)$$

В работе [121] показано далее, что если в соотношениях переопределения (1.3), (1.4) положить

$$\mathbf{P} = -\theta\alpha\mathbf{B}, \quad \mathbf{Q} = (1 - \theta)\tilde{\alpha}\mathbf{D}, \quad (13.48)$$

где  $\theta$  — постоянное число, то при непрерывном изменении  $\theta$  мы получим целый спектр различных систем уравнений электродинамики гиротропных сред. Все эти системы получаются из одной и той же основной дуально инвариантной системы (13.1) при ограничении членами первого порядка по параметрам гиротропии. Каждой такой системе соответствуют зависящие от  $\theta$  выражения для  $\mathbf{S}$ ,  $\omega$  и уравнения граничных условий. Рассмотренные выше уравнения (13.20), (13.24), (13.25), (13.34), (13.38) и (13.41) — (13.44) получаются, если в общих соотношениях, приведенных в [121], положить соответственно  $\theta=0$  или  $\theta=1$ . Для каждой из упомянутых систем уравнений будет точно соблюдаться закон сохранения энергии внутри гиротропной среды. Однако на ее границе он будет соблюдаться лишь с точностью до величин второго порядка по параметрам гиротропии.

Изложенная ситуация имеет уникальный характер и лишней раз свидетельствует о специфичности и своеобразии явления гиротропии. Вряд ли можно назвать другой раздел физики, связанный с таким многообразием трактовок. Этим обусловлено то, что наряду с уже упоминавшимся выше огромным значением явления оптической активности для химии, биологии и т. д. оно представляет исключительно большой принципиальный интерес для физической теории вообще, поскольку в нем обнаруживаются некоторые весьма специфические, глубокие и тонкие аспекты электродинамики.

Разумеется, такое положение, когда одно и то же явление можно описывать с помощью многих различных систем уравнений, никак нельзя было бы признать удовлетворительным. Однако в данном случае вопрос разрешается просто — не подлежит сомнению, что «настоящей», правильной системой уравнений, описывающих явление гиротропии, следует считать обычную систему уравнений Максвелла совместно с установленными в [118] уравнениями связи (13.1). В пользу этого утверждения говорит ряд аргументов самого фундаментального характера. Прежде всего это единственная система уравнений, для которой совершенно точно соблюдается закон сохра-

нения энергии как внутри гиротропной среды, так и для плоских гармонических волн, падающих на ее границу (см. § 12). При этом закон сохранения энергии в обычной форме (13.2) соблюдается при тех же выражениях (13.3) для вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}$  и плотности энергии  $\omega$ , что и для негиротропных сред и при тех же граничных условиях. Заметим в связи с этим, что из проведенного рассмотрения следует, что более общее, правильное во всех случаях выражение для плотности энергии электромагнитного поля следует писать именно в форме (13.3)

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D}\epsilon^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mu^{-1}\mathbf{B}),$$

а не в форме (1.14), (1.15)

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}_e\mathbf{E} + \mathbf{H}_m\mathbf{H}),$$

до сих пор принятой в электродинамике. Действительно, выражение (13.3) оказывается справедливым и тогда, когда соотношения (1.14), (1.15) теряют силу. Далее, система (13.1) находится в полном соответствии с выводами микроскопической молекулярной теории (см. § 11), из которой следует, что гиротропные члены в уравнениях связи магнитных векторов играют такую же роль, как соответствующие члены в уравнениях связи электрических величин. Кроме того, эта система находит свое обоснование в результате более глубокого квантовомеханического рассмотрения [112]. Система (13.1) обладает также свойством дуальной инвариантности (13.39), (13.40).

Таким образом, уравнения (13.1) полностью и точно удовлетворяют всем известным требованиям, какие только можно предъявить к системе электродинамических уравнений. К преимуществам этой системы следует отнести и то, что граничные условия для нее имеют такой же простой вид (13.6), как и в электродинамике негиротропных сред. Можно сказать, что система (13.1) является наиболее естественным обобщением электродинамики негиротропных сред, сохраняющим неизменным максимум симметричных свойств и других соотношений обычной теории недиссипирующих сред. В ряде случаев рассмотрение теории электромагнитного поля в гиротропных средах приводит к углублению, уточнению и расширению некоторых аспектов традиционной электродинамики. Выше уже отмечалось, что общее выражение для плотности энергии поля следует писать в виде (13.3), а не (1.14), (1.15). Можно упомянуть также установленную в § 12 необходимость отыскания такой формулировки закона сохранения энергии, которая бы-

ла бы справедлива для неоднородных сред. В негиротропных средах такой вопрос вообще не возникал, поскольку соответствующее условие выполнялось автоматически. Укажем еще на условие отсутствия диссипации (12.50), которое обобщает обычное условие (12.49) [66], что вызвано наличием специфической связи между электрическими и магнитными величинами в гиротропных средах.

В § 11 уже отмечалось, что теории оптической активности в некотором смысле «не повезло», поскольку изложение ее в ряде фундаментальных монографий и руководств, не говоря уже об отдельных статьях, нередко сопряжено с неточностями и ошибками. Автор настоящей книги склоняется к мнению, что в этом отношении теория гиротропии, возможно, занимает одно из первых, если не первое место среди других физических теорий. Так, М. Борн в своей классической монографии [10] справедливо подвергает критике К. Ферстерлинга [123] за неправильную трактовку явления оптической активности. В свою очередь сам Борн в своих работах [106] допустил неточности, исправленные в [108, 24]. Он же в книге [10] при рассмотрении свойств плоских волн в гиротропных кристаллах пришел к необоснованным выводам, которые будут частично рассмотрены ниже (§ 21, 22) \*). Эти выводы были воспроизведены в капитальной статье по кристаллооптике Г. Шивесси. Не избежали ошибочных утверждений в своих монографиях Ф. Поккельс [27] и А. В. Шубников [131]. Следует подчеркнуть, что упомянутые неточности и неверные утверждения не имеют ничего общего с теми случаями, когда целые разделы физики существенно изменяются в результате новых открытий, как это было, например, после создания теории относительности и квантовой механики. Действительно, молекулярная теория оптической активности в работах [106, 107] развивалась после создания теории относительности, а в феноменологической теории закономерности квантовой механики вообще не используются. Таким образом, здесь не может идти речь о необоснованных утверждениях, вызванных неучетом каких-то новых закономерностей, не известных ранее. По существу все необходимое для построения правильной теории, изложенной в § 12, было известно еще в начале текущего столетия.

Мы не станем вдаваться в причины такого положения вещей, а приведем лишь дополнительные примеры, относящиеся к последнему времени. Уже отмечалось, что теория оптической активности, изложенная в многократно цитированной монографии [66], не может быть признана удовлетворитель-

\*) Справедливость требует отметить, что М. Борн понимал нестрогость излагаемых рассуждений и сделал в [10] специальную оговорку на этот счет (стр. 555).

ной. Как было показано выше, в этой теории не соблюдается точно баланс потоков энергии плоских волн на границе изотропно-гиротропной среды (см. (12.13)). То обстоятельство, что величина (12.13) имеет лишь второй порядок малости по параметру активности  $\alpha$ , не имеет принципиального значения, так как за достаточно большой промежуток времени нарушение баланса потоков энергии может достигнуть любой величины. Вообще в [66] совершенно не затрагиваются вопросы, связанные с законом сохранения энергии и формой граничных условий, которые, как следует из вышеизложенного, имеют фундаментальное значение для всей проблемы. Без рассмотрения этих вопросов не может быть и речи о построении правильной теории оптической активности. В соотношениях (13.24), (13.25), (13.34), (13.38) показано, как этот пробел можно приближенно восполнить, однако при этом было показано также, что существует дуально симметричная теория (13.41) — (13.44), которая ничем не хуже (хотя и не лучше) теории, изложенной в [66]. И таких теорий можно построить сколько угодно.

В [114], как уже отмечалось, также не соблюдается закон сохранения энергии для плоских волн на границе гиротропной среды.

Представляет интерес недавняя дискуссия по вопросам электродинамики гиротропных сред [125, 2, 126—129]. В работах [125, 126] авторы сделали попытку построить свой вариант электродинамики гиротропных сред. С этой целью они воспользовались полученным в [120] уравнением связи (13.22) и «обобщили» его, ограничившись простейшим частным случаем изотропной среды, написав его в виде

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E} + \delta_1 \operatorname{rot} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \delta_{II} \mathbf{E}, \quad (13.49)$$

где  $\delta_1 \neq \delta_{II}$  — некоторые скалярные константы. Если же применить уравнение (13.22) к случаю изотропных сред, то получим

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E} + \delta \operatorname{rot} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \delta \mathbf{E}. \quad (13.50)$$

Таким образом, отличие введенного в [125, 126] уравнения (13.49) от полученного ранее в [120] уравнения (13.50) заключается лишь в том, что вместо одного параметра  $\delta$  вводятся два параметра  $\delta_1$  и  $\delta_{II}$ .

Авторы [125, 126] не сделали какой-либо попытки обосновать в своем соотношении (13.49) неравенство  $\delta_1 \neq \delta_{II}$ , ограничившись утверждением, что такое уравнение связи может описывать свойства гиротропных сред.

Однако в [127] было показано, что при  $\delta_1 \neq \delta_{II}$  уравнение связи (13.49) находится в противоречии с требованием сохранения энергии при падении плоской волны на поверх-

ность гиротропной среды. Кроме того, это неравенство противоречит выводам квантовомеханической микротeorии [112] и принципу симметрии кинетических коэффициентов. Последнее обстоятельство было дополнительно обосновано в [128]. В последней работе [129] авторы воспроизвели вывод, приведенный в [128] \*), и признали ошибочность своего утверждения:  $\delta_I \neq \delta_{II}$  (см. также [164]).

Следует отметить, что работа [126] содержит ряд других неверных утверждений (см. [127]). В частности, в ней подвергается критике симметрия уравнений связи типа (13.1) относительно электрических и магнитных величин, хотя последняя является следствием релятивистских закономерностей и дуальной инвариантности.

#### § 14. ТЕНЗОР ГИРАЦИИ В КРИСТАЛЛАХ РАЗЛИЧНОЙ СИММЕТРИИ

Как следует из § 12, требования, связанные с законом сохранения энергии, приводят к выводу, что свойство оптической активности в кристаллах характеризуется тензором (точнее, псевдотензором) гирации  $\alpha$ , входящим в уравнения связи (12.21), (12.22). При этом в отличие от  $\epsilon$  и  $\mu$  тензор  $\alpha$  в общем случае не симметричен и не антисимметричен, т. е. все 9 его компонент могут быть независимыми.

В § 1 уже отмечалось, что симметрия кристаллов накладывает на тензоры  $\epsilon$  и  $\mu$  дополнительные ограничения по сравнению с теми, которые вытекают из закона сохранения энергии. Разумеется, это относится ко всем тензорным характеристикам кристалла, в том числе к тензору гирации  $\alpha$ . В данном параграфе мы выясним, какой вид может иметь тензор  $\alpha$  в кристаллах различных классов симметрии [117].

Все возможные преобразования симметрии кристаллов (за исключением трансляций) сводятся к одному из двух типов преобразований или к их комбинациям. Эти основные преобразования представляют собой поворот вокруг некоторой фиксированной оси  $s$  на угол  $\varphi_k = 2\pi/k$ , где  $k=2, 3, 4, 6$  и зеркальное отражение в плоскости, перпендикулярной некоторому единичному вектору  $s$  (см., например, [6, 132, 136]). В первом случае говорят, что кристалл обладает осью симметрии  $k$ -го порядка, которая обозначается просто числом  $k$ . Таким образом, в кристаллах возможны оси симметрии вто-

---

\*) Работа [128] поступила в редакцию ЖЭТФ на два месяца раньше, чем работа [129] была направлена в печать. Поскольку редколлегия ЖЭТФ отказалась публиковать статью [128], то она повторно была направлена в ЖПС и вышла в свет позже статьи [129].

рого (2), третьего (3), четвертого (4) и шестого (6) порядков. Разумеется, всякий кристалл, как и любое тело вообще, совмещается сам с собой также при повороте на  $360^\circ$ , что соответствует  $k=1$ , т. е. оси первого порядка. Вторым основным элементом симметрии является плоскость симметрии (плоскость зеркального отражения), которую обозначают символом  $m$ .

Возможен такой вид симметрии, когда кристалл совмещается сам с собой при одновременном выполнении (в любом порядке) операций поворота вокруг оси симметрии  $k$ -го порядка и отражения в перпендикулярной к ней плоскости симметрии. Такой элемент симметрии носит название зеркально-поворотной оси  $k$ -го порядка и обозначается символом  $\bar{k}$ . Очевидно, зеркально-поворотная ось будет новым элементом симметрии лишь в том случае, когда совмещение тела с собой происходит в результате выполнения обоих преобразований, но не каждого по отдельности. Легко показать, что зеркально-поворотная ось нечетного порядка равносильна наличию двух независимых элементов симметрии: оси и плоскости симметрии. Поэтому основными независимыми элементами симметрии могут являться лишь зеркально-поворотные оси  $\bar{2}$ ,  $\bar{4}$  и  $\bar{6}$ . Из них ось  $\bar{2}$  равносильна такому преобразованию, когда все координаты любой точки меняют знак. Это преобразование называется *инверсией*, или *отражением в точке*, в которой пересекаются ось и плоскость симметрии, называемой *центром симметрии*, или *центром инверсии*. Каждая зеркально-поворотная ось четного порядка влечет за собой наличие обычной оси симметрии вдвое меньшего порядка, в чем легко убедиться, осуществив соответствующее преобразование дважды. Вместо зеркально-поворотных осей  $\bar{4}$ ,  $\bar{6}$  можно говорить также о соответствующих инверсионных осях, поскольку эти преобразования можно рассматривать как произведение преобразований  $\bar{2}$  (инверсии) и 4 или 6.

Чтобы определить симметрию кристалла, достаточно задать один или несколько таких элементов симметрии (порождающих элементов), чтобы все остальные элементы симметрии получались в результате их повторения или комбинирования. В последнем столбце таблицы приведены соответствующие данные. При этом использована символика Шубникова, согласно которой точка ( $\cdot$ ) означает параллельность, а двоеточие ( $:$ ) — перпендикулярность одного элемента симметрии другому. Символ  $3/2$  обозначает оси симметрии, пересекающиеся под углом  $\alpha$ ,  $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$ .

Как известно, все вышеперечисленные группы кристаллической симметрии являются дискретными подгруппами трехмерной ортогональной группы  $O(3)$ . Пусть  $S$  — любое

### Симметрия кристаллов

Сингонии	Номер класса (по Гроту)	Класс (по номенклатуре Федоровского института)	Форма симметрии (по Шубникову)	
Низшие	Триклинная	1	Примитивный	
		2	Центральный	
	Моноклинная	3	Аксиальный	
		4	Планальный	
		5	Планаксиальный	
	Ромбическая	6	Аксиальный	
		7	Планальный	
		8	Планаксиальный	
Средние	Тетрагональная	9	Гироидо-примитивный	
		10	Примитивный	
		11	Гироидо-планальный	
		12	Аксиальный	
		13	Центральный	
		14	Планальный	
		15	Планаксиальный	
	Тригональная	16	Примитивный	
		17	Центральный	
		18	Аксиальный	
		19	Планальный	
		20	Планаксиальный	
	Гексагональная	21	Гироидо-примитивный	
		22	Гироидо-планальный	
		23	Примитивный	
		24	Аксиальный	
		25	Центральный	
		26	Планальный	
		27	Планаксиальный	
	Высшая	Кубическая	28	Примитивный
			29	Аксиальный
			30	Центральный
			31	Планальный
			32	Планаксиальный

преобразование этой группы. В таком случае для  $S$  будут справедливы соотношения (см. § 29)

$$S^{-1} = \bar{S}, \quad (14.1)$$

$$|S| = \pm 1, \quad \bar{\bar{S}} = \pm S, \quad (14.2)$$

причем знак (—) относится к случаю, когда преобразование  $S$  содержит отражение. Симметрия кристалла проявляется в том, что все характеризующие его соотношения между различными физическими величинами (векторами, тензорами) не меняют своего вида при выполнении любого преобразования  $S$ , относящегося к группе симметрии кристалла.

Рассмотрим с этой точки зрения основное уравнение связи (см. (13.1))

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon \alpha \nabla \times \mathbf{E}. \quad (14.3)$$

После выполнения преобразования  $S$  векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\nabla$  превратятся в

$$\mathbf{D}' = S\mathbf{D}, \quad \mathbf{E}' = S\mathbf{E}, \quad \nabla' = S\nabla. \quad (14.4)$$

Если  $S$  относится к преобразованиям группы симметрии кристалла, то для штрихованных величин должно остаться в силе уравнение (14.3):

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}' + \varepsilon \alpha \nabla' \times \mathbf{E}' \quad (14.5)$$

с прежними  $\varepsilon$  и  $\alpha$ . Неизменность  $\varepsilon$  и  $\alpha$ , как материальных параметров кристалла, при преобразовании  $S$  и является выражением его симметрии. Согласно общему соотношению (26.64), имеем

$$\nabla'^{\times} = (S\nabla)^{\times} = \tilde{S}^{-1} \nabla \times \bar{S}$$

или, учитывая (14.1),

$$\nabla'^{\times} = |S| S \nabla \times S^{-1}. \quad (14.6)$$

Подставляя (14.4), (14.6) в (14.5), получаем

$$S\mathbf{D} = \varepsilon S\mathbf{E} + \varepsilon \alpha |S| S \nabla \times \mathbf{E}.$$

Умножая полученное соотношение на  $S^{-1}$  и сравнивая с (14.3), находим

$$S^{-1} \varepsilon S = \varepsilon, \quad (14.7)$$

$$|S| S^{-1} \varepsilon \alpha S = \varepsilon \alpha. \quad (14.8)$$

В последнем равенстве вместо  $S^{-1} \varepsilon \alpha S$  можно написать  $(S^{-1} \varepsilon S)(S^{-1} \alpha S)$ , после чего, с учетом (14.7), оно принимает вид

$$|S| S^{-1} \alpha S = \alpha. \quad (14.9)$$

Окончательно условия (14.7), (14.9), налагаемые на  $\varepsilon$  и  $\alpha$  требованием инвариантности относительно ортогонального преобразования  $S$ , мы используем в следующей форме (см. (14.2)):

$$\varepsilon S = S \varepsilon, \quad (14.10)$$

$$\alpha S = \pm S \alpha. \quad (14.11)$$

Поступая точно таким же образом со вторым уравнением связи (12.21), приходим к соотношению

$$\mu S = S \mu \quad (14.12)$$

и к равенству  $\tilde{\alpha} S = \pm S \tilde{\alpha}$ . Однако если транспонировать последнее равенство, умножить справа и слева на  $\bar{S}$  и учесть



(14.1), то оно совпадает с (14.11). Таким образом, условия (14.10) — (14.12) необходимы и достаточны для того, чтобы тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  обладали свойствами, соответствующими симметрии кристалла.

Мы исследуем сначала вопрос о том (см. [117, 6]), какие ограничения налагают на общий вещественный трехмерный тензор  $\gamma$  условия

$$\gamma S = S\gamma \quad (14.13)$$

или

$$\gamma S = -S\gamma. \quad (14.14)$$

После умножения правой и левой частей на  $\tilde{S}$  получим, учитывая (14.1), что наряду с (14.13), (14.14) должны соответственно иметь место соотношения  $\gamma\tilde{S} = \pm\tilde{S}\gamma$  или соотношения

$$\gamma(S \pm \tilde{S}) = (S \pm \tilde{S})\gamma, \quad (14.15)$$

либо

$$\gamma(S \pm \tilde{S}) = -(S \pm \tilde{S})\gamma. \quad (14.16)$$

Транспонируя уравнения (14.13), (14.14) и умножая с двух сторон на  $S$ , получим  $\tilde{\gamma}S = \pm S\tilde{\gamma}$ . Следовательно, все соотношения (14.13) — (14.16) должны иметь место как для  $\gamma$ , так и для  $\tilde{\gamma}$ , а также для их полусуммы или полуразности, которые представляют собой соответственно симметричную и антисимметричную части матрицы  $\gamma$ :

$$\gamma = \gamma^s + \gamma^a, \quad \gamma^s = \frac{1}{2}(\gamma + \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}^s, \quad \gamma^a = \frac{1}{2}(\gamma - \tilde{\gamma}) = -\tilde{\gamma}^a = \mathbf{a} \times, \quad (14.17)$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор, дуальный антисимметричному тензору  $\gamma^a$  (см. (26.31)).

Как было показано выше, преобразования симметрии кристаллов сводятся к следующим типам (§ 29):

1) инверсия

$$S_{\bar{2}} = -1; \quad (14.18)$$

2) плоскость симметрии (отражение в плоскости, перпендикулярной к единичному вектору  $\mathbf{c}$ )

$$S_m = 1 - 2\mathbf{c}\mathbf{c}; \quad (14.19)$$

3) ось симметрии (вращение на угол  $\varphi_k = 2\pi/k$ ,  $k=2, 3, 4, 6$ , вокруг единичного вектора  $\mathbf{c}$ , см. (29.37))

$$S_k = \cos \varphi_k + (1 - \cos \varphi_k)\mathbf{c}\mathbf{c} + \sin \varphi_k \mathbf{c} \times; \quad (14.20)$$

4) инверсионная ось (сочетание вращения (14.20) с инверсией (14.18))

$$S_{\bar{k}} = -S_k \quad (k = 4, 6) \quad (14.21)$$

и к их сочетаниям.

Рассмотрим сначала, какие ограничения налагает на  $\gamma$  условие (14.13). Очевидно, условие  $\gamma S_{\bar{2}} = S_{\bar{2}} \gamma$  всегда выполняется. Условие  $\gamma S_m = S_m \gamma$  дает

$$\gamma c \cdot c = c \cdot c \gamma.$$

Умножая это уравнение справа или слева на  $c$ , получаем

$$\gamma c = c \gamma = \tilde{\gamma} c = c \gamma c \cdot c = \lambda c, \quad (14.22)$$

где  $\lambda = c \gamma c$  — число. Таким образом, если  $\gamma S_m = S_m \gamma$ , то вектор  $c$  является собственным вектором матриц  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$ .

Соотношения (14.15) при  $S = S_k$  (14.20) дают (14.22) и условие

$$\sin \varphi_k (\gamma c^\times - c^\times \gamma) = 0. \quad (14.23)$$

Здесь могут быть два случая. Если  $\sin \varphi_k = \sin 2\pi/k = 0$ , то  $k=2$  (ось симметрии второго порядка). При этом условие  $\gamma S_2 = S_2 \gamma$  целиком сводится к (14.22), т. е. направление оси второго порядка  $c$  дает собственный вектор матриц  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$ . Если же  $k=3, 4, 6$ , т. е. имеется ось симметрии высшего порядка, то наряду с (14.22) получим условие

$$\gamma c^\times - c^\times \gamma = 0. \quad (14.24)$$

Согласно сказанному выше, (14.22) и (14.24) должны быть справедливы для  $\gamma^s = \frac{1}{2} (\gamma + \tilde{\gamma})$  и  $\gamma^a = a^\times$ . Легко убедиться, что из  $a^\times c^\times - c^\times a^\times = c \cdot a - a \cdot c = 0$  следует  $a \parallel c$ , т. е.  $a = \lambda c$ . Таким образом,  $\gamma^a = \lambda c^\times$ . В свою очередь симметричную часть всегда можно представить в виде (см. § 26)

$$\gamma^s = \lambda_1 c_1 \cdot c_1 + \lambda_2 c_2 \cdot c_2 + \lambda_3 c_3 \cdot c_3, \quad (14.25)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — собственные значения;  $c_1, c_2, c_3$  — соответствующие единичные взаимно перпендикулярные собственные векторы матрицы  $\gamma^s$ . Подставляя (14.25) в (14.24) и учитывая, что  $[c_1 c_2] = c_3, [c_1 c_3] = -c_2$ , получаем

$$-\lambda_2 c_2 \cdot c_3 + \lambda_3 c_3 \cdot c_2 = \lambda_2 c_3 \cdot c_2 - \lambda_3 c_2 \cdot c_3,$$

откуда следует  $\lambda_2 = \lambda_3$ . В таком случае (см. § 26)  $\gamma^s = \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) c \cdot c$ . Итак, при наличии оси симметрии выше второго порядка условие  $\gamma S_k = S_k \gamma$  приводит к общему выражению для  $\gamma$ :

$$\gamma = \gamma^s + \gamma^a = \lambda + \lambda' c \cdot c + \lambda'' c^\times, \quad (14.26)$$

где  $\mathbf{c}$  — единичный вектор оси симметрии. При этом (14.22) удовлетворяется тождественно. При  $S = S_{\bar{k}}$  условие (14.13) не дает ничего нового по сравнению с  $S = S_k$ . Поскольку, согласно (14.26),  $\gamma \mathbf{c} = (\lambda + \lambda') \mathbf{c}$ , то любая ось симметрии является собственным вектором (главной осью) тензора, удовлетворяющего условию (14.13).

Рассмотрим теперь условие антикоммутиации (14.14). Согласно сказанному выше, в этом случае преобразование  $S$  должно включать отражение и поэтому может быть либо инверсией  $S_{\bar{2}}$ , либо отражением в плоскости  $S_m$ , либо, наконец, инверсионной осью  $S_{\bar{k}}$ . Если  $S = S_{\bar{2}} = -1$ , то из (14.14) следует  $\gamma = -\gamma = 0$ . Таким образом, кристаллы, имеющие симметрию инверсии, не могут обладать оптической активностью. Условие (14.14) при  $S = S_m$  принимает вид

$$\gamma = \gamma \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \gamma \mathbf{c}. \quad (14.27)$$

Для  $\gamma^a = \mathbf{a}^\times$  отсюда следует

$$\mathbf{a}^\times = [\mathbf{ac}] \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot [\mathbf{ca}] = [\mathbf{ac}] \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot [\mathbf{ac}] = [\mathbf{c} [\mathbf{ac}]]^\times$$

или

$$\mathbf{a} = [\mathbf{c} [\mathbf{ac}]] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}^2 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Поскольку  $\mathbf{c}^2 = 1$ , то  $\mathbf{ac} = 0$ , — таково будет единственное условие, налагаемое на  $\gamma^a = \mathbf{a}^\times$  равенством (14.27). Для  $\gamma^s$  имеем из (14.27), обозначив  $\gamma^s \mathbf{c} = \mathbf{c} \gamma^s = \mathbf{b}$ :

$$\gamma^s = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}. \quad (14.28)$$

При этом умножение (14.27) справа на  $\mathbf{c}$  дает

$$\gamma^s \mathbf{c} = \gamma^s \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \gamma^s \mathbf{c},$$

откуда следует  $\mathbf{c} \gamma^s \mathbf{c} = \mathbf{cb} = 0$ . Итак, из условия (14.14) получаем окончательно для  $S = S_m$

$$\gamma = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}^\times, \quad \mathbf{ac} = \mathbf{bc} = 0, \quad (14.29)$$

где  $\mathbf{c}$  — нормаль к плоскости симметрии. Нетрудно непосредственно проверить, что (14.29) удовлетворяет (14.27).

При  $S = S_{\bar{k}} = -S_k$  ( $k = 4, 6$ ) условия (14.16) принимают вид

$$2 \cos \varphi_k \gamma + (1 - \cos \varphi_k) (\gamma \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \gamma \mathbf{c}) = 0, \quad (14.30)$$

$$\sin \varphi_k (\gamma \mathbf{c}^\times + \mathbf{c}^\times \gamma) = 0. \quad (14.31)$$

Для  $\gamma^a = \mathbf{a}^\times$  из (14.31) имеем  $\mathbf{a}^\times \mathbf{c}^\times + \mathbf{c}^\times \mathbf{a}^\times = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - 2\mathbf{ac} = 0$ . Так как сумма двух диад  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  не может быть пропорциональна единичному тензору, то  $\mathbf{ac} = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{a} = 0$ . Значит,  $\gamma = \tilde{\gamma} = \gamma^s$ . Из (14.31), поскольку  $\sin \varphi_k \neq 0$  ( $k \neq 2$ ), после умножения справа или слева на  $\mathbf{c}^\times$  вытекает

$$\mathbf{c}^\times \gamma = -\mathbf{c}^\times \gamma \mathbf{c}^\times = \gamma \mathbf{c}^\times \mathbf{c}^\times = \gamma (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} - 1) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} - 1) \gamma, \quad (14.32)$$

или

$$\gamma c \cdot c = c \cdot c \gamma = \gamma + \gamma c^{\times 2},$$

ввиду чего (14.30) принимает вид

$$\gamma + (1 - \cos \varphi_k) \gamma c^{\times 2} = 0. \quad (14.33)$$

После умножения на  $c$  отсюда следует  $\gamma c = 0$ . Но в таком случае  $\gamma c^{\times 2} = -\gamma$  и (14.33) сводится к  $\cos \varphi_k \gamma = 0$ . Значит,  $\gamma \neq 0$  лишь при  $\varphi_k = \pi/2$  или  $k = 4$ . Таким образом, при наличии инверсионной оси оптическая активность возможна лишь, если порядок оси равен четырем\*). Поскольку  $\gamma c = 0$ , то тензор  $\gamma$  должен состоять из двух диад (см. § 26). Удобнее всего написать его в виде

$$\gamma = a \cdot e + a^* \cdot e^*, \quad (14.34)$$

где  $a c = e c = 0$ ,  $e$  — круговой вектор (см. § 27), определяемый условиями:  $[c e] = i e$ ,  $e e^* = 1$ ,  $e^2 = 0$ . Из (14.32) после подстановки (14.34) следует

$$\gamma = c^{\times} \gamma c^{\times} = -i [c a] \cdot e + i [c a^*] \cdot e^*.$$

Сравнивая с (14.34), имеем  $[c a] = i a$ , т. е.  $a$  есть круговой вектор, пропорциональный  $e$ :  $a = \kappa e$ . Таким образом,

$$\gamma = \kappa e \cdot e + \kappa^* e^* \cdot e^*. \quad (14.35)$$

На основании полученных соотношений мы можем теперь установить вид тензоров  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  в кристаллах всех классов симметрии, приведенных в таблице.

Отметим прежде всего, что условия (14.7), (14.12) для тензоров  $\varepsilon$  и  $\mu$  и соответственно общая структура последних одинаковы. Кроме того, поскольку они являются симметричными вещественными тензорами, то, согласно § 26, их в общем случае всегда можно представить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_1 c_1 \cdot c_1 + \varepsilon_2 c_2 \cdot c_2 + \varepsilon_3 c_3 \cdot c_3, \quad c_a c_b = \delta_{ab}, \quad (14.36)$$

$$\mu = \mu_1 c'_1 \cdot c'_1 + \mu_2 c'_2 \cdot c'_2 + \mu_3 c'_3 \cdot c'_3, \quad c'_a c'_b = \delta_{ab},$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  — собственные значения тензора  $\varepsilon (\mu)$ , а  $c_1, c_2, c_3 (c'_1, c'_2, c'_3)$  — соответствующие собственные векторы, удовлетворяющие условиям ортонормировки.

Симметрия классов 1 и 2, относящихся к триклинной сингонии, согласно (14.13), не налагает никаких ограничений на  $\varepsilon$  и  $\mu$ , поэтому в кристаллах этих классов они сохраняют общую форму (14.36), причем все (положительные) величины

\*) Это ясно также из того, что элемент симметрии  $\bar{6}$  обладает свойством  $(\bar{6})^3 = \bar{2}$ , т. е. приводит к инверсии, исключаяющей гиротропию.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  независимы и ориентация ортогонального репера ( $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ ) — главных осей тензора  $\varepsilon$  — относительно репера ( $\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \mathbf{c}'_3$ ) может быть совершенно произвольна. Таким образом, в кристаллах триклинной сингонии тензоры  $\varepsilon$  и  $\mu$ , вообще говоря, не имеют ни одного общего собственного вектора (главной оси) и не коммутируют между собой.

В кристаллах моноклинной сингонии условия симметрии для классов 3 и 4 (см. таблицу), как было показано выше, приводят к одному и тому же условию, ограничивающему тензор  $\varepsilon$  (и  $\mu$ ). А именно оба тензора должны иметь собственный вектор  $\mathbf{c}_3$ , параллельный оси симметрии 2, или перпендикулярный плоскости симметрии  $m$ . Симметрия  $2:m$  класса 5 ничего в этом не меняет. Таким образом, в кристаллах моноклинной сингонии имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3, \quad (14.37)$$

$$\mu = \mu_1 \mathbf{c}'_1 \cdot \mathbf{c}'_1 + \mu_2 \mathbf{c}'_2 \cdot \mathbf{c}'_2 + \mu_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3,$$

т. е. оба тензора должны иметь общий собственный вектор  $\mathbf{c}_3$  (главную ось),  $2 \parallel \mathbf{c}_3 \perp m$ . Векторы  $\mathbf{c}_1 \perp \mathbf{c}_2$  и  $\mathbf{c}'_1 \perp \mathbf{c}'_2$  должны лежать в одной плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{c}_3$ , но вообще не совпадают, поэтому  $\varepsilon$  и  $\mu$  также не коммутируют между собою.

В кристаллах аксиального класса ромбической сингонии симметрия  $2:2$  влечет за собой фиксацию двух собственных векторов  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$ , параллельных осям второго порядка, а тем самым и третьего собственного вектора  $\mathbf{c}_3 = [\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2]$ . То же, очевидно, относится и к двум остальным классам этой сингонии. Таким образом, в ромбических кристаллах тензоры  $\varepsilon$  и  $\mu$  имеют общую систему собственных векторов (главных осей):

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3, \quad (14.37a)$$

$$\mu = \mu_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + \mu_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 + \mu_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3$$

и поэтому коммутируют между собой:

$$\varepsilon \mu = \mu \varepsilon. \quad (14.38)$$

Поскольку в рассмотренных кристаллах все собственные значения  $\varepsilon$  и  $\mu$  различны, то эти тензоры могут быть представлены в аксиальной форме (см. § 26):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon' (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}' + \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}), \quad (14.39)$$

$$\mu = \mu_0 + \mu' (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}'_1 + \mathbf{c}'_1 \cdot \mathbf{c}_1).$$

В кристаллах средних сингоний (классы 9—27) имеется одна ось симметрии высшего порядка: третьего, четвертого

или шестого. Согласно (14.26), для симметричных тензоров  $\varepsilon$  и  $\mu$  отсюда следуют выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon' \cdot c \cdot c, & \varepsilon' &= \varepsilon_e - \varepsilon_0, \\ \mu &= \mu_0 + \mu' \cdot c \cdot c, & \mu' &= \mu_e - \mu_0, \end{aligned} \quad (14.40)$$

где  $c$  — единичный вектор оси симметрии высшего порядка ( $\varepsilon \mu = \mu \varepsilon$ ).

В кристаллах кубической (высшей) сингонии кроме оси симметрии высшего порядка  $c$  имеется непараллельная и перпендикулярная ей ось симметрии  $c'$  (см. таблицу). Согласно сказанному выше,  $c'$  также должен быть собственным вектором тензора  $\gamma$  (14.26). Но из условия

$$\gamma c' = \lambda c' + \lambda' c' \cdot c \cdot c + \lambda'' [c c'] = \lambda_0 c' \quad (14.40a)$$

при  $c c' \neq 0$ ,  $[c c'] \neq 0$  следует  $\lambda' = \lambda'' = 0$ , т. е. в кристаллах кубической сингонии тензор  $\gamma$  (14.13) должен быть скалярным (см. § 26):  $\gamma = \lambda$ .

Следовательно, в кристаллах кубической сингонии  $\varepsilon$  и  $\mu$  — скалярные тензоры.

Значительно большим разнообразием характеризуется структура тензора гирации  $\alpha$ , удовлетворяющего условию (14.11), в кристаллах различной симметрии.

Симметрия примитивного класса триклинной сингонии не накладывает никаких ограничений на несимметричный тензор гирации  $\alpha$ , который может быть записан в общем виде

$$\alpha = \alpha_1 c_1 \cdot c_1 + \alpha_2 c_2 \cdot c_2 + \alpha_3 c_3 \cdot c_3 + a', \quad c_a c_b = \delta_{ab}. \quad (14.41)$$

С другой стороны, для кристаллов центрального класса той же сингонии наличие инверсии, согласно (14.11), влечет за собой  $\alpha = -\alpha = 0$ . Легко видеть, что  $\alpha = 0$  также в кристаллах всех классов, содержащих симметрию  $k : m$ , где  $k$  — ось симметрии четного порядка. Действительно, среди элементов группы симметрии таких кристаллов содержится инверсия. Следовательно,  $\alpha = 0$  во всех кристаллах классов 2, 5, 8, 13, 15, 25, 27. Кроме того, элемент симметрии  $\bar{6}$  также приводит к инверсии, поскольку  $(\bar{6})^3 = \bar{2}$ . Поэтому  $\alpha = 0$  также в классах 17, 20, 30, 32. Эти случаи можно объединить в утверждении: тензор гирации равен нулю во всех кристаллах центральных и планаксиальных классов (см. таблицу).

В кристаллах аксиального класса моноклинной сингонии тензор гирации  $\alpha$  должен удовлетворять условию (14.22) или  $\alpha c = c \alpha = \lambda c$ . Наиболее общий вид такого тензора следующий:

$$\alpha = \lambda c \cdot c + a \cdot b + a' \cdot b', \quad \alpha c = a' c = b c = b' c = 0. \quad (14.42)$$

В кристаллах планального класса моноклинной сингонии тензор гирации имеет вид (14.29):

$$\alpha = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}^\times, \quad \alpha \mathbf{c} = \mathbf{b} \mathbf{c} = 0. \quad (14.43)$$

С помощью соотношений, полученных в § 26, можно убедиться, что  $|\alpha| = 0$ . Нетрудно проверить также, что  $\alpha(\mathbf{a} + [\mathbf{b} \mathbf{c}]) = 0$ .

Заметим, что в кристаллах триклинной и моноклинной сингоний тензор гирации  $\alpha$  в общем случае несимметричен и не коммутирует с тензорами  $\epsilon$  и  $\mu$ .

Аксиальный класс ромбической сингонии характеризуется наличием трех взаимно перпендикулярных осей симметрии второго порядка  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ . Поскольку каждая из них должна быть собственным вектором тензора  $\alpha$  (см. (14.22)), то последний имеет вид (ср. (14.37)):

$$\alpha = \alpha_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3 = \tilde{\alpha}. \quad (14.44)$$

Таким образом, в этих кристаллах тензор  $\alpha$  симметричен и коммутирует с  $\epsilon$  и  $\mu$ .

Чтобы определить вид тензора  $\alpha$  в кристаллах планального класса ромбической сингонии, нужно (см. таблицу) учесть дополнительный элемент симметрии — ось второго порядка  $\mathbf{c}'$ , параллельную плоскости симметрии, т. е. удовлетворяющую условию  $\mathbf{c}' \mathbf{c} = 0$ . Это означает, что на тензор  $\alpha$  (14.43) надо наложить условие  $\alpha \mathbf{c}' = \mathbf{c}' \alpha = \lambda \mathbf{c}'$ , или

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c}' + [\alpha \mathbf{c}'] = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + [\mathbf{c}' \alpha] = \lambda \mathbf{c}'.$$

Таким образом,  $[\mathbf{c}' \alpha] = 0$ ,  $\mathbf{a} = \xi \mathbf{c}'$ . Но в таком случае  $\lambda = \mathbf{b} \mathbf{c}' = 0$ , т. е.  $\mathbf{c} \perp \mathbf{b} \perp \mathbf{c}'$  или  $\mathbf{b} = \eta [\mathbf{c} \mathbf{c}']$ . Вектор  $[\mathbf{c} \mathbf{c}'] = \mathbf{c}''$  есть нормаль ко второй плоскости симметрии кристалла. Окончательно имеем

$$\alpha = \alpha_1 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}) + \alpha_2 \mathbf{c}'^\times,$$

где  $\mathbf{c}'$  — вектор оси симметрии 2, а  $\mathbf{c}, \mathbf{c}''$  — нормали к двум параллельным ей плоскостям симметрии. Если, изменив обозначения соответственно (14.37), написать этот тензор в виде

$$\alpha = \alpha_0 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_1) + \alpha' \mathbf{c}_3^\times, \quad \mathbf{c}_a \mathbf{c}_b = \delta_{ab}, \quad (14.45)$$

то нетрудно проверить, что он не коммутирует с  $\epsilon$  и  $\mu$ . Кроме того, поскольку  $\alpha \mathbf{c}_3 = 0$ , то  $|\alpha| = 0$ .

Переходим к кристаллам средних сингоний. Для гироидо-примитивного класса тетрагональной сингонии, согласно (14.35), имеем

$$\alpha = \alpha_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \alpha_0^* \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}^* = \tilde{\alpha}, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e} \mathbf{c} = |\alpha| = 0, \quad \alpha \mathbf{c} = 0. \quad (14.46)$$

Если взять

$$\alpha_0 = \alpha_1 - i\alpha_2, \quad e = c_1 + ic_2, \quad cc_1 = cc_2 = c_1c_2 = 0,$$

то выражение (14.46) принимает вид

$$\alpha = \alpha_1(c_1 \cdot c_1 - c_2 \cdot c_2) + \alpha_2(c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_1). \quad (14.47)$$

Кристаллы гироидо-планального класса тетрагональной сингонии (№ 11 в таблице) отличаются от только что рассмотренных наличием дополнительного элемента симметрии — плоскости симметрии, параллельной инверсионной оси  $\bar{4}$ . Пусть  $c_1$  в (14.47) — вектор нормали к плоскости симметрии. Тогда, согласно (14.27), наличие нового элемента симметрии налагает на  $\alpha$  (14.47) добавочное условие  $\alpha = \alpha c_1 \cdot c_1 + c_1 \cdot c_1 \alpha$ , из которого, как легко убедиться, следует  $\alpha_1 = 0$ . Таким образом, в кристаллах класса 11 таблицы тензор гирации должен иметь вид

$$\alpha = \alpha_0(c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_1), \quad (14.48)$$

где  $c_1 \perp c_2$  — единичные векторы нормалей к плоскостям симметрии\*), перпендикулярные к оси  $\bar{4} \parallel c$ .

Для примитивного класса тетрагональной сингонии, как и для примитивных классов всех средних сингоний (№ 10, 16, 23 таблицы) тензор гирации имеет структуру, определяемую соотношением (14.26)

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha c \cdot c + \alpha_1 c^\times, \quad (14.49)$$

где  $c$  — вектор оси симметрии высшего порядка.

Аксиальные классы средних сингоний (№ 12, 18, 24) отличаются от примитивных классов тех же сингоний добавлением оси 2, перпендикулярной к оси симметрии высшего порядка. Как показано выше, следствием этого является то, что вектор  $c_1$ , параллельный оси 2, должен быть собственным вектором тензора гирации. Налагая условие  $\alpha c_1 = c_1 \alpha = \lambda c_1$  ( $c_1 c = 0$ ) на тензор  $\alpha$  (14.49), получаем

$$\alpha_0 c_1 + \alpha_2 [cc_1] = \alpha_0 c_1 + \alpha_2 [c_1 c] = \lambda c_1,$$

откуда следует  $\alpha_2 = 0$ . Таким образом, в кристаллах аксиальных классов 12, 18, 24

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' c \cdot c \quad (\alpha' = \alpha_e - \alpha_0). \quad (14.50)$$

Планальные классы средних сингоний (№ 14, 19, 26) отличаются от примитивных классов добавлением плоскости симметрии, параллельной оси высшего порядка. Если  $c_1$  — нор-

\*) Вследствие наличия оси  $\bar{4}$  наряду с плоскостью  $m \parallel \bar{4}$  появляется вторая, перпендикулярная к первой плоскость симметрии.



маль к плоскости симметрии, то, согласно (14.29), тензор гирации должен иметь вид

$$\alpha = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}^\times, \quad \mathbf{a} \mathbf{c}_1 = \mathbf{b} \mathbf{c}_1 = 0 \quad (14.51)$$

и в то же время он должен иметь форму (14.49), причем  $\mathbf{c} \mathbf{c}_1 = 0$ . Сравнив оба выражения, видим, что из условия равенства антисимметричных частей тензоров (14.49) и (14.51) следует  $\mathbf{a}^\times = \alpha_2 \mathbf{c}^\times$ . Сравнение симметричных частей дает

$$\alpha_0 + \alpha' \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{b}.$$

Умножая на  $\mathbf{c}_1$ , имеем  $\alpha_0 \mathbf{c}_1 = \mathbf{b}$ , откуда  $\mathbf{b} = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ , поскольку  $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}_1$ . Но тогда также  $\alpha' = 0$  и, таким образом, тензор гирации в кристаллах планальных классов всех трех средних сингоний имеет вид

$$\alpha = \alpha_0 \mathbf{c}^\times, \quad (14.52)$$

где  $\mathbf{c}$  — ось симметрии.

Обратимся к гироидо-примитивному классу гексагональной сингонии, обладающему симметрией  $3 : m$  (№ 21). Из наличия оси 3 следует форма (14.49) тензора  $\alpha$ . С другой стороны, перпендикулярная к этой оси  $\mathbf{c}$  плоскость симметрии приводит к тензору вида (14.29):

$$\alpha = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}^\times, \quad \mathbf{a} \mathbf{c} = \mathbf{b} \mathbf{c} = 0. \quad (14.53)$$

Сравнивая с (14.49), видим, что  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\alpha_1 = 0$ , так как  $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ . Условие  $\alpha_0 + \alpha' \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$  после умножения на  $\mathbf{c}$  дает  $(\alpha_0 + \alpha') \mathbf{c} = \mathbf{b} = 0$ , так как  $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$ . Таким образом, кристаллы рассматриваемого класса симметрии не могут обладать свойством оптической активности. Это относится также к кристаллам гироидо-планального класса гексагональной сингонии (№ 22), поскольку их группа симметрии включает  $3 : m$ . Наконец, в кристаллах планального класса высшей сингонии (№ 31) тензор гирации также равен нулю. Это следует из того, что, как показано выше (см. (14.40 а)), в любых кристаллах кубической сингонии тензор второго ранга должен быть скалярным:  $\alpha = \lambda$ . Но в таком случае он не может антикоммутировать с  $S$ , как того требует условие (14.14) для преобразования  $S = S_4$ . Следовательно, из кристаллов, относящихся к кубической сингонии, лишь примитивный и аксиальный классы (№ 28, 29) допускают оптическую активность.

Итак, гиротропия возможна в примитивных, аксиальных и планальных классах всех сингоний (кроме планального класса кубической сингонии) и, кроме того, в двух инверсионных классах тетрагональной сингонии. Всего насчитывается 18 классов кристаллов, могущих обладать этим свойством: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 19, 23, 24, 26, 28, 29.

Подчеркнем, что во всех кристаллах высшей и средних сингоний тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  попарно коммутируют между собой. Из 18 перечисленных классов, в которых  $\alpha \neq 0$ , это свойство относится к 14 классам, за исключением классов 1, 3, 4, 7. Тензор  $\alpha$  симметричен в восьми классах кристаллов: 6, 9, 11, 12, 18, 24, 28, 29. Кроме аксиальных классов всех сингоний, начиная с ромбической, сюда входят два гироидных класса тетрагональной сингонии и примитивный класс кубической сингонии. Детерминант тензора  $\alpha$  равен нулю в кристаллах семи классов: 4, 7, 9, 11, 14, 19, 26. Кроме планальных классов всех сингоний (исключая кубическую, где  $\alpha = 0$ ) сюда относятся оба гироидных класса тетрагональной сингонии.

В заключение этого параграфа мы приведем сводку данных о структуре тензоров  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  в кристаллах различной симметрии [133], в которых  $\alpha$  может быть отлично от нуля (см. таблицу).

### А. Низшие сингонии

#### I. Триклинная сингония

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_1 c_1 \cdot c_1 + \epsilon_2 c_2 \cdot c_2 + \epsilon_3 c_3 \cdot c_3, \\ \mu &= \mu_1 c'_1 \cdot c'_1 + \mu_2 c'_2 \cdot c'_2 + \mu_3 c'_3 \cdot c'_3, \\ c_a c_b &= \delta_{ab}, \quad c'_a c'_b = \delta_{ab}, \quad \epsilon\mu \neq \mu\epsilon.\end{aligned}$$

##### 1. Примитивный класс (симметрия 1):

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 c''_1 \cdot c''_1 + \alpha_2 c''_2 \cdot c''_2 + \alpha_3 c''_3 \cdot c''_3 + a \times \neq \tilde{\alpha}. \\ c''_a c''_b &= \delta_{ab}, \quad \alpha\epsilon \neq \epsilon\alpha, \quad \alpha\mu \neq \mu\alpha.\end{aligned}$$

#### II. Моноклинная сингония

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_1 c_1 \cdot c_1 + \epsilon_2 c_2 \cdot c_2 + \epsilon_3 c_3 \cdot c_3, \\ \mu &= \mu_1 c'_1 \cdot c'_1 + \mu_2 c'_2 \cdot c'_2 + \mu_3 c_3 \cdot c_3, \\ m \perp c_3 &\parallel 2, \quad \epsilon\mu \neq \mu\epsilon.\end{aligned}$$

##### 3. Аксиальный класс (симметрия $2 \parallel c_3$ ):

$$\begin{aligned}\alpha &= a \cdot b + a' \cdot b' + \alpha_0 c_3 \cdot c_3 \neq \tilde{\alpha}. \\ a c_3 &= b c_3 = a' c_3 = b' c_3 = 0.\end{aligned}$$

4. Планыальный класс (симметрия  $m \perp c_3$ ):

$$\alpha = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}^\times \neq \tilde{\alpha},$$

$$a c_3 = b c_3 = |\alpha| = 0, \quad \alpha (\mathbf{a} + [b c_3]) = 0.$$

Во всех случаях  $\alpha e \neq e \alpha$ ,  $\alpha \mu \neq \mu \alpha$ .

III. Ромбическая сингония

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3,$$

$$\mu = \mu_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + \mu_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 + \mu_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3,$$

$$m \perp c_a \parallel 2, \quad \varepsilon \mu = \mu \varepsilon.$$

6. Аксиальный класс (симметрия  $2 : 2 \parallel c_a$ ):

$$\alpha = \alpha_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 + \alpha_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3 = \tilde{\alpha}.$$

$$\alpha e = e \alpha, \quad \alpha \mu = \mu \alpha.$$

7. Планыальный класс (симметрия  $c_3 \parallel 2 \cdot m \perp c_1, c_2$ ):

$$\alpha = \alpha_0 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_1) + \alpha' c_3^\times \neq \tilde{\alpha},$$

$$\alpha e \neq e \alpha, \quad \alpha \mu \neq \mu \alpha, \quad |\alpha| = 0, \quad \alpha c = 0.$$

*б. Средние сингонии*

Имеется ось симметрии высшего порядка  $k \parallel c$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon' \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \mu = \mu_0 + \mu' \mathbf{c} \cdot \mathbf{c},$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_e - \varepsilon_0, \quad \mu' = \mu_e - \mu_0, \quad \varepsilon \mu = \mu \varepsilon.$$

IV. Тетрагональная сингония

9. Гироидо-примитивный класс (симметрия  $\bar{4} \parallel c$ ):

$$\alpha = \alpha_0 e \cdot e + \alpha_0^* e^* \cdot e^* = \tilde{\alpha},$$

$$[c e] = \pm i e, \quad e^2 = e c = 0, \quad |e|^2 = 1, \quad \alpha_t = |\alpha| = 0, \quad \alpha c = 0$$

или

$$\alpha = \alpha_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2) + \alpha_2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_1),$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{c}_1 + i \mathbf{c}_2), \quad \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1 c = \mathbf{c}_2 c = 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = 1.$$

10. Примитивный класс (симметрия  $4 \parallel c$ ):

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha c \cdot c + \alpha_1 c^\times \neq \tilde{\alpha}.$$

11. Гироидо-планальный класс (симметрия  $c \parallel \bar{4} \cdot m \perp c_1, c_2$ ):

$$\alpha = \alpha_0 (c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_1) = \bar{\alpha},$$

$$\alpha_i = c_1 c_2 = |\alpha| = 0, \quad \alpha c = 0.$$

12. Аксиальный класс (симметрия  $c \parallel 4 : 2$ ):

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' c \cdot c = \bar{\alpha}, \quad \alpha' = \alpha_e - \alpha_0.$$

14. Планальный класс (симметрия  $c \parallel 4 \cdot m$ ):

$$\alpha = \alpha_0 c^\times = -\bar{\alpha}.$$

#### V. Тригональная сингония

16. Прimitивный класс (симметрия  $3 \parallel c$ ):

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' c \cdot c + \alpha_1 c^\times,$$

18. Аксиальный класс (симметрия  $c \parallel 3 : 2$ ):

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' c \cdot c, \quad \alpha' = \alpha_e - \alpha_0.$$

19. Планальный класс (симметрия  $c \parallel 3 \cdot m$ ):

$$\alpha = \alpha_0 c^\times.$$

#### VI. Гексагональная сингония

23. Прimitивный класс (симметрия  $6 \parallel c$ ):

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' c \cdot c + \alpha_1 c^\times.$$

24. Аксиальный класс (симметрия  $c \parallel 6 : 2$ ):

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' c \cdot c, \quad \alpha' = \alpha_e - \alpha_0.$$

26. Планальный класс (симметрия  $c \parallel 6 \cdot m$ ):

$$\alpha = \alpha_0 c^\times.$$

#### V. Кубическая (высшая) сингония

28. Прimitивный класс (симметрия  $3/2$ ).

29. Аксиальный класс (симметрия  $3/4$ ):

$$\alpha = \alpha_0.$$

Во всех кристаллах средних и высшей сингоний все тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  коммутируют между собой.

Отметим, что всего насчитывается 11 различных типов структуры тензоров  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\alpha$ , соответствующих классам 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 28, поскольку классы 16, 18, 19, 23, 24, 26, 29 не дают новых типов структуры.

## § 15. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ И УРАВНЕНИЕ НОРМАЛЕЙ

Напишем систему уравнений Максвелла (1.1), (1.2) и уравнений связи (12.21) для прозрачных гиротропных кристаллов

$$[\nabla \mathbf{H}] - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = 0, \quad [\nabla \mathbf{E}] + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad (15.1)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon (1 + \alpha_1 \nabla^{\times}) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu (1 + \tilde{\alpha}_1 \nabla^{\times}) \mathbf{H}. \quad (15.2)$$

Мы обозначили здесь тензор гирации через  $\alpha_1$  вместо  $a$ . Поскольку гиротропия представляет собой слабо выраженное свойство ( $\alpha_1$  — малая величина), то учет магнитной анизотропии (которая в оптической области также крайне мала) является желательным. В самом деле, поправки, обусловленные отличием  $\mu$  от единицы, могут приближаться по порядку величины к поправкам, обусловленным гиротропией. Однако наличие трех тензорных характеристик  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_1$  сильно усложняет теорию.

Использование подхода, изложенного выше (см. § 5), позволяет и в случае гиротропных кристаллов исключить из уравнений тензор  $\mu$  [36]. Напишем систему (15.1), (15.2) в виде

$$\varepsilon (1 + \alpha_1 \nabla^{\times}) \dot{\mathbf{E}} = c \nabla^{\times} \mathbf{H}, \quad \mu (1 + \tilde{\alpha}_1 \nabla^{\times}) \dot{\mathbf{H}} = -c \nabla^{\times} \mathbf{E} \quad (15.3)$$

и переопределим величины  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\nabla$ ,  $\varepsilon$  согласно (5.44). Кроме того, введем переопределенный тензор гирации

$$\alpha'_1 = \sqrt{\mu} \alpha_1 \sqrt{\mu}, \quad \tilde{\alpha}'_1 = \sqrt{\mu} \tilde{\alpha}_1 \sqrt{\mu}. \quad (15.4)$$

Легко убедиться, что для переопределенных (штрихованных) величин аналогично (5.45) получаются уравнения

$$\varepsilon' (1 + \alpha'_1 \nabla'^{\times}) \dot{\mathbf{E}}' = c \nabla'^{\times} \mathbf{H}', \quad (1 + \tilde{\alpha}'_1 \nabla'^{\times}) \dot{\mathbf{H}}' = -c \nabla'^{\times} \mathbf{E}', \quad (15.5)$$

которые не содержат тензора  $\mu$  и формально получаются из (15.3), если положить  $\mu = 1$ .

Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением системы уравнений (15.5). При желании явно учесть магнитные свойства можно в любой момент получить соответствующие соотношения, совершив обратный переход от штрихованных величин к нештрихованным с помощью уравнений (5.44), (15.4).

Опустим штрихи в основных уравнениях (15.5) и перейдем к плоским гармоническим волнам, для которых (см. § 2, 3)  $\mathbf{E} =$

$= \mathbf{E}^0 e^{i\varphi}$  и т. д., где  $\varphi = \omega \left( t - \frac{1}{c} \mathbf{m} \mathbf{r} \right)$ . В применении к таким полям

$$\nabla \sim -i \mathbf{k} \mathbf{m}, \quad \partial/\partial t \sim i\omega,$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon (1 - i\alpha \mathbf{m} \times) \mathbf{E} = -[\mathbf{m} \mathbf{H}], \\ \mathbf{B} &= (1 - i\tilde{\alpha} \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = [\mathbf{m} \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Здесь введено обозначение

$$\alpha = k\alpha_1. \quad (15.7)$$

Таким образом, фигурирующий в (15.6) тензор гирации  $\alpha$ , согласно (15.7), даже при отсутствии обычной дисперсии в отличие от  $\varepsilon$  (и  $\mu$ ) не является константой среды, а пропорционален волновому числу  $k$ . Отсюда ясно, что эффекты гиротропии должны быть тем более сильно выражены, чем короче длина волны света.

Хорошо известно, что ввиду наличия дисперсии тензоры  $\varepsilon$  и  $\mu$  зависят от частоты распространяющегося в среде света и поэтому, строго говоря, также не являются константами среды. Однако если мы ограничиваемся рассмотрением отдельной плоской гармонической волны с фиксированной частотой, то все величины  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  для заданной среды можно рассматривать как постоянные.

Введем обозначения

$$\rho = 1 - i\alpha \mathbf{m} \times, \quad \sigma = 1 - i\tilde{\alpha} \mathbf{m} \times; \quad (15.8)$$

тогда уравнения (15.6) для полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  примут вид

$$\varepsilon \rho \mathbf{E} = -\mathbf{m} \times \mathbf{H}, \quad \sigma \mathbf{H} = \mathbf{m} \times \mathbf{E}. \quad (15.9)$$

С другой стороны, с помощью уравнений связи

$$\mathbf{D} = \varepsilon \rho \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \sigma \mathbf{H} \quad (15.10)$$

можно исключить напряженности электрического и магнитного полей

$$\mathbf{E} = \rho^{-1} \varepsilon^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} = \sigma^{-1} \mathbf{B}$$

и получить систему уравнений для векторов индукции

$$\mathbf{D} = -\mathbf{m} \times \sigma^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \rho^{-1} \varepsilon^{-1} \mathbf{D}. \quad (15.11)$$

Заметим, что  $\mathbf{m} \mathbf{D} = \mathbf{m} \mathbf{B} = 0$ , т. е. векторы индукции *трансверсальны*. Из системы (15.9) вытекают следующие уравнения для

полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  по отдельности:

$$(\epsilon\rho + \mathbf{m} \times \sigma^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{E} = 0, \quad (15.12)$$

$$(\sigma + \mathbf{m} \times \rho^{-1} \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = 0. \quad (15.13)$$

Аналогично получим из системы (15.11)

$$(1 + \mathbf{m} \times \sigma^{-1} \mathbf{m} \times \rho^{-1} \epsilon^{-1}) \mathbf{D} = 0, \quad (15.14)$$

$$(1 + \mathbf{m} \times \rho^{-1} \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times \sigma^{-1}) \mathbf{B} = 0. \quad (15.15)$$

Уравнения (15.12), (15.13) после умножения на  $\rho^{-1} \epsilon^{-1}$  и  $\sigma^{-1}$  соответственно принимают вид

$$(1 + \rho^{-1} \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times \sigma^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{E} = 0, \quad (15.16)$$

$$(1 + \sigma^{-1} \mathbf{m} \times \rho^{-1} \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = 0. \quad (15.17)$$

Условием наличия нетривиальных (неравных нулю) решений для  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  является равенство нулю детерминантов

$$|1 + \rho^{-1} \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times \sigma^{-1} \mathbf{m} \times| = 0, \quad (15.18)$$

$$|1 + \sigma^{-1} \mathbf{m} \times \rho^{-1} \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times| = 0, \quad (15.19)$$

$$|1 + \mathbf{m} \times \sigma^{-1} \mathbf{m} \times \rho^{-1} \epsilon^{-1}| = 0, \quad (15.20)$$

$$|1 + \mathbf{m} \times \rho^{-1} \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times \sigma^{-1}| = 0. \quad (15.21)$$

Сравнение тензоров, стоящих в левой части уравнений (15.18) — (15.21), показывает, что они отличаются друг от друга циклической перестановкой сомножителей. Согласно (26.29 а), (26.78),

$$|1 + \beta| = 1 + \beta_t + \bar{\beta}_t + |\beta|, \quad \bar{\beta}_t = \frac{1}{2} ((\beta_t)^2 - (\beta^2)_t). \quad (15.22)$$

Таким образом, каждый из детерминантов (15.18) — (15.21) выражается через следы от первой и второй степени стоящего в них тензора. Детерминант от  $\beta = \rho^{-1} \epsilon^{-1} \mathbf{m} \times \sigma^{-1} \mathbf{m} \times$  равен нулю, поскольку  $|\mathbf{m} \times| = 0$ . Что же касается следов  $\beta_t$  и  $(\beta^2)_t$ , то они одинаковы для всех тензоров, стоящих в (15.18) — (15.21), так как последние отличаются лишь циклической перестановкой сомножителей (см. (25.50)). Следовательно, все уравнения (15.18) — (15.21) в точности совпадают и мы можем ограничиться рассмотрением любого из них. Рассмотрим, например, равносильное (15.18) уравнение (см. (15.12))  $|\epsilon\rho + \mathbf{m} \times \sigma^{-1} \mathbf{m} \times| = 0$ . С помощью (26.29), (26.23), (26.27), (26.53), (26.63 г) находим, учитывая, что, согласно (15.8),  $\rho\mathbf{m} = \sigma\mathbf{m} = \mathbf{m}$ ,

$$\mathbf{m}^2 \mathbf{m} \mathbf{m} + (\mathbf{m} \times^2 \bar{\rho} \bar{\epsilon} \bar{\sigma})_t + |\epsilon\rho\sigma| = 0. \quad (15.23)$$

Пользуясь теми же соотношениями § 26 и, кроме того, формулой (26.65), получаем

$$\begin{aligned} |\rho| &= 1 - m\bar{\alpha}m - i(\alpha m^\times)_t, \\ |\sigma| &= 1 - m\bar{\alpha}m + i(\alpha m^\times)_t = |\rho|^*, \\ \bar{\rho} &= 1 - i((\alpha m^\times)_t - \alpha m^\times) - m.m\bar{\alpha}, \\ \bar{\sigma} &= 1 + i((\alpha m^\times)_t + \bar{\alpha}m^\times) - m.m\bar{\alpha}. \end{aligned} \quad (15.24)$$

Наиболее сложным является второй член в (15.23). Используя (15.8), (15.24), получаем для него выражение

$$(m^\times \bar{\rho} \bar{\epsilon} \bar{\sigma})_t = (m^\times \bar{\epsilon})_t + [m^\times ((\alpha m^\times)_t - \alpha m^\times) \bar{\epsilon} m^\times \alpha]_t. \quad (15.25)$$

При этом все мнимые члены полностью сокращаются. Далее,

$$m^\times (\alpha m^\times - \bar{\alpha} m^\times - (\alpha m^\times)_t) \equiv 0, \quad (15.25a)$$

в чем легко убедиться, используя для  $\alpha$  общее представление

$$\alpha = \kappa + a^\times, \quad \bar{\alpha} = \kappa, \quad a' = \sqrt{\mu} a. \quad (15.26)$$

Действительно,

$$m^\times ((\alpha - \bar{\alpha}) m^\times - (\alpha m^\times)_t) = m^\times (2a^\times m^\times - (a^\times m^\times)_t) = 2m^\times m.a \equiv 0.$$

Следовательно, согласно (15.25a),

$$m^\times ((\alpha m^\times)_t - \alpha m^\times) = -m^\times \bar{\alpha} m^\times$$

и член, содержащий  $\alpha$  в формуле (15.25) справа, принимает вид  $-(m^\times \bar{\alpha} m^\times \bar{\epsilon} m^\times \alpha m^\times)_t$ . Воспользовавшись соотношением (26.63), имеем

$$m^\times \bar{\epsilon} m^\times = \epsilon (\epsilon m)^\times m^\times = \epsilon (m.m\epsilon - m\epsilon m), \quad (15.26a)$$

откуда следует

$$-(m^\times \bar{\alpha} m^\times \bar{\epsilon} m^\times \alpha m^\times)_t = m\epsilon m (m^\times \bar{\alpha} \epsilon \alpha)_t + [m, \bar{\alpha} \epsilon m]^2.$$

В итоге получаем общее уравнение нормалей для гиротропных кристаллов (15.23) в следующем виде:

$$\begin{aligned} m^2 m\epsilon m + (m^\times \bar{\epsilon})_t + |\epsilon| [(1 - m\bar{\alpha}m)^2 + 4(am)^2] + \\ + [m, \bar{\alpha} \epsilon m]^2 + m\epsilon m (m^\times \bar{\alpha} \epsilon \alpha)_t = 0. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Заменяя здесь все величины на штрихованные и пользуясь соотношениями (5.44), (5.49), (5.51), (15.4), получаем после простых преобразований



$$\begin{aligned}
 \mathbf{m} \mu \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} \mathbf{e} \mathbf{m} - \mathbf{m} \mu (\bar{\mathbf{e}} \mu)_t - \bar{\mathbf{e}} \mu \mathbf{m} + |\mathbf{e} \mu| [(1 - \bar{\mathbf{m}} \alpha \bar{\mathbf{m}})^2 + 4(\mathbf{a} \bar{\mathbf{m}})^2] + \\
 + [\mathbf{m}, \bar{\alpha} \mathbf{e} \mathbf{m}] \bar{\mu} [\mathbf{m}, \bar{\alpha} \mathbf{e} \mathbf{m}] - \bar{\mathbf{m}} \mathbf{e} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \mu ((\bar{\alpha} \mathbf{e} \alpha \mu)_t - \bar{\alpha} \mathbf{e} \alpha \mu) \mathbf{m} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{15.28}$$

Это есть общее уравнение нормалей для магнитных гиротропных кристаллов [118, 36]. Нетрудно убедиться, что оно остается инвариантным при замене  $\mathbf{e} \rightleftharpoons \bar{\mathbf{e}}, \alpha \rightleftharpoons \bar{\alpha}$ .

Рассмотрим уравнения (15.27), (15.12) в простейших частных случаях [36]. Для изотропных сред и кубических кристаллов величины  $\mathbf{e}$  и  $\alpha$  являются скалярами (см. § 14). Такие среды мы назвали изотропно-гиротропными (§ 12). При этом уравнение (15.27) принимает вид

$$(1 - \mathbf{e} \alpha^2)^2 \mathbf{m}^4 - 2\mathbf{e} (1 + \mathbf{e} \alpha^2) \mathbf{m}^2 + \mathbf{e}^2 = 0. \tag{15.29}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{m}^2 = n^2 = \frac{\mathbf{e}}{(1 \mp \alpha \sqrt{\mathbf{e}})^2}, \quad n = \frac{n_0}{1 \mp \alpha n_0}, \quad n_0 = \sqrt{\mathbf{e}}, \tag{15.30}$$

где  $n_0$  — показатель преломления среды в отсутствие оптической активности. Умножая уравнение (15.12) на  $\mathbf{m}$ , видим, что в этом случае  $\mathbf{m} \mathbf{E} = 0$ , поэтому уравнение для  $\mathbf{E}$  принимает вид  $(\mathbf{e} \rho |\sigma| - \mathbf{m}^2 \bar{\sigma}) \mathbf{E} = 0$ , или

$$\mathbf{E} = -i\alpha \frac{\mathbf{e} |\sigma| + \mathbf{m}^2}{\mathbf{e} |\sigma| - \mathbf{m}^2} [\mathbf{m} \mathbf{E}]. \tag{15.31}$$

Поскольку  $|\sigma| = 1 - \alpha^2 \mathbf{m}^2$ , то, согласно (15.30), отсюда следует

$$\mathbf{E} = \mp i [\mathbf{n} \mathbf{E}], \tag{15.32}$$

т. е. мы имеем круговую поляризацию (см. § 2), правую или левую в зависимости от значения показателя преломления (15.30).

Второй простейший случай имеет место для планальных кристаллов средних сингоний, когда (см. § 14)

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + (\mathbf{e}_e - \mathbf{e}_0) \mathbf{c} \mathbf{c}, \quad \alpha = \alpha_0 \mathbf{c} \times, \quad \rho = \sigma^* = 1 - i\alpha_0 \mathbf{c} \times \mathbf{m} \times, \tag{15.33}$$

где  $\mathbf{c}$  — единичный вектор оси симметрии кристалла. Согласно (15.24), при этом  $|\rho| = |\sigma^*| = (1 + i\alpha_0 \mathbf{m} \mathbf{c})^2$  и уравнение нормалей (15.27), как нетрудно убедиться, принимает вид

$$[\mathbf{m}^2 - \mathbf{e}_0 (1 + \alpha_0^2 (\mathbf{m} \mathbf{c})^2)] [\bar{\mathbf{m}} \mathbf{e} \mathbf{m} - \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_e (1 + \alpha_0^2 (\mathbf{m} \mathbf{c})^2)] = 0. \tag{15.34}$$

Отсюда следует для показателей преломления обеих изонормальных волн

$$n_o'^2 = \frac{n_o^2}{1 - n_o^2 \alpha_0^2 (\mathbf{n} \mathbf{c})^2}, \quad n_e'^2 = \frac{n_e^2}{1 - n_e^2 \alpha_0^2 (\mathbf{n} \mathbf{c})^2}, \tag{15.35}$$

где  $n_o^2 = \epsilon_o$ ,  $n_e^2 = \epsilon_o \epsilon_e / n_e n$  — показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн в соответствующем (при  $\alpha_o = 0$ ) одноосном негиротропном кристалле (см. § 4). Поскольку при  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{c}$  имеем  $n_o = n_e$  (§ 4), то из (15.35) в этом случае также следует  $n'_o = n'_e$ , т. е. в кристаллах данной симметрии независимо от отсутствия или наличия гиротропии ось симметрии с является оптической осью. Ни в каком другом случае, кроме двух рассмотренных, точное уравнение (15.27) не распадается на два уравнения, подобно (15.34). Следует обратить внимание на то, что, согласно (15.30), в случае изотропных сред и кубических кристаллов показатель преломления линейно зависит от параметра оптической активности

$$n_{\pm} \approx n_o (1 \pm \alpha n_o). \quad (15.36)$$

В то же время из (15.35) получаем приближенно

$$n'_o = n_o \left( 1 + \frac{1}{2} n_o^2 \alpha_o^2 (\mathbf{nc})^2 \right), \quad n'_e = n_e \left( 1 + \frac{1}{2} n_e^2 \alpha_o^2 (\mathbf{nc})^2 \right). \quad (15.37)$$

Таким образом, в этом случае показатели преломления обеих волн — «обыкновенной» и «необыкновенной» — зависят от направления распространения волн. При этом от параметра активности они зависят лишь во втором порядке.

Не представляет труда обобщить эти результаты на случай наличия магнитной анизотропии. Используя указанное выше переопределение величин (см. § 4 и формулу (15.4)), получаем из (15.30) с учетом скалярного характера  $\mu$ :

$$\frac{\mathbf{m}\mu\mathbf{m}}{|\mu|} = \frac{\mathbf{m}^2}{\mu^2} = \frac{\epsilon}{\mu \left( 1 \mp \mu\alpha \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right)},$$

или

$$\mathbf{m}^2 = \frac{\epsilon\mu}{(1 \mp \alpha \sqrt{\epsilon\mu})^2} = \frac{n_o^2}{(1 \mp \alpha n_o)^2}, \quad n_o = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (15.38)$$

Чтобы получить соответствующие соотношения для поля  $\mathbf{E}$ , сделаем упомянутую замену в уравнении (15.31):

$$\mathbf{E}' = -i\alpha' \frac{\epsilon' |\sigma'| + \mathbf{m}'^2}{\epsilon' |\sigma'| - \mathbf{m}'^2} [\mathbf{m}' \mathbf{E}']. \quad (15.39)$$

Здесь  $\epsilon' = \epsilon/\mu$ ,  $\mathbf{m}' = \mathbf{m}/\mu$ ,  $\alpha' = \alpha\mu$ ,  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}/\mu$ ,  $|\sigma'| = 1 - \alpha'^2 \mathbf{m}'^2 = |\sigma|$ . После подстановки в (15.39) получим с заменой  $\epsilon$  на  $\epsilon\mu$  уравнение (15.31), из которого по-прежнему следует круговая поляризация волны.

Аналогично из (15.34) получим соответствующее уравнение для магнитных кристаллов. При осуществлении замены  $\epsilon' = \sqrt{\mu}^{-1} \epsilon \sqrt{\mu}^{-1}$ ,  $\alpha' = \sqrt{\mu} \alpha \sqrt{\mu}$  следует иметь в виду, что используемая форма тензоров  $\epsilon'$ ,  $\alpha'$  должна соответствовать типу кристалла, для которого взят тензор  $\epsilon$ .

В данном случае для одноосных кристаллов  $\epsilon = \epsilon_0 + (\epsilon_e - \epsilon_0) \text{с.с}$  и  $\mu = \mu_0 + (\mu_e - \mu_0) \text{с.с}$ ,  $|\mu| = \mu_0^2 \mu_e$ , поэтому  $\epsilon \mu = \mu \epsilon$  и  $\sqrt{\mu} \epsilon = \epsilon \sqrt{\mu}$ , так что  $\epsilon' = \mu^{-1} \epsilon$ . Соответственно в уравнении (15.34)  $\epsilon'_0 = \epsilon_0 / \mu_0$  и  $\epsilon'_e = \epsilon_e / \mu_e$ . Кроме того, следует учесть, что  $\alpha_0^2 (\text{мс})^2 = \text{м}\alpha\text{т}$ , поэтому при замене (5.49), (15.4) получим

$$\text{м}'\bar{\alpha}'\text{м}' = \text{м}\bar{\alpha}\text{т} = \alpha_0^2 (\text{мс})^2.$$

Учитывая также (5.51), получаем вместо (15.34)

$$[\text{т}\mu\text{т} - \epsilon_0 \mu_0 \mu_e (1 + \alpha_0^2 (\text{мс})^2)] [\text{т}\epsilon\text{т} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_e (1 + \alpha_0^2 (\text{мс})^2)] = 0. \quad (15.40)$$

Если сравнить это уравнение с соответствующим уравнением (5.8а) для негиротропных магнитных кристаллов средних сингоний, то различие сведется к тому, что в (5.8а) нужно заменить  $\epsilon_e$ ,  $\mu_e$  на  $\epsilon_e (1 - \epsilon_0 \mu_0 \alpha_0^2)$ ,  $\mu_e (1 - \epsilon_0 \mu_0 \alpha_0^2)$ .

Рассмотрим поляризацию волн, распространяющихся в кристаллах планальных классов средних сингоний. Согласно (15.33), (15.24), (26.63), имеем

$$\epsilon\rho = \epsilon_0 \rho + \epsilon' \text{с.с} = \epsilon_0 (1 + i\alpha_0 \text{мс}) + (\epsilon' \text{с} - i\epsilon_0 \alpha_0 \text{т}) \text{с},$$

$$\epsilon' = \epsilon_e - \epsilon_0, \quad \text{м}^\times \sigma^{-1} \text{м}^\times = \frac{1}{|\sigma|} \bar{\sigma} (\sigma \text{т})^\times \text{м}^\times = \frac{\text{м}^{\times 2}}{1 - i\alpha_0 \text{мс}}. \quad (15.40\text{а})$$

Подставляя эти выражения в (15.12), получаем  $\gamma \mathbf{E} = 0$ , где

$$\gamma = \epsilon_0 (1 + \alpha_0^2 (\text{мс})^2) + \text{м}^{\times 2} + (1 - i\alpha_0 \text{мс}) (\epsilon' \text{с} - i\epsilon_0 \alpha_0 \text{т}) \text{с}. \quad (15.41)$$

Умножая равенство  $\gamma \mathbf{E} = 0$  на независимые векторы  $\text{т}$ ,  $\text{с}$  и  $[\text{мс}]$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \text{т}\gamma \mathbf{E} = \text{т}\epsilon\rho \mathbf{E} = \text{тD} = \epsilon_0 (1 + i\alpha_0 \text{мс}) \text{тE} + \\ + (\epsilon' \text{тс} - i\epsilon_0 \alpha_0 \text{т}^2) \text{сE} = 0, \end{aligned} \quad (15.42)$$

$$\text{с}\gamma \mathbf{E} = \text{мс.тE} + (\epsilon_e (1 - i\alpha_0 \text{мс}) - \text{м}^2) \text{сE} = 0, \quad (15.43)$$

$$[\text{мс}] \gamma \mathbf{E} = (\epsilon_0 (1 + \alpha_0^2 (\text{мс})^2) - \text{м}^2) [\text{мс}] \mathbf{E} = 0. \quad (15.44)$$

Из уравнений (15.42), (15.43) следует, что  $\text{тE} = \text{сE} = 0$ , за исключением случаев, когда выполняется условие

$$\begin{aligned} \epsilon_0 (1 + i\alpha_0 \text{мс}) (\epsilon_e (1 - i\alpha_0 \text{мс}) - \text{м}^2) - \text{мс} (\epsilon' \text{тс} - i\epsilon_0 \alpha_0 \text{т}^2) = \\ = \epsilon_0 \epsilon_e (1 + \alpha_0^2 (\text{мс})^2) - \text{т}\epsilon\text{т} = 0. \end{aligned} \quad (15.45)$$

Сопоставляя (15.42)—(15.45) с уравнением нормалей (15.34), видим, что для «обыкновенной» волны равенство (15.44) удовлетворяется, а из (15.42), (15.43) следует  $\mathbf{cE} = \mathbf{mE} = 0$  или

$$\mathbf{E}_0 \parallel [\mathbf{mc}], \quad (15.46)$$

что совпадает с выражением для  $\mathbf{E}_0$  в негиротропных кристаллах средних сингоний (4.48). Для «необыкновенной» волны удовлетворяется соотношение (15.45), поэтому уравнения (15.42) и (15.43) равносильны, а из (15.44) следует  $[\mathbf{mc}] \mathbf{E} = 0$ . Таким образом, в этом случае

$$\mathbf{E}_e \parallel [\mathbf{c}\gamma, [\mathbf{mc}]] = [\epsilon_e (1 - i\alpha_0 \mathbf{m}\mathbf{c}) \mathbf{c} + [\mathbf{m} [\mathbf{mc}]], [\mathbf{mc}]]. \quad (15.47)$$

Иначе это выражение можно представить в виде

$$\mathbf{E}_e \parallel (\epsilon\rho)^{-1} [\mathbf{m} [\mathbf{mc}]] \parallel (\epsilon_e - (\epsilon' \mathbf{c} - i\epsilon_0 \alpha_0 \mathbf{m}) \cdot \mathbf{c}) [\mathbf{m} [\mathbf{mc}]]. \quad (15.48)$$

Из найденных выражений (15.46), (15.48) для векторов электрического поля обеих изонормальных волн с помощью уравнений Максвелла (15.9), (15.10) можем получить выражения для всех остальных векторов поля. Приведем сравнительную сводку этих выражений для негиротропных кристаллов средних сингоний (см. § 4) и гиротропных кристаллов планальных классов средних сингоний.

*Негиротропные кристаллы  
средних сингоний*

*Гиротропные кристаллы  
планальных классов  
средних сингоний*

Обыкновенные волны

$$\mathbf{m}^2 - \epsilon_0 = 0, \quad \mathbf{m}^2 - \epsilon_0 (1 + \alpha_0^2 (\mathbf{m}\mathbf{c})^2) = 0, \quad (15.49)$$

$$\mathbf{E}_0 = C [\mathbf{mc}], \quad \mathbf{E}_0^g = C [\mathbf{mc}], \quad (15.50)$$

$$\mathbf{B}_0 = [\mathbf{mE}_0] = C [\mathbf{m} [\mathbf{mc}]], \quad \mathbf{B}_0^g = C [\mathbf{m} [\mathbf{mc}]], \quad (15.51)$$

$$\mathbf{D}_0 = C\epsilon_0 [\mathbf{mc}], \quad \mathbf{D}_0^g = C\epsilon_0 (1 + i\alpha_0 \mathbf{m}\mathbf{c}) [\mathbf{mc}], \quad (15.52)$$

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0 = C [\mathbf{m} [\mathbf{mc}]], \quad \mathbf{H}_0^g = \sigma^{-1} \mathbf{B}_0^g = \frac{1 - i\alpha_0 \mathbf{m}\mathbf{c}}{1 - i\alpha_0 \mathbf{m}\mathbf{c}} \mathbf{B}_0^g = \quad (15.53)$$

$$= C \frac{[\mathbf{m} [\mathbf{mc}]] + i\alpha_0 [\mathbf{mc}]^2 \mathbf{m}}{1 - i\alpha_0 \mathbf{m}\mathbf{c}}.$$

## Необыкновенные волны

$$\text{mem} - \varepsilon_0 \varepsilon_e = 0, \quad \text{mem} - \varepsilon_0 \varepsilon_e (1 + \alpha_0^2 (\text{mc})^2) = 0, \quad (15.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= C \varepsilon^{-1} [\mathbf{m} [\text{mc}]] = \mathbf{E}_e^g = C \left( \varepsilon^{-1} + i \frac{\alpha_0}{\varepsilon_e} \mathbf{m} \cdot \mathbf{c} \right) [\mathbf{m} [\text{mc}]] = \\ &= C \left( \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \mathbf{c}, \quad = C (1 + i \alpha_0 \text{mc}) (\varepsilon \rho)^{-1} [\mathbf{m} [\text{mc}]], \end{aligned} \quad (15.55)$$

$$\mathbf{B}_e = C [\text{mc}], \quad \mathbf{B}_e^g = [\mathbf{m} \mathbf{E}_e^g] = -C [\text{mc}], \quad (15.56)$$

$$\mathbf{D}_e = \varepsilon \mathbf{E}_e = C [\mathbf{m} [\text{mc}]], \quad \mathbf{D}_e^g = \varepsilon \rho \mathbf{E}_e^g = C (1 + i \alpha_0 \text{mc}) [\mathbf{m} [\text{mc}]], \quad (15.57)$$

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{B}_e = -C [\text{mc}]. \quad \mathbf{H}_e^g = \sigma^{-1} \mathbf{B}_e^g = -\frac{C}{1 - i \alpha_0 \text{mc}} [\text{mc}]. \quad (15.58)$$

Здесь использованы соотношения (см. § 26)

$$\rho^{-1} = \sigma^{*-1} = \frac{1 + i \alpha_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{c}}{1 + i \alpha_0 \text{mc}}, \quad \varepsilon^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_e} (\varepsilon_e - \varepsilon' \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}),$$

$$\varepsilon \rho = \varepsilon - i \varepsilon_0 \alpha_0 \mathbf{c} \times \mathbf{m} \times = \varepsilon_0 (1 + i \alpha_0 \text{mc}) + (\varepsilon' \mathbf{c} - i \varepsilon_0 \alpha_0 \mathbf{m}) \cdot \mathbf{c}, \quad (15.59)$$

$$\text{mem} = \varepsilon_0 \mathbf{m}^2 + \varepsilon' (\text{mc})^2 = \varepsilon_e \mathbf{m}^2 - \varepsilon' [\text{mc}]^2.$$

Из формул (15.50) — (15.58) следует, что трансверсальные векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  обеих изонормальных волн имеют одинаковую поляризацию в негиротропных и в гиротропных кристаллах рассматриваемых классов. То же относится к электрическому полю обыкновенной волны и магнитному полю необыкновенной волны. Все упомянутые векторы линейно поляризованы одинаковым образом независимо от гиротропии.

Различие в поляризации имеет место лишь для векторов магнитного поля обыкновенной волны (15.53) и электрического поля необыкновенной волны (15.55). В обоих случаях векторы  $\mathbf{H}_e^g$  и  $\mathbf{E}_e^g$  нетрансверсальны и описывают эллипсы в главной плоскости, параллельной волновой нормали  $\mathbf{n}$  и оптической оси  $\mathbf{c}$  (см. § 2). При этом во всех случаях соответствующие векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  ортогональны для обеих изонормальных волн  $\mathbf{E}_e^g \mathbf{E}_e^g = \mathbf{H}_e^g \mathbf{H}_e^g = 0$  и т. д. Заметим, что  $\mathbf{H}_e^g$  (15.33) и  $\mathbf{E}_e^g$  (15.55) отличаются от  $\mathbf{H}_e$  и  $\mathbf{E}_e$  на величины первого порядка малости по параметру гирации  $\alpha_0$ , в то время как показатели преломления  $n'_o$ ,  $n'_e$ , согласно (15.35), (15.37), отличаются от соответствующих показателей  $n_o$ ,  $n_e$  для негиротропных кристаллов на величины второго порядка по  $\alpha_0$ .

Очевидно, в рассматриваемых кристаллах невозможна круговая поляризация волн ни при каком направлении фазовой нормали  $\mathbf{n}$ , включая случай  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{c}$ . Действительно, в последнем случае все приведенные выражения для векторов

поля теряют смысл, что соответствует произвольной поляризации, как и должно быть ввиду совпадения скоростей обеих изонормальных волн.

## § 16. СОБСТВЕННО ГИРОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

Согласно (15.2), уравнения связи для сред, обладающих оптической вращательной способностью, имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon (1 + \alpha_1 \nabla \times) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu (1 + \tilde{\alpha}_1 \nabla \times) \mathbf{H} \quad (16.1)$$

или, в случае плоских волн (см. (15.6)),

$$\mathbf{D} = \varepsilon (1 - i\alpha \mathbf{m} \times) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu (1 - i\tilde{\alpha} \mathbf{m} \times) \mathbf{H}. \quad (16.2)$$

Эти уравнения можно написать в форме, аналогичной (1.5):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H}, \quad (16.3)$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon (1 - i\alpha \mathbf{m} \times), \quad \mu_1 = \mu (1 - i\tilde{\alpha} \mathbf{m} \times). \quad (16.4)$$

Отличие введенных здесь тензоров  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$  от тензоров диэлектрической ( $\varepsilon$ ) и магнитной ( $\mu$ ) проницаемости, входящих в (1.5), заключается в том, что тензоры  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$ , во-первых, комплексны, во-вторых, несимметричны и, в-третьих, помимо свойств среды как таковой они зависят также от параметров, характеризующих волну, а именно от вектора рефракции  $\mathbf{m}$ .

Однако оптическую вращательную способность можно описать также иным способом (см., например, [134]). Пусть  $\mu = 1$ , а диэлектрический тензор комплексный:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + i\varepsilon'. \quad (16.5)$$

Выражение для электрической энергии поля  $w_e \sim \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E}$  (1.13) при тензоре (16.5) будет иметь вещественное значение для произвольного вещественного вектора  $\mathbf{E}$  лишь при условии  $\mathbf{E} \varepsilon' \mathbf{E} = 0$ . Это условие тождественно выполняется, если тензор  $\varepsilon'$  антисимметричен:  $\tilde{\varepsilon}' = -\varepsilon'$  (см. (25.23 а)). Но такой тензор всегда дуален некоторому вектору  $\mathbf{a}$  (см. § 26):

$$\varepsilon' = \mathbf{a} \times. \quad (16.6)$$

Таким образом, из требования вещественности энергии вытекает, что комплексный тензор диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  (16.5) должен иметь вид

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + i\mathbf{a} \times = \varepsilon_1^\dagger, \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon^*, \quad (16.7)$$

т. е. он должен быть эрмитовым. Аналогичное выражение будет справедливо в общем случае и для тензора магнитной проницаемости

$$\mu_1 = \mu + i\mathbf{b} \times, \quad \mu = \tilde{\mu} = \mu^*. \quad (16.8)$$

Постоянные векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  мы будем называть векторами гирации.

Рассмотрим, какой вид будет иметь закон сохранения энергии для рассматриваемых сред. В результате того же вычисления, которое проделано в конце § 1, придем к соотношению (1.34)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^* [\nabla \mathbf{E}] - \mathbf{E} [\nabla \mathbf{H}^*] + \mathbf{H} [\nabla \mathbf{E}^*] - \mathbf{E}^* [\nabla \mathbf{H}] = \\ = -\frac{1}{c} (\mathbf{E} \mathbf{D}^* + \mathbf{E}^* \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \mathbf{B}^* + \mathbf{H}^* \dot{\mathbf{B}}). \end{aligned} \quad (16.9)$$

Левая часть равна  $\text{div} ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}])$ . С другой стороны, поскольку  $\mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H}$ , то можно написать правую часть (16.9) в виде

$$-\frac{1}{c} (\mathbf{E} \epsilon_1^* \dot{\mathbf{E}}^* + \mathbf{E}^* \epsilon_1 \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{H} \mu_1^* \dot{\mathbf{H}}^* + \mathbf{H}^* \mu_1 \dot{\mathbf{H}}). \quad (16.9a)$$

Поскольку (см. (16.7))

$$\mathbf{E} \epsilon_1^* \dot{\mathbf{E}}^* = \dot{\mathbf{E}}^* \tilde{\epsilon}_1^* \mathbf{E} = \dot{\mathbf{E}}^* \epsilon_1^+ \mathbf{E} = \dot{\mathbf{E}}^* \epsilon_1 \mathbf{E}, \quad (16.10)$$

то первые два члена выражения (16.9a) дают

$$\mathbf{E} \epsilon_1^* \dot{\mathbf{E}}^* + \mathbf{E}^* \epsilon_1 \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^* \epsilon_1 \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \epsilon_1 \dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^* \epsilon_1 \mathbf{E}). \quad (16.11)$$

Аналогично получаем для второй пары членов в (16.9a)

$$\mathbf{H} \mu_1^* \dot{\mathbf{H}}^* + \mathbf{H}^* \mu_1 \dot{\mathbf{H}} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}^* \mu_1 \mathbf{H}). \quad (16.12)$$

В результате равенство (16.9) принимает вид (2.10):  $\dot{\omega} + \text{div} \mathbf{S} = 0$ , где  $\omega = \omega_e + \omega_m$  и

$$\omega_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^* \epsilon_1 \mathbf{E}, \quad \omega_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^* \mu_1 \mathbf{H},$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]). \quad (16.13)$$

Заметим, что в отличие от (1.37), (1.38) здесь выражения для  $\omega_e$  и  $\omega_m$  нельзя писать в виде  $\omega_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \epsilon_1 \mathbf{E}^*$ ,  $\omega_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H} \mu_1 \mathbf{H}^*$ ,

поскольку тензоры  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  несимметричны. При эрмитовских тензорах  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  выражение для плотности энергии  $\omega$ , как и должно быть, является вещественным, поскольку

$$(\mathbf{E}^* \epsilon_1 \mathbf{E})^* = \mathbf{E} \epsilon_1^* \mathbf{E}^* = \mathbf{E}^* \epsilon_1^\dagger \mathbf{E} = \mathbf{E}^* \epsilon_1 \mathbf{E}. \quad (16.13a)$$

Покажем, что среды, характеризуемые диэлектрическим тензором (16.7), действительно могут обладать оптической вращательной способностью. Для простоты рассмотрим случай, когда  $\mu = 1$  и в (16.7)  $\epsilon$  — скалярная матрица. Уравнения Максвелла для плоских волн принимают вид (4.1), (4.2)

$$\epsilon_1 \mathbf{E} = -\mathbf{m} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (16.14)$$

откуда следует (ср. (4.3))

$$(\epsilon + i\mathbf{a} \times + \mathbf{m} \times^2) \mathbf{E} = 0. \quad (16.15)$$

Пусть  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{c}$ ,  $c^2 = 1$ ,  $\mathbf{m} = n\mathbf{c}$ , тогда из (16.15) следует

$$(\epsilon - n^2 + n^2 \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + i\alpha \mathbf{c} \times) \mathbf{E} = 0. \quad (16.15a)$$

Умножая на  $\mathbf{c}$ , имеем  $\mathbf{c} \mathbf{E} = 0$ , следовательно,

$$(\epsilon - n^2 + i\alpha \mathbf{c} \times) \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\frac{i\alpha}{\epsilon - n^2} [\mathbf{c} \mathbf{E}]. \quad (16.16)$$

Условие  $|\epsilon - n^2 + i\alpha \mathbf{c} \times| = 0$ , согласно (26.93), гласит

$$(\epsilon - n^2) [(\epsilon - n^2)^2 - \alpha^2] = 0. \quad (16.17)$$

Очевидно,  $\epsilon - n^2 \neq 0$ , так как тогда из (16.16) следует  $[\mathbf{c} \mathbf{E}] = 0$ , что вместе с  $\mathbf{c} \mathbf{E} = 0$  приводит к  $\mathbf{E} = 0$ . Поэтому

$$n^2 = \epsilon \pm \alpha, \quad \mathbf{E} = \pm i [\mathbf{c} \mathbf{E}], \quad (16.18)$$

т. е. вдоль  $\mathbf{c} \parallel \mathbf{a}$  распространяются две циркулярно поляризованные волны — левая и правая, следовательно, имеет место вращение плоскости поляризации (см. § 11).

Итак, мы убедились, что если тензор диэлектрической проницаемости является комплексным эрмитовым, то соответствующая среда способна вращать плоскость поляризации линейно поляризованного света, т. е. обладает гиротропией.

Возникает вопрос: в каком отношении находится эта гиротропия к той, которая соответствует уравнениям связи (12.21) или в случае плоских волн уравнениям (15.6). Нетрудно видеть, что оба эти вида гиротропии весьма существенно различаются. Самое основное и фундаментальное различие уже было отмечено в начале данного параграфа. Если сравнить уравнения (16.4)

$$\epsilon_1 = \epsilon (1 - i\tilde{\alpha} \mathbf{m} \times), \quad \mu_1 = \mu (1 - i\tilde{\alpha} \mathbf{m} \times)$$



с уравнениями (16.7), (16.8)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + ia^\times, \quad \mu_1 = \mu + ib^\times, \quad (16.19)$$

то прежде всего видим, что  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$  (16.4) зависят от  $\mathbf{m}$ , т. е. от скорости и направления распространения волн, в то время как  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$  (16.19) постоянны, т. е. являются константами среды (если отвлечься от дисперсии или рассматривать  $\varepsilon$  и  $\mu$  при фиксированной частоте). Далее, в самом общем случае в  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$  (16.4) входят 9 независимых параметров гиротропии — компонент тензора гирации  $\alpha$ . В то же время  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$  (16.19) зависят не более чем от 6 параметров гиротропии — компонент векторов гирации  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Дальнейшие различия между тензорами (16.4) и (16.19) обнаруживаются, если перейти к рассмотрению их вида для различных классов кристаллов (§ 14).

Согласно § 14, условие, которое налагается на вектор  $\mathbf{a}$  (или  $\mathbf{b}$ ) свойствами симметрии кристалла, может быть получено следующим образом. Вместо (14.3) напишем равенство

$$\mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E} = (\varepsilon + ia^\times) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} + i[\mathbf{aE}]. \quad (16.20)$$

Выполнив преобразование  $S$  группы симметрии кристалла, получим (ср. (14.4)):  $\mathbf{D}' = S\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}' = S\mathbf{E}$ , причем должно быть  $\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}' + i[\mathbf{a}, \mathbf{E}']$  или  $S\mathbf{D} = \varepsilon S\mathbf{E} + i[\mathbf{a}, S\mathbf{E}]$ , что дает после умножения на  $S^{-1}$

$$\mathbf{D} = S^{-1}\varepsilon S\mathbf{E} + iS^{-1}[\mathbf{a}, S\mathbf{E}]. \quad (16.21)$$

Поскольку  $\varepsilon$  удовлетворяет условию (14.7):  $S^{-1}\varepsilon S = \varepsilon$ , то из сравнения (16.20) и (16.21) следует  $S^{-1}[\mathbf{a}, S\mathbf{E}] = [\mathbf{aE}]$  или

$$S^{-1}\mathbf{a}^\times S = \mathbf{a}^\times, \quad \mathbf{a}^\times S = S\mathbf{a}^\times. \quad (16.22)$$

Если воспользоваться здесь формулой (26.58) и учесть, что  $\tilde{S} = S^{-1}$ , то вместо (16.22) получим

$$(S^{-1}\mathbf{a})^\times = |S|\mathbf{a}^\times, \quad S^{-1}\mathbf{a} = |S|\mathbf{a}, \quad (16.23)$$

т. е. вектор  $\mathbf{a}$  должен быть собственным вектором преобразования  $S$ , соответствующим собственному значению  $|S| = \pm 1$ . Отсюда следует (см. (14.18)), что преобразование инверсии  $S_{\bar{2}}$  не ограничивает вектора  $\mathbf{a}$ . Преобразование отражения  $S_m$  (14.19) порождает, согласно (16.23), условие  $\mathbf{a} = -2\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ , т. е.  $\mathbf{a} = \mathbf{ic}$ . При этом следует помнить, что вектор  $\mathbf{a}$ , согласно определению, должен иметь фиксированное направление, в то время как  $\mathbf{c}$  можно брать как в одном, так и в противоположном направлении. Преобразование, отвечающее оси симметрии  $S_h$ , приводит к условию  $S_h\mathbf{a} = \mathbf{a}$  или (см. 14.20))

$$(1 - \cos \varphi_h)[\mathbf{c}[\mathbf{ca}]] + \sin \varphi_h[\mathbf{ca}] = 0. \quad (16.24)$$

Поскольку векторы  $[ca]$  и  $[c[ca]]$  вещественны и взаимно перпендикулярны, то равенство (16.24) возможно лишь при  $[ca]=0$ ,  $a=kc$  (если  $k \neq 1$ ). В случае инверсионной оси (14.21) из (16.23) следует  $S_{\bar{k}} a = -a$ , что сводится к предыдущему случаю, поскольку  $S_{\bar{k}} = -S_k$ . Итак, мы приходим к следующим выводам: за исключением симметрии 1 и 2 любая другая симметрия требует, чтобы вектор  $a$  был направлен вдоль либо оси симметрии, либо нормали к плоскости симметрии. Если группа симметрии кристалла связана с несколькими различными направлениями, то вектор  $a$  должен обращаться в нуль. Согласно таблице, отсюда следует, что гиротропия вида (16.19) должна отсутствовать у кристаллов всех классов ромбической и кубической сингонии, а значит, и в изотропных средах. Она возможна в кристаллах всех классов триклинной и моноклинной сингоний. Что же касается кристаллов средних сингоний, то гиротропия типа (16.19) возможна лишь в тех из них, в которых имеется только одно выделенное направление симметрии. Это условие выполняется для классов 9, 10, 13 тетрагональной сингонии, классов 16, 17 тригональной сингонии и классов 21, 23, 25 гексагональной сингонии. Итого имеется 13 классов симметрии кристаллов (1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 13, 16, 17, 21, 23, 25), в которых принципиально возможно наличие гиротропии вида (12.19). Напомним (см. § 14), что гиротропия вида (16.4) возможна в 18 классах кристаллов, куда следует добавить также изотропную среду.

Таким образом, имеется шесть классов симметрии кристаллов (2, 5, 13, 17, 21, 25), в которых возможна гиротропия вида (16.19), но невозможна гиротропия вида (16.4). В свою очередь имеется 12 классов симметрии (см. § 14), а именно классы 6, 7, 11, 12, 14, 18, 19, 24, 26, 28, 29 и изотропные среды, в которых возможна гиротропия (16.4), но невозможна гиротропия (16.19). И наконец, всего в 7 классах симметрии кристаллов (1, 3, 4, 9, 10, 16, 23) возможно наличие гиротропии как одного, так и другого типа. Но этим далеко не исчерпывается различие рассматриваемых двух типов гиротропии. Если мы обратимся к структуре тензоров  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  (16.19), то легко установим на основании вышеизложенных соображений, что во всех случаях, кроме кристаллов триклинной сингонии, векторы  $a$  и  $b$  в тензорах  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  должны иметь одинаковое направление. Что же касается кристаллов средних сингоний, то во всех их тензоры  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  (16.19) также должны иметь одинаковую структуру. Следовательно, в отношении гиротропии (16.19) все случаи сводятся к трем разновидностям тензоров (ср. § 14):

### I. Триклинная сингония

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_1^0 c_1 \cdot c_1 + \epsilon_2^0 c_2 \cdot c_2 + \epsilon_3^0 c_3 \cdot c_3 + ia^\times, \\ \mu_1 &= \mu_1^0 c_1 \cdot c_1 + \mu_2^0 c_2 \cdot c_2 + \mu_3^0 c_3 \cdot c_3 + ib^\times, \\ c_a c_b &= c_a' c_b' = \delta_{ab}, \quad \epsilon_1 \mu_1 \neq \mu_1 \epsilon_1. \end{aligned} \quad (16.25)$$

### II. Моноклинная сингония

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_1^0 c_1 \cdot c_1 + \epsilon_2^0 c_2 \cdot c_2 + \epsilon_3^0 c_3 \cdot c_3 + i\kappa c_3^\times, \\ \mu_1 &= \mu_1^0 c_1 \cdot c_1 + \mu_2^0 c_2 \cdot c_2 + \mu_3^0 c_3 \cdot c_3 + i\kappa' c_3^\times, \\ m &\parallel c_3 \parallel 2, \quad \epsilon_1 \mu_1 \neq \mu_1 \epsilon_1. \end{aligned} \quad (16.26)$$

### III. Средние сингонии

(классы 9, 10, 13, 16, 17, 21, 23, 25)

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_0 + \epsilon' c \cdot c + i\kappa c^\times, \quad \mu_1 = \mu_0 + \mu' c \cdot c + i\kappa' c^\times, \\ \epsilon_1 \mu_1 &= \mu_1 \epsilon_1. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Сравнивая эти данные со сводкой в конце § 14, содержащей II различных типов тензорных структур, характеризующих гиротропию (16.4), еще раз убеждаемся в глубоком различии рассматриваемых двух видов гиротропии.

Разумеется, это различие вовсе не носит лишь чисто математического характера — оно проявляется и в физических свойствах световых волн, распространяющихся в средах, обладающих тем либо другим видом гиротропии. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим простейшие случаи, относящиеся к разным типам гиротропии, но характеризующиеся аналогичной структурой тензора  $\epsilon$ . Обращаясь к гиротропии (16.4), рассмотрим изотропно-гиротропную среду при  $\mu=1$ , в которой, согласно (15.6), (15.30), (15.32),

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 (1 - i\alpha m^\times) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = (1 - i\alpha m^\times) \mathbf{H}, \\ n &= \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{1 \pm \alpha \sqrt{\epsilon_0}}, \quad \mathbf{E} = \pm i [n\mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (16.28)$$

Ближайшим аналогом этому случаю являются соотношения

$$\mathbf{D} = (\epsilon_0 + i\alpha c^\times) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = (1 + i\beta c^\times) \mathbf{H}, \quad (16.29)$$

являющиеся частным случаем (16.19). Соответствующие уравнения Максвелла имеют вид

$$(\epsilon_0 + i\alpha c^\times) \mathbf{E} = - [m\mathbf{H}], \quad (1 + i\beta c^\times) \mathbf{H} = [m\mathbf{E}]. \quad (16.30)$$

При  $\mathbf{m} = \pm n\mathbf{c}$  имеем  $\mathbf{cE} = \mathbf{cH} = 0$ . Исключив из (16.30) вектор  $\mathbf{H}$ , получим

$$(\epsilon_0 + i\alpha\mathbf{c}\times + n^2\mathbf{c}\times(1 + i\beta\mathbf{c}\times)^{-1}\mathbf{c}\times)\mathbf{E} = 0. \quad (16.31)$$

Аналогично (15.8), (15.24) имеем

$$(1 + i\beta\mathbf{c}\times)^{-1} = \frac{1 - \beta^2\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} + i\beta\mathbf{c}\times}{1 - \beta^2}. \quad (16.31a)$$

После подстановки этого выражения в (16.31) находим аналогично (16.18)

$$n^2 = (\epsilon_0 \pm \alpha)(1 \mp \beta), \quad \mathbf{E} = \pm i[\mathbf{cE}]. \quad (16.32)$$

Этот результат не меняется при переходе от  $\mathbf{m} = n\mathbf{c}$  к  $\mathbf{m} = -n\mathbf{c}$ . Отсюда следует, что при распространении волны параллельно или антипараллельно фиксированному вектору  $\mathbf{c}$  направление обращения кругового вектора  $\mathbf{E}$  остается одним и тем же для волны с данной фазовой скоростью. В то же время из (16.28)

при  $n = \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{1 + \alpha\sqrt{\epsilon_0}}$  для  $\mathbf{n} = \mathbf{c}$  получаем  $\mathbf{E} = +i[\mathbf{cE}]$ , а для

$\mathbf{n} = -\mathbf{c}$  имеем  $\mathbf{E} = -i[\mathbf{cE}]$ . Таким образом, в случае (16.32) при изменении направления фазовой нормали  $\mathbf{n}$  на противоположное для волны с данной фазовой скоростью направление обращения вектора  $\mathbf{E}$  не меняется относительно кристалла (это соответствует переходу левополяризованной волны в правополяризованную или наоборот). В случае же (16.28) при таком же изменении направления  $\mathbf{n}$  на обратное соответственно изменяется на обратное и направление обращения  $\mathbf{E}$ , благодаря чему волна сохраняет правую (левую) поляризацию.

Экспериментально обнаружить это различие в поведении волн в средах типа (16.4) и (16.19) можно следующим путем. Пропустим линейно поляризованную волну через один и тот же гиротропный слой, воспользовавшись зеркалом, в двух противоположных направлениях. Тогда, если среда относится к типу (16.19), поворот плоскости поляризации при прямом и обратном распространении будет происходить в одну и ту же сторону (относительно среды или наблюдателя) и поэтому удвоится. Если же среда принадлежит к типу (16.4), то на обратном пути поворот плоскости поляризации будет происходить в другую сторону и после двукратного прохождения через слой сведется к нулю.

Мы рассмотрели для случая (16.30) распространение волн вдоль направления оси  $\mathbf{c}$ . Если взять любое другое направление, то из уравнений (16.28) получится прежний результат — такое же вращение плоскости поляризации. Иначе будет обстоять дело с системой (16.30). Ограничимся для простоты распро-

странением волны перпендикулярно к вектору  $\mathbf{c}$  ( $m\mathbf{c}=0$ ). Исключив  $\mathbf{H}$  из системы (16.30), получим в этом случае

$$(\epsilon_0 + i\alpha\mathbf{c}^\times + \mathbf{m}^\times (1 + i\beta\mathbf{c}^\times)^{-1} \mathbf{m}^\times) \mathbf{E} = 0$$

или с учетом (16.31a) и равенства  $m\mathbf{c} = 0$

$$[(1 - \beta^2)(\epsilon_0 + i\alpha\mathbf{c}^\times) + \mathbf{m}^\times] \mathbf{E} = 0. \quad (16.33)$$

Умножив это уравнение на  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{n}$  и на  $[\mathbf{n}\mathbf{c}]$ , получим

$$(\epsilon_0(1 - \beta^2) - n^2) \mathbf{c}\mathbf{E} = 0, \quad (16.34)$$

$$(\epsilon_0\mathbf{n} + i\alpha[\mathbf{n}\mathbf{c}]) \mathbf{E} = 0, \quad (16.35)$$

$$(\epsilon_0(1 - \beta^2) - n^2)[\mathbf{n}\mathbf{c}] \mathbf{E} - i\alpha\mathbf{n}\mathbf{E} = 0. \quad (16.36)$$

Из (16.34) следуют две возможности:  $\epsilon_0(1 - \beta^2) - n^2 = 0$  или  $\mathbf{E} = 0$ . В первом случае из (16.36) имеем  $\mathbf{n}\mathbf{E} = 0$ , что вместе с (16.35) дает

$$\mathbf{E} \parallel [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{c}]] \parallel \mathbf{c}, \quad \mathbf{H} \parallel (1 + i\beta\mathbf{c}^\times)^{-1} [\mathbf{n}\mathbf{E}] \parallel [\mathbf{n}\mathbf{c}] - i\beta\mathbf{n} \quad (16.37)$$

и соответственно для индукций

$$\mathbf{D} \parallel \mathbf{C}, \quad \mathbf{B} \parallel [\mathbf{c}\mathbf{n}]. \quad (16.37a)$$

Если же  $\mathbf{c}\mathbf{E} = 0$ , то с помощью (16.35) находим

$$\mathbf{E} \parallel [\mathbf{c}, \epsilon_0\mathbf{n} + i\alpha[\mathbf{n}\mathbf{c}]] \parallel \epsilon_0[\mathbf{c}\mathbf{n}] - i\alpha\mathbf{n}, \quad \mathbf{H} \parallel \mathbf{c}. \quad (16.38)$$

Для трансверсальных векторов индукции отсюда следует

$$\mathbf{D} \parallel (\epsilon_0 + i\alpha\mathbf{c}^\times) \mathbf{E} \parallel [\mathbf{c}\mathbf{n}], \quad \mathbf{B} \parallel \mathbf{c}. \quad (16.39)$$

Ясно, что вращение плоскости поляризации света, распространяющегося перпендикулярно к оси  $\mathbf{c}$ , не имеет места. То же самое справедливо и для других направлений, отличных от  $\mathbf{c}$ .

Таким образом, совершенно очевидно, что хотя в обоих случаях (16.4) и (16.19) возможно вращение плоскости поляризации, однако во многих отношениях эти два вида гиротропии весьма существенно отличаются друг от друга. Поэтому необходимо различать их терминологически. В литературе для гиротропии типа (16.4) встречаются названия *естественная оптическая активность* или *естественная вращательная способность* (см., например, [10]). Мы будем говорить о таких средах, что они обладают *естественной гиротропией*, или просто *гиротропией*. В отличие от них среды, характеризуемые уравнениями связи

$$\mathbf{D} = (\epsilon + i\mathbf{a}^\times) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = (\mu + i\mathbf{b}^\times) \mathbf{H}, \quad (16.40)$$

с фиксированными векторами гирации  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  будем называть *собственно гиротропными*. Логическим обоснованием для тер-

мина «собственная гиротропия» служит то обстоятельство, что в этом случае связь полей и индукций для плоских волн осуществляется посредством тензоров (16.19), которые в отличие от тензоров (16.4) *не зависят от направления распространения и скорости волны* и, следовательно, целиком определяются собственными свойствами среды, внутренне ей присущими.

Вопрос о существовании и происхождении собственной гиротропии требует физического рассмотрения в связи с тем, что чисто кристаллографические соображения, связанные с симметрией, недостаточны для того, чтобы объяснить наличие в среде *одностороннего* выделенного направления, каким является вектор гирации  $\mathbf{a}$  или  $\mathbf{b}$ . Можно предположить, что в случае наличия собственной гиротропии последняя должна быть связана с существованием в среде некоторого постоянного внутримолекулярного или межмолекулярного поля.

### § 17. ВЫНУЖДЕННАЯ ГИРОТРОПИЯ

Хорошо известно, что под влиянием внешних воздействий (электрическое или магнитное поле, упругие напряжения) изотропная среда становится анизотропной. Возникающая при этом анизотропия получила название вынужденной, или индуцированной. Наиболее простым примером может служить явление Керра, которое заключается в том, что изотропная среда, помещенная в электрическое поле  $\mathbf{e}$ , становится двупреломляющей, точнее, приобретает свойства одноосного кристалла с осью, направленной параллельно полю.

Феноменологическая теория эффекта Керра чрезвычайно проста, особенно в принятой нами ковариантной трактовке. Свойства среды характеризуются диэлектрическим тензором  $\epsilon$ , который в данном случае должен зависеть от  $\mathbf{e}$ , т. е.  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{e})$ . Возникает вопрос — каков возможный вид этой функции? Поскольку  $\epsilon$  является тензором, то зависимость от  $\mathbf{e}$  должна носить тензорный характер. Единственный истинный тензор, который можно построить из одного вектора  $\mathbf{e}$ , есть диада  $\mathbf{e}\mathbf{e}$ . Поэтому

$$\epsilon = \epsilon(\mathbf{e}) = \epsilon_0 + \kappa \mathbf{e}\mathbf{e}, \quad (17.1)$$

где  $\epsilon_0$  — значение  $\epsilon$  при  $\mathbf{e}=0$ ,  $\kappa$  — некоторая скалярная константа. Сравнение с (4.44) сразу приводит к выводу, что среда приобретает свойства одноосного кристалла с осью, направленной параллельно внешнему электрическому полю  $\mathbf{e}$ .

Аналогичным образом существование сред, свойства которых описываются тензорами вида (16.19), вытекает из эффекта Фарадея — магнитного вращения плоскости поляризации. Обычно теория этого эффекта строится на молекулярной

основе ([10, 24] и др.). Однако ему также можно дать весьма простое феноменологическое объяснение. При этом мы снова исходим из того факта, что при наличии внешнего магнитного поля  $\mathbf{h}$  диэлектрический тензор среды  $\varepsilon$  должен как-то от него зависеть, т. е.  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{h})$ . Ограничимся вначале случаем изотропной среды, причем в отсутствие магнитного поля будем считать  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . При этом следует учесть, что вектор магнитного поля  $\mathbf{h}$  является *аксиальным*. Последнее означает, что фактически магнитное поле определяется не вектором, а антисимметричным тензором  $\mathbf{h}^\times$ , дуальным вектору  $\mathbf{h}$  (см. (11.22)). Это непосредственно следует, в частности, из того, что, согласно теории относительности, электромагнитное поле задается антисимметричным  $4 \times 4$ -тензором

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{h}^\times & i\mathbf{e} \\ -i\mathbf{e} & 0 \end{pmatrix}. \quad (17.2)$$

Следовательно, задача ставится таким образом: тензор  $\varepsilon$  является функцией антисимметричного тензора  $\mathbf{h}^\times$  и требуется определить возможный вид этой функции. Из линейной алгебры известно, что всякая функция от матрицы может быть выражена в полиномиальном виде. В частности,

$$\varepsilon(\mathbf{h}^\times) = \varepsilon_0 + \xi \mathbf{h}^\times + \eta \mathbf{h}^{\times 2}, \quad (17.3)$$

причем коэффициенты  $\xi$ ,  $\eta$  могут в свою очередь зависеть от инвариантов матрицы  $\mathbf{h}^\times$ , т. е. от  $\mathbf{h}^2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{h}^{\times 2})_i$ . В разложении (17.3) не следует брать  $\mathbf{h}^\times$  в степени выше второй, поскольку (см. § 26)  $\mathbf{h}^{\times 3} = -\mathbf{h}^2 \mathbf{h}^\times$ , следовательно, все степени тензора  $\mathbf{h}^\times$  выражаются через первую и вторую степени. Поскольку  $\mathbf{h}^{\times 2} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{h}^2$  (26.43), то

$$\varepsilon(\mathbf{h}) = \varepsilon(\mathbf{h}^\times) = (\varepsilon_0 - \eta \mathbf{h}^2) + \eta \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + \xi \mathbf{h}^\times. \quad (17.4)$$

Если коэффициент  $\xi$  будет вещественным, то закон сохранения энергии, как показано в § 1, не будет выполняться. Поэтому  $\xi$  должно быть чисто мнимым:  $\xi = i\chi$ , при этом закон сохранения энергии будет иметь форму (1.10), (16.13). Обозначив  $\varepsilon_0 - \eta \mathbf{h}^2 = \varepsilon^0$ , окончательно находим тензор диэлектрической проницаемости изотропной среды, помещенной в магнитное поле  $\mathbf{h}$ , в следующем виде:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \eta \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + i\chi \mathbf{h}^\times. \quad (17.5)$$

Но это есть в точности вид диэлектрического тензора в кристаллах средних сингоний, обладающих собственной гиротропией (ср. (16.27)).

Таким образом, феноменологический подход позволяет получить в нескольких строках также теорию эффекта Фарадея. Более того, мы получили здесь одновременно и теорию эффекта Коттона — Мутона, который связан с членом  $\eta \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$ . Приведенный вывод формул (17.1), (17.5) может служить примером эффективности феноменологического подхода.

Очевидно, гиротропию, обусловленную наличием магнитного поля, следует рассматривать как *вынужденную* или *индуцированную*\*). Таким образом, в принципе возможны три вида гиротропии: естественная гиротропия, которую мы будем называть также просто *гиротропия*, *собственная гиротропия* и *вынужденная гиротропия*.

Выше мы рассмотрели вынужденную анизотропию и гиротропию в изотропных средах. Теории вынужденной анизотропии в кристаллах посвящено много работ. В ковариантной форме эта теория развивалась в [137, 153--162]. Сейчас мы перейдем к рассмотрению *общей теории вынужденной гиротропии* в кристаллах в ковариантной форме.

Рассмотрим изменение диэлектрического тензора  $\epsilon$  при воздействии магнитного поля  $\mathbf{h}$  на кристалл. Ограничиваясь членами, линейными по  $\mathbf{h}$ , мы в соответствии со сказанным выше относительно теории эффекта Фарадея (см. (17.5)) можем написать  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{h}) = \epsilon(\mathbf{h}^\times)$  в развернутой форме

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{ab}^0 + \gamma_{abcd} h_{cd}^\times + i\alpha_{abcd} h_{cd}^\times. \quad (17.6)$$

Здесь  $\epsilon_{ab}^0$  — диэлектрический тензор невозмущенной среды. Тензор  $\alpha_{abcd}$  должен быть антисимметричен по первой и второй паре индексов:

$$\alpha_{abcd} = -\alpha_{bacd} = -\alpha_{abdc}. \quad (17.7)$$

В то же время тензор  $\gamma_{abcd}$  должен быть симметричен по первой паре индексов и антисимметричен по второй:

$$\gamma_{abcd} = \gamma_{bacd} = -\gamma_{abdc}. \quad (17.8)$$

Однако этот член незначительно изменит симметричную вещественную часть  $\epsilon^0$ , хотя в сильных полях его, очевидно, следует учитывать. Но в таких полях, строго говоря, необходимо учитывать также квадратичные по  $\mathbf{h}$  члены  $\beta_{abcdjg} h_{cd}^\times h_{jg}^\times$ . В частности, именно такие члены ответственны за эффект Коттона—Мутона в изотропных средах. Однако влияние таких членов в кристаллах значительно труднее обнаружить, так как вызванная ими анизотропия будет перекрываться естественной анизотропией среды, отсутствующей в изотропных средах.

\* ) Заметим, что вынужденная гиротропия может возникнуть также под действием электрического поля [149, 166—168].



Любой тензор  $\alpha_{abcd}$  со свойствами (17.7) можно представить в виде

$$\alpha = (\alpha_{abcd}) = \mathbf{a}_1^\times \cdot \mathbf{b}_1^\times + \mathbf{a}_2^\times \cdot \mathbf{b}_2^\times + \mathbf{a}_3^\times \cdot \mathbf{b}_3^\times, \quad (17.9)$$

где  $\mathbf{a}_c, \mathbf{b}_c$  — две тройки линейно независимых векторов. Возможность такого представления следует из того, что существует не более трех линейно независимых антисимметричных  $3 \times 3$ -матриц второго ранга  $\alpha_{ab} = -\alpha_{ba}$ , каждой из которых можно сопоставить дуальный ей вектор  $\mathbf{a}$  (см. § 26). При преобразовании  $S$  трехмерной ортогональной группы тензор (17.9) изменяется следующим образом (см. (14.6)):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^\times \cdot \mathbf{b}_1^\times + \mathbf{a}_2^\times \cdot \mathbf{b}_2^\times + \mathbf{a}_3^\times \cdot \mathbf{b}_3^\times \rightarrow \mathbf{S}\mathbf{a}_1^\times \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}\mathbf{b}_1^\times \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\mathbf{a}_2^\times \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}\mathbf{b}_2^\times \tilde{\mathbf{S}} + \\ + \mathbf{S}\mathbf{a}_3^\times \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}\mathbf{b}_3^\times \tilde{\mathbf{S}}. \end{aligned} \quad (17.10)$$

Согласно общей формуле (см. (26.61)),

$$\mathbf{S}\mathbf{a}^\times \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{|S|} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S} (\mathbf{S}\mathbf{a})^\times = \pm (\mathbf{S}\mathbf{a})^\times, \quad (17.11)$$

поскольку для ортогональных преобразований  $\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S} = 1$ ,  $|S| = \pm 1$  (см. § 29). Следовательно, вместо (17.10) можно написать

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^\times \cdot \mathbf{b}_1^\times + \mathbf{a}_2^\times \cdot \mathbf{b}_2^\times + \mathbf{a}_3^\times \cdot \mathbf{b}_3^\times \rightarrow (\mathbf{S}\mathbf{a}_1)^\times (\mathbf{S}\mathbf{b}_1)^\times + (\mathbf{S}\mathbf{a}_2)^\times (\mathbf{S}\mathbf{b}_2)^\times + \\ + (\mathbf{S}\mathbf{a}_3)^\times (\mathbf{S}\mathbf{b}_3)^\times. \end{aligned}$$

Если преобразование  $S$  принадлежит к группе симметрии кристалла, то тензор  $\alpha$  (17.9) не должен измениться. Переходя от матриц  $\mathbf{a}_c^\times$  к векторам  $\mathbf{a}_c$ , получим соотношение

$$\mathbf{S}\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{b}_1 + \mathbf{S}\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{S}\mathbf{b}_2 + \mathbf{S}\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{S}\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3. \quad (17.12)$$

Выберем в качестве векторов  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  правую тройку фиксированных единичных взаимно ортогональных векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ( $\mathbf{a} = [\mathbf{bc}]$ ,  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{a}[\mathbf{bc}] = 1$ ,  $\mathbf{ab} = \mathbf{ac} = \mathbf{bc} = 0$ ) и обозначим

$$\beta = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{c}. \quad (17.13)$$

Очевидно, наша задача сводится к определению тензора  $\beta$ , т. е. отысканию входящих в него векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ . Вместо (17.12) получим соответственно условие

$$\mathbf{S}\beta \tilde{\mathbf{S}} = \beta, \quad \mathbf{S}\beta = \beta \mathbf{S}. \quad (17.14)$$

Но это условие было рассмотрено в § 14, и мы можем воспользоваться результатами, приведенными в сводке в конце

этого параграфа. При этом следует взять выражения для  $\alpha$  с учетом того, что условие (14.14) для  $\beta$  не имеет места.

Приведем сводку выражений для тензора  $\beta$  во всех классах кристаллической симметрии.

I. Триклинная сингония (классы 1, 2)

$$\beta = a_1 \cdot a + a_2 \cdot b + a_3 \cdot c,$$

$$ab = ac = bc = 0, \quad a^2 = b^2 = c^2, \quad c = [ab]. \quad (17.15)$$

На векторы  $a_1, a_2, a_3$  и ориентацию ортонормированной тройки  $a, b, c$  не налагается никаких ограничений. Тензор  $\beta$  имеет общий вид и зависит от 9 параметров.

II. Моноклинная сингония,  
классы 3, 4, 5 ( $2 \parallel c \perp m$ )

$$\beta = a_1 \cdot a + a_2 \cdot b + \xi c \cdot c, \quad a_1 c = a_2 c = 0. \quad (17.16)$$

Тензор  $\beta$  содержит пять параметров  $a_1, a_2, \xi$ .

III. Ромбическая сингония, классы 6, 7, 8  
( $2 \parallel c, m \perp b$ )

$$\beta = \xi_1 a \cdot a + \xi_2 b \cdot b + \xi_3 c \cdot c. \quad (17.17)$$

Имеется три параметра  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

IV. Средние сингонии, классы 9, 10, 13, 16, 17,  
21, 23, 25 ( $c \parallel 3, 4, 6$ )

$$\beta = \xi_0 + \xi' c \cdot c + \xi c^\times. \quad (17.18)$$

Три параметра  $\xi_0, \xi', \xi$ .

V. Средние сингонии, классы 11, 12, 14, 15, 18,  
19, 20, 22, 24, 26, 27 ( $c \parallel 3, 4, 6$ )

$$\beta = \xi_0 + \xi' c \cdot c. \quad (17.19)$$

Два параметра  $\xi_0, \xi'$ .

VI. Кубическая сингония, все классы

$$\beta = \xi_0. \quad (17.20)$$

Каждому  $\beta$ , согласно (17.6) (17.9), (17.13), соответствует диэлектрический тензор

$$\epsilon = \epsilon^0 + i g^\times, \quad (17.21)$$

где

$$g^\times = -a_1^\times (a^\times h^\times)_t - a_2^\times (b^\times h^\times)_t - a_3^\times (c^\times h^\times)_t =$$

$$= 2(ah \cdot a_1 + bh \cdot b_1 + ch \cdot c_1) = 2(\beta h)^\times.$$

Таким образом, вектор гирации  $g$  имеет вид

$$g = 2\beta h. \quad (17.22)$$

Выпишем в явном виде векторы гирации, соответствующие тензорам (17.15)—(17.20), опуская множитель 2. Для триклинной сингонии  $\mathbf{g}$  имеет общий вид (13.22). Для остальных случаев соответственно имеем:

$$\mathbf{g} = \mathbf{ah} \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{bh} \cdot \mathbf{a}_2 + \xi \mathbf{ch} \cdot \mathbf{c}, \quad (17.23)$$

$$\mathbf{g} = \xi_1 \mathbf{ah} \cdot \mathbf{a} + \xi_2 \mathbf{bh} \cdot \mathbf{b} + \xi_3 \mathbf{ch} \cdot \mathbf{c}, \quad (17.24)$$

$$\mathbf{g} = \xi \mathbf{h} + \xi' \mathbf{ch} \cdot \mathbf{c} + \xi [\mathbf{ch}], \quad (17.25)$$

$$\mathbf{g} = \xi \mathbf{h} + \xi' \mathbf{ch} \cdot \mathbf{c}, \quad (17.26)$$

$$\mathbf{g} = \xi \mathbf{h}. \quad (17.27)$$

Сопоставление выражений для тензора вынужденной гиротропии  $\epsilon = \epsilon^0 + i\mathbf{g} \times$  (17.6), где  $\mathbf{g}$  имеет вид (17.22) — (17.27), с формулами (16.25) — (16.27) для тензора собственной гиротропии на первый взгляд показывает несоответствие между теми и другими для большинства классов кристаллов. На самом деле следует иметь в виду, что наложение магнитного поля изменяет симметрию кристалла (см. [132]). Ввиду этого симметрия, например, тетрагонального кристалла класса 9, помещенного в магнитное поле произвольного направления, в общем случае понизится и соответственно вектор гирации  $\mathbf{g}$  не будет направлен по оси симметрии 4, как это следует из формул (16.27). Легко видеть, что с точки зрения структуры тензора  $\epsilon$  (или  $\mu$ ) все возможные случаи вынужденной анизотропии сводятся в конечном итоге к трем типам собственной гиротропии (16.25)—(16.27) или некоторым их частным вариантам. Так, вынужденная гиротропия в кубических кристаллах и изотропных средах, согласно (17.27), соответствует случаю (16.27), где  $\epsilon'$  ( $\mu'$ ) положено равным нулю. Если же учесть и члены второго порядка по  $\mathbf{h}$  (эффект Коттона — Мутона, (см. 17.4)), то для тех же сред получаются общие соотношения (16.27), характеризующие собственную гиротропию во всех кристаллах средних сингоний. Во всех остальных классах кристаллов наложение магнитного поля в зависимости от его направления может привести к любому из типов собственной гиротропии (16.25) — (16.27). При этом вынужденная гиротропия типа (16.27) может появиться только в кристаллах средних сингоний и только при наложении поля  $\mathbf{h}$  параллельно оптической оси. Вынужденная гиротропия типа (16.26) может возникнуть только в ромбических и моноклинных кристаллах и только при наложении магнитного поля вдоль оси второго порядка или перпендикулярно к плоскости симметрии. Во всех остальных случаях получаются некоторые варианты общих формул (16.25) для триклинных кристаллов, различающиеся какими-либо соотношениями между параметрами.

Таким образом, собственная гиротропия и вынужденная гиротропия отличаются между собой лишь за счет *происхождения* эффекта — в первом случае он присущ кристаллу самому по себе, а во втором вызывается внешним воздействием. Что же касается различных форм *проявления* эффекта, которые определяются видом тензоров  $\epsilon$  и  $\mu$ , то все возможные случаи охватываются тремя типами структур (16.25) — (16.27) и их вариантами, связанными с различными соотношениями между параметрами. Иными словами, три случая (16.25) — (16.27) охватывают все многообразие возможных проявлений как собственной, так и вынужденной гиротропии. По существу различие между этими видами гиротропии является относительным и условным.

В заключение кратко остановимся на описании свойств поглощающих гиротропных кристаллов. В § 7 мы видели, что учет поглощения в отсутствие гиротропии осуществляется феноменологически путем допущения, что диэлектрический тензор  $\epsilon$  является *комплексным симметричным тензором*. Вполне естественно применить такой подход и в феноменологической теории гиротропных кристаллов, обладающих поглощением. В соответствии с этим можно характеризовать поглощающие естественно гиротропные кристаллы уравнениями связи (16.2)

$$\mathbf{D} = \epsilon(1 - i\alpha\mathbf{m} \times)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(1 - i\tilde{\alpha}\mathbf{m} \times)\mathbf{H}, \quad (17.28)$$

где

$$\epsilon = \epsilon^0 + i\sigma, \quad \epsilon^0 = \epsilon^{0*} = \tilde{\epsilon}^0, \quad \sigma = \sigma^* = \tilde{\sigma}. \quad (17.29)$$

Аналогично свойства поглощающих кристаллов, обладающих собственной (вынужденной) гиротропией, можно описывать с помощью материальных уравнений (см. (16.7), (16.8))

$$\mathbf{D} = (\epsilon + i\mathbf{a} \times)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = (\mu + i\mathbf{b} \times)\mathbf{H}, \quad (17.30)$$

где тензор  $\epsilon$  (или  $\mu$ ) обладает теми же свойствами (17.29).

Можно также считать комплексным тензор гирации  $\alpha$  или векторы гирации  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ . Существенно то, что тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$  не должны быть эрмитовыми, либо тензор  $\alpha$  вещественным, так как именно эти их свойства влекут за собой отсутствие диссипации энергии (см. § 12).

## § 18. ДРУГОЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ГИРОТРОПИИ

К выводу уравнений связи для гиротропных сред можно подойти с другой стороны, причем этот подход, являясь более простым, оказывается также более общим. Как известно, основные уравнения электродинамики движущихся изотропных

диэлектриков в четырехмерной ковариантной форме имеют следующий вид (см., например, [113]):

$$\frac{\partial F_{ik}^\times}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial G_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (18.1)$$

где (ср. § 11)

$$F = (F_{ik}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^\times & i\mathbf{E} \\ -i\mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = (G_{ik}) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^\times & i\mathbf{D} \\ -i\mathbf{D} & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.2)$$

Материальные уравнения для покоящихся изотропных сред

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (18.3)$$

обобщаются на случай движущихся сред следующим образом:

$$G_{ik} u_k = \varepsilon F_{ik} u_k, \quad F_{ik}^\times u_k = \mu G_{ik} u_k, \quad (18.4)$$

где  $u_k$  — компоненты вектора четырехмерной скорости среды,

$$u = (u_k) = (\mathbf{u}, iu_0), \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (18.5)$$

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

В трехмерных обозначениях уравнения (18.4) имеют вид (формулы Минковского)

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] = \varepsilon \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right),$$

$$\mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{vE}] = \mu \left( \mathbf{H} - \frac{1}{c} [\mathbf{vD}] \right). \quad (18.6)$$

Заметим, что эти уравнения получаются одно из другого путем замены

$$\mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H}, \quad \varepsilon \rightleftharpoons \mu, \quad \mathbf{v} \rightleftharpoons -\mathbf{v}. \quad (18.7)$$

Умножая первое уравнение на  $-\frac{\mu}{c} \mathbf{v}^\times$  и складывая со вторым, получаем

$$\left( 1 + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \mathbf{v}^\times{}^2 \right) \mathbf{B} = \mu \left( 1 + \frac{\mathbf{v}^\times{}^2}{c^2} \right) \mathbf{H} + (1 - \varepsilon\mu) \frac{\mathbf{v}^\times}{c} \mathbf{E}.$$

Вычислив матрицу  $\left( 1 + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \mathbf{v}^\times{}^2 \right)^{-1}$  по методам § 26, найдем

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu \frac{v^2}{c^2}} \left[ \mu \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + (1 - \varepsilon\mu) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \mathbf{H} + (1 - \varepsilon\mu) \frac{\mathbf{v}^\times}{c} \mathbf{E} \right], \quad (18.8)$$

откуда с помощью замены (18.7) получим

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu \frac{v^2}{c^2}} \left[ \varepsilon \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + (1 - \varepsilon\mu) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \mathbf{E} - (1 - \varepsilon\mu) \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c} \right]. \quad (18.9)$$

Для нас здесь существенно то, что, согласно (18.8), (18.9), более общие уравнения связи  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  с  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  имеют вид

$$\mathbf{D} = \kappa \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \tau \mathbf{H} + \beta \mathbf{E}, \quad (18.10)$$

где  $\kappa$ ,  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — некоторые  $3 \times 3$ -матрицы. Отсюда заключаем, что феноменологическое обобщение линейных уравнений связи (18.3) и в других случаях, в частности для покоящихся гиротропных сред, можно искать в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \beta \mathbf{E}, \quad (18.11)$$

причем матрицы  $\alpha$ ,  $\beta$  должны быть, как правило, малы по сравнению с  $\varepsilon$ ,  $\mu$ .

Исходя из предположения (18.11) о форме уравнений связи, выясним, какие ограничения для тензоров  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  вытекают из требований отсутствия диссипации и сохранения энергии. Согласно (12.50), отсутствие диссипации связано с вещественностью выражения  $\mathbf{E} \mathbf{D}^* + \mathbf{H} \mathbf{B}^*$  или  $\mathbf{E}^* \mathbf{D} + \mathbf{H}^* \mathbf{B}$ . Используя (18.11), получаем

$$K = \mathbf{E}^* \mathbf{D} + \mathbf{H}^* \mathbf{B} = \mathbf{E}^* \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{H}^* \mu \mathbf{H} + (\mathbf{E}^* \alpha \mathbf{H} + \mathbf{H}^* \beta \mathbf{E}). \quad (18.12)$$

Поскольку вещественность  $K$  должна иметь место в данной среде при любых  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , то должны быть вещественны по отдельности первый, второй и третий члены выражения (18.12). Таким образом, должно быть

$$\mathbf{E}^* \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} \varepsilon^* \mathbf{E}^* = \mathbf{E}^* \tilde{\varepsilon}^* \mathbf{E} = \mathbf{E}^* \varepsilon^+ \mathbf{E}$$

или

$$\mathbf{E}^* (\varepsilon - \varepsilon^+) \mathbf{E} = 0,$$

откуда следует  $\varepsilon = \varepsilon^+$  и аналогично  $\mu = \mu^+$ . Условие вещественности последнего члена имеет вид

$$\mathbf{E}^* \alpha \mathbf{H} + \mathbf{H}^* \beta \mathbf{E} = \mathbf{E} \alpha^* \mathbf{H}^* + \mathbf{H} \beta^* \mathbf{E}^* = \mathbf{E}^* \tilde{\beta}^* \mathbf{H} + \mathbf{H}^* \tilde{\alpha}^* \mathbf{E}$$

или

$$\mathbf{E}^* (\alpha - \beta^+) \mathbf{H} + \mathbf{H}^* (\beta - \alpha^+) \mathbf{E} \equiv 0;$$

следовательно,  $\beta = \alpha^+$ . Таким образом, уравнения (18.11) должны иметь вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \alpha^+ \mathbf{E}, \quad \varepsilon = \varepsilon^+, \quad \mu = \mu^+. \quad (18.13)$$

Заметим, что в равенствах (18.8), (18.9) соответствующие матрицы обладают теми же свойствами.

Для выяснения вопроса о сохранении энергии используем соотношение (см. (12.35), (12.36))

$$\operatorname{Re} \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = -\frac{1}{c} (\dot{\mathbf{D}}\mathbf{E}^* + \dot{\mathbf{D}}^*\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{H}^* + \dot{\mathbf{B}}^*\mathbf{H}). \quad (18.14)$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражения (18.13), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^*(\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \alpha\dot{\mathbf{H}}) + \mathbf{E}(\varepsilon^*\dot{\mathbf{E}}^* + \alpha^*\dot{\mathbf{H}}^*) + \mathbf{H}^*(\mu\dot{\mathbf{H}} + \alpha^+\dot{\mathbf{E}}) + \mathbf{H}(\mu^*\dot{\mathbf{H}}^* + \tilde{\alpha}\dot{\mathbf{E}}^*) = \\ = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^*\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{H}^*\mu\mathbf{H} + \mathbf{E}^*\alpha\mathbf{H} + \mathbf{H}^*\alpha^+\mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^*\mathbf{D} + \mathbf{H}^*\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Таким образом, при уравнениях связи (18.13) имеет место закон сохранения энергии электромагнитного поля в обычной форме  $\operatorname{div} \mathbf{S} + \omega = 0$ , где

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*], \quad (18.15)$$

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^*\mathbf{D} + \mathbf{H}^*\mathbf{B}). \quad (18.16)$$

Легко убедиться также, что имеет место баланс потоков энергии на границе среды, характеризуемой материальными уравнениями (18.13). Действительно, присоединяя к (18.13) обычные уравнения Максвелла для плоских волн, имеем

$$-\mathbf{[mH]} = \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \alpha\mathbf{H}, \quad \mathbf{[mE]} = \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \alpha^+\mathbf{E} \quad (18.17)$$

или для двух преломленных (или отраженных) волн в рассматриваемой среде (ср. (12.66), (12.67))

$$-\mathbf{[m_1H_1]} = \varepsilon\mathbf{E}_1 + \alpha\mathbf{H}_1, \quad \mathbf{[m_1E_1]} = \mu\mathbf{H}_1 + \alpha^+\mathbf{E}_1, \quad (18.18)$$

$$-\mathbf{[m_2^*H_2^*]} = \varepsilon^*\mathbf{E}_2^* + \alpha^*\mathbf{H}_2^*, \quad \mathbf{[m_2^*E_2^*]} = \mu^*\mathbf{H}_2^* + \tilde{\alpha}\mathbf{E}_2^*. \quad (18.19)$$

Умножая соответственно (18.18) на  $\mathbf{E}_2^*$ ,  $\mathbf{H}_2^*$  и (18.19) на  $-\mathbf{E}_1$ ,  $-\mathbf{H}_1$ , получаем после сложения всех уравнений и учета эрмитовости  $\varepsilon$ ,  $\mu$

$$(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2^*) (\mathbf{[E_1H_2^*]} + \mathbf{[E_2^*H_1]}) = (\eta_1 - \eta_2^*)q (\mathbf{[E_1H_2^*]} + \mathbf{[E_2^*H_1]}) = 0,$$

что и требовалось доказать (см. (12.65)).

Покажем, что уравнения связи (18.13) описывают среды, в которых возможно вращение плоскости поляризации. Чтобы убедиться в этом на частном случае, положим  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,

$\alpha = i\alpha_0$ , где  $\epsilon_0$ ,  $\alpha_0$  — скаляры. Уравнения (18.17) принимают при этом вид

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = -(\mathbf{m}^\times + i\alpha_0) \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = (\mathbf{m}^\times + i\alpha_0) \mathbf{E}. \quad (18.20)$$

Исключая  $\mathbf{H}$ , находим

$$(\epsilon_0 + (\mathbf{m}^\times + i\alpha_0)^2) \mathbf{E} = (\epsilon_0 - \alpha_0^2 + \mathbf{m}^{\times 2} + 2i\alpha_0 \mathbf{m}^\times) \mathbf{E} = 0. \quad (18.21)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (11.31), видим, что они полностью совпадают, если положить  $\epsilon = \epsilon_0 - \alpha_0^2$ ,  $\alpha = \alpha_0$ . Следовательно, уравнения связи (18.13) описывают гиротропные среды. Более того, эти уравнения при различных  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  описывают вообще все известные виды анизотропии и гиротропии.

Действительно, если положить в (18.13)  $\alpha = 0$ , то мы придем к уравнениям (16.40), описывающим среды, обладающие собственной или индуцированной гиротропией. Если же написать уравнения связи для естественно гиротропных сред в форме (12.52) с учетом обозначений (12.60), (12.61) и свойств (12.63), (12.64), то получим

$$\mathbf{D} = \gamma_1 \mathbf{E} + i\gamma_4 \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \gamma_2 \mathbf{H} - i\tilde{\gamma}_4 \mathbf{E}. \quad (18.22)$$

Но эти уравнения есть частный случай (18.13) при  $\epsilon = \gamma_1$ ,  $\mu = \gamma_2$ ,  $\alpha = i\gamma_4$ . Из них видно, что для того чтобы уравнения (18.13) находились в соответствии с выводами молекулярной теории (см. § 11), тензор  $\alpha$  должен быть чисто мнимым. Приняв это ограничение, мы в дальнейшем будем писать уравнения электродинамики гиротропных сред в форме

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{H}] &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}, \quad [\nabla \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} + i\alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - i\tilde{\alpha} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (18.23)$$

По существу эти уравнения в случае гармонической зависимости всех полей от времени  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i\omega t}$  и т. д. представляют собой систему, равносильную системе (12.45), (12.46), но с переопределенными параметрами. Обозначив штрихами тензоры, входящие в уравнения (12.44), получим с помощью (12.43)

$$\mathbf{D} + i\epsilon' \alpha' \mathbf{B} = \epsilon' \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} - i\mu' \tilde{\alpha}' \mathbf{D} = \mu' \mathbf{H} \quad \left( \alpha' = \frac{\omega}{c} \alpha_1 \right).$$

Разрешив эти уравнения относительно  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (1 - \epsilon' \alpha' \mu' \tilde{\alpha}')^{-1} \epsilon' (\mathbf{E} - i\alpha' \mu' \mathbf{H}), \\ \mathbf{B} &= (1 - \mu' \tilde{\alpha}' \epsilon' \alpha')^{-1} \mu' (\mathbf{H} + i\tilde{\alpha}' \epsilon' \mathbf{E}), \end{aligned}$$



откуда вытекают следующие *точные* соотношения между параметрами систем (18.23) и (12.45), (12.46):

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (1 - \varepsilon' \alpha' \mu' \tilde{\alpha}')^{-1} \varepsilon', & \mu &= (1 - \mu' \tilde{\alpha}' \varepsilon' \alpha')^{-1} \mu', \\ \alpha &= - (1 - \varepsilon' \alpha' \mu' \tilde{\alpha}')^{-1} \varepsilon' \alpha' \mu'.\end{aligned}\quad (18.24)$$

Заметим, что здесь учтено соотношение  $(\varepsilon' = \tilde{\varepsilon}', \mu' = \tilde{\mu}')$

$$(1 - \varepsilon' \alpha' \mu' \tilde{\alpha}')^{-1} \varepsilon' \alpha' \mu' \equiv \varepsilon' \alpha' \mu' (1 - \tilde{\alpha}' \varepsilon' \alpha' \mu')^{-1},$$

которое доказывается аналогично (12.64). Таким образом, согласно (18.24),  $\varepsilon, \mu$  отличаются от  $\varepsilon', \mu'$  на величины второго порядка относительно тензора  $\alpha'$ . Итак, уравнения (18.23) действительно описывают как среды с естественной гиротропией, так и собственно гиротропные среды. Очевидно, они могут описывать и среды, обладающие одновременно любыми сочетаниями этих двух видов гиротропии. Более того, если  $\varepsilon, \mu$  не являются эрмитовскими тензорами, то уравнения (18.23) будут описывать поглощающие, диэлектрически и магнитно-анизотропные, естественно и собственно гиротропные среды, т. е. все известные виды анизотропии сразу.

Разумеется, все это в принципе относится и к равносильной системе (12.45), (12.46), однако в уравнениях (18.23) члены, содержащие  $\alpha$  и ответственные за естественную гиротропию, входят отдельно от членов, содержащих  $\varepsilon$  и  $\mu$ , описывающих собственную гиротропию (в случае эрмитового тензора  $\varepsilon$  или  $\mu$ ). Поэтому учет одного вида гиротропии в уравнениях связи (18.23) осуществляется независимо от наличия другого вида гиротропии. Представляется уместным ввести для сред, обладающих одновременно обоими видами гиротропии, термин *общая гиротропия*.

Если  $\mu$  — вещественный симметричный положительно определенный тензор, то, поступая так, как в § 5 и в § 15, т. е., осуществляя замену (5.44) и (15.4):  $\sqrt{\mu}^{-1} \alpha \sqrt{\mu}^{-1} \rightarrow \alpha, \sqrt{\mu}^{-1} \alpha^+ \sqrt{\mu}^{-1} \rightarrow \alpha^+$ , можем исключить тензор  $\mu$ . В результате получим уравнения связи

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i \alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} - i \tilde{\alpha} \mathbf{E} \quad (18.25)$$

и уравнения Максвелла

$$\varepsilon \mathbf{E} + i \alpha \mathbf{H} = -[\mathbf{m} \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} - i \tilde{\alpha} \mathbf{E} = [\mathbf{m} \mathbf{E}] \quad (18.26)$$

или

$$\varepsilon \mathbf{E} + (\mathbf{m} \times + i \alpha) \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} - (\mathbf{m} \times + i \tilde{\alpha}) \mathbf{E} = 0. \quad (18.27)$$

Исключение из последних уравнений  $\mathbf{H}$  или  $\mathbf{E}$  дает

$$(\varepsilon + (\mathbf{m}^\times + i\alpha)(\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha}))\mathbf{E} = 0, \quad (18.28)$$

$$(1 + (\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha})\varepsilon^{-1}(\mathbf{m}^\times + i\alpha))\mathbf{H} = 0. \quad (18.29)$$

Введем обозначения

$$\kappa_1 = \varepsilon + (\mathbf{m}^\times + i\alpha)(\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha}), \quad \kappa_1\mathbf{E} = 0, \quad (18.30)$$

$$\kappa_2 = 1 + (\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha})\varepsilon^{-1}(\mathbf{m}^\times + i\alpha), \quad \kappa_2\mathbf{H} = 0. \quad (18.31)$$

Используя (26.88), можно придать тензору  $\kappa_1$  форму

$$\kappa_1 = \varepsilon^0 + \mathbf{m}^{\times 2} + i(\beta\mathbf{m})^\times = \kappa_1^+, \quad (18.32)$$

где

$$\varepsilon^0 = \varepsilon - \alpha\tilde{\alpha} = \tilde{\varepsilon}^0, \quad \beta = \alpha_t - \tilde{\alpha}. \quad (18.33)$$

Аналогично для тензора  $\kappa_2$  имеем

$$\kappa_2 = 1 - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha + \mathbf{m}^\times\varepsilon^{-1}\mathbf{m}^\times + i(\gamma\mathbf{m})^\times = \kappa_2^+, \quad (18.34)$$

где

$$\gamma = (\varepsilon^{-1}\alpha)_t - \varepsilon^{-1}\alpha. \quad (18.35)$$

Здесь предполагается, что тензор  $\varepsilon$  симметричен.

Если написать  $\kappa_1$  в виде  $\kappa_1 = \varepsilon(1 + \varepsilon^{-1}(\mathbf{m}^\times + i\alpha)(\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha}))$ , то из сравнения с (18.31) можно заключить, что  $|\kappa_1| = |\varepsilon||\kappa_2|$ .

С помощью формулы (26.29) без труда вычисляем детерминант  $\kappa_1$ :

$$|\kappa_1| = |\varepsilon^0 + \mathbf{m}^{\times 2}| - \mathbf{m}\tilde{\beta}(\varepsilon^0 + \mathbf{m}^{\times 2})\beta\mathbf{m}$$

и тем самым находим уравнение нормалей

$$\mathbf{m}^2\mathbf{m}\varepsilon^0\mathbf{m} + (\mathbf{m}^{\times 2}\tilde{\varepsilon}^0)_t + [\mathbf{m}, \beta\mathbf{m}]^2 - \mathbf{m}\tilde{\beta}\varepsilon^0\beta\mathbf{m} + |\varepsilon^0| = 0. \quad (18.36)$$

Уравнению (18.28) с помощью выражения (18.32) для  $\kappa_1$  можно придать форму

$$(\varepsilon^0 - \mathbf{m}^2 + i(\beta\mathbf{m})^\times)\mathbf{E} = -\mathbf{m}\mathbf{m}\mathbf{E},$$

откуда следует

$$\mathbf{E} = C \overline{(\varepsilon^0 - \mathbf{m}^2 + i(\beta\mathbf{m})^\times)}\mathbf{m}. \quad (18.37)$$

Соответствующее выражение для  $\mathbf{H}$  получается из (18.27):

$$\mathbf{H} = C (\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha})(\varepsilon^0 - \mathbf{m}^2 + i(\beta\mathbf{m})^\times)\mathbf{m}. \quad (18.38)$$

Теперь выражения для векторов индукции получаются из материальных уравнений (18.25)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= C (\varepsilon + i\alpha (\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha})) \overline{(\varepsilon^0 - \mathbf{m}^2 + i(\beta\mathbf{m})^\times)} \mathbf{m} = \\ &= C (\varepsilon^0 + i\alpha\mathbf{m}^\times) \overline{(\varepsilon^0 - \mathbf{m}^2 + i(\beta\mathbf{m})^\times)} \mathbf{m} = [\mathbf{m}\mathbf{H}], \end{aligned} \quad (18.39)$$

$$\mathbf{B} = C\mathbf{m}^\times \overline{(\varepsilon^0 - \mathbf{m}^2 + i(\beta\mathbf{m})^\times)} \mathbf{m} = [\mathbf{m}\mathbf{E}]. \quad (18.40)$$

Очевидно, теорию плоских волн в естественно гиротропных средах можно строить альтернативно либо на основании уравнений (12.45), (12.46), либо с помощью системы

$$\varepsilon\mathbf{E} + (\mathbf{m}^\times + i\alpha)\mathbf{H} = 0, \quad \mu\mathbf{H} - (\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha})\mathbf{E} = 0. \quad (18.41)$$

В случае собственной (индуцированной) гиротропии ( $\alpha=0$ ,  $\varepsilon=\varepsilon^+$ ) обе системы просто совпадают. В естественно гиротропных средах они отличаются лишь за счет переопределения тензоров  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  в соответствии с (18.24).

Существенно то, что система уравнений (см. (18.17), (18.23))

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}] = \varepsilon\mathbf{E} + i\alpha\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{m}\mathbf{E}] = \mu\mathbf{H} - i\tilde{\alpha}\mathbf{E} \quad (18.42)$$

также является дуально-инвариантной, т. е. она остается неизменной при преобразовании:

$$\mathbf{D} \rightarrow \pm \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mp \mathbf{D}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \pm \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mp \mathbf{E}, \quad \varepsilon \rightleftharpoons \mu, \quad \alpha \rightleftharpoons \tilde{\alpha}. \quad (18.43)$$

Заметим, что дуальная инвариантность имеет место и для более общей системы уравнений (см. (18.11))

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}] = \varepsilon\mathbf{E} + \alpha\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{m}\mathbf{E}] = \mu\mathbf{H} + \beta\mathbf{E}, \quad (18.44)$$

где на тензоры  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  вообще не налагается никаких ограничений и которая поэтому может описывать и поглощающие среды. В этом случае вместо (18.43) должно выполняться преобразование

$$\mathbf{D} \rightarrow \pm \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mp \mathbf{D}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \pm \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mp \mathbf{E}, \quad \varepsilon \rightleftharpoons \mu, \quad \alpha \rightleftharpoons -\beta. \quad (18.45)$$

Теперь мы можем перейти к вопросу об определении явления гиротропии. У читателя не должно вызывать удивления то, что к общему определению понятия, стоящего в заглавии книги, мы обращаемся только во второй ее половине. Все изложенное в настоящей главе показывает, насколько сложны, запутанны и специфичны проблемы, связанные с оптической активностью — гиротропией, теория которой, по-видимому, только сейчас приходит в более или менее удовлетворительное состояние.

Определение понятия гиротропии может быть двояким. Оно может быть *физическим*, т. е. указывать на некоторые

специфические свойства электромагнитных волн, распространяющихся в гиротропных средах. Оно может быть также, если можно так выразиться, «параметрическим», т. е. определять те электромагнитные характеристики (параметры) среды, которые обуславливают наличие гиротропии. Так, например, двупреломляющие кристаллы можно определить как такие, в которых падающий на них луч расщепляется на два луча. Но можно сказать также, что двупреломляющие кристаллы это такие среды, в которых диэлектрическая (либо магнитная) проницаемость имеет тензорный характер. Очевидно, оба определения тесно связаны между собой, причем одно из них характеризует физические признаки, по которым можно наблюдать определяемое явление, а второе — те факторы, которые позволяют объяснить его на основе существующей общей теории.

Исторически оптическая активность была обнаружена по вращению плоскости поляризации (§ 11), откуда и происходит другое ее название — *оптическая вращательная способность*, а также термин *гиротропия* (*gyros* — круг по-гречески). Однако совершенно ясно, что в настоящее время никак нельзя сводить физическое определение гиротропии к явлению вращения плоскости поляризации. Вращение плоскости поляризации линейно поляризованного света, проходящего через изотропную среду, может иметь место по всем направлениям лишь для изотропно-гиротропных сред, а для кристаллов — лишь в направлении оптических осей. Более того, как показано в § 15, в кристаллах планальных классов средних сингоний вообще невозможно вращение плоскости поляризации ни для какого направления. Однако было бы более чем странно исключать эти кристаллы, при наличии отличного от нуля тензора гирации (14.52), из общей классификации гиротропных кристаллов, приведенной в § 14. На это обстоятельство было, по-видимому, впервые указано в [117]. Между тем во всей литературе, включая такие капитальные монографии, как [10, 27, 28, 41, 42] и др., кристаллы планальных классов средних сингоний относились к числу не обладающих гиротропией. Это еще один из примеров распространенных необоснованных утверждений, которыми так изобилует теория оптической активности.

Дать общее определение гиротропии тем более непросто, что, как показано в § 16, 17, имеются типы гиротропии (естественная, собственная), которые существенно различаются в ряде отношений. По-видимому, наиболее полное и точное физическое определение явления или свойства гиротропии может быть сформулировано следующим образом: *гиротропией называется свойство материальных сред, проявляющееся в том, что распространяющиеся в них по всем (или почти по*

всем) направлениям однородные плоские волны при отсутствии диссипации энергии имеют эллиптическую поляризацию. Как видим, это определение получается довольно длинным, однако из него нельзя ничего опустить. Особенно существенной является оговорка «при отсутствии диссипации энергии», поскольку, как известно (см. § 7), в поглощающих негиротропных кристаллах также распространяются эллиптически поляризованные волны. Впрочем, в случае кристаллов средних сингоний поглощение и гиротропия легко отделяются друг от друга, так как в первом случае имеет место линейная поляризация однородных волн (§ 7). Оговорка относительно однородных волн необходима вследствие специфических поляризационных свойств неоднородных волн (см. § 6). Наконец, оговорка относительно «почти всех направлений» также нужна, так как по некоторым направлениям в гиротропных кристаллах могут распространяться волны, поляризованные циркулярно или линейно или вообще произвольным образом (см. § 15 — планальные кристаллы или ниже § 20).

Заметим, что в поглощающих кристаллах низших сингоний (оптические свойства которых на опыте вообще крайне слабо изучены) отделить свойства световых волн, обусловленные наличием гиротропии, от эффектов, вызванных поглощением, затруднительно даже теоретически, не говоря уже об эксперименте.

Что касается общего «параметрического» или, если угодно, «теоретического» определения гиротропии, то оно может выглядеть по-разному в зависимости от того, положим мы в основу соотношения, рассмотренные в § 12, 16, 17 или в данном параграфе. В первом случае придется сказать, что гиротропные среды характеризуются уравнениями связи  $\mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H}$ , в которых  $\epsilon_1 = \epsilon + ia^\times$ ,  $\mu_1 = \mu + ib^\times$ ,  $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}$ ,  $\epsilon = \epsilon^* = \epsilon^+$ ,  $\mu = \mu^* = \mu^+$ , причем по крайней мере один из векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  отличен от нуля; либо уравнениями связи  $\mathbf{D} = \epsilon(1 + \alpha \nabla^\times) \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu(1 + \tilde{\alpha} \nabla^\times) \mathbf{H}$ ,  $\alpha = \alpha^* \neq 0$ ,  $\epsilon = \epsilon^* = \tilde{\epsilon}$ ,  $\mu = \mu^* = \tilde{\mu}^*$ .

Во втором случае получаем определение: прозрачные гиротропные среды характеризуются уравнениями связи

$$\mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E} + i\alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H} - i\tilde{\alpha} \mathbf{E},$$

в которых

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^+ = \epsilon + ia^\times, \quad \mu_1 = \mu_1^+ = \mu + ib^\times, \quad \alpha = \alpha^*,$$

причем хотя бы одна из величин  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\alpha$  отлична от нуля.

Как видим, и эти определения не отличаются краткостью, хотя второе является более компактным.

\* В данном случае допустимы также более общие свойства:  $\epsilon = \epsilon^+$ ,  $\mu = \mu^+$ .

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

#### § 19. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. ПРИНЦИП ФАЗОЛУЧЕВОЙ СИММЕТРИИ

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые общие соотношения, которые справедливы для плоских волн, распространяющихся в однородных средах, обладающих всеми возможными видами анизотропии: анизотропией диэлектрической и магнитной проницаемости, анизотропией поглощения (проводимости) и гиротропией.

В любых таких средах распространение плоских электромагнитных волн определяется двумя парами векторных уравнений: уравнениями Максвелла

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{m}\mathbf{E}] \quad (19.1)$$

и уравнениями связи (материальными уравнениями)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H}. \quad (19.2)$$

Различие между средами разного типа определяется выражениями для тензоров  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$ . В естественно гиротропных средах

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(1 - i\alpha\mathbf{m}^\times), \quad \mu_1 = \mu(1 - i\tilde{\alpha}\mathbf{m}^\times), \quad (19.3)$$

где  $\varepsilon(\mu)$  — симметричный тензор диэлектрической (магнитной) проницаемости вещественный в прозрачных средах и комплексный в поглощающих средах;  $\alpha$  — вещественный в общем случае несимметричный тензор гирации. В собственно гиротропных средах  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$  являются эрмитовыми тензорами:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + i\mathbf{a}^\times = \varepsilon_1^\dagger, \quad \mu_1 = \mu + i\mathbf{b}^\times = \mu_1^\dagger, \quad (19.4)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\mu$  имеют прежний смысл, а  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  являются вещественными векторами гирации. Переход к негиротропным средам осуществляется в случае (19.3) с помощью условия  $\alpha=0$ , а в случае (19.4):  $\mathbf{a}=\mathbf{b}=0$ .

Подчеркнем, что в общем случае, как это следует из (19.3), тензоры  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$  не являются ни вещественными, ни симметричными, ни эрмитовыми. Исходя из фундаментальных

уравнений (19.1), (19.2), мы можем получить ряд универсальных соотношений, пригодных для однородных сред с любой анизотропией и гиротропией. Конкретизация этих соотношений применительно к различным случаям осуществляется путем придания  $\epsilon$ ,  $\mu$  надлежащего частного вида. Отметим, что внешне уравнения (19.1), (19.2) совпадают с соответствующими уравнениями для прозрачных магнитных кристаллов, рассмотренными в § 5. Соответственно в общую теорию могут быть перенесены автоматически те соотношения из § 5, в которых не используются свойства вещественности и симметрии тензоров  $\epsilon$ ,  $\mu$ .

Из (19.1), (19.2) аналогично §15 получаем уравнения для векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  по отдельности

$$(\epsilon_1 + \mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{E} = 0, \quad (19.5)$$

$$(\mu_1 + \mathbf{m} \times \epsilon_1^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = 0, \quad (19.6)$$

$$(1 + \mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \epsilon^{-1}) \mathbf{D} = 0, \quad (19.7)$$

$$(1 + \mathbf{m} \times \epsilon_1^{-1} \mathbf{m} \times \mu_1^{-1}) \mathbf{B} = 0. \quad (19.8)$$

Вместо (19.5), (19.6) можно написать также

$$(1 + \epsilon_1^{-1} \mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{E} = 0, \quad (19.9)$$

$$(1 + \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \epsilon_1^{-1} \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = 0. \quad (19.10)$$

Все матрицы уравнений (19.7) — (19.10) получаются из любой из них, например (19.7), путем циклической перестановки сомножителей в матрице  $\mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \epsilon_1^{-1}$ . Так, переставляя  $\epsilon_1^{-1}$  с правой стороны на левую, получим оператор уравнения (19.9). Последующие такие же перестановки приводят соответственно к уравнениям (19.8) и (19.10).

Отметим, что из (19.7) — (19.10), так же как из (19.1), (19.2), следует справедливость в самом общем случае принципа дуальности, т. е. симметрии основной системы уравнений по отношению к перестановке электрических и магнитных величин (см. (13.39), (13.40))

$$\mathbf{D} \rightarrow \pm \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mp \mathbf{D}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \pm \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \mp \mathbf{E}, \quad (19.11)$$

$$\epsilon \rightleftharpoons \mu, \quad \alpha \rightleftharpoons \tilde{\alpha}, \quad \mathbf{a} \rightleftharpoons \mathbf{b}, \quad \epsilon_1 \rightleftharpoons \mu_1.$$

Отсюда следует, естественно, симметрия по отношению к этой замене любых соотношений, вытекающих из основных уравнений.

Во всех линейных однородных уравнениях (19.7) — (19.10) детерминанты матриц, стоящих при векторах поля, совпа-

дают между собою (см. § 15). Приравняв любой из них нулю, получим уравнение нормалей для кристалла с произвольной анизотропией и гиротропией

$$|1 + \mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \varepsilon_1^{-1}| = 1 + (\mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \varepsilon_1^{-1})_t + (\overline{\mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \varepsilon_1^{-1}})_t = 0. \quad (19.12)$$

Поскольку

$$\mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times = \frac{1}{|\mu_1|} \tilde{\mu}_1 (\mu_1 \mathbf{m}) \times \mathbf{m} \times = \frac{1}{|\mu_1|} \dot{\mu}_1 (\mathbf{m} \cdot \mu_1 \mathbf{m} - \mathbf{m} \mu_1 \mathbf{m}), \quad (19.12a)$$

$$\overline{\mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \varepsilon_1^{-1}} = |\varepsilon_1 \mu_1|^{-1} \varepsilon_1 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \mu_1 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m},$$

то из (19.12) следует после простых преобразований

$$\mathbf{m} \varepsilon_1 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \mu_1 \mathbf{m} + \mathbf{m} \tilde{\mu}_1 \varepsilon_1 \tilde{\mu}_1 \mathbf{m} - \mathbf{m} \mu_1 \mathbf{m} (\tilde{\mu}_1 \bar{\varepsilon}_1)_t + |\varepsilon_1 \mu_1| = 0. \quad (19.13)$$

С помощью принципа дуальности (19.11) находим отсюда

$$\mathbf{m} \mu_1 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \varepsilon_1 \mathbf{m} + \mathbf{m} \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\mu}_1 \tilde{\varepsilon}_1 \mathbf{m} - \mathbf{m} \varepsilon_1 \mathbf{m} (\tilde{\varepsilon}_1 \bar{\mu}_1)_t + |\varepsilon_1 \mu_1| = 0. \quad (19.14)$$

Тождественное равенство левых частей уравнений (19.13), (19.14) может быть проверено путем непосредственного расчета с помощью соотношения, которое следует из (26.77)

$$|\varepsilon_1| (\varepsilon_1 \bar{\mu}_1 - (\varepsilon_1 \bar{\mu}_1)_t) \equiv (\tilde{\mu}_1 \bar{\varepsilon}_1 - (\tilde{\mu}_1 \bar{\varepsilon}_1)_t) \tilde{\mu}_1 \varepsilon_1. \quad (19.15)$$

Для этого нужно умножить (19.15) слева на  $\mathbf{m}$ , справа на  $\varepsilon_1 \mathbf{m}$

и учесть, что  $\mathbf{m} \mu_1 \mathbf{m} = \mathbf{m} \tilde{\mu}_1 \mathbf{m}$  для любого тензора  $\gamma$ .

Подставляя в (19.13) выражения (19.3), приходим к уравнению нормалей (15.28) для естественно гиротропных сред. Если использовать выражения (19.4), то из (19.13) следует общее уравнение нормалей для собственно гиротропных сред. Как частные случаи отсюда получаются соответствующие соотношения главы I для негиротропных кристаллов — немагнитных, магнитных, прозрачных и поглощающих.

Найдя любой из векторов поля (при заданном  $\mathbf{m}$ ), нетрудно определить по нему все остальные с помощью (19.1), (19.2). Таким образом, находим:

при известном  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{mE}], \quad \mathbf{H} = \mu_1^{-1} [\mathbf{mE}], \quad \mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E}; \quad (19.16a)$$

при известном  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{mH}], \quad \mathbf{E} = -\varepsilon_1^{-1} [\mathbf{mH}], \quad \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H}; \quad (19.16b)$$

при известном  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{E} = \varepsilon_1^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \varepsilon_1^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} = \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \varepsilon_1^{-1} \mathbf{D}; \quad (19.16c)$$



при известном  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{H} = \mu_1^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = -\mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = -\varepsilon_1^{-1} \mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{B}. \quad (19.16r)$$

При известном  $\mathbf{m}$  любой из векторов поля может быть определен из уравнений (19.7) — (19.10). Все эти уравнения имеют аналогичную форму:

$$(1 + A_x) \mathbf{X} = 0, \quad |1 + A_x| = 0, \quad (19.17)$$

причем

$$A_E = \varepsilon_1^{-1} \mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times, \quad A_H = \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \varepsilon_1^{-1} \mathbf{m} \times, \quad (19.18)$$

$$A_D = \mathbf{m} \times \mu_1^{-1} \mathbf{m} \times \varepsilon_1^{-1}, \quad A_B = \mathbf{m} \times \varepsilon_1^{-1} \mathbf{m} \times \mu_1^{-1}, \quad (19.19)$$

откуда следует

$$A_E \mathbf{m} = A_H \mathbf{m} = \mathbf{m} A_D = \mathbf{m} A_B = 0 \quad (19.20)$$

и

$$|A_x| = 0 \quad (\mathbf{X} = \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}). \quad (19.21)$$

Из (19.17) следует

$$\mathbf{X} = C_x \overline{(1 + A_x)} \mathbf{d}, \quad (19.22)$$

где  $C_x$  — скалярный множитель;  $\mathbf{d}$  — произвольный вектор, для которого  $\overline{(1 + A_x)} \mathbf{d} \neq 0$ . В соответствии с (26.95) и (19.17), (19.21) имеем

$$\overline{1 + A_x} = (A_x - (A_x)_t - 1) A_x. \quad (19.23)$$

Таким образом, получаем решения (полагая  $\mathbf{d} = \mathbf{m}$ )

$$\mathbf{D} = C_D (A_D - (A_D)_t - 1) A_D \mathbf{m}, \quad (19.24)$$

$$\mathbf{B} = C_B (A_B - (A_B)_t - 1) A_B \mathbf{m}. \quad (19.25)$$

При этом подразумевается, что вектор рефракции  $\mathbf{m}$  удовлетворяет уравнению нормалей (19.13). Для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  нельзя выбрать  $\mathbf{d} = \mathbf{m}$ , поскольку, согласно (19.23), (19.20), формула (19.22) дает в этом случае нулевой вектор. Разумеется, вместо  $\mathbf{d} = \mathbf{m}$  можно выбрать любой другой вектор  $\mathbf{d}$ , однако желательно, чтобы он был естественным образом связан с рассматриваемой задачей. Например, если речь идет о волнах в кристаллах средних сингоний, то можно выбрать  $\mathbf{d} = \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{c}$  — ось симметрии высшего порядка.

Для отыскания  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  можно использовать также уравнения (19.5), (19.6). Используя (19.12a), можем написать вместо (19.5)

$$(\varepsilon_1 - \frac{\mathbf{m} \mu_1 \mathbf{m}}{|\mu_1|} \tilde{\mu}_1) \mathbf{E} = - \frac{1}{|\mu_1|} \tilde{\mu}_1 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \tilde{\mu}_1 \mathbf{E}, \quad (19.26)$$

или

$$(\tilde{\mu}_1 \varepsilon_1 - \mathbf{m} \mu_1 \mathbf{m}) \mathbf{E} \parallel \mathbf{m},$$

откуда следует

$$\mathbf{E} = C_E \overline{(\mu_1 \varepsilon_1 - m \mu_1 m)} m. \quad (19.27)$$

С помощью принципа дуальности (19.11) сразу получаем отсюда

$$\mathbf{H} = C_H \overline{(\varepsilon_1 \mu_1 - m \varepsilon_1 m)} m, \quad (19.28)$$

что вытекает также непосредственно из (19.6). Поскольку  $m \mathbf{D} = m \varepsilon_1 \mathbf{E} = 0$ , то должно быть

$$m \varepsilon_1 \overline{(\mu_1 \varepsilon_1 - m \mu_1 m)} m = 0. \quad (19.29)$$

Воспользовавшись формулой (26.71), находим после несложных вычислений, что левая часть этого уравнения лишь множителем  $-m \mu_1 m$  отличается от левой части уравнения (19.14). Таким образом, соотношение (19.29) есть не что иное, как уравнение нормалей. С помощью принципа дуальности (14.11) получаем еще одну форму уравнения нормалей:

$$m \mu_1 \overline{(\varepsilon_1 \mu_1 - m \varepsilon_1 m)} m = 0. \quad (19.30)$$

Выражения (19.24), (19.25), (19.27), (19.28) для полей, как уже отмечалось, пригодны лишь в том случае, когда их правые части отличны от нуля. Случаи, когда они обращаются в нуль, требуют модифицированного подхода и будут рассмотрены в последующих параграфах отдельно для собственно гиротропных и естественно гиротропных сред.

Любое из выражений (19.24), (19.25), (19.27), (19.28) позволяет с помощью формул (19.16) определить все векторы поля плоской волны в произвольной гиротропной среде. В частности, для векторов индукций имеем наряду с (19.24), (19.25)

$$\mathbf{D} = C_E \varepsilon_1 \overline{(\mu_1 \varepsilon_1 - m \mu_1 m)} m, \quad (19.31)$$

$$\mathbf{B} = C_H \mu_1 \overline{(\varepsilon_1 \mu_1 - m \varepsilon_1 m)} m. \quad (19.32)$$

В § 7 было показано, что для плоских волн в магнитных поглощающих кристаллах наряду с уравнениями Максвелла

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{mH}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{mE}], \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (19.33)$$

справедлива система уравнений

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{pB}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{pD}], \quad \mathbf{E} = \varepsilon^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}, \quad (19.34)$$

причем эти две системы переходят одна в другую при замене

$$\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} \rightleftharpoons \mathbf{B}, \quad \varepsilon \rightleftharpoons \varepsilon^{-1}, \quad \mu \rightleftharpoons \mu^{-1}, \quad \mathbf{m} \rightleftharpoons \mathbf{p} \quad (19.35)$$

и имеет место соотношение

$$\text{tr} = 1. \quad (19.36)$$

В этих формулах тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$  могли быть комплексными, но при этом предполагалась их симметричность. Нетрудно убедиться, что все рассуждения § 7, начиная с формул (7.84), могут быть перенесены и на общий случай анизотропных поглощающих магнитных собственно гиротропных сред. Единственное различие будет состоять в том, что в системе уравнений (19.1), (19.2)

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{m}\mathbf{E}], \quad \mathbf{D} = \epsilon_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H} \quad (19.37)$$

тензоры  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  не будут симметричными. С учетом этого отличия таким же путем, как в § 7, мы приходим к системе уравнений

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{p}\mathbf{B}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{p}\mathbf{D}], \quad \mathbf{E} = \epsilon_1^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} = \mu_1^{-1} \mathbf{B}, \quad (19.38)$$

получающейся из (19.37) путем замены

$$\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} \rightleftharpoons \mathbf{B}, \quad \epsilon_1 \rightleftharpoons \epsilon_1^{-1}, \quad \mu_1 \rightleftharpoons \mu_1^{-1}, \quad \mathbf{m} \rightleftharpoons \mathbf{p}, \quad (19.39)$$

причем  $\text{tr} = 1$ . Векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{m}$  будут здесь связаны соотношениями, аналогичными (7.111), (7.114):

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\overline{m\epsilon_1 m}} (\epsilon_1 \mathbf{m} + \frac{1}{N} \overline{\mu_1 (\epsilon_1 \mu_1 - m \epsilon_1 m)} \mathbf{m}) = \quad (19.40)$$

$$= \frac{1}{\overline{m\mu_1 m}} (\mu_1 \mathbf{m} + \frac{1}{N} \overline{\epsilon_1 (\mu_1 \epsilon_1 - m \mu_1 m)} \mathbf{m}), \quad N = \overline{m\epsilon_1 m \cdot m\mu_1 m} - |\epsilon_1 \mu_1|,$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\overline{p\epsilon_1^{-1} p}} (\epsilon_1^{-1} \mathbf{p} + \frac{1}{N'} \overline{\mu_1^{-1} (\epsilon_1^{-1} \mu_1^{-1} - p \epsilon_1^{-1} p)} \mathbf{p}) = \quad (19.41)$$

$$= \frac{1}{\overline{p\mu_1^{-1} p}} (\mu_1^{-1} \mathbf{p} + \frac{1}{N'} \overline{\epsilon_1^{-1} (\mu_1^{-1} \epsilon_1^{-1} - p \mu_1^{-1} p)} \mathbf{p}),$$

$$N' = \overline{p\epsilon_1^{-1} p \cdot p\mu_1^{-1} p} - |\epsilon_1 \mu_1|^{-1}.$$

Последние выражения для  $\mathbf{m}$  можно преобразовать, умножив числители и знаменатели дробей на  $|\epsilon_1 \mu_1|$ . В результате после несложных преобразований (см. § 7) получим

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\overline{p\epsilon_1 p}} (\overline{\epsilon_1 p} + \frac{(\overline{\epsilon_1} - \overline{p\epsilon_1 p} \cdot \mu_1 p)}{\overline{p\epsilon_1 p \cdot p\mu_1 p} - 1} \mathbf{p}) = \quad (19.42)$$

$$= \frac{1}{\overline{p\mu_1 p}} (\overline{\mu_1 p} + \frac{(\overline{\mu_1} - \overline{p\mu_1 p} \cdot \epsilon_1 p)}{\overline{p\epsilon_1 p \cdot p\mu_1 p} - 1} \mathbf{p}).$$

Из (19.38) следует  $\mathbf{pE} = \mathbf{pH} = 0$ , значит  $\mathbf{p} = C[\mathbf{EH}]$ . Условие  $m\mathbf{p} = 1$  позволяет определить скалярный коэффициент  $C$ . Таким образом, находим

$$\mathbf{p} = \frac{[\mathbf{EH}]}{m[\mathbf{EH}]} \quad (19.43)$$

Но из (19.37) имеем

$$m[\mathbf{EH}] = \mathbf{ED} = \mathbf{HB} = D\epsilon_1^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{B}\mu^{-1}\mathbf{B}, \quad (19.44)$$

следовательно, можно также написать

$$\mathbf{p} = \frac{[\mathbf{EH}]}{\mathbf{ED}} = \frac{[\mathbf{EH}]}{\mathbf{HB}} = \frac{[\mathbf{EH}]}{D\epsilon_1^{-1}\mathbf{D}} = \frac{[\mathbf{EH}]}{\mathbf{B}\mu^{-1}\mathbf{B}} \quad (19.45)$$

В той трактовке, которая изложена в § 12, 15, приведенные выше соображения не полностью применимы к естественно гиротропным средам. Поскольку для них уравнения связи формально имеют тот же вид (19.2), что и для собственно гиротропных сред, то, повторяя без изменений прежние рассуждения, мы от уравнений (19.37) и в случае естественной гиротропии приходим к системе (19.38) и к тому же выражению (19.40) для вектора лучевой рефракции, причем, разумеется, по-прежнему будет  $m\mathbf{p} = 1$ . Однако для естественно гиротропных сред замену (19.39) производить нельзя из-за того, что недопустимо последнее преобразование  $m \rightleftharpoons \mathbf{p}$ . Это связано с тем, что в естественно гиротропных средах тензоры  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  зависят от  $m$  согласно (19.3). Поэтому при перестановке  $m \rightleftharpoons \mathbf{p}$  соотношения (19.38) приобрели бы вид

$$\mathbf{E} = [\epsilon(1 - i\alpha\mathbf{p}^\times)]^{-1}\mathbf{D}, \quad \mathbf{H} = [\mu(1 - i\tilde{\alpha}\mathbf{p}^\times)]^{-1}\mathbf{B}$$

и, следовательно, противоречили бы исходным соотношениям.

$$\mathbf{D} = \epsilon(1 - i\alpha m^\times)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(1 - i\tilde{\alpha} m^\times)\mathbf{H},$$

поскольку  $m \neq \mathbf{p}$ .

Итак, хотя для естественно гиротропных сред остаются в силе соотношения (19.36)—(19.38), (19.40), (19.43)—(19.45), однако основной принцип допустимости преобразования (19.39) для этих сред неприменим. В частности, поэтому мы не можем путем простой замены  $m \rightleftharpoons \mathbf{p}$  получать в этом случае из (19.40) обратные соотношения (19.41), (19.42). Такое положение оставляет чувство естественной неудовлетворенности, поскольку преобразование (19.39), как установлено выше, оказалось пригодным для самых различных видов кристаллов: прозрачных, поглощающих, немагнитных, магнитных и собственно (вынужденно) гиротропных, а также кристаллов с любыми сочетаниями перечисленных свойств.

На самом деле и для естественно гиротропных сред существует преобразование типа (19.39), позволяющее получать правильные соотношения с новым физическим содержанием. Однако эту закономерность можно сформулировать лишь на основании изложенной в § 18 общей трактовки гиротропии. Чтобы показать это, мы рассмотрим наиболее общую систему уравнений для плоских электромагнитных волн (см. (18.11)):

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{mH}] = \epsilon\mathbf{E} + \alpha\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{mE}] = \mu\mathbf{H} + \beta\mathbf{E}, \quad (19.46)$$

где на тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  вообще не налагается никаких ограничений, за исключением того, что  $\epsilon$  и  $\mu$  — неособенные тензоры. Уравнения (18.11) могут быть разрешены относительно  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  следующим образом:

$$\mathbf{E} = \epsilon^{-1}(\mathbf{D} - \alpha\mathbf{H}), \quad \mathbf{H} = \mu^{-1}(\mathbf{B} - \beta\mathbf{E}). \quad (19.47)$$

Исключая из первого уравнения  $\mathbf{H}$ , а из второго  $\mathbf{E}$ , находим

$$\mathbf{E} = (1 - \epsilon^{-1}\alpha\mu^{-1}\beta)^{-1}\epsilon^{-1}(\mathbf{D} - \alpha\mu^{-1}\mathbf{B}),$$

$$\mathbf{H} = (1 - \mu^{-1}\beta\epsilon^{-1}\alpha)^{-1}\mu^{-1}(\mathbf{B} - \beta\epsilon^{-1}\mathbf{D}),$$

или

$$\mathbf{E} = \rho\mathbf{D} - \kappa\mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \sigma\mathbf{B} - \tau\mathbf{D}, \quad (19.48)$$

где

$$\rho = (1 - \epsilon^{-1}\alpha\mu^{-1}\beta)^{-1}\epsilon^{-1} = (\epsilon - \alpha\mu^{-1}\beta)^{-1}, \quad (19.49)$$

$$\sigma = (\mu - \beta\epsilon^{-1}\alpha)^{-1}, \quad (19.50)$$

$$\kappa = \rho\alpha\mu^{-1} = (\epsilon - \alpha\mu^{-1}\beta)^{-1}\alpha\mu^{-1}, \quad (19.51)$$

$$\tau = \sigma\beta\epsilon^{-1} = (\mu - \beta\epsilon^{-1}\alpha)^{-1}\beta\epsilon^{-1}. \quad (19.52)$$

Из уравнений Максвелла  $\mathbf{D} = -[\mathbf{mH}]$ ,  $\mathbf{B} = [\mathbf{mE}]$ , так же как в § 7, заключаем, что  $\mathbf{HD} = \mathbf{BE} = 0$ , поэтому можно искать такой вектор  $\mathbf{p}$ , чтобы

$$\mathbf{H} = [\mathbf{pD}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{pB}], \quad (19.53)$$

откуда, умножая эти уравнения векторно на  $\mathbf{m}$  и сравнивая с (19.46), заключаем, что  $\mathbf{mp} = 1$ . Поскольку  $\mathbf{pE} = \mathbf{pH} = 0$ , то  $\mathbf{p} = C[\mathbf{EH}]$ , а из  $\mathbf{mp} = 1$  следует  $C^{-1} = \mathbf{m}[\mathbf{EH}]$ . Таким образом, вектор  $\mathbf{p}$  всегда существует и равен прежнему выражению (19.43). Следовательно, наряду с системой (19.46) всегда справедлива система уравнений

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{pB}] = \rho\mathbf{D} - \kappa\mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{pD}] = \sigma\mathbf{B} - \tau\mathbf{D}. \quad (19.54)$$

При этом системы (19.46) и (19.54) получаются одна из другой в результате замены

$$\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} \rightleftharpoons \mathbf{B}, \quad \epsilon \rightleftharpoons \rho, \quad \mu \rightleftharpoons \sigma, \quad (19.55)$$

$$\alpha \rightleftharpoons -\kappa, \quad \beta \rightleftharpoons -\tau, \quad \mathbf{m} \rightleftharpoons \mathbf{p}.$$

Эти соотношения выражают собой новый, необычайно общий, универсальный принцип симметрии, справедливый для плоских гармонических электромагнитных волн в средах, обладающих любыми видами анизотропии. Из него следует, что любое соотношение, вытекающее из уравнений (19.46) электродинамики плоских волн, остается справедливым, если в нем осуществить замену (19.55).

В качестве примера, иллюстрирующего справедливость названного принципа, мы проведем сейчас расчет, непосредственно связанный с самим его содержанием. Соотношения (19.49)—(19.52) однозначно определяют тензоры  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $\tau$ , относящиеся к системе (19.54), через тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , характеризующие систему (19.46). Очевидно, для обратного перехода от (19.54) к (19.46) необходимо выразить тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  через  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $\tau$ , т. е. разрешить систему четырех тензорных уравнений (19.49)—(19.52), относительно входящих в их правые части тензоров. Но эта нелинейная система четырех матричных уравнений настолько сложна, что неясно даже, как к ней подступиться. Между тем решение может быть написано сразу с помощью замены (19.55). Осуществляя ее над системой (19.49)—(19.52), получаем

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\rho - \kappa\sigma^{-1}\tau)^{-1}, & \mu &= (\sigma - \tau\rho^{-1}\kappa)^{-1}, \\ \alpha &= (\rho - \kappa\sigma^{-1}\tau)^{-1}\kappa\sigma^{-1}, & \beta &= (\sigma - \tau\rho^{-1}\kappa)^{-1}\tau\rho^{-1}. \end{aligned} \quad (19.56)$$

Чтобы убедиться, что написанное решение правильно, подставим выражения (19.49)—(19.52), например, в первое уравнение (19.56):

$$\begin{aligned} \epsilon &= [(\epsilon - \alpha\mu^{-1}\beta)^{-1} - (\epsilon - \alpha\mu^{-1}\beta)^{-1}\alpha\mu^{-1}\beta\epsilon^{-1}]^{-1} = \\ &= [(\epsilon - \alpha\mu^{-1}\beta)^{-1}(1 - \alpha\mu^{-1}\beta\epsilon^{-1})]^{-1} = \\ &= [(\epsilon - \alpha\mu^{-1}\beta)^{-1}(\epsilon - \alpha\mu^{-1}\beta)\epsilon^{-1}]^{-1} = \epsilon. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, мы получили тождество. Тем же путем могут быть проверены остальные уравнения (19.56).

В книге [10] дана формулировка принципа дуализма для однородных волн в прозрачных немагнитных кристаллах. В [4, 5] был введен вектор лучевой рефракции  $\rho$  и с его помощью принципу дуализма была придана наиболее простая и симметричная форма (4.35)—(4.37). Там же этот принцип был обобщен на случай однородных волн в прозрачных магнитных кристаллах (см. также [30—32]). В работах [67, 68] соотношения (4.35)—(4.37) были распространены на неоднородные и неоднородные волны в поглощающих немагнитных одноосных кристаллах средних синглоний. Полученные выше соотношения (19.45), (19.54), (19.55) представляют собой

предельно широкое обобщение упомянутого принципа на случай как однородных, так и неоднородных волн в кристаллах, обладающих любыми видами анизотропии и гиротропии. Это обобщение идет настолько далеко, что по существу представляет собой новый универсальный принцип в рамках теории электромагнитных волн в анизотропных средах. Используемые в [11, 27, 28] и других для весьма частного случая этой фундаментальной закономерности названия «принцип переноса», «соотношение дуальности», «правило взаимного соответствия» (см. § 4) нельзя признать удачными. Поэтому мы дадим доказанной выше общей закономерности (см. (19.46), (19.49) — (19.52), (19.54), (19.55)) название *универсального принципа фазолучевой симметрии*. Это название отражает тот факт, что для прозрачных негиротропных сред вектор  $\mathbf{p}$  определяет лучевую скорость волны  $\mathbf{u} = c\mathbf{p}$ , и соотношения (19.46) — (19.55) для этого случая устанавливают определенную симметрию между фазовыми и лучевыми (энергетически) характеристиками плоских волн.

Однако следует иметь в виду, что в общем случае вектору лучевой рефракции  $\mathbf{p}$  (19.43) отнюдь нельзя приписать такого простого и естественного физического смысла, как в случае прозрачных негиротропных сред. Это связано, в частности, с тем, что вследствие комплексных значений  $\epsilon$ ,  $\mu$  или  $\alpha$  вектор  $\mathbf{p}$ , определяемый соотношением (19.43), как правило, будет иметь комплексные значения даже в тех случаях, когда соответствующий той же волне вектор фазовой рефракции  $\mathbf{m}$  будет вещественным.

Рассмотрим случай, когда в среде отсутствует диссипация энергии электромагнитных волн. Согласно (18.13), при этом в уравнениях (19.46)  $\epsilon = \epsilon^+$ ,  $\mu = \mu^+$ ,  $\beta = \alpha^+$ . Легко видеть, что тогда из (19.49) — (19.52) следуют аналогичные свойства для тензоров  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $\tau$ :

$$\rho = (\epsilon - \alpha\mu^{-1}\alpha^+)^{-1} = \rho^+, \quad \sigma = \sigma^+, \quad (19.57)$$

$$\kappa = (\epsilon - \alpha\mu^{-1}\alpha^+)^{-1}\alpha\mu^{-1}, \quad \tau = (\mu - \alpha^+\epsilon^{-1}\alpha)^{-1}\alpha^+\epsilon^{-1} = \kappa^+.$$

Действительно, условие  $\kappa = \tau^+$  можно написать в виде

$$\epsilon^{-1}(1 - \alpha\mu^{-1}\alpha^+\epsilon^{-1})^{-1}\alpha\mu^{-1} = \epsilon^{-1}\alpha(1 - \mu^{-1}\alpha^+\epsilon^{-1}\alpha)^{-1}\mu^{-1}.$$

Но тем же путем, как доказывалось соотношение (12.64), можно показать, что

$$(1 - \alpha\mu^{-1}\alpha^+\epsilon^{-1})^{-1}\alpha \equiv \alpha(1 - \mu^{-1}\alpha^+\epsilon^{-1}\alpha)^{-1},$$

откуда и следует  $\kappa = \tau^+$ . Заметим, что и (12.64) и последнее равенство являются следствиями общего тождества

$$A(1 - BA)^{-1} \equiv (1 - AB)^{-1}A, \quad (19.58)$$

справедливого для любых матриц  $A$ ,  $B$ .

Однако если справедливы соотношения (18.23), то аналогичные свойства не будут иметь место для матриц (12.51), (12.52), т. е., вообще говоря,  $\kappa \neq i\kappa_0$ , где  $\kappa_0 = \kappa_0^*$ . Но в случае, когда  $\varepsilon = \varepsilon^* = \tilde{\varepsilon}$ ,  $\mu = \mu^* = \tilde{\mu}$ ,  $\alpha = i\alpha_0$ ,  $\beta = -i\alpha_0$ ,  $\alpha_0 = \alpha_0^*$ , получим аналогично

$$\rho = (\varepsilon - \alpha\mu^{-1}\tilde{\alpha})^{-1} = \rho^* = \tilde{\rho}, \quad \sigma = \sigma^* = \tilde{\sigma}, \quad (19.59)$$

$$\kappa = i(\varepsilon - \alpha\mu^{-1}\tilde{\alpha})^{-1}\alpha\mu^{-1} = i\kappa_0, \quad \tau = -i\tilde{\kappa}_0, \quad \kappa_0 = \kappa_0^*.$$

Таким образом, совокупность матриц  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $\tau$  обладает соответственно одинаковыми свойствами в двух случаях: когда  $\varepsilon = \varepsilon^+$ ,  $\mu = \mu^+$ ,  $\beta = \alpha^+$  ( $\rho = \rho^+$ ,  $\sigma = \sigma^+$ ,  $\tau = \kappa^+$ ) и когда  $\varepsilon = \varepsilon^* = \tilde{\varepsilon}$ ,  $\mu = \mu^* = \tilde{\mu}$ ,  $\alpha = i\alpha_0$ ,  $\beta = -i\alpha_0$ ,  $\alpha_0 = \alpha_0^*$  (см. (19.59)). При  $\alpha = \beta = 0$  первый случай соответствует собственно гиротропным средам, второй же случай относится к естественно гиротропным средам.

## § 20. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В СОБСТВЕННО ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Мы начинаем рассмотрение оптических свойств конкретных гиротропных кристаллов со случая собственной гиротропии по той причине, что этот вид гиротропии является существенно более простым, чем естественная гиротропия. Согласно § 17, при этом мы охватим и все случаи вынужденной гиротропии. Основное упрощение связано с тем, что, согласно § 16, в собственно гиротропных средах тензоры  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$  постоянны (при фиксированной частоте волн), в то время как в естественно гиротропных средах они зависят от вектора рефракции (см. (16.4)). Кроме того (см. (16.19)), эти тензоры в собственно гиротропных прозрачных средах являются эрмитовыми, что позволяет использовать для них специфические аксиальные представления (§ 28), существенно упрощающие теорию. Наконец, еще одним упрощающим обстоятельством является то, что материальные уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H}, \quad (20.1)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + ia^\times = \varepsilon_1^+, \quad \mu_1 = \mu + ib^\times = \mu_1^+ \quad (20.2)$$

совершенно независимы друг от друга в том смысле, что закон сохранения энергии (см. (16.9)–(16.13)) не устанавливает между  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$  никаких соотношений. Напомним, что в естественно гиротропных средах, согласно (16.4), члены, ответственные за гиротропию в  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$ , определенным образом связаны между собою. Таким образом, для собственно гиро-



тропных сред в рамках феноменологической теории отсутствуют какие-либо соображения, препятствующие тому, чтобы положить  $\mu_1 = 1$  и тем самым значительно упростить рассмотрение. В то же время для естественно гиротропных сред, как отмечалось в § 12, это недопустимо.

Итак, мы исходим из уравнений связи (20.1), (20.2) и универсальных уравнений Максвелла (4.1), (4.2) для плоских волн

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{m}\mathbf{E}], \quad (20.3)$$

которые совместно приводят к системе

$$\epsilon_1 \mathbf{E} = -[\mathbf{m}\mathbf{H}], \quad \mu_1 \mathbf{H} = [\mathbf{m}\mathbf{E}]. \quad (20.4)$$

Согласно (16.13), для средних плотностей электрической и магнитной энергии поля и вектора Пойнтинга справедливы выражения

$$\omega_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^* \epsilon_1 \mathbf{E}, \quad \omega_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^* \mu_1 \mathbf{H}, \quad (20.5)$$

$$S = \frac{c}{8\pi} ([\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]. \quad (20.6)$$

Умножая первое уравнение (20.4) на  $\mathbf{E}^*$  и второе на  $\mathbf{H}^*$ , получаем

$$\mathbf{E}^* \epsilon_1 \mathbf{E} = m [\mathbf{E}^*\mathbf{H}], \quad \mathbf{H}^* \mu_1 \mathbf{H} = m [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]. \quad (20.7)$$

При вещественном векторе рефракции ( $\mathbf{m} = \mathbf{m}^*$ ) правые части этих равенств комплексно сопряжены друг к другу. Но левые части равенств (20.7) вследствие эрмитовости тензоров  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  вещественны (§ 28). Поэтому вещественны, а значит, и равны между собою (при  $\mathbf{m} = \mathbf{m}^*$ ) правые части. Таким образом, мы имеем

$$m [\mathbf{E}^*\mathbf{H}] = m [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = \mathbf{E}^* \epsilon_1 \mathbf{E} = \mathbf{H}^* \mu_1 \mathbf{H}, \quad (20.8)$$

т. е., как и в негиротропных прозрачных кристаллах, электрическая и магнитная энергии поля плоской волны равны по величине.

Уравнение нормалей для собственно гиротропных кристаллов получается из общего уравнения (19.13), если взять для  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  значения (20.2). После несложных преобразований (см. § 26) получим

$$m \epsilon m \cdot m \mu m + m \mu (\bar{\epsilon} \mu - (\bar{\epsilon} \mu)_i) m + (|\epsilon| - a \epsilon a)(|\mu| - b \mu b) - \\ - (m [ab])^2 + [bm] \bar{\epsilon} [bm] + [am] \bar{\mu} [am] - 2 a \epsilon m \cdot b \mu m = 0. \quad (20.9)$$

Для рассматриваемых сред справедлив принцип дуальности (магнитоэлектрической симметрии), согласно которому любые соотношения остаются верными при перестановке

$$\mathbf{D} \rightleftharpoons \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H}, \quad \varepsilon_1 \rightleftharpoons \mu_1, \quad \varepsilon \rightleftharpoons \mu, \quad \mathbf{a} \rightleftharpoons \mathbf{b}, \quad \mathbf{m} \rightleftharpoons -\mathbf{m}. \quad (20.10)$$

Легко убедиться, что уравнение (20.9) при перестановке (20.10) не меняется.

Отсутствие диссипации в собственно гиротропных средах с вещественными  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$  и  $\mu = \bar{\mu}$  следует из того, что выражение

$$\mathbf{E}\mathbf{D}^* + \mathbf{H}\mathbf{B}^* = \mathbf{E}\varepsilon_1^*\mathbf{E}^* + \mathbf{H}\mu_1^*\mathbf{H}^* = \mathbf{E}^*\varepsilon_1\mathbf{E} + \mathbf{H}^*\mu_1\mathbf{H}$$

является вещественным вследствие эрмитовости  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$ . Следовательно, условие (12.50) выполняется и собственно гиротропные кристаллы с вещественными симметричными  $\varepsilon$  и  $\mu$  являются прозрачными.

Уравнение (20.9) является биквадратным относительно показателя преломления  $n$  и может быть записано в виде ( $\mathbf{m} = n\mathbf{n}$ )

$$An^4 + Bn^2 + C = 0, \quad (20.11)$$

где

$$A = \text{nen} \cdot \mu \mu \mathbf{n}, \quad C = (|\varepsilon| - a\varepsilon a)(|\mu| - b\mu b), \quad (20.12)$$

$$B = n\mu (\bar{\varepsilon}\mu - (\bar{\varepsilon}\mu)_i) \mathbf{n} - (n[\mathbf{a}b])^2 + [\mathbf{b}\mathbf{n}] \bar{\varepsilon} [\mathbf{b}\mathbf{n}] + \\ + [\mathbf{a}\mathbf{n}] \mu [\mathbf{a}\mathbf{n}] - 2a\varepsilon n \cdot b\mu n.$$

Значения  $n^2$ , являющиеся корнями этого уравнения, всегда вещественны. Чтобы показать это, рассмотрим уравнение (19.5), написав его в виде

$$\varkappa \mathbf{E} = -\frac{1}{n^2} \varepsilon_1 \mathbf{E}, \quad \varkappa = \mathbf{n} \times \mu_1^{-1} \mathbf{n} \times. \quad (20.13)$$

Матрица  $\varkappa$  эрмитова:

$$\varkappa^+ = \mathbf{n} \times \mu_1^{-1} \mathbf{n} \times = \mathbf{n} \times \mu_1^{-1} \mathbf{n} \times = \varkappa.$$

Умножив (20.13) на  $\mathbf{E}^*$ , получим

$$\mathbf{E}^* \varkappa \mathbf{E} = -\frac{1}{n^2} \mathbf{E}^* \varepsilon_1 \mathbf{E}. \quad (20.14)$$

Выражения  $\mathbf{E}^* \varkappa \mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}^* \varepsilon_1 \mathbf{E}$  вещественны вследствие эрмитовости  $\varkappa$  и  $\varepsilon_1$ .

Для  $n^2$  из (20.14), (20.13) следует выражение

$$n^2 = \frac{\mathbf{E}^* \varepsilon_1 \mathbf{E}}{[\mathbf{n}\mathbf{E}^*] \mu_1^{-1} [\mathbf{n}\mathbf{E}]}. \quad (20.15)$$

Как отмечалось в § 1, матрицы  $\varepsilon$  и  $\mu$  положительно определены. Поскольку векторы гирации  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  весьма малы по ве-

личине, то матрицы  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  также будут положительно определены. Отсюда следует, что  $n^2$ , определяемый формулой (20.15), будет положительной величиной, так как числитель и знаменатель дроби положительны. Таким образом, корни уравнений нормалей (20.9) всегда вещественны и положительны.

Согласно (20.11), (20.12), при заданной фазовой нормали  $\mathbf{p}$  в собственно гиротропной среде могут распространяться две изонормальных однородных волны с показателями преломления  $n_1$ ,  $n_2$  и векторами поля  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ , причем

$$\kappa \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{n_1^2} \epsilon_1 \mathbf{E}_1, \quad \kappa \mathbf{E}_2 = -\frac{1}{n_2^2} \epsilon_1 \mathbf{E}_2. \quad (20.16)$$

Умножим первое уравнение на  $\mathbf{E}_2^*$ , а уравнение комплексно сопряженное ко второму—на  $\mathbf{E}_1$  и вычтем результаты. Поскольку  $\mathbf{E}_2^* \kappa \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1 \kappa^* \mathbf{E}_2^*$  и  $\mathbf{E}_2^* \epsilon_1 \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1 \epsilon_1^* \mathbf{E}_2^*$  ввиду эрмитовости  $\kappa$  и  $\epsilon_1$ , то мы получим

$$\left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \mathbf{E}_2^* \epsilon_1 \mathbf{E}_1 = 0.$$

Следовательно, при  $n_1 \neq n_2$  для любых двух изонормальных волн в собственно гиротропной среде имеют место равенства

$$\mathbf{E}_2^* \epsilon_1 \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2^* \mathbf{D}_1 = \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2^* = 0. \quad (20.17)$$

Таким образом (см. § 2), эллипсы, описываемые концами векторов  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  ( $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{D}_1$ ), подобны по форме, ориентированы взаимно перпендикулярно и обходятся в противоположных направлениях. На основании принципа дуальности (20.10) заключаем отсюда, что должны также иметь место равенства

$$\mathbf{H}_2^* \mu_1 \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2^* \mathbf{B}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{B}_2^* = 0. \quad (20.18)$$

Согласно (20.3), имеем  $\mathbf{D}_1 = -n_1 [\mathbf{nH}_1]$ ,  $\mathbf{D}_2 = -n_2 [\mathbf{nH}_2]$ ,  $\mathbf{B}_1^* \mathbf{n} = \mathbf{B}_2^* \mathbf{n} = 0$ . Поскольку также  $\mathbf{B}_2^* \mathbf{H}_1 = 0$ , то  $\mathbf{B}_2^* = C [\mathbf{nH}_1]$  и аналогично  $\mathbf{B}_1^* = C' [\mathbf{nH}_2^*]$ . Таким образом, для однородных изонормальных волн в прозрачных собственно гиротропных кристаллах всегда имеют место соотношения

$$\mathbf{D}_1 = C_1 \mathbf{B}_2^*, \quad \mathbf{D}_2 = C_2 \mathbf{B}_1^*, \quad (20.19)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — некоторые скалярные константы.

При отражении и преломлении света на границе любой прозрачной среды с прозрачным собственно гиротропным кристаллом соблюдается баланс потоков энергии. Это утверждение непосредственно следует, согласно § 16, из эрмитовского характера тензоров  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$ .

Рассмотрим подробнее свойства плоских волн в собствен-  
но гиротропных средах для случая  $\mu_1=1$ . Согласно (19.14),  
при этом уравнение нормалей имеет вид

$$\mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{m} \varepsilon_1 \mathbf{m} + \mathbf{m} (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_{11}) \mathbf{m} + |\varepsilon_1| = 0. \quad (20.20)$$

Оно лишь заменой вещественного симметричного тензора  $\varepsilon$   
на комплексный эрмитовский тензор

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + i \mathbf{a}^\times \quad (20.21)$$

отличается от уравнения нормалей (4.7) в прозрачных немаг-  
нитных негиротропных кристаллах. Если учесть выражение  
(20.21) для  $\varepsilon_1$ , то из (20.20) получим

$$\mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{m} \varepsilon \mathbf{m} + \mathbf{m} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_i) \mathbf{m} + |\varepsilon| - a \varepsilon a + [\mathbf{a} \mathbf{m}]^2 = 0. \quad (20.22)$$

Общая формула (19.24) дает для этого случая

$$\mathbf{D} = (A_{\mathbf{D}} - (A_{\mathbf{D}})_i - 1) A_{\mathbf{D}} \mathbf{m}, \quad (20.23)$$

где, согласно (19.19),

$$A_{\mathbf{D}} = \mathbf{m}^{\times 2} \varepsilon^{-1} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m}^2) \varepsilon^{-1}. \quad (20.24)$$

Преобразуя (20.23) с учетом (20.20), находим

$$\mathbf{D} \sim (\mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{m} \varepsilon \mathbf{m} - \mathbf{m}^4 \varepsilon_1 + \mathbf{m}^{\times 2} \bar{\varepsilon}_1) \mathbf{m}. \quad (20.25)$$

Для кристаллов средних сингоний, согласно (16.27), имеем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_o + \varepsilon' \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + i \alpha \mathbf{c}^\times, \quad \varepsilon' = \varepsilon_e - \varepsilon_o. \quad (20.26)$$

Используя это выражение, преобразуем (20.22) к виду

$$(\mathbf{m}^2 - \varepsilon_o)(\mathbf{m} \varepsilon \mathbf{m} - \varepsilon_o \varepsilon_e) + \alpha^2 ([\mathbf{m} \mathbf{c}]^2 - \varepsilon_e) = 0. \quad (20.27)$$

Удобно рассматривать свойства плоских волн, используя  
представления (28.67) для эрмитовых тензоров. Пусть для  
обратного диэлектрического тензора справедливо выражение

$$\varepsilon_1^{-1} = a + b(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}''^* + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}'^*), \quad |\mathbf{c}'|^2 = |\mathbf{c}''|^2 = 1, \quad \mathbf{c}' \mathbf{c}''^* = \mathbf{c}'^* \mathbf{c}'' = \eta. \quad (20.28)$$

Согласно (28.68), (28.71), в этом случае

$$\varepsilon_1^{-1} [\mathbf{c}' \mathbf{c}'']^* = a [\mathbf{c}' \mathbf{c}'']^*, \quad (20.29)$$

$$\varepsilon_1^{-1} (\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}'') = (a \pm b(1 \pm \eta))(\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}''). \quad (20.30)$$

Рассмотрим уравнение (19.6) для магнитного поля

$$(1 + \mathbf{m}^{\times} \varepsilon_1^{-1} \mathbf{m}^{\times}) \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{m} \mathbf{H} = 0. \quad (20.31)$$

Подставив сюда (20.28), получим

$$[1 + am^{\times 2} + bm^{\times} (c'.c''^* + c''.c'^*) m^{\times}] \mathbf{H} = 0$$

или

$$[am^2 - 1 + b(C'.C''^* + C''.C'^*)] \mathbf{H} = 0, \quad (20.32)$$

$$C' = [mc'], \quad C'' = [mc''].$$

Тензор, стоящий в квадратных скобках, имеет структуру (20.28), поэтому в силу (28.68) он должен иметь собственный вектор

$$\mathbf{H} \sim [C'C'']^* = m.m [c'c'']^*. \quad (20.33)$$

Приравнявая нулю соответствующее собственное значение, будем иметь

$$am^2 - 1 = 0, \quad n^2 = 1/a. \quad (20.34)$$

Как и в случае негиротропных кристаллов (§ 4), решение (20.33), (20.34) не имеет физического смысла. Для двух других решений имеем, согласно (28.80),

$$am^2 - 1 + b(\operatorname{Re} [mc'] [mc'']^* \pm \sqrt{[mc']^2 [mc'']^2 - (\operatorname{Im} [mc'] [mc'']^*)^2}) = 0, \quad (20.35)$$

откуда, считая  $m = np$ , находим

$$\frac{1}{n_{\pm}^2} = a + b(\operatorname{Re} [nc'] [nc'']^* \pm \sqrt{[nc']^2 [nc'']^2 - (\operatorname{Im} [nc'] [nc'']^*)^2}). \quad (20.36)$$

Таким образом, мы получили общие выражения для показателей преломления обеих изонормальных волн в произвольном собственно гиротропном немагнитном кристалле при любом направлении волновой нормали  $p$ . Для соответствующих векторов магнитного поля имеем, согласно (28.86а),

$$\mathbf{H}_{\pm} \sim |[nc'']^2 [nc'] + (\pm \sqrt{\quad} - i \operatorname{Im} [nc'] [nc'']^*) [nc''] \sim \sim (\pm \sqrt{\quad} + i \operatorname{Im} [nc'] [nc'']^*) [nc'] + |[nc']^2 [nc'']. \quad (20.37)$$

Здесь под  $\sqrt{\quad}$  подразумевается квадратный корень, входящий в (20.36). Легко видеть, что при вещественных векторах  $c'$  и  $c''$  мы приходим к формулам § 4 для негиротропных кристаллов. Поскольку  $\mathbf{H}_{+} \cdot \mathbf{H}_{-} = 0$ , то (см. § 2) эллипсы поляризации обеих изонормальных волн имеют одинаковую форму, но их большие оси взаимно перпендикулярны и они обходятся в противоположных направлениях.

Если обратный диэлектрический тензор имеет форму (28.89)

$$\epsilon_1^{-1} = a + bc.c^*, \quad (20.37a)$$

то уравнение (20.31) принимает вид

$$(1 + am^{\times 2} + bm^{\times} c.c^* m^{\times}) \mathbf{H} = 0,$$

или

$$(am^2 - 1 + b[\text{mc}][\text{mc}^*])\mathbf{H} = 0. \quad (20.38)$$

Отсюда ясно, что одним из возможных решений для магнитного вектора будет

$$\mathbf{H}_e = C[\text{mc}] = C_1[\text{nc}], \quad (20.39)$$

чему соответствует уравнение для показателя преломления

$$am^2 - 1 + b|[\text{mc}]|^2 = 0$$

или

$$n^2 = \frac{1}{a + b|[\text{nc}]|^2}. \quad (20.40)$$

Выражение для вектора магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  второй изонормальной волны получим из соотношений  $n\mathbf{H}_0 = 0$  и  $\mathbf{H}_e^*\mathbf{H}_0 = 0$ , откуда следует

$$\mathbf{H}_0 = C' [n\mathbf{H}_e^*] = C'_1 [n[\text{nc}^*]]. \quad (20.41)$$

Подставляя в (20.38), имеем

$$n^2 = 1/a. \quad (20.42)$$

Таким образом, в гиротропных немагнитных средах, характеризующихся комплексным диэлектрическим тензором вида

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{c}\mathbf{c}^*, \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}_e - \varepsilon_0, \quad |\mathbf{c}|^2 = 1, \quad (20.43)$$

должна существовать обыкновенная волна (20.41), (20.42) и необыкновенная волна (20.39), (20.40), которые в общем случае обе поляризованы эллиптически. Поскольку (см. (26.113))

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_e} (\boldsymbol{\varepsilon}_e - \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{c}\mathbf{c}^*), \quad (20.44)$$

то

$$a = 1/\varepsilon_0, \quad b = -\boldsymbol{\varepsilon}'/\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_e. \quad (20.45)$$

Заметим, что в тензоре (20.43) вектор  $\mathbf{c}$  должен быть нелинейным. Действительно, при линейном  $\mathbf{c}$  мы имели бы  $\mathbf{c} = \xi\mathbf{c}_0$ , где  $\xi$  — комплексное число, а  $\mathbf{c}_0$  — единичный вещественный вектор. Но в этом случае тензор (20.43) был бы равен

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \boldsymbol{\varepsilon}'|\xi|^2\mathbf{c}_0\mathbf{c}_0$$

и мы получили бы вещественный симметричный одноосный тензор (4.43), который не может описывать гиротропию.

Круговая поляризация и соответственно вращение плоскости поляризации в средах типа (20.43), согласно (20.39), (20.41), возможно лишь при условии  $\mathbf{H}^2 = [\text{nc}]^2 = 0$ . Отсюда на основании (7.20) заключаем, что при круговом векторе  $\mathbf{c}$  вращение плоскости поляризации возможно лишь вдоль одно-

го направления  $\mathbf{n} = i[\mathbf{c}\mathbf{c}^*]/[\mathbf{c}\mathbf{c}^*]$ . При эллиптическом векторе  $\mathbf{c}$  в соответствующем кристалле будет два таких направления, определяемых формулой (7.18).

Линейная поляризация, согласно (2.42), возможна для тех направлений  $\mathbf{n}$ , для которых выполняется условие

$$[\mathbf{H}\mathbf{H}^*] = [[\mathbf{n}\mathbf{c}][\mathbf{n}\mathbf{c}^*]] = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} [\mathbf{c}\mathbf{c}^*] = 0. \quad (20.46)$$

Поскольку  $[\mathbf{c}\mathbf{c}^*] = i\mathbf{d}$ , где  $\mathbf{d}$  — вещественный вектор (см. § 27), то в кристаллах типа (20.43) всегда существует плоскость, перпендикулярная к вектору  $i[\mathbf{c}\mathbf{c}^*]$ , обладающая тем свойством, что все волны с нормальными  $\mathbf{n}$ , лежащими в этой плоскости, линейно поляризованы. Пусть  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ , тогда  $i[\mathbf{c}\mathbf{c}^*] = 2[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ , следовательно, рассматриваемая плоскость есть плоскость комплексного вектора  $\mathbf{c}$ . Легко видеть, что  $\mathbf{H}_e \parallel [[\mathbf{a}\mathbf{b}]]$  и  $\mathbf{H}_o \parallel [[\mathbf{n}[\mathbf{a}\mathbf{b}]]]$ , т. е. необыкновенная волна поляризована перпендикулярно, а обыкновенная волна — параллельно плоскости вектора  $\mathbf{c}$ .

В собственно гиротропных кристаллах средних сингоний тензор  $\varepsilon$ , согласно (16.27), должен иметь вид

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \varepsilon' \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + i\kappa \mathbf{c} \times, \quad \varepsilon' = \varepsilon_e - \varepsilon_o. \quad (20.47)$$

Найдем его собственные векторы и собственные значения. Очевидно,

$$\varepsilon \mathbf{c} = \varepsilon_e \mathbf{c}. \quad (20.48)$$

Двумя другими собственными векторами будут круговые векторы  $\mathbf{e}_{\pm}$ , ортогональные к  $\mathbf{c}$ :

$$[\mathbf{c}\mathbf{e}_{\pm}] = \pm i\mathbf{e}_{\pm} \quad (\mathbf{e}_+ = \mathbf{e}_-^* = \mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}|^2 = 1). \quad (20.49)$$

Действительно, из (20.47) и (20.49) следует

$$\varepsilon \mathbf{e}_{\pm} = (\varepsilon_o \mp \kappa) \mathbf{e}_{\pm}. \quad (20.50)$$

Таким образом, тензор (20.47) в общем случае имеет три различных собственных значения и, следовательно, не может быть представлен в виде (20.43). Такое представление возможно лишь при совпадении двух собственных значений (§ 28). Поскольку обычно анизотропия  $|\varepsilon'| = |\varepsilon_e - \varepsilon_o|$  больше параметра активности  $|\alpha|$ , то в зависимости от знака  $\varepsilon'$  и  $\sigma$  возможны лишь следующие совпадения собственных значений:  $\varepsilon_e = \varepsilon_o - \kappa$  либо  $\varepsilon_e = \varepsilon_o + \kappa$ . Но это значит, что

$$\kappa = \pm \varepsilon', \quad (20.51)$$

следовательно, тензор (20.47) принимает вид

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \varepsilon' (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \pm i\mathbf{c} \times). \quad (20.52)$$

Учитывая выражение (28.1) для единичного тензора в аксиальном базисе, можем написать

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}. \quad (20.53)$$

С другой стороны, согласно (27.23) и (26.44),

$$\mathbf{c}^\times = i[\mathbf{e}\mathbf{e}^*]^\times = i(\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*). \quad (20.54)$$

Подставляя (20.53), (20.54) в (20.52), получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}' [1 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} \mp (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*)],$$

откуда следует, что при  $\alpha = \pm \boldsymbol{\varepsilon}'$ , т. е. при численном равенстве анизотропии  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  и параметра оптической активности  $\alpha$ , тензор (20.47) для кристаллов средних сингоний должен принимать одну из двух форм

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e - 2\boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e - 2\boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*. \quad (20.55)$$

Таким образом, если в кристаллах средних сингоний тензор  $\boldsymbol{\varepsilon}$  имеет вид (20.43), то вектор  $\mathbf{c} = \mathbf{e}$  есть круговой вектор, ортогональный к оси симметрии высшего порядка.

Заметим, что в кристаллах типа (20.43) не существует направления волновой нормали  $\mathbf{n}$ , для которого бы скорости обеих изонормальных волн совпадали. Действительно, такое совпадение, согласно (20.40), (20.42), имело бы место лишь в случае  $|\mathbf{nc}|^2 = 0$  или  $[\mathbf{nc}] = 0$ , что невозможно, так как  $\mathbf{n}$  — вещественный вектор, а  $\mathbf{c}$  — нелинейный комплексный вектор.

Приведенное рассмотрение показывает, что в принципе возможно существование собственно (вынужденно) гиротропных кристаллов, аналогичных одноосным прозрачным кристаллам в том отношении, что одна из двух изонормальных волн имеет скорость, не зависящую от направления. Однако в таких кристаллах оптическая ось отсутствует. По-видимому, вероятность встретить такой кристалл в естественном состоянии достаточно мала. В то же время представляется почти несомненным, что анизотропная среда с такими свойствами может быть получена искусственным путем. Действительно, для изотропной среды в магнитном поле имеем (см. (17.5))

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + i\mathbf{kh}^\times. \quad (20.56)$$

Изменяя величину магнитного поля  $\mathbf{h}$ , по-видимому, можно добиться выполнения равенства  $\kappa = \pm \boldsymbol{\varepsilon}'$ . В крайнем случае можно наложить параллельно магнитному электрическое поле, которое, не меняя  $\mathbf{h}$ , будет увеличивать  $\boldsymbol{\varepsilon}'$ .

Рассмотрим распространение света в собственно гиротропных кристаллах средних сингоний (при  $\mu_1 = 1$ ) в общем слу-



чае, т. е. не предполагая равенства  $\kappa = \pm \varepsilon'$ . Вычисление тензора, обратного к (20.47), с помощью методов § 26 дает

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon_1 - \varepsilon'_1 c.c - i\kappa_1 c \times, \quad (20.57)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0^2 - \kappa^2}, \quad \varepsilon'_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon' + \kappa^2}{\varepsilon_e (\varepsilon_0^2 - \kappa^2)}, \quad \kappa_1 = \frac{\kappa \varepsilon_0}{\varepsilon_e (\varepsilon_0^2 - \kappa^2)}. \quad (20.58)$$

Собственные векторы и собственные значения тензора вида (20.57) мы уже нашли выше (см. (20.48), (20.50)). Рассмотрим еще тензор несколько иного вида:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon' \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + i\kappa \mathbf{b} \times, \quad \mathbf{a} \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b}^2 = 1. \quad (20.59)$$

Очевидно, вектор  $\mathbf{b}$  будет его собственным вектором:

$$\varepsilon \mathbf{b} = \varepsilon_0 \mathbf{b}. \quad (20.60)$$

Поскольку два других собственных вектора должны быть ортогональны к  $\mathbf{b}$ , то будем искать их в виде

$$\mathbf{d} = \xi \mathbf{a} + \eta [\mathbf{b} \mathbf{a}].$$

Умножив  $\mathbf{d}$  на  $\varepsilon$  (20.59), в качестве условия, чтобы  $\mathbf{d}$  был собственным вектором тензора  $\varepsilon$ , получим следующее уравнение:

$$\varepsilon' \xi \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a} + i\kappa (\xi [\mathbf{b} \mathbf{a}] - \eta \mathbf{a}) = \lambda (\xi \mathbf{a} + \eta [\mathbf{b} \mathbf{a}]),$$

которое распадается на два

$$\varepsilon' \xi \mathbf{a}^2 - i\kappa \eta = \lambda \xi, \quad i\kappa \xi = \lambda \eta.$$

Отсюда следует

$$\lambda^2 - \varepsilon' \mathbf{a}^2 \lambda - \kappa^2 = 0, \quad (20.61)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (\varepsilon' \mathbf{a}^2 \pm \sqrt{(\varepsilon' \mathbf{a}^2)^2 + 4\kappa^2}),$$

$$\mathbf{d}_{\pm} = C_{\pm} \left( -\frac{i}{2\kappa} (\varepsilon' \mathbf{a}^2 \pm \sqrt{(\varepsilon' \mathbf{a}^2)^2 + 4\kappa^2}) \mathbf{a} + [\mathbf{b} \mathbf{a}] \right). \quad (20.62)$$

Итак, тензор (20.59) имеет в качестве собственных векторов  $\mathbf{d}_{\pm}$  (20.62). Им соответствуют собственные значения

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_0 + \frac{1}{2} (\varepsilon' \mathbf{a}^2 \pm \sqrt{(\varepsilon' \mathbf{a}^2)^2 + 4\kappa^2}). \quad (20.63)$$

Нетрудно убедиться, что  $\mathbf{d}_+ = C [\mathbf{a} \mathbf{d}_-^*]$  и, следовательно,  $\mathbf{d}_+^* \mathbf{d}_- = 0$ .

Подставим  $\varepsilon^{-1}$  (20.57) в уравнение (20.31). Мы получим

$$(1 + \varepsilon_1 \mathbf{m} \times^2 + \varepsilon'_1 [\mathbf{m} \mathbf{c}].[\mathbf{m} \mathbf{c}] - i\kappa_1 \mathbf{m} \times \mathbf{c} \times \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = 0,$$

или, поскольку  $m\mathbf{H} = 0$ ,  $m \times c \times m \times = -mc.m \times$ ,

$$(1 - \varepsilon_1 m^2 + \varepsilon'_1 [\mathbf{mc}].[mc] + i\kappa_1 mc.m \times) \mathbf{H} = 0. \quad (20.64)$$

Стоящий в скобках тензор имеет структуру (20.59), поэтому мы можем воспользоваться результатами (20.60) — (20.63), считая  $\mathbf{b} = \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{a} = [\mathbf{mc}]$ ,  $\kappa = \kappa_1 n^2 \mathbf{nc}$ ,  $\varepsilon_0 = 1 - \varepsilon_1 n^2$ . Таким образом, получаем для магнитных векторов обеих изонормальных волн

$$\mathbf{H}_{\pm} \sim (\varepsilon'_1 [\mathbf{nc}]^2 \pm \sqrt{\varepsilon_1'^2 [\mathbf{nc}]^4 + 4\kappa_1^2 (\mathbf{nc})^2}) [\mathbf{nc}] + 2i\kappa_1 \mathbf{nc}.[\mathbf{n}[\mathbf{nc}]]. \quad (20.65)$$

Соответствующие показатели преломления получаются из уравнения (см. (20.63))

$$1 - \varepsilon_1 n^2 + \frac{n^2}{2} (\varepsilon'_1 [\mathbf{nc}]^2 \pm \sqrt{\varepsilon_1'^2 [\mathbf{nc}]^4 + 4\kappa_1^2 (\mathbf{nc})^2}) = 0,$$

откуда следует

$$\frac{1}{n_{\pm}^2} = \varepsilon_1 - \frac{1}{2} (\varepsilon'_1 [\mathbf{nc}]^2 \pm \sqrt{\varepsilon_1'^2 [\mathbf{nc}]^4 + 4\kappa_1^2 (\mathbf{nc})^2}). \quad (20.66)$$

Выражения (20.65) для магнитного поля пригодны всегда, кроме случая  $\mathbf{n} = \mathbf{c}$ , когда необходимо обратиться к исходному уравнению (20.64). При  $\mathbf{n} = \mathbf{c}$  оно принимает вид

$$\mathbf{H} = \frac{i\kappa_1 n^2}{\varepsilon_1 n^2 - 1} [\mathbf{cH}], \quad (20.67)$$

откуда следует

$$\frac{\kappa_1 n^2}{\varepsilon_1 n^2 - 1} = \pm 1, \quad n^2 = \frac{1}{\varepsilon_1 \mp \kappa_1}. \quad (20.68)$$

Эти же значения для  $n^2$  получаются из (20.66) при  $\mathbf{n} = \mathbf{c}$ . Равенство (20.67) принимает вид  $\mathbf{H} = \pm i[\mathbf{cH}]$ . Оно определяет круговую поляризацию волн. Таким образом, во всех собственно гиротропных кристаллах средних сингоний вдоль оси симметрии высшего порядка имеет место вращение плоскости поляризации.

Из (20.65) следует далее, что вектор  $\mathbf{H}$  может быть линейным только при  $\mathbf{nc} = 0$ . Тогда, согласно (20.65), имеем

$$\mathbf{H}_+ \sim [\mathbf{nc}], \quad \mathbf{H}_- \sim [\mathbf{nH}_+] \sim [\mathbf{n}[\mathbf{nc}]] \quad (20.69)$$

и соответственно

$$\frac{1}{n_+^2} = \varepsilon_1 - \varepsilon'_1, \quad \frac{1}{n_-^2} = \varepsilon_1. \quad (20.70)$$

Итак, собственно гиротропные кристаллы всех классов средних сингоний (при  $\mu_1 = 1$ ) обладают общими свойствами. Они вращают плоскость поляризации при распространении

света вдоль оси симметрии высшего порядка. В плоскости, перпендикулярной этой оси, распространяются волны, линейно поляризованные перпендикулярно и параллельно этой плоскости. По всем остальным направлениям распространяются эллиптически поляризованные волны, причем их эллиптичность, как следует из (20.65), равна

$$\frac{b}{a} = \frac{2\kappa_1 n c}{\sqrt{\varepsilon'_1 [nc]^4 + 4\kappa_1^2 (nc)^2 + \varepsilon'_1 [nc]^2}}. \quad (20.71)$$

При некоторых соотношениях между параметрами этих кристаллов они могут обладать дополнительными специфическими свойствами. А именно при условии  $\kappa = \pm \varepsilon'$  (см. (20.51), (20.55)) в них существует разделение на обыкновенную (20.41) и необыкновенную волны. Любопытно отметить, что в принципе не исключена возможность наличия в собственно гиротропных кристаллах средних сингоний оптических осей, т. е. направлений, вдоль которых скорости обеих изонормальных волн совпадают. Согласно (20.66), для этого необходимо, чтобы квадратный корень обратился в нуль, т. е. чтобы

$$\kappa_1 n c = \varepsilon'_1 [nc]^2 = 0. \quad (20.72)$$

Поскольку в гиротропных кристаллах (см. (20.58))  $\kappa_1 = \kappa \varepsilon_0 / (\varepsilon_e \times (\varepsilon_o - \kappa^2)) \neq 0$ , то должно быть  $nc = \varepsilon'_1 = 0$ . Таким образом, волновая нормаль должна лежать в экваториальном сечении кристалла и, кроме того (см. (20.58)), его параметры должны удовлетворять условию

$$\varepsilon_o \varepsilon' + \kappa^2 = 0. \quad (20.73)$$

Для этого прежде всего необходимо, чтобы  $\varepsilon' = \varepsilon_e - \varepsilon_o < 0$ , т. е. чтобы кристалл был *оптически отрицательным*. Условие  $\kappa^2 = (\varepsilon_o - \varepsilon_e) \varepsilon_o$  может быть реализовано путем помещения изотропной среды в магнитное поле (как и условие  $\kappa = \pm \varepsilon'$ ), возможно, с наложением добавочного электрического поля, параллельного магнитному. В таких кристаллах обратный диэлектрический тензор (20.57) будет иметь вид

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon_1 - i\kappa_1 c \times. \quad (20.74)$$

Прямой диэлектрический тензор при этом должен иметь обычную форму (20.47)

$$\varepsilon = \varepsilon_o - \varepsilon' c \cdot c + i\kappa c \times,$$

где

$$\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^2 - \kappa_1^2}, \quad \varepsilon' = \frac{\kappa^2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 - \alpha_1^2)}, \quad \kappa = \frac{\kappa_1}{\varepsilon_1^2 - \kappa_1^2}.$$

Подставив (20.74) в (20.31), получим

$$(1 - \varepsilon_1 m^2 + i\kappa_1 m c \cdot m \times) \mathbf{H} = 0, \quad (20.75)$$

или

$$\mathbf{H} = \frac{i\kappa_1 n^2 \mathbf{nc}}{\varepsilon_1 n^2 - 1} [\mathbf{nH}]. \quad (20.76)$$

Согласно § 27, отсюда следует

$$\frac{\kappa_1 n^2 \mathbf{nc}}{\varepsilon_1 n^2 - 1} = \pm 1.$$

Таким образом,

$$n^2 = \frac{1}{\varepsilon_1 \mp \kappa_1 \mathbf{nc}}, \quad \frac{1}{n_{\pm}} \approx \sqrt{\varepsilon_1} \mp \frac{\kappa_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \mathbf{nc} \quad (20.77)$$

и соответственно  $\mathbf{H} = \mp i[\mathbf{nH}]$ . Следовательно, среда, в которой обратный диэлектрический тензор имеет вид (20.74), обладает довольно необычными свойствами. В ней по любому направлению распространяются циркулярно поляризованные волны. Однако в отличие от изотропно гиротропной среды (§ 15) их скорости (и разность скоростей обеих изонормальных волн) зависят от угла, образуемого волновой нормалью  $\mathbf{n}$  с фиксированным направлением  $\mathbf{c}$ . Согласно (20.77), при распространении света вдоль  $\mathbf{c}$  имеет место максимальное вращение плоскости поляризации. При этом, как в случае эффекта Фарадея, изменение направления  $\mathbf{n}$  на противоположное приводит к изменению направления вращения (относительно  $\mathbf{n}$ ). Вторым интересным свойством рассматриваемых сред является наличие в них целой *плоскости оптических осей*. Действительно, при  $\mathbf{nc} = 0$  имеем лишь одно значение показателя преломления  $n^2 = \varepsilon_1^{-1}$ . Таким образом, скорости обеих изонормальных волн совпадают для любого направления волновой нормали, лежащего в экваториальной плоскости кристалла. Соответственно для волн, распространяющихся в этой плоскости, вектор  $\mathbf{H}$ , согласно (20.65), может иметь любую поляризацию.

Поскольку, согласно (20.77), изменение знака  $\mathbf{nc}$  на обратный приводит к перестановке  $\mathbf{n}_+$  и  $\mathbf{n}_-$ , то по разные стороны от экваториальной плоскости будет иметь место вращение плоскости поляризации в противоположных направлениях.

Выясним, при каких условиях в собственно гиротропных кристаллах низших сингоний могут распространяться циркулярно и линейно поляризованные волны. Мы будем исходить из уравнения (20.31), причем тензор  $\varepsilon_1^{-1}$  представим в наиболее общем виде (см. 16.25)):

$$\varepsilon_1^{-1} = \alpha + id^{\times}, \quad \alpha = \alpha^* = \tilde{\alpha} = a + b(c'.c'' + c''.c'), \quad (20.78) \\ c'^2 = c''^2 = 1.$$

Уравнение (20.31) теперь запишется следующим образом:

$$(am^2 - 1 + b([\text{mc}'].[\text{mc}'''] + [\text{mc}''].[\text{mc}']) + idm \cdot m^\times) \mathbf{H} = 0. \quad (20.79)$$

Найдем необходимые условия для того, чтобы волна была поляризована по кругу. Для этого положим  $\mathbf{H}^2 = 0$  и умножим уравнение (20.79) на  $\mathbf{H}$ , что приводит к соотношению

$$2b\mathbf{H} [\text{mc}'].\mathbf{H} [\text{mc}'''] = 0. \quad (20.80)$$

Очевидно,  $b \neq 0$ , иначе мы приходим к частному случаю (16.32). Поскольку  $m\mathbf{H} = 0$ , то вещественные векторы  $[\text{mc}']$  и  $[\text{mc}''']$  будут лежать в плоскости комплексного кругового вектора  $\mathbf{H}$ . Но в таком случае равенства  $[\text{mc}']\mathbf{H} = 0$  или  $[\text{mc}''']\mathbf{H} = 0$  возможны лишь при условиях  $\mathbf{n} = \mathbf{c}'$  или  $\mathbf{n} = \mathbf{c}''$ . Мы будем называть направления  $\mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{c}''$  *оптическими осями собственно гиротропного кристалла* по аналогии с § 4. Однако нужно иметь в виду, что эта аналогия неполная, поскольку при  $\mathbf{n} = \mathbf{c}'$  или  $\mathbf{n} = \mathbf{c}''$  уравнение (20.79) принимает вид (ср. (20.76))

$$\mathbf{H} = \frac{-in^2 \mathbf{nd}}{a^2 - 1} [\mathbf{nH}], \quad \frac{-n^2 \mathbf{nd}}{a^2 - 1} = \pm 1, \quad (20.81)$$

откуда

$$n^2 = \frac{1}{a \pm \mathbf{nd}}, \quad \mathbf{H} = \pm i [\mathbf{nH}]. \quad (20.82)$$

Следовательно, в отличие от бинормалей негиротропного кристалла теперь скорости обеих изонормальных волн вдоль направления  $\mathbf{c}'$  (или  $\mathbf{c}''$ ) не совпадают.

Итак, если  $\mathbf{H}^2 = 0$ , то из основного уравнения (20.79) однозначно следует, что  $\mathbf{n} = \mathbf{c}'$  или  $\mathbf{n} = \mathbf{c}''$ . Наоборот, если  $\mathbf{n} = \mathbf{c}'$  или  $\mathbf{n} = \mathbf{c}''$ , то из (20.79) следует (20.82), т. е. круговая поляризация волн и вращение плоскости поляризации. Таким образом, в прозрачных собственно гиротропных кристаллах низших сингоний (немагнитных) совпадение фазовой нормали  $\mathbf{n}$  с любой из оптических осей является *необходимым и достаточным условием* для вращения плоскости поляризации.

Для рассмотрения линейной поляризации напишем уравнение (20.31) в виде

$$(1 + \beta) \mathbf{H} = 0, \quad \beta = m^\times \varepsilon_1^{-1} m^\times = \beta^+. \quad (20.83)$$

Согласно (26.70), мы имеем

$$\overline{1 + \beta} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}. \quad (20.84)$$

Если взять отсюда эрмитовское сопряжение и учесть эрмитовость матрицы  $\beta$ , то получим

$$(\overline{1 + \beta})^+ = \overline{1 + \beta^+} = \overline{1 + \beta} = \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}^* = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H},$$

откуда следует  $\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{H}^*$ . Следовательно,

$$\overline{1 + \beta} = \mathbf{C}\mathbf{H}\mathbf{H}^*, \quad (20.85)$$

причем скалярный множитель  $C$  должен быть вещественным, иначе матрица  $\overline{1 + \beta}$  (20.84) не будет эрмитовой. Матрица  $\overline{1 + \beta}$  вычислялась в (26.95). Учитывая, что  $|1 + \beta| = |\beta| = 0$ , получаем

$$\overline{1 + \beta} = (\beta - 1 - \beta_t) \beta. \quad (20.86)$$

Если волна линейно поляризована, то  $[\mathbf{H}\mathbf{H}^*] = 0$ , или  $\mathbf{H}^* = C'\mathbf{H}$ , где  $C'$  — комплексный скаляр (см. (§ 2)). Но в таком случае из равенств (20.85), (20.86) следует

$$(\beta - 1 - \beta_t) \beta = CC'\mathbf{H}\mathbf{H}, \quad (20.87)$$

т. е. стоящая слева матрица должна быть симметричной. Согласно (20.83), (20.79), мы можем взять для  $\beta$  выражение

$$\beta = \alpha - imd.m^\times, \quad (20.88)$$

где

$$\alpha = -am^2 - b([\mathbf{m}c'] \cdot [\mathbf{m}c''] + [\mathbf{m}c''] \cdot [\mathbf{m}c']) = \tilde{\alpha}. \quad (20.89)$$

Таким образом,

$$\beta_t = -3am^2 - 2b[\mathbf{m}c'][\mathbf{m}c''] = \alpha_t, \quad (20.90)$$

$$(\beta - 1 - \beta_t) \beta = (\alpha - imd.m^\times)^2 - (1 + \beta_t)(\alpha - imd.m^\times).$$

Поскольку последняя матрица должна быть симметричной, то мы должны приравнять нулю ее антисимметричную часть:

$$md(\alpha m^\times + m^\times \alpha - (1 + \alpha_t)m^\times) = 0. \quad (20.91)$$

Таково условие, вытекающее из предположения о линейной поляризации волны. Согласно (26.85),

$$\alpha m^\times + m^\times \alpha = \alpha_t m^\times - (\alpha m)^\times,$$

следовательно, равенство (20.91) принимает вид

$$md(\alpha m + m)^\times = 0. \quad (20.92)$$

Оно распадается на два условия:

$$md = 0 \quad (20.93)$$

и

$$(\alpha + 1)m = 0. \quad (20.94)$$

Пусть выполняется условие (20.93). Тогда из (20.79) получаем уравнение для  $\mathbf{H}$ :

$$(am^2 - 1 + b([\mathbf{m}c'] \cdot [\mathbf{m}c''] + [\mathbf{m}c''] \cdot [\mathbf{m}c'])) \mathbf{H} = 0, \quad (20.95)$$

полностью совпадающее с соответствующим уравнением (4.52), (4.53) для негиротропных кристаллов, которое, как известно, имеет в качестве решений линейно поляризованные волны. Что касается второго условия (20.94), то с учетом выражения (20.89) для  $\alpha$  оно принимает вид

$$(am^2 - 1)m = 0, \quad m^2 = 1/a. \quad (20.96)$$

Это условие следует отбросить, так как при его наличии уравнение (20.79) для  $\mathbf{H}$  принимает вид

$$(imd + b([\mathbf{mc}'] \cdot \mathbf{c}'' + [\mathbf{mc}''] \cdot \mathbf{c}')) [\mathbf{mH}] = 0. \quad (20.97)$$

Поскольку (см. (26.29))

$$[imd + b([\mathbf{mc}'] \cdot \mathbf{c}'' + [\mathbf{mc}''] \cdot \mathbf{c}')] = -imd[(md)^2 + b^2(m[c'c'']^2)],$$

то  $[\mathbf{mH}]$  может отличаться от нуля лишь при  $md = 0$ . Но из  $md = am^2 - 1 = 0$  и (20.97) следует

$$([\mathbf{mc}'] \cdot [\mathbf{mc}''] + [\mathbf{mc}''] \cdot [\mathbf{mc}']) \mathbf{H} = 0,$$

откуда снова получается  $\mathbf{H} \parallel [[\mathbf{mc}'] [\mathbf{mc}'']] \parallel \mathbf{m}$ , т. е. непригодное решение. Таким образом, мы доказали, что в немагнитных прозрачных собственно гиротропных кристаллах низших сингоний (как и в кристаллах средних сингоний) линейная поляризация однородных волн всегда имеет место для всех направлений фазовой нормали  $\mathbf{n}$ , лежащих в плоскости, перпендикулярной к вектору гирации  $\mathbf{d}$ . Направления поляризации обеих изонормальных волн в этом случае, согласно (20.95), находятся по тем же формулам (4.54), что и в случае негиротропных кристаллов:

$$\mathbf{H} \sim \frac{[\mathbf{nc}']}{\sqrt{[\mathbf{nc}']^2}} \pm \frac{[\mathbf{nc}'']}{\sqrt{[\mathbf{nc}'']^2}} \quad (\mathbf{nd} = 0). \quad (20.98)$$

Если не выполняется ни одно из условий  $\mathbf{n} = \mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{c}''$ ,  $\mathbf{nd} = 0$ , то волны имеют эллиптическую поляризацию, причем эллипсы поляризации изонормальных волн имеют одинаковую форму, расположены перпендикулярно друг к другу и обходятся в противоположных направлениях.

В общем случае все величины могут быть получены из соотношений (20.36), (20.37), дающих полное и точное решение для волн, распространяющихся в собственно гиротропных кристаллах. Эти соотношения достаточно сложны. Поэтому представляет интерес общий метод, позволяющий определить эллиптичность волн, распространяющихся в кристаллах, без нахождения векторов поля волны. Как показано в § 2, отно-

шение полуосей эллипса поляризации (например, для  $\mathbf{H}$ ) определяется следующим образом (2.54), (2.55):

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \quad \gamma = \frac{|\mathbf{H}^2|}{|\mathbf{H}|^2}. \quad (20.99)$$

Таким образом, следует найти параметр  $\gamma$ . Из соотношения (20.85) имеем

$$\overline{(1+\beta)}_t = C |\mathbf{H}|^2. \quad (20.100)$$

С другой стороны,

$$\overline{(1+\beta)} \overline{(1+\beta^*)} = \overline{(1+\beta)} \overline{(1+\bar{\beta})} = C^2 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H},$$

поэтому

$$[\overline{(1+\beta)} \overline{(1+\bar{\beta})}]_t = C^2 |\mathbf{H}|^2. \quad (20.101)$$

С помощью (20.100), (20.101) и (20.99) получаем

$$\gamma^2 = \frac{[\overline{(1+\beta)} \overline{(1+\bar{\beta}^*)}]_t}{[\overline{(1+\beta)}_t]^2}, \quad (20.102)$$

$$\beta = \mathbf{m}^\times (\alpha \mathbf{m}^\times - i \mathbf{m} \mathbf{d}), \quad \alpha = a + b(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}').$$

Используя для  $\overline{1+\beta}$  выражение (20.86) и обозначая  $\beta = \kappa + i \mathbf{a}^\times$  ( $\kappa = \bar{\kappa} = \kappa^*$ ), будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{1+\beta} &= \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_t - \alpha - \mathbf{a}^{\times 2} - i(\alpha \mathbf{a} + \mathbf{a}^\times), \\ \overline{(1+\beta)}_t &= 2(\mathbf{a}^2 - \bar{\alpha}_t) - \alpha_t. \end{aligned} \quad (20.103)$$

Подставляя эти выражения в (20.102), можем определить значение  $\gamma$ , а тем самым и эллиптичность волны в самом общем случае.

Заметим, что в работе [163] с помощью ковариантных методов, развитых в [4, 5], рассмотрен общий случай распространения волн в собственно гиротропных средах, характеризующихся тензорами  $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  вида (16.25).

## § 21. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ ГИРОТРОПИИ

Общие уравнения (15.12)–(15.15) для полей в гиротропных кристаллах, так же как и уравнение нормалей (15.27), достаточно сложны. Наряду с этим параметры, характеризующие оптическую активность (компоненты тензора гирации  $\alpha$ ), во всех известных случаях весьма малы. Поэтому естественно попытаться упростить основные соотношения теории, ограничившись членами не выше первого либо второго



порядка малости относительно  $\alpha$  [135]. Рассмотрим сначала приближенную теорию с точностью до первого порядка по  $\alpha$ . При этом мы сразу сталкиваемся со специфической ситуацией. Обычно в подобных случаях во всех уравнениях отбрасывают члены второго порядка и выше. Однако если проделать это в точном уравнении нормалей (15.27), то, поскольку оно содержит  $\alpha$  лишь во второй и четвертой степени, мы в результате придем к соотношению

$$\Delta_0 = |\varepsilon + m^{\times 2}| = m^2 m \varepsilon + (m^{\times 2} \varepsilon)_t + |\varepsilon| = 0, \quad (21.1)$$

которое характеризует негиротропные кристаллы (см. (4.7)). Но в таком случае вдоль оптической оси кристалла скорости будут совпадать и никакое вращение плоскости поляризации не будет иметь места, т. е. мы потеряем главный эффект, характерный для рассматриваемого явления.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим два квадратных уравнения [135]:

$$x^2 - ax + b \equiv (x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad (21.2)$$

$$x^2 - (a + a')x + (b + b') \equiv (x - x'_1)(x - x'_2) = 0. \quad (21.3)$$

Коэффициенты второго уравнения отличаются от коэффициентов первого уравнения на величины  $a'$ ,  $b'$ , имеющие второй порядок малости относительно некоторого параметра. Соответственно корни второго уравнения отличаются от корней первого уравнения на некоторые добавки

$$x'_1 = x_1 + \xi_1, \quad x'_2 = x_2 + \xi_2.$$

Учитывая соотношения между корнями и коэффициентами уравнений, получаем

$$\xi_1 + \xi_2 = a', \quad (21.4)$$

$$\xi_1 x_2 + \xi_2 x_1 + \xi_1 \xi_2 = b'. \quad (21.5)$$

Поскольку  $a'$  имеет второй порядок малости, то, согласно (21.4),  $\xi_1$  и  $\xi_2$  могут содержать слагаемые  $\zeta$  первого порядка малости лишь следующим образом:

$$\xi_1 = \zeta + \xi'_1, \quad \xi_2 = -\zeta + \xi'_2,$$

где  $\xi'_1$ ,  $\xi'_2$  — величины второго порядка малости. Подставляя эти выражения в (21.5), получаем

$$\zeta(x_2 - x_1) + \xi'_1 x_2 + \xi'_2 x_1 + (\zeta + \xi'_1)(-\zeta + \xi'_2) = b'.$$

Здесь  $b'$  и все остальные члены, кроме первого, являются малыми величинами второго и высших порядков. Поэтому  $\zeta$

может отличаться от нуля, лишь если  $x_2 = x_1$  либо разность  $x_2 - x_1$  сама имеет первый порядок малости.

Итак, если коэффициенты возмущенного квадратного уравнения (21.3) имеют добавки второго порядка малости, то его корни могут измениться на величины первого порядка малости лишь в том случае, когда корни невозмущенного уравнения (21.4) равны между собой либо их разность есть малая величина первого порядка. В применении к уравнению нормалей (15.27) это означает, что при учете гиротропии показатели преломления могут измениться на величины первого порядка по  $\alpha$  лишь в том случае, когда фазовая нормаль  $\mathbf{n}$  совпадает с оптической осью либо лежит в ее ближайшей окрестности. Для всех остальных направлений  $\mathbf{n}$  учет гиротропии изменит показатели преломления лишь на величины второго порядка по  $\alpha$ .

Проделаем последовательный расчет исходя из уравнений поля (15.12), (15.13). С точностью до членов первого порядка по  $\alpha$  включительно имеем (см. (15.8))

$$\rho^{-1} = 1 + i\alpha\mathbf{m}^\times, \quad \sigma^{-1} = 1 + i\tilde{\alpha}\mathbf{m}^\times. \quad (21.6)$$

Уравнение для  $\mathbf{E}$  (15.12) при этом принимает вид

$$\mathbf{m}^{\times 2}\mathbf{E} = -\varepsilon(1 - i\alpha\mathbf{m}^\times)\mathbf{E} - i\mathbf{m}^\times\tilde{\alpha}(\mathbf{m}^{\times 2}\mathbf{E}). \quad (21.7)$$

Это уравнение при заданной степени точности можно упростить путем итерации. Для этого подставляем выражение для  $\mathbf{m}^{\times 2}\mathbf{E}$  в последний член уравнения (21.7) и ограничиваемся членами первого порядка по  $\alpha$ . В результате получим уравнение

$$(\varepsilon + \mathbf{m}^{\times 2} + i\mathbf{g}^\times)\mathbf{E} = 0. \quad (21.8)$$

Здесь, согласно (26.88),

$$\mathbf{g}^\times = \varepsilon\alpha\mathbf{m}^\times + \mathbf{m}^\times\tilde{\alpha}\varepsilon, \quad \mathbf{g} = ((\varepsilon\alpha)_i - \tilde{\alpha}\varepsilon)\mathbf{m}. \quad (21.9)$$

Аналогично с учетом (21.6) уравнение (15.13) можно написать в виде

$$\mathbf{m}^\times\varepsilon^{-1}\mathbf{m}^\times\mathbf{H} = -(1 - i\tilde{\alpha}\mathbf{m}^\times)\mathbf{H} - i\mathbf{m}^\times\alpha(\mathbf{m}^\times\varepsilon^{-1}\mathbf{m}^\times\mathbf{H}). \quad (21.10)$$

Итерируя и ограничиваясь членами первого порядка по  $\alpha$ , получаем

$$(1 + \mathbf{m}^\times\varepsilon^{-1}\mathbf{m}^\times + i\mathbf{h}^\times)\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{h} = -(\alpha_i - \alpha)\mathbf{m}. \quad (21.11)$$

Условия для существования нетривиальных решений уравнений (21.8), (21.11) имеют вид (см. § 26)

$$\Delta_\varepsilon = |\varepsilon + \mathbf{m}^2 + i\mathbf{g}^\times| = \Delta_0 - \mathbf{g}\varepsilon\mathbf{g} + [\mathbf{m}, \tilde{\alpha}\varepsilon\mathbf{m}]^2 = 0, \quad (21.12)$$

$$\Delta_m = |\varepsilon| |1 + m^\times \varepsilon^{-1} m^\times + i h^\times| = \Delta_0 - h^2 |\varepsilon| + \\ + [m, \alpha m] \bar{\varepsilon} [m, \alpha m] = 0. \quad (21.13)$$

Нетрудно проверить, что в общем случае эти два уравнения *не совпадают*. Более того, можно убедиться путем сравнения (21.12) или (21.13) с точным уравнением (15.27), что ни одно из этих уравнений не совпадает с точным, если в последнем ограничиться членами минимального (второго) порядка малости по  $\alpha$  (только такие члены, связанные с гиротропией, входят в (21.12), (21.13)). Даже в частном случае изотропной среды или кубического кристалла (хотя при этом  $\Delta_e = \Delta_m$ ) мы получим из (21.12), (21.13) уравнение

$$m^4 - 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon\alpha^2)m^2 + \varepsilon^2 = 0,$$

которое не совпадает с точным уравнением (15.29) в членах, пропорциональных  $\alpha^2$ , т. е. членах низшего порядка по  $\alpha$ , входящих в уравнения нормалей.

Если применить уравнения (21.12), (21.13) к планальным кристаллам средних сингоний, т. е. положить  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon' \text{с.с.}$ ,  $\alpha = \alpha_0 \text{с}^\times$  (см. § 14), то получим соответственно (ср. (15.34))

$$(m^2 - \varepsilon_0)(m \varepsilon m - \varepsilon_0 \varepsilon_e + \varepsilon_e^2 \alpha_0^2 [m \text{с}]^2) = 0, \quad (21.14)$$

$$(m^2 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \alpha_0^2 [m \text{с}]^2)(m \varepsilon m - \varepsilon_0 \varepsilon_e) = 0. \quad (21.15)$$

Согласно первому уравнению, скорость обыкновенной волны не зависит от наличия активности, а скорость необыкновенной зависит от нее. Второе уравнение для того же кристалла приводит к прямо противоположным выводам. Эти результаты указывают на противоречивость и несамосогласованность теории оптической активности кристаллов, построенной на основе приближенных уравнений (21.8), (21.11).

Причина противоречия, очевидно, лежит в том, что первое приближение по  $\alpha$  для уравнений (15.12), (15.15) недостаточно, поскольку в основное уравнение нормалей входят члены не ниже второго порядка малости по  $\alpha$ . Поэтому рассмотрим уравнения (15.12), (15.13) во втором приближении. При этом

$$\rho^{-1} = 1 + i \alpha m^\times - (\alpha m^\times)^2, \quad \sigma^{-1} = 1 + i \tilde{\alpha} m^\times - (\tilde{\alpha} m^\times)^2.$$

Подставляя это в (15.12), (15.13) и проводя такую же итерацию, как прежде, получаем, сохраняя члены до второго порядка по  $\alpha$  включительно:

$$(\varepsilon + m^\times (1 - \tilde{\alpha} \varepsilon) m^\times + i g^\times) \mathbf{E} = 0, \quad (21.16)$$

$$(1 + m^\times (\varepsilon^{-1} - \alpha \tilde{\alpha}) m^\times + i h^\times) \mathbf{H} = 0. \quad (21.17)$$

Вычисление детерминанта уравнения (21.16) с точностью до членов второго порядка по  $\alpha$  дает

$$\Delta_e = \Delta_0 - m \tilde{\alpha} \alpha \epsilon m + m \epsilon m ((\epsilon + m^{\times 2}) \tilde{\alpha} \epsilon \alpha)_t - \\ - g (\epsilon + m^{\times 2}) g = 0. \quad (21.18)$$

С помощью методов, изложенных в § 26, можно показать (используя представление  $\alpha = \kappa + \mathbf{a}^{\times}$ ), что  $m \epsilon ((\tilde{\alpha} \epsilon \alpha)_t - \tilde{\alpha} \epsilon \alpha)_t m - g \epsilon g \equiv 2 |\epsilon| (2 (\alpha m)^2 - m \alpha m)$ , откуда вытекает, что левая часть (21.18) в точности совпадает с (15.27), если там отбросить член  $|\epsilon| (m \alpha m)^2$ , имеющий четвертый порядок малости по  $\alpha$ . Детерминант уравнения (21.17) после умножения на  $|\epsilon|$  и отбрасывания членов четвертого порядка равен

$$\Delta_m = \Delta_0 - |\epsilon| (m^{\times 2} \alpha \tilde{\alpha})_t + m^2 (m^{\times} \bar{\epsilon} m^{\times} \alpha \tilde{\alpha})_t - \\ - h^2 |\epsilon| + [m h] \bar{\epsilon} [m h] = 0. \quad (21.19)$$

Непосредственная проверка показывает, что это уравнение совпадает с (21.18).

Таким образом, уравнения (21.18), (21.19) совпадают как между собой, так и с точным уравнением нормалей (15.27), если в нем отбросить член  $|\epsilon| (m \alpha m)^2$  высшего порядка малости. Следовательно, на основе уравнений (21.16), (21.17) можно строить последовательную и непротиворечивую приближенную теорию оптической активности кристаллов.

Итак, уравнения (21.16) и (21.17), которые мы запишем теперь в виде

$$(\epsilon^0 + m^{\times} (1 - \tilde{\alpha}^0 \epsilon^0 \alpha^0) m^{\times} + i n g^{\times}) \mathbf{E} = 0, \quad (21.20)$$

$$-g = ((\epsilon^0 \alpha^0)_t - \tilde{\alpha}^0 \epsilon^0) \mathbf{n},$$

$$(1 + m^{\times} (\epsilon^{0-1} - \alpha^0 \tilde{\alpha}^0) m^{\times} + i n h^{\times}) \mathbf{H} = 0, \quad (21.21)$$

$$-h = (\alpha_i^0 - \alpha^0) \mathbf{n},$$

являются совместными с точностью до членов второго порядка по  $\alpha$ , входящих в уравнение нормалей. Поэтому мы положим их в основу дальнейшего рассмотрения, причем в виду их равносильности ограничимся уравнением (21.21).

Введем *эффективные* тензоры диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и гирации  $\alpha$  с помощью соотношений [135]

$$\epsilon^{-1} = \epsilon^{0-1} - \alpha^0 \tilde{\alpha}^0, \quad -\alpha = \alpha_i^0 - \alpha^0, \quad (21.22)$$

$$\epsilon = \epsilon^0 (1 + \alpha^0 \tilde{\alpha}^0 \epsilon^0).$$

С принятой нами степенью точности эффективные тензоры  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и истинные тензоры  $\varepsilon^0$ ,  $\alpha^0$  взаимно однозначно выражаются друг через друга:

$$-\alpha^0 = \frac{1}{2} \alpha_t - \alpha, \quad \varepsilon^{0-1} = \varepsilon^{-1} + \left( \frac{1}{2} \alpha_t - \alpha \right) \left( \frac{1}{2} \alpha_t - \tilde{\alpha} \right), \quad (21.23)$$

$$\varepsilon^0 = \varepsilon \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \alpha_t - \alpha \right) \left( \frac{1}{2} \alpha_t - \tilde{\alpha} \right) \varepsilon \right].$$

При использовании эффективных тензоров  $\varepsilon$  и  $\alpha$  уравнение (21.21) принимает вид

$$(1 + n^2 \mathbf{n} \times \varepsilon^{-1} \mathbf{n} \times + i n \mathbf{h} \times) \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{h} = \alpha \mathbf{n}. \quad (21.24)$$

Это соотношение можно рассматривать как основное уравнение всей оптики гиротропных кристаллов. Найдя отсюда  $n$  и  $\mathbf{H}$ , мы без труда определим с помощью (15.6) все остальные величины:

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{mH}], \quad \mathbf{B} = (1 - i \tilde{\alpha}^0 \mathbf{m} \times)^{-1} \mathbf{H}, \quad (21.25)$$

$$\mathbf{E} = (1 - i \alpha^0 \mathbf{m} \times)^{-1} \varepsilon^{0-1} \mathbf{D}.$$

Принятая в (21.24) точность до второго порядка по  $\alpha$  заведомо достаточна для учета любых эффектов оптической активности, доступных экспериментальной проверке. Заметим, что после введения эффективных тензоров  $\varepsilon$  и  $\alpha$  уравнение (21.24) по форме полностью совпадает с уравнением (21.11), справедливым в первом порядке по  $\alpha$ .

Весьма существенно то, что эффективные тензоры  $\varepsilon$  и  $\alpha$  во всех кристаллах имеют такую же структуру, как и истинные тензоры  $\varepsilon^0$  и  $\alpha^0$ . В оптически изотропных средах и те и другие будут скалярами, в кристаллах средних сингоний (см. § 14) тензоры  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^0$  имеют одноосную структуру:  $a + b \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ , а в кристаллах низших сингоний — двуосную структуру:  $a + b(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}')$ . Поэтому, а также в силу соотношений (21.22), (21.23) совершенно безразлично, что считать заданным: истинные тензоры  $\varepsilon^0$ ,  $\alpha^0$  или эффективные  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ . В любой момент можно перейти от одних к другим. При этом в кристаллах средних сингоний эффективные тензоры будут отличаться от истинных лишь малыми добавками к скалярам  $a$  и  $b$ . В кристаллах низших сингоний, кроме того,  $\varepsilon$  может отличаться от  $\varepsilon^0$  незначительным поворотом векторов  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$  (ср. [137]). Поскольку в основное уравнение (21.24) входят  $\varepsilon$  и  $\alpha$ , то мы обычно будем пользоваться эффективными тензорами. Таким образом, при решении прямой задачи — определении поля волны в известном кристалле мы будем считать заданными  $\varepsilon$  и  $\alpha$ . При решении обратной задачи — определении па-

раметров гиротропного кристалла по свойствам распространяющихся в нем волн следует искать  $\varepsilon$  и  $\alpha$ , после чего истинные тензоры могут быть определены с помощью соотношений (21.23).

Хотя уравнение (21.24) более сложно, чем соответствующее уравнение для негиротропных сред (4.4)  $(1 + \mathbf{m}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{m}^\times) \times \mathbf{H} = 0$ , однако имеется и некоторое упрощающее обстоятельство. Суть его сводится к тому, что в уравнение (21.24) явно входят два вектора  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{h}$ , органически связанных с формулировкой задачи. Это позволяет использовать естественный базис, существенно упрощающий рассмотрение. Введем обозначения

$$[\mathbf{nh}] = [\mathbf{n}, \alpha \mathbf{n}] = \beta n_1, \quad \beta = |[\mathbf{nh}]|, \quad [\mathbf{nn}_1] = n_2, \quad (21.26)$$

$$n^2 = n_1^2 = n_2^2 = 1, \quad \mathbf{nn}_1 = \mathbf{nn}_2 = n_1 n_2 = n_1 \mathbf{h} = 0, \quad n_2 \mathbf{h} = -\beta.$$

Умножая уравнение (21.24) на  $\mathbf{n}$  и на  $\mathbf{h}$ , имеем

$$(\mathbf{n} + i n \beta \mathbf{n}_1) \mathbf{H} = 0, \quad (\mathbf{h} + n^2 \beta [\mathbf{n}, \varepsilon^{-1} \mathbf{n}_1]) \mathbf{H} = 0.$$

Поскольку вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен к двум векторам, то он пропорционален их векторному произведению:

$$\mathbf{H} = C [\mathbf{n} + i n \beta \mathbf{n}_1, \mathbf{h} + n^2 \beta [\mathbf{n}, \varepsilon^{-1} \mathbf{n}_1]] = C \beta (\tau + i \nu) \mathbf{n}, \quad (21.27)$$

где

$$\tau = 1 + n^2 \mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1}, \quad \nu = n(n^2 \beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 \varepsilon^{-1} - \mathbf{h}^\times). \quad (21.28)$$

Таким образом, мы получили, по существу, общее решение уравнения (21.24) в ковариантном виде. Однако в него входит неизвестный показатель преломления  $n$ , который подлежит определению из уравнения нормалей. Заметим, кроме того, что выражение (21.27) теряет смысл, когда  $[\mathbf{nh}] = 0$ ,  $\beta = 0$ . Поскольку  $\mathbf{h} = \alpha \mathbf{n}$  (21.24), то при этом  $\mathbf{n}$  будет собственным вектором тензора гирации:  $\alpha \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$ . Этот случай, являясь частным и более простым, требует, однако, особого рассмотрения.

Вначале будем считать  $\beta \neq 0$  и подставим (21.27) в (21.24). Умножая полученное уравнение на  $\mathbf{n}_1$ , будем иметь после некоторых преобразований с учетом (21.26)

$$1 - n^2 (\mathbf{n}_1 \varepsilon^{-1} \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \varepsilon^{-1} \mathbf{n}_2 + \mathbf{h}^2) + \\ + n^4 (\mathbf{n}_2 \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}_1 + \beta^2 \mathbf{n}_1 \varepsilon^{-1} \mathbf{n}_1) = 0. \quad (21.29)$$

С помощью соотношений § 26 можно показать, что

$$\mathbf{n}_2 \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}_1 = \varepsilon n \mathbf{n} / |\varepsilon|, \quad \mathbf{n}_1 \varepsilon^{-1} \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \varepsilon^{-1} \mathbf{n}_2 = n (\varepsilon_l^{-1} - \varepsilon^{-1}) \mathbf{n}.$$

В результате равенство (21.29) после умножения на  $|\varepsilon|$  принимает вид

$$n^4(\mathbf{n}\varepsilon\mathbf{n} + \beta^2\mathbf{n}_1\bar{\varepsilon}\mathbf{n}_1) - n^2(\bar{\varepsilon}_t - \mathbf{n}\bar{\varepsilon}\mathbf{n} + \mathbf{h}^2|\varepsilon|) + |\varepsilon| = 0. \quad (21.30)$$

Это есть уравнение нормалей, определяющее показатели преломления  $n$ . Легко убедиться, что уравнение (21.30) совпадает с равенством  $|\varepsilon| + \mathbf{m}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{m}^\times + i\mathbf{n}\mathbf{h}^\times = 0$ , т. е. с условием наличия нетривиальных решений основного уравнения (21.24). Если умножить (21.30) на  $|\varepsilon|/|\varepsilon^0| = 1 - (\alpha^0 \bar{\alpha}^0 \varepsilon^0)_t$ , то, ограничиваясь членами не выше второго порядка по  $\alpha^0$ , получим в точности уравнение нормалей (21.18). При этом нужно помнить, что поскольку наш расчет справедлив до членов второго порядка, то следует брать (см. (21.22))

$$\beta^2\mathbf{n}_1\bar{\varepsilon}\mathbf{n}_1 = \beta^2\mathbf{n}_1\bar{\varepsilon}^0\mathbf{n}_1, \quad |\varepsilon| = |\varepsilon^0|(1 + (\alpha^0 \bar{\alpha}^0 \varepsilon^0)_t), \quad (21.31)$$

$$\bar{\varepsilon} = (1 + (\alpha^0 \bar{\alpha}^0 \varepsilon^0)_t) \bar{\varepsilon}^0 - |\varepsilon^0| \alpha^0 \bar{\alpha}^0, \quad \mathbf{h}^2|\varepsilon| = \mathbf{h}^2|\varepsilon^0|.$$

Рассмотрим теперь частный случай

$$[\mathbf{n}\mathbf{h}] = 0, \quad \mathbf{h} = \alpha\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}. \quad (21.32)$$

При этом из (21.24) следует  $\mathbf{n}\mathbf{H} = 0$ , т. е. для направлений фазовой нормали  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющих условию (21.32), вектор  $\mathbf{H}$  является *трансверсальным*. Поэтому его можно представить в виде линейной комбинации круговых векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}^*$

$$\mathbf{H} = \xi_1\mathbf{e} + \xi_2\mathbf{e}^*, \quad (21.33)$$

$$[\mathbf{n}\mathbf{e}] = i\varepsilon, \quad [\mathbf{e}\mathbf{e}^*] = i\mathbf{n}, \quad \mathbf{e}^2 = 0, \quad |\mathbf{e}|^2 = 1. \quad (21.34)$$

Подставив (21.33), (21.34) в (21.24), получим

$$\xi_1(1 - n\lambda + i\mathbf{n}^\times\mathbf{n}^\times\varepsilon^{-1})\mathbf{e} + \xi_2(1 + n\lambda - i\mathbf{n}^\times\mathbf{n}^\times\varepsilon^{-1})\mathbf{e}^* = 0.$$

Умножив это равенство на  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}^*$ , найдем

$$n^2\mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}\xi_1 + (1 + n\lambda - n^2\mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}^*)\xi_2 = 0, \quad (21.35)$$

$$(1 - n\lambda - n^2\mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}^*)\xi_1 + n^2\mathbf{e}^*\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}^*\xi_2 = 0.$$

Таким образом, мы будем иметь отличное от нуля  $\mathbf{H}$  (21.33) лишь при условии

$$\begin{aligned} n^4\mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^*\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}^* - (1 - n^2\mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}^*)^2 + n^2\lambda^2 = \\ = -[n^4\bar{\varepsilon}^{-1}\mathbf{n} - n^2(2\mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}^* + \lambda^2) + 1] = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в случае (21.32) уравнение нормалей (21.30) заметно упрощается и принимает вид

$$\Delta = n^4\mathbf{n}\varepsilon\mathbf{n} - n^2(2\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}^* + \lambda^2|\varepsilon|) + |\varepsilon| = 0. \quad (21.36)$$

Из (21.35) находим

$$\xi_1 = \frac{1}{\mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}} \left( \mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e}^* - \frac{1+n\lambda}{n^2} \right) \xi_2 \quad (21.37)$$

и с помощью (21.33) определяем

$$\mathbf{H} = C \left[ \mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^* + \mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}) - \frac{1+n\lambda}{n^2} \mathbf{e} \right],$$

или, поскольку  $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^* + \mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e} = -\mathbf{n}\times^2$ ,

$$\mathbf{H} = C \left( \frac{1+n\lambda}{n^2} + \mathbf{n}\times^2\mathbf{e}^{-1} \right) \mathbf{e}. \quad (21.38)$$

Если воспользоваться вторым уравнением (21.35), то получим аналогично

$$\mathbf{H} = C \left( \frac{1-n\lambda}{n^2} + \mathbf{n}\times^2\mathbf{e}^{-1} \right) \mathbf{e}^*. \quad (21.39)$$

С помощью (21.27) и (21.39) мы можем выяснить вопрос об условиях линейной поляризации вектора  $\mathbf{H}$ . Для этого необходимо и достаточно (см. § 2), чтобы  $[\mathbf{H}\mathbf{H}^*] = [\tau\mathbf{n}_1, \nu\mathbf{n}_1] = 0$  или, согласно (21.28),

$$\begin{aligned} (1 - n^2\mathbf{n}_1\mathbf{e}^{-1}\mathbf{n}_1) \mathbf{h} - \beta n^2\mathbf{n}_2\mathbf{e}^{-1}\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_1 + \\ + \beta n^2\mathbf{n}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 + n^2[\mathbf{n}, \mathbf{e}^{-1}\mathbf{n}]) = 0. \end{aligned} \quad (21.40)$$

Умножая это равенство на  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ , получаем скалярные соотношения, которым должен удовлетворять вектор фазовой нормали для того, чтобы ему соответствовала линейно поляризованная волна.

В случае (21.32) условие линейной поляризации гласит  $|\xi_1|^2 = |\xi_2|^2$ , или (см. (21.35)) при  $\lambda = \lambda^*$

$$\lambda\mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e} = 0,$$

откуда следует одно из условий

$$\lambda = 0, \quad \mathbf{e}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{e} = 0. \quad (21.41)$$

Условие круговой поляризации  $\mathbf{H}^2 = 0$  в общем случае (21.27) приводит к соотношениям

$$\mathbf{n}_1 \tilde{\tau}\tau\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \tilde{\nu}\nu\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}_1 \tilde{\tau}\nu\mathbf{n}_1 = 0.$$

В раскрытом виде они гласят:

$$\begin{aligned} n^2 [(\mathbf{n}\mathbf{h})^2 + \beta^2 (1 + n^2\mathbf{n}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{n}_1)^2] = \\ = 1 - 2n^2\mathbf{n}_1\mathbf{e}^{-1}\mathbf{n}_1 + n^4 [\mathbf{n}, \mathbf{e}^{-1}\mathbf{n}_1]^2, \\ \beta\mathbf{n}\mathbf{e}^{-1}\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1\mathbf{e}^{-1}[\mathbf{h}\mathbf{n}_1]. \end{aligned} \quad (21.42)$$



В случае (21.32) круговая поляризация возможна при условиях  $\xi_1=0$ , или  $\xi_2=0$ , или, согласно (21.35),

$$n^2 \epsilon \epsilon^{-1} \epsilon^* = 1 \pm n\lambda.$$

Очевидно, изложенный здесь общий метод может быть применен для исследования свойств плоских волн, распространяющихся в естественно гиротропных кристаллах любых классов симметрии.

## § 22. ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В ЕСТЕСТВЕННО ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В предыдущем параграфе была рассмотрена приближенная теория плоских волн в естественно гиротропных средах, основанная на уравнениях (19.1)—(19.3):

$$\mathbf{D} = \epsilon' (1 - i\alpha' m^\times) \mathbf{E} = -[\mathbf{mH}],$$

$$\mathbf{B} = \mu' (1 - i\tilde{\alpha}' m^\times) \mathbf{H} = [\mathbf{mE}] \quad (22.1)$$

при  $\mu' = 1$ . Как было отмечено в § 18, возможен другой подход к этой теории, основанный на уравнениях (18.25), (18.26):

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + i\alpha \mathbf{H} = -[\mathbf{mH}], \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - i\tilde{\alpha} \mathbf{E} = [\mathbf{mE}]. \quad (22.2)$$

Согласно § 18, обе эти системы эквивалентны в том смысле, что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  в них совпадают, а тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  для системы (22.2) однозначно выражаются через аналогичные тензоры системы (22.1) с помощью соотношений (18.24). При этом относительное различие между теми и другими тензорами имеет второй порядок величины по тензору гирации  $\alpha$ .

Хотя системы (22.1) и (22.2) в принципе эквивалентны, однако вследствие переопределения тензоров (18.24) их свойства не являются тождественными. В частности, как показано в § 19, для системы (22.2) и даже более общей системы с уравнениями связи (18.11) можно сформулировать принцип фазолучевой симметрии, в то время как для системы (22.1) он несправедлив (или не полностью справедлив (см. § 19)).

В этом параграфе мы рассмотрим свойства плоских волн в гиротропных средах на основании уравнений (22.2), в которых для упрощения положим  $\mu = 1$ . Напомним, что, согласно § 5, 15, это условие не следует рассматривать как ограничение, поскольку  $\mu$  можно исключить из системы путем надлежащего переопределения величин. Исключая из (22.2)  $\mathbf{H}$  или  $\mathbf{E}$  (при  $\mu = 1$ ), получим уравнения (18.28), (18.29)

$$(\epsilon + (m^\times + i\alpha)(m^\times + i\tilde{\alpha})) \mathbf{E} = 0, \quad (22.3)$$

$$(1 + (m^\times + i\tilde{\alpha}) \epsilon^{-1} (m^\times + i\alpha)) \mathbf{H} = 0. \quad (22.4)$$

Как отмечалось в § 18, условия наличия ненулевых решений у обоих этих уравнений совпадают и приводят к уравнению нормалей (18.36).

Уравнения (22.3), (22.4) можно написать в виде

$$(\varepsilon - \alpha\tilde{\alpha} + \mathbf{m}^{\times 2} + i(\alpha\mathbf{m}^{\times} + \mathbf{m}^{\times}\tilde{\alpha}))\mathbf{E} = 0, \quad (22.5)$$

$$(1 - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha + \mathbf{m}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{m}^{\times} + i(\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\mathbf{m}^{\times} + \mathbf{m}^{\times}\varepsilon^{-1}\alpha))\mathbf{H} = 0, \quad (22.6)$$

или, если учесть соотношение (26.88), в виде

$$\chi_e\mathbf{E} = (\varepsilon^0 + \mathbf{m}^{\times 2} + i(\beta\mathbf{m})^{\times})\mathbf{E} = 0, \quad (22.7)$$

$$\varepsilon^0 = \varepsilon - \alpha\tilde{\alpha}, \quad \beta = \alpha_t - \tilde{\alpha}, \quad (22.8)$$

$$\chi_m\mathbf{H} = (1 - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha + \mathbf{m}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{m}^{\times} + i(\gamma\mathbf{m})^{\times})\mathbf{H} = 0, \quad (22.9)$$

$$\gamma = (\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1})_t - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}. \quad (22.9a)$$

Первое из этих уравнений по внешнему виду совпадает с уравнением (21.8), полученным в предыдущем параграфе. Однако в отличие от (21.8) уравнение (22.7) является *точным*. Если в приближенных уравнениях (21.20), (21.21) более простым являлось уравнение для магнитного поля, то здесь, наоборот, уравнение (22.8) для электрического поля является более простым, чем уравнение (22.9) для магнитного поля.

Тензоры  $\chi_e$ ,  $\chi_m$ , стоящие при  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в уравнениях (22.7), (22.9), содержат члены второго порядка по тензору гирации  $\alpha$ . В (22.7) это член  $\alpha\tilde{\alpha}$ , а в (22.9) — член  $\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha$ . Как отмечено в § 18, детерминанты этих тензоров совпадают. Возникает вопрос, будут ли совпадать эти детерминанты, если пренебречь членами второго порядка в самих тензорах. Как мы видели в предыдущем параграфе, в теории, основанной на уравнениях (22.1), это не имеет места, так как в пренебрежении членами второго порядка уравнения (21.12) и (21.13) не совпадают. Хотя системы (22.1) и (22.2) в принципе эквивалентны, однако отсюда отнюдь не следует автоматически, что аналогичное совпадение не должно иметь места и в теории, основанной на уравнениях (22.2). Дело в том, что тензоры, входящие в (22.1) и (22.2), отличаются именно на величины второго порядка малости (см. 18.24) и без учета этого различия ничего утверждать заранее нельзя.

Точное уравнение нормалей, вытекающее из (22.7), (22.9), имеет вид

$$\Delta = |\varepsilon^0 + \mathbf{m}^{\times 2} + i(\beta\mathbf{m})^{\times}| = \mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{m}\varepsilon^0\mathbf{m} + + (\varepsilon^0\mathbf{m}^{\times 2})_t + |\varepsilon^0| - \mathbf{m}\beta\tilde{\varepsilon}^0\beta\mathbf{m} + [\mathbf{m}, \beta\mathbf{m}]^2 = 0. \quad (22.10)$$

В то же время уравнения, получающиеся при опускании в тензорах  $\chi_e$ ,  $\chi_m$  членов  $\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha$ , имеют вид

$$\Delta_e = m^2 \cdot m \varepsilon m + (\bar{\varepsilon} m \times^2)_t + |\varepsilon| - m \tilde{\beta} \varepsilon \beta m + [m, \beta m]^2 = 0, \quad (22.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_m = m^2 \cdot m \varepsilon m + (\bar{\varepsilon} m \times^2)_t + (1 - m \tilde{\gamma} \gamma m) |\varepsilon| + \\ + [m, \gamma m] \bar{\varepsilon} [m, \gamma m] = 0. \end{aligned} \quad (22.12)$$

Если мы имеем дело с изотропно-гиротропной средой, в которой  $\varepsilon = \varepsilon_0$  и  $\alpha = \alpha_0$  являются скалярами, то, как легко убедиться,

$$\chi_e = \varepsilon_0 \chi_m = \varepsilon_0 - \alpha_0^2 + m \times^2 + 2i \alpha_0 m \times \quad (22.13)$$

и соответственно, отбрасывая  $\alpha_0^2$ , получаем

$$|\chi_e| = \varepsilon_0^3 |\chi_m| = \varepsilon_0 [m^4 - 2(\varepsilon_0 + 2\alpha_0^2) m^2 + \varepsilon_0^2] = 0. \quad (22.14)$$

Таким образом, в данном простейшем случае, как было и в § 21, оба уравнения нормалей совпадают. В то же время точное уравнение (22.10) в этом случае дает

$$\Delta = (\varepsilon_0 - \alpha_0^2) [m^4 - 2m^2(\varepsilon_0 + \alpha_0^2) + (\varepsilon_0 - \alpha_0^2)^2] = 0. \quad (22.15)$$

Следовательно, опять-таки в соответствии с § 21 уравнение (22.14) не совпадает с точным уравнением, если в последнем пренебречь членами порядка малости выше второго.

Однако случай изотропно-гиротропной среды, являясь предельно простым, не может служить основой для выводов общего характера. Обратимся к следующему по простоте случаю планальных кристаллов средних сингоний, когда (ср. (15.33))

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'' c \cdot c, \quad \varepsilon'' = \varepsilon_e - \varepsilon_o, \quad \alpha = \alpha_0 c \times. \quad (22.16)$$

Точное уравнение нормалей (22.10) при этом принимает вид

$$(m^2 - \varepsilon_0 + \alpha_0^2)(m \varepsilon m - \varepsilon_e(\varepsilon_0 - \alpha_0^2)) = 0. \quad (22.17)$$

В то же время для приближенных уравнений (22.11), (22.12) получаем

$$\Delta_e = (m^2 - \varepsilon_0)(m \varepsilon m - \varepsilon_o \varepsilon_e + \alpha_0^2 [m c]^2), \quad (22.18)$$

$$\Delta_m = (m^2 - \varepsilon_0 + \frac{\alpha_0^2}{\varepsilon_0} [m c]^2)(m \varepsilon m - \varepsilon_o \varepsilon_e). \quad (22.19)$$

Сравнивая последние два уравнения с (21.14), (21.15), видим полную аналогию. Таким образом, и при использовании в качестве основных уравнений (22.2) мы приходим к выводу о недопустимости отбрасывания членов второго порядка  $\alpha\alpha$  и  $\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha$  в исходных уравнениях (22.7), (22.9) для электриче-

ского и магнитного полей, так как это приводит к тому же противоречию, которое было отмечено в § 21.

Заметим, что уравнение (22.17) отличается от соответствующего уравнения нормалей для негиротропных немагнитных кристаллов средних сингоний (см. (4.71), (4.72))

$$(\mathbf{m} - \varepsilon_0)(\mathbf{m}\varepsilon\mathbf{m} - \varepsilon_0\varepsilon_e) = 0$$

лишь тем, что в членах, не содержащих  $\mathbf{m}$ , произведена замена  $\varepsilon_0$  на  $\varepsilon_0 - \alpha_0^2$ . Однако в  $\mathbf{m}\varepsilon\mathbf{m} = \varepsilon_0\mathbf{m}^2 + \varepsilon''(\mathbf{m}\mathbf{c})^2$  (см. (22.16)) такая замена не имеет места. Если не считать  $\mu = 1$ , то вместо уравнений (22.3), (22.4) будем иметь

$$(\varepsilon + (\mathbf{m}^\times + i\alpha)\mu^{-1}(\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha}))\mathbf{E} = 0, \quad (22.3a)$$

$$(\mu + (\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha})\varepsilon^{-1}(\mathbf{m}^\times + i\alpha))\mathbf{H} = 0.$$

Соответствующее уравнение нормалей принимает вид (ср. (22.10))

$$\begin{aligned} & [(\overline{\mathbf{m}^\times + i\alpha})\varepsilon(\overline{\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha}})\mu]_i + [\bar{\varepsilon}(\mathbf{m}^\times + i\alpha)\bar{\mu}(\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha})]_i + \\ & + |\varepsilon\mu| - ((\mathbf{m}^\times \bar{\alpha})_i)^2 - (\mathbf{m}\alpha\mathbf{m})^2 = 0. \end{aligned} \quad (22.10a)$$

Для планальных кристаллов (22.16) это уравнение распадается:

$$[\mathbf{m}\mu\mathbf{m} - \mu_e(\varepsilon_0\mu_0 - \alpha_0^2)][\mathbf{m}\varepsilon\mathbf{m} - \varepsilon_e(\varepsilon_0\mu_0 - \alpha_0^2)] = 0. \quad (22.17a)$$

Оно отличается от соответствующего уравнения для магнитных негиротропных кристаллов средних сингоний добавочными членами  $\mu_e\alpha_0^2$  и  $\varepsilon_e\alpha_0^2$ . Уравнение (22.17a) отличается также от точного уравнения (15.40) для естественно гиротропных сред тем, что добавочные члены в обеих скобках не зависят от  $\mathbf{m}$ . Причина этого расхождения заключается в перепределении тензоров (18.24) и будет подробнее проанализирована ниже.

В § 21 была построена система приближенных уравнений (21.16), (21.17), верных до второго порядка по  $\alpha$ , свободная от противоречий, с которыми сталкивается система (22.18), (22.19). Однако теперь нам вообще нет необходимости прибегать к приближенной системе, так как точное уравнение (22.7) не является более сложным, чем уравнения (21.16), (21.17). Найдем с его помощью точные выражения для векторов электромагнитного поля плоской волны в случае планальных кристаллов средних сингоний. При этом аналогично § 21 мы будем пользоваться эффективными тензорами диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^0$  и гирации  $\beta$  (22.8), из которых истинные тензоры  $\varepsilon$  и  $\alpha$  однозначно находятся без всякого труда:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \left( \frac{1}{2} \beta_t - \tilde{\beta} \right) \left( \frac{1}{2} \beta_t - \beta \right), \quad \alpha = \frac{1}{2} \beta_t - \tilde{\beta}. \quad (22.20)$$

Подчеркнем, что, как было показано в § 21, эффективные тензоры  $\epsilon^0$  и  $\beta$  имеют ту же структуру, что и истинные тензоры, определяемые соотношениями § 14. Таким образом, для планальных кристаллов средних сингоний имеем аналогично (22.16)

$$\epsilon^0 = \epsilon_o + \epsilon'' \text{с.с.}, \quad \beta = \beta_o \text{с}^\times. \quad (22.21)$$

В этих обозначениях уравнение нормалей (22.10) имеет вид

$$\Delta = (m^2 - \epsilon_o)(m\epsilon^0 m - \epsilon_o \epsilon_e + \beta_o^2 [\text{мс}]^2) = 0. \quad (22.22)$$

Легко убедиться, что при замене (22.8)  $\epsilon_o \rightarrow \epsilon_o - \alpha_o^2$ ,  $\epsilon'' \rightarrow \epsilon'' + \alpha_o^2$ ,  $\beta_o \rightarrow \alpha_o$  это уравнение переходит в (22.17).

С учетом (22.21) уравнение (22.7) принимает вид

$$(\epsilon_o + \epsilon'' \text{с.с.} + m^{\times 2} + i\beta_o [\text{см}]^\times) \mathbf{E} = 0. \quad (22.23)$$

Поступая, как в § 15, т. е. умножая это уравнение на  $m$ ,  $c$  и  $[\text{мс}]$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon_o - i\beta_o \text{мс}) m\mathbf{E} + (\epsilon'' \text{мс} + i\beta_o m^2) c\mathbf{E} &= 0, \\ (\text{мс} - i\beta_o) m\mathbf{E} + (\epsilon_e - m^2 + i\beta_o \text{мс}) c\mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22.24)$$

$$(\epsilon_o - m^2)[\text{мс}] \mathbf{E} = 0. \quad (22.25)$$

Повторяя рассуждения § 15, находим, что для обыкновенной волны

$$m^2 - \epsilon_o = 0, \quad \mathbf{E}_o = C [\text{мс}] \quad (22.26)$$

и для необыкновенной волны

$$m\epsilon^0 m - \epsilon_o \epsilon_e + \beta_o [\text{мс}]^2 = 0, \quad (22.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e &= C' [\epsilon^0 m + i\beta_o [m [\text{см}]], [\text{мс}]] = \\ &= C' (\epsilon_o [m [\text{мс}]] - i\beta_o [\text{мс}]^2 \cdot m). \end{aligned} \quad (22.28)$$

Для того чтобы найти остальные векторы поля волны, используем уравнения (22.2), в которые соответственно (22.8), (22.20) следует внести изменения

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + i \left( \beta - \frac{1}{2} \beta_t \right) \mathbf{E} = [m\mathbf{E}],$$

$$\mathbf{H} = \left( m^4 - i \left( \beta - \frac{1}{2} \beta_t \right) \right) \mathbf{E}, \quad (22.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= -[m\mathbf{H}] = \left( \epsilon^0 + \left( \tilde{\beta} - \frac{1}{2} \beta_t \right) \left( \beta - \frac{1}{2} \beta_t \right) \right) \mathbf{E} - \\ &- i \left( \tilde{\beta} - \frac{1}{2} \beta_t \right) \mathbf{H} = - \left( m^{\times 2} + \frac{i}{2} \beta_t \right) \mathbf{B} + i [m, \beta \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (22.30)$$

В результате получаем

$$\mathbf{B}_0 = [m\mathbf{E}_0] = C [m [mc]], \quad \mathbf{B}_e = -C' m \epsilon^0 m [mc], \quad (22.31)$$

$$\mathbf{H}_0 = C [m - i\beta_0 c, [mc]], \quad \mathbf{H}_e = -C' \epsilon_e (\epsilon_0 - i\beta_0 mc)[mc], \quad (22.32)$$

$$\mathbf{D}_0 = C (\epsilon_0 - i\beta_0 mc)[mc], \quad \mathbf{D}_e = C' \epsilon_e (\epsilon_0 - i\beta_0 mc)[m [mc]]. \quad (22.33)$$

Мы привели эти выражения с целью сравнения с соответствующими результатами (15.49)—(15.58). Такое сопоставление показывает, что для линейных векторов  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{D}_0$ ,  $\mathbf{H}_e$ ,  $\mathbf{B}_e$ ,  $\mathbf{D}_e$  в обоих случаях получаются одинаковые направления, хотя имеется различие в коэффициентах. Выражения для эллиптически поляризованных векторов  $\mathbf{H}_0$  и  $\mathbf{E}_e$  здесь и в § 15 выглядят несколько по-разному. Однако следует помнить, что тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\alpha$  в уравнениях (22.1), использованных в § 15, и в уравнениях (22.2) не тождественны, а связаны между собой соотношениями (18.24).

Наиболее существенное различие, имеющее непосредственный физический смысл, обнаруживается при сравнении уравнений нормалей (22.17) или (22.22) с соответствующим уравнением (15.34), полученным в формализме соотношений (22.1). Согласно (15.34), в обеих волнах: «обыкновенной» и «необыкновенной» имеется зависимость скорости от направления, хотя в обыкновенной волне она обусловлена лишь гирационным членом. В то же время в уравнении (22.17) имеется чистая обыкновенная волна  $m^2 = \epsilon_0 - \alpha_0^2$ . Кроме того, в том же уравнении зависимость скорости необыкновенной волны от направления сосредоточена целиком в члене  $m \epsilon m$ , не связанном с параметром гирации, таком же, как в негиротропных кристаллах (ср. (4.50)). Такое различие, разумеется, не должно было бы иметь места в эквивалентных теориях, какими мы считаем теории, основанные на уравнениях (22.1) и (22.2).

Однако, как мы сейчас увидим, здесь нет никакого противоречия, а лишь проявляется одна из тех тонкостей, которыми так изобилует теория гиротропии. Системы уравнений (22.1) и (22.2) действительно математически строго эквивалентны одна другой при условии, что тензоры  $\epsilon'$ ,  $\mu'$ ,  $\alpha'$  связаны с  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  соотношениями (18.24):

$$\begin{aligned} \epsilon &= (1 - \epsilon' \alpha' \mu' \tilde{\alpha}') \epsilon', & \mu &= (1 - \mu' \tilde{\alpha}' \epsilon' \tilde{\alpha}') \mu', \\ \alpha &= -(1 - \epsilon' \alpha' \mu' \tilde{\alpha}')^{-1} \epsilon' \alpha' \mu' \equiv -\epsilon' \alpha' \mu' (1 - \tilde{\alpha}' \epsilon' \alpha' \mu')^{-1}. \end{aligned} \quad (22.34)$$

Эти соотношения получаются, когда уравнения (22.1) разрешаются относительно  $[m\mathbf{H}]$  ( $= -\mathbf{D}$ ) и  $[m\mathbf{E}]$  ( $= \mathbf{B}$ ) и резуль-

таты сравниваются с (22.2). Можно поступить наоборот, исходя из уравнений (22.2) в форме

$$\mathbf{E} = -\varepsilon^{-1}(\mathbf{m}^\times + i\alpha)\mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \mu^{-1}(\mathbf{m}^\times + i\tilde{\alpha})\mathbf{E}$$

и подставляя выражение для  $\mathbf{E}$  во второе уравнение (22.2), а выражение для  $\mathbf{H}$  — в первое:

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{mH}] = (\varepsilon - \alpha\mu^{-1}\tilde{\alpha})\mathbf{E} + i\alpha\mu^{-1}\mathbf{m}^\times\mathbf{E}, \quad (22.35)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{mE}] = (\mu - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha)\mathbf{H} + i\tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\mathbf{m}^\times\mathbf{H}.$$

Сравнивая равенства (22.35) с (22.1), находим

$$\varepsilon' = \varepsilon - \alpha\mu^{-1}\tilde{\alpha}, \quad \mu' = \mu - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha, \quad (22.36)$$

$$\alpha' = -(\varepsilon - \alpha\mu^{-1}\tilde{\alpha})^{-1}\alpha\mu^{-1} \equiv -\varepsilon^{-1}\alpha(\mu - \tilde{\alpha}\varepsilon^{-1}\alpha)^{-1}.$$

Тождественность обоих выражений для  $\alpha'$  следует из (19.58). Легко проверить, что подстановка (22.36) в (22.34) или наоборот приводит к тождествам. Из (22.36) следует, что равенства  $\varepsilon = \varepsilon'$ ,  $\mu = \mu'$  влекут за собой  $\varepsilon' = \varepsilon'$ ,  $\mu' = \mu'$  и наоборот, если  $\varepsilon'$ ,  $\mu'$  симметричны, то, согласно (22.34), то же будет справедливо для  $\varepsilon$  и  $\mu$ .

Пусть  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon''\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$ ,  $\alpha = \alpha_0\mathbf{c}^\times$  (22.16), тогда  $\varepsilon' = \varepsilon - \alpha\tilde{\alpha} = \varepsilon^0$  (22.8),  $\alpha' = -\alpha_0\mathbf{c}^\times$ . Но

$$\mu' = 1 + \alpha_0^2\mathbf{c}^\times\varepsilon^{-1}\mathbf{c}^\times = 1 + \frac{\alpha_0^2}{\varepsilon_0}\mathbf{c}^\times{}^2 \neq 1. \quad (22.37)$$

Наоборот, если  $\mu' = 1$ ,  $\varepsilon' = \varepsilon_0 + \varepsilon''\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$ ,  $\alpha' = \alpha_0\mathbf{c}^\times$ , то, согласно (22.34),

$$\alpha = -\alpha_0(1 + \alpha_0^2\varepsilon'\mathbf{c}^\times{}^2)^{-1}\varepsilon'\mathbf{c}^\times = \alpha_1\mathbf{c}^\times, \quad (22.38)$$

$$\mu = 1 + \alpha_0^2\varepsilon_0\mathbf{c}^\times{}^2 \neq 1,$$

а тензор  $\varepsilon$  по-прежнему будет иметь одноосную форму. Итак, что касается тензоров  $\varepsilon$  и  $\alpha$ , то они при переходах от (22.1) к (22.2) и наоборот сохраняют свою структуру:  $\varepsilon = a + b\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$ ,  $\alpha = \alpha_0\mathbf{c}^\times$ , меняются только скаляры  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha_0$ . В то же время если тензор  $\mu$  в одной из систем (22.1), (22.2) равен единице, то в другой системе он будет отличен от единицы. Но условие  $\mu = 1$  до сих пор всегда означало, что кристалл является *немагнитным*. Теперь мы сталкиваемся с ситуацией, когда кри-

сталл, немагнитный с точки зрения одной системы уравнений электродинамики, например (22.1), является магнитным ( $\mu \neq 1$ ) по отношению к другой системе (22.2) и наоборот. Так как наличие или отсутствие магнитной анизотропии (и вообще значение магнитной восприимчивости) является объективным физическим свойством кристалла, то может быть правильным только одно из утверждений относительно  $\mu$ . Это означает, что при математическом равноправии систем (22.1) и (22.2) мы тем не менее имеем принципиальную возможность сделать выбор между ними на основании физических соображений и эксперимента. Для этого мы должны располагать возможностью установления с очень высокой точностью факта немагнитности планального кристалла средней сингонии на основании каких-нибудь электромагнитных экспериментов неоптического характера. После этого, исследуя, опять-таки с весьма высокой точностью (до величин второго порядка распространяющихся в нем волн, мы сможем сделать выбор в пользу одного из двух соотношений для обыкновенных волн:  $m^2 = \epsilon_0$  (22.26) или  $m^2 = \epsilon_0(1 + \alpha_0^2 (mc)^2)$  (15.49). Тем самым будет решен вопрос, какую из систем уравнений электродинамики: (22.1) или (22.2) — следует считать более основной в том смысле, что условие  $\mu = 1$  будет в ней равносильно немагнитности кристалла.

Мы видим лишний раз на этом примере, что электродинамика гиротропных сред выдвигает такие глубокие и специфические проблемы и вопросы, которые до сих пор в электродинамике не возникали. Разумеется, как всегда, решающую помощь при выяснении подобных вопросов может оказать микроскопическая теория. И еще один вывод следует из всего сказанного здесь и в предыдущем параграфе: в электродинамике гиротропных сред очень важное, принципиальное значение имеет точность расчета (и разумеется, соответствующая точность эксперимента). Пренебрегая, как это с легкостью делалось до сих пор, величинами высшего порядка малости, мы рискуем выплеснуть из ванны вместе с водой и ребенка.

Из изложенного следует, что, собственно говоря, мы не можем сравнивать ни уравнений (22.17) и (15.34), ни выражений для полей (22.26) — (22.33) и (15.49) — (15.58). Действительно, соотношения (15.34), (15.49) — (15.58) получены в предположении  $\mu' = 1$ . Между тем если мы положим в (22.2)  $\mu = 1$ , то в (22.1), согласно (22.37),  $\mu' \neq 1$ . Но в таком случае следует от уравнений (15.34) перейти к более общим уравнениям (15.40), учитывающим магнитные свойства. Рассмотрим уравнение (15.40) для «обыкновенных» волн

$$m\mu' m - \epsilon'_0 \mu'_e \mu'_e (1 + \alpha'_0 (mc)^2) = 0. \quad (22.39)$$



Согласно (22.37), мы должны здесь положить

$$\mu' = 1 + \frac{\alpha_0^2}{\varepsilon_0} c^{\times 2}, \quad \mu'_o = 1 - \frac{\alpha_0^2}{\varepsilon_0}, \quad \mu'_e = 1,$$

$$\varepsilon'_o = \varepsilon_0 - \alpha_0^2, \quad \alpha_0 = - \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0 - \alpha_0^2}.$$

Подставляя эти выражения в (22.39), получим после простых вычислений

$$\frac{\varepsilon_0 - \alpha_0^2}{\varepsilon_0} (m^2 - \varepsilon_0 + \alpha_0^2) = 0,$$

т. е. мы приходим к уравнению, вытекающему из (22.17) для обыкновенных волн. Ясно, что путем соответствующей замены от выражений (15.49)—(15.58), преобразованных согласно (15.4) для учета магнитной анизотропии, мы пришли бы к выражениям (22.26)—(22.38).

Таким образом, системы (22.1) и (22.2) при условии связей (22.34), (22.36) между параметрами действительно строго эквивалентны друг другу и все выводы и соотношения, вытекающие из одной системы, могут быть с помощью (22.34), (22.36) переведены на язык другой системы. Неясно только одно, какое условие соответствует немагнитному кристаллу:  $\mu=1$  или  $\mu'=1$ . Ввиду большой сложности самой общей теории с произвольным тензором магнитной проницаемости одно из этих условий необходимо наложить. Вопрос о выборе одно из этих двух возможностей требует специального рассмотрения. Не углубляясь детально в эту проблему, мы ограничимся соображениями несколько формального характера. Система (22.2) представляется более предпочтительной по следующим соображениям. Для нее справедлив общий принцип фазолучевой симметрии (см. § 19). Точные уравнения поля (22.7), (29.8) для этой системы не более сложны, чем приближенные уравнения (21.8), вытекающие из системы (22.1). Наконец, как можно заключить из сравнения уравнения нормалей и выражений для полей в случае планальных кристаллов средних сингоний, система (22.2) приводит к более простым соотношениям. Поэтому мы останавливаем свой выбор на этой системе и будем исходить из гипотезы, что плоские волны в немагнитных кристаллах описываются уравнениями (22.2) при  $\mu=1$ . Соответственно мы будем, как правило, исходить из уравнений (22.7), (22.8) для электрического поля, определяя через него остальные векторы с помощью соотношений (22.29), (22.30).

Уравнение (22.7) можно написать в виде

$$(\varepsilon^0 - m^2 + ing^{\times}) \mathbf{E} = - \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \mathbf{E}, \quad \mathbf{g} = \beta \mathbf{n}, \quad (22.40)$$

откуда следует (ср. аналогичное выражение (4.66))

$$\mathbf{E} = C \overline{(\epsilon^0 - m^2 + i n g^{\times})} \mathbf{m}. \quad (22.41)$$

Таким образом, мы получаем общее решение для  $\mathbf{E}$  при заданном векторе рефракции  $\mathbf{m}$ . Правда, в некоторых случаях правая часть обращается в нуль и не дает решения. В частности, это имеет место для обыкновенной волны (22.36) в планальных кристаллах средних сингоний. Однако такие случаи являются исключениями. Тем не менее наряду с (22.41) можно предложить другой путь отыскания вектора  $\mathbf{E}$  из уравнения (22.7), аналогичный тому, который изложен в § 21. В дальнейших вычислениях мы будем опускать нулевой индекс при тензоре  $\epsilon^0$  (22.8). Таким образом, основное уравнение будем писать в виде

$$(\epsilon + \mathbf{m}^{\times 2} + i n g^{\times}) \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{g} = \beta \mathbf{n}. \quad (22.42)$$

Умножая его на  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{g}$ , получаем

$$(\mathbf{n}\epsilon + i [\mathbf{m}\mathbf{g}]) \mathbf{E} = 0, \quad (\mathbf{g}\epsilon + [\mathbf{m} [\mathbf{m}\mathbf{g}]]) \mathbf{E} = 0,$$

откуда следует

$$\mathbf{E} \parallel [\epsilon \mathbf{n} + i [\mathbf{m}\mathbf{g}], \epsilon \mathbf{g} + [\mathbf{m} [\mathbf{m}\mathbf{g}]]]. \quad (22.43)$$

При этом показатели преломления изонормальных волн и соответствующие векторы рефракции находятся с помощью уравнения нормалей (см. (22.10))

$$\begin{aligned} \Delta &= n^4 (\mathbf{n}\epsilon \mathbf{n} + [\mathbf{n}\mathbf{g}]^2) + n^2 ((\bar{\epsilon} \mathbf{n}^{\times 2})_t - \mathbf{g}\epsilon \mathbf{g}) + |\epsilon| = \\ &= (\mathbf{m}^2 - \epsilon_o)(\mathbf{m}\epsilon \mathbf{m} - \epsilon_o \epsilon_e) + \mathbf{m}^2 ([\mathbf{m}\mathbf{g}]^2 - \mathbf{g}\epsilon \mathbf{g}) = 0. \end{aligned} \quad (22.44)$$

Для вектора  $\mathbf{g}$  мы будем употреблять название *вектор гирации*.

Для определения поляризации распространяющихся волн следует найти трансверсальные векторы  $\mathbf{D}$  или  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{D}\mathbf{n} = \mathbf{B}\mathbf{n} = 0$ ). Хотя вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  является основным *световым* вектором (см. [10, 150]), однако по известному  $\mathbf{E}$  в системе (22.2) более просто определяется вектор  $\mathbf{B} = [\mathbf{m}\mathbf{E}]$ . С помощью (22.43) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= [\mathbf{m}\mathbf{E}] \parallel \mathbf{n}\epsilon \mathbf{g} (\epsilon \mathbf{n} + i [\mathbf{m}\mathbf{g}]) - \mathbf{n}\epsilon \mathbf{n} (\epsilon \mathbf{g} + [\mathbf{m} [\mathbf{m}\mathbf{g}]]) = \\ &= (\mathbf{n}^{\times} \bar{\epsilon} - \mathbf{m}\epsilon \mathbf{m}) + i \mathbf{m}\epsilon \mathbf{g} [\mathbf{n}\mathbf{g}]. \end{aligned} \quad (22.45)$$

Его мы и будем обычно использовать для определения поляризации.

Рассмотрим свойства плоских волн, распространяющихся в естественно гиротропных кристаллах примитивных классов

средних сингоний. Согласно § 14, в таких кристаллах для тензоров  $\varepsilon$  и  $\beta$ , входящих в основные уравнения (22.42), справедливы выражения

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon' c.c, \quad \beta = \beta_0 + \beta' c.c + \beta_1 c^\times, \quad c^2 = 1, \quad (22.46)$$

поэтому

$$\begin{aligned} g &= \beta_0 n + \beta' c n.c + \beta_1 [cn], \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 (\varepsilon_e - \varepsilon' c.c), \\ [ng] &= \beta' n.c.[nc] + \beta_1 [n[cn]], \\ gc &= (\beta_0 + \beta') nc, \quad gn = \beta_0 + \beta' (nc)^2. \end{aligned} \quad (22.47)$$

Уравнение нормалей (22.44) принимает вид

$$\begin{aligned} (n^2 - \varepsilon_0)(n^2 n e n - \varepsilon_0 \varepsilon_e) + n^4 (\beta'^2 (nc)^2 + \beta_1^2 [nc]^2 - \\ - n^2 [\varepsilon_0 (\beta_1^2 [nc]^2 + \beta_0^2) + \varepsilon_e \beta' (\beta' + \\ + 2\beta_0)(nc)^2 + \varepsilon' \beta_0^2 (nc)^2]) = 0. \end{aligned} \quad (22.48)$$

С помощью (22.43) нетрудно получить общее выражение для  $E$  при произвольном направлении волновой нормали  $n$ . Мы ограничимся, однако, рассмотрением двух наиболее интересных частных случаев. Пусть  $n=c$ , тогда, умножая уравнение (22.42) на  $c$ , получаем  $cE=0$ , после чего это уравнение принимает вид

$$E = i \frac{n(\beta_0 + \beta')}{n^2 - \varepsilon_0} [cE]. \quad (22.49)$$

Как известно (см. § 27), в таких случаях должно быть

$$\frac{n(\beta_0 + \beta')}{n^2 - \varepsilon_0} = \pm 1, \quad n^2 \mp (\beta_0 + \beta') n - \varepsilon_0 = 0. \quad (22.50)$$

Эти два квадратных уравнения имеют два положительных корня

$$n = \frac{1}{2} (\sqrt{4\varepsilon_0 + (\beta_0 + \beta')^2} \pm (\beta_0 + \beta')), \quad (22.51)$$

которые определяют показатели преломления двух циркулярно поляризованных волн с противоположными направлениями обращения, распространяющихся вдоль оптической оси. Таким образом в этом направлении имеет место вращение плоскости поляризации.

Рассмотрим теперь распространение волн в направлении, перпендикулярном к оптической оси. При  $nc=0$  имеем

$$g = \beta_0 n + \beta_1 [cn], \quad [ng] = \beta_1 c, \quad gc = 0, \quad gn = \beta_0. \quad (22.51a)$$

Уравнение нормалей (22.44) принимает вид

$$\begin{aligned} n^4 (\varepsilon_o + \beta_1^2) - n^2 \varepsilon_o (\varepsilon_o + \varepsilon_e + \beta_o^2 + \beta_1^2) + \varepsilon_o^2 \varepsilon_e = \\ = \varepsilon_o (n^2 - \varepsilon_o)(n^2 - \varepsilon_e) + n^2 (n^2 \beta_1^2 - \varepsilon_o \beta_o^2 - \varepsilon_o \beta_1^2) = 0, \end{aligned} \quad (22.52)$$

а из (22.45) следует

$$\mathbf{B} = C ((\varepsilon_o - n^2)[\mathbf{nc}] + in\beta_o \mathbf{c}). \quad (22.53)$$

Согласно (22.52), значения  $n^2$  ввиду малости параметров активности  $\beta_o, \beta_1$  должны быть близки к  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_e$ , т. е. к значениям, соответствующим обыкновенной и необыкновенной волнам в негиротропных одноосных кристаллах. Отличие  $n^2$  от  $\varepsilon_o$  или  $\varepsilon_e$  должно быть величиной второго порядка малости относительно  $\beta_o, \beta_1$  (см. § 21). Сохраняя и в данном случае термины «обыкновенная» ( $n^2 \sim \varepsilon_o$ ) и «необыкновенная» ( $n^2 \sim \varepsilon_e$ ) волна, мы можем сказать на основании (22.53) следующее. Вектор  $\mathbf{B}$  эллиптически поляризован, причем главные оси эллипса поляризации направлены: одна по оси симметрии кристалла ( $\mathbf{c}$ ), а другая перпендикулярно к ней и к волновой нормали ( $[\mathbf{nc}]$ ). При этом для обыкновенной волны большая ось эллипса направлена вдоль  $\mathbf{c}$  (так как  $\varepsilon_o - n^2$  есть величина второго порядка малости,  $\beta_o$  — первого). Для необыкновенной волны, наоборот, большая ось эллипса поляризации направлена по  $[\mathbf{nc}]$ .

Рассмотрим вопрос об эллиптичности обеих волн. Последняя определяется отношением (см. (22.53))

$$\left| \frac{n\beta_o}{\varepsilon_o - n^2} \right| \quad (22.54)$$

или обратным к нему.

Чтобы оценить это отношение для обеих изонормальных волн, найдем решения уравнения нормалей (22.52), пренебрегая четвертыми степенями малых величин  $\beta_o, \beta_1$ :

$$\begin{aligned} n^2 = \varepsilon_o \frac{\varepsilon_o + \varepsilon_e + \beta_o^2 + \beta_1^2 \pm \sqrt{(\varepsilon_o - \varepsilon_e)^2 + 2[(\varepsilon_o + \varepsilon_e)\beta_o^2 + (\varepsilon_o - \varepsilon_e)\beta_1^2]}}{2(\varepsilon_o + \beta_1^2)} \approx \\ \approx \varepsilon_o \frac{\varepsilon_o + \varepsilon_e + \beta_o^2 + \beta_1^2 \pm (\varepsilon_o - \varepsilon_e) \pm \frac{\varepsilon_o + \varepsilon_e}{\varepsilon_o - \varepsilon_e} \beta_o^2 \pm \beta_1^2}{2(\varepsilon_o + \beta_1^2)}, \end{aligned}$$

$$n_o^2 = \varepsilon_o \left( 1 + \frac{\beta_o^2}{\varepsilon_o - \varepsilon_e} \right), \quad n_e = \sqrt{\varepsilon_o} \left( 1 + \frac{\beta_o^2}{2(\varepsilon_o - \varepsilon_e)} \right), \quad (22.55)$$

$$\begin{aligned}
 n_e^2 &= \varepsilon_e \left( 1 - \frac{\varepsilon_o \beta_o^2 + (\varepsilon_o - \varepsilon_e) \beta_1^2}{\varepsilon_o (\varepsilon_o - \varepsilon_e)} \right), \\
 n_e &= \sqrt{\varepsilon_e} \left( 1 - \frac{\varepsilon_o \beta_o^2 + (\varepsilon_o - \varepsilon_e) \beta_1^2}{2\varepsilon_o (\varepsilon_o - \varepsilon_e)} \right). \quad (22.56)
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (22.54), находим для эллиптичности  $b/a$  вектора  $\mathbf{B}$  обыкновенной волны

$$\left( \frac{b}{a} \right)_o = \left| \frac{\beta_o \sqrt{\varepsilon_o}}{\varepsilon_o - \varepsilon_e} \right| \quad (22.57)$$

и для необыкновенной волны

$$\left( \frac{b}{a} \right)_e = \left| \frac{\beta_o \sqrt{\varepsilon_e}}{\varepsilon_o - \varepsilon_e} \right|. \quad (22.58)$$

Таким образом, эллиптичности векторов магнитной индукции двух изонормальных волн, распространяющихся в гиротропных кристаллах, в общем случае *различны*. Притом это различие отнюдь не является малой величиной второго или более высокого порядка относительно параметров гиротропии. Оно имеет тот же порядок малости, как и сама гиротропия, умноженная на анизотропию кристалла. Этот результат находится в противоречии с утверждениями, содержащимися в литературе [10, 27, 28], согласно которым обе изонормальные волны в любом гиротропном кристалле имеют взаимно перпендикулярные, подобные по форме эллипсы поляризации. Поскольку обычно поляризация характеризуется поведением светового вектора  $\mathbf{D}$ , то мы проделаем расчет также для него, хотя он более сложен. Из (22.43), (22.51a) находим при  $\mathbf{nc}=0$

$$\mathbf{E} \parallel (\varepsilon_o - n^2)(\varepsilon_o \mathbf{c} - in\beta_1 \mathbf{n}) + in\varepsilon_o \beta_o [\mathbf{cn}]. \quad (22.59)$$

Отсюда следует выражение для  $\mathbf{H}$  (см. (22.29)):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} \parallel n \left( (\varepsilon_o - n^2)(\varepsilon_o - \beta_1^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_o \beta_o (\beta_o + \beta') \right) [\mathbf{nc}] + \\
 + n\beta_1 \left( \frac{1}{2} (\varepsilon_o - n^2)(\beta_o + \beta') - \varepsilon_o \beta_o \right) \mathbf{n} + \\
 + i\varepsilon_o \left( \frac{1}{2} (\varepsilon_o - n^2)(\beta_o - \beta') + n^2 \beta_o \right) \mathbf{c} \quad (22.60)
 \end{aligned}$$

и для светового вектора  $\mathbf{D}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} = -[\mathbf{mH}] \parallel n \left( (\varepsilon_o - n^2)(\varepsilon_o - \beta_1^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_o \beta_o (\beta_o + \beta') \right) \mathbf{c} - \\
 - i\varepsilon_o \left( \frac{1}{2} (\varepsilon_o - n^2)(\beta_o - \beta') + n^2 \beta_o \right) [\mathbf{nc}]. \quad (22.61)
 \end{aligned}$$

Мы видим, что аналогично **B** (22.53) вектор **D** поляризован эллиптически с осями эллипса, направленными по  $s$  и  $[ps]$ . Однако эллиптичность (отношение осей) определяется выражением значительно более сложным, чем (22.54):

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{\varepsilon_o} \frac{(\varepsilon_o - n^2)(\varepsilon_o - \beta_1^2) + \frac{1}{2} \varepsilon_o \beta_o (\beta_o + \beta')}{\frac{1}{2} (\varepsilon_o - n^2)(\beta_o - \beta') + n^2 \beta_o}. \quad (22.62)$$

Чтобы несколько упростить вычисления, мы рассмотрим это выражение применительно к аксиальным кристаллам средних сингоний, которые можно рассматривать как частный случай кристаллов примитивных классов, соответствующий  $\beta_1 = 0$  (см. § 14). Тогда (22.62) принимает вид

$$\frac{b}{a} = n \frac{\varepsilon_o - n^2 + \frac{1}{2} \beta_o (\beta_o + \beta')}{n^2 \beta_o + \frac{1}{2} (\varepsilon_o - n^2)(\beta_o - \beta')} \quad (22.63)$$

и одновременно упрощаются выражения для решения (22.56):

$$n_e^2 = \varepsilon_e \left( 1 - \frac{\beta_o^2}{\varepsilon_o - \varepsilon_e} \right), \quad n_o = \sqrt{\varepsilon_e} \left( 1 - \frac{\beta_o^2}{2(\varepsilon_o - \varepsilon_e)} \right). \quad (22.64)$$

Подставляя в (22.63) значения  $n_o$  (22.55), получаем, отбрасывая члены высшего порядка малости,

$$\left( \frac{b}{a} \right)_o = \left| \frac{(\beta_o + \beta') \varepsilon_e + (\beta_o - \beta') \varepsilon_o}{2 \sqrt{\varepsilon_o} (\varepsilon_o - \varepsilon_e)} \right| \quad (22.65)$$

для вектора **D** обыкновенной волны и (см. (22.64))

$$\left( \frac{b}{a} \right)_e = \left| \frac{(\beta_o + \beta') \varepsilon_e + (\beta_o - \beta') \varepsilon_o}{2 \sqrt{\varepsilon_e} (\varepsilon_o - \varepsilon_e)} \right| \quad (22.66)$$

для вектора **D** необыкновенной волны.

Мы видим, что в обоих случаях (22.57), (22.58) и (22.65), (22.66) различие эллиптичностей обеих изонормальных волн, как для **B**, так и для **D**, имеет одинаковый характер — оно обусловлено анизотропией кристалла, т. е. различием между  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon_e$ . Если вычислить отношения эллиптичностей обеих волн для **B**

$$\left( \frac{b}{a} \right)_o / \left( \frac{b}{a} \right)_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}} \quad (22.67)$$

и для **D**

$$\left(\frac{b}{a}\right)_o / \left(\frac{b}{a}\right)_e = \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_o}}, \quad (22.68)$$

то они оказываются одинаковыми по величине, но обратными друг другу.

Тем самым опровергается очередное утверждение прежней теории гиротропии, вошедшее во все основные руководства. Заметим, что в наших расчетах мы предполагали, специально того не оговаривая, что анизотропия кристалла значительно больше его гирационных параметров:  $|\epsilon_o - \epsilon_e| \gg \beta_o$ . Если эти величины соизмеримы, то результаты могут претерпеть существенное изменение. Обычно в расчетах (см. [10, 27, 28] и др.) пренебрегают произведениями  $(\epsilon_o - \epsilon_e)\beta_o$ , считая их достаточно малыми величинами. Это является одним из потенциальных источников ошибок, приводящих к неверным выводам в теории гиротропии.

Как уже отмечалось выше, свойства плоских волн, распространяющихся в естественно гиротропных кристаллах аксиальных классов средних сингоний, непосредственно вытекают из полученных выше результатов как частный случай при  $\beta_1 = 0$ , поскольку, согласно § 14, для них тензор гирации имеет вид

$$\beta = \beta_o + \beta' \text{с.с.} \quad (22.69)$$

при том же тензоре  $\epsilon$ , и соответственно вектор гирации равен

$$g = \beta n = \beta_o n + \beta' \text{nc.с.} \quad (22.70)$$

Уравнение нормалей (22.48) при этом несколько упрощается и принимает форму

$$\begin{aligned} (m^2 - \epsilon_o)(m \epsilon m - \epsilon_o \epsilon_e) + \beta'^2 (mc)^2 [mc]^2 - (\beta_o^2 m \epsilon m + \\ + \epsilon_e \beta' (\beta' + 2\beta_o)(mc)^2) = 0. \end{aligned} \quad (22.71)$$

Общее выражение для вектора **B** (22.45) в этом случае имеет вид

$$\mathbf{B} \parallel (n \times (\bar{\epsilon} - m \epsilon m) + i m \epsilon g) [nc]. \quad (22.72)$$

Разумеется, и в этих кристаллах вдоль оси симметрии с имеет место вращение плоскости поляризации, причем оно описывается в точности теми же формулами (22.49) — (22.59), что и для кристаллов примитивных классов, поскольку эти формулы не содержат параметра  $\beta_1$ .

Таким образом, из естественно гиротропных кристаллов средних сингоний у нас остались нерассмотренными лишь кристаллы гиридо-примитивного и гиридо-планального

классов тетрагональной сингонии. Тензоры гирации для них имеют соответственно вид: для гироидо-примитивного класса

$$\beta = \beta_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \beta_0^* \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}^* = \tilde{\beta}, \quad [\mathbf{ce}] = \pm i\mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1 \quad (22.73)$$

и для гироидо-планального класса

$$\beta = \beta_0 (c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_1) = \tilde{\beta}, \quad c_1 c_2 = c_1 c = c_2 c = 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = 1. \quad (22.74)$$

Диэлектрический тензор по-прежнему равен  $\epsilon_0 + \epsilon' \cdot \mathbf{c}$ .

Рассмотрим плоские волны в гироидо-примитивных кристаллах. Из общих формул (22.42), (22.44) в случае (22.73) находим

$$\mathbf{g} = \beta \mathbf{n} = \beta_0 \mathbf{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \beta_0^* \mathbf{n} \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}^*, \quad \mathbf{g}^2 = 2 |\beta_0 \mathbf{n} \mathbf{e}|^2, \quad (22.75)$$

$$\mathbf{g} \mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{g} \mathbf{n} = 2 \operatorname{Re} (\beta_0 (\mathbf{n} \mathbf{e})^2), \quad \mathbf{g} \mathbf{e} \mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{g}^2. \quad (22.76)$$

В результате имеем уравнение нормалей

$$(\mathbf{m}^2 - \epsilon_0)(\mathbf{m} \mathbf{e} \mathbf{m} + \mathbf{m}^2 \mathbf{g}^2 - \epsilon_0 \epsilon_e) - \mathbf{m}^4 (\mathbf{n} \mathbf{g})^2 = 0. \quad (22.77)$$

Отсюда сразу видим, что для всех направлений  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющих условию

$$\mathbf{n} \mathbf{g} = \mathbf{n} \beta \mathbf{n} = \operatorname{Re} (\beta_0 (\mathbf{n} \mathbf{e})^2) = 0, \quad (22.78)$$

уравнение нормалей распадается на два

$$\mathbf{m}^2 - \epsilon_0 = 0, \quad \mathbf{m} \mathbf{e} \mathbf{m} + 2\mathbf{m}^2 |\beta_0 \mathbf{n} \mathbf{e}|^2 - \epsilon_0 \epsilon_e = 0. \quad (22.79)$$

Для того чтобы выяснить содержание условия (22.78), воспользуемся другой формой тензора  $\beta$ , приведенной в § 14 (см. сводку тензоров в конце параграфа),

$$\beta = a (c_1 \cdot c_1 - c_2 \cdot c_2) + b (c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_1), \quad (22.80)$$

$$c_1 c_2 = c_1 c = c_2 c = 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = 1.$$

Тензору  $\beta$  можно придать иной вид, воспользовавшись тождеством

$$\begin{aligned} (c_1 + \lambda c_2) \cdot \left( c_1 - \frac{1}{\lambda} c_2 \right) + \left( c_1 - \frac{1}{\lambda} c_2 \right) \cdot (c_1 + \lambda c_2) &\equiv \\ &\equiv 2(c_1 \cdot c_1 - c_2 \cdot c_2) + \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) (c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_1). \end{aligned} \quad (22.81)$$

Умножив на  $a/2$ , получим справа

$$a (c_1 \cdot c_1 - c_2 \cdot c_2) + \frac{a}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) (c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_1).$$



Очевидно, это выражение будет равно тензору  $\beta$  (22.80), если

$$\frac{a}{2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) = b, \quad \lambda^2 - 2 \frac{b}{a} \lambda - 1 = 0.$$

Отсюда имеем решения для  $\lambda$

$$\lambda_{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + a^2}}{a}, \quad \lambda_+ \lambda_- = -1.$$

Ясно, что эти решения всегда вещественны при вещественных  $a, b$ . Поэтому можно ввести векторы

$$c' = c_1 + \lambda_+ c_2, \quad c'' = c_1 + \lambda_- c_2 = c_1 - \frac{1}{\lambda_+} c_2, \quad (22.82)$$

после чего тензор  $\beta$  примет форму:

$$\beta = \frac{a}{2} (c' \cdot c'' + c'' \cdot c').$$

Вещественные векторы  $c'$  и  $c''$  всегда можно нормировать на единицу и окончательно представить тензор  $\beta$  следующим образом:

$$\beta = \beta_0 (c' \cdot c'' + c'' \cdot c'), \quad c' c' = c'' c'' = 0, \quad c'^2 = c''^2 = 1, \quad (22.83)$$

где  $\beta_0$  — вещественно в отличие от (22.73). Это есть еще одна форма тензора гирации для кристаллов гироидо-примитивного класса тетрагональной сингонии. Заметим, что этот тензор зависит от двух инвариантных параметров  $\beta_0$  и  $c' c'' = \cos \gamma$ , которые могут меняться для разных кристаллов.

Используя форму (22.83), можно переписать соотношения (22.75) — (22.78) следующим образом:

$$g = \beta n = \beta_0 (c'' n \cdot c' + c' n \cdot c''), \quad g c = 0, \quad e g = e_0 g, \\ n g = 2 \beta_0 n c' \cdot n c'', \quad g^2 = \beta_0^2 [(c' n)^2 + (c'' n)^2 + 2 c' c'' \cdot c' n \cdot c'' n]. \quad (22.84)$$

Условие (22.78) теперь имеет вид

$$n c' \cdot n c'' = 0, \quad (22.85)$$

откуда ясно, что распадение (22.79) имеет место при условиях  $n c' = 0$  и  $n c'' = 0$ , т. е. когда фазовая нормаль волны в кристалле лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору  $c'$  или  $c''$ . Согласно (22.79), в этих плоскостях существуют обыкновенные волны, скорости которых не зависят от направления  $n$  (лежащего в этой плоскости). Мы будем называть эти плоскости в рассматриваемых кристаллах *особыми*. Оче-

видно, показатель преломления обыкновенной волны удовлетворяет условию  $n^2 = \epsilon_0$ , а необыкновенной волны — уравнению (см. (22.79), (22.84))

$$m\epsilon m + \beta_0^2 [(mc')^2 + (mc'')^2 + 2c'c'' \cdot mc' \cdot mc''] - \epsilon_0 \epsilon_e = 0. \quad (22.86)$$

Рассмотрим общий вид вектора  $\mathbf{B}$  для волн, распространяющихся в рассматриваемых кристаллах. Согласно (22.45),

$$\mathbf{B} \parallel (\mathbf{n} \times (\bar{\epsilon} - m\epsilon m) + 2in\epsilon_0\beta_0 \mathbf{n}c' \cdot \mathbf{n}c'') [\mathbf{n}, c' \mathbf{n}c' + c' \mathbf{n}c'']. \quad (22.87)$$

Если  $\mathbf{n}$  лежит в одной из особых плоскостей, например  $\mathbf{n}c' = 0$ , то

$$\mathbf{B} \parallel [\mathbf{n}, (\bar{\epsilon} - m\epsilon m) \mathbf{n}c''] = n\epsilon \mathbf{n} \cdot (n^2 - \epsilon_0) c'. \quad (22.88)$$

Следовательно, если волна необыкновенная ( $n^2 \neq \epsilon_0$ ), то

$$\mathbf{B}_e \parallel c' \quad (\mathbf{n}c' = 0, n^2 \neq \epsilon_0). \quad (22.89)$$

Аналогично во второй особой плоскости имеем

$$\mathbf{B}_e \parallel c'' \quad (\mathbf{n}c'' = 0, n^2 \neq \epsilon_0). \quad (22.89a)$$

Итак, векторы магнитной индукции любой необыкновенной волны, распространяющейся в особых плоскостях, линейно поляризованы перпендикулярно к соответствующей плоскости.

Что касается обыкновенных волн, распространяющихся в особых плоскостях, то выражение (22.87) для них непригодно, поскольку оно в этом случае обращается в нуль. Поэтому мы используем основное уравнение (22.42), которое при условиях  $n^2 - \epsilon_0 = \mathbf{n}c' = 0$  принимает вид (см. (22.84))

$$(\epsilon' c \cdot c + \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + i\beta_0 mc'' \cdot c' \times) \mathbf{E} = 0. \quad (22.90)$$

Заметим, что умножение этого уравнения на  $c'$  дает тождественный нуль. Именно поэтому и становится непригодным выражение (22.45) в этом случае. Умножив (22.90) на  $c''$  и  $[cc']$ , получим

$$(m + i\beta_0 [c'c']) \mathbf{E} = 0, \quad (\epsilon_0 \mathbf{n} [cc'] \cdot \mathbf{n} - i\beta_0 mc'' \cdot c) \mathbf{E} = 0.$$

Поскольку  $[c'c'] \parallel c$ , то из этих уравнений следует  $\mathbf{E} \parallel [\mathbf{n}c]$ . Итак, обыкновенные волны в любой из особых плоскостей имеют линейную поляризацию векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{E} \parallel [\mathbf{n}c], \quad \mathbf{B} \parallel [\mathbf{n}[\mathbf{n}c]] \quad (n^2 = \epsilon_0, \mathbf{n}c' \cdot \mathbf{n}c'' = 0). \quad (22.91)$$

Если с помощью (22.91), (29.30) вычислить соответствующие значения  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{D}$ , то окажется, что эти векторы будут поляризованы эллиптически.

Рассмотрим распространение света вдоль оси симметрии рассматриваемого кристалла. При  $\mathbf{n}=\mathbf{c}$  из (22.83), (22.84) получаем  $\mathbf{g}=0$ , следовательно, уравнение (22.42) принимает вид  $(\varepsilon + \mathbf{m} \times \mathbf{m}^{\times 2})\mathbf{E}=0$ , т. е. становится таким же, как для негиротропных кристаллов (§ 4). Соответственно для света, распространяющегося параллельно оси симметрии  $\mathbf{c}$ , имеем совпадение скоростей обеих изонормальных волн и произвольную поляризацию всех векторов поля.

Таким образом, естественно гиротропные кристаллы гиридо-примитивного (и, очевидно, гиридо-планального) класса тетрагональной сингонии аналогично кристаллам планальных классов средних сингоний не вращают плоскости поляризации света, распространяющегося вдоль оси симметрии высшего порядка. Эта ось у всех таких кристаллов является истинной оптической осью, поскольку вдоль нее совпадают оба показателя преломления и возможна любая поляризация света.

Мы знаем (см. § 15), что в естественно гиротропных кристаллах планальных классов средних сингоний ни для какого направления волновой нормали невозможно вращение плоскости поляризации. Выясним, имеет ли место это свойство для гиридных кристаллов тетрагональной сингонии. Для того чтобы вектор  $\mathbf{B}$  был циркулярно поляризован, необходимо, чтобы выполнялось условие (см. (22.45))

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^2 = & [\mathbf{n}, (\bar{\varepsilon} - \mathbf{m}\mathbf{e}\mathbf{m})[\mathbf{n}\mathbf{g}]]^2 - (\mathbf{m}\mathbf{e}\mathbf{g})^2[\mathbf{n}\mathbf{g}]^2 + \\ & + 2i\mathbf{m}\mathbf{e}\mathbf{g} \cdot [\mathbf{n}\mathbf{g}] [\mathbf{n}, (\bar{\varepsilon} - \mathbf{m}\mathbf{e}\mathbf{m})[\mathbf{n}\mathbf{g}]] = 0. \end{aligned} \quad (22.92)$$

Это условие распадается на два:

$$[\mathbf{n}\mathbf{g}][\mathbf{n}, \bar{\varepsilon}[\mathbf{n}\mathbf{g}]] = 0, \quad (22.93)$$

$$[\mathbf{n}, (\bar{\varepsilon} - \mathbf{m}\mathbf{e}\mathbf{m})[\mathbf{n}\mathbf{g}]]^2 - (\mathbf{m}\mathbf{e}\mathbf{g})^2[\mathbf{n}\mathbf{g}]^2 = 0. \quad (22.94)$$

Очевидно,  $\mathbf{m}\mathbf{e}\mathbf{g} \neq 0$ , иначе, согласно (22.45), вектор  $\mathbf{B}$  был бы линейным. Соотношения (22.93), (22.94) совместно с уравнением нормалей (22.44), определяющим  $n^2$ , образуют общую систему уравнений, которой должен удовлетворять вектор волновой нормали  $\mathbf{n}$ , чтобы по его направлению могла распространяться волна с вектором  $\mathbf{B}$ , поляризованым по кругу. Рассмотрим подробнее эти общие условия для частного случая (22.84). Равенство (22.93) принимает при этом форму

$$[\mathbf{n}\mathbf{g}][\mathbf{n}[\varepsilon\mathbf{n}, \varepsilon\mathbf{g}]] = \varepsilon_0[\mathbf{n}\mathbf{g}][\mathbf{n}[\varepsilon\mathbf{n}, \mathbf{g}]] = -\varepsilon_0\mathbf{n}\mathbf{g} \cdot [\mathbf{n}, \varepsilon\mathbf{n}]\mathbf{g} = 0.$$

Но  $\mathbf{n}\mathbf{g} \neq 0$ , так как в противном случае мы пришли бы к условию (22.85) для особых плоскостей, в которых нет вращения.

Таким образом, с учетом того, что  $\varepsilon \mathbf{n} = \varepsilon_0 \mathbf{n} + \varepsilon' \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}$ , получаем из (22.93)

$$\mathbf{g}[\mathbf{nc}] = (\mathbf{c}'' \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}' + \mathbf{c}' \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}'') [\mathbf{nc}] = 0. \quad (22.95)$$

Если представить вектор  $\mathbf{n}$  в виде  $\mathbf{n} = \xi \mathbf{c} + \xi' \mathbf{c}' + \xi'' \mathbf{c}''$ , то подстановка этого выражения в (22.95) приводит к равенству  $\xi'^2 = \xi''^2$ , следовательно,

$$\mathbf{n} = \xi \mathbf{c} + \xi' (\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}''). \quad (22.96)$$

Отсюда получим, что  $\mathbf{n}(\mathbf{c}' \mp \mathbf{c}'') = 0$ , следовательно, если существует направление  $\mathbf{n}$ , которому соответствует круговая поляризация вектора  $\mathbf{B}$ , то оно должно лежать в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через  $\mathbf{c}$  и делящих пополам угол между  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}''$ . Чтобы отыскать направление  $\mathbf{n}$  в такой плоскости, надо подставить выражение (22.96) в условие (22.94) и искать из него значения  $\xi, \xi'$  с учетом равенства  $\mathbf{n}^2 = \xi^2 + 2\xi'(1 \pm \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') = 1$ . Получающееся соотношение является достаточно громоздким, причем его следует рассматривать совместно с уравнением нормалей (22.77), в котором также нужно сделать подстановку (22.96).

Отсюда видно, что решение вопроса о том, существуют ли в данном естественно гиротропном кристалле направления, которым соответствует круговая поляризация, является сложным даже для кристаллов такой высокой симметрии, как гироидо-примитивные (или гироидо-планальные) тетрагональной сингонии. Во всяком случае, не может быть и речи о справедливости утверждения, которое давно и прочно вошло в фундаментальные монографии [10, 27, 28], будто в любых оптически активных кристаллах, в частности низших сингоний, вдоль оптических осей имеет место вращение плоскости поляризации. На самом деле даже в кристаллах средних сингоний, как мы видели, только примитивные и аксиальные классы симметрии обладают этим свойством. Можно с уверенностью сказать, что вращение плоскости поляризации в естественно гиротропных кристаллах, особенно в кристаллах низших сингоний, является исключением, а не правилом. К тем сравнительно немногочисленным примерам двусосных кристаллов, у которых обнаружено на опыте вращение плоскости поляризации (см. [152]), следует относиться с известной осторожностью. Не исключено, что в ряде случаев вместо чистой круговой поляризации обеих изонормальных волн имели место эллипсы с достаточно малым эксцентриситетом и, как следствие этого, вместо чистой линейной поляризации на выходе из пластинки наблюдались весьма вытянутые эллипсы. Вопросы точности измерений в столь тонкой области оптики, как гиротропия, играют первостепенную роль. Здесь опреде-

ленным шагом вперед являются измерения, проведенные в работе [103].

Таким образом, и в этом отношении существует очень большое различие (которое уже не раз отмечалось) между собственно (индуцированно) гиротропными средами и естественно гиротропными. В первых, как показано в § 20, закономерности, относящиеся к поляризации, имеют простой и универсальный характер: в немагнитных собственно гиротропных кристаллах всегда имеет место вращение плоскости поляризации вдоль оптических осей кристалла (определенных в § 20). В плоскости, перпендикулярной к вектору гирации, всегда распространяется линейно поляризованный свет. При любом направлении  $\mathbf{n}$  эллипсы поляризации обеих изонормальных волн имеют одинаковую форму, расположены ортогонально друг к другу и обходятся в противоположных направлениях и т. д.

В естественно гиротропных кристаллах все соотношения значительно усложняются ввиду более сложных уравнений связи и возникают специфические проблемы (см. § 21). Даже вопрос о том, какие направления считать оптическими осями естественно гиротропного кристалла низшей сингонии, становится принципиальной проблемой. Говорить о совпадении фазовых скоростей изонормальных волн вдоль этих направлений, как в случае негиротропных кристаллов (§ 4), очевидно, не приходится. Наиболее последовательно было бы использовать математическое определение этих осей, как характеристических направлений тензора  $\epsilon$ , введенное в [4, 5] (см. § 4). Однако здесь мы опять сталкиваемся с такой же трудностью, как при определении того, что считать условием, характеризующим немагнитный кристалл:  $\mu = 1$  или  $\mu' = 1$ . В случае определения оптических осей как характеристических направлений диэлектрического тензора в аксиальной форме (4.51) снова возникает вопрос: к какому тензору их относить — к  $\epsilon$ , входящему в систему уравнений (22.2), или к  $\epsilon'$ , входящему в систему (22.1)? А эти тензоры, как известно, не совпадают (см. (22.34), (22.36)). Ссылаться на малость различия между ними равносильно отказу от построения адекватной теории явления и переходу к расчетам «на пальцах», которые уже привели, как было неоднократно показано выше, к ряду неверных выводов.

Окончательное решение этих двух и других подобных принципиальных вопросов теории гиротропии принесут, по видимому, лишь будущие эксперименты исключительно высокой точности. А пока мы можем, приняв ту или другую гипотезу (например, положив в основу систему уравнений (22.1) или (22.2)), с помощью изложенных выше ковариантных методов рассчитать вполне точно (в рамках сделанных предпо-

ложений) любую интересующую нас характеристику волн в любом гиротропном кристалле, разумеется, если известны все его параметры. Приведенные выше соотношения содержат все необходимое для таких расчетов применительно к любому конкретному кристаллу.

В заключение этого параграфа кратко остановимся на энергетических соотношениях для плоских волн в естественно гиротропных средах \*). Мы будем исходить вначале из системы уравнений (22.1).

Уравнения связи (22.1) можно переписать следующим образом (§ 26):

$$\mathbf{D} = \epsilon' (1 - i\alpha' m^\times) \mathbf{E} = \mathbf{E} (1 + i m^\times \tilde{\alpha}') \epsilon' \quad (\epsilon' = \tilde{\epsilon}' = \epsilon'^*),$$

$$\mathbf{B} = \mu' (1 - i\tilde{\alpha}' m^\times) \mathbf{H} = \mathbf{H} (1 + i m^\times \alpha') \mu' \quad (\mu' = \tilde{\mu}' = \mu'^*).$$

В результате находим (см. § 12)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\epsilon'^{-1}\mathbf{D}^* &= -\mathbf{E} (1 - i m^\times \tilde{\alpha}') [m\mathbf{H}^*] = \\ &= m [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + i \mathbf{E} m^\times \tilde{\alpha}' m^\times \mathbf{H}^*, \end{aligned} \quad (22.97)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mu'^{-1}\mathbf{B}^* &= \mathbf{H} (1 - i m^\times \alpha') [m\mathbf{E}^*] = \\ &= m [\mathbf{E}^*\mathbf{H}] - i \mathbf{H} m^\times \alpha' m^\times \mathbf{E}^*. \end{aligned} \quad (22.98)$$

Поскольку  $\mathbf{H} m^\times \alpha' m^\times \mathbf{E}^* = \mathbf{D} \alpha' \mathbf{B}^* = \mathbf{E}^* m^\times \tilde{\alpha}' m^\times \mathbf{H}$ , то, очевидно, правые части равенств (22.97), (22.98) взаимно комплексно сопряжены. Но левые части этих соотношений вещественны, следовательно, правые части также вещественны и, значит, равны между собой. Таким образом,

$$\mathbf{D}\epsilon'^{-1}\mathbf{D}^* = \mathbf{B}\mu'^{-1}\mathbf{B}^*, \quad (22.99)$$

$$m [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + i \mathbf{D} \alpha' \mathbf{B}^* = m [\mathbf{E}^*\mathbf{H}] - i \mathbf{D}^* \alpha' \mathbf{B}. \quad (22.100)$$

Равенство (22.99) означает (см. (12.42)), что плотности электрической и магнитной энергии плоской волны в непоглощающем естественно гиротропном кристалле равны между собой, как это имеет место в негиротропных прозрачных средах. Равенство (22.100) есть следствие уравнения (22.99) и уравнений Максвелла (22.1).

В формализме уравнений (22.2) выражения для плотности электрической и магнитной энергии выглядят несколько сложнее. Учитывая (22.36), имеем

$$\mathbf{D}\epsilon'^{-1}\mathbf{D}^* = \mathbf{D} (\epsilon - \alpha \mu^{-1} \tilde{\alpha}) \mathbf{D}^*, \quad (22.101)$$

$$\mathbf{B}\mu'^{-1}\mathbf{B}^* = \mathbf{B} (\mu - \tilde{\alpha} \epsilon^{-1} \alpha) \mathbf{B}^*.$$

\*) См. также [124, 130].

Что касается граничных условий (8.1) — (8.4), то, поскольку они выражаются только через векторы поля и не содержат явно параметров среды, их форма остается одинаковой для обоих подходов (22.1) и (22.2).

### § 23. ПОГЛОЩАЮЩИЕ ГИРОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

Мы рассмотрим вначале свойства однородных плоских волн в поглощающих собственно гиротропных кристаллах, принадлежащих к средним сингониям, причем, как и прежде (§ 20), будем ограничиваться немагнитными средами ( $\mu = 1$ ). Согласно (16.27), диэлектрический тензор в этом случае имеет вид

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon' \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + i \mathbf{m} \mathbf{x}^\times. \quad (23.1)$$

Основное уравнение для магнитного поля плоской волны во всех собственно гиротропных немагнитных кристаллах можно написать в форме (20.31)

$$(1 + \mathbf{m}^\times \epsilon^{-1} \mathbf{m}^\times) \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{m} \mathbf{H} = 0. \quad (23.2)$$

Существенно, что обратный тензор диэлектрической проницаемости (ср. (20.47), (20.57)) также имеет структуру (23.1). Мы запишем его в следующей форме:

$$\epsilon^{-1} = a + b \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + g \mathbf{c}^\times, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}^*, \quad \mathbf{c}^2 = 1, \quad (23.3)$$

причем все скаляры  $a$ ,  $b$ ,  $g$  будем считать комплексными. Подчеркнем, что даже если в прямом тензоре (23.1) параметр  $\mathbf{m}$  будет вещественным, то в обратном тензоре, согласно (20.58), он будет комплексным (при комплексных  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon'$ ). Отсюда следует, что при переходе к неэрмитовскому тензору  $\epsilon$  уже не играет существенной роли вопрос о том, является ли антисимметричная часть  $\epsilon$  чисто мнимой или нет. Другими словами, для наличия поглощения в собственно гиротропных средах не имеет значения то, чем обусловлена неэрмитовость тензора  $\epsilon$  — комплексностью его симметричной или антисимметричной части либо тем и другим одновременно. Нетрудно видеть, что (23.3) есть наиболее общая возможная форма любого комплексного тензора в кристаллах средних сингоний (см. § 14). Таким образом, взяв тензор  $\epsilon^{-1}$  в форме (23.3), мы вообще ограничиваемся лишь следующими допущениями: а) связь  $\mathbf{D}$  с  $\mathbf{E}$  имеет вид  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , б) кристалл относится к средним сингониям. Все свойства, связанные с поглощением, гиротропией и т. д., будут при этом автоматически учтены.

Разумеется, решением уравнения (23.2) в общем случае будет некоторый комплексный вектор  $\mathbf{H}$ , чему соответствует эллиптическая поляризация волны. Общее решение для  $\mathbf{H}$

при любом направлении нормали  $\mathbf{n}$  может быть получено различными способами, которые неоднократно использовались в предыдущих параграфах, например с помощью соотношений (19.22), где следует положить  $A = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n} \times$ . Уравнение нормалей, определяющее комплексные показатели преломления  $n$ , также имеется в готовой форме (20.20).

Нас будет интересовать прежде всего вопрос о том, в каких случаях в кристалле, характеризуемом тензором (23.3), могут распространяться волны с круговой поляризацией. Аналогично (20.79) из (23.2), (23.3) получаем уравнение

$$(am^2 - 1 + b[\mathbf{mc}].[\mathbf{mc}] + g\mathbf{mc} \cdot \mathbf{m} \times) \mathbf{H} = 0. \quad (23.4)$$

Для круговой поляризации необходимо, чтобы  $\mathbf{H}^2 = 0$ . Умножая (23.4) на  $\mathbf{H}$ , находим при этом условии  $\mathbf{H}[\mathbf{mc}] = 0$ . Путем тех же рассуждений, которые применялись к соотношению (20.80), приходим к выводу, что  $\mathbf{m} = n\mathbf{n} \parallel \mathbf{c}$ . Наоборот, при  $\mathbf{n} = \mathbf{c}$  из (23.4) следует

$$\mathbf{H} = -\frac{n^2 g}{1 - an^2} [\mathbf{cH}], \quad (23.4a)$$

поэтому (см. § 27)

$$\frac{n^2 g}{1 - an^2} = \pm i, \quad n^2 = \frac{1}{a \pm ig} \quad (23.5)$$

и  $\mathbf{H} = \pm i[\mathbf{cH}]$ . Итак, в поглощающих собственно гиротропных кристаллах средних сингоний, как и в прозрачных, круговая поляризация имеет место *только* для волн, распространяющихся вдоль оси  $\mathbf{c}$  кристалла. Однако при этом не будет вращения плоскости поляризации линейно поляризованного света, так как оба комплексных показателя преломления (23.5) будут различаться как вещественными, так и мнимыми частями. Благодаря этому волны с правой и с левой круговой поляризациями будут поглощаться по-разному, т. е. будет иметь место *круговой дихроизм*. В результате прохождения через пластинку из такого кристалла, вырезанную перпендикулярно к оси, линейно поляризованный свет будет превращаться в эллиптически поляризованный.

Заметим, что если написать уравнение (23.2) в виде

$$\mathbf{n} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\frac{1}{n^2} \mathbf{H}, \quad (23.6)$$

то из него нельзя будет заключить аналогично (20.18), что  $\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 = 0$ , где  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  — магнитные векторы двух изонормальных волн. Причина заключается в том, что тензор  $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{n} \times$  при комплексном  $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$  (23.3) *не является эрмитовым* (см. § 28).



Таким образом, обе изонормальных волны, имея в общем случае эллиптическую поляризацию, будут характеризоваться различными по форме эллипсами не расположенными взаимно перпендикулярно.

Перейдем к рассмотрению поглощающих собственно гиротропных кристаллов низших сингоний. И в этом случае мы возьмем для тензора наиболее общее комплексное выражение

$$\epsilon^{-1} = a + b(c'.c'' + c''.c') + g^{\times}. \quad (23.7)$$

Здесь  $a, b$  — комплексные скаляры;  $c', c'', g$  — комплексные векторы. Ясно, что в форме (23.7) можно представить произвольный комплексный тензор. Уравнение (23.2) теперь будет иметь вид (ср. (20.79))

$$(am^2 - 1 + b([mc'].[mc''] + [mc''].[mc'])) + mg.m^{\times}H = 0. \quad (23.8)$$

Снова будем считать  $H^2 = 0$  и умножим последнее уравнение скалярно на  $H$ . В результате придем к условию (20.80)

$$H[nc'].H[nc''] = 0, \quad (23.9)$$

где, однако, векторы  $c'$  и  $c''$  комплексны. Поскольку  $Hn = 0$ , то при  $H[nc'] = 0$  имеем

$$H = C[n[nc']] \quad (23.9a)$$

и аналогично при  $H[nc''] = 0$  получим

$$H = C[n[nc'']]. \quad (23.9b)$$

Если  $H^2 = 0$ , то из этих выражений для  $H$  следует  $[nc']^2 = 0$  или  $[nc'']^2 = 0$ . Таким образом, мы получили в качестве условий для круговой поляризации те же соотношения (7.14), что и для поглощающих негиротропных кристаллов. Мы приходим, следовательно, к общему выводу: при уравнениях связи  $D = \epsilon E$ ,  $B = H$  независимо от того, имеется ли у общего комплексного тензора  $\epsilon$  антисимметричная часть или нет (т. е. имеется собственная гиротропия или нет), круговая поляризация однородных плоских волн в таком кристалле всегда возможна лишь вдоль направлений  $n$  оптических осей, определяемых только симметричной частью тензора  $\epsilon^{-1}$ :

$$\frac{1}{2}(\epsilon^{-1} + \tilde{\epsilon}^{-1}) = a + b(c'.c'' + c''.c') \quad (23.10)$$

в соответствии с формулами

$$[nc']^2 = 0, \quad [nc'']^2 = 0. \quad (23.11)$$

В поглощающих негиротропных кристаллах, как мы видели в § 7, возможны два типа оптических осей — изотропные и

круговые. Для обоих типов характерно совпадение показателей преломления обеих изонормальных волн, однако в случае изотропных осей свет может иметь любую поляризацию (или быть неполяризованным), а в случае круговых осей — определенную круговую поляризацию. Изотропная оптическая ось соответствует линейному вектору  $\mathbf{c}'$  (или  $\mathbf{c}''$ ) в представлении (23.10), а круговая — круговому вектору  $\mathbf{c}'$  (одна) или эллиптическому (две). Рассмотрим свойства световых волн, распространяющихся вдоль этих направлений в гиротропных поглощающих кристаллах. В случае изотропной оси должно быть  $\mathbf{c}' = \mathbf{c}'^*$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{c}'$ . При этом из основного уравнения (23.8) имеем

$$\mathbf{H} = \frac{n^2 \mathbf{c}' g}{1 - an^2} [\mathbf{c}' \mathbf{H}] \quad (23.12)$$

и, как обычно,

$$\frac{n^2 \mathbf{c}' g}{1 - an^2} = \pm i, \quad n^2 = \frac{1}{a \mp \mathbf{c}' g}. \quad (23.13)$$

Таким образом, мы получаем в точности такой же результат, как в случае кристалла средних сингоний (см. (23.4а), (23.5)). Следовательно, вдоль изотропной оси поглощающего собственно гиротропного кристалла распространяются две волны, поляризованные по кругу с противоположными направлениями обхода, с различными фазовыми скоростями и различным поглощением. Иными словами, вдоль изотропных оптических осей такого кристалла наблюдается круговой дихроизм.

Иначе обстоит дело в случае круговых оптических осей. Пусть  $\mathbf{c}'$  — эллиптический комплексный вектор, тогда ему соответствуют две круговых оптических оси  $\mathbf{n}_{\pm}$  (7.18). В этом случае (см. (7.43), (7.44) и (23.9а, б)) имеем соответственно значения  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H}_{\pm} = C [\mathbf{n}_{\pm} [\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{c}']], \quad \mathbf{H}_{\pm}^2 = [\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{c}']^2 = 0. \quad (23.14)$$

Но, согласно (7.43), (7.44),  $[\mathbf{n}_{\pm} [\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{c}']] = \mp i [\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{c}']$  и

$$\mathbf{H}_{\pm} = [\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{c}'], \quad [\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{H}_{\pm}] = \mp i \mathbf{H}_{\pm}. \quad (23.15)$$

Подставим в (23.8) значение  $\mathbf{H} = [\mathbf{n}_{+} \mathbf{c}']$ . С учетом (23.14), (23.15) получим ( $\mathbf{m} = n \mathbf{n}_{+}$ )

$$(an^2 - 1 + bn^2 [\mathbf{n}_{+} \mathbf{c}'] [\mathbf{n}_{+} \mathbf{c}'] - in^2 \mathbf{n}_{+} g) [\mathbf{n}_{+} \mathbf{c}'] = 0, \quad (23.16)$$

откуда следует

$$n^2 = \frac{1}{a + b [\mathbf{n}_{+} \mathbf{c}'] [\mathbf{n}_{+} \mathbf{c}'] - in_{+} g}. \quad (23.17)$$

Таким образом, вдоль круговой оптической оси  $n_+$  распространяется одна волна с определенной круговой поляризацией  $\mathbf{H} = [n_+, \mathbf{c}']$  и комплексным показателем преломления (23.17) <sup>\*</sup>), следовательно, в этом случае не будет кругового дихроизма. Такими же свойствами будет обладать волна, распространяющаяся вдоль круговой оптической оси, соответствующей *круговому* вектору  $\mathbf{c}'$  (см. § 7).

Мы видим, что для циркулярно поляризованных волн, распространяющихся в любых поглощающих собственно гиротропных кристаллах, имеют место простые универсальные закономерности. Наличие у тензора  $\epsilon^{-1}$  антисимметричной части произвольного вида никак не влияет на направления оптических осей, целиком определяемых симметричной частью этого комплексного тензора по тем же формулам (23.10), (23.11), что и для негиротропных поглощающих кристаллов. Круговой оптической оси по-прежнему соответствует одна волна с определенной круговой поляризацией (не считая волны Фохта), следовательно, и здесь нет качественного отличия от поглощающих негиротропных кристаллов. И только в случае изотропных оптических осей (в кристаллах как средних, так и низших сингоний) наличие собственной гиротропии сказывается в том, что вместо одной волны произвольной поляризации (в негиротропных кристаллах) вдоль такой оси распространяется две циркулярно поляризованных в разные стороны волны с различными комплексными показателями преломления, т. е. имеет место круговой дихроизм.

Заметим, что в принципе эти свойства могут быть проверены на опыте без больших затруднений, поскольку собственная (вынужденная) гиротропия может быть легко вызвана наложением магнитного поля на поглощающий кристалл. Нужно лишь, чтобы это поле (в случае двуосного кристалла) не было настолько сильным, чтобы изменить симметричную часть комплексного диэлектрического тензора (эффект Коттона—Мутона, см. § 17). Проще всего осуществить такой опыт, очевидно, на одноосном поглощающем кристалле, направив магнитное поле вдоль его оси. Тогда в отсутствие поля вдоль оси будет распространяться волна любой поляризации (§ 7), а при наличии поля должен наблюдаться круговой дихроизм.

В случае одноосных кристаллов средних сингоний легко убедиться, что при  $n\mathbf{c} = 0$  волны будут линейно поляризованы. Действительно, уравнение (23.4) принимает при этом вид

$$(an^2 - 1 + bn^2 [nc].[nc]) \mathbf{H} = 0, \quad (23.18)$$

<sup>\*</sup>) Мы не рассматриваем волны Фохта (см. § 7).

откуда видно, что  $\mathbf{H} = [\mathbf{nc}]$  является решением, причем

$$n^2 = \frac{1}{a + b}. \quad (23.19)$$

Вектор  $\mathbf{H} = \mathbf{c}$  также будет решением, которому соответствует показатель преломления

$$n = 1/a. \quad (23.20)$$

В случае кристаллов низших сингоний определение направлений, которым соответствует линейная поляризация, является довольно сложной задачей.

Из поглощающих естественно гиротропных сред мы рассмотрим простейший случай изотропно-гиротропных сред. При этом в уравнении (22.7) величины  $\epsilon^0 = \epsilon_0$  и  $\beta = \beta_0$  следует считать комплексными скалярами. В таком случае, как легко видеть, умножая (22.7) на  $\mathbf{n}$ , вектор  $\mathbf{E}$  является трансверсальным:  $\mathbf{nE} = 0$  и уравнение принимает уже знакомую нам форму (см., например, (23.4a))

$$\mathbf{E} = \frac{i\beta_0 n}{n^2 - \epsilon_0} [\mathbf{nE}], \quad (23.21)$$

откуда следует

$$\frac{\beta_0 n}{n^2 - \epsilon_0} = \pm 1, \quad \mathbf{E} = \pm i [\mathbf{nE}], \quad (23.22)$$

$$n^2 \mp \beta_0 n - \epsilon_0 = 0, \quad n = n_{\pm} = \frac{1}{2} (\sqrt{4\epsilon_0 + \beta_0^2} \pm \beta_0). \quad (23.23)$$

Следовательно, при любом направлении  $\mathbf{n}$  мы получаем две циркулярно поляризованные волны с противоположными направлениями обращения.

Из выражения для комплексного показателя преломления  $n$  (23.23) видно, что два его значения  $n_{\pm}$  различаются параметром  $\beta_0$ . Очевидно, если  $\beta_0$  будет вещественным числом, то  $n_+$  и  $n_-$  будут различаться лишь своими вещественными частями, а мнимые их части будут совпадать. Это означает, что распространяющиеся две круговых затухающих волны будут иметь различные фазовые скорости, но коэффициенты затухания у них будут одинаковы. Поэтому круговой дихроизм в таких средах будет отсутствовать. Следовательно, *изотропно-гиротропные поглощающие среды с вещественным параметром активности  $\beta$  не могут обладать свойством кругового дихроизма*. Согласно § 14, помимо изотропных сред такими свойствами могут обладать естественно гиротропные поглощающие кристаллы примитивного и аксиального классов кубической сингонии.

Рассмотрим еще случай поглощающего естественно гиротропного кристалла, относящегося к примитивным классам средних сингоний. При этом мы можем использовать соотношения (22.46), (22.53), считая в них все параметры  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon'$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta'$ ,  $\beta_1$  комплексными, а вектор  $\mathbf{c}$  — по-прежнему единичным и вещественным. Если волновая нормаль параллельна оси  $\mathbf{c}$ , то, повторяя прежние рассуждения (в которых нигде не использовалась вещественность перечисленных параметров), мы снова придем к соотношению  $\mathbf{E} = \pm i[\mathbf{cE}]$  ( $\mathbf{c} = \mathbf{n}$ ) и к уравнению (22.51) для показателей преломления  $n$  обеих волн.

Как и из формулы (23.23), из (22.51) заключаем, что различие комплексных показателей преломления для света, распространяющегося вдоль оси симметрии  $\mathbf{c}$ , целиком обусловлено величиной  $\beta_0 + \beta'$ . Если аналогично соотношению  $\epsilon' = \epsilon_e - \epsilon_0$  ввести обозначение  $\beta' = \beta_e - \beta_0$ , то различие обеих волн будет полностью определяться значением одного параметра  $\beta_e$ . Если этот параметр тензора  $\beta$  (22.46) будет вещественным, то, несмотря на комплексность всех остальных величин  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon'$ , в рассматриваемом кристалле вдоль оси симметрии будет отсутствовать круговой дихроизм. Таким же путем мы можем перенести результаты, полученные для направлений  $\mathbf{n}$ , перпендикулярных к  $\mathbf{c}$ , на случай наличия поглощения и, в частности, использовать формулу (22.53) для вектора  $\mathbf{B}$ . Однако теперь, ввиду комплексного характера  $\epsilon_0$ ,  $\beta_0$  и  $n$ , мы не сможем утверждать, что оси эллипса поляризации для  $\mathbf{B}$  параллельны  $\mathbf{c}$  и  $[\mathbf{nc}]$  — они могут иметь различные направления в зависимости от значений  $\epsilon_0$ ,  $\beta_0$ ,  $n$ .

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и другие случаи поглощающих естественно гиротропных кристаллов.

В заключение следует сделать одно замечание принципиального характера. Рассмотрим соответствие, установленное между системами (22.1) и (22.2), которое реализуется с помощью соотношений (22.34), (22.36). Из последних мы видим, что если, например, в системе (22.2) считать комплексным только тензор  $\epsilon$ , но  $\alpha = \alpha^*$  ( $\mu = 1$ ), то при переходе к системе (22.1)  $\alpha' = -(\epsilon - \alpha\bar{\alpha})^{-1}\alpha$  (см. 22.36) и, следовательно, тензор  $\alpha'$  будет комплексным вследствие его зависимости от комплексного тензора  $\epsilon$ . Справедливо и обратное, как легко убедиться, используя (22.34). А именно если тензор  $\alpha'$  в (22.1) вещественный при комплексном  $\epsilon'$  ( $\mu' = 1$ ), то тензор  $\alpha$  в системе (22.2) будет комплексным. Таким образом, для суждения о свойствах волн, распространяющихся в некоторой гиротропной среде, необходимо учитывать не только комплексный либо вещественный характер определяющих ее тензоров  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ , но и то, какой системой уравнений — (22.1) или (22.2) — эта среда описывается.

## § 24. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Расчет отражения и преломления света на поверхности гиротропного немагнитного кристалла в принципе ничем не отличается от соответствующего расчета для негиротропных кристаллов (§ 8). Граничные условия (см. § 12) имеют тот же вид (8.1), (8.4), откуда по-прежнему следует, что векторы рефракции всех волн на границе гиротропного кристалла должны иметь вид (8.9)

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{b} + \eta_k \mathbf{q}, \quad (24.1)$$

где  $\mathbf{q}$  — единичный вектор нормали к плоскости раздела и

$$\mathbf{b} = [\mathbf{q}\mathbf{a}], \quad \mathbf{a} = [\mathbf{m}_0\mathbf{q}] = [\mathbf{m}_k\mathbf{q}] = [\mathbf{b}\mathbf{q}], \quad (24.2)$$

$$\eta_k = m_k q, \quad [\mathbf{b}\mathbf{m}_k] = \eta_k \mathbf{a}.$$

По-прежнему (ср. § 8) решение задачи следует начинать с определения векторов рефракции  $\mathbf{m}_k$ , т. е. отыскания параметров  $\eta_k$ , что достигается путем подстановки выражения (24.1) в соответствующие уравнения нормалей. Из решений получающегося уравнения четвертой степени для  $\eta_k$  выбирают те, которым соответствует средний вектор потока энергии, направленный внутрь среды, в которой распространяется рассматриваемая волна. Каждому из найденных векторов рефракции соответствует волна определенной поляризации. Векторы электрического или магнитного поля этих волн с произвольным (но фиксированным) скалярным коэффициентом можно обозначить, как в § 8,  $\mathbf{e}_1''$ ,  $\mathbf{e}_2''$ , ( $\mathbf{h}_1''$ ,  $\mathbf{h}_2''$ ) для преломленных волн,  $\mathbf{e}(\mathbf{h})$  — для падающей и  $\mathbf{e}'(\mathbf{h}')$  — для отраженной волны. Мы ограничимся рассмотрением падения света из прозрачной изотропной негиротропной среды на поверхность гиротропного кристалла.

Если речь идет о собственно гиротропном кристалле, то почти все соотношения § 8 применимы к этому случаю с учетом того, что тензор  $\varepsilon$  является не симметричным, а эрмитовым тензором. В случае естественно гиротропных кристаллов задача существенно усложняется ввиду более сложного вида основных уравнений (22.1) или (22.2) по сравнению с негиротропными средами.

Как можно заключить из содержания второй и третьей главы, все задачи, относящиеся к естественно гиротропным кристаллам, решаются значительно сложнее, чем в случае любых других кристаллов, включая магнитные, поглощающие и собственно гиротропные. Это в полной мере относится и к граничным задачам. Помимо более сложных закономерностей, определяющих поляризацию волн в естественно гиро-

тропных средах, тут играет роль еще и то обстоятельство, что даже при  $\mu=1$  мы не можем брать граничные условия для магнитных векторов в виде  $\mathbf{H}_I = \mathbf{H}_{II}$  (см. (8.13)), а должны брать их в общем виде (8.1)  $[\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}, \mathbf{q}] = 0$ . Вследствие этого нельзя непосредственно исключать из граничных уравнений вектор отраженной ( $\mathbf{H}'$ ) или преломленной ( $\mathbf{H}''$ ) волн, чем мы неоднократно пользовались в § 8 и 9.

Сейчас мы изложим более общий метод решения граничной задачи об отражении и преломлении плоской электромагнитной волны, падающей из изотропной среды на произвольный кристалл. Последний может быть магнитным, поглощающим, собственно либо естественно гиротропным или обладать всеми этими свойствами одновременно. При решении мы будем предполагать, что векторы рефракции обеих преломляющихся волн, так же как их поляризации (базисные векторы), известны. Методы отыскания всех этих величин в случае произвольного кристалла были изложены выше.

Предлагаемый метод является обобщением изложенного в § 8 метода *главных векторов* падающей и отраженной волн. Как будет показано ниже, если для магнитных полей берутся граничные условия в форме  $[\mathbf{H}_I - \mathbf{H}_{II}, \mathbf{q}] = 0$ , то аналогично § 8 также может быть однозначно определена такая поляризация падающей волны, что ей будет соответствовать лишь одна из двух возможных преломленных волн, базисный вектор электрического (магнитного) поля которой мы будем обозначать  $\mathbf{e}''$  ( $\mathbf{h}''$ ). Граничные условия в этом случае запишутся в виде (ср. (8.17))

$$[\mathbf{e} + \mathbf{e}' - \mathbf{e}'', \mathbf{q}] = 0, [\mathbf{h} + \mathbf{h}' - \mathbf{h}'', \mathbf{q}] = 0. \quad (24.3)$$

При этом базисный вектор магнитного поля преломленной волны  $\mathbf{h}''$  однозначно определяется по известному вектору рефракции  $\mathbf{m}''$  и базисному вектору электрического поля  $\mathbf{e}''$ . В общем случае эта связь может быть сравнительно сложной (см., например, (22.29)), но ее всегда можно выразить в виде линейной зависимости

$$\mathbf{h}'' = K\mathbf{e}'', \quad (24.4)$$

где  $K$  — некоторый тензор, зависящий от  $\mathbf{m}''$  и параметров среды. Что же касается  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{h}'$ , то, поскольку первая среда предполагается изотропной<sup>\*)</sup>, будут справедливы соотношения

$$\mathbf{h} = [m\mathbf{e}], \mathbf{h}' = [m'\mathbf{e}'], m\mathbf{e} = m\mathbf{h} = m'\mathbf{e}' = m'\mathbf{h}' = 0. \quad (24.5)$$

Хотя здесь положено  $\mu=1$  для первой среды, однако это ограничение не является существенным и излагаемый метод без

<sup>\*)</sup> Кроме того, мы ограничиваемся случаем однородной падающей волны.

труда обобщается на случай произвольной (скалярной) магнитной проницаемости первой изотропной среды.

Таким образом, мы считаем заданными  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m}'$ ,  $\mathbf{m}''$ ,  $\mathbf{e}''$  и  $\mathbf{h}''$ . Требуется найти соответствующие главные векторы падающей ( $\mathbf{e}$ ) и отраженной ( $\mathbf{e}'$ ) волн. Умножив первое уравнение (24.3) векторно на  $\mathbf{m}'$ , найдем

$$\mathbf{e}' = \frac{1}{\eta} [\mathbf{m}' [\mathbf{e} - \mathbf{e}'', \mathbf{q}]]. \quad (24.6)$$

Как обычно, мы полагаем  $\mathbf{m}\mathbf{q} = -\mathbf{m}'\mathbf{q} = \eta$ ,  $\mathbf{m}''\mathbf{q} = \eta''$ , причем ввиду изотропии первой среды (см. (8.10))

$$n^2 = m^2 = m'^2 = a^2 + \eta^2. \quad (24.7)$$

Второе уравнение (24.3) напомним в виде

$$[[\mathbf{m}\mathbf{e}] + [\mathbf{m}'\mathbf{e}' - \mathbf{h}'', \mathbf{q}] = 0 \quad (24.8)$$

и подставим в него выражение (24.6). После несложных преобразований получим

$$[(\eta\mathbf{m}^\times - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times)\mathbf{e}, \mathbf{q}] = [\eta\mathbf{h}'' - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times\mathbf{e}'', \mathbf{q}]. \quad (24.9)$$

Умножая последнее равенство на  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{a}$ , придем к соотношениям

$$\mathbf{a}(\eta\mathbf{m}^\times - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times)\mathbf{e} = \mathbf{a}(\eta\mathbf{h}'' - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times\mathbf{e}''), \quad (24.10)$$

$$\mathbf{b}(\eta\mathbf{m}^\times - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times)\mathbf{e} = \mathbf{b}(\eta\mathbf{h}'' - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times\mathbf{e}''). \quad (24.11)$$

Теперь можно использовать формулы (27.83), (27.85), в результате чего получим (поскольку  $\mathbf{m}\mathbf{e} = 0$ )

$$\mathbf{e} = \frac{[\mathbf{m}, \mathbf{b}(\eta\mathbf{h}'' - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times\mathbf{e}'') \cdot \mathbf{a}(\eta\mathbf{m}^\times - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times) - \dots}{\mathbf{m}[\mathbf{a}(\eta\mathbf{m}^\times - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times), \dots \leftarrow \frac{-\mathbf{a}(\eta\mathbf{h}'' - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times\mathbf{e}'') \cdot \mathbf{b}(\eta\mathbf{m}^\times - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times)]}{\mathbf{b}(\eta\mathbf{m}^\times - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times)}} \quad (24.12)$$

Знаменатель этого выражения может быть преобразован на основании формулы (26.54) к виду

$$\Delta = \mathbf{m}(\overline{\eta\mathbf{m}^\times - m'^{\times 2}\mathbf{q}^\times})[\mathbf{a}\mathbf{b}]. \quad (24.13)$$

Но  $[\mathbf{a}\mathbf{b}] = a^2 \cdot \mathbf{q}$ , а для взаимной матрицы, входящей в (24.13), можно использовать выражение (26.65). В результате несложных преобразований получаем

$$\Delta = 4n^2 a^2 \eta^3. \quad (24.14)$$



Числитель выражения (24.12) легко приводится к виду

$$[m, [\eta h'' - m'^{\times 2} q^{\times} e''], [ab]] (\eta m^{\times} - m'^{\times 2} q^{\times}) = \\ = a^2 \cdot m^{\times} (\eta m^{\times} - q^{\times} m'^{\times 2}) q^{\times} (\eta h'' - m'^{\times 2} q^{\times} e''). \quad (24.15)$$

Входящий сюда оператор можно преобразовать следующим образом:

$$m^{\times} (\eta m^{\times} - q^{\times} m'^{\times 2}) q^{\times} = (\eta (m \cdot m - n^2) - \\ - m^{\times} q^{\times} (m' \cdot m' - n^2)) q^{\times} = 2\eta (m \cdot a - n^2 q^{\times}) = 2\eta m^{\times 2} q^{\times}. \quad (24.16)$$

Таким образом, окончательно для  $e$  получается выражение

$$e = \frac{1}{2n^2 \eta^2} m^{\times 2} q^{\times} (\eta h'' - m'^{\times 2} q^{\times} e''). \quad (24.17)$$

Поскольку  $e$ ,  $h$  и  $e'$ ,  $h'$  входят в уравнения (24.3) симметрично, то выражение для  $e'$  получается из (24.17) путем взаимной перестановки штрихованных и нештрихованных величин:

$$\eta \rightleftharpoons \eta', \quad m \rightleftharpoons m', \quad e \rightleftharpoons e', \quad h \rightleftharpoons h'. \quad (24.18)$$

В результате сразу получаем

$$e' = \frac{-1}{2n^2 \eta^2} m'^{\times 2} q^{\times} (\eta h'' + m^{\times 2} q^{\times} e''). \quad (24.19)$$

Аналогично тому, что было показано в § 8, в общем случае, когда имеются две преломленных волны  $C_1 e_1''$  и  $C_2 e_2''$ , общее решение будет иметь вид

$$e = C_1 e_1 + C_2 e_2, \quad e' = C_1 e_1' + C_2 e_2', \quad e'' = C_1 e_1'' + C_2 e_2'', \quad (24.20)$$

где (см. (24.17), (24.19))

$$e_1 = \frac{1}{2n^2 \eta^2} \rho u_1, \quad e_2 = \frac{1}{2n^2 \eta^2} \rho u_2, \quad \rho = m^{\times 2} q^{\times} = m \cdot a - n^2 q^{\times}, \quad (24.21)$$

$$e_1' = -\frac{1}{2n^2 \eta^2} \rho' u_1', \quad e_2' = -\frac{1}{2n^2 \eta^2} \rho' u_2',$$

$$\rho' = m'^{\times 2} q^{\times} = m' \cdot a - n^2 q^{\times}, \quad (24.22)$$

$$u_1 = \eta h_1'' - \rho e_1'', \quad u_2 = \eta h_2'' - \rho e_2'', \quad (24.23)$$

$$u_1' = \eta h_1'' + \rho e_1'', \quad u_2' = \eta h_2'' + \rho e_2''. \quad (24.24)$$

Чтобы найти коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  по заданному полю падающей волны, достаточно умножить первое уравнение (24.20) на  $[e_2 m]$  и  $[e_1 m]$ . В результате получим

$$C_1 = \frac{m[ee_2]}{m[e_1e_2]} = \frac{e_2h}{m[e_1e_2]}, \quad C_2 = -\frac{m[ee_1]}{m[e_1e_2]} = -\frac{e_1h}{m[e_1e_2]}. \quad (24.25)$$

Знаменатель этих выражений, согласно (24.21), (26.54), можно представить в виде

$$m[e_1e_2] = \frac{1}{4n^4\eta^4} m[\rho u_1, \rho u_2] = \frac{1}{4n^4\eta^4} m\bar{\rho}[u_1u_2]. \quad (24.26)$$

Поскольку (см (26.53))

$$\bar{\rho} = \overline{(-q \times m \times^2)} = m \cdot m m \cdot m q \cdot q = n^2 \eta m \cdot q, \quad (24.27)$$

то, согласно (24.23),

$$\begin{aligned} m[e_1e_2] &= \frac{1}{4\eta^3} q[u_1u_2] = \\ &= \frac{1}{4\eta^3} q[\eta h_1'' - \rho' e_1'', \eta h_2'' - \rho' e_2'']. \end{aligned} \quad (24.28)$$

Если раскрыть векторное произведение и учесть, что аналогично (24.26)

$$q[\rho' e_1'', \rho' e_2''] = q\bar{\rho}'[e_1'' e_2''] = n^2 \eta^2 q[e_1'' e_2''],$$

то знаменателю формул (24.25) можно придать вид

$$\begin{aligned} m[e_1e_2] &= \frac{1}{4\eta^2} \{ \eta q([h_1'' h_2''] + n^2[e_1'' e_2'']) + \\ &+ q([h_2'', \rho' e_1''] - [h_1'', \rho' e_2'']) \}. \end{aligned} \quad (24.29)$$

Заметим, что

$$\rho\rho' = n^2 \eta m \times q \times, \quad \rho'\rho = -n^2 \eta m' \times q \times. \quad (24.30)$$

Полагая в формулах (24.21)—(24.24)  $e'' = a$ ,  $h'' = [m''a]$ , т. е. считая вторую среду изотропной негиротропной и немагнитной, получаем

$$e = \frac{\eta + \eta''}{2\eta} a, \quad e' = \frac{\eta - \eta''}{2\eta} a. \quad (24.31)$$

Если же  $e'' = [m''a]$ ,  $h'' = [m''e''] = -n^2 a$ , то

$$\begin{aligned} e &= \frac{(\eta + \eta'')(a^2 + \eta\eta'')}{2n^2\eta} [ma], \\ e' &= \frac{(\eta - \eta'')(a^2 - \eta\eta'')}{2n^2\eta} [m'a]. \end{aligned} \quad (24.32)$$

Эти результаты находятся в полном соответствии с формулами (8.54) — (8.56) для изотропных сред. Если подставить в (24.21)—

(24.24)  $\mathbf{e}_1'' = \mathbf{e}_o = [\mathbf{m}_o \mathbf{c}]$ ,  $\mathbf{h}_1'' = \mathbf{h}_o = [\mathbf{m}_o [\mathbf{m}_o \mathbf{c}]]$  или  $\mathbf{e}_2'' = \mathbf{e}_e = -[\mathbf{p}_e [\mathbf{m}_e \mathbf{c}]]$ ,  $\mathbf{h}_2'' = \mathbf{h}_e = [\mathbf{m}_e \mathbf{c}]$ , что соответствует одноосному немагнитному негиротропному кристаллу, взятому в качестве второй среды (см. § 4), то мы получим формулы (8.31) — (8.34).

При падении света на полубесконечную среду практический интерес представляет отраженная волна, для электрического поля которой из (24.20) — (24.25) получаем выражение

$$\mathbf{e}' = \frac{\tau \mathbf{h}}{\mathbf{m} [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]}, \quad \tau = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (24.33)$$

Для тензора  $\tau$ , согласно (24.21), (24.22), имеем

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{4n^4 \eta^4} (\rho' \mathbf{u}'_2 \cdot \rho \mathbf{u}_1 - \rho' \mathbf{u}_1 \cdot \rho \mathbf{u}'_2) = \\ &= \frac{1}{4n^4 \eta^4} \rho' (\mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}_2) \tilde{\rho}. \end{aligned} \quad (24.34)$$

В свою очередь (см. (24.23), (24.24))

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= (\eta \mathbf{h}_2'' + \rho \mathbf{e}_2'') \cdot (\eta \mathbf{h}_1'' - \rho' \mathbf{e}_1'') - \\ &- (\eta \mathbf{h}_1'' + \rho' \mathbf{e}_1'') \cdot (\eta \mathbf{h}_2'' - \rho \mathbf{e}_2'') = \eta^2 (\mathbf{h}_2'' \cdot \mathbf{h}_1'' - \mathbf{h}_1'' \cdot \mathbf{h}_2'') - \\ &- \rho (\mathbf{e}_2'' \cdot \mathbf{e}_1'' - \mathbf{e}_1'' \cdot \mathbf{e}_2'') \tilde{\rho}' + \eta [\rho (\mathbf{e}_2'' \cdot \mathbf{h}_1'' - \mathbf{e}_1'' \cdot \mathbf{h}_2'') + \\ &+ (\mathbf{h}_1'' \cdot \mathbf{e}_2'' - \mathbf{h}_2'' \cdot \mathbf{e}_1'') \tilde{\rho}']. \end{aligned} \quad (24.35)$$

Поскольку для любых векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  (см. (26.44))

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = [\mathbf{y} \mathbf{x}]^\times, \quad (24.36)$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= \eta^2 [\mathbf{h}_1'' \mathbf{h}_2'']^\times - \rho [\mathbf{e}_1'' \mathbf{e}_2'']^\times \tilde{\rho}' + \\ &+ \eta (\rho \sigma + \tilde{\sigma} \tilde{\rho}'), \end{aligned} \quad (24.37)$$

где

$$\sigma = \mathbf{e}_2'' \cdot \mathbf{h}_1'' - \mathbf{e}_1'' \cdot \mathbf{h}_2''. \quad (24.38)$$

Согласно (26.45), при любых  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x}^\times \mathbf{y}^\times \mathbf{x}^\times = -\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}^\times. \quad (24.39)$$

Поскольку  $\tilde{\rho} = -\mathbf{q}^\times \mathbf{m}^{\times 2}$ , то из (24.34) следует после некоторых преобразований

$$\tau = \frac{1}{4n^4 \eta^2} \mathbf{m}'^\times \chi \mathbf{m}^\times, \quad (24.40)$$

$$\begin{aligned} \chi &= \mathbf{q} [\mathbf{h}_1'' \mathbf{h}_2''] \cdot \mathbf{m}'^\times \mathbf{q}^\times \mathbf{m}^\times - n^4 \mathbf{q} \mathbf{d} \cdot \mathbf{q}^\times + \\ &+ n^2 (\mathbf{q}^\times \sigma \mathbf{q}^\times \mathbf{m}^\times + \mathbf{m}'^\times \mathbf{q}^\times \tilde{\sigma} \mathbf{q}^\times). \end{aligned} \quad (24.40a)$$

Здесь использовано (24.30), (24.39) и обозначение

$$\mathbf{d} = [\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_2^*]. \quad (24.41)$$

Поскольку в первой (изотропной) среде  $\epsilon \mathbf{e} = n^2 \mathbf{e} = -[\mathbf{m} \mathbf{h}]$ , то, согласно (24.33), (24.40), имеем

$$\mathbf{e}' = \tau_1 \mathbf{e}, \quad \tau_1 = -\frac{1}{4n^2 \eta^2 m [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]} m' \times \chi. \quad (24.42)$$

Заметим, что с помощью (24.38), (24.41) выражению (24.29) можно придать вид

$$m [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] = \frac{1}{4\eta^2} (\eta q ([\mathbf{h}_1^* \mathbf{h}_2^*] + n^2 \mathbf{d}) + (\sigma q \times \rho')_i). \quad (24.42a)$$

Соотношения (24.40a), (24.42a) полностью определяют электрический вектор отраженной волны. Если подставить в них  $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{e}_2^* = \mathbf{h}_1^* = [\mathbf{m}^* \mathbf{a}]$ ,  $\mathbf{h}_2^* = [\mathbf{m}^* \mathbf{e}_2] = -n^2 \mathbf{a}$ , то после некоторых преобразований эти соотношения приводят к выражениям (8.55), (8.56) для электрического вектора волны, отраженной от изотропной немагнитной негиротропной среды.

Рассмотрим отражение плоской волны от изотропно-гиротропной прозрачной среды. В этом случае (см. (22.7), (22.8))  $\epsilon^0 = \epsilon_0$  и  $\beta = \beta_0$  являются скалярами,  $\mathbf{m} \mathbf{E} = 0$  и уравнение (22.7) принимает вид

$$\mathbf{E} = \frac{i\beta_0 n}{n^2 - \epsilon_0} [n \mathbf{E}] = \pm i [n \mathbf{E}]. \quad (24.43)$$

Соответственно получаем уравнение нормалей

$$\frac{\beta_0 n}{n^2 - \epsilon_0} = \pm 1, \quad n^2 \mp \beta_0 n - \epsilon_0 = 0, \quad (24.44)$$

откуда следуют значения показателя преломления

$$n_{\pm} = \kappa \pm \frac{1}{2} \beta_0, \quad \kappa = \sqrt{\epsilon_0 + \frac{1}{4} \beta_0^2}, \quad (24.45)$$

причем здесь знаки  $\pm$  соответствуют знакам в формуле (24.44). Однако для нахождения  $\eta_{\pm}$  нам придется взять уравнение (24.45) в виде

$$n^2 = m^2 = \epsilon_0 + \frac{1}{2} \beta_0^2 \pm \kappa \beta_0 \quad (24.46)$$

и подставить в него выражение (24.1). В результате получим

$$\eta_{\pm} = \sqrt{\epsilon_0^2 - a^2 + \frac{1}{2} \beta_0^2 \pm \kappa \beta_0}. \quad (24.47)$$

Итак, мы имеем две преломленных волны с векторами рефракции

$$\mathbf{m}_{\pm} = \mathbf{b} + \eta_{\pm} \mathbf{q} \quad (24.48)$$

и волновыми нормальями

$$n_{\pm} = \frac{\mathbf{m}_{\pm}}{n_{\pm}} = \frac{\mathbf{b} + \eta_{\pm} \mathbf{q}}{\kappa \pm \frac{1}{2} \beta_0}, \quad (24.49)$$

которым соответствуют круговые векторы электрического поля

$$\mathbf{E}_{\pm} = \pm i [n_{\pm} \mathbf{E}_{\pm}]. \quad (24.50)$$

Согласно (22.29), для соответствующих векторов магнитного поля будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\pm} &= \left( \mathbf{m}_{\pm}^{\times} + i \left( \frac{1}{2} \beta_t - \beta \right) \right) \mathbf{E}_{\pm} = \left( \mathbf{m}_{\pm}^{\times} + \frac{i}{2} \beta_0 \right) \mathbf{E}_{\pm} = \\ &= i \left( \mp n_{\pm} + \frac{1}{2} \beta_0 \right) \mathbf{E}_{\pm}, \end{aligned} \quad (24.51)$$

или (см. (24.45))

$$\mathbf{H}_{\pm} = \mp i \kappa \mathbf{E}_{\pm}. \quad (24.52)$$

В соответствии с (22.29), (22.30) для векторов индукции получим

$$\mathbf{B}_{\pm} = [m_{\pm} \mathbf{E}_{\pm}] = \mp i n_{\pm} \mathbf{E}_{\pm}, \quad \mathbf{D}_{\pm} = -[m_{\pm} \mathbf{H}_{\pm}] = \kappa n_{\pm} \mathbf{E}_{\pm}. \quad (24.53)$$

Явные выражения для векторов  $\mathbf{E}_{\pm}$  можно взять в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{\pm} = \mathbf{a} \pm i [n_{\pm} \mathbf{a}] = \mathbf{e}_{\pm}^{\prime\prime}, \quad \mathbf{a} \mathbf{e}_{\pm}^{\prime\prime} = \mathbf{a}^2. \quad (24.54)$$

Легко видеть, что при этом выполняется соотношение (24.50).

Найдем главные векторы падающей и отраженной волн, соответствующие базисным векторам (24.54). Вместо  $\mathbf{u}_{1,2}$  будем писать  $\mathbf{u}_{\pm}$  и вместо  $\mathbf{u}'_{1,2} - \mathbf{u}'_{\pm}$ . Согласно (24.23), (24.24), (24.52), (24.54), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\pm} &= (\mp i \eta \kappa - \rho') (\mathbf{a} \pm i [n_{\pm} \mathbf{a}]) = \eta (\eta \mathbf{b} + \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{q} + \\ &+ \kappa [n_{\pm} \mathbf{a}]) \mp i \left( n^2 \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} + \eta \kappa \right) \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (24.55)$$

$$\mathbf{u}'_{\pm} = \eta (\eta \mathbf{b} - \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{q} - \kappa [n_{\pm} \mathbf{a}]) \mp i \left( n^2 \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} - \eta \kappa \right) \mathbf{a}. \quad (24.56)$$

Формула (24.56) получается из (24.55), как и все формулы для отраженных волн, из формул для падающих волн путем

замены  $m \rightleftharpoons m'$ ,  $\eta \rightleftharpoons -\eta$ . Поскольку

$$[ma] = [m[bq]] = \eta b - a^2 \cdot q, \quad [m'a] = -(\eta b + a^2 \cdot q),$$

то формулы (24.55), (24.56) можно написать короче:

$$u_{\pm} = -\eta [m' - \kappa n_{\pm}, a] \mp i \left( n^2 \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} + \eta \kappa \right) a, \quad (24.57)$$

$$u'_{\pm} = \eta [m - \kappa n_{\pm}, a] \mp i \left( n^2 \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} - \eta \kappa \right) a. \quad (24.58)$$

Соответственно получим (см. (24.21), (24.22))

$$e_{\pm} = \frac{1}{2n^2\eta} \left( n^2 \left( \eta + \kappa \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} \right) a \pm i \left( \kappa \eta + n^2 \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} \right) [ma] \right), \quad (24.59)$$

$$e'_{\pm} = \frac{1}{2n^2\eta} \left( n^2 \left( \eta - \kappa \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} \right) a \pm \right. \\ \left. \pm i \left( \kappa \eta - n^2 \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} \right) [m'a] \right). \quad (24.60)$$

Таким образом, для получения какой-либо одной из двух возможных преломленных волн (24.54), необходимо, чтобы падающая волна была эллиптически поляризована согласно (24.59). При этом отраженная волна будет поляризована согласно (24.60). Главные оси соответствующих эллипсов поляризации падающей волны расположены в плоскости падения и перпендикулярно к ней. Их отношение равно

$$\frac{n^2 \left( \eta + \kappa \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} \right) |a|}{\left( \kappa \eta + n^2 \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} \right) |[ma]|} = \frac{n \left( \eta + \kappa \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} \right)}{\kappa \eta + n^2 \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}}}. \quad (24.61)$$

Эллипсы, соответствующие различным знакам в (24.54), имеют неодинаковые отношения осей ввиду различия между  $\eta_+/n_+$  и  $\eta_-/n_-$ . Они имеют противоположные направления обхода. Аналогичными свойствами обладают эллипсы поляризации главных векторов отраженных волн (24.60).

Для знаменателя (24.29) получаем после некоторых вычислений с учетом соотношения (см. (24.22), (24.54))

$$\rho' e'_{\pm} = \eta [m'a] \pm in^2 \frac{\eta_{\pm}}{n_{\pm}} a \quad (24.62)$$

следующее выражение

$$m[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = m[\mathbf{e}_+\mathbf{e}_-] = -\frac{ia^2}{4\eta^2}[\eta(n^2 + \kappa^2)\xi_+ + 2\kappa(\eta^2 + n^2\zeta)]. \quad (24.63)$$

Здесь использованы обозначения

$$\xi_{\pm} = \frac{\eta_+}{n_+} \pm \frac{\eta_-}{n_-}, \quad \zeta = \frac{\eta_+\eta_-}{n_+n_-}. \quad (24.64)$$

Формулы (24.33), (24.59), (24.60), (24.63) дают общее решение задачи об отражении света от изотропно-гиротропной среды. Разумеется, с помощью соотношений (24.33), (24.40)–(24.42), (24.29) можно получить решение и для произвольного гиротропного кристалла.

Для сред, в которых  $\mathbf{h} = [m\mathbf{e}]$ , тензор  $\sigma$  (24.38) может быть записан в виде

$$\sigma = \mathbf{e}_2'' \cdot [m_1'' \mathbf{e}_1''] - \mathbf{e}_1'' \cdot [m_2'' \mathbf{e}_2'']. \quad (24.65)$$

Как известно (§ 8),  $m_1'' = \mathbf{b} + \eta_1''\mathbf{q}$ ,  $m_2'' = \mathbf{b} + \eta_2''\mathbf{q}$ . Введем обозначения

$$m_1'' = m^0 + \delta\mathbf{q}, \quad m_2'' = m^0 - \delta\mathbf{q}, \quad \delta = \frac{1}{2}(\eta_1'' - \eta_2''), \quad (24.66)$$

$$m^0 = \frac{1}{2}(m_1'' + m_2'') = \mathbf{b} + \eta^0\mathbf{q}, \quad \eta^0 = \frac{1}{2}(\eta_1'' + \eta_2'').$$

С их помощью получаем из (24.65)

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{e}_1'' \cdot \mathbf{e}_2'' m_2''^* - \mathbf{e}_2'' \cdot \mathbf{e}_1'' m_1''^* = \\ &= (\mathbf{e}_1'' \cdot \mathbf{e}_2'' - \mathbf{e}_2'' \cdot \mathbf{e}_1'') m^{0\times} - \delta(\mathbf{e}_1'' \cdot \mathbf{e}_2'' + \mathbf{e}_2'' \cdot \mathbf{e}_1'') \mathbf{q}^{\times}. \end{aligned} \quad (24.67)$$

Согласно (24.36),  $\mathbf{e}_1'' \cdot \mathbf{e}_2'' - \mathbf{e}_2'' \cdot \mathbf{e}_1'' = [\mathbf{e}_2'' \mathbf{e}_1'']^{\times}$ . Введем обозначения

$$\mathbf{d} = [\mathbf{e}_1'' \mathbf{e}_2''], \quad \gamma = \mathbf{e}_1'' \cdot \mathbf{e}_2'' + \mathbf{e}_2'' \cdot \mathbf{e}_1'' = \tilde{\gamma}. \quad (24.68)$$

Используя их, получаем для  $\sigma$  (24.67) выражение

$$\sigma = -(\mathbf{d}^{\times} m^{0\times} + \delta\gamma\mathbf{q}^{\times}). \quad (24.69)$$

Преобразуем выражение (24.29) для  $m[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$ . Произведение  $[h_1'' h_2'']$  можно представить в двух формах:

$$[h_1'' h_2''] = [[m_1'' \mathbf{e}_1''] [m_2'' \mathbf{e}_2'']] = m_2'' \cdot m_1'' \mathbf{d} + \mathbf{e}_2'' \cdot \mathbf{e}_1'' [m_1'' m_2''], \quad (24.70)$$

$$[h_1'' h_2''] = -[[m_2'' \mathbf{e}_2''] [m_1'' \mathbf{e}_1'']] = m_1'' \cdot m_2'' \mathbf{d} + \mathbf{e}_1'' \cdot \mathbf{e}_2'' [m_1'' m_2'']. \quad (24.70)$$

Согласно (24.66), имеем

$$m_1'' \cdot m_2'' + m_2'' \cdot m_1'' = 2(m^0 \cdot m^0 - \delta^2 q \cdot q), \quad (24.71)$$

$$[m_1'' m_2''] = (\eta_2'' - \eta_1'') a = -2\delta a.$$

Очевидно,  $[h_1'', h_2'']$  равно полусумме выражений (24.70):

$$[h_1'' h_2''] = (m^0 \cdot m^0 - \delta^2 q \cdot q) d - \delta q a. \quad (24.72)$$

Заметим, что для введенного нами среднего вектора рефракции  $m^0$  справедливы обычные соотношения  $[m^0 q] = a$ ,  $m^0 q = \eta^0$ . Первый член выражения (24.42a) теперь принимает вид

$$q ([h_1'' h_2''] + n^2 d) = (\eta^0 m^0 + (n^2 - \delta^2) q) d - \delta q a. \quad (24.73)$$

Рассмотрим второй член, входящий в (24.42a),

$$(\sigma q \times \rho')_i = -(\sigma (a \cdot a + n^2 q \times q))_i = -\sigma a + n^2 (\sigma_i - q \sigma q). \quad (24.74)$$

Используя (24.69), находим

$$\sigma a = [ad] [am^0] - \delta a \gamma b = a^2 m^0 d - \delta a \gamma b, \quad (24.74a)$$

$$q \sigma q = [dq] a = db, \quad \sigma_i = 2m^0 d.$$

Таким образом, согласно (24.74), имеем после простых вычислений

$$(\sigma q \times \rho')_i = (n^2 + \eta^2) m^0 d - n^2 b d + \delta a \gamma b. \quad (24.75)$$

В результате (см. (24.29), (24.73), (24.75)) получаем окончательно

$$m [e_1 e_2] = \frac{1}{4\eta^2} \{[(\eta + \eta^0)(\eta m^0 + n^2 q) - \delta^2 \eta q] d + \delta m' \gamma a\}. \quad (24.76)$$

С помощью (24.69), (24.72) тензору  $\chi$  (24.40a) можно придать иную форму. Используем соотношения

$$\begin{aligned} m' \times q \times m \times &= \eta (2a \cdot q - m' \times) = \eta (2q \cdot a + m \times) = \\ &= \eta (a \cdot q + q \cdot a + \eta q \times), \end{aligned} \quad (24.77)$$

$$\begin{aligned} q \times \sigma q \times m \times + m' \times q \times \tilde{\sigma} q \times &= q \times \sigma q \times b \times + \\ + b \times q \times \tilde{\sigma} q \times + \eta (q \times \sigma q \times^2 - q \times^2 \tilde{\sigma} q \times). \end{aligned} \quad (24.78)$$

В последнем равенстве первые два члена составляют антисимметричный тензор. Чтобы убедиться в этом, достаточно транспонировать их. Поскольку  $q \times b \times = b \cdot q$ ,  $b \times q \times = q \cdot b$ , то на основании (24.36) получаем

$$q \times \sigma q \times b \times + b \times q \times \tilde{\sigma} q \times = q \times \sigma b \cdot q - q \cdot q \times \sigma b = [q [q, \sigma b]] \times.$$



Подставляя сюда (24.69), имеем

$$[q [q, \sigma b]] = \delta [q [q, \gamma a]] - \eta^0 q d . b. \quad (24.79)$$

Последний член в (24.78) является симметричной матрицей, которая преобразуется к виду

$$q \times \sigma q \times^2 - q \times^2 \tilde{\sigma} q \times = a . q \times^2 d + q \times^2 d . a + 2 \delta q \times \gamma q \times. \quad (24.80)$$

Собирая все эти соотношения, получим для  $\chi$  (24.40a) выражение

$$\begin{aligned} \chi = & \eta ((\eta^0 m^0 - \delta^2 q) d - \delta q \gamma a) (2q . a + m \times) - n^2 q d . (n^2 q + \eta^0 b) \times + \\ & + n^2 \eta (a . q \times^2 d + q \times^2 d . a) + n^2 \delta ([q [q, \gamma a]] \times + 2 \eta q \times \gamma q \times), \end{aligned} \quad (24.81)$$

Применение (24.42), (24.76), (24.81) к изотропным средам дает известные результаты (§ 8). Представление (24.76), (24.81) удобно тем, что в нем явно выделена зависимость от анизотропии кристалла, характеризуемой параметром  $\delta$ . При малой анизотропии можно пренебрегать степенями  $\delta$ , равными или выше второй, что упрощает расчеты.

При падении света из изотропной среды на кристалл обычно используется разложение векторов поля падающей и отраженной волн на компоненты, параллельные и перпендикулярные плоскости падения. Для электрического поля падающей волны это разложение имеет вид (см. (9.16))

$$E = A_1 a + A_2 [m a], \quad m E = 0 \quad (24.82)$$

и соответственно для отраженной волны

$$E' = A_1' a + A_2' [m' a], \quad m' E' = 0. \quad (24.83)$$

При этом ввиду линейности всех соотношений амплитуды отраженной волны линейно выражаются через амплитуды падающей волны:

$$A_1' = \tau_{11} A_1 + \tau_{12} A_2, \quad A_2' = \tau_{21} A_1 + \tau_{22} A_2. \quad (24.84)$$

Таким образом, задача определения отраженной волны целиком сводится к отысканию матрицы

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}. \quad (24.85)$$

Соотношения (24.42), (24.40a), (24.29) позволяют найти элементы  $\tau_{ab}$  ( $a, b = 1, 2$ ) в самом общем случае. Очевидно, при любом векторе  $x$  имеет место разложение

$$[m' x] = \xi_1 a + \xi_2 [m' a], \quad (24.86)$$

откуда после умножения на  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{q}$  без труда находим

$$\xi_1 = -\frac{[\mathbf{m}'\mathbf{a}]\mathbf{x}}{a^2}, \quad \xi_2 = \frac{\mathbf{a}\mathbf{x}}{a^2}. \quad (24.87)$$

Применим эти соотношения к равенству (см. (24.42))

$$\mathbf{E}' = -\frac{[\mathbf{m}', \chi\mathbf{E}]}{4n^2\eta^2\mathbf{m}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]}. \quad (24.88)$$

Полагая в (24.86), (24.87)  $\mathbf{x} = -\chi\mathbf{E}$ , будем иметь

$$-[\mathbf{m}', \chi\mathbf{E}] = \frac{1}{a^2}([\mathbf{m}'\mathbf{a}]\chi\mathbf{E}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\chi\mathbf{E}\cdot[\mathbf{m}'\mathbf{a}]). \quad (24.89)$$

Сравнивая (24.88), (24.89) с (24.83), находим

$$A'_1 = \frac{[\mathbf{m}'\mathbf{a}]\chi\mathbf{E}}{4n^2\eta^2\mathbf{a}^2\mathbf{m}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]}, \quad A'_2 = -\frac{\mathbf{a}\chi\mathbf{E}}{4n^2\mathbf{a}^2\eta^2\mathbf{m}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]}. \quad (24.90)$$

Отсюда в свою очередь с помощью (24.82), (24.84) получаем

$$T = \frac{1}{4n^2\mathbf{a}^2\eta^2\mathbf{m}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]} \begin{pmatrix} [\mathbf{m}'\mathbf{a}]\chi\mathbf{a} & [\mathbf{m}'\mathbf{a}]\chi[\mathbf{m}\mathbf{a}] \\ -\mathbf{a}\chi\mathbf{a} & -\mathbf{a}\chi[\mathbf{m}\mathbf{a}] \end{pmatrix}. \quad (24.91)$$

Используя выражение (24.40а) для  $\chi$ , находим после некоторых вычислений

$$\begin{aligned} [\mathbf{m}'\mathbf{a}]\chi\mathbf{a} &= n^2(\eta^2\mathbf{a}\sigma\mathbf{a} - n^2\mathbf{b}\sigma\mathbf{b} + \mathbf{a}^2\eta(n^2\mathbf{q}\mathbf{d} - \mathbf{q}[\mathbf{h}_1''\mathbf{h}_2''])), \\ [\mathbf{m}'\mathbf{a}]\chi[\mathbf{m}\mathbf{a}] &= 2n^4\eta\mathbf{a}\sigma\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}\chi\mathbf{a} = 2n^2\eta\mathbf{b}\sigma\mathbf{q}, \\ -\mathbf{a}\chi[\mathbf{m}\mathbf{a}] &= n^2(\eta^2\mathbf{a}\sigma\mathbf{a} - n^2\mathbf{b}\sigma\mathbf{b} - \mathbf{a}^2\eta(n^2\mathbf{q}\mathbf{d} - \mathbf{q}[\mathbf{h}_1''\mathbf{h}_2''])). \end{aligned} \quad (24.92)$$

Окончательно элементы матрицы  $T$  (24.85), (24.91) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{1}{\Delta}(\xi_0 + \xi), \quad \tau_{22} = \frac{1}{\Delta}(\xi_0 - \xi), \\ \tau_{12} &= \frac{2n^2\eta}{\Delta}\mathbf{a}\sigma\mathbf{b}, \quad \tau_{21} = \frac{2n^2\eta}{\Delta}\mathbf{b}\sigma\mathbf{a}, \end{aligned} \quad (24.93)$$

где

$$\xi_0 = \eta^2\mathbf{a}\sigma\mathbf{a} - n^2\mathbf{b}\sigma\mathbf{b}, \quad \xi = \mathbf{a}^2\eta(n^2\mathbf{q}\mathbf{d} - \mathbf{q}[\mathbf{h}_1''\mathbf{h}_2'']), \quad (24.94)$$

$$\Delta = \mathbf{a}^2[\eta(n^2\mathbf{q}\mathbf{d} + \mathbf{q}[\mathbf{h}_1''\mathbf{h}_2'']) + n^2(\sigma_t - \mathbf{q}\sigma\mathbf{q}) - \mathbf{a}\sigma\mathbf{a}].$$

Эти формулы пригодны для отражающей среды, обладающей любыми видами анизотропии. Если во второй среде справедливо уравнение  $\mathbf{H} = [\mathbf{m}\mathbf{E}]$ , то для  $\sigma$  и  $[\mathbf{h}_1''\mathbf{h}_2'']$  могут быть использованы формулы (24.69), (24.72).

### ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ПРЯМОГО ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Наличие анизотропии существенно усложняет теорию физических явлений в кристаллах. Неравноправие различных направлений влечет за собой необходимость использования тензорных величин для характеристики физических свойств анизотропных сред. В соответствии с этим в кристаллооптике приходится иметь дело с тензорами диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , магнитной проницаемости  $\mu$ , электропроводности  $\sigma$ , а в гиротропных кристаллах еще и с тензором гирации  $\alpha$ . В кристаллах низшей симметрии матрицы этих тензоров не коммутируют между собой, что вносит в теорию дополнительные усложнения. Тензоры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  обычно симметричны либо эрмитовы, что является упрощающим обстоятельством. Однако при описании явления оптической активности (гиротропии) кристаллов приходится использовать несимметричный тензор второго ранга  $\alpha$  (см. § 12). Благодаря этому соответствующая теория сильно усложняется, особенно при одновременном учете различных видов анизотропии.

В [4, 5] было показано, что использование прямых методов тензорного исчисления, не связанных с выбором конкретной системы координат, позволяет весьма значительно упростить теорию оптических свойств кристаллов, обладающих различными видами анизотропии. Эти методы оправдали себя и в теории распространения упругих волн в кристаллах [6]. В работах [117, 118, 133, 135] и ряде других упомянутый подход был применен к теории оптической активности кристаллов. В настоящей книге вся теория строится на основе использования ковариантных методов прямого тензорного исчисления. В этой главе приводится подробное изложение соответствующего математического аппарата. Это представляется тем более оправданным, что упомянутые методы до сих пор не получили еще в научной литературе, посвященной свойствам кристаллов, того распространения, которого они, по нашему убеждению, несомненно заслуживают. Мы пола-



Такая форма записи имеет в ряде отношений преимущества перед (25.1), (25.2). Во-первых, здесь векторы  $u$ ,  $v$  и матрица  $A$  выступают как некоторые единые объекты, что обычно полностью соответствует их физическому (механическому, геометрическому) смыслу. Так, например, в реальном физическом трехмерном пространстве  $v$  и  $u$  могут быть векторами момента силы и углового ускорения либо электрической индукции и напряженности поля, а матрица  $A$  будет соответственно тензором моментов инерции тела или тензором диэлектрической проницаемости кристалла и т. д. Компоненты же  $u_\alpha$ ,  $v_\beta$  есть не что иное, как коэффициенты разложения векторов  $u$ ,  $v$  по некоторой фиксированной системе  $n$  линейно независимых векторов, образующих базис пространства. В реальном трехмерном пространстве, например, это будут ортогональные проекции векторов  $u$  и  $v$  на оси прямоугольной декартовой системы координат. Следовательно, компоненты постоянных векторов  $u$  и  $v$  могут меняться в зависимости от выбора базиса пространства (системы координат). Таким образом, одно и то же определенное физическое свойство, выражаемое вектором, может представляться различными наборами чисел (компонент) ввиду произвола, связанного с выбором базиса. Как будет видно из дальнейшего, то же самое относится и к элементам матрицы  $A_{\alpha\beta}$ , поскольку они также зависят от выбора базиса. Ясно, что такое положение не является вполне удовлетворительным. При записи в форме (25.4) мы освобождаемся от этого недостатка, поскольку в соотношении не фигурируют отдельные компоненты векторов  $u_\alpha$ ,  $v_\beta$  и элементы матрицы  $A_{\alpha\beta}$ .

Кроме того, соотношение (25.4) внешне является более компактным, простым и наглядным, чем (25.1), (25.2). Далее, оказывается, что, используя некоторые основные свойства векторов и матриц, можно производить разнообразные выкладки и расчеты, не переходя к компонентам и тем самым не связывая себя с выбором частного базиса в пространстве. Такие расчеты оказываются зачастую более простыми и компактными, чем соответствующие выводы, проделанные в компонентах.

Несмотря на то что уравнения (25.1), (25.2), (25.4) выражают, по существу, одно и то же соотношение, между ними имеются существенные различия. Входящие в (25.1), (25.2) величины  $u_\alpha$ ,  $v_\beta$ ,  $A_{\alpha\beta}$  представляют собой обыкновенные числа, и поэтому для них справедливы все законы действий над числами, в частности коммутативность, дистрибутивность и ассоциативность. Поэтому в правой части соотношения (25.2), не нарушая его справедливости, мы можем переставить множители и написать его в виде

$$v_\alpha = u_\beta A_{\alpha\beta}. \quad (25.5)$$

В то же время в уравнении (25.4) подобная операция недопустима, поскольку  $u$ ,  $v$ ,  $A$  представляют собой не обычные числа, а более сложные объекты, некоторые упорядоченные совокупности чисел. Тем не менее и в соотношении (25.4), введя надлежащие определения, мы можем добиться того, чтобы оно сохраняло смысл при перестановке величин, стоящих в правой части.

Введем следующее общее условие: если какие-либо векторы или матрицы стоят рядом без всяких значков между ними, то это означает их свертку, т. е. суммирование по соседним индексам обеих величин. Например, если рядом стоят два вектора, то такое выражение имеет следующий смысл:

$$uv = u_{\alpha}v_{\alpha} \quad (25.6)$$

и представляет собой скалярное произведение обоих векторов. Другим примером служит соотношение (25.4), смысл которого раскрывается уравнением (25.2). Повторяющиеся индексы  $\beta$ , по которым производится суммирование в (25.2), называются немymi, а индексы  $\alpha$  — свободными. Очевидно, немые индексы можно обозначить как угодно, поскольку по ним производится суммирование, поэтому, например,  $A_{\alpha\beta}u_{\beta} \equiv A_{\alpha\gamma}u_{\gamma}$ . Если в одно выражение входит несколько пар немых индексов, то каждая пара обязательно должна обозначаться различными буквами во избежание путаницы. Что же касается свободных индексов, то простое правило, которое должно выполняться для всех правильных соотношений, гласит, что совокупность свободных индексов в правой и левой частях любого равенства всегда должна быть одинаковой.

Сформулированные выше два правила мы будем называть правилом немых индексов и правилом свободных индексов. Вкратце их можно выразить еще так:

**Правило немых индексов.** При переходе от записи в индексах к прямой записи или наоборот немые индексы всегда должны быть соседними.

**Правило свободных индексов.** Свободные индексы всегда одинаковы в обеих частях равенства.

Рассмотрим примеры применения этих правил. Соотношение

$$v = uA, \quad (25.7)$$

где  $v$  и  $u$  — векторы,  $A$  — матрица \*), согласно указанным правилам, с помощью индексов запишется следующим образом:

$$v_{\alpha} = u_{\beta}A_{\beta\alpha}. \quad (25.8)$$

\*) Мы считаем здесь вектором всякую величину, зависящую от одного индекса, и матрицей — величину, определяемую двумя индексами, причем все индексы принимают одну и ту же совокупность значений.

После перехода к координатной записи мы можем ставить сомножители в (25.8) в любом порядке. Сравнивая (25.8) и (25.5), видим, что эти соотношения различаются за счет замены  $A_{\alpha\beta}$  на  $A_{\beta\alpha}$ . Поскольку в общем случае  $A_{\alpha\beta} \neq A_{\beta\alpha}$ , то соотношения (25.5) и (25.8) не совпадают. Из (25.3) ясно, что первый индекс в  $A_{\alpha\beta}$  определяет строку, а второй — столбец, на пересечении которых находится элемент  $A_{\alpha\beta}$ . Поэтому перестановка индексов у всех элементов матрицы  $A$  равносильна перестановке ее строк и столбцов. Такая операция называется транспонированием, а получаемая в результате новая матрица — транспонированной матрицей. Мы будем обозначать транспонирование знаком  $\tilde{\phantom{A}}$  (тильда) над символом матрицы. Таким образом, по определению

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}. \quad (25.9)$$

Теперь равенство (25.8) можно написать в виде

$$v_{\alpha} = A_{\beta\alpha} v_{\beta} = \tilde{A}_{\alpha\beta} u_{\beta}. \quad (25.10)$$

В этом соотношении все индексы входят в соответствие с обими указанными выше правилами, поэтому переход к бескоординатной записи осуществляется непосредственно и дает

$$v = \tilde{A}u. \quad (25.11)$$

Так как (25.10) есть то же соотношение, что и (25.8), то соответственно (25.11) совпадает с (25.7). Мы имеем, следовательно,

$$uA = \tilde{A}u. \quad (25.12)$$

Очевидно, двукратное транспонирование всякой матрицы не меняет ее, что выражается равенством

$$\tilde{\tilde{A}} = A. \quad (25.13)$$

Поэтому, если обозначить  $B = \tilde{A}$ , то  $\tilde{B} = A$ . При этом уравнение (25.12) имеет вид

$$u\tilde{B} = Bu. \quad (25.14)$$

Соотношения (25.12), (25.14) справедливы при произвольных  $A, B$ . Оба соотношения выражают следующее общее свойство: всякая матрица, умноженная слева (справа) на вектор, дает тот же результат, что и транспонированная матрица, умноженная справа (слева) на тот же вектор. Иными словами, в произведении матрицы на вектор матрицу можно перенести с одной стороны вектора на другую, заменяя ее при этом транспонированной матрицей.

Весьма важным типом матрицы является симметричная матрица, которая совпадает со своей транспонированной. Для такой матрицы

$$\tilde{A} = A, \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}. \quad (25.15)$$

Противоположный случай представляет собой антисимметричная матрица, изменяющая знак при транспонировании. Для такой матрицы

$$\tilde{B} = -B, \quad B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}. \quad (25.16)$$

Из последнего равенства следует, что в антисимметричной матрице диагональные элементы, для которых  $\alpha = \beta$ , равны нулю. Согласно (25.12), для симметричной матрицы (и только для такой матрицы)

$$uA = Au \quad (A = \tilde{A}) \quad (25.17)$$

при любом векторе  $u$ . Аналогично для антисимметричной матрицы при любом  $u$  справедливо соотношение

$$uB = -Bu \quad (B = -\tilde{B}). \quad (25.18)$$

Сумма матриц определяется как матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов слагаемых матриц.

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Всякая матрица  $C$  может быть однозначно представлена в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц:

$$C = A + B, \quad A = \frac{1}{2}(C + \tilde{C}) = \tilde{A}, \quad B = \frac{1}{2}(C - \tilde{C}) = -\tilde{B}. \quad (25.19)$$

Умножим равенство (25.2) на  $\omega_\alpha$  (и просуммируем по  $\alpha$ ):

$$v_\alpha \omega_\alpha = A_{\alpha\beta} \mu_\beta \omega_\alpha. \quad (25.20)$$

Чтобы перейти в этом соотношении к бескоординатной записи, следует расположить справа сомножители в соответствии с правилом немых индексов, т. е. следующим образом:  $\omega_\alpha A_{\alpha\beta} \mu_\beta$ . Слева это правило будет соблюдено при любом порядке сомножителей. В результате получим

$$\omega v = \omega v = \omega Au = \omega_\alpha A_{\alpha\beta} \mu_\beta. \quad (25.21)$$

Учитывая (25.9), можем написать  $A_{\alpha\beta} \mu_\beta \omega_\alpha = \mu_\beta \tilde{A}_{\beta\alpha} \omega_\alpha$ , следовательно, справедливо соотношение

$$\omega Au = u \tilde{A} \omega. \quad (25.22)$$



Отсюда следует, что для любой матрицы  $A$  при  $u = w$  имеем

$$uAu = u\tilde{A}u. \quad (25.22a)$$

Для симметричной матрицы  $A$  при любых  $u, w$

$$uAw = wAu \quad (A = \tilde{A}). \quad (25.23)$$

Если матрица  $A$  антисимметрична ( $\tilde{A} = -A$ ), то из (25.22a) следует при любом векторе  $u$ :

$$uAu = u\tilde{A}u = -uAu = 0. \quad (25.23a)$$

Выражение  $A_{\alpha\beta}u_\beta w_\alpha$  представляет собой билинейную форму из компонент  $u_\beta$  и  $w_\alpha$ , причем  $A_{\alpha\beta}$  служат коэффициентами этой формы. Согласно (25.21), (25.22), такая форма может быть записана в двух видах, отличающихся порядком векторов и транспонированием матрицы формы  $A$ .

Преобразуя вектор  $v$ , входящий в уравнение (25.4), с помощью некоторой матрицы  $B$  мы получим

$$w = Bv = BAu. \quad (25.24)$$

Переходя к записи в индексах с помощью сформулированных выше правил, получаем

$$w_\gamma = B_{\gamma\alpha}v_\alpha = B_{\gamma\alpha}A_{\alpha\beta}u_\beta. \quad (25.25)$$

Обозначим

$$C = (C_{\gamma\beta}) = BA, \quad C_{\gamma\beta} = B_{\gamma\alpha}A_{\alpha\beta}. \quad (25.26)$$

Очевидно, вектор  $w$  получается из вектора  $u$  путем линейного преобразования с помощью матрицы  $C$ , которая называется произведением матриц  $B$  и  $A$ . Уравнения (25.26) дают определение произведения двух матриц. В общем случае  $BA \neq AB$ , т. е. произведение матриц зависит от порядка сомножителей. Однако в частных случаях возможно выполнение соотношения

$$BA = AB. \quad (25.27)$$

Тогда говорят, что матрицы  $A$  и  $B$  коммутируют или перестановочны друг с другом. Произведение трех и более матриц, как нетрудно убедиться на основании (25.26), обладает свойством ассоциативности:

$$(AB)C = A(BC). \quad (25.28)$$

Транспонируя обе части равенства (25.26), получаем

$$\tilde{C}_{\gamma\beta} = C_{\beta\gamma} = B_{\beta\alpha}A_{\alpha\gamma} = \tilde{A}_{\gamma\alpha}\tilde{B}_{\alpha\beta}.$$

В бескоординатной записи это соотношение гласит  $\tilde{C} = \tilde{A}\tilde{B}$ . Таким образом,

$$\tilde{B}\tilde{A} = \tilde{A}\tilde{B}. \quad (25.29)$$

Для произведения трех матриц получим на основании (25.28)

$$\widetilde{CBA} = \widetilde{C(BA)} = \tilde{B}\tilde{A}\tilde{C} = \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}. \quad (25.30)$$

Следовательно, результат транспонирования произведения любого числа матриц равен произведению транспонированных матриц в обратном порядке. Из (25.29) видно, в частности, что если  $\tilde{A}=A$ ,  $\tilde{B}=B$ , то из этого еще не следует, что произведение  $BA$  будет симметричной матрицей, так как вообще  $\tilde{B}\tilde{A}=AB \neq BA$ . Произведение двух симметричных матриц будет симметричной матрицей лишь в случае, если они коммутируют. Так как всякая матрица коммутирует сама с собой, то любая целая степень симметричной матрицы также будет симметричной матрицей.

В случае антисимметричных матриц, как нетрудно убедиться, четная их степень будет симметричной и нечетная — антисимметричной матрицей.

Матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (25.31)$$

называется единичной. Ее элементы совпадают со значениями символа Кронекера:  $E_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  ( $\delta_{\alpha\beta} = 1$  при  $\alpha = \beta$ ,  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ). Легко убедиться, что при умножении любого вектора  $u$  на единичную матрицу справа или слева этот вектор не меняется \*):

$$Eu = uE = u. \quad (25.32)$$

То же самое справедливо и для умножения любой матрицы  $A$  на единичную

$$EA = AE = A. \quad (25.33)$$

Таким образом, умножение на  $E$  ничем не отличается от умножения на число, равное единице. Аналогично умножение любого вектора или матрицы на какое-либо число  $k$  дает тот же результат, что и умножение на матрицу

\* ) Отметим, что и наоборот, если некоторая матрица оставляет неизменным любой вектор, то она является единичной.

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = kE. \quad (25.34)$$

Матрица вида (25.34) называется *скалярной*. В дальнейшем мы не будем делать различия между числом  $k$  и соответствующей скалярной матрицей. Так, например, для суммы некоторой матрицы  $A$  и скалярной матрицы  $kE$  мы будем писать просто  $A+k$  вместо  $A+kE$ .

Если детерминант матрицы  $A$ , который мы будем обозначать  $|A|=|A_{\alpha\beta}|$ , отличен от нуля ( $|A|\neq 0$ ), то такая матрица называется *неособенной*. В противном случае, т. е. когда  $|A|=0$ , матрица называется *особенной*. Как известно, из общей теории линейных алгебраических уравнений (см., например, [139]), если  $A$  — неособенная матрица, то система уравнений (25.1), (25.2) может быть разрешена относительно компонент вектора  $u_\beta$ , рассматриваемых как неизвестные. При этом компоненты  $u_\beta$  выразятся линейно и однородно через компоненты  $v_\alpha$ , что можно записать в виде

$$u_\beta = B_{\beta\alpha}v_\alpha, \quad u = Bv, \quad (25.35)$$

где  $B$  — некоторая матрица. Матрица  $B$  называется *обратной* по отношению к матрице  $A$ , и это обстоятельство выражается равенством

$$B = A^{-1}. \quad (25.36)$$

Очевидно, и наоборот, матрица  $A$  является обратной по отношению к  $B$ , т. е.  $A = B^{-1}$ , так как соотношение (25.4) дает решение уравнения (25.35) относительно вектора  $v$ . Следовательно,

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad (25.37)$$

Следует всегда помнить, что матрица, обратная к  $A$ , существует тогда и только тогда, когда  $|A|\neq 0$ . Умножая обе части уравнения (25.35) на матрицу  $A$ , получаем с учетом (25.4)

$$ABv = Au = v. \quad (25.38)$$

Поскольку это равенство должно иметь место при любом векторе  $v$ , как ясно из его вывода, то матрица  $AB$  обладает тем свойством, что она не изменяет никакого вектора. Но это свойство является определением единичной матрицы, следовательно,  $AB=E$  или  $AA^{-1}=1$ . (Здесь мы, как было условлено ранее, написали вместо единичной матрицы число 1.) Вообще для всякой неособенной матрицы  $S$  имеем

$$SS^{-1} = S^{-1}S = 1. \quad (25.39)$$

С помощью индексов это соотношение можно написать в виде

$$S_{\alpha\beta}S_{\beta\gamma}^{-1} = S_{\alpha\beta}^{-1}S_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (25.40)$$

Последние соотношения можно рассматривать как определение обратной матрицы  $S^{-1}$ . Отсюда легко заключить, что

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (25.41)$$

Действительно, благодаря свойству ассоциативности (25.28) имеем  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = 1$ . Аналогично легко показать, что

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1} \quad (25.42)$$

и т. д. Таким образом, матрица, обратная к произведению нескольких матриц, равна произведению матриц, обратных к сомножителям, взятых в обратном порядке. Транспонируя обе части равенства (25.39), получим, согласно (25.29),

$$(\tilde{S})^{-1} = \tilde{S}^{-1}, \quad (25.43)$$

т. е. операции транспонирования и обращения матрицы можно переставлять.

Предположим, что в  $n$ -мерном пространстве, где определены векторы  $u, v, w, \dots$  и матрицы  $A, B, \dots$ , произведено линейное преобразование базиса. Это означает, что вместо одной системы  $n$  линейно независимых векторов выбирается в качестве основной другая система из  $n$  линейно независимых векторов, причем каждый вектор второй системы является линейной комбинацией векторов первой системы. Линейному преобразованию базиса соответствует линейное преобразование компонент каждого вектора, заданного в рассматриваемом пространстве. Весьма существенно то, что компоненты любого вектора претерпевают при указанном изменении базиса одно и то же линейное преобразование, матрицу которого мы обозначим  $S$ . Обозначая компоненты векторов  $u, v, w, \dots$  в новом базисе с помощью штрихов, можно написать следующие соотношения между новыми и старыми компонентами:

$$u'_\alpha = S_{\alpha\beta}u_\beta, \quad v'_\alpha = S_{\alpha\beta}v_\beta, \quad w'_\alpha = S_{\alpha\beta}w_\beta \dots$$

или, в бескоординатной записи \*),

$$u' = Su, \quad v' = Sv, \quad w' = Sw. \quad (25.44)$$

Матрица  $S$ , связанная с преобразованием базиса, обязательно должна быть неособенной. Действительно, если бы  $|S|=0$ ,

\*) Заметим, что здесь  $u'$  обозначает тот же вектор, что и  $u$ , но с другими компонентами, заданными в новой системе отсчета. Штрих при  $u$  отмечает именно это обстоятельство.

то различные строки матрицы  $S$  не были бы все линейно независимы, а это означало бы, что мы перешли в  $n$ -мерном пространстве от  $n$  линейно независимых векторов к меньшему числу других линейно независимых векторов, которые не могли бы служить базисом полного пространства.

При изменении базиса всякая матрица  $A$ , входящая в соотношение типа (25.1), (25.2), т. е. осуществляющая линейное преобразование одного вектора пространства в другой, должна претерпеть определенные изменения (т. е. ее элементы должны измениться). Обозначая штрихом новые значения элементов матрицы  $A$ , можно написать в новом базисе  $v'_\alpha = A'_{\alpha\beta} u'_\beta$  или

$$v' = A'u'. \quad (25.45)$$

Подставляя сюда (25.44), получаем  $Sv = A'Su$ , или, умножая обе части на  $S^{-1}$  (которая существует, так как  $|S| \neq 0$ ),

$$v = S^{-1}A'Su. \quad (25.46)$$

Сравнивая с (25.4), видим, что  $S^{-1}A'Su = Au$ . Поскольку последнее равенство справедливо при любом векторе  $u$ , то  $S^{-1}A'S = A$ . Умножая обе части этого соотношения слева на  $S$ , справа на  $S^{-1}$  и учитывая (25.39), найдем

$$A' = SAS^{-1}. \quad (25.47)$$

Эта формула показывает, как преобразуется матрица, когда все векторы пространства испытывают преобразование (25.44). Переход от матрицы  $A$  к  $A'$  по формуле (25.47) называется *преобразованием подобия*; соответственно матрицы  $A$  и  $A'$  называются *подобными* или *эквивалентными* друг другу.

В частном случае матрица  $A$  может коммутировать с матрицей  $S$  ( $SA = AS$ ). Тогда соотношение (25.47) изменяется следующим образом (см. (25.39)):

$$A' = ASS^{-1} = A. \quad (25.48)$$

Следовательно, матрица  $A$ , коммутирующая с матрицей преобразования базиса  $S$ , не меняется при этом преобразовании. Наоборот, если матрица  $A$  не изменяется ( $A' = A$ ), то из (25.47) после умножения справа на  $S$  получаем  $AS = SA$ , т. е.  $A$  коммутирует с  $S$ . Таким образом, коммутация данной матрицы  $A$  с матрицей преобразования базиса является необходимым и достаточным условием неизменности или, как говорят, *инвариантности* матрицы  $A$  по отношению к такому преобразованию базиса.

При всевозможных расчетах с матрицами большую роль играет сумма всех диагональных элементов матрицы, назы-

ваемая ее следом. Мы будем обозначать след матрицы  $A$  символом  $A_t$ \*):

$$A_t = A_{\alpha\alpha}. \quad (25.49)$$

Рассмотрим след произведения двух матриц

$$(AB)_t = (AB)_{\alpha\alpha} = A_{\alpha\beta}B_{\beta\alpha} = B_{\beta\alpha}A_{\alpha\beta} = (BA)_{\beta\beta} = (BA)_t. \quad (25.50)$$

На основании этого получим

$$(ABC)_t = (A(BC))_t = (BCA)_t = (CAB)_t. \quad (25.50a)$$

Вообще справедливо утверждение: след произведения любого числа матриц не меняется при циклической перестановке сомножителей. Легко убедиться далее, что след транспонированной матрицы равен следу первоначальной матрицы, так как при транспонировании диагональные элементы остаются на своих местах:

$$\tilde{A}_t = A_t. \quad (25.51)$$

Важнейшим свойством следа является то, что он не меняется при любом преобразовании подобия (25.47). Действительно, на основании (25.47), (25.50) имеем

$$A'_t = (SAS^{-1})_t = (S^{-1}SA)_t = A_t. \quad (25.52)$$

Таким образом, след является инвариантом матрицы по отношению к любому преобразованию подобия. Отметим, что это единственный инвариант матрицы, линейно выражающийся через ее элементы.

След суммы матриц равен сумме следов слагаемых, что вытекает из линейности операции взятия следа:

$$(A + B)_t = A_t + B_t. \quad (25.53)$$

Если матрица  $A$  умножается на число  $k$ , то все ее элементы умножаются на  $k$ , значит, и сумма диагональных элементов умножается на это же число, т. е.

$$(kA)_t = kA_t. \quad (25.54)$$

След антисимметричной матрицы, очевидно, равен нулю, так как все ее диагональные элементы равны нулю. Нетрудно показать, что след произведения симметричной и антисимметричной матриц также всегда равен нулю. Действительно, пусть  $\tilde{A} = A$ ,  $\tilde{B} = -B$ , тогда, согласно (25.29), (25.50), (25.51), (25.54),

$$(AB)_t = (\tilde{A}\tilde{B})_t = (\tilde{B}\tilde{A})_t = (-BA)_t = -(BA)_t = -(AB)_t.$$

\*) От английского слова trace — след.

Так как  $(AB)_t$  равно самому себе с обратным знаком, то

$$(AB)_t = A_{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} = 0 \quad (A = \tilde{A}, B = -\tilde{B}). \quad (25.55)$$

Если мы имеем дело с комплексной матрицей  $A = (A_{\alpha\beta})$ , то комплексно сопряженная матрица получается путем взятия комплексного сопряжения от всех элементов:

$$A^* = (A_{\alpha\beta}^*). \quad (25.56)$$

Одним из простейших типов матриц является так называемая *диада*, элементы которой определяются следующим образом:

$$A_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta. \quad (25.57)$$

В развернутом виде такая матрица записывается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix}. \quad (25.58)$$

Мы видим, что у такой матрицы все строки пропорциональны между собой, так же как и все столбцы.

В бескоординатной форме матрицу (25.57), (25.58) мы будем записывать в виде

$$A = u.v, \quad A_{\alpha\beta} = (u.v)_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta. \quad (25.59)$$

Если бы мы написали здесь  $u$  и  $v$  без точки между ними, то, согласно сформулированному ранее общему условию, это было бы скалярным произведением  $uv = u_\alpha v_\alpha$ , т. е. просто числом. Поэтому точка в выражении (25.59) играет основную роль — она показывает, что стоящие рядом компоненты векторов  $u$  и  $v$  не суммируются по одинаковым индексам, а входят независимо. В дальнейшем мы будем пользоваться точкой во всех случаях, когда нужно отметить, что стоящие рядом величины (векторы, матрицы) не свертываются по соседним индексам.

В выражении (25.57) вектор  $u$  мы будем называть первым (левым), а вектор  $v$  — вторым (правым) вектором диады. Из (25.57), (25.58) ясно, что индексы компонент первого вектора диады совпадают с номерами строк тензора, а индексы компонент второго вектора — с номерами столбцов. Очевидно, транспонирование диады равносильно перестановке векторов, образующих диаду,

$$\widetilde{u.v} = v.u. \quad (25.60)$$

След диады

$$(u.v)_t = uv = u_\alpha v_\alpha \quad (25.61)$$

равен скалярному произведению составляющих ее векторов. Если диада является симметричным тензором, то

$$u \cdot v = v \cdot u. \quad (25.62)$$

Умножим это равенство слева скалярно на любой вектор  $w$  такой, чтобы  $wu \neq 0$  и  $wv \neq 0$ . Согласно нашим обозначениям, результат умножения мы получим, просто приписав в обеих частях уравнения (25.62) слева вектор  $w$ ,

$$wu \cdot v = wv \cdot u. \quad (25.63)$$

Величины  $wu$  и  $wv$  являются скалярными произведениями векторов, т. е. числами. Обозначим  $wv/wu = k$ , тогда (25.63) принимает вид

$$v = ku. \quad (25.64)$$

Это соотношение показывает, что диада является симметричной лишь тогда, когда составляющие ее векторы пропорциональны между собой (коллинеарны).

Умножение диады (25.59) справа на любой вектор даст вектор, параллельный  $u$ :

$$Aw = u \cdot vw = ku, \quad k = vw. \quad (25.65)$$

Таким образом, умножение на диаду как бы проектирует любой вектор на направление первого вектора диады.

Если в результате действия матрицы  $A$  на некоторый вектор последний умножается на число  $\lambda$ :

$$Au = \lambda u, \quad (25.66)$$

то число  $\lambda$  называется *собственным значением* матрицы  $A$ , а вектор  $u$  — *собственным вектором* той же матрицы, отвечающим собственному значению  $\lambda$ . Написав уравнение (25.66) в форме

$$A_0 u = 0, \quad A_0 = \lambda - A,$$

видим, что оно представляет собой систему линейных уравнений с матрицей  $A_0$  и с правой частью, равной нулю. Как известно (см., например, [138]), такая система может иметь решения, отличные от нулевого вектора ( $u=0$ ) \*) лишь при условии, что детерминант матрицы  $A_0$  равен нулю:

$$|A_0| = |\lambda - A| = 0. \quad (25.67)$$

Это соотношение называется *характеристическим уравнением* матрицы  $A$ . В раскрытом виде оно имеет вид

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (25.68)$$

\*) Нулевым называется вектор, все компоненты которого равны нулю.



причем коэффициенты  $a_k$  являются целыми однородными функциями степени  $k$  от элементов матрицы  $A$ . Степень характеристического полинома равна размерности пространства, в котором определены матрица  $A$  и вектор  $u$ . Если положить в (25.67), (25.68)  $\lambda=0$ , то легко убедиться, что  $a_n = (-1)^n |A|$ . Выписав в развернутом виде характеристический детерминант (25.67), нетрудно найти и коэффициент  $a_1$ :

$$a_1 = -A_{ii}.$$

Коэффициенты характеристического уравнения (25.68) являются инвариантами преобразования подобия. Действительно, если заменить в (25.67)  $A$  на  $A' = SAS^{-1}$ , то мы получим, учитывая, что скалярная матрица  $\lambda$  коммутирует с любой  $S$ ,

$$|\lambda - A'| = |S(\lambda - A)S^{-1}| = |S| \cdot |\lambda - A| \cdot |S|^{-1} = |\lambda - A|.$$

Следовательно, любые две подобные матрицы имеют одинаковые характеристические полиномы, т. е. все коэффициенты последних инвариантны относительно преобразования подобия.

Для квадратных матриц любого порядка справедлива теорема Гамильтона—Кэли [138], согласно которой уравнение (25.68) остается в силе, если вместо  $\lambda$  подставить саму матрицу  $A$ . Таким образом,

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n \equiv 0, \quad (25.69)$$

причем коэффициенты  $a_k$  те же, что и в характеристическом полиноме (25.68). Разумеется, уравнение (25.69) является матричным и его смысл сводится к утверждению, что матрица, стоящая в левой части, является нулевой. Из (25.69) следует, что существует не более  $n$  линейно независимых степеней всякой матрицы  $A$   $n$ -го порядка, поскольку  $A^k$  при  $k \geq n$  линейно выражается через степени  $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A^2, A^1 = A, A^0 = 1$ .

Нередко случается, что матрица удовлетворяет алгебраическому уравнению, степень которого ниже ее порядка. Так, легко проверить, что для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

справедливо уравнение  $A^2 - (a+b)A + ab = 0$ . Полином от  $x$  наименьшей степени, который обращается в нуль при подстановке вместо  $x$  матрицы  $A$ , называется *минимальным полиномом* матрицы  $A$ .

Весьма важным типом матриц являются матрицы, обладающие свойством

$$A^2 = A. \quad (25.70)$$

Из этого равенства следует, что любая целая положительная степень матрицы  $A$  равна ей самой, вследствие чего такие матрицы называют *идемпотентными*. Если исключить случаи  $A=0$  и  $A=1$ , то уравнение (25.70) будет *минимальным* уравнением матрицы  $A$ . Так называется алгебраическое уравнение наименьшей степени, которому удовлетворяет матрица  $A$ , получающееся в результате приравнивания нулю минимального полинома матрицы  $A$ . Из линейной алгебры известно [138], что минимальное уравнение любой матрицы имеет в качестве своих корней все различные собственные значения матрицы. Кроме того, если минимальное уравнение не имеет кратных корней, то соответствующая матрица путем некоторого преобразования подобия приводится к диагональному виду. При этом по диагонали стоят собственные значения матрицы. Таким образом, идемпотентная матрица (25.70) любой размерности всегда может быть приведена к виду

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}^k & \\ \hline & \underbrace{\begin{matrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{matrix}}^l \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 0_l \end{pmatrix}, \quad (25.71)$$

где  $1_k(0_l)$  — единичная (нулевая) квадратная матрица размерности  $k$  ( $l$ ). Очевидно, любой вектор  $\psi$  в пространстве этой матрицы может быть представлен в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}, \quad (25.72)$$

где  $\psi_1$  имеет размерность  $k$ , а  $\psi_0$  — размерность  $l$ . Действуя на произвольный вектор  $\psi$ , матрица  $A$  будет оставлять в нем неизменными первые  $k$  компонент, а остальные обращать в нуль:

$$A\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица  $A$  выделяет из любого вектора его проекцию на подпространство, соответствующее первым  $k$  базисным векторам полного пространства, благодаря чему для матриц  $A$  (25.70) употребляется также термин *проективная матрица* (или проективный оператор). Очевидно, след проективной матрицы (25.71) равен размерности того подпространства, на которое она проектирует:

$$A_t = k. \quad (25.73)$$

Поскольку след является инвариантом любого преобразования подобия (см. (25.52)), то соотношение (29.73) справедливо независимо от того, приведена матрица  $A$  к диагональному виду (25.71) или нет.

Наряду с матрицей  $A$  (25.71), очевидно, будет проективной также матрица

$$B = 1 - A = \begin{pmatrix} 0_k & 0 \\ 0 & 1_t \end{pmatrix}. \quad (25.74)$$

Действительно, в силу (25.70)

$$B^2 = (1 - A)^2 = 1 - 2A + A^2 = 1 - A = B.$$

Если квадрат некоторой матрицы пропорционален ей самой

$$A^2 = kA, \quad (25.75)$$

то матрица

$$A_1 = \frac{1}{k} A \quad (25.76)$$

будет проективной, поскольку  $A_1^2 = A_1$ . Конечно, при этом подразумевается, что  $k \neq 0$ .

## § 26. ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ВЕЩЕСТВЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В предыдущем параграфе мы рассматривали векторы и матрицы в пространстве произвольного числа измерений. Теперь же мы ограничимся случаем трехмерного вещественного пространства, в котором выбрана в качестве базиса прямоугольная декартова система координат. Вектор в таком пространстве можно наглядно представить себе в виде направленного отрезка прямой, компоненты вектора равны ортогональным проекциям этого отрезка на оси координат. Мы будем обозначать трехмерные векторы жирным шрифтом, например  $\mathbf{u}$ . Компоненты трехмерного вектора будут обозначаться теми же буквами, но не жирными, с латинскими индексами, например  $\mathbf{u} = (u_a) = (u_1, u_2, u_3)$ . При всевозмож-

ных вращениях (и отражениях) системы координат компоненты фиксированного вектора изменяются, причем новые компоненты выражаются через старые посредством линейных однородных преобразований. Все преобразования компонент вектора, связанные с вращениями и отражениями, обладают тем свойством, что сумма квадратов компонент вектора (квадрат его длины) остается неизменной. Линейные преобразования такого вида называются ортогональными преобразованиями (см. § 29).

Ортогональным тензором второго ранга называется квадратная трехрядная матрица, элементы которой при ортогональном преобразовании координат преобразуются как соответствующие произведения компонент двух векторов. Таким образом, тензор 2-го ранга представляет собой матрицу с определенным законом изменения составляющих при преобразовании координат. Пусть  $\alpha = (\alpha_{ab})$  — тензор, тогда, по определению, каждая его компонента <sup>\*</sup>)  $\alpha_{ab}$  должна изменяться так же, как произведение  $u_a v_b$ , где  $\mathbf{u} = (u_a)$ ,  $\mathbf{v} = (v_b)$  — трехмерные векторы.

Аналогично тензору второго ранга может быть определен ортогональный тензор любого  $n$ -го ранга как совокупность  $3^n$  составляющих, которые при ортогональных преобразованиях координат преобразуются так же, как произведение компонент  $n$  векторов  $u_{a_1} v_{a_2} \dots w_{a_n}$ .

Простейшим примером тензора второго ранга является уже знакомая нам диада (25.59):

$$\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \alpha_{ab} = u_a v_b \quad (a, b = 1, 2, 3). \quad (26.1)$$

Она играет основную роль в теории тензоров, поскольку всякий тензор, как будет показано далее, можно представить в виде суммы нескольких диад. Аналогично (25.65)  $\alpha \mathbf{w} = k \mathbf{u}$ ,  $k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ , следовательно, умножение на диаду  $\alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  проектирует любой вектор на одно определенное направление  $\mathbf{u}$ . В связи с этим диаду называют также *линейным* тензором.

Сумма двух диад дает тензор более общего вида <sup>\*\*</sup>)

$$\alpha = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2. \quad (26.2)$$

Умножение этого тензора на любой вектор  $\mathbf{w}$  дает

$$\alpha \mathbf{w} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \mathbf{w} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \mathbf{w} = k_1 \mathbf{u}_1 + k_2 \mathbf{u}_2, \quad k_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}, \quad k_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}, \quad (26.3)$$

<sup>\*</sup>) В отличие от элементов матрицы величины  $\alpha_{ab}$  называют обычно компонентами тензора.

<sup>\*\*</sup>) Обращаем внимание на то, что индексы, стоящие при букве жирного шрифта, служат для обозначения различных векторов, в то время как те же индексы при букве обычного шрифта различают компоненты одного и того же вектора.

т. е. любой вектор  $w$  преобразуется в некоторую линейную комбинацию векторов  $u_1$  и  $u_2$ . Но всевозможные линейные комбинации двух независимых векторов определяют плоскость, параллельную им. Поэтому тензор вида (26.2) называется *планальным* тензором. При этом предполагается, что первые векторы обеих диад  $u_1, u_2$  так же, как и вторые  $v_1, v_2$ , не параллельны друг другу, т. е. линейно независимы.

Рассмотрим, наконец, тензор, равный сумме трех диад:

$$\alpha = u_a \cdot v_a = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3. \quad (26.4)$$

Если между векторами  $u_a$  (или  $v_a$ ) существует линейная зависимость, то тензор (26.4) сводится к (26.3) или даже к (26.1). Действительно, пусть, например,  $u_3 = k_1 u_1 + k_2 u_2$ . Тогда

$$\alpha = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + (k_1 u_1 + k_2 u_2) \cdot v_3. \quad (26.5)$$

Скалярные множители  $k_1, k_2$ , стоящие в диаде, могут быть отнесены к любому из составляющих ее векторов ( $k(u \cdot v) = k u \cdot v = u \cdot k v$ ), поэтому (26.5) можно написать в виде

$$\alpha = u_1 \cdot (v_1 + k_1 v_3) + u_2 \cdot (v_2 + k_2 v_3) = u_1 \cdot v'_1 + u_2 \cdot v'_2, \quad (26.6)$$

т. е. мы получим планальный тензор. Таким образом, выражение (26.4) дает новый гип тензора, лишь если все  $u_a$ , так же как все  $v_a$ , линейно независимы. При этом условии тензор (26.4) называется *полным* тензором.

Очевидно, сумма четырех и более диад в трехмерном пространстве не дает тензора более общего вида, чем (26.4). Действительно, в трехмерном пространстве по определению не существует более трех линейно независимых векторов. Поэтому все первые (либо все вторые) векторы диад могут быть выражены в виде линейной комбинации не более чем трех векторов, и в результате расчета, аналогичного (26.5), (26.6), сумма любого числа диад может быть сведена к сумме не более чем трех диад. Отсюда видно, что представление (26.4) дает общее выражение для любого трехмерного тензора второго ранга. Отметим, что представление любого тензора в виде (26.4) является заведомо неоднозначным. Действительно, в качестве первых векторов диад  $u_a$  (либо вторых векторов  $v_a$ ) может быть выбрана любая тройка линейно независимых векторов. Для того чтобы совершить соответствующий переход, достаточно выразить  $u_a$  (или  $v_a$ ) в виде линейных комбинаций новых векторов и сгруппировать в одну диаду все диады, имеющие один и тот же первый (второй) вектор. Следовательно, существует бесконечное множество выражений для любого тензора в виде суммы трех диад.

Рассмотрим величину с тремя индексами  $e_{abc}$ , обладающую свойствами

$$e_{123} = 1, \quad e_{abc} = -e_{bac} = -e_{acb}. \quad (26.7)$$

Из последних двух равенств вытекает, что  $e_{abc} = -e_{cba}$ , т. е. рассматриваемая величина антисимметрична относительно перестановки любой пары индексов. Она называется единичным полностью антисимметричным псевдотензором третьего ранга или псевдотензором Леви-Чивита \*). Наряду с единичным тензором (символ Кронекера  $\delta_{ab}$ ) она играет особую роль среди всех трехмерных тензоров. Из условий (26.7) вытекает, что все компоненты этого тензора, у которых совпадают какие-либо два индекса, равны нулю. Следовательно, из  $3^3 = 27$  компонент не равными нулю будут лишь компоненты, у которых все индексы различны. Таких компонент будет 6 по числу всех возможных перестановок из трех различных индексов. Согласно (26.7), все отличные от нуля компоненты  $e_{abc}$  равны  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, осуществляется ли переход от 123 к последовательности  $abc$  с помощью четного или нечетного числа транспозиций—перестановок двух индексов. Учитывая это, имеем

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \quad e_{213} = e_{132} = e_{321} = -1. \quad (26.8)$$

Произведение двух псевдотензоров Леви-Чивита может быть выражено через компоненты единичного тензора  $\delta_{ab}$  следующим образом:

$$e_{abc}e_{dfg} = \begin{vmatrix} \delta_{ad} & \delta_{af} & \delta_{ag} \\ \delta_{ba} & \delta_{bf} & \delta_{bg} \\ \delta_{cd} & \delta_{cf} & \delta_{cg} \end{vmatrix} = \delta_{ad}(\delta_{bf}\delta_{cg} - \delta_{bg}\delta_{cf}) + \\ + \delta_{af}(\delta_{bg}\delta_{cd} - \delta_{bd}\delta_{cg}) + \delta_{ag}(\delta_{ba}\delta_{cf} - \delta_{bf}\delta_{ca}). \quad (26.9)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого представления, рассмотрим случай, когда какие-либо два индекса из тройки  $abc$  (или из тройки  $dfg$ ) совпадают. Согласно свойствам  $e_{abc}$ , слева при этом получим нуль. Тот же результат получится и справа, так как, например, при  $a=b$  первые две строки детерминанта совпадают, а при  $f=g$  совпадают второй и третий столбцы и т. д. Перестановка любых двух индексов из числа  $abc$  приведет к перестановке соответствующих строк детерминанта, а такая же перестановка среди индексов  $dfg$  — к перестановке столбцов. При этом детерминант изменит знак на обратный. Наконец, согласно (26.7), (26.9),  $e_{123}e_{123} = 1$ . Таким образом, для данной комбинации индексов обе части равенств

\*) Приставка *псевдо* обусловлена тем, что  $e_{abc}$  при преобразованиях отражения ведет себя иначе, чем тензор третьего ранга, а именно остается неизменным, в то время как тензор третьего ранга меняет знак.

ва (26.9) совпадают, а при всех перестановках индексов обе части изменяются одинаково, т. е. равенство всегда сохраняется.

Положим в соотношении (26.9)  $g = c$ . Учитывая свойства  $\delta_{ab}$  ( $\delta_{aa} = 3$ ,  $\delta_{ab}\delta_{bg} = \delta_{ag}$ ), получаем после простых вычислений

$$e_{abc}e_{dfc} = \delta_{ad}\delta_{bf} - \delta_{af}\delta_{bd}. \quad (26.10)$$

Произведя здесь свертку еще по паре индексов  $b$  и  $f$ , получим

$$e_{abc}e_{abc} = 2\delta_{ad}. \quad (26.11)$$

Свертывая по последней паре индексов  $a, d$ , получаем

$$e_{abc}e_{abc} = e_{abc}^2 = 3! = 6. \quad (26.12)$$

Последний результат очевиден, поскольку слева стоит сумма квадратов всех компонент  $e_{abc}$ , из которых лишь шесть отличны от нуля и равны  $\pm 1$  (26.8).

Вычислим выражение  $e_{abc}\alpha_{1a}\alpha_{2b}\alpha_{3c}$ , где  $\alpha_{ab}$  — компоненты произвольного тензора. С помощью (26.9) получим

$$e_{abc}\alpha_{1a}\alpha_{2b}\alpha_{3c} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = |\alpha|. \quad (26.13)$$

Таким образом, с помощью псевдотензора Леви-Чивита можно записать выражение для детерминанта любого тензора в форме (26.13). Если в (26.13) взять иную последовательность первых индексов компонент тензора (например,  $e_{abc}\alpha_{2a}\alpha_{1b}\alpha_{3c}$ ), то это приведет к перестановке строк детерминанта (в данном случае двух первых строк). В результате мы получим  $+|\alpha|$  или  $-|\alpha|$  в зависимости от того, будет ли последовательность первых индексов в произведении  $\alpha_{da}\alpha_{fb}\alpha_{gc}$ , т. е.  $(d, f, g)$ , получаться из 123 посредством четной или нечетной перестановки. Поскольку  $e_{dfg}$  как раз дает нужный знак, то можно написать вместо (26.13) несколько более общее соотношение:

$$e_{abc}\alpha_{da}\alpha_{fb}\alpha_{gc} = |\alpha| e_{dfg}. \quad (26.14)$$

Умножая (26.14) на  $e_{dfg}$  и учитывая (26.12), получаем еще одно соотношение, определяющее детерминант трехмерной матрицы с помощью псевдотензора Леви-Чивита,

$$|\alpha| = \frac{1}{6} e_{abc}e_{dfg}\alpha_{da}\alpha_{fb}\alpha_{gc}. \quad (26.15)$$

Если же (26.14) умножить на  $e_{dfk}$ , то, согласно (26.11), получим

$$\frac{1}{2} e_{dfk}e_{abc}\alpha_{da}\alpha_{fb}\alpha_{gc} = |\alpha| \delta_{kg}. \quad (26.16)$$

Введем матрицу  $\bar{\alpha}$  с составляющими:

$$\bar{\alpha}_{ch} = \frac{1}{2} e_{dfh} e_{abc} \alpha_{da} \alpha_{fb}. \quad (26.17)$$

Тогда соотношение (26.16) можно написать в виде

$$\alpha_{gc} \bar{\alpha}_{ch} = |\alpha| \delta_{gh}. \quad (26.18)$$

В бескоординатной записи это соотношение принимает следующий вид:

$$\alpha \bar{\alpha} = |\alpha|. \quad (26.19)$$

Если матрица  $\alpha$  имеет обратную (т. е.  $|\alpha| \neq 0$ ), то, умножая слева на  $\alpha^{-1}$ , получаем

$$\bar{\alpha} = |\alpha| \alpha^{-1}. \quad (26.20)$$

Матрица  $\alpha$ , определяемая соотношением (26.17) или (26.20), называется взаимной к матрице  $\alpha$ . Хотя (26.20) имеет смысл лишь при  $|\alpha| \neq 0$ , тем не менее все свойства матрицы  $\bar{\alpha}$ , вытекающие из этого соотношения, сохраняют силу в общем случае. Поэтому мы в дальнейшем будем широко пользоваться соотношением (26.20) при выводе различных свойств взаимной матрицы.

Детерминант матрицы  $\beta$ , умноженной на число  $k$ , равен

$$|k\beta| = k^3 |\beta|. \quad (26.21)$$

Поэтому, так как  $|\alpha|$  есть число, имеем из (26.20)

$$|\bar{\alpha}| = |\alpha|^3 |\alpha^{-1}| = |\alpha|^2, \quad (26.22)$$

поскольку  $|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}$ , что следует из  $\alpha \alpha^{-1} = 1$ . Матрица, взаимная к обратной, согласно (26.20), имеет вид

$$\bar{\alpha}^{-1} = |\alpha^{-1}| (\alpha^{-1})^{-1} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = (\bar{\alpha})^{-1}, \quad (26.23)$$

т. е. операции перехода к обратной и к взаимной матрице перестановочны. Для двукратно взаимной матрицы  $\bar{\bar{\alpha}}$  имеем:

$$\bar{\bar{\alpha}} = |\bar{\alpha}| (\bar{\alpha})^{-1} = |\alpha|^2 |\alpha|^{-1} \alpha = |\alpha| \alpha. \quad (26.24)$$

Взаимная матрица от матрицы  $\alpha$ , умноженной на число  $k$ , равна

$$\overline{k\alpha} = |k\alpha| (k\alpha)^{-1} = k^3 |\alpha| \frac{1}{k} \alpha^{-1} = k^2 \bar{\alpha}. \quad (26.25)$$

На основании (25.43) легко убедиться, что

$$\bar{\bar{\bar{\alpha}}} = \bar{\alpha}. \quad (26.26)$$



Вычислим еще взаимную матрицу от произведения двух матриц. Согласно (26.20), (25.41),

$$\overline{\alpha\beta} = |\alpha\beta| (\alpha\beta)^{-1} = \overline{\beta} \overline{\alpha}. \quad (26.27)$$

Следовательно, матрица, взаимная к произведению двух матриц, определяется по тому же правилу (25.41), что и матрица, обратная к произведению двух матриц. С помощью (26.15) можно получить важное для дальнейшего выражение детерминанта от суммы двух матриц

$$|\alpha + \beta| = \frac{1}{6} e_{abc} e_{dfg} (\alpha_{ad} + \beta_{ad}) (\alpha_{bf} + \beta_{bf}) (\alpha_{cg} + \beta_{cg}).$$

Раскрывая скобки и снова учитывая (26.15), получаем

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| + k_1 + k_2,$$

где

$$k_1 = \frac{1}{6} e_{abc} e_{dfg} (\alpha_{ad} \alpha_{bf} \beta_{cg} + \alpha_{ad} \beta_{bf} \alpha_{cg} + \beta_{ad} \alpha_{bf} \alpha_{cg}), \quad (26.28)$$

а  $k_2$  отличается от  $k_1$  перестановкой  $\alpha$  и  $\beta$ . Изменяя обозначения немых индексов и учитывая свойства тензора Леви-Чивита, убеждаемся, что все три члена в (26.28) равны между собой. Поэтому, согласно (26.17),

$$k_1 = \frac{1}{2} e_{abc} e_{dfg} \alpha_{ad} \alpha_{bf} \beta_{cg} = \overline{\alpha}_{gc} \beta_{cg} = (\overline{\alpha\beta})_t.$$

Переставляя  $\alpha$  и  $\beta$ , получаем  $k_2 = (\overline{\beta\alpha})_t = (\alpha\overline{\beta})_t$ . Окончательно

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + (\alpha\overline{\beta})_t + (\overline{\alpha\beta})_t + |\beta|. \quad (26.29)$$

В частности, когда  $\alpha$  равно числу  $\lambda$ , находим отсюда

$$|\lambda + \beta| = \lambda^3 + \lambda^2 \beta_t + \lambda \overline{\beta}_t + |\beta|. \quad (26.29a)$$

С помощью псевдотензора Леви-Чивита можно представить векторное произведение двух векторов в виде

$$[\mathbf{uv}]_a = e_{abc} u_b v_c. \quad (26.30)$$

Справедливость этого представления проверяется непосредственно:  $[\mathbf{uv}]_1 = e_{1bc} u_b v_c = u_2 v_3 - u_3 v_2$  и т. д. Правую часть соотношения (26.30) можно рассматривать как результат умножения вектора  $\mathbf{v}$  на тензор второго ранга  $\mathbf{u}^\times$ , компоненты которого определяются следующим образом:

$$u_{ac}^\times = e_{abc} u_b. \quad (26.31)$$

Вследствие свойств  $e_{abc}$  тензор  $u^\times$  является антисимметричным:

$$\tilde{u}^\times = -u^\times. \quad (26.32)$$

Компоненты этого тензора, как следует из определения (26.31), линейно и однородно выражаются через компоненты вектора  $u$ . Тензор  $u^\times$  называется *дуальным* вектору  $u$ . В раскрытом виде определение (26.31) записывается так:

$$u^\times = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26.33)$$

Таким образом, псевдотензор Леви-Чивита позволяет поставить в соответствие каждому вектору антисимметричный псевдотензор второго ранга. Это соответствие оказывается обратимым, поскольку каждому антисимметричному псевдотензору второго ранга ( $\gamma = -\tilde{\gamma}$ ) в свою очередь можно поставить в соответствие вектор  $u = (u_a)$  с помощью соотношения

$$u_a = \frac{1}{2} e_{abc} \gamma_{cb}. \quad (26.34)$$

Раскрывая это соотношение, получаем

$$u_1 = \gamma_{32}, \quad u_2 = \gamma_{13}, \quad u_3 = \gamma_{21}. \quad (26.35)$$

Сравнивая (26.33) и (26.35), видим, что  $\gamma = u^\times$ . Таким образом, из (26.31) следует

$$u_a = \frac{1}{2} e_{acb} u_{bc}^\times. \quad (26.36)$$

Вектор  $u = (u_a)$ , определяемый согласно (26.34), называется *дуальным* антисимметричному тензору  $\gamma$ . Операция дуальности, как следует из ее определения, обладает свойством линейности. Это означает, что

$$(au + bv)^\times = au^\times + bv^\times, \quad (26.37)$$

где  $a, b$  — скалярные множители.

Детерминант тензора  $u^\times$  равен нулю, что является следствием антисимметричности  $u^\times$ . Действительно, детерминант любой матрицы не меняется при ее транспонировании, т. е.  $|u^\times| = |\tilde{u}^\times| = |-u^\times|$ , поэтому  $|u^\times| = -|u^\times| = 0$ . Заметим, что эти рассуждения справедливы для любой антисимметричной матрицы с *нечетным* числом строк и столбцов, детерминант которой, следовательно, всегда равен нулю.

С помощью дуального тензора  $u^\times$  соотношение (26.31) можно написать в виде  $[uv]_a = u_{ab}^\times v_b$  или

$$[uv] = u^\times v. \quad (26.38)$$

Это равенство также можно рассматривать как определение тензора, дуального вектору  $u$ , если оно справедливо при любом  $v$ . Вследствие антисимметрии  $u^\times$ , согласно (25.38), можно также написать

$$v u^\times = -u^\times v = -[uv] = [vu]. \quad (26.39)$$

Рассмотрим произведение двух матриц  $u^\times$  и  $v^\times$ . Пользуясь (26.31), (26.10), получаем

$$(u^\times v^\times)_{ab} = e_{acd} u_c e_{dgb} v_g = v_a u_b - v_c u_c \delta_{ab}, \quad (26.40)$$

или в прямой записи

$$u^\times v^\times = v \cdot u - v u. \quad (26.41)$$

Заметим, что из этой формулы следует

$$(u^\times v^\times)_t = -2uv, \quad (u^\times)_t = -2u^a. \quad (26.41a)$$

Умножая обе части равенства (26.41) справа на произвольный вектор  $w$ , получаем с учетом (26.38)

$$u^\times v^\times w = [u[vw]] = v \cdot uw - v u \cdot w. \quad (26.42)$$

Мы доказали, таким образом, известную из элементарной векторной алгебры формулу для двойного векторного произведения. В частном случае  $v = u$  имеем из (26.41)

$$u^\times{}^2 = u \cdot u - u^a. \quad (26.43)$$

Выражение для тензора, дуального векторному произведению  $[uv]$ , просто получается с помощью (26.38), (26.42). При любом векторе  $x$

$$[uv]^\times x = [[uv]x] = [x[vu]] = (v \cdot u - u \cdot v)x,$$

следовательно,

$$[uv]^\times = v \cdot u - u \cdot v. \quad (26.44)$$

Произведение трех тензоров  $u^\times v^\times w^\times$ , используя свойство ассоциативности, можно представить двояко:  $u^\times (v^\times w^\times) = (u^\times v^\times) w^\times$ . Применяя (26.41), (26.38), получаем

$$u^\times v^\times w^\times = [uw] \cdot v - u^\times \cdot wv = v \cdot [uw] - v u \cdot w^\times. \quad (26.45)$$

Полезная формула получается при раскрытии произведения четырех матриц  $a^\times c^\times b^\times d^\times$ , которое также можно представить двояко:

$$a^\times (c^\times b^\times) d^\times = (a^\times c^\times) (b^\times d^\times).$$

Используя соотношение (26.41), получаем отсюда после несложных выкладок

$$[\mathbf{ab}].[\mathbf{cd}] = [\mathbf{ab}][\mathbf{cd}] + \mathbf{ad}.c.b + \mathbf{bc}.d.a - \mathbf{ac}.d.b - \mathbf{bd}.c.a. \quad (26.46)$$

В частности,

$$[\mathbf{ab}].[\mathbf{ab}] = [\mathbf{ab}]^2 + \mathbf{ab}.(\mathbf{a}.b + \mathbf{b}.a) - \mathbf{a}^2b.b - \mathbf{b}^2a.a. \quad (26.47)$$

Приведем еще формулы с векторными произведениями, известные из элементарной векторной алгебры,

$$[\mathbf{ab}][\mathbf{cd}] = \mathbf{ac}.bd - \mathbf{ad}.bc, \quad (26.48)$$

$$[\mathbf{ab}]^2 = \mathbf{a}^2b^2 - (\mathbf{ab})^2. \quad (26.49)$$

В частном случае, когда  $\mathbf{a} = \mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{n}_2$ ,  $\mathbf{n}_1^2 = \mathbf{n}_2^2 = 1$ ,  $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = 0$ , формула (26.47) с учетом (26.49) дает

$$[\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2].[\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2] = 1 - \mathbf{n}_1.\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2.\mathbf{n}_2 \quad (26.50)$$

или

$$\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2.\mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3.\mathbf{n}_3 = 1, \quad (26.51)$$

где

$$\mathbf{n}_3 = [\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2], \quad \mathbf{n}_a\mathbf{n}_b = \delta_{ab}. \quad (26.52)$$

Формула (26.51) дает выражение для единичного тензора через тройку взаимно ортогональных единичных векторов  $\mathbf{n}_a$ .

Найдем выражение для тензора, взаимного к  $\mathbf{u}^\times$ . С помощью (26.17), (26.31), (26.10) получим после некоторых преобразований

$$\overline{\mathbf{u}}_{ab}^\times = \frac{1}{2} e_{cab}e_{fga} \mathbf{u}_{cf}^\times \mathbf{u}_{dg}^\times = u_a u_b,$$

или

$$\overline{\mathbf{u}}^\times = \mathbf{u}.\mathbf{u}. \quad (26.53)$$

В выражении  $\overline{\alpha}[\mathbf{uv}]$  тензор  $\alpha$  может быть введен под знак векторного произведения. Действительно, на основании (26.17), (26.30), (26.10) можем написать

$$(\overline{\alpha}[\mathbf{uv}])_a = \frac{1}{2} e_{bcd}e_{kfg} \alpha_{bh} \alpha_{cf} e_{den} u_e v_n = e_{abc} (\mathbf{u}\alpha)_b (\mathbf{v}\alpha)_c$$

или

$$\overline{\alpha}[\mathbf{uv}] = [\mathbf{u}\alpha, \mathbf{v}\alpha] = [\tilde{\alpha}\mathbf{u}, \tilde{\alpha}\mathbf{v}]. \quad (26.54)$$

В случае симметричного или антисимметричного тензора  $\alpha$

$$\overline{\alpha}[\mathbf{uv}] = [\alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}] \quad (\tilde{\alpha} = \pm \alpha). \quad (26.55)$$

Если тензор  $\alpha$  неособенный ( $|\alpha| \neq 0$ ), то (26.54) можно написать в виде (см. (26.20))

$$\alpha^{-1}[\mathbf{uv}] = \frac{1}{|\alpha|} [\tilde{\alpha}\mathbf{u}, \tilde{\alpha}\mathbf{v}]. \quad (26.56)$$

Обозначив здесь  $\alpha^{-1} = \beta$ ,  $\alpha = \beta^{-1}$ ,  $|\beta| = 1/|\alpha|$ , получим (см. (25.43))

$$\beta [u\mathbf{v}] = |\beta| [\tilde{\beta}^{-1}u, \tilde{\beta}^{-1}v]. \quad (26.57)$$

Поскольку это справедливо для любого вектора  $\mathbf{v}$ , то

$$\beta u^\times = |\beta| (\tilde{\beta}^{-1}u)^\times \tilde{\beta}^{-1} = (u\beta^{-1})^\times \tilde{\beta}. \quad (26.58)$$

Транспонируя соотношение (26.58), получаем

$$u^\times \tilde{\beta} = \bar{\beta} (u\beta^{-1})^\times, \quad (26.59)$$

или

$$v^\times \beta = \bar{\beta} (\beta^{-1}v)^\times. \quad (26.60)$$

Соотношения (26.58), (26.60) можно написать еще в следующих вариантах:

$$\alpha^{-1}u^\times = \frac{1}{|\alpha|} (u\alpha)^\times \tilde{\alpha}, \quad v^\times \alpha^{-1} = \frac{1}{|\alpha|} \tilde{\alpha} (\alpha v)^\times. \quad (26.61)$$

Умножая (26.58) слева на  $v^\times$  и (26.60) справа на  $u^\times$ , находим

$$v^\times \beta u^\times = v^\times (u\beta^{-1})^\times \tilde{\beta} = \tilde{\beta} (\beta^{-1}v)^\times u^\times. \quad (26.62)$$

Аналогично из (26.61) находим

$$v^\times \alpha^{-1} u^\times = \frac{1}{|\alpha|} v^\times (u\alpha)^\times \tilde{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|} \tilde{\alpha} (\alpha v)^\times u^\times. \quad (26.63)$$

Умножая (26.58) на  $\tilde{\beta}$  справа, получаем

$$\beta u^\times \tilde{\beta} = (u\bar{\beta})^\times. \quad (26.64)$$

Аналогично (26.29) можно получить выражение для тензора, взаимного к сумме двух тензоров  $\alpha$  и  $\beta$ . Согласно (26.17),

$$\overline{(\alpha + \beta)}_{ab} = \frac{1}{2} e_{cab} e_{gfa} (\alpha_{cg} + \beta_{cg})(\alpha_{df} + \beta_{df}),$$

раскрывая скобки и используя (26.9), получаем после несложных вычислений

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \alpha\beta + \beta\alpha - \alpha_i\beta - \beta_i\alpha + \alpha_i\beta_i - (\alpha\beta)_i. \quad (26.65)$$

Отсюда находим

$$\overline{(\alpha + \beta)}_i = \bar{\alpha}_i + \bar{\beta}_i + \alpha_i\beta_i - (\alpha\beta)_i. \quad (26.66)$$

Выше было показано, что все тензоры можно разбить на три группы: линейные тензоры (диады), планальные тензоры, представляемые суммой двух диад, и полные тензоры, выра-

жающиеся через сумму трех независимых диад \*). Рассмотрим некоторые свойства разных типов тензоров. Прежде всего очевидно, что детерминант диады (линейного тензора) равен нулю, так как его строки и столбцы пропорциональны. Легко видеть, что тензор, взаимный к диаде, также равен нулю. Действительно, согласно (26.17), компоненты тензора, взаимного к  $\alpha$ , пропорциональны минорам второго порядка тензора  $\alpha$ , а все такие миноры диады  $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$  также равны нулю вследствие пропорциональности строк и столбцов. Итак,

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = \overline{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}} = 0. \quad (26.67)$$

Наоборот, если тензор, взаимный какому-либо тензору  $\alpha$ , равен нулю, то тензор  $\alpha$  является простой диадой, т. е. из  $\overline{\alpha} = 0$  следует  $\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ . Всякий планальный тензор можно представить (см. (26.2)) в виде  $\alpha = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2$ . Воспользовавшись (26.29), (26.67), получим

$$|\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2| = 0. \quad (26.68)$$

В свою очередь с помощью (26.65) находим

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2} &= \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2 - \\ &- \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2 - (\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2)_i. \end{aligned}$$

Сравнивая с (26.46), получаем

$$\overline{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2} = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2] \cdot [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]. \quad (26.69)$$

Таким образом, тензор, взаимный к планальному, является линейным тензором (диадой). Этот вывод мы запишем в несколько более общей форме:

$$\overline{\alpha} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad (|\alpha| = 0, \quad \overline{\alpha} \neq 0). \quad (26.70)$$

Действительно, условия  $|\alpha| = 0, \quad \overline{\alpha} \neq 0$  определяют, согласно (26.67), планальный тензор.

Соотношение (26.70) позволяет сразу получать решения уравнения  $\alpha\mathbf{x} = 0$  в самом общем виде (см. [4, 5]). Действительно, нетривиальное решение для вектора  $\mathbf{x}$  существует, лишь если  $|\alpha| = 0$ . При  $\overline{\alpha} \neq 0$ , согласно (26.19), (26.70), имеем

$$|\alpha| = \alpha\overline{\alpha} = \alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0. \quad (26.71)$$

Очевидно,  $\mathbf{b} \neq 0$ , так как иначе было бы  $\overline{\alpha} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ . Следовательно,  $\alpha\mathbf{a} = 0$ , т. е.  $\mathbf{x} = C\mathbf{a}$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

\*) Диады независимы, если все их левые, так же как и правые, векторы линейно независимы между собой.

Это решение можно получить путем умножения произвольного вектора  $\mathbf{c}$  на матрицу  $\bar{\mathbf{a}}$ . В самом деле, согласно (26.70),

$$\bar{\alpha}\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\mathbf{c} = \mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{b}\mathbf{c}. \quad (26.72)$$

Единственное условие, которое ограничивает вектор  $\mathbf{c}$ :  $\bar{\alpha}\mathbf{c} \neq 0$  — ему всегда можно удовлетворить при  $\alpha \neq 0$ .

Если же  $\bar{\alpha} = 0$ , то, согласно (26.67),  $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  и  $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\mathbf{x} = 0$ , откуда следует, что  $\mathbf{x}$  есть любой вектор, перпендикулярный к  $\mathbf{b}$ . Таким образом, в любом случае все решения уравнения  $\alpha\mathbf{x} = 0$  могут быть сразу получены ковариантным путем.

Заметим, что второй вектор диады  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bar{\alpha}$  нетрудно найти, если известны некоторые свойства матрицы  $\mathbf{a}$ . Так, если  $\alpha = \bar{\alpha}$ , то и  $\bar{\alpha} = \underline{\alpha}$ ; в этом случае  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ , т. е.  $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ .

Обратимся к полному тензору

$$\alpha = \mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b}_c = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \quad (26.73)$$

$$(\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] \neq 0, \quad \mathbf{b}_1 [\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3] \neq 0).$$

В скобках записаны условия полноты, сводящиеся к линейной независимости всех левых и всех правых векторов диад. Для вычисления детерминанта  $\alpha$  воспользуемся (26.29), (26.67), (26.69) и после некоторых вычислений получим

$$|\alpha| = \mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] \cdot \mathbf{b}_1 [\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]. \quad (26.74)$$

Так как  $|\alpha| \neq 0$ , то полный тензор является неособенным. Наоборот, отличие от нуля  $|\alpha|$  является необходимым и достаточным условием полноты тензора  $\alpha$ , т. е. возможности его представления в виде (26.73).

Рассмотрим некоторые следствия соотношений (26.29), (26.65), (26.66), полезные при вычислениях. Согласно (25.67), (25.68), (26.29a), характеристический полином трехмерного тензора  $\alpha$  имеет вид

$$P(\lambda) = |\lambda - \alpha| = \lambda^3 - \alpha_i \lambda^2 + \bar{\alpha}_i \lambda - |\alpha| = 0. \quad (26.75)$$

Вследствие теоремы Гамильтона — Кэли имеет место матричное тождество

$$\alpha^3 - \alpha_i \alpha^2 + \bar{\alpha}_i \alpha - |\alpha| \mathbf{1} = 0. \quad (26.76)$$

Умножая его на  $\alpha^{-1}$  и применяя (26.20), получаем

$$\bar{\alpha} = \alpha^2 - \alpha_i \alpha + \bar{\alpha}_i, \quad \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_i = \alpha (\alpha - \alpha_i). \quad (26.77)$$

Взяв след от этого соотношения, находим

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{2} [(\alpha_i)^2 - (\alpha^2)_i]. \quad (26.78)$$

Из (26.77), (26.78) следует выражение для  $\bar{\alpha}$  через  $\alpha$ :

$$\bar{\alpha} = \alpha(\alpha - \alpha_t) + \frac{1}{2} [(\alpha_t)^2 - (\alpha^2)_t]. \quad (26.79)$$

С помощью (26.65), (26.66) получаем ( $\lambda$  — число)

$$(\overline{\lambda \pm \alpha}) = (\overline{\alpha \pm \lambda}) = \lambda^2 \pm \lambda(\alpha_t - \alpha) + \bar{\alpha}, \quad (26.80)$$

$$(\overline{\lambda \pm \alpha})_t = 3\lambda^2 \pm 2\lambda\alpha_t + \bar{\alpha}_t = \frac{1}{2} (2\lambda \pm \alpha_t)^2 + \lambda^2 - \frac{1}{2} (\alpha^2)_t. \quad (26.81)$$

Всякий трехмерный тензор  $\alpha$  может быть представлен в виде (см. (25.19), (26.35))

$$\alpha = \varepsilon + \mathbf{a}^\times, \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon}. \quad (26.82)$$

Для детерминанта  $\alpha$  имеем, согласно (26.29),

$$|\alpha| = |\varepsilon + \mathbf{a}^\times| = |\varepsilon| + \mathbf{a}\varepsilon\mathbf{a}. \quad (26.83)$$

Формула (26.65) дает для взаимного тензора

$$\bar{\alpha} = (\overline{\varepsilon + \mathbf{a}^\times}) = \bar{\varepsilon} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + (\varepsilon\mathbf{a}^\times + \mathbf{a}^\times\varepsilon - \varepsilon_t\mathbf{a}^\times). \quad (26.84)$$

Поскольку  $\varepsilon\mathbf{a}^\times + \mathbf{a}^\times\varepsilon$  является антисимметричной матрицей, то  $\varepsilon\mathbf{a}^\times + \mathbf{a}^\times\varepsilon = \mathbf{c}^\times$ , откуда после умножения справа на  $\mathbf{a}$  имеем  $[\mathbf{a}, \varepsilon\mathbf{a}] = [\mathbf{c}\mathbf{a}]$ , или  $[\mathbf{c} + \varepsilon\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0$ . Поэтому  $\mathbf{c} + \varepsilon\mathbf{a} = \xi\mathbf{a}$  ( $\xi$  — число), следовательно,

$$\varepsilon\mathbf{a}^\times + \mathbf{a}^\times\varepsilon = \xi\mathbf{a}^\times - (\varepsilon\mathbf{a})^\times.$$

Умножая это равенство на  $\mathbf{a}^\times$  и беря след, находим  $\xi = \varepsilon_t$ . Таким образом,

$$\varepsilon\mathbf{a}^\times + \mathbf{a}^\times\varepsilon \equiv \varepsilon_t\mathbf{a}^\times - (\varepsilon\mathbf{a})^\times, \quad (\varepsilon = \bar{\varepsilon}). \quad (26.85)$$

Это соотношение представляет собой тождество, справедливое для любых  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$  и  $\mathbf{a}$ . С его помощью для взаимного тензора  $\bar{\alpha}$  (26.84) получаем окончательно:

$$\bar{\alpha} = \bar{\varepsilon} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - (\varepsilon\mathbf{a})^\times, \quad (26.86)$$

откуда следует

$$\bar{\alpha}_t = \bar{\varepsilon}_t + \mathbf{a}^2. \quad (26.87)$$

Тождество (26.85) может быть обобщено на случай, когда матрица  $\varepsilon$  не является симметричной. При этом оно принимает вид

$$\alpha\mathbf{u}^\times + \mathbf{u}^\times\bar{\alpha} \equiv \alpha_t\mathbf{u}^\times - (\bar{\alpha}\mathbf{u})^\times \quad (26.88)$$

и доказывается в точности таким же путем, как (26.85).



Взяв различные тензоры  $\alpha$ ,  $\beta$ , получим из (26.29), (26.65), (26.66) ряд соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\alpha + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} &= \bar{\alpha} + (\alpha - \alpha_t) \mathbf{v} \times \mathbf{u} \times + (\mathbf{v}\alpha) \times \mathbf{u} \times, \\ (\overline{\alpha + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}})_t &= \bar{\alpha}_t + \alpha_t \mathbf{u} \mathbf{v} - \mathbf{v} \alpha \mathbf{u}, \\ |\alpha + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &= |\alpha| + \mathbf{v} \bar{\alpha} \mathbf{u}, \end{aligned} \right\} (26.89)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\lambda + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} &= \lambda (\lambda - \mathbf{v} \times \mathbf{u} \times), \quad (\overline{\lambda + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}})_t = \lambda (3\lambda + 2\mathbf{u} \mathbf{v}), \\ |\lambda + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &= \lambda^2 (\lambda + \mathbf{u} \mathbf{v}), \end{aligned} \right\} (26.90)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\alpha + \mathbf{a} \times} &= \bar{\alpha} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + (\alpha - \alpha_t) \mathbf{a} \times + \mathbf{a} \times \alpha - (\alpha \mathbf{a} \times)_t, \\ (\overline{\alpha + \mathbf{a} \times})_t &= \bar{\alpha}_t + \mathbf{a}^2 - (\alpha \mathbf{a} \times)_t, \quad |\alpha + \mathbf{a} \times| = |\alpha| + (\bar{\alpha} \mathbf{a} \times)_t + \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}, \end{aligned} \right\} (26.91)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\lambda + \mathbf{a} \times} &= \lambda (\lambda - \mathbf{a} \times) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \quad (\overline{\lambda + \mathbf{a} \times})_t = 3\lambda^2 + \mathbf{a}^2, \\ |\lambda + \mathbf{a} \times| &= \lambda (\lambda^2 + \mathbf{a}^2), \end{aligned} \right\} (26.92)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \times} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{u} \times \mathbf{a} \times + [\mathbf{v} \mathbf{a}] \times \mathbf{u} \times, \\ (\overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \times})_t &= \mathbf{a}^2 - \mathbf{a} [\mathbf{u} \mathbf{v}], \quad |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \times| = \mathbf{a} \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} (26.93)$$

Часто оказываются полезными соотношения

$$\begin{aligned} \overline{1 \pm \beta} &= 1 \pm \beta_t \mp \beta + \bar{\beta} = (1 \pm \beta_t)(1 \mp \beta) + \beta^2 + \bar{\beta}, \\ |1 \pm \beta| &= 1 \pm \beta_t + \bar{\beta}_t \pm |\beta|, \\ (1 \pm \beta)^{-1} &= 1 + \frac{\beta^2 \mp (1 \pm \beta_t) \beta \mp |\beta|}{|1 \pm \beta|}. \end{aligned} \quad (26.94)$$

В частном случае, когда  $|\beta| = 0$ , эти формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} \overline{1 \pm \beta} &= \beta^2 \mp (1 \pm \beta_t) \beta + |1 \pm \beta|, \quad |1 \pm \beta| = 1 \pm \beta_t + \bar{\beta}_t, \\ (1 \pm \beta)^{-1} &= 1 + \frac{\beta}{|1 \pm \beta|} (\beta - \beta_t \mp 1). \end{aligned} \quad (26.95)$$

Легко убедиться, что для произвольных матриц  $\alpha$  и  $\beta$  справедливо равенство

$$|1 + \alpha \beta| = |1 + \beta \alpha|. \quad (26.96)$$

Для его доказательства достаточно воспользоваться (26.94) и свойством  $(\alpha \beta)_t = (\beta \alpha)_t$ .

Для любой тройки векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  имеют место тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] + \mathbf{a}_2 \cdot [\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1] + \mathbf{a}_3 \cdot [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] &\equiv \mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3], \\ [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] \cdot \mathbf{a}_1 + [\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1] \cdot \mathbf{a}_2 + [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] \cdot \mathbf{a}_3 &\equiv \mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]. \end{aligned} \quad (26.97)$$

В их справедливости можно убедиться путем умножения на векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  первого тождества справа, а второго слева. Если векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  линейно независимы, то любой вектор  $\mathbf{x}$  представляется в виде  $\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \xi_2 \mathbf{a}_2 + \xi_3 \mathbf{a}_3$  и, следовательно, обе стороны матричных равенств (26.97) дают одинаковый результат при действии на любой вектор, откуда следует их совпадение. Если же векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  зависимы, например  $\mathbf{a}_3 = \xi \mathbf{a}_1 + \eta \mathbf{a}_2$ , то непосредственная проверка показывает, что обе части равенств (26.97) обращаются в нуль. Таким образом, соотношения (26.97) справедливы без всяких ограничений. С их помощью нетрудно убедиться, что тензор, обратный к тензору  $\alpha$  (26.73), имеет вид

$$\alpha^{-1} = \frac{[\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3] \cdot [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] + [\mathbf{b}_3 \mathbf{b}_1] \cdot [\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1] + [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2] \cdot [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]}{\mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] \cdot \mathbf{b}_1 [\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]}, \quad (26.98)$$

что легко проверяется путем непосредственного вычисления произведений  $\alpha \alpha^{-1}$  или  $\alpha^{-1} \alpha$ , которые оказываются равными единичному тензору.

Как отмечалось выше (см. (26.4) и последующие рассуждения), при диадном представлении тензора в качестве первых либо вторых векторов диад может быть выбрана любая тройка линейно независимых векторов. Рассмотрим случай вещественного симметричного тензора  $\alpha$ , у которого все собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  различны. Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — соответствующие собственные векторы:

$$\alpha \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1, \quad \alpha \mathbf{e}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}_2, \quad \alpha \mathbf{e}_3 = \lambda_3 \mathbf{e}_3. \quad (26.99)$$

Легко видеть, что  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  попарно взаимно ортогональны. Действительно, умножая скалярно первое уравнение (26.99) на  $\mathbf{e}_2$  и второе на  $\mathbf{e}_1$  и вычитая результаты, получаем с учетом симметрии тензора  $\alpha$  (см. (25.14)):  $(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0$ . Поскольку  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0$ . Аналогично получим  $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = 0$ . Поскольку уравнения (26.99) определяют  $\mathbf{e}_a$  с точностью до произвольного множителя, то эти векторы всегда могут быть нормированы на единицу:  $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1$ . Таким образом, их можно выбрать так, чтобы  $\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b = \delta_{ab}$ . Выберем векторы  $\mathbf{e}_a$  в качестве, например, правых диадных векторов. В таком случае  $\alpha = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_3$ . Чтобы найти векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , действуем  $\alpha$  на  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  соответственно. Из (26.99) сразу получаем  $\mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3 = \lambda_3 \mathbf{e}_3$ , следовательно,

$$\alpha = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3. \quad (26.100)$$

Если векторы  $\mathbf{e}_a$  выбраны в качестве ортов координатной системы, то  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Раскрывая

диады, согласно (25.58), получаем следующее выражение для тензора  $\alpha$  в матричной форме:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (26.101)$$

Такая форма тензора (матрицы) называется диагональной. Тензор принимает диагональную форму или, как говорят, приводится к диагональному виду в главной системе осей, которые направлены по собственным векторам  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , причем диагональные элементы равны собственным значениям тензора.

Рассмотрим случай, когда два собственных значения вещественного симметричного тензора совпадают. Если, например,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то, согласно (26.100),

$$\alpha = \lambda_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) + \lambda_2 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3. \quad (26.102)$$

Нетрудно убедиться, что всякий вектор, являющийся произвольной линейной комбинацией векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  ( $\mathbf{u} = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2$ ), будет собственным вектором тензора (26.102) для собственного значения  $\lambda_1$ . Иными словами, любой вектор, лежащий в плоскости, параллельной векторам  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , при умножении на тензор  $\alpha$  остается коллинеарным самому себе.

Если, наконец, все три собственных значения вещественного симметричного тензора совпадают между собой:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ , то, согласно (26.100), (26.51),

$$\alpha = \lambda (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) = \lambda \cdot 1 = \lambda. \quad (26.103)$$

В этом случае тензор  $\alpha$  кратен единичному.

Тензор (26.102) с помощью соотношения (26.51) также можно представить в более компактной и удобной форме. Прибавляя и отнимая справа член  $\lambda_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3$ , получаем

$$\alpha = \lambda_1 + (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3. \quad (26.104)$$

В этом представлении явно выделено направление собственного вектора  $\mathbf{e}_3$ , причем направления, перпендикулярные к нему, равноправны. Поэтому если тензор (26.103) можно назвать изотропным, то тензор (26.104) является поперечно изотропным. Мы будем называть его также одноосным, поскольку в нем выделено единственное направление (ось)  $\mathbf{e}_3$ .

Общий случай вещественного симметричного тензора (26.100) также можно представить в иной форме, которая зачастую оказывается весьма удобной и полезной. Пусть  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ; прибавляя и отнимая в (26.100) справа выражение  $\lambda_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3)$ , получаем

$$\alpha = \lambda_2 + (\lambda_3 - \lambda_2) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 - (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1. \quad (26.105)$$

Введем скаляры

$$k_3 = \left| \sqrt{\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1}} \right|, \quad k_1 = \left| \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1}} \right| \quad (26.106)$$

и векторы

$$c' = k_3 e_3 + k_1 e_1, \quad c'' = k_3 e_3 - k_1 e_1, \quad (26.107)$$

причем  $c'^2 = c''^2 = 1$ . Легко проверить, что с их помощью тензор (26.105) можно представить в виде

$$\alpha = \lambda_2 + \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{2} (c' \cdot c'' + c'' \cdot c'). \quad (26.108)$$

Тензор (26.104) получается отсюда как частный случай при  $c' = c'' = e_3$ . Векторы  $c'$  и  $c''$  в ряде случаев имеют вполне определенный геометрический, механический или физический смысл в зависимости от того, какую величину характеризует тензор  $\alpha$ . Мы будем называть векторы  $c'$ ,  $c''$  *осями* симметричного вещественного тензора  $\alpha$  (не смешивать с главными осями). Соответственно общий вещественный симметричный тензор  $\alpha$  (26.100), (26.108) мы будем называть *двуосным*.

Таким образом, в зависимости от соотношений между собственными значениями вещественных симметричных тензоров последние можно разделить на три группы:

1) изотропные (кратные единичному) тензоры

$$\alpha = a, \quad (26.109)$$

2) одноосные (поперечно-изотропные) тензоры

$$\alpha = a + bc \cdot c, \quad c^2 = 1, \quad (26.110)$$

3) двуосные тензоры

$$\alpha = a + b(c' \cdot c'' + c'' \cdot c'), \quad c'^2 = c''^2 = 1. \quad (26.111)$$

Представление тензоров в форме (26.110), (26.111) будем называть *аксиальным*.

Поскольку при всевозможных расчетах очень часто приходится иметь дело с этими тензорами, мы приводим ниже сводку их свойств, включающую данные о собственных значениях и собственных векторах, инвариантах  $\alpha_i$ ,  $\bar{\alpha}_i$ ,  $|a|$ , а также выражения для взаимного и обратного тензоров. В п. IV этой сводки приведены соответствующие данные также для тензора в форме (26.100). Из них видно, в частности, что след тензора равен сумме его собственных значений, а детерминант тензора равен произведению его собственных значений. Инвариант  $\alpha_i$  равен сумме попарных произведений собственных значений.

I. Изотропные тензоры

$$\alpha = a, \quad \bar{\alpha} = a^2, \quad \alpha^{-1} = \frac{1}{a}, \quad (26.112)$$

$$\alpha_t = 3a, \quad \bar{\alpha}_t = 3a^2, \quad |\alpha| = a^3.$$

II. Одноосные тензоры

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a + bc \cdot c, \quad c^2 = 1, \\ \bar{\alpha} &= a(a + b - bc \cdot c) = a(a - bc \times^2), \\ \alpha^{-1} &= \frac{a + b - bc \cdot c}{a(a + b)}; \end{aligned} \right\} (26.113)$$

$$\alpha_t = 3a + b, \quad \bar{\alpha}_t = a(3a + 2b), \quad |\alpha| = a^2(a + b). \quad (26.114)$$

Собственные значения

Собственные векторы

$a$  — двукратное

$\mathbf{x} \perp \mathbf{c}$

$(a + b)$  — однократное

$\mathbf{x} \parallel \mathbf{c}$

(26.115)

III. Двухосные тензоры

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a + b(c' \cdot c'' + c'' \cdot c'), \quad c'^2 = c''^2 = 1, \\ \bar{\alpha} &= a^2 + ab(2c'c'' - c' \cdot c'' - c'' \cdot c') - b^2[c'c''] \cdot [c'c''] = \\ &= 2a(a + bc'c'') - a\alpha - b^2[c'c''] \cdot [c'c''], \\ \alpha^{-1} &= \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \frac{b(c' \cdot c' + c'' \cdot c'') - (a + bc'c'')(c' \cdot c'' + c'' \cdot c')}{(a + bc'c'')^2 - b^2}; \end{aligned} \right\} (26.116)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_t &= 3a + 2bc'c'', \quad \bar{\alpha}_t = 3a^2 + 4abc'c'' - b^2[c'c'']^2, \\ |\alpha| &= a[(a + bc'c'')^2 - b^2]. \end{aligned} \right\} (26.117)$$

Собственные значения

Собственные векторы

$a$

$[c'c'']$

$a \pm b(1 \pm c'c'')$

$c' \pm c''$

(26.118)

IV. Диадная форма симметричного тензора

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \lambda_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b = \delta_{ab} \\ \bar{\alpha} &= \lambda_2 \lambda_3 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_3 \lambda_1 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \\ \alpha^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\lambda_3} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3; \end{aligned} \right\} (26.119)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, & |\alpha| &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \\ \bar{\alpha}_i &= \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (26.120)$$

Собственные значения

Собственные векторы

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

$$e_1, e_2, e_3 \quad (26.121)$$

Как указывалось, оси  $c'$ ,  $c''$  симметричных тензоров имеют вполне определенный смысл (см. [35]):

а) Геометрический смысл осей. Написав уравнение тензорной поверхности\*) в виде (см. [6])  $gar = ar^2 + 2brc' \cdot rc'' = C$ , убеждаемся, что сечения ее центральными плоскостями, перпендикулярными осям ( $rc' = 0, rc'' = 0$ ), дают окружности радиуса  $|r| = \sqrt{C/a}$ . Следовательно, *оси тензора  $\alpha$  являются нормальными к круговым сечениям его тензорной поверхности.*

б) Механический смысл осей. Пусть  $\alpha = I^{-1}$ , где  $I$  — тензор инерции твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Тогда оси  $c'$ ,  $c''$  отличаются тем, что при расположении центра тяжести тела на любой из них получается известный случай Гесса [165], обобщающий все классические случаи интегрируемости уравнений движения вращающегося тела.

в) Оптический смысл осей. Пусть  $\alpha = \varepsilon^{-1}$ , где  $\varepsilon$  — тензор диэлектрической проницаемости прозрачного немагнитного кристалла. Тогда  $c'$ ,  $c''$  являются оптическими осями (бинормальными) кристалла (см. § 4). Если же  $\alpha = \varepsilon$ , то  $c'$ ,  $c''$  будут вторичными оптическими осями (бирадиальными) кристалла.

Если два собственных значения тензора  $\alpha$  совпадают, то  $\alpha = a + bc \cdot c$ ; тензор  $\alpha$  при этом будет одноосным. Этому случаю с геометрической точки зрения соответствует поверхность вращения второго порядка, с механической — симметрический волчок, с оптической — одноосный кристалл.

В заключение рассмотрим трехмерные проективные тензоры. Легко видеть, что любая диада  $\alpha = a \cdot b$  дает проективную матрицу. Действительно,

$$(a \cdot b)^2 = ab(a \cdot b). \quad (26.122)$$

Следовательно, при условии

$$ab \neq 0, \quad (26.123)$$

согласно (25.70), матрица

$$\alpha = \frac{a \cdot b}{ab} \quad (26.124)$$

является проективной, так как  $\alpha^2 = \alpha$ . Поскольку  $\alpha_i = 1$ , то матрица  $\alpha$  проектирует на одномерное подпространство трехмерного пространства (§ 25), т. е. на прямую линию. Легко

\*) Тензорной поверхностью тензора  $\alpha = (\alpha_{ab})$  называется поверхность второго порядка, имеющая уравнение  $xax = \alpha_{ab}x_a x_b = 1$  [6].

видеть, что эта прямая *параллельна первому вектору диады*  $\mathbf{a}$ . Действительно, умножая на матрицу  $\alpha$  (26.124) любой вектор  $\mathbf{x}$ , получим

$$\mathbf{x}_p = \alpha \mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{x}}{\mathbf{a}\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a}, \quad (26.125)$$

т. е. вектор, параллельный  $\mathbf{a}$ . Как известно, любой вектор можно проектировать на заданное направление по-разному, поскольку существуют ортогональные и косоугольные проекции (см. рис. 26.1). Возникает вопрос, какую проекцию на на-

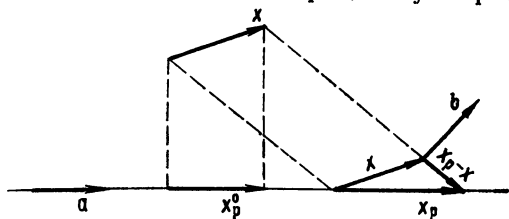


Рис. 26.1

правление  $\mathbf{a}$  определяет выражение (26.125). Если бы проекция  $\mathbf{x}_p$  (26.125) на направление вектора  $\mathbf{a}$  была ортогональной, то она выражалась бы следующим образом (см. рис. 26.1):

$$\mathbf{x}_p^0 = \frac{\mathbf{x}\mathbf{a}}{\mathbf{a}\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{x}\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}|}. \quad (26.126)$$

Сравнивая это выражение с (26.125), видим, что матрица  $\alpha$  (26.124) будет оператором ортогонального проектирования на направление  $\mathbf{a}$  лишь при условии, что  $\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{a}$ . В общем же случае выражение (26.125), очевидно, определяет косоугольную проекцию. Из рис. 26.1 видно, что направление проектирования определяется вектором  $\mathbf{x}_p - \mathbf{x}$ . С другой стороны, умножая равенство (26.125) скалярно на вектор  $\mathbf{b}$ , получаем

$$(\mathbf{x}_p - \mathbf{x})\mathbf{b} = 0. \quad (26.127)$$

Таким образом, оператор (26.124) осуществляет косоугольное проектирование любого вектора на вектор  $\mathbf{a}$ , причем направление проектирования перпендикулярно вектору  $\mathbf{b}$ . Как частный случай при  $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$  получаем обычную ортогональную проекцию.

Согласно (25.74), матрица

$$\beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{\mathbf{a}\mathbf{b}} \quad (26.128)$$

также является проективной:  $\beta^2 = \beta$ . Поскольку  $\beta_t = 2$ , то подпространство, на которое она проектирует, двумерно, т. е.

является плоскостью. Выясним, как ориентирована эта плоскость. Так как (см. (26.41))

$$\beta = -\frac{1}{ab} \mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (26.129)$$

то

$$\mathbf{x}_p = \beta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{b}\mathbf{x}}{ab} \cdot \mathbf{a} = -\frac{1}{ab} [\mathbf{b} [\mathbf{a}\mathbf{x}]]. \quad (26.130)$$

Отсюда ясно, что каков бы ни был вектор  $\mathbf{x}$ , его проекция  $\mathbf{x}_p$  будет перпендикулярна вектору  $\mathbf{b}$ . Следовательно, матрица  $\beta$

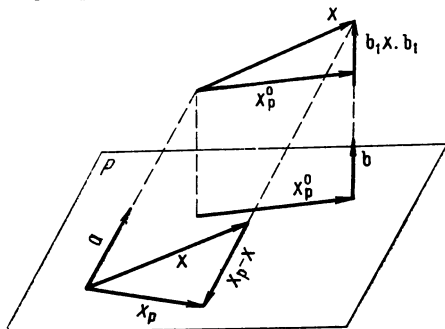


Рис. 26.2

(26.128), (26.129) проектирует любой вектор на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{b}$ . Но эта проекция опять может быть либо ортогональной, либо косоугольной. Ортогональная проекция  $\mathbf{x}_p^0$  на плоскость  $P$ , перпендикулярную к  $\mathbf{b}$ , получится, если от вектора  $\mathbf{x}$  отнять его проекцию на нормаль к плоскости  $P$ , т. е. на вектор  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{x}_p^0 = \mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = (1 - \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1) \mathbf{x} = -\mathbf{b}_1^{\times 2} \mathbf{x}, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}. \quad (26.131)$$

Из сравнения с (26.130) ясно, что это соответствует  $\mathbf{a} = \mathbf{C}\mathbf{b}$ . Снова (см. рис. 26.2) вектор  $\mathbf{x}_p - \mathbf{x}$  будет определять направление проектирования. Согласно (26.130),

$$\mathbf{x}_p - \mathbf{x} = -\frac{\mathbf{b}\mathbf{x}}{ab} \cdot \mathbf{a},$$

следовательно, вектор  $\mathbf{a}$  определяет направление косоугольного проектирования на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{b}$ .

Резюмируя, мы можем сказать, что матрица-диада (26.124)

$$\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}$$



осуществляет косоугольную проекцию любого вектора на направление первого вектора диады вдоль направления, перпендикулярного ко второму вектору диады. Матрица (26.128)

$$\beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = - \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a} \times}{ab}$$

осуществляет косоугольную проекцию на плоскость, перпендикулярную ко второму вектору диады  $\mathbf{b}$  вдоль направления первого вектора  $\mathbf{a}$ . В любом случае должно выполняться условие  $ab \neq 0$ .

Нетрудно показать, что любая проективная матрица в трехмерном вещественном пространстве эквивалентна одной из матриц рассмотренных двух типов.

В частном случае, когда  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{n}$ ,  $n^2 = 1$ , получаем из (26.124) оператор

$$\alpha = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \quad (26.132)$$

который осуществляет ортогональное проектирование любого вектора на направление  $\mathbf{n}$ , и из (26.128) оператор

$$\beta = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times^2, \quad (26.133)$$

осуществляющий ортогональную проекцию на плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{n}$ .

Покажем, что любой тензор  $\alpha$  однозначно определяется результатами его действия на три произвольных линейно независимых вектора  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  ( $\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] \neq 0$ ). Пусть

$$\alpha \mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \alpha \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2, \quad \alpha \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3. \quad (26.134)$$

Тогда для тензора  $\alpha$  справедливо следующее выражение:

$$\alpha = \frac{1}{\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]} (\mathbf{b}_1 \cdot [\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] + \mathbf{b}_2 \cdot [\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1] + \mathbf{b}_3 \cdot [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]). \quad (26.135)$$

Действительно, непосредственная проверка показывает, что для тензора (26.135) выполняются условия (26.134).

## § 27. ТРЕХМЕРНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕКТОРЫ

Рассмотрим совокупность выражений вида

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \quad (27.1)$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  представляют собой обычные трехмерные вещественные векторы. Величина (27.1) является комплексным трехмерным вектором, а совокупность таких величин образует *трехмерное комплексное векторное пространство*. Действительно, сумма выражений типа (27.1)

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + i(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2),$$

так же как произведение такого выражения на любое комплексное число

$$(\xi + i\eta) \mathbf{q} = (\xi \mathbf{a} - \eta \mathbf{b}) + i(\eta \mathbf{a} + \xi \mathbf{b}),$$

снова является выражениями типа (27.1). Весьма существенно то, что хотя величины (27.1) определяются *шестью* независимыми параметрами-компонентами двух трехмерных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , тем не менее их совокупность образует *трехмерное* комплексное линейное пространство. Чтобы убедиться в этом, выберем в трехмерном вещественном пространстве ортонормированный базис из трех вещественных векторов  $\mathbf{e}_a$

$$\mathbf{e}_a^* = \mathbf{e}_a, \quad \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b = \delta_{ab}. \quad (27.2)$$

Тогда любой вещественный вектор, в частности  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса:  $\mathbf{a} = \xi_a \mathbf{e}_a$ ,  $\mathbf{b} = \eta_a \mathbf{e}_a$ . В результате (27.1) принимает вид

$$\mathbf{q} = \zeta_a \mathbf{e}_a, \quad \zeta_a = \xi_a - i\eta_a. \quad (27.3)$$

Таким образом, любой комплексный вектор (27.1) можно представить в виде суммы не более чем трех векторов базиса (27.2), умноженных на некоторые комплексные числа. А это означает, что в рассматриваемом пространстве существует не более трех линейно независимых векторов, т. е. оно является трехмерным. Числа  $\zeta_a$  являются *компонентами* комплексного вектора  $\mathbf{q}$  в вещественном декартовом базисе  $\mathbf{e}_a$ , поэтому можно писать  $\zeta_a = q_a$ . Выражение (27.3) можно рассматривать как другое определение комплексного трехмерного вектора, равносильное (27.1). Как и в случае комплексных чисел, каждому комплексному вектору (27.1) можно поставить в соответствие *сопряженный* вектор

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{a} - i\mathbf{b}, \quad (27.4)$$

компоненты которого, очевидно, будут, согласно (27.2), (27.3), числами  $\mathbf{q}_a^*$ , комплексно сопряженными к компонентам вектора  $\mathbf{q}$ . Заметим, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определяют некоторую плоскость — мы будем говорить, что комплексный вектор  $\mathbf{q}$  (27.2) лежит в этой плоскости.

Как известно, алгебра комплексных чисел удовлетворяет всем аксиомам алгебры вещественных чисел: коммутативности по сложению и умножению, ассоциативности и дистрибутивности. Поэтому линейные комбинации базисных векторов с комплексными коэффициентами, т. е. комплексные трехмерные векторы (27.1), (27.3), будут обладать всеми основными свойствами вещественных трехмерных векторов. Для комплексных векторов могут быть определены и имеют смысл все операции, которые рассматривались в § 26 применительно к вещественным трехмерным векторам, и над ними могут произ-

водиться те же действия. В частности, всякому комплексному вектору  $q$  можно поставить в соответствие дуальную ему трехмерную антисимметричную матрицу  $q^\times$  с помощью соотношения, аналогичного (26.31)

$$q_{ab}^\times = \epsilon_{acb} q_c, \quad (27.5)$$

где  $\epsilon_{acb}$  — символ Леви-Чивита (26.7), (26.8). Разумеется, элементы матрицы  $q^\times$  будут комплексными числами. Аналогично (26.38), (26.39) имеем

$$q^\times q' = qq'^\times = [qq'], \quad (27.6)$$

где правая часть обозначает векторное произведение комплексных векторов, компоненты которого определяются прежним соотношением:  $[qq']_1 = q_2 q'_3 - q_3 q'_2$  и т. д. Если  $q' = a' + ib'$ , то

$$[qq'] = [aa'] - [bb'] + i([ab'] + [ba']). \quad (27.7)$$

Как и для вещественных векторов, из равенства  $[qq'] = 0$  следует  $q' = Cq$  (или  $q = Cq'$ ), где  $C$  — комплексное число. Скалярное произведение комплексных векторов мы будем определять следующим образом:

$$qq' = q_a q'_a = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + ba'). \quad (27.8)$$

Разумеется, оно теперь будет в общем случае комплексным числом. При  $qq' = 0$  мы будем называть комплексные векторы  $q$  и  $q'$  взаимно ортогональными в смысле определения (27.8). Легко убедиться, что из условий  $qq_1 = 0$ ,  $qq_2 = 0$ , как и в случае вещественных векторов, следует, что  $q = C[q_1 q_2]$ , где  $C$  — комплексный скаляр. Заметим, что обычно в комплексных векторных и функциональных пространствах скалярное произведение определяется иначе. Принятое там определение скалярного произведения в наших обозначениях будет выглядеть следующим образом:

$$(q, q') = q^* q'. \quad (27.9)$$

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение в соответствии с определением (27.9), называется *евклидовым* пространством. Если  $q^* q' = 0$ , то векторы  $q$  и  $q'$  ортогональны друг другу в смысле скалярного произведения (27.9).

Наряду со скалярным квадратом вектора  $q$

$$q^2 = qq = q_a q_a = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab \quad (27.10)$$

теперь нам будет встречаться *квадрат модуля комплексного вектора*

$$|q|^2 = (q, q) = q^* q = a^2 + b^2, \quad |q| = + \sqrt{|q|^2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (27.11)$$

который определяется вполне аналогично квадрату модуля комплексного скалярного числа и так же, как последний, всегда является вещественным положительным числом \*). Очевидно, из условия  $|\mathbf{q}|^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 0$  следует  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 0$ , т. е.  $\mathbf{q} = 0$ . Напротив, из равенства  $\mathbf{q}^2 = 0$  вовсе не вытекает, как это было для вещественных векторов, что  $\mathbf{q} = 0$ . Действительно, согласно (27.10), из  $\mathbf{q}^2 = 0$  следует

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2, \quad \mathbf{ab} = 0, \quad (27.12)$$

т. е. вещественные векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  должны быть равны между собой по длине и взаимно перпендикулярны. Комплексные векторы  $\mathbf{q}$ , удовлетворяющие условию  $\mathbf{q}^2 = 0$ , играют важную роль в теории — мы будем называть их *круговыми* векторами \*\*). Последнее название связано с тем, что комплексный вектор электрического (или магнитного) поля плоской волны, обладающий свойством  $\mathbf{E}^2 = 0$  ( $\mathbf{H}^2 = 0$ ), соответствует волне с круговой поляризацией (см. § 2).

В вещественном трехмерном пространстве обычно для задания базиса нужно иметь не менее двух линейно независимых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Тогда в качестве третьего независимого вектора всегда может быть взято векторное произведение  $[\mathbf{ab}]$ . В комплексном трехмерном пространстве в качестве базиса можно выбрать любую тройку линейно независимых комплексных векторов. Однако базис может быть однозначно определен в общем случае также с помощью одного комплексного вектора  $\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ . Для этого нужно добавить к нему комплексно сопряженный вектор  $\mathbf{q}^* = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$  и векторное произведение

$$[\mathbf{qq}^*] = -2i[\mathbf{ab}]. \quad (27.13)$$

Тройка векторов  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}^*$ ,  $[\mathbf{qq}^*]$  в общем случае образует базис трехмерного пространства. Исключением является случай, когда  $[\mathbf{qq}^*] = 0$ , т. е. когда вещественные векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  параллельны между собою. Если  $\mathbf{b} = \xi\mathbf{a}$ , то  $\mathbf{q} = (1 + i\xi)\mathbf{a}$ , следовательно, такой вектор лишь комплексным скалярным множителем отличается от вещественного вектора. Таким образом, если  $[\mathbf{qq}^*] \neq 0$ , то любой комплексный вектор  $\mathbf{p}$  может быть однозначно представлен в виде

$$\mathbf{p} = \xi\mathbf{q} + \eta\mathbf{q}^* + \zeta[\mathbf{qq}^*], \quad (27.14)$$

\*) Число  $|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$  иногда называют *нормой* комплексного вектора  $\mathbf{q}$ .

\*\*\*) Нередко круговые векторы называют *изотропными*. Это название следует признать крайне неудачным, поскольку такой вектор представляет собой ориентированный объект, связанный с выделенными направлениями, вследствие чего ни о какой изотропии здесь не может быть и речи.

причем комплексные скалярные числа  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  однозначно находятся путем умножения этого равенства на  $[qq^*]$ ,  $[q[qq^*]]$ ,  $[q^*[qq^*]]$ :

$$\xi = \frac{[pq^*][qq^*]}{[qq^*]^2}, \quad \eta = \frac{[pq][qq^*]}{[qq^*]^2}, \quad \zeta = \frac{p[qq^*]}{[qq^*]^2}. \quad (27.15)$$

Часто бывает удобно нормировать комплексный вектор базиса  $q$ , вводя вместо него вектор

$$q_1 = q/\sqrt{q^2}, \quad q_1^2 = 1. \quad (27.16)$$

Тогда и  $q_1^*$  также будет нормированным вектором:  $q_1^{*2} = 1$ . Такая нормировка невозможна для круговых векторов ( $q^2 = q^{*2} = 0$ ). В этом случае можно нормировать  $q$  по условию  $|q^2| = qq^* = 1$ . Введем вещественный единичный вектор  $c = [qq^*]/\sqrt{[qq^*]^2}$ . Тогда, поскольку  $q^2 = qq = 0$  и  $cq = 0$ , то

$$q = C[cq]. \quad (27.17)$$

Подставляя это значение  $q$  в правую часть, т. е. итерируя, получим

$$q = C[c, C[cq]] = -C^2q, \quad C = \pm i.$$

Заметим, что соотношения вида (27.17) часто встречаются в теории гиротропных сред. Если  $c^2 = 1$ , то сразу можно полагать  $C = \pm i$ . В общем же случае из равенства (27.17) следует

$$C = \pm i/\sqrt{c^2}. \quad (27.18)$$

Мы будем обычно употреблять для круговых векторов обозначение  $e$ . Согласно (27.17), для всякого кругового вектора  $e$ , ортогонального к вещественному единичному вектору  $c$ , справедливы соотношения

$$e = \pm i[ce] \quad (e^2 = ce = 0, \quad c^2 = 1). \quad (27.19)$$

В зависимости от знака перед векторным произведением следует различать два типа круговых векторов, ортогональных к  $c$ :

$$e_+ = i[ce], \quad e_- = -i[ce]. \quad (27.20)$$

Если взять комплексное сопряжение от первого равенства, то получим  $e_+^* = -i[ce_+^*]$ , т. е. вектор  $e_+^*$  удовлетворяет тому же соотношению, что  $e_-$ , поэтому можно положить  $e_- = Ce_+^*$ , где  $C$ —любое комплексное число. Мы будем обычно выбирать  $C=1$  и для краткости писать

$$e = e_+, \quad e^* = e_-. \quad (27.21)$$

Все соотношения (27.19), (27.20) остаются в силе при умножении  $e$  на любое комплексное число. Это число всегда можно выбрать так, чтобы имело место соотношение

$$e_+ e_- = ee^* = |e|^2 = 1. \quad (27.22)$$

Круговой вектор  $e$ , удовлетворяющий этому условию, мы будем называть *нормированным*. Заметим, что при заданном  $c$  ( $c^2=1$ ) все эти условия, включая нормировку, не определяют вектор  $e$  однозначно, так как они остаются в силе при умножении  $e$  на произвольный унимодулярный множитель  $e^{i\alpha}$ . Из (27.20), (27.21) следует, что

$$[ee^*] = -i[e[ce^*]] = -ic,$$

поэтому

$$c = i[ee^*]. \quad (27.23)$$

Нетрудно написать явное выражение для нормированного кругового вектора через вещественные векторы (27.2). Положим  $[e_1 e_2] = e_3 = c$ , тогда вектор

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2) \quad (27.24)$$

будет обладать всеми свойствами (27.19), (27.22) вектора  $e_{\pm}$ .

Тройка векторов  $c$ ,  $e_{\pm}$  или  $c$ ,  $e$ ,  $e^*$  образует базис в трехмерном комплексном векторном пространстве. Действительно, напишем

$$q = \xi c + \eta e + \zeta e^*. \quad (27.25)$$

Умножая это равенство последовательно на  $c$ ,  $e$ ,  $e^*$ , найдем

$$\xi = qc, \quad \eta = qe, \quad \zeta = qe^*,$$

т. е. при любом векторе  $q$  коэффициенты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  определяются однозначно, следовательно, всякий вектор может быть единственным образом разложен по тройке векторов  $c$ ,  $e$ ,  $e^*$ . Это и означает, что такие три вектора образуют базис, который мы будем называть *аксиальным*.

Наряду с этим в качестве базиса трехмерного комплексного линейного пространства можем выбрать любую тройку комплексных векторов  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , нормированных и взаимно ортогональных между собою в смысле (27.9)

$$u_a^* u_b = \delta_{ab}. \quad (27.26)$$

В самом деле из равенства

$$q = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \quad (27.27)$$

после умножения на  $u_1^*$ ,  $u_2^*$ ,  $u_3^*$  с учетом (27.26) находим  $\alpha = u_1^*q$ ,  $\beta = u_2^*q$ ,  $\gamma = u_3^*q$ , т. е. мы также получаем единственные значения для  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Любому трехмерному комплексному вектору  $q$  можно однозначно сопоставить определенную плоскую кривую, уравнение которой имеет вид

$$|r\mathbf{q}|^2 = \frac{1}{4} |[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]|^2 \quad (27.28)$$

или, если использовать выражение  $q = a + ib$ ,

$$[\mathbf{r}\mathbf{a}]^2 + [\mathbf{r}\mathbf{b}]^2 = [\mathbf{a}\mathbf{b}]^2. \quad (27.29)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — вещественный радиус-вектор произвольной точки рассматриваемой кривой, лежащей в плоскости  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Ясно, что при  $[\mathbf{q}\mathbf{q}^*] = [\mathbf{a}\mathbf{b}] = 0$  она вырождается в прямую  $\mathbf{r} \parallel \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ . В любом другом случае это будет ограниченная кривая второго порядка, т. е. эллипс или окружность. Последняя получается, как легко видеть, при условиях  $\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}\mathbf{b} = 0$ . Из формы (27.28) уравнения эллипса ясно, что оно (как и сам эллипс) не меняется при умножении вектора  $q$  на произвольный скалярный унимодулярный множитель  $e^{i\alpha}$ . Присвоим каждому комплексному трехмерному вектору название, совпадающее с соответствующей ему кривой. Таким путем мы приходим к следующей естественной классификации трехмерных комплексных векторов [4—7, 9]:

$$\begin{aligned} \text{линейный вектор: } [\mathbf{q}\mathbf{q}^*] &= 0, \\ \text{круговой вектор: } \mathbf{q}^2 &= 0, \\ \text{эллиптический вектор: } [\mathbf{q}\mathbf{q}^*] &\neq 0, \mathbf{q}^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (27.30)$$

Заметим, что при  $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$  уравнение (27.29), если обозначить  $(\mathbf{r}\mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2 x^2$ ,  $(\mathbf{r}\mathbf{b})^2 = \mathbf{b}^2 y^2$ ,  $\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2$ , принимает вид

$$\frac{x^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{y^2}{\mathbf{b}^2} = 1,$$

т. е. форму канонического уравнения эллипса с полуосями  $|\mathbf{a}|$  и  $|\mathbf{b}|$ . В связи с этим мы будем называть комплексный вектор  $q$ , для которого  $\mathbf{a}\mathbf{b} = 0$  (следовательно,  $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}^{*2}$ ), *каноническим* комплексным трехмерным вектором. Кроме того, под термином *нелинейный* комплексный вектор мы будем объединять все векторы  $q$ , для которых  $[\mathbf{q}\mathbf{q}^*] \neq 0$ .

Очевидно, радиус-вектор любой точки плоскости  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  можно представить в виде линейной комбинации

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{a} + \eta \mathbf{b} \quad ([\mathbf{a}\mathbf{b}] \neq 0). \quad (27.31)$$

Пусть  $\xi < 1$  является фиксированным числом. Тогда при переменном  $\eta$  радиус-вектор (27.31) будет определять прямую, проведенную из точки  $\xi \mathbf{a}$  параллельно вектору  $\mathbf{b}$ . Точки пересечения этой прямой с эллипсом (27.29) получим, подставляя (27.31) в уравнение (27.29), откуда следует  $\eta = \pm \sqrt{1 - \xi^2}$  или

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{a} \pm \sqrt{1 - \xi^2} \mathbf{b}.$$

Очевидно, эти точки лежат на одинаковом расстоянии  $\sqrt{1 - \xi^2} |\mathbf{b}|$  от точки  $\xi \mathbf{a}$ . Следовательно, вектор  $\mathbf{a}$  делит пополам все хорды эллипса, параллельные вектору  $\mathbf{b}$  и наоборот. Любые два диаметра эллипса, обладающие описанными свойствами, называются его *взаимно сопряженными* диаметрами. Таким образом, мы установили геометрический смысл векторов, равных вещественной и мнимой части комплексного вектора  $\mathbf{q}$ , — они являются взаимно сопряженными полудиаметрами эллипса, соответствующего  $\mathbf{q}$ , согласно уравнению (27.28).

С каждым комплексным вектором  $\mathbf{q}$  связаны два инварианта:  $q^2$  и  $|\mathbf{q}|^2 = \mathbf{q}\mathbf{q}^*$ . Первый из них является в общем случае комплексным числом, а второй — вещественным положительным числом. Инвариант  $q^2$ , как всякое комплексное число, можно написать в виде

$$q^2 = |\mathbf{q}|^2 e^{2i\alpha_{\mathbf{q}}}. \quad (27.32)$$

Величину  $\alpha_{\mathbf{q}}$  назовем *собственной фазой* комплексного вектора  $\mathbf{q}$ . Очевидно, эта величина также является инвариантом, т. е.  $\alpha_{\mathbf{q}}$ , как и  $q^2$ ,  $|\mathbf{q}|^2$ , не меняется при любых ортогональных преобразованиях координат. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{q}_r = e^{-i\alpha_{\mathbf{q}}} \mathbf{q}. \quad (27.33)$$

Если возвести его в квадрат, то, согласно (27.32), получим

$$q_r^2 = e^{-2i\alpha_{\mathbf{q}}} q^2 = |\mathbf{q}|^2. \quad (27.34)$$

Таким образом, умножение на  $e^{-i\alpha_{\mathbf{q}}}$  делает вектор  $\mathbf{q}$  каноническим:  $q_r^2 = \mathbf{q}_r^* \mathbf{q}_r = |\mathbf{q}|^2 > 0$ . А это означает, что его вещественная и мнимая части будут равны полуосям соответствующего эллипса, причем вещественная часть будет равна вектору *большой* полуоси. Следовательно, умножение на  $e^{-i\alpha_{\mathbf{q}}}$  как бы осуществляет приведение эллипса (27.28) к главным осям, ввиду чего вектор  $\mathbf{q}_r$  можно назвать *приведенным* вектором  $\mathbf{q}$  [4, 5]. Множитель  $e^{-i\alpha_{\mathbf{q}}}$  находится из (27.32):

$$e^{-i\alpha_{\mathbf{q}}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{q}|^2}{q^2}}, \quad (27.35)$$



следовательно,

$$q_r = \sqrt{\frac{|q^2|}{q^2}} q = a + ib, \quad ab = 0, \quad |a| > |b|. \quad (27.36)$$

Поскольку для линейного вектора  $q$

$$[qq^*]^2 = |q^2|^2 - |q|^4 = 0, \quad (27.37)$$

то такой вектор обладает свойством

$$|q^2| = |q|^2, \quad (27.38)$$

которое также можно рассматривать как определение линейного вектора. Действительно,  $[qq^*]$  есть чисто мнимый вектор

$$[qq^*]^* = [q^*q] = -[qq^*],$$

поэтому можно написать  $[qq^*] = id$ ,  $[qq^*]^2 = -d^2$ . Таким образом, из равенства (27.37) получаем  $d = -i[qq^*] = 0$ , а (27.37) есть следствие (27.38).

Из  $[qq^*] = 0$  следует  $q^* = Cq$ ,  $q = C^*q^*$ , т. е.  $|C|^2 = 1$ . Поэтому  $C = e^{-2i\alpha}$ , в чем легко убедиться из сравнения с (27.34). Но в таком случае  $e^{i\alpha}q^* = e^{-i\alpha}q$ , т. е.  $q_r = q_r^*$ . Следовательно, для линейного вектора приведенный вектор является вещественным. Если линейный вектор нормировать согласно (27.16), то в результате получится вещественный единичный вектор.

По отношению к эллиптическим комплексным векторам линейные и круговые векторы являются простейшими предельными частными случаями. Произвольный эллиптический вектор всегда может быть представлен в виде линейной комбинации линейных или круговых векторов. Такое разложение представляет существенный интерес в связи с тем, что физически ему соответствует разложение эллиптически поляризованной электромагнитной (или упругой) волны в сумму волн с линейной или круговой поляризацией, которое часто используется на практике.

Рассмотрим вначале разложение эллиптического вектора  $q$  на сумму двух линейных векторов. Всякий линейный вектор, очевидно, может быть представлен как произведение комплексного скаляра  $\xi$  на единичный вещественный вектор  $n$  ( $n = n^*$ ,  $n^2 = 1$ ). Таким образом, речь идет о представлении

$$q = a + ib = \xi_1 n_1 + \xi_2 n_2. \quad (27.39)$$

Отсюда следует  $q[n_1 n_2] = a[n_1 n_2] = b[n_1 n_2] = 0$ , т. е. оба вектора  $n_1$  и  $n_2$  должны лежать в той же плоскости, что и  $a$ ,  $b$ , т. е. в плоскости комплексного вектора  $q$ . Мы можем произвольно задать в этой плоскости направления  $n_1$  и  $n_2$ , после чего скаля-

ры  $\xi_1$  и  $\xi_2$  однозначно находятся из уравнений, получающихся при умножении (27.39) на  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$

$$\xi_1 + \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \xi_2 = \mathbf{n}_1 \mathbf{q}, \quad \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \xi_1 + \xi_2 = \mathbf{n}_2 \mathbf{q}.$$

Их решения существуют при условии

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2 = [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2]^2 \neq 0,$$

т. е. когда  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  не коллинеарны. Для  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  имеем:

$$\xi_1 = \frac{[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2][\mathbf{q} \mathbf{n}_2]}{[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2]^2}, \quad \xi_2 = \frac{[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2][\mathbf{q} \mathbf{n}_1]}{[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2]^2}. \quad (27.40)$$

Таким образом, разложение (27.39) осуществимо бесчисленным множеством способов. При заданных  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  разложение единственно. В случае  $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = 0$  имеем  $\xi_1 = \mathbf{n}_1 \mathbf{q}$ ,  $\xi_2 = \mathbf{n}_2 \mathbf{q}$ .

Рассмотрим разложение эллиптического вектора на сумму двух круговых векторов

$$\mathbf{q} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 0. \quad (27.41)$$

При этом мы будем предполагать, что векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  лежат в той же плоскости, что и  $\mathbf{q}$ . Это условие можно выразить следующим образом. Введем единичный вещественный вектор, перпендикулярный к плоскости вектора  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_q = i \frac{[\mathbf{q} \mathbf{q}^*]}{||[\mathbf{q} \mathbf{q}^*]||}, \quad \mathbf{N}_q \mathbf{q} = \mathbf{N}_q \mathbf{q}^* = 0. \quad (27.42)$$

Очевидно, для комплексно-сопряженного вектора  $\mathbf{q}^*$  получим

$$\mathbf{N}_{q^*} = i \frac{[\mathbf{q}^* \mathbf{q}]}{||[\mathbf{q}^* \mathbf{q}]||} = -\mathbf{N}_q. \quad (27.43)$$

Легко убедиться, что  $\mathbf{N}_q^* = \mathbf{N}_q$ ,  $\mathbf{N}_q^2 = 1$ , поскольку  $||[\mathbf{q} \mathbf{q}^*]||^2 = [\mathbf{q} \mathbf{q}^*][\mathbf{q} \mathbf{q}^*]^* = -[\mathbf{q} \mathbf{q}^*]^2$ . Вектор  $\mathbf{N}_q$ , определенный равенством (27.42), будем называть *ортом* вектора  $\mathbf{q}$ . Условие, что  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  лежат в той же плоскости, что и  $\mathbf{q}$ , сводится к равенствам  $\mathbf{N}_q \mathbf{e}_1 = \mathbf{N}_q \mathbf{e}_2 = 0$ . При этом должно быть  $\mathbf{e}_1 = i[\mathbf{N}_q \mathbf{e}_1]$ ,  $\mathbf{e}_2 = -i[\mathbf{N}_q \mathbf{e}_2]$  (см. (27.17)). Знаки при  $i$  должны быть различны, потому что при совпадении знаков мы имели бы  $\mathbf{q} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \pm i[\mathbf{N}_q, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2] = \pm i[\mathbf{N}_q \mathbf{q}]$ , т. е.  $\mathbf{q}$  был бы круговым, а не эллиптическим вектором. С учетом этих свойств имеем, согласно (27.41),

$$i[\mathbf{N}_q \mathbf{q}] = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad (27.44)$$

что вместе с (27.43) сразу приводит к однозначному определению  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{q} + i[\mathbf{N}_q \mathbf{q}]), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - i[\mathbf{N}_q \mathbf{q}]). \quad (27.45)$$

Итак, произвольный эллиптический вектор *однозначно* разлагается на сумму двух круговых векторов (правого и левого), лежащих в его плоскости. Если  $\mathbf{q}$  — линейный вектор, то разложение (27.42), (27.45) сохраняется, причем вектор  $\mathbf{N}_q$  может быть любым единичным вещественным вектором, перпендикулярным к  $\mathbf{q}$ .

Заметим, что понятие орта комплексного вектора является удобным для решения ряда вопросов. Пусть мы имеем два комплексных вектора  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$ . Тогда условие параллельности плоскостей векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$  может быть написано в виде

$$\mathbf{N}_q \mathbf{q}' = \mathbf{N}_{q'} \mathbf{q} = 0, \quad (27.46)$$

а угол  $\psi$  между этими плоскостями в общем случае определяется из равенства

$$\cos \psi = \mathbf{N}_q \mathbf{N}_{q'}. \quad (27.47)$$

Рассмотрим теперь разложение эллиптического вектора на сумму линейного и кругового вектора

$$\mathbf{q} = \xi \mathbf{n} + \mathbf{e}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}^*, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{e}^2 = 0. \quad (27.48)$$

Если задан  $\mathbf{n}$ , то мы имеем уравнение

$$\mathbf{e}^2 = (\mathbf{q} - \xi \mathbf{n})^2 = \mathbf{q}^2 - 2\xi \mathbf{n} \mathbf{q} + \xi^2 = 0,$$

откуда находим

$$\xi = \mathbf{n} \mathbf{q} \pm \sqrt{(\mathbf{n} \mathbf{q})^2 - \mathbf{q}^2} = \mathbf{n} \mathbf{q} \pm i \sqrt{[\mathbf{n} \mathbf{q}]^2} \quad (27.49)$$

и

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{\pm} = \mathbf{q} - (\mathbf{n} \mathbf{q} \pm i \sqrt{[\mathbf{n} \mathbf{q}]^2}) \mathbf{n} = [\mathbf{n} [\mathbf{q} \mathbf{n}]] \mp i \sqrt{[\mathbf{n} \mathbf{q}]^2} \mathbf{n}. \quad (27.50)$$

Таким образом, при произвольном заданном  $\mathbf{n}$  задача имеет два решения. Если речь идет о разложении эллиптически поляризованной световой волны на линейно и циркулярно поляризованную волны, то вектор  $\mathbf{n}$  должен лежать в плоскости вектора  $\mathbf{q}$ .

Особый интерес представляет такое разложение (27.48), когда вещественный вектор  $\mathbf{n}$  перпендикулярен к плоскости кругового вектора  $\mathbf{e}$  ( $\mathbf{n} \mathbf{e} = 0$ ). При этом из (27.48) следует после возведения в квадрат  $\mathbf{q}^2 = \xi^2$ . Умножая (27.48) на  $\mathbf{n}$ , имеем  $\mathbf{n} \mathbf{q} = \xi$ , а из (27.50) следует

$$\mathbf{e} = [\mathbf{n} [\mathbf{q} \mathbf{n}]] = -\mathbf{n}^{\times 2} \mathbf{q}. \quad (27.51)$$

Таким образом, вещественный единичный вектор  $\mathbf{n}$  должен удовлетворять условию

$$\mathbf{e}^2 = \mathbf{q}\mathbf{e} = [\mathbf{n}\mathbf{q}]^2 = 0. \quad (27.52)$$

Итак, если  $\mathbf{n}\mathbf{e} = 0$ , то разложение (27.48) принимает вид

$$\mathbf{q} = \mathbf{n}\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{e} = \mathbf{n}\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{n}[\mathbf{q}\mathbf{n}]]. \quad (27.53)$$

При этом для того чтобы вектор  $\mathbf{e}$  был круговым, вектор  $\mathbf{n}$  должен удовлетворять условию  $[\mathbf{n}\mathbf{q}]^2 = 0$  (27.52). Наоборот, если последнее условие удовлетворяется, то вектор  $\mathbf{e}$  является круговым и  $\mathbf{n}\mathbf{e} = 0$ . Таким образом, условие

$$[\mathbf{n}\mathbf{q}]^2 = 0 \quad (27.54)$$

является *необходимым* и *достаточным* для того, чтобы произвольный комплексный вектор  $\mathbf{q}$  мог быть представлен в форме (27.48) при  $\mathbf{n}\mathbf{e} = 0$ .

Чтобы найти вектор  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющий (27.54), представим его в виде

$$\mathbf{n} = \alpha\mathbf{q} + \beta\mathbf{q}^* + \gamma[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]. \quad (27.55)$$

Из вещественности  $\mathbf{n}$  следует  $\beta = \alpha^*$ ,  $\gamma = i\gamma_0$  ( $\gamma_0^* = \gamma_0$ ). Условие (27.54) дает теперь

$$[\mathbf{q}\mathbf{n}]^2 = [\mathbf{q}\mathbf{q}^*]^2(\alpha^{*2} - \gamma_0^2\mathbf{q}^2) = 0, \quad \alpha^* = \pm \gamma_0\sqrt{\mathbf{q}^2}, \quad \alpha = \pm \gamma_0\sqrt{\mathbf{q}^{*2}},$$

следовательно,

$$\mathbf{n} = \pm \gamma_0(\sqrt{\mathbf{q}^{*2}}\mathbf{q} + \sqrt{\mathbf{q}^2}\mathbf{q}^* \pm i[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]). \quad (27.55a)$$

Используя условие  $\mathbf{n}^2 = 1$ , находим окончательно

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\pm} = \frac{\sqrt{\mathbf{q}^{*2}}\mathbf{q} + \sqrt{\mathbf{q}^2}\mathbf{q}^* \pm i[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]}{|\mathbf{q}|^2 + |\mathbf{q}^2|}. \quad (27.56)$$

Таким образом, при  $\mathbf{n}\mathbf{e} = 0$  задача о представлении *эллиптического* вектора  $\mathbf{q}$  в виде (27.48) имеет два решения (27.56).

Если нормировать  $\mathbf{q}$  по условию  $\mathbf{q}^2 = 1$ , то представление (27.48) реализуется двумя способами

$$\mathbf{q} = \mathbf{n}_+ + \mathbf{e}_+ = \mathbf{n}_- + \mathbf{e}_-, \quad \mathbf{q}^2 = \mathbf{n}_{\pm}\mathbf{q} = 1, \quad \mathbf{e}_{\pm}\mathbf{q} = 0, \quad (27.57)$$

где

$$\mathbf{n}_{\pm}^* = \mathbf{n}_{\pm}, \quad \mathbf{n}_{\pm}^2 = 1, \quad \mathbf{e}_{\pm}^2 = \mathbf{n}_{\pm}\mathbf{e}_{\pm} = 0, \quad (27.58)$$

$$\mathbf{n}_{\pm} = \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}^* \pm i[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]}{1 + |\mathbf{q}|^2}. \quad (27.59)$$

Поскольку

$$\mathbf{e}_{\pm} = \mathbf{q} - \mathbf{n}_{\pm} = \frac{\mathbf{q} \cdot |\mathbf{q}|^2 - \mathbf{q}^* \mp i[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]}{1 + |\mathbf{q}|^2}, \quad (27.60)$$

то из (27.20) следует

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{e}_{\pm}] &= [\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{q}] = \frac{[\mathbf{q}^* \mathbf{q}] \mp i [\mathbf{q} [\mathbf{q} \mathbf{q}^*]]}{1 + |\mathbf{q}|^2} = \\ &= \mp i \frac{|\mathbf{q}|^2 \mathbf{q} - \mathbf{q}^* \mp i [\mathbf{q} \mathbf{q}^*]}{1 + |\mathbf{q}|^2} = \mp i \mathbf{e}_{\pm}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{e}_{\pm} = \pm i [\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{e}_{\pm}]. \quad (27.61)$$

Соотношения (27.57) допускают простую и наглядную геометрическую интерпретацию. Каждому эллиптическому векто-

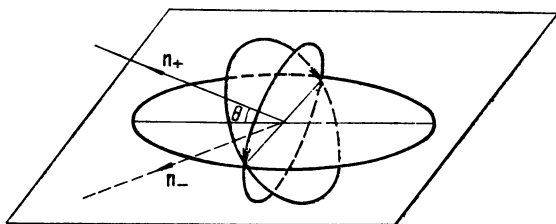


Рис. 27.1

ру  $\mathbf{q}$ , как было показано выше, соответствует эллипс, лежащий в его плоскости (см. рис. 27.1). Круговым векторам  $\mathbf{e}_{\pm}$  соответствуют окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к векторам  $\mathbf{n}_{\pm}$ . Нетрудно убедиться, что окружности, соответствующие векторам  $\mathbf{e}_{\pm}$ , получаются в результате ортогонального проектирования эллипса вектора  $\mathbf{q}$  на плоскости, перпендикулярные к  $\mathbf{n}_{\pm}$ . Действительно, оператор ортогонального проектирования на плоскость, перпендикулярную к единичному вещественному вектору  $\mathbf{n}$ , равен  $1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \mathbf{n}$  (см. (26.133)). Если умножить вектор  $\mathbf{q} = \mathbf{n}_{\pm} + \mathbf{e}_{\pm}$  (27.57) на  $-\mathbf{n}_{\pm} \times$  то, согласно (27.51), мы получим  $\mathbf{e}_{\pm}$ . Из рис. 27.1 очевидно, что векторы  $\mathbf{n}_{\pm}$ , так же как и перпендикулярные к ним плоскости круговых векторов  $\mathbf{e}_{\pm}$ , симметрично расположены относительно плоскости вектора  $\mathbf{q}$ . При этом векторы  $\mathbf{n}_{\pm}$  и вектор  $\mathbf{a}$  большей полуоси эллипса лежат в одной плоскости, проходящей через  $\mathbf{a}$  и орт вектора  $\mathbf{q}$ . Плоскости круговых векторов  $\mathbf{e}_{\pm}$  пересекаются между собой и с плоскостью вектора  $\mathbf{q}$  по малой оси эллипса  $\mathbf{b}$ . Для нормированного вектора  $\mathbf{q}$  ( $q^2 = 1$ ) имеем

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = 1, \quad \mathbf{a}\mathbf{b} = 0; \quad (27.62)$$

при этом выражение (27.59) для  $\mathbf{n}_{\pm}$  принимает вид:

$$\mathbf{n}_{\pm} = \frac{\mathbf{a} \pm [\mathbf{a}\mathbf{b}]}{a^2}. \quad (27.63)$$

Угол  $\theta$ , образуемый векторами  $\mathbf{n}_{\pm}$  с вектором  $\mathbf{a}$ , или, что то же самое, с плоскостью вектора  $\mathbf{q}$ , определяется выражениями

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_{\pm} \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}, \quad \operatorname{tg} \theta = |\mathbf{b}|. \quad (27.64)$$

Поскольку  $\sqrt{\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2} = 1$ , то можно написать также

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2}}{|\mathbf{a}|} = e, \quad (27.65)$$

где  $e$  — эксцентриситет эллипса, соответствующего вектору  $\mathbf{q}$ . Отсюда ясно, что когда эллипс вырождается в прямую ( $e = 1$ ), то векторы  $\mathbf{n}_{\pm}$  сливаются с полуосью  $\mathbf{a}$ . Если же эллипс превращается в круг ( $e = 0$ ), то  $\mathbf{n}_{\pm}$  совпадают с перпендикуляром к плоскости вектора  $\mathbf{q}$ .

Очевидно, умножение  $\mathbf{q}$  на любое комплексное число не изменяет общего выражения (27.56) для  $\mathbf{n}_{\pm}$ . В то же время при замене  $\mathbf{q}$  на  $\mathbf{q}^*$  и наоборот вектор  $\mathbf{n}_{+}$  переходит в  $\mathbf{n}_{-}$ , а  $\mathbf{n}_{-}$  — в  $\mathbf{n}_{+}$ .

Заметим, что из уравнений  $\mathbf{q}\mathbf{e} = \mathbf{e}^2 = 0$  следует

$$\mathbf{e} = C[\mathbf{q}\mathbf{e}] = C^2[\mathbf{q}[\mathbf{q}\mathbf{e}]] = -C^2\mathbf{q}^2\mathbf{e}$$

и если  $\mathbf{q}^2 = 1$ , то  $C = \pm i$ . Таким образом, векторы  $\mathbf{e}_{\pm}$ , входящие в представление (27.57), связаны с вектором  $\mathbf{q}$  ( $\mathbf{q}^2 = 1$ ) соотношением

$$\mathbf{e}_{\pm} = \pm i[\mathbf{q}\mathbf{e}_{\pm}]. \quad (27.66)$$

Кроме того, из (27.59), (27.60) следует

$$\mathbf{e}_{+}\mathbf{e}_{-} = 2 \frac{1 - |\mathbf{q}|^2}{1 + |\mathbf{q}|^2}, \quad \mathbf{e}_{\pm} \mathbf{n}_{\mp} = 1 - \mathbf{n}_{+}\mathbf{n}_{-} = -\mathbf{e}_{+}\mathbf{e}_{-}, \quad (27.67)$$

$$[\mathbf{e}_{+}\mathbf{e}_{-}] = -2i \frac{1 - |\mathbf{q}|^2}{1 + |\mathbf{q}|^2} \mathbf{q} = -i\mathbf{e}_{+}\mathbf{e}_{-}\mathbf{q}.$$

Заметим, что общая формула (27.56) сохраняет смысл и в тех случаях, когда вектор  $\mathbf{q}$  является круговым или линейным. Если  $\mathbf{q}^2 = 0$ , то из (27.56) имеем

$$\mathbf{n}_{\pm} = \pm i \frac{[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]}{|\mathbf{q}|^2}. \quad (27.68)$$

Сравнивая с (27.42) и учитывая, что для кругового вектора  $\mathbf{q}$  справедливо соотношение  $|\mathbf{q}\mathbf{q}^*| = |\mathbf{q}|^2$ , получаем

$$\mathbf{n}_{\pm} = \pm \mathbf{N}_{\mathbf{q}}, \quad (27.69)$$

т. е. направления  $\mathbf{n}_{\pm}$  (27.56) для кругового вектора  $\mathbf{q}$  параллельны его орту. Если же  $\mathbf{q}$  — линейный вектор, т. е.  $\mathbf{q} = C\mathbf{n}_0$ ,  $\mathbf{n}_0^* = \mathbf{n}_0$ ,  $\mathbf{n}_0^2 = 1$ , то из (27.56) следует

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{q^2}}. \quad (27.70)$$

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях два круговых вектора  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}'$  могут быть ортогональны между собой в смысле (27.8):

$$\mathbf{e}\mathbf{e}' = 0 \quad (\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}'^2 = 0). \quad (27.71)$$

Пусть  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}'$  — орты векторов  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}'$  соответственно. Тогда по свойству (27.19) круговых векторов должно быть

$$\mathbf{e} = \pm i[\mathbf{N}\mathbf{e}], \quad \mathbf{e}' = \pm i[\mathbf{N}'\mathbf{e}'].$$

Подставляя одно либо другое из этих выражений в (27.71), получаем

$$\mathbf{N}[\mathbf{e}\mathbf{e}'] = \mathbf{N}'[\mathbf{e}\mathbf{e}'] = 0. \quad (27.72)$$

С другой стороны, из (27.71) следует  $[\mathbf{e}\mathbf{e}']^2 = 0$ , т. е. вектор  $[\mathbf{e}\mathbf{e}']$  является либо нулевым, либо круговым.

Если  $[\mathbf{e}\mathbf{e}'] = 0$ , то  $\mathbf{e}' = C\mathbf{e}$ . Если же предположить, что  $[\mathbf{e}\mathbf{e}'] \neq 0$ , то условия (27.72) означают, что оба орта  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{N}'$  перпендикулярны к плоскости кругового вектора  $[\mathbf{e}\mathbf{e}']$ , т. е.  $\mathbf{N}' = \pm \mathbf{N}$ . Но в таком случае плоскости векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}'$  совпадают. Вектор  $\mathbf{e}'$ , как всякий комплексный вектор, лежащий в плоскости кругового вектора  $\mathbf{e}$ , может быть тогда представлен в виде линейной комбинации

$$\mathbf{e}' = C\mathbf{e} + C_1\mathbf{e}^*.$$

Умножая на  $\mathbf{e}$ , с учетом (27.71) находим  $C_1 = 0$ . Таким образом, из условий (27.71) однозначно следует

$$\mathbf{e}' = C\mathbf{e}. \quad (27.73)$$

Итак, два круговых вектора  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}'$  в трехмерном комплексном пространстве могут быть взаимно ортогональны в смысле  $\mathbf{e}\mathbf{e}' = 0$  тогда и только тогда, когда они пропорциональны между собой:  $\mathbf{e}' = C\mathbf{e}$ .

Случай, когда два круговых вектора  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}_1$  ортогональны в смысле (27.9):  $\mathbf{e}\mathbf{e}_1^* = 0$  сводится к рассмотренному, если положить  $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}'$ , и приводит к общему выводу  $\mathbf{e}_1 = C\mathbf{e}^*$ . Как следствие, из этого результата вытекает, что векторное произведение двух круговых векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}'$  может удовлетворять условию  $[\mathbf{e}\mathbf{e}']^2 = 0$ , лишь когда  $\mathbf{e}' = C\mathbf{e}$ . Это ясно из того, что условие  $[\mathbf{e}\mathbf{e}']^2 = 0$  при  $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}'^2 = 0$  равносильно  $\mathbf{e}\mathbf{e}' = 0$ . Следова-

тельно, между линейными и круговыми векторами имеется аналогия в том отношении, что условие  $[c'c'']^2 = 0$  как для тех, так и для других равносильно  $[c'c''] = 0$  или  $c'' = Cc'$ .

Если в равенстве  $[c'c'']^2 = 0$  один вектор является линейным ( $c' = \xi n$ ,  $n = n^*$ ), а другой каким угодно, то мы имеем уже рассмотренный случай (27.54) и вектор  $n$  определяется соотношением (27.56). Если  $c' = e$  — круговой вектор, а  $c'' = q$  — эллиптический, то из условий  $[eq]^2 = 0$ ,  $e^2 = 0$  следуют соотношения  $eq = 0$  и  $[[ee^*]q]^2 = 0$ . Последнее из них равносильно условию  $[N_e q]^2 = 0$ , где  $N_e$  — орт кругового вектора  $e$ . Поскольку  $N_e$  — единичный вещественный вектор, то он должен совпадать с  $n_{\pm}$  (27.56). Но в таком случае круговой вектор  $e$  должен соответственно совпадать с одним из векторов  $e_{\pm}$ , входящих в выражение (27.57).

Итак, для любого заданного комплексного вектора  $q$  условия

$$eq = 0, \quad [eq]^2 = 0 \quad (e^2 = 0) \quad (27.74)$$

равносильны между собою и удовлетворяются лишь для вектора  $e = Ce_+$  или  $e = Ce_-$ , где  $e_{\pm}$  — круговые векторы, входящие в представление (27.57):  $q = n_{\pm} + e_{\pm}$ .

Пусть два круговых вектора лежат в одной плоскости. Это означает, что  $e^2 = e'^2 = 0$  и  $N_e = \pm N_{e'}$ , или (см. 27.42))

$$\frac{[ee^*]}{|e|^2} = \pm \frac{[e'e'^*]}{|e'|^2}.$$

Умножая последнее равенство векторно на  $e'$ , получаем

$$\pm e' = \frac{e \cdot e' e^* - e^* \cdot e' e}{|e|^2}.$$

После возведения в квадрат придем к условию  $e' \cdot e \cdot e' e^* = 0$ , откуда, согласно (27.73), следует, что либо  $e' = Ce$ , либо  $e' = Ce^*$ .

Покажем, что всякий нормированный эллиптический вектор  $q$  ( $q^2 = 1$ ) однозначно определяется заданием пары соответствующих ему векторов  $n_{\pm}$  либо  $e_{\pm}$  (27.57). Из (27.59) получаем

$$n_+ + n_- = 2 \frac{q + q^*}{1 + |q|^2},$$

$$[n_+ n_-] = - \frac{2i}{(1 + |q|^2)^2} [q + q^*, [qq^*]] = -2i \frac{q - q^*}{1 + |q|^2},$$

$$n_+ n_- = \frac{(q + q^*)^2 + [qq^*]^2}{(1 + |q|^2)^2} = \frac{3 - |q|^2}{1 + |q|^2} = \frac{4}{1 + |q|^2} - 1,$$



откуда следует

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{n}_+ + \mathbf{n}_- + i[\mathbf{n}_+\mathbf{n}_-]}{1 + \mathbf{n}_+\mathbf{n}_-}. \quad (27.75)$$

Аналогично с помощью (27.60) получаем (см. 27.67))

$$\mathbf{e}_+\mathbf{e}_- = 2 \frac{1 - |\mathbf{q}|^2}{1 + |\mathbf{q}|^2}, \quad [\mathbf{e}_+\mathbf{e}_-] = -2i \frac{1 - |\mathbf{q}|^2}{1 + |\mathbf{q}|^2} \mathbf{q},$$

следовательно,

$$\mathbf{q} = i \frac{[\mathbf{e}_+\mathbf{e}_-]}{\mathbf{e}_+\mathbf{e}_-}. \quad (27.76)$$

Теперь нетрудно установить ограничения, налагаемые на произвольные эллиптические векторы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$  условием

$$[\mathbf{q}\mathbf{q}']^2 = 0. \quad (27.77)$$

Пусть вектор  $\mathbf{q}$  задан; используя представление (27.76), условие (27.77) можно привести к виду

$$[\mathbf{q}'[\mathbf{e}_+\mathbf{e}_-]]^2 = -2\mathbf{e}_+\mathbf{e}_-\mathbf{e}_+\mathbf{q}'\mathbf{e}_-\mathbf{q}' = 0. \quad (27.78)$$

Очевидно,  $\mathbf{e}_+\mathbf{e}_- \neq 0$ , так как в противном случае (см. (27.73))  $\mathbf{e}_- = C\mathbf{e}_+$  и вектор  $\mathbf{q}$  не будет эллиптическим. Поэтому условие (27.77), (27.78) выполняется, если имеет место любое из соотношений

$$\mathbf{e}_+\mathbf{q}' = 0, \quad \mathbf{e}_-\mathbf{q}' = 0. \quad (27.79)$$

Но по доказанному выше (см. (27.74)) это означает выполнение одного из четырех равенств:

$$\mathbf{e}_+ = C\mathbf{e}'_+, \quad \mathbf{e}_+ = C\mathbf{e}'_-, \quad \mathbf{e}_- = C\mathbf{e}'_+, \quad \mathbf{e}_- = C\mathbf{e}'_-, \quad (27.80)$$

где  $\mathbf{e}'_{\pm}$  — круговые векторы, отвечающие вектору  $\mathbf{q}'$  в представлении (25.57). Соотношениям (27.80) отвечают следующие равенства между линейными векторами  $\mathbf{n}_{\pm}$  и  $\mathbf{n}'_{\pm}$ , соответствующими  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$  (в представлении (25.57)):

$$\mathbf{n}_+ = \mathbf{n}'_+, \quad \mathbf{n}_+ = -\mathbf{n}'_-, \quad \mathbf{n}_- = -\mathbf{n}'_+, \quad \mathbf{n}_- = \mathbf{n}'_-. \quad (27.81)$$

Причина различия знаков во втором и третьем случаях заключается в следующем. Согласно (27.61), имеем

$$\mathbf{e}_+ = +i[\mathbf{n}_+\mathbf{e}_+], \quad \mathbf{e}'_- = -i[\mathbf{n}'_-\mathbf{e}'_-]. \quad (27.82)$$

Умножая второе равенство на  $C$  и сравнивая с первым (см. (27.80)), получаем, что условие  $\mathbf{e}_+ = C\mathbf{e}'_-$  совместно с (27.82) лишь при  $\mathbf{n}_+ = -\mathbf{n}'_-$ .

Соотношение (27.56) играет фундаментальную роль при определении возможных свойств и оптической классификации поглощающих кристаллов различных сингоний (§ 6).

Произвольный комплексный вектор  $x$  однозначно определяется, если известны результаты его скалярного умножения на любые три линейно независимых комплексных вектора  $a_1, a_2, a_3$ . Пусть

$$a_1 x = \xi_1, \quad a_2 x = \xi_2, \quad a_3 x = \xi_3, \quad (27.83)$$

причем

$$[a_1 a_2] a_3 \neq 0. \quad (27.84)$$

Последнее неравенство является условием линейной независимости векторов  $a_1, a_2, a_3$ . Выражение для вектора  $x$  имеет следующий вид:

$$x = \frac{1}{a_1 [a_2 a_3]} (\xi_1 [a_2 a_3] + \xi_2 [a_3 a_1] + \xi_3 [a_1 a_2]). \quad (27.85)$$

Легко убедиться, что такой вектор  $x$  удовлетворяет уравнениям (27.83).

В заключение покажем, что два произвольных трехмерных комплексных вектора  $q_1$  и  $q_2$ , как правило, могут быть получены (с точностью до скалярного множителя) один из другого с помощью операции проектирования (см. § 26). Пусть вещественные векторы  $n_1, n_2$  перпендикулярны к плоскостям комплексных векторов  $q_1, q_2$  соответственно (т. е. параллельны их ортам):

$$n_1 q_1 = n_2 q_2 = 0, \quad n_1^* = n_1, \quad n_2^* = n_2. \quad (27.86)$$

Используя вектор

$$n = C [n_1 n_2] = n^*, \quad (27.87)$$

всегда можно написать для векторов  $q_1, q_2$  разложения

$$q_1 = A_1 n + B_1 [n_1 n], \quad q_2 = A_2 n + B_2 [n_2 n]. \quad (27.88)$$

При этом условия (27.86) удовлетворяются. В выражениях (27.88) коэффициенты  $A_1, A_2, B_1, B_2$  будут некоторыми комплексными числами. Очевидно, в форме (27.88) могут быть написаны любые два комплексных вектора, за исключением случая, когда их плоскости параллельны, т. е. когда

$$[n_1 n_2] = 0. \quad (27.89)$$

Будем искать такой комплексный вектор  $x$ , ортогональный к  $n$ :

$$x n = x [n_1 n_2] = 0, \quad (27.90)$$

с помощью которого можно вектор  $q_2$  выразить через вектор  $q_1$  следующим образом:

$$q_2 = -n_2^* x \times q_1 = -[n_2 [x q_1]]. \quad (27.91)$$

Подставляя сюда выражения (27.88) и учитывая (27.90), получаем после раскрытия векторных произведений соотношение

$$A_2 \mathbf{n} + B_2 [\mathbf{n}_2 \mathbf{n}] = A_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} + B_1 \mathbf{n}_1 \mathbf{x} \cdot [\mathbf{n}_2 \mathbf{n}]. \quad (27.92)$$

Сравнивая коэффициенты при независимых векторах  $\mathbf{n}$  и  $[\mathbf{n}_2 \mathbf{n}]$ , находим

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{x} = B_2 / B_1, \quad \mathbf{n}_2 \mathbf{x} = A_2 / A_1. \quad (27.93)$$

Вместе с (27.90) эти равенства дают соотношения вида (27.83), следовательно, из (27.85) имеем

$$\mathbf{x} = \frac{1}{[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2] \mathbf{n}} \left( \frac{A_2}{A_1} [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}] - \frac{B_2}{B_1} [\mathbf{n}_2 \mathbf{n}] \right). \quad (27.94)$$

Полученное выражение для вектора  $\mathbf{x}$  теряет смысл, когда плоскости комплексных векторов  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  параллельны (27.89). Кроме того, согласно (27.92), при  $A_1 = 0$  должно быть  $A_2 = 0$  и соответственно из  $B_1 = 0$  следует  $B_2 = 0$ . Заметим, что при  $A_2 = 0$  или  $B_2 = 0$  соотношение (27.94) сохраняет смысл.

Итак, за исключением случаев  $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$  и  $A_1 = 0$  либо  $B_1 = 0$ , любые два комплексных вектора  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  могут быть получены один из другого по соотношению (27.91). Из (27.92) следует, что при этом  $\mathbf{n}_2 \mathbf{x} = 0$  лишь в случае  $A_2 = 0$ . Во всех остальных случаях соотношение (27.91) можно написать в виде (см. (26.128))

$$\mathbf{q}_2 = K \alpha \mathbf{q}_1, \quad K = \mathbf{n}_2 \mathbf{x}, \quad \alpha = - \frac{\mathbf{n}_2^\times \mathbf{x}^\times}{\mathbf{n}_2 \mathbf{x}} = 1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_2 \mathbf{x}}. \quad (27.95)$$

Таким образом, любые два комплексных трехмерных вектора (с указанными оговорками) могут быть получены один из другого путем умножения на проективный оператор  $\alpha$  и комплексное число  $K$  (27.95). Если вектор  $\mathbf{x}$  — линейный, то он может быть представлен в виде  $\mathbf{x} = \rho \mathbf{x}_0$ , где  $\mathbf{x}_0$  — вещественный единичный вектор. В таком случае матрица  $\alpha$  (27.95), как показано в § 26, представляет собой оператор косоугольного проектирования на плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{n}_2$  (т. е. на плоскость вектора  $\mathbf{q}_2$ ) вдоль направления вектора  $\mathbf{x}_0$ . Для линейности  $\mathbf{x}$  необходимо и достаточно, чтобы  $[\mathbf{x} \mathbf{x}^*] = 0$ , или, согласно (27.94), чтобы

$$\text{Im} \left( \frac{A_2^* B_2}{A_1^* B_1} \right) = 0. \quad (27.96)$$

Если это условие не выполняется, то изложенная простая и наглядная геометрическая интерпретация соотношения (27.95) не имеет места. Однако и в этом случае утверждение о связи вида (27.91) между любыми комплексными векторами

(при указанных ограничениях) остается в силе. Более того, все изложенные рассуждения сохраняют силу и в том случае, когда векторы  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}, \mathbf{x}$  являются комплексными и нелинейными.

## § 28. ТРЕХМЕРНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ТЕНЗОРЫ

В трехмерном комплексном пространстве остаются в силе основные свойства тензоров, описанные в § 26. Так, в этом пространстве по-прежнему любой тензор может быть представлен в виде суммы не более чем трех диад (см. (26.4)). Роль планального тензора будет играть тензор, равный сумме двух диад и т. д. По существу почти все соотношения и рассуждения § 26 справедливы и для тензоров в комплексном трехмерном пространстве. Исключение составляют случаи симметричных и антисимметричных тензоров в том отношении, что в вещественном пространстве они всегда приводятся к диагональному виду, а в комплексном не всегда.

В § 26 мы получили диадное выражение для единичного тензора в трехмерном вещественном пространстве через посредство трех единичных взаимно ортогональных векторов (см. (26.51)). В трехмерном комплексном пространстве также можно получить аналогичные представления для единичного тензора. В аксиальном базисе (см. (27.25)) соответствующее выражение имеет вид

$$1 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* + \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}. \quad (28.1)$$

Чтобы показать, что правая часть действительно является единичным тензором, достаточно убедиться, что при умножении этого тензора на любой вектор  $\mathbf{q}$  последний не изменяется. Используя разложение (27.25) и свойства векторов базиса ( $\mathbf{c}^2 = |\mathbf{e}|^2 = 1, \mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}^2 = 0$ ), имеем

$$(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* + \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}) (\xi \mathbf{c} + \eta \mathbf{e} + \zeta \mathbf{e}^*) \equiv \xi \mathbf{c} + \eta \mathbf{e} + \zeta \mathbf{e}^*,$$

что и доказывает утверждение. Совершенно аналогично, используя (27.26), (27.27), можно убедиться, что сумма трех диад

$$\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a^* = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* + \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3^*, \quad \mathbf{u}_a^* \cdot \mathbf{u}_b = \delta_{ab} \quad (28.2)$$

также представляет собой единичный тензор:

$$\mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a^* = 1.$$

Следует отметить, что с помощью одного нелинейного комплексного вектора  $\mathbf{q}$  ( $[\mathbf{q}\mathbf{q}^*] = 0$ ) можно построить единичный

тензор в комплексном трехмерном пространстве. В том, что выражение

$$\frac{1}{[qq^*]^2} (q \cdot [q^* [qq^*]] + q^* \cdot [q [qq^*]] + [qq^*] \cdot [qq^*]) \equiv 1 \quad (28.3)$$

действительно является единичным тензором, нетрудно убедиться путем умножения его на произвольный вектор:  $\xi q + \eta q^* + \zeta [qq^*]$ , который при этом остается неизменным.

В § 26 было показано, что всякий вещественный симметричный тензор  $\alpha = \alpha^* = \bar{\alpha}$  может быть представлен в аксиальной форме

$$\alpha = a + b(c' \cdot c'' + c'' \cdot c'). \quad (28.4)$$

Теперь мы покажем, что то же самое справедливо для произвольных комплексных симметричных тензоров.

Пусть трехмерный симметричный комплексный тензор  $\alpha$  имеет один собственный вектор  $q$ :  $(\alpha - \lambda)q = 0$ , соответствующий собственному значению  $\lambda$ . В этом случае тензор  $\alpha' = \alpha - \lambda = \bar{\alpha}'$ ,  $|\alpha'| = 0$  может быть представлен в виде суммы двух диад (см. (26.68)):

$$\alpha' = p \cdot r + p' \cdot r'. \quad (28.5)$$

Разумеется, в общем случае, все векторы  $q$ ,  $p$ ,  $r$ ,  $p'$ ,  $r'$ , как и  $\lambda$ , будут комплексными. Так как  $\alpha'q = q\alpha' = 0$ , то  $pq = p'q = rq = r'q = 0$ . Выражая  $p$ ,  $p'$ ,  $r$ ,  $r'$  линейно через два линейно независимых вектора  $q'$ ,  $q''$ , ортогональных к  $q$  в смысле  $qq' = qq'' = 0$ , получим с учетом симметрии  $\alpha'$ :

$$\begin{aligned} \alpha' &= a_1 q' \cdot q' + a_2 q'' \cdot q'' + a_3 (q' \cdot q'' + q'' \cdot q') = \\ &= \frac{a_1}{2} [(q' + \xi q'') \cdot (q' + \eta q'') + (q' + \eta q'') \cdot (q' + \xi q'')], \end{aligned} \quad (28.6)$$

где скалярные параметры  $\xi$ ,  $\eta$  находятся из уравнений  $\xi + \eta = 2a_3/a_1$ ,  $\xi\eta = a_2/a_1$ , определяющих единственную пару  $\xi$ ,  $\eta^*$ . Короче можно записать (28.6) в виде

$$\begin{aligned} \alpha' &= b(c' \cdot c'' + c'' \cdot c'), \\ b &= a_1/2, \quad c' = q' + \xi q'', \quad c'' = q' + \eta q''. \end{aligned} \quad (28.7)$$

Если собственному значению  $\lambda$  отвечает два линейно независимых собственных вектора  $q$ ,  $q'$ , то  $\alpha'$  может быть представлен через одну диаду  $\alpha' = bc \cdot c$ , причем  $cq = cq' = 0$ , т. е.  $c = C[qq']$ .

\*) Действительно,  $\xi$  и  $\eta$  можно рассматривать как корни квадратного уравнения  $a_1 x^2 - 2a_3 x + a_2 = 0$ .

Очевидно, этот случай является частным по отношению к (28.7):  $c' = c'' = c$ . Таким образом, вообще

$$\alpha = a + b(c'.c'' + c''.c'). \quad (28.8)$$

Здесь  $a$  является одним из собственных значений  $\alpha$ . Нетрудно убедиться, что при заданном  $a$  в представлении (28.8) векторы  $c'$ ,  $c''$  определяются с точностью до комплексных скалярных множителей. Выражение (28.8) является универсальной, своего рода «канонической» формой, в которой может быть представлен любой симметричный вещественный или комплексный трехмерный тензор, как приводимый, так и неприводимый к диагональному виду.

Аналогично случаю вещественных симметричных матриц (см. § 26) мы имеем

$$\alpha[c'.c''] = a[c'.c''], \quad (28.8a)$$

т. е. комплексный вектор  $[c'.c'']$  является собственным вектором матрицы  $\alpha$  для собственного значения  $a$ . Однако теперь мы не можем в общем случае нормировать векторы  $c'$ ,  $c''$  по условию  $c'^2 = c''^2 = 1$ , потому что комплексные векторы могут быть круговыми ( $c'^2 = 0$  или  $c''^2 = 0$ ). Поэтому для остальных двух собственных векторов вместо  $c' \pm c''$  (26.118) мы будем иметь более общие выражения

$$\sqrt{c'^2}.c' \pm \sqrt{c''^2}.c'', \quad (28.8б)$$

а для соответствующих собственных значений (ср. (26.118))

$$a + b(c'.c'' \pm \sqrt{c'^2.c''^2}). \quad (28.8в)$$

Из предыдущего ясно, что тензор  $\alpha$  может быть представлен в форме (28.8) столькими различными способами, сколько у него имеется различных собственных значений. Следовательно, число различных возможных представлений типа (28.8) для трехмерного симметричного тензора  $\alpha$  может, в зависимости от свойств последнего, варьироваться от одного до трех. При этом для различных представлений (28.8) данного тензора  $\alpha$  все величины  $a$ ,  $b$ ,  $c'$ ,  $c''$  существенно различны. Однако имеет место следующее замечательное общее свойство (см. [56, 4, 5]): совокупность вещественных направлений  $n$  ( $n^2 = 1$ ), определяемых условиями (см. (27.54))

$$[nc']^2 = 0, \quad [nc'']^2 = 0, \quad (28.9)$$

не зависит от того, каким из возможных способов тензор  $\alpha$  представлен в форме (28.8). Это следует из того, что условия (28.9) равносильны соотношению

$$[n(\alpha - \alpha_i)n]^2 - 4n\bar{\alpha}n = 0. \quad (28.10)$$

Действительно, с помощью (28.8) получаем

$$\mathbf{n}(\alpha - \alpha_i)\mathbf{n} = 2[b(\mathbf{nc}' \cdot \mathbf{nc}'' - \mathbf{c}'\mathbf{c}'') - a]. \quad (28.11)$$

С другой стороны, пользуясь соотношениями (26.116), (26.117), которые, разумеется, сохраняют силу и для комплексных величин, имеем

$$\overline{\mathbf{n}}\alpha\mathbf{n} = \frac{|\alpha|}{\alpha} + b^2((\mathbf{nc}')^2 + (\mathbf{nc}'')^2) - 2b\mathbf{nc}' \cdot \mathbf{nc}''(a + b\mathbf{c}'\mathbf{c}''). \quad (28.12)$$

Подставляя (28.11), (28.12) и выражение (26.117) для  $|\alpha|$  в (28.10), получаем после простых преобразований соотношение

$$b^2[\mathbf{nc}']^2[\mathbf{nc}'']^2 = 0, \quad (28.13)$$

которое равносильно условиям (28.9).

Поскольку условие (28.10) выражено в форме, инвариантной не только по отношению к преобразованиям координат, но и по отношению к различным возможным представлениям (28.8), то удовлетворяющие ему направления  $\mathbf{n}$  не могут зависеть от этих представлений. Таким образом, определенные, согласно (28.9), направления  $\mathbf{n}$  *характерны для комплексного (и вещественного) симметричного тензора*. Следовательно, любому заданному симметричному комплексному или вещественному тензору  $\alpha$  однозначно соответствует набор двусторонних\*) направлений  $\mathbf{n}$ , определяемых согласно (28.8), (28.9).

Общее решение уравнения  $[\mathbf{nc}]^2 = 0$  для единичного вещественного вектора  $\mathbf{n}$  было получено выше (27.56):

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\pm} = \frac{\sqrt{\mathbf{c}^* \cdot \mathbf{c}} + \sqrt{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}^*} \pm i[\mathbf{cc}^*]}{|\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c}^2|}, \quad (28.14)$$

причем в случае линейного или кругового вектора  $\mathbf{c}$  формула (28.14) определяет единственное направление (27.70):

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\mathbf{c}^2}} \quad ([\mathbf{cc}^*] \neq 0), \quad (28.15)$$

или (27.68)

$$\mathbf{n} = i \frac{[\mathbf{cc}^*]}{|\mathbf{c}|^2} \quad (\mathbf{c}^2 = 0). \quad (28.16)$$

Лишь в общем случае эллиптического вектора  $\mathbf{c}$  выражение (28.14) дает два различных направления  $\mathbf{n}_{\pm}$ . Косинус угла между ними дается формулой

$$\mathbf{n}_+ \cdot \mathbf{n}_- = \frac{3|\mathbf{c}^2| - |\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{c}^2| + |\mathbf{c}|^2}. \quad (28.17)$$

\*) Очевидно, условие  $[\mathbf{nc}]^2 = 0$  определяет  $\mathbf{n}$  с точностью до знака, т. е. задает двустороннее направление.

Очевидно, это выражение по абсолютной величине не превышает единицы, поскольку для разности квадратов числителя и знаменателя имеем

$$(3|c^2| - |c|^2)^2 - (|c^2| + |c|^2)^2 = 8(|c^2|^2 - |c|^4) \leq 0.$$

Согласно (28.8), (28.9), в общем случае, когда оба вектора  $c'$  и  $c''$  являются эллиптическими, комплексному симметричному тензору  $\alpha$  соответствует 4 различных направления  $n$ . Однако некоторые направления  $n$  могут совпадать между собой. Крайним случаем является тот, когда тензору  $\alpha$  соответствует только одно вещественное направление  $n$ .

Представления симметричных тензоров в форме (28.8) играют чрезвычайно большую роль в теории оптических свойств кристаллов, как прозрачных, так и поглощающих (§ 4, 7). С их помощью многим запутанным соотношениям можно придать сравнительно простую форму. Они весьма удобны при решении различных конкретных задач кристаллооптики. Поэтому целесообразно обобщить такое представление на случай несимметричных тензоров. Такое обобщение действительно возможно [56] и оно оказывается весьма полезным при рассмотрении оптических свойств магнитных прозрачных и поглощающих кристаллов.

Вначале мы докажем следующее общее положение: произвольная трехмерная комплексная несимметричная матрица может быть симметризована путем умножения слева (или справа) на некоторую симметричную неособенную матрицу. Пусть  $\alpha = \tilde{\alpha}$  — заданная несимметричная комплексная матрица. Она всегда имеет какой-нибудь собственный вектор  $x$ , отвечающий собственному значению  $\lambda$ . Действительно, характеристическое уравнение (§ 25)

$$|\alpha - \lambda| = 0 \quad (28.17a)$$

по известной теореме Гаусса всегда имеет корень. Согласно (26.19), равенство (28.17a) можно написать в виде  $(\alpha - \lambda)(\alpha - \lambda) = 0$ , откуда следует, если  $\alpha - \lambda \neq 0$ , что каждый отличный от нуля столбец матрицы  $\alpha - \lambda$  является собственным вектором матрицы  $\alpha$  для собственного значения  $\lambda$ . Если же  $\alpha - \lambda = 0$ , то (см. (26.67)),  $\alpha - \lambda = a \cdot b$ , откуда  $\alpha = \lambda + a \cdot b$  и, следовательно, любой вектор  $c$ , перпендикулярный к  $b$  ( $bc = 0$ ), удовлетворяет уравнению  $\alpha c = \lambda c$ .

Докажем, что для любой квадратной матрицы  $\alpha$  существует такая матрица  $\gamma$ , что  $\gamma = \tilde{\gamma}, |\gamma| \neq 0$  и

$$\gamma \alpha = \tilde{\gamma} \alpha = \tilde{\alpha} \gamma. \quad (28.18)$$



Для этого учтем, что равенство  $\beta = \tilde{\beta}$  накладывает на произвольную  $n \times n$ -матрицу  $\beta$   $\frac{n(n-1)}{2}$  условий. Действительно,

диагональные элементы при транспозиции не меняются, поэтому требование симметрии матрицы  $\beta$  приравнивает друг другу элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали. Число соответствующих уравнений равно числу элементов, лежащих по одну сторону от главной диагонали, т. е.  $n(n-1)/2$ . Таким образом, при заданной  $n \times n$ -матрице  $\alpha$  матричное условие (28.18) распадается на  $n(n-1)/2$  линейных однородных уравнений относительно элементов  $\gamma_{\mu\nu}$  симметричной матрицы  $\gamma$ , среди которых имеется  $n(n+1)/2$  независимых. В такой системе число неизвестных на  $n(n+1)/2 - n(n-1)/2 = n$  превышает число уравнений. Но система линейных однородных уравнений, в которой число неизвестных превышает число уравнений, имеет бесчисленное множество решений. Таким образом, существует множество матриц  $\gamma$ , симметризирующих произвольную матрицу  $\alpha$  при умножении ее на  $\gamma$  слева. Очевидно, благодаря произволу по крайней мере  $n$  элементов матрицы  $\gamma$  последнюю всегда можно выбрать неособенной. Остается добавить, что все эти соображения остаются в силе и при симметризации матрицы  $\alpha$  путем умножения *справа* на симметричную матрицу  $\gamma$ .

Используя этот результат, можно показать, что представление вида (28.8) обобщается на случай произвольного не-симметричного тензора  $\alpha$ . Пусть последний может быть симметризован путем умножения слева на симметричную неособенную матрицу  $\gamma = \tilde{\gamma}$ ,  $|\gamma| \neq 0$  (см. (28.18)). Снова рассмотрим матрицу  $\alpha' = \alpha - \lambda$ , где  $\lambda$  — некоторое однократное собственное значение матрицы  $\alpha$ . Пусть  $\mathbf{b}$  — соответствующий собственный вектор. Тогда  $\alpha' \mathbf{b} = (\alpha - \lambda) \mathbf{b} = 0$ . Поскольку  $|\alpha'| = |\alpha - \lambda| = 0$ , то  $\alpha'$  в общем случае является планальным тензором (§ 26):

$$\alpha' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}', \quad (28.19)$$

где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  (так же как  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$ ) — линейно независимые между собою векторы. Из условия  $\alpha' \mathbf{b} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \mathbf{b} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}' \mathbf{b} = 0$  следует  $\mathbf{q} \mathbf{b} = \mathbf{q}' \mathbf{b} = 0$ . Но благодаря наличию симметризирующей матрицы  $\gamma$  наряду с  $\alpha' \mathbf{b} = 0$  мы имеем условие  $\gamma \alpha' \mathbf{b} = \mathbf{b}(\widetilde{\gamma \alpha'}) = \mathbf{b} \gamma \alpha' = 0$ , или, согласно (28.19),

$$\mathbf{b} \gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{b} \gamma \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}' = 0,$$

откуда следует  $\mathbf{b} \gamma \mathbf{p} = \mathbf{b} \gamma \mathbf{p}' = 0$  (ввиду независимости  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$ ). Рассмотрим два линейно независимых вектора  $\mathbf{b}'$  и  $\mathbf{b}''$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\mathbf{b}' \gamma \mathbf{b} = \mathbf{b}'' \gamma \mathbf{b} = \mathbf{b}' \gamma \mathbf{b}' = \mathbf{b}'' \gamma \mathbf{b}'' = 0. \quad (28.20)$$

Очевидно,  $q$  и  $q'$  могут быть представлены в виде линейных комбинаций векторов  $\gamma b'$  и  $\gamma b''$ , ортогональных к  $b$ :

$$q = \xi_1 \gamma b' + \xi_2 \gamma b'' = \gamma(\xi_1 b' + \xi_2 b''), \quad q' = \gamma(\xi'_1 b' + \xi'_2 b'').$$

Аналогично  $p$  и  $p'$  могут быть представлены в виде линейных комбинаций векторов  $b'$  и  $b''$ , ортогональных к  $\gamma b$ :

$$p = \eta_1 b' + \eta_2 b'', \quad p' = \eta'_1 b' + \eta'_2 b''.$$

Таким образом, мы имеем для  $\alpha'$  (28.19) выражение

$$\alpha' = (\eta_1 b' + \eta_2 b'') \cdot \gamma(\xi_1 b' + \xi_2 b'') + (\eta'_1 b' + \eta'_2 b'') \cdot \gamma(\xi'_1 b' + \xi'_2 b''). \quad (28.21)$$

Но  $\gamma \alpha'$ , как и  $\gamma \alpha$ , по предположению является симметричной матрицей. Отсюда следует, что коэффициенты при диадах  $b'' \cdot \gamma b'$  и  $b' \cdot \gamma b''$  должны совпадать, следовательно, вместо (28.21) можно написать

$$\alpha' = a_1 b' \cdot \gamma b' + a_2 b'' \cdot \gamma b'' + a_3 (b' \cdot \gamma b'' + b'' \cdot \gamma b'). \quad (28.22)$$

Это выражение можно представить в виде

$$\alpha' = \frac{a_1}{2} [(b' + x b'') \cdot \gamma (b' + y b'') + (b' + y b'') \cdot \gamma (b' + x b'')] \quad (28.23)$$

при условии, что числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравнениям, вытекающим из сравнения (28.23) и (28.22):

$$xy = a_2/a_1, \quad x + y = 2a_3/a_1. \quad (28.24)$$

Из этих равенств следует, что  $x$  и  $y$  являются корнями квадратного уравнения

$$a_1 \zeta^2 - 2a_3 \zeta + a_2 = 0,$$

которое всегда имеет два решения, определяющие единственную пару чисел  $x$  и  $y$ . Обозначая  $c_1 = b' + x b''$ ,  $c_2 = b' + y b''$  и учитывая, что  $\alpha' = \alpha - \lambda$ , получаем из (28.23)

$$\alpha = \lambda + \frac{a_1}{2} (c_1 \cdot \gamma c_2 + c_2 \cdot \gamma c_1). \quad (28.25)$$

В векторы  $c_1$ ,  $c_2$  можно ввести любые множители, компенсируя их с помощью коэффициента  $a_1$ . Вместо (28.25) мы будем писать выражение для  $\alpha$  в форме, аналогичной (28.8),

$$\alpha = a + b(c' \cdot \gamma c'' + c'' \cdot \gamma c'), \quad (28.26)$$

причем векторы  $c'$  и  $c''$  будем нормировать согласно условию

$$c' \cdot \gamma c' = c'' \cdot \gamma c''. \quad (28.27)$$

Заметим, что такая нормировка будет невозможной, если  $c' \gamma c' = 0$ , а  $c'' \gamma c'' \neq 0$  или наоборот.

Очевидно, тензор (28.26) будет обладать собственным вектором

$$[\gamma c', \gamma c''] = \bar{\gamma} [c' c''], \quad (28.28)$$

которому соответствует собственное значение  $a$ . Кроме того, тензор (28.26) будет иметь собственные векторы  $c' \pm c''$ , которым соответствуют собственные значения

$$\lambda_{\pm} = a + b(c' \gamma c'' \pm c' \gamma c'). \quad (28.29)$$

С помощью (26.65) можно вычислить тензор, взаимный к (28.26):

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= a^2 + ab(2c' \gamma c'' - c' \cdot \gamma c'' - c'' \cdot \gamma c') - b^2 \bar{\gamma} [c' c''] \cdot [c' c''] = \\ &= 2a(a + bc' \gamma c'') - a\alpha - b^2 \bar{\gamma} [c' c''] \cdot [c' c'']. \end{aligned} \quad (28.30)$$

Если условие (28.27) не выполняется, то собственными векторами матрицы (28.26) будут  $\sqrt{c'' \gamma c''} \cdot c' \pm \sqrt{c' \gamma c'} \cdot c''$  и вместо (28.29)

$$\lambda_{\pm} = a + b(c' \gamma c'' \pm \sqrt{c' \gamma c'} \cdot c'' \gamma c'').$$

Инварианты тензора (28.26) имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_t &= 3a + 2bc' \gamma c'', \\ \bar{\alpha}_t &= 3a^2 + 4abc' \gamma c'' - b^2 [c' c''] \bar{\gamma} [c' c''], \\ |\alpha| &= a[(a + bc' \gamma c'')^2 - (c' \gamma c')^2]. \end{aligned} \quad (28.31)$$

Возможен частный случай  $c' = c'' = c$ , который соответствует наличию двукратного собственного значения у  $\alpha$  и приводит к существенному упрощению всех соотношений (28.26) — (28.31):

$$\begin{aligned} \alpha &= a + bc \gamma c, \\ \bar{\alpha} &= a(a + bc \gamma c - bc \gamma c) = a(a - b(\gamma c) \times c \times), \\ \alpha_t &= 3a + bc \gamma c, \\ \bar{\alpha}_t &= \alpha(3a + 2ac \gamma c), \\ |\alpha| &= a^2(a + bc \gamma c). \end{aligned} \quad (28.32)$$

В этом случае собственными векторами будут: вектор  $c$  для собственного значения  $a + bc \gamma c$  (однократное) и вектор  $x \perp \gamma c$ , отвечающий двукратному собственному значению  $a$ . Очевидно, случай (28.32) является обобщением случая (26.113) для одноосного симметричного вещественного тензора.

Особым случаем для рассматриваемого тензора (28.32) является тот, когда  $c\gamma c = 0$ . При этом соотношения (28.32) получают дальнейшее значительное упрощение

$$\bar{\alpha} = a(a - bc.\gamma c), \quad \alpha_i = 3a, \quad \bar{\alpha}_i = 3a^2, \quad |\alpha| = a^3. \quad (28.33)$$

Легко убедиться, что при этом  $(\alpha - a)^2 = 0$ , т. е. минимальный полином (см. § 25) тензора  $\alpha$  имеет кратные корни. Согласно линейной алгебре [138], при наличии у минимального полинома кратных корней соответствующая матрица неприводима к диагональному виду. При  $c\gamma c = 0$  мы имеем именно такой случай.

При выводе выражения (28.26) для матрицы  $\alpha$  мы выделяли некоторое ее собственное значение  $\lambda = a$ . В общем случае у матрицы  $\alpha$  может быть несколько различных собственных значений. Соответственно мы получим различные представления одной и той же матрицы  $\alpha$  в форме (28.26), выбирая в качестве  $a$  разные ее собственные значения. Следовательно, в зависимости от числа различных собственных значений матрица  $\alpha$  может быть представлена одним, двумя или тремя разными способами в форме (28.26). Для каждого из таких представлений все величины  $a, b, c', c''$  будут различными. Однако аналогично (28.9), (28.10) матрица  $\alpha$  всегда обладает одним общим свойством, инвариантным по отношению к выбору любого ее представления в форме (28.26). Оно заключается в том, что совокупность двусторонних направлений, определяемых вещественными единичными векторами  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющими условиям

$$[\mathbf{nc}']\bar{\gamma}[\mathbf{nc}'] = 0, \quad [\mathbf{nc}'']\bar{\gamma}[\mathbf{nc}'''] = 0, \quad (28.34)$$

для заданной матрицы  $\alpha$  будет всегда одной и той же независимо от того, к какому из возможных представлений  $\alpha$  в форме (28.26) относятся векторы  $c'$  и  $c''$ . Чтобы доказать это свойство, рассмотрим соотношение

$$[\mathbf{n}\gamma(\alpha - \alpha_i)\mathbf{n}]^2 - 4\mathbf{n}\gamma\mathbf{n}.\mathbf{n}\gamma\bar{\alpha}\mathbf{n} = 0. \quad (28.35)$$

С помощью (28.26), (28.30) получим после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\gamma(\alpha - \alpha_i)\mathbf{n} &= 2[b\mathbf{n}\gamma c'.\mathbf{n}\gamma c'' - (a + bc'\gamma c'')\mathbf{n}\gamma\mathbf{n}], \\ \bar{\gamma}[c'c'']\cdot[c'c''] &= [\gamma c'.\gamma c'']\cdot[c'c''] = c'\gamma c'.c''\gamma c'' - (c'\gamma c'')^2 + \\ &+ c'\gamma c''(c'\gamma c'' + c''\gamma c') - c'\gamma c'.c''\gamma c'' - c''\gamma c''.c'\gamma c', \quad (28.36) \\ \mathbf{n}\gamma\bar{\alpha}\mathbf{n} &= a(a + 2bc'\gamma c'')\mathbf{n}\gamma\mathbf{n} - 2ab\mathbf{n}\gamma c'.\mathbf{n}\gamma c'' + \\ &+ b^2\mathbf{n}\gamma\mathbf{n}((c'\gamma c'')^2 - c'\gamma c'.c''\gamma c'') - 2b^2\mathbf{n}\gamma\mathbf{n}.c'\gamma c''.\mathbf{n}\gamma c'.\mathbf{n}\gamma c'' + \\ &+ b^2(c'\gamma c'(\mathbf{n}\gamma c'')^2 + c''\gamma c''(\mathbf{n}\gamma c')^2). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (28.35), получаем в результате сложных вычислений

$$b^2 (\mathfrak{n}\mathfrak{n}.c' \gamma c' - (\mathfrak{n}\gamma c')^2) (\mathfrak{n}\mathfrak{n}.c'' \gamma c'' - (\mathfrak{n}\gamma c'')^2) = 0,$$

или

$$[\mathfrak{n}c'] \bar{\gamma} [\mathfrak{n}c'] \cdot [\mathfrak{n}c''] \bar{\gamma} [\mathfrak{n}c''] = 0, \quad (28.37)$$

что равносильно (28.34). Поскольку условие (28.35) не зависит от выбора представления (28.26), то, следовательно, совокупность решений уравнений (28.34) также инвариантна по отношению к этому выбору. Кроме того, из ковариантной формы условия (28.35) явствует, что совокупность  $\mathfrak{n}$ , удовлетворяющих этому уравнению, не может зависеть от выбора системы координат. Таким образом, эти направления  $\mathfrak{n}$  зависят лишь от свойств матриц  $\alpha$  и  $\gamma$ .

Рассмотрим, каковы должны быть направления  $\mathfrak{n}$ , удовлетворяющие условию

$$[\mathfrak{n}c] \bar{\gamma} [\mathfrak{n}c] = 0, \quad (28.38)$$

где  $\bar{\gamma}$  — неособенная симметричная матрица,  $c$  — произвольный комплексный вектор. Мы ограничимся случаем, когда матрица  $\gamma$ , а значит и  $\bar{\gamma}$ , является вещественной матрицей. Будем искать  $\mathfrak{n}$  в виде

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^* = \xi c + \xi^* c^* + i \eta \bar{\gamma} [cc^*], \quad \eta = \eta^*. \quad (28.39)$$

Простые преобразования дают

$$[\mathfrak{n}c] \bar{\gamma} [\mathfrak{n}c] = [\mathfrak{n}c] [\gamma \mathfrak{n}, \gamma c] = [cc^*] \bar{\gamma} [cc^*] (\xi^{*2} - |\gamma| \eta^2 c \gamma c) = 0.$$

Предполагая  $[cc^*] \bar{\gamma} [cc^*] \neq 0$ ,  $|\gamma| > 0$ , получаем отсюда

$$\xi^* = \pm \eta \sqrt{|\gamma| c \gamma c}, \quad \xi_1 = \pm \eta \sqrt{|\gamma| c^* \gamma c^*},$$

следовательно (ср. (27.55a)),

$$\mathfrak{n} = \pm \eta (\sqrt{\bar{\gamma}} (\sqrt{c^* \gamma c^*} \cdot c + \sqrt{c \gamma c} \cdot c^*) \pm i \bar{\gamma} [cc^*]).$$

Нормируя  $\mathfrak{n}$ , согласно условию  $\mathfrak{n}\mathfrak{n} = 1$ , получаем

$$\mathfrak{n} = \frac{\sqrt{|\gamma|} (\sqrt{c^* \gamma c^*} \cdot c + \sqrt{c \gamma c} \cdot c^*) \pm i \bar{\gamma} [cc^*]}{\sqrt{|\gamma|} (c \gamma c^* + |c \gamma c|)}. \quad (28.40)$$

Соотношения (28.26), (28.34), (28.40) сопоставляют комплексному трехмерному тензору  $\alpha$  четыре направления  $\mathfrak{n}$  аналогично тому, как это было для симметричных комплексных тензоров (см. (28.8), (28.9), (28.14)).

Среди всевозможных комплексных матриц важную роль играют эрмитовы матрицы  $A$ , обладающие свойством

$$A^+ = \bar{A}^* = A. \quad (28.41)$$

Здесь крестик обозначает операцию эрмитовского сопряжения, которая сводится к одновременному выполнению над матрицей операций транспонирования и комплексного сопряжения. Согласно (28.41), матрица является эрмитовой, если она остается неизменной в результате такой операции. В применении к отдельным элементам матрицы операция эрмитовского сопряжения выглядит так:  $A_{\mu\nu}^+ = A_{\nu\mu}^*$ , а условие эрмитовости имеет вид

$$A_{\mu\nu}^* = A_{\nu\mu}. \quad (28.42)$$

Для диагональных элементов это условие сводится к  $A_{\mu\mu}^* = A_{\mu\mu}$ , т. е. *диагональные элементы эрмитовой матрицы вещественны*. В то же время элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, взаимно комплексно сопряжены. Эрмитовы матрицы обладают рядом важных свойств. Рассмотрим уравнение для собственных векторов эрмитовой матрицы

$$A\psi = \lambda\psi \quad (A^+ = A) \quad (28.43)$$

и комплексно сопряженное к нему

$$A^*\psi^* = \lambda^*\psi^*. \quad (28.44)$$

Умножим уравнение (28.43) скалярно (см. (2.56)) на вектор  $\psi^*$  и уравнение (28.44) на вектор  $\psi$ :

$$\psi^*A\psi = \lambda\psi^*\psi, \quad \psi A^*\psi^* = \lambda^*\psi^*\psi. \quad (28.45)$$

Согласно (25.22),  $\psi A^*\psi^* = \psi^* \tilde{A}^* \psi = \psi^* A^+ \psi = \psi^* A \psi$ , с другой стороны,  $\psi^* \psi = \psi_\mu^* \psi_\mu = \psi_\mu \psi_\mu^* = \psi \psi^*$ . Следовательно, второе уравнение (28.45) принимает вид  $\psi^* A \psi = \lambda^* \psi^* \psi$ . Сравнение его с первым уравнением (28.45) показывает, что  $\lambda = \lambda^*$ , т. е. *собственные значения эрмитовой матрицы всегда вещественны*. Выражение

$$F = \psi^* A \psi \quad (A^+ = A) \quad (28.46)$$

называют эрмитовой квадратичной формой. Вычислим комплексное сопряжение от такой формы:

$$F^* = \psi A^* \psi^* = \psi^* \tilde{A}^* \psi = \psi^* A^+ \psi = \psi^* A \psi = F.$$

Таким образом, значения эрмитовой квадратичной формы (28.46) всегда вещественны. Поскольку  $(\epsilon^{-1})^* = \epsilon^{*-1}$  и  $(\tilde{\epsilon}^{-1}) = (\tilde{\epsilon})^{-1}$ , то также  $(\epsilon^{-1})^+ = (\epsilon^+)^{-1}$ . Отсюда следует, что тензор, обратный к эрмитову тензору, также будет эрмитовым. Пусть эрмитова матрица  $A$  имеет два различных собственных значения  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$A\psi_1 = \lambda_1\psi_1, \quad A\psi_2 = \lambda_2\psi_2. \quad (28.47)$$

Умножим первое из этих уравнений скалярно на  $\psi_2^*$ , а уравнение, комплексно сопряженное ко второму, на  $\psi_1$ :

$$\psi_2^* A \psi_1 = \lambda_1 \psi_2^* \psi_1, \quad \psi_1 A^* \psi_2^* = \lambda_2 \psi_1 \psi_2^*. \quad (28.48)$$

Вследствие свойства эрмитовости

$$\psi_1 A^* \psi_2^* = \psi_2^* A^+ \psi_1 = \psi_2^* A \psi_1,$$

поэтому, вычитая уравнения (28.48), находим

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \psi_2^* \psi_1 = 0.$$

При  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  отсюда следует

$$\psi_2^* \psi_1 = 0. \quad (28.49)$$

Это свойство выражают словами: *собственные векторы эрмитовой матрицы, принадлежащие к различным собственным значениям, ортогональны между собою* (в смысле (27.9)).

Заметим, что двукратное применение операции эрмитового сопряжения не изменяет матрицы. Таким образом, для любой матрицы

$$A^{++} = A. \quad (28.50)$$

При вычислениях следует также иметь в виду, что

$$(aA)^+ = a^* A^+, \quad (28.50a)$$

т. е. при эрмитовском сопряжении матрицы, умноженной на число, последнее претерпевает *комплексное сопряжение*. Легко убедиться также, что

$$(AB)^+ = B^+ A^+, \quad (ABC)^+ = C^+ B^+ A^+, \quad (28.50b)$$

т. е. эрмитовское сопряжение от произведения нескольких матриц равно произведению эрмитовски сопряженных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке.

Как известно (см. (25.19)), всякая матрица однозначно разлагается на сумму симметричной и антисимметричной матриц. Пусть

$$A = A_1 + A_2, \quad \tilde{A}_1 = A_1, \quad \tilde{A}_2 = -A_2. \quad (28.51)$$

Если матрица  $A$ —эрмитова, то

$$A^+ = A_1^+ + A_2^+ = A_1^* - A_2^* = A_1 + A_2.$$

В этом матричном равенстве по отдельности должны совпадать симметричные и антисимметричные части:  $A_1^* = A_1$ ,  $A_2^* = -A_2$ , следовательно, в представлении (28.51) симметричная часть эрмитовой матрицы должна быть вещественной, а анти-

симметричная часть часто мнимой. В общем случае можно написать для эрмитовой матрицы  $A$ :

$$A = A' + iA'', \quad A' = A'^* = \bar{A}', \quad A'' = A''^* = -\bar{A}'' . \quad (28.52)$$

Очевидно, частными случаями эрмитовой матрицы являются вещественная симметричная матрица и чисто мнимая антисимметричная матрица.

В трехмерном пространстве представление (28.52) принимает несколько специфическую форму ввиду того, что там всякая антисимметричная матрица дуальна некоторому 3-вектору. Таким образом, в общем случае эрмитова  $3 \times 3$ -матрица  $\gamma$  может быть представлена в виде

$$\gamma = \alpha + ia^\times, \quad \bar{\alpha} = \alpha = \alpha^*, \quad a = a^* . \quad (28.53)$$

Приведем выражения для матриц, производных от  $\gamma$ , и для основных ее инвариантов, которые могут быть получены непосредственно из формул § 26:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \bar{\alpha} - a \cdot a - i(\alpha a)^\times, \\ |\gamma| &= |\alpha| - a\alpha a, \\ \gamma^{-1} &= \frac{\bar{\alpha} - a \cdot a - i(\alpha a)^\times}{|\alpha| - a\alpha a}, \\ \gamma_t &= \alpha_t, \quad \bar{\gamma}_t = \bar{\alpha}_t - a^2 . \end{aligned} \quad (28.54)$$

Наряду с эрмитовыми матрицами часто встречаются также антиэрмитовы матрицы, определяемые соотношением

$$B^+ = -B . \quad (28.55)$$

Значение их связано, в частности, с тем, что любая комплексная матрица  $D$  однозначно может быть представлена в виде суммы эрмитовой и антиэрмитовой матриц:

$$D = A + B, \quad A = \frac{1}{2}(D + D^+), \quad B = \frac{1}{2}(D - D^+) . \quad (28.56)$$

Поскольку для всякой матрицы  $D$  имеет место свойство (28.50), то легко убедиться, что  $A^+ = A$ ,  $B^+ = -B$ . Путем умножения на мнимую единицу  $i$  всякая эрмитова матрица превращается в антиэрмитову и наоборот. Действительно, если  $A^+ = A$ , то  $(iA)^+ = -iA^+ = -iA$  и аналогично из  $B^+ = -B$  следует  $(iB)^+ = iB$ . С учетом этого по аналогии с (28.52) можем заключить, что антиэрмитова матрица  $B = -B^+$  всегда может быть представлена в виде

$$B = B' + iB'', \quad B' = B'^* = -\bar{B}', \quad B'' = B''^* = \bar{B}'' . \quad (28.57)$$



Выше мы показали, что собственные значения эрмитовой матрицы  $A$  вещественны:  $A\psi = \lambda\psi$ ,  $\lambda^* = \lambda$ . Поскольку всякая антиэрмитова матрица может быть представлена как эрмитова матрица, умноженная на  $i$ , то отсюда следует, что *все собственные значения антиэрмитовой матрицы чисто мнимы*. В силу той же связи между эрмитовыми и антиэрмитовыми матрицами нетрудно заключить, что свойство ортогональности собственных векторов (28.49), относящихся к различным собственным значениям, справедливо также для антиэрмитовых матриц.

Выше было показано, что любая трехмерная *симметричная* комплексная матрица  $\alpha = \bar{\alpha}$  может быть представлена в форме (28.8)

$$\alpha = a + b(c'.c'' + c''.c')$$

или, как частный случай, в форме

$$\alpha = a + bc.c.$$

Такое представление матриц играет чрезвычайно важную роль в теории оптических свойств прозрачных и поглощающих кристаллов (см. § 4, 7), позволяя в огромной степени упростить рассмотрение их свойств.

Сейчас мы покажем, что для трехмерных комплексных *эрмитовых* матриц также существуют в общем случае представления, аналогичные (28.8). Рассмотрим вначале общий случай эрмитовой матрицы  $\gamma$ , имеющей три различных собственных значения  $\gamma u_a = \lambda_a u_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ , которым соответствуют три нормированных собственных вектора  $u_1, u_2, u_3$ :  $u_1^* u_1 = u_2^* u_2 = u_3^* u_3 = 1$ . Поскольку в данном случае вследствие различия собственных значений все три вектора будут взаимно ортогональны в смысле (28.49), то они образуют ортонормированную систему

$$u_a^* u_b = \delta_{ab}, \quad (28.58)$$

которую удобно рассматривать как базис трехмерного комплексного пространства.

В § 26 мы показали (см. (26.135)), что всякая  $3 \times 3$ -матрица  $\alpha$  может быть однозначно определена по результатам ее действия на три линейно независимых вектора  $u_a$ :  $\alpha u_a = v_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{u_1 [u_2 u_3]} (v_1 \cdot [u_2 u_3] + v_2 \cdot [u_3 u_1] + v_3 \cdot [u_1 u_2]). \quad (28.59)$$

Поскольку для матрицы  $\gamma$  имеем  $\gamma u_a = \lambda_a u_a$ , то, согласно последней формуле, получим

$$\gamma = \frac{1}{u_1 [u_2 u_3]} (\lambda_1 u_1 \cdot [u_2 u_3] + \lambda_2 u_2 \cdot [u_3 u_1] + \lambda_3 u_3 \cdot [u_1 u_2]). \quad (28.60)$$

Однако это выражение можно существенно упростить. Согласно (28.58),  $\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_3 = 0$ , следовательно,  $\mathbf{u}_1^* = C[\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3]$ , после чего из  $\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1 = 1$  следует  $C = (\mathbf{u}_1[\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3])^{-1}$ . Таким образом, ортонормировка (28.58) векторов  $\mathbf{u}_\alpha$  приводит к соотношениям

$$\mathbf{u}_1^* = \frac{[\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3]}{k}, \quad \mathbf{u}_2^* = \frac{[\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1]}{k}, \quad \mathbf{u}_3^* = \frac{[\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]}{k}, \quad k = \mathbf{u}_1[\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3]. \quad (28.61)$$

Учитывая их, получаем общее выражение для эрмитовой  $3 \times 3$ -матрицы (28.60) в простой и компактной форме

$$\gamma = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3^*. \quad (28.62)$$

С другой стороны, мы показали выше (28.2), что для единичного тензора в комплексном трехмерном пространстве справедливо выражение

$$1 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* + \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3^*. \quad (28.63)$$

Пусть  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ . Умножая соотношение (28.63) на  $\lambda_2$  и вычитая из (28.62), получаем

$$\gamma = \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + (\lambda_3 - \lambda_2) \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3^*,$$

или

$$\gamma = \lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} (2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + 2\kappa \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3^*), \quad (28.64)$$

где

$$\kappa = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\xi^2, \quad \xi = \xi^*. \quad (28.65)$$

Введем комплексные векторы

$$\mathbf{c}' = \mathbf{u}_1 + \xi \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{c}'' = \mathbf{u}_1 - \xi \mathbf{u}_2; \quad (28.66)$$

тогда легко проверить, что имеет место соотношение

$$\mathbf{c}' \mathbf{c}''^* + \mathbf{c}'' \mathbf{c}'^* = 2(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \kappa \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3^*),$$

откуда следует выражение для  $\gamma = \gamma^+$ , аналогичное (28.4),

$$\gamma = a + b(\mathbf{c}' \mathbf{c}''^* + \mathbf{c}'' \mathbf{c}'^*), \quad (28.67)$$

где

$$a = a^* = \lambda_2, \quad b = b^* = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\gamma[\mathbf{c}' \mathbf{c}''^*]^* = a[\mathbf{c}' \mathbf{c}''^*]^*, \quad (28.68)$$

следовательно, матрица  $\gamma$  (26.67) имеет собственный вектор  $[\mathbf{c}'\mathbf{c}'']^* = [\mathbf{c}'^*\mathbf{c}''^*]$ , отвечающий собственному значению  $a$ . Это есть не что иное, как вектор  $\mathbf{u}_2$  (см. (28.61)). Заметим, что для векторов  $\mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{c}''$  (28.66) имеют место равенства

$$|\mathbf{c}'|^2 = |\mathbf{c}''|^2 = 1 + \xi^2, \quad \mathbf{c}'^*\mathbf{c}'' = \mathbf{c}'\mathbf{c}''^* = 1 - \xi^2. \quad (28.69)$$

Удобно нормировать векторы  $\mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{c}''$  следующим образом:

$$|\mathbf{c}'|^2 = |\mathbf{c}''|^2 = 1, \quad \mathbf{c}'^*\mathbf{c}'' = \mathbf{c}'\mathbf{c}''^* = \eta = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}, \quad |\eta| < 1. \quad (28.70)$$

При этом множитель  $1 + \xi^2$  можно включить в параметр  $b$ . Легко проверить, что в таком случае

$$\gamma(\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}'') = [a \pm b(1 \pm \eta)](\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}''), \quad (28.71)$$

т. е. векторы  $\mathbf{c}' \pm \mathbf{c}''$  будут собственными векторами матрицы  $\gamma$ , отвечающими собственным значениям

$$a \pm b(1 \pm \eta) = a \pm b(1 \pm \mathbf{c}'^*\mathbf{c}''). \quad (28.72)$$

Нетрудно убедиться в большой аналогии полученных для эрмитовой матрицы  $\gamma$  формул (28.67), (28.72) с формулами (28.8), (28.8 в) для комплексных симметричных матриц.

Поскольку детерминант матрицы равен произведению ее собственных значений, то мы имеем

$$|\gamma| = a[(a + b\eta)^2 - b^2]. \quad (28.73)$$

Чтобы вычислить  $\bar{\gamma}$ , воспользуемся равенством (см. (28.67))

$$\overline{\gamma - a} = \overline{b(\mathbf{c}'\mathbf{c}''^* + \mathbf{c}''\mathbf{c}'^*)}. \quad (28.74)$$

Левую часть, согласно (26.80), можно написать в виде

$$\overline{\gamma - a} = \bar{\gamma} + a(\gamma - \gamma_t) + a^2, \quad (28.75)$$

а правую часть по формуле (26.69) в виде

$$\overline{b(\mathbf{c}'\mathbf{c}''^* + \mathbf{c}''\mathbf{c}'^*)} = b^2[\mathbf{c}''^*\mathbf{c}'^*]. [\mathbf{c}'\mathbf{c}''] = -b^2[\mathbf{c}'\mathbf{c}'']^*[\mathbf{c}'\mathbf{c}'']. \quad (28.76)$$

Поскольку

$$\gamma_t = 3a + 2b\eta, \quad (28.76a)$$

то из (28.74)—(28.76) находим

$$\bar{\gamma} = a(a + 2b\eta) - ab(\mathbf{c}'\mathbf{c}''^* + \mathbf{c}''\mathbf{c}'^*) - b^2[\mathbf{c}'\mathbf{c}'']^*[\mathbf{c}'\mathbf{c}''], \quad (28.77)$$

откуда следует

$$\bar{\gamma}_t = 3a^2 + 4ab\eta - b^2(1 - \eta^2). \quad (28.78)$$

Рассмотренное выше представление (28.67) для  $\gamma$  можно несколько обобщить, если не налагать условия (см. (28.70))

$$\eta = \mathbf{c}'\mathbf{c}''^* = (\mathbf{c}'\mathbf{c}''^*)^* = \mathbf{c}'^*\mathbf{c}''$$

и считать  $\eta$  комплексным числом

$$\eta = \mathbf{c}'\mathbf{c}''^* = \sigma + i\tau \neq \eta^* \quad (28.79)$$

Очевидно, в этом случае  $[\mathbf{c}'\mathbf{c}''^*]^*$  по-прежнему будет собственным вектором матрицы (28.67) для собственного значения  $a$ . Кроме того, за счет выбора вещественного параметра  $b$  всегда можно положить  $|\mathbf{c}'|^2 = |\mathbf{c}''|^2 = 1$ . Заметим, что при этом

$$|[\mathbf{c}'\mathbf{c}''^*]|^2 = [\mathbf{c}'\mathbf{c}''^*][\mathbf{c}'\mathbf{c}''^*]^* = 1 - |\eta|^2 = 1 - \sigma^2 - \tau^2 \geq 0, \quad (28.80)$$

следовательно, всегда  $\sigma, \tau, |\eta| \leq 1$ . Однако соотношение (28.71) теперь не будет иметь места. Будем искать остальные собственные векторы в виде  $p\mathbf{c}' + q\mathbf{c}''$  и соответственно рассмотрим соотношение

$$(\mathbf{c}'\mathbf{c}''^* + \mathbf{c}''\mathbf{c}'^*)(p\mathbf{c}' + q\mathbf{c}'') = \lambda(p\mathbf{c}' + q\mathbf{c}''), \quad (28.81)$$

которое приводит к двум уравнениям для  $p$  и  $q$ :

$$\begin{aligned} (\eta - \lambda)p + q &= 0, \\ p + (\eta^* - \lambda)q &= 0. \end{aligned} \quad (28.81a)$$

Отсюда следует квадратное уравнение для  $\lambda$

$$\begin{vmatrix} \eta - \lambda & 1 \\ 1 & \eta^* - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\sigma\lambda - 1 + |\eta|^2 = 0,$$

решения которого имеют вид

$$\lambda = \lambda_{\pm} = \sigma \pm \sqrt{1 - \tau^2}, \quad (28.82)$$

следовательно,

$$\lambda_+ \lambda_- \leq 0. \quad (28.83)$$

Собственные значения матрицы (28.67), согласно (28.81), (28.82), будут равны  $a, a + b\lambda_+, a + b\lambda_-$ . Поскольку  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  имеют противоположные знаки (28.83), то при любом  $b$  собственное значение  $a$  будет лежать между двумя другими.

Из (28.81a) находим

$$q/p = \lambda - \eta = \pm \sqrt{1 - \tau^2} - i\tau = \pm e^{\mp i\rho}, \quad \rho = \arcsin \tau. \quad (28.84)$$

Таким образом, собственные векторы, отвечающие собственным значениям  $a + b\lambda_{\pm}$ , равны

$$\mathbf{u}_{\pm} = C_{\pm}(\mathbf{c}' \pm e^{\mp i\rho}\mathbf{c}''). \quad (28.85)$$

Следовательно, наиболее общие выражения для собственных значений и векторов матрицы (28.67) имеют вид

$$\lambda_0 = a, \quad \mathbf{u}_0 = [\mathbf{c}'\mathbf{c}'']^*, \quad (28.86)$$

$$\lambda_{\pm} = a + b(\operatorname{Re} \mathbf{c}'\mathbf{c}''^* \pm \sqrt{|\mathbf{c}'|^2 |\mathbf{c}''|^2 - (\operatorname{Im} \mathbf{c}'\mathbf{c}''^*)^2}),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\pm} = & |\mathbf{c}''|^2 \mathbf{c}' + (\pm \sqrt{|\mathbf{c}'|^2 |\mathbf{c}''|^2 - (\operatorname{Im} \mathbf{c}'\mathbf{c}''^*)^2} - i \operatorname{Im} \mathbf{c}'\mathbf{c}''^*) \mathbf{c}'' \sim \\ & \sim (\pm \sqrt{|\mathbf{c}'|^2 |\mathbf{c}''|^2 - (\operatorname{Im} \mathbf{c}'\mathbf{c}''^*)^2} - i \operatorname{Im} \mathbf{c}'\mathbf{c}''^*) \mathbf{c}' + |\mathbf{c}'|^2 \mathbf{c}'' . \end{aligned} \quad (28.86a)$$

Нетрудно убедиться, что  $\mathbf{u}_+$ ,  $\mathbf{u}_-$  взаимно ортогональны:  $\mathbf{u}_+^* \mathbf{u}_- = 0$ .

Хотя выражение (28.67) для произвольной эрмитовской матрицы во многом аналогично приведенным ранее (28.8) выражениям для симметричных комплексных матриц, однако между ними существует и принципиальное различие. А именно, в формуле (28.67) параметр  $a$  обязательно должен быть *средним по величине* собственным значением матрицы  $\gamma$ . Напомним, что для симметричных матриц  $a$  могло быть любым из трех собственных значений матрицы. Таким образом, в этом отношении представление (28.67) единственно. Однако оно не однозначно вследствие того, что, даже наложив нормировочные условия  $|\mathbf{c}'|^2 = |\mathbf{c}''|^2 = 1$ , мы можем, не нарушая их, умножить каждый из векторов  $\mathbf{c}'$ ,  $\mathbf{c}''$  на произвольные унимодулярные множители  $e^{i\delta'}$ ,  $e^{i\delta''}$ . При этом все сведется к некоторому переопределению параметра  $b$ . Пусть

$$b(\mathbf{c}'\mathbf{c}''^* + \mathbf{c}''\mathbf{c}'^*) = b_1(\mathbf{c}'_1\mathbf{c}'_1^* + \mathbf{c}''_1\mathbf{c}''_1^*), \quad (28.87)$$

где

$$\mathbf{c}'_1 = e^{i\delta'} \mathbf{c}', \quad \mathbf{c}''_1 = e^{i\delta''} \mathbf{c}''.$$

Новое значение параметра  $b_1$  легко находится путем взятия следа от (28.87)

$$b_1 = b \frac{\operatorname{Re} \mathbf{c}'\mathbf{c}''^*}{\operatorname{Re} \mathbf{c}'_1\mathbf{c}''_1^*} = b \frac{\operatorname{Re} \eta}{\operatorname{Re} \eta_1} = b \frac{\sigma}{\sigma \cos \delta - \tau \sin \delta}, \quad (28.88)$$

где

$$\eta = \mathbf{c}'\mathbf{c}''^* = \sigma + i\tau, \quad \eta_1 = \mathbf{c}'_1\mathbf{c}''_1^* = \eta e^{i\delta}, \quad \delta = \delta' - \delta''.$$

Ясно, что путем выбора  $\delta$  и соответствующего переопределения  $b$  (28.88) мы всегда можем добиться того, что будут выполнены условия (28.70)

$$|\mathbf{c}'|^2 = |\mathbf{c}''|^2 = 1, \quad 0 < \eta = \mathbf{c}'\mathbf{c}''^* = \eta^* < 1.$$

Если два собственных значения эрмитовской матрицы  $\gamma$  (28.62) совпадают, например  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то с учетом (28.63) можно написать

$$\gamma = a + b\mathbf{c}\mathbf{c}^*, \quad |\mathbf{c}|^2 = 1, \quad (28.89)$$

где

$$a = \lambda_1 = \lambda_2, \quad b = \lambda_3 - \lambda_1, \quad c = u_3.$$

Матрица (28.89) имеет собственный вектор  $c$ , отвечающий собственному значению  $a+b$ . Кроме того, любой вектор  $u$ , ортогональный к  $c$  в смысле  $c^*u=0$ , является собственным. Ему отвечает собственное значение  $a$ . Можно также написать (ср. (4.43))

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma' c c^*, \quad \gamma' = \gamma_e - \gamma_0, \quad \gamma_0 = a, \quad \gamma_e = a + b. \quad (28.90)$$

Для тензора (28.89), (28.90) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_t &= 3a + b = 2\gamma_0 + \gamma_e, \quad |\gamma| = a^2(a+b) = \gamma_0^2 \gamma_e, \\ \bar{\gamma} &= a(a+b - bc c^*) = \gamma_0(\gamma_e - \gamma' c c^*), \\ \bar{\gamma}_t &= a(3a + 2b) = \gamma_0(\gamma_0 + 2\gamma_e). \end{aligned} \quad (28.91)$$

Эти соотношения получаются из общих формул (28.73), (28.76 а) — (28.78), если положить  $c' = c'' = c$ ,  $\eta = 1$  и заменить  $b$  на  $b/2$ .

Очевидно, если у эрмитовой матрицы совпадают все три собственные значения, то она является скалярной:  $\gamma = a$ .

Выше было показано, что произвольная матрица может быть симметризована путем умножения слева или справа на неособенную симметричную матрицу и притом не единственным способом. Возникает вопрос, можно ли «эрмитизировать» произвольную квадратную комплексную матрицу путем умножения ее на неособенную эрмитову матрицу. Пусть  $\alpha \neq \alpha^+$  — произвольная квадратная матрица и  $\gamma = \gamma^+$  ( $|\gamma| \neq 0$ ) — неособенная эрмитова матрица. Условие, о котором идет речь, записывается следующим образом:

$$\gamma \alpha = (\gamma \alpha)^+ = \alpha^+ \gamma. \quad (28.92)$$

Квадратная эрмитова  $n \times n$ -матрица  $\gamma$  содержит в общем случае  $n^2$  независимых параметров. Действительно, согласно (28.52), она является суммой симметричной матрицы  $A'$  ( $n(n+1)/2$  независимых элементов) и умноженной на  $i$  антисимметричной матрицы  $A''$  ( $n(n-1)/2$  независимых элементов). Итого получаем

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

независимых элементов. Матричное уравнение (28.92) представляет собой условие равенства некоторой матрицы  $\beta = \gamma \alpha$  своей эрмитовски сопряженной. Если написать  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ ,

где  $\beta_1, \beta_2$  — вещественные матрицы, то условие (28.92) распадается на два:

$$\beta_1 = \bar{\beta}_1, \quad \beta_2 = -\bar{\beta}_2. \quad (28.93)$$

Первое из этих условий рассматривалось в случае симметричных матриц (см. (28.18)) — оно эквивалентно  $n(n-1)/2$  уравнениям. Второе условие, как легко видеть, равносильно  $n(n+1)/2$  уравнениям. Таким образом, матричное равенство (28.92), будучи выписано поэлементно, сводится к системе  $n^2$  линейных однородных уравнений для  $n^2$  неизвестных — элементов матрицы  $\gamma$ . Такая система, как известно, имеет решение, лишь когда ее детерминант равен нулю. Этот детерминант зависит от элементов заданной матрицы  $\alpha$ . Следовательно, в общем случае не каждая матрица  $\alpha$  может быть преобразована в эрмитову путем умножения слева на эрмитову матрицу  $\gamma$ , а лишь такая, для которой упомянутый детерминант размерностью  $n^2 \times n^2$  будет равен нулю. Все изложенные соображения сохраняют силу и при эрмитизации матрицы  $\alpha$  путем умножения на эрмитову матрицу  $\gamma$  справа.

Можно и другим путем убедиться в том, что не всякая матрица может быть сделана эрмитовой путем умножения на эрмитову матрицу. Пусть  $\alpha\psi = \lambda\psi$ , тогда  $\gamma\alpha\psi = \lambda\gamma\psi$  и  $\psi^*\gamma\alpha\psi = \lambda\psi^*\gamma\psi$ . Но матрицы  $\gamma$  и  $\gamma\alpha$  эрмитовы, поэтому числа  $\psi^*\gamma\alpha\psi$  и  $\psi^*\gamma\alpha\psi$  вещественны, следовательно,  $\lambda = \lambda^*$ . Итак, необходимым условием для того, чтобы матрица  $\alpha$  могла быть эрмитизирована путем умножения на эрмитову матрицу, является вещественность ее собственных значений \*).

В тех случаях, когда существует неособенная эрмитова матрица  $\gamma$ , удовлетворяющая условию (28.92), для  $3 \times 3$ -матрицы  $\alpha$  может быть получено представление, аналогичное (28.67). Чтобы показать это, мы рассуждаем так же, как в случае симметризуемых матриц (см. (28.18), (28.25)). Пусть  $\alpha' = \alpha - \lambda$ ,  $\alpha'b = 0$ ,  $\lambda = \lambda^*$ , тогда можно написать  $\alpha' = p.q^* + p'.q'^*$ , причем  $q^*b = q'^*b = 0$ , или

$$qb^* = q'b^* = 0. \quad (28.94)$$

Благодаря наличию эрмитизирующей матрицы  $\gamma$  имеем  $\gamma\alpha'b = 0$ , причем также

$$(\gamma\alpha'b)^* = (\gamma\alpha')^*b^* = b^*\gamma\alpha' = 0,$$

откуда следует  $b^*\gamma p.q + b^*\gamma p'.q' = 0$ , т. е.

$$b^*\gamma p = b^*\gamma p' = 0. \quad (28.95)$$

\*) Предполагается, что  $\psi^*\gamma\psi \neq 0$ .

Аналогично (28.20) вводим два вектора  $\mathbf{b}'$  и  $\mathbf{b}''$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\mathbf{b}'\gamma\mathbf{b}' = \mathbf{b}''\gamma\mathbf{b}'' = 0,$$

тогда вследствие (28.94) векторы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}'$  могут быть представлены в виде

$$\mathbf{q} = \gamma(\xi_1\mathbf{b}' + \xi_2\mathbf{b}''), \quad \mathbf{q}' = \gamma(\xi_1'\mathbf{b}' + \xi_2'\mathbf{b}'').$$

В свою очередь векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  (см. (28.95)) представляются в виде

$$\mathbf{p} = \eta_1\mathbf{b}' + \eta_2\mathbf{b}'', \quad \mathbf{p}' = \eta_1'\mathbf{b}' + \eta_2'\mathbf{b}''.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\eta_1\mathbf{b}' + \eta_2\mathbf{b}'') \cdot [\gamma(\xi_1\mathbf{b}' + \xi_2\mathbf{b}'')]^* + \\ &+ (\eta_1'\mathbf{b}' + \eta_2'\mathbf{b}'') \cdot [\gamma(\xi_1'\mathbf{b}' + \xi_2'\mathbf{b}'')]^*. \end{aligned} \quad (28.96)$$

Поскольку  $\gamma\alpha'$  должно быть эрмитовой матрицей, то отсюда следует

$$\alpha' = a_1\mathbf{b}' \cdot (\gamma\mathbf{b}')^* + a_2\mathbf{b}'' \cdot (\gamma\mathbf{b}'')^* + a_3\mathbf{b}' \cdot (\gamma\mathbf{b}'')^* + a_3^* \mathbf{b}'' \cdot (\gamma\mathbf{b}')^*, \quad (28.97)$$

где  $a_1^* = a_1$ ,  $a_2^* = a_2$ . Это выражение представляется в форме

$$\alpha' = \frac{a_1}{2} \{(\mathbf{b}' + x\mathbf{b}'') \cdot [\gamma(\mathbf{b}' + y\mathbf{b}'')]^* + (\mathbf{b}' + y\mathbf{b}'') \cdot [\gamma(\mathbf{b}' + x\mathbf{b}'')]^*\}, \quad (28.98)$$

если числа  $x$  и  $y$  являются корнями уравнений

$$xy^* = yx^* = \frac{2a_2}{a_1}, \quad x^* + y^* = \frac{2a_3}{a_1}. \quad (28.99)$$

Полагая  $x = x_1 + ix_2$ ,  $y = y_1 + iy_2$ , можно привести эту систему к виду

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= \frac{2}{a_1} \operatorname{Re} a_3, & x_2 + y_2 &= -\frac{2}{a_1} \operatorname{Im} a_3, \\ x_1y_1 + x_2y_2 &= \frac{a_2}{a_1}. \end{aligned} \quad (28.100)$$

Поскольку число неизвестных (четыре) превышает число уравнений (три), то эта система, очевидно, всегда имеет решение. Например, положив  $x_1y_1 = x_2y_2 = \frac{a_2}{2a_1}$ , мы получим две системы типа (28.24):



$$x_1 + y_1 = \frac{2}{a_1} \operatorname{Re} a_3, \quad x_1 y_1 = \frac{a_2}{2a_1},$$

$$x_2 + y_2 = -\frac{2}{a_1} \operatorname{Im} a_3, \quad x_2 y_2 = \frac{a_2}{2a_1}.$$

Найдя их решения, мы определим тем самым векторы (см. ((28.98)

$$c' = b' + x b'', \quad c'' = b' + y b'',$$

с помощью которых матрица  $\alpha$  может быть представлена в виде

$$\alpha = a + b(c'(\gamma c'')^* + c''(\gamma c')^*), \quad (28.101)$$

где  $a$  и  $b$  — вещественные числа, а  $\gamma$  — эрмитова матрица.

Поскольку система (28.100) имеет множество решений, то соответственно матрица  $\alpha$  при заданной  $\gamma$  может быть представлена в форме (28.101) бесчисленным количеством способов. При этом, очевидно, будут варьироваться векторы  $c'$ ,  $c''$  и параметр  $b$ .

Не представляет большого труда найти собственные векторы и собственные значения матрицы (28.101), а также ее инварианты по аналогии с (28.67), (28.86).

### § 29. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть  $x$  — произвольный вектор трехмерного линейного пространства. Ортогональной группой в этом пространстве называется совокупность всех линейных преобразований  $O$ :

$$x' = O x, \quad (29.1)$$

обладающих тем свойством, что они оставляют неизменным квадрат любого вектора  $x$ :  $x'^2 = x^2$ . В соответствии с (29.1) получаем

$$x'^2 = (O x)^2 = x \tilde{O} O x \equiv x^2 = x l x, \quad (29.2)$$

где  $l$  — трехмерная единичная матрица. Вследствие произвольности  $x$  отсюда следует

$$\tilde{O} O = 1, \quad \tilde{O} = O^{-1}, \quad O \tilde{O} = 1. \quad (29.3)$$

Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы матрица  $O$  принадлежала к ортогональной группе. Как известно, группой называется совокупность элементов, для которых определена операция умножения, удовлетворяющая следующим аксиомам:

I. Результат умножения любых двух элементов группы также является элементом группы.

II. В группе имеется единичный элемент, т. е. такой элемент, который оставляет неизменным любой элемент группы при умножении на него справа или слева.

III. Для каждого элемента группы существует обратный элемент, т. е. такой, который, будучи умножен на сам элемент справа или слева, дает единичный элемент.

IV. Для операции умножения элементов группы справедлив закон ассоциативности.

Нетрудно убедиться, что совокупность всех матриц  $O$ , удовлетворяющих условиям (29.3), образует группу. Действительно, пусть  $\tilde{O}_1 O_1 = 1$ ,  $\tilde{O}_2 O_2 = 1$ , тогда  $O_3 = O_1 O_2$  обладает свойством  $\tilde{O}_3 = \tilde{O}_2 \tilde{O}_1 = O_2^{-1} O_1^{-1} = (O_1 O_2)^{-1} = O_3^{-1}$ . Следовательно, при обычном матричном умножении двух матриц, удовлетворяющих условиям (29.3), мы получаем матрицу, также удовлетворяющую этим условиям, т. е. аксиома I выполняется. Очевидно, единичная матрица будет играть роль единичного элемента ортогональной группы, так как она удовлетворяет условиям (29.3) (т. е. является элементом группы) и при умножении оставляет все матрицы  $O$  неизменными. Роль обратного элемента группы играет обратная матрица  $O^{-1}$ . Наконец, аксиома ассоциативности следует из свойства матричного умножения (§ 25). Таким образом, все матрицы  $O$ , обладающие свойствами (29.3), удовлетворяют групповым аксиомам I—IV и поэтому образуют группу, которая в случае трехмерного пространства обозначается  $O(3)$  и называется трехмерной ортогональной группой. Мы ограничимся рассмотрением ортогональной группы в вещественном трехмерном пространстве, хотя почти все последующие соотношения сохраняют силу и в случае комплексной трехмерной ортогональной группы \*).

Взяв детерминант от обеих сторон равенства (29.3), получим

$$|\tilde{O}O| = |O|^2 = 1, \quad |O| = \pm 1. \quad (29.4)$$

Таким образом, вся совокупность ортогональных матриц  $O$  делится на две части. Те матрицы, для которых  $|O| = 1$ , определяют так называемые *собственные* ортогональные преобразования, они образуют подгруппу ортогональной группы  $O(3)$ , которая обозначается  $SO(3)$  и называется также *группой вращений*. Матрицы, для которых  $|O| = -1$ , не образуют группы, потому что произведение двух таких матриц дает матрицу с детерминантом, равным  $+1$ . Эти матрицы определяют *несобственные* ортогональные преобразования, которые с геометрической стороны представляют собой вращения,

\*) Ортогональную группу в трехмерном комплексном пространстве обозначают  $O(3, C)$ .

совмещенные с отражениями. Если обозначить  $|O_{\pm}| = \pm 1$ , то легко видеть, что  $O_{\pm} = -O_{\mp}$ , т. е. каждому собственному (несобственному) преобразованию  $O_{\pm}$  ( $O_{-}$ ) однозначно сопоставляется несобственное (собственное) преобразование, матрица которого отличается умножением на  $-1$ . Преобразование  $O = -1$ , очевидно, принадлежит к ортогональной группе. Она называется преобразованием инверсии.

Общая  $3 \times 3$ -матрица имеет 9 независимых элементов. В то же время соотношение (29.3) налагает на  $O$  шесть независимых условий. Действительно, матрица  $A = \delta O$  является симметричной:  $\tilde{A} = A$ . Поэтому уравнение  $\delta O = 1$  представляет собой равенство двух симметричных матриц, т. е. шесть равенств между их независимыми элементами. Таким образом, из 9 элементов в ортогональной матрице имеется лишь 3 независимых. Это обстоятельство выражают словами: трехмерная ортогональная группа является *трехпараметрической*. В качестве трех параметров этой группы можно выбрать различные величины, через которые могут быть однозначно выражены все элементы любой матрицы  $O$ .

Мы будем рассматривать параметризацию группы вращений, поскольку всю ортогональную группу можно получить, добавив к группе вращений преобразование *инверсии*

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}. \quad (29.5)$$

Символически это можно выразить так:  $O(3) = \{SO(3), -1\}$ . Группу вращений  $SO(3)$  можно параметризовать по-разному. Широкое применение получила параметризация ее с помощью трех углов Эйлера [142]. Часто пользуются также параметризацией с помощью так называемых параметров Кэли — Клейна или кватернионов [142]. Однако во многих случаях наиболее удобной является векторная параметризация группы вращений [140, 141], которая приводится ниже.

Всякую собственную ортогональную матрицу можно представить в форме Кэли:

$$O = \frac{1 + A}{1 - A} = \frac{2 - (1 - A)}{1 - A} = 2(1 - A)^{-1} - 1. \quad (29.6)$$

Здесь  $A = -\tilde{A}$  — антисимметричная матрица. Запись матричных сомножителей в виде дроби в данном случае допустима, поскольку

$$(1 - A)^{-1}(1 + A) = (1 + A)(1 - A)^{-1}.$$

Кроме того, нужно убедиться, что  $(1 - A)^{-1}$  существует. Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $|1 - A| \neq 0$ . Но равенство  $|1 - A| = 0$  невозможно, поскольку оно означало бы, что единица является собственным значением матрицы  $A$ . Между

тем вещественная антисимметричная матрица  $A$  является *анти-эрмитовой матрицей*, относительно которой в § 28 доказано, что все ее собственные значения чисто мнимы. Таким образом, при  $A = A^* = -\tilde{A}$  выражение (29.6) всегда имеет смысл. В том, что оно определяет собственную ортогональную матрицу, легко убеждаемся, проверяя условия  $\tilde{O}O = 1$ ,  $|O| = 1$ . Действительно,

$$\tilde{O}O = \frac{1 + \tilde{A}}{1 - \tilde{A}} \frac{1 + A}{1 - A} = \frac{1 - A}{1 + A} \frac{1 + A}{1 - A} = 1,$$

$$|O| = \frac{|1 + A|}{|1 - A|} = 1.$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что детерминант, стоящий в знаменателе, отличается от детерминанта, стоящего в числителе, лишь перестановкой строк и столбцов и, следовательно, совпадает с ним.

Согласно (26.34), каждой антисимметричной матрице можно взаимно, однозначно сопоставить дуальный ей трехмерный вектор  $\mathbf{n}$ :

$$A = \mathbf{n}^\times.$$

Умножая (26.43) на  $\mathbf{n}^\times$ , убеждаемся, что для  $\mathbf{n}^\times$  имеет место минимальное уравнение

$$\mathbf{n}^\times (\mathbf{n}^{\times 2} + \mathbf{n}^2) = 0. \quad (29.7)$$

Это соотношение можно написать в виде

$$(\mathbf{n}^{\times 3} - 1) + \mathbf{n}^2 (\mathbf{n}^\times - 1) + 1 + \mathbf{n}^2 = 0,$$

или

$$(1 - \mathbf{n}^\times) \left( 1 + \frac{\mathbf{n}^\times + \mathbf{n}^{\times 2}}{1 + \mathbf{n}^2} \right) = 1,$$

откуда следует

$$(1 - \mathbf{n}^\times)^{-1} = 1 + \frac{\mathbf{n}^\times + \mathbf{n}^{\times 2}}{1 + \mathbf{n}^2}$$

и, согласно (29.6),

$$O = \frac{1 + \mathbf{n}^\times}{1 - \mathbf{n}^\times} = 2(1 - \mathbf{n}^\times)^{-1} - 1 = 1 + 2 \frac{\mathbf{n}^\times + \mathbf{n}^{\times 2}}{1 + \mathbf{n}^2}. \quad (29.8)$$

Таким образом, мы выразили преобразование  $O$  собственной ортогональной группы  $SO(3)$  через посредство вещественного трехмерного вектора  $\mathbf{n}$ . Легко видеть, что выражение (29.8) для  $O$  сохраняет смысл для всех без исключения значений вектора  $\mathbf{n}$ . Это относится и к тому случаю, когда вектор  $\mathbf{n}$  становится бесконечно большим по длине:  $\mathbf{n} = C\mathbf{n}_1$ ,  $C \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{n}_1^2 = 1$ .

Действительно, при этом из формулы (29.8), оставляя лишь члены высшего (второго) порядка относительно  $C$ , получаем

$$O = 1 + 2 \frac{Cn_1^\times + C^2 n_1^{\times 2}}{1 + C^2 n^2} = 1 + 2n_1^{\times 2} = 2n_1 \cdot n_1 - 1. \quad (29.9)$$

Это есть не что иное, как преобразование вращения вокруг направления  $n_1$  на  $180^\circ$ . В самом деле, всякий вектор, параллельный  $n_1$ :  $x = an_1$ , остается неизменным при преобразовании (29.9):  $Ox = x$ . В то же время любой вектор  $x$ , перпендикулярный к  $n_1$  ( $xn_1 = 0$ ), под действием преобразования (29.9) меняет свое направление на обратное  $Ox = -x$ . Но это именно те свойства, которые определяют поворот на  $180^\circ$  вокруг направления  $n_1$ .

Итак, при любом векторе  $n = (n_a)$ ,  $-\infty \leq n_a \leq +\infty$ , формула (29.8) определяет преобразование вращения. Однако справедливо и обратное: матрице  $O$  любого заданного собственного ортогонального преобразования однозначно соответствует определенный вектор  $n$ . Чтобы убедиться в этом, вычислим с помощью (29.8) следующие выражения:

$$O - \tilde{O} = \frac{4n^\times}{1+n^2}, \quad 1 + O_t = \frac{4}{1+n^2}, \quad (29.10)$$

из которых непосредственно следует

$$n^\times = \frac{O - \tilde{O}}{1 - O_t}. \quad (29.11)$$

Поскольку  $O - \tilde{O}_t$  есть известная антисимметричная матрица, то это соотношение однозначно определяет вектор  $n$  (см. [140]). Единственный особый случай может иметь место, когда матрица  $O$  такова, что  $1 + O_t = 0$ , следовательно, деление в формуле (29.11) недопустимо. Но, согласно (29.10), при этом должно быть  $|n| = \infty$  и  $O - \tilde{O} = 0$ , т. е. матрица  $O$  будет симметричной. Это есть рассмотренный выше случай (29.9) преобразования вращения на  $180^\circ$ . Согласно (29.9), для нахождения направления оси вращения  $n_1$  в этом случае достаточно взять матрицу  $1 + O = 2n_1 \cdot n_1$ , действие ее на любой вектор  $a$  дает

$$(1 + O)a = Cn_1, \quad C = 2n_1 a. \quad (29.12)$$

Таким образом, в любом случае заданному  $n$  соответствует определенное преобразование  $O$  (29.8) или (29.9) и каждому заданному преобразованию вращения  $O$  отвечает вектор  $n$ , находимый из (29.11) или (29.12). Следовательно, между матрицами  $O$  группы трехмерных вещественных вращений и совокупностью векторов  $n$  имеется взаимнооднозначное соот-

ветствие. Ввиду этого векторы  $\mathbf{n}$  можно рассматривать как параметры группы вращений. Мы будем называть  $\mathbf{n}$  *вектор-параметром* группы вращений [141], а соответствующее преобразование обозначать  $O(\mathbf{n})$  или  $O_{\mathbf{n}}$ . Заметим, что из (29.9) следует

$$\tilde{O}(\mathbf{n}) = O^{-1}(\mathbf{n}) = O(-\mathbf{n}), \quad O(0) = 1, \quad (29.12a)$$

следовательно, переход к матрице обратного преобразования осуществляется путем изменения знака вектор-параметра, а единичной матрице соответствует нулевой вектор-параметр.

Нетрудно определить геометрический смысл вектор-параметра. Из (29.8) следует, что для всякого вектора, параллельного  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{x} = C\mathbf{n}$ ), имеет место свойство

$$O_{\mathbf{n}}\mathbf{x} = \mathbf{x}O_{\mathbf{n}} = \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \parallel \mathbf{n}). \quad (29.13)$$

Это означает, что при любом преобразовании вращения  $O$  всегда существует направление (ось), остающееся неизменным<sup>\*</sup>). Вектор-параметр  $\mathbf{n}$  определяет именно это направление. Чтобы найти угол поворота вокруг этого направления, рассмотрим единичный вектор  $\mathbf{x}$ , перпендикулярный к  $\mathbf{n}$ :  $\mathbf{x}\mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{x}^2 = 1$ . Преобразование  $\mathbf{x}' = O_{\mathbf{n}}\mathbf{x}$  снова дает вектор, перпендикулярный к  $\mathbf{n}$ , так как, согласно (29.13),  $\mathbf{n}\mathbf{x}' = -\mathbf{n}O_{\mathbf{n}}\mathbf{x} = -\mathbf{n}\mathbf{x} = 0$ . Кроме того, по определению ортогонального преобразования  $\mathbf{x}'^2 = \mathbf{x}^2 = 1$ , поэтому  $\mathbf{x}\mathbf{x}' = \cos\chi$ , где  $\chi$  — угол между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$ , т. е. угол поворота. Используя (29.8), напомним

$$\mathbf{x}' = O_{\mathbf{n}}\mathbf{x} = \frac{1 + \mathbf{n}\times}{1 - \mathbf{n}\times}\mathbf{x},$$

или

$$(1 - \mathbf{n}\times)\mathbf{x}' = (1 + \mathbf{n}\times)\mathbf{x}.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x}\mathbf{x}' - \mathbf{x}[\mathbf{n}\mathbf{x}'] = \cos\chi + \mathbf{n}[\mathbf{x}\mathbf{x}'] = \mathbf{x}^2 = 1. \quad (29.14)$$

Но  $[\mathbf{x}\mathbf{x}'] \parallel \mathbf{n}$ , так как  $\mathbf{n}\mathbf{x} = \mathbf{n}\mathbf{x}' = 0$ . Поэтому  $\mathbf{n}[\mathbf{x}\mathbf{x}'] = |\mathbf{n}| \cdot |[\mathbf{x}\mathbf{x}']| = |\mathbf{n}| \sin\chi$ , следовательно, из (29.14) имеем

$$|\mathbf{n}| = \frac{1 - \cos\chi}{\sin\chi} = \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}. \quad (29.15)$$

Итак, вектор-параметр  $\mathbf{n}$  имеет следующий смысл. Его направление определяет ось поворота, соответствующего рассматриваемому преобразованию  $O_{\mathbf{n}}$  группы вращений, а длина  $|\mathbf{n}|$  численно равна тангенсу половины угла поворота.

<sup>\*</sup> Заметим, что при другой параметризации группы вращений этот факт, представляющийся здесь очевидным, требует особого доказательства [142] и составляет содержание теоремы Эйлера.

Остается добавить, что в соответствии с (29.8) и определением векторного произведения  $\mathbf{n} \times \mathbf{x} = [\mathbf{n}\mathbf{x}]$  (§ 26) поворот  $O_{\mathbf{n}}$  любого вектора  $\mathbf{x}$  производится по направлению правого винта относительно оси  $\mathbf{n}$ . Заметим, что из (29.15) снова получается тот уже известный нам результат, что повороту на  $180^\circ$  соответствует бесконечно большой вектор-параметр.

Поскольку каждому преобразованию группы вращения однозначно соответствует определенный вектор-параметр, то должно иметь место соотношение

$$O(\mathbf{n}) O(\mathbf{n}') = O(\mathbf{n}''), \quad (29.16)$$

где вектор  $\mathbf{n}''$  должен быть однозначной функцией векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$ , которую мы обозначим следующим образом:

$$\mathbf{n}'' = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}' \rangle. \quad (29.17)$$

Эта функциональная зависимость, соответствующая (29.16), носит название *закона композиции вектор-параметров группы вращения*.

Для вывода закона композиции подействуем обеими частями матричного равенства (29.16) на вектор  $\mathbf{n}''$ . Согласно (29.13), получим  $O_{\mathbf{n}} O_{\mathbf{n}'} \mathbf{n}'' = \mathbf{n}''$  или после умножения на  $O_{\mathbf{n}}^{-1} = O_{-\mathbf{n}}$

$$(O_{\mathbf{n}'} - O_{-\mathbf{n}}) \mathbf{n}'' = 0.$$

Умножим это равенство на векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$ . Снова, учитывая (29.13), найдем

$$\mathbf{n} (O_{\mathbf{n}'} - 1) \mathbf{n}'' = 0, \quad \mathbf{n}' (1 - O_{-\mathbf{n}}) \mathbf{n}'' = 0. \quad (29.18)$$

Используя выражение (29.9) для  $O_{\mathbf{n}}$ , приводим эти соотношения к виду

$$\mathbf{n} (\mathbf{n}' \times + \mathbf{n}' \times^2) \mathbf{n}'' = 0, \quad \mathbf{n}' (\mathbf{n} \times - \mathbf{n} \times^2) \mathbf{n}'' = 0,$$

откуда следует, что вектор  $\mathbf{n}''$  перпендикулярен к двум векторам  $[\mathbf{n}\mathbf{n}'] + [[\mathbf{n}\mathbf{n}']\mathbf{n}']$  и  $[\mathbf{n}'\mathbf{n}] - [[\mathbf{n}'\mathbf{n}]\mathbf{n}]$ , следовательно, он должен быть пропорционален их векторному произведению:

$$\mathbf{n}'' = C [[\mathbf{n}\mathbf{n}'] - [\mathbf{n}' [\mathbf{n}\mathbf{n}']], [\mathbf{n}\mathbf{n}'] + [\mathbf{n} [\mathbf{n}\mathbf{n}']]].$$

Производя элементарные вычисления, получаем

$$\mathbf{n}'' = C_0 (\mathbf{n} + \mathbf{n}' + [\mathbf{n}\mathbf{n}']). \quad (29.19)$$

Остается найти скалярный множитель  $C_0$ . Для этого запишем соотношение (29.16) в виде

$$(1 - \mathbf{n}'' \times) O_{\mathbf{n}} O_{\mathbf{n}'} = (1 + \mathbf{n}'' \times)$$

или после умножения справа и слева на  $\mathbf{n}'$

$$[\mathbf{n}' \mathbf{n}''] O_{\mathbf{n}} \mathbf{n}' = \mathbf{n}' (O_{\mathbf{n}} - 1) \mathbf{n}'.$$

Подставляя сюда (29.8), будем иметь

$$[n'n''](n^{\times} + n.n) n' = - [nn']^2,$$

откуда с учетом (29.19) следует

$$C_0 = \frac{1}{1 - nn'}.$$

Таким образом, окончательно

$$n'' = \langle n, n' \rangle = \frac{n + n' + [nn']}{1 - nn'}. \quad (29.20)$$

Легко убедиться, что закон композиции (29.20) обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \langle n, 0 \rangle &= \langle 0, n \rangle = n, \\ \langle n, -n \rangle &= \langle -n, n \rangle = 0, \\ -\langle n, n' \rangle &= \langle -n', -n \rangle. \end{aligned} \quad (29.21)$$

Таким образом, его можно рассматривать как групповой закон «умножения» произвольных векторов трехмерного пространства, причем, согласно (29.21), роль единичного элемента группы играет *нулевой вектор*, а роль обратного элемента — *противоположный вектор*. Нужно лишь убедиться в ассоциативности формулы (29.20), т. е. в справедливости соотношения

$$\langle a, \langle b, c \rangle \rangle \equiv \langle \langle a, b \rangle, c \rangle. \quad (29.22)$$

Это равенство может быть проверено путем прямого применения формулы (29.20). Однако и без того ясно, что оно должно иметь место, поскольку, согласно (29.16), ему соответствует соотношение

$$O_a(O_b O_c) = (O_a O_b) O_c,$$

справедливость которого следует из ассоциативности правила умножения матриц (§ 25). Таким образом, внутренние скобки в (29.22) можно опустить. Путем прямого вычисления получим

$$\langle a, b, c \rangle = \frac{a + b + c + [ab] + [ac] + [bc] - c \cdot [ab] - [c[ab]]}{1 - ab - ac - bc - a[bc]}. \quad (29.23)$$

Закон композиции параметров (29.20) играет фундаментальную роль в теории группы вращений \*).

\*) В [143—145] показано, что та же формула (29.20) определяет закон композиции комплексных вектор-параметров группы Лоренца и комплексной группы Лоренца.



На основании (26.20), (29.4) имеем для преобразований ортогональной группы

$$\bar{O} = |O|O^{-1} = \pm \bar{O}, \quad (29.24)$$

где знак  $+$  соответствует собственным, а знак  $-$  несобственным преобразованиям группы. Соответственно имеем, согласно (26.54),

$$\bar{O}[uv] = \pm \bar{O}[uv] = \pm [\bar{O}u, \bar{O}v] \quad (29.25)$$

с теми же условиями для знаков. Применяя преобразование  $O_+$  собственной группы  $SO(3)$  к обеим частям равенства (29.20), находим с помощью (29.25)

$$O_+ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle O_+ \mathbf{a}, O_+ \mathbf{b} \rangle, \quad |O_+| = 1. \quad (29.26)$$

В то же время для несобственных преобразований  $O_-$  получим

$$O_- \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle O_- \mathbf{b}, O_- \mathbf{a} \rangle, \quad |O_-| = -1. \quad (29.27)$$

Здесь учтено, что скалярное произведение  $\mathbf{ab}$  инвариантно относительно любого ортогонального преобразования

$$(O\mathbf{a})(O\mathbf{b}) = \mathbf{a}\bar{O}O\mathbf{b} = \mathbf{ab}. \quad (29.28)$$

Нетрудно видеть, что  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  (29.20) можно написать в следующих двух формах (см. 29.8)):

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} + (1 + \mathbf{a}^\times) \mathbf{b}}{1 - \mathbf{ab}} = \frac{\mathbf{a} + (1 - \mathbf{a}^\times) O_{\mathbf{a}} \mathbf{b}}{1 - \mathbf{ab}} = \langle O_{\mathbf{a}} \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle, \quad (29.29)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \frac{\mathbf{b} + (1 - \mathbf{b}^\times) \mathbf{a}}{1 - \mathbf{ab}} = \\ &= \frac{\mathbf{b} + (1 + \mathbf{b}^\times) O_{-\mathbf{b}} \mathbf{a}}{1 - \mathbf{ab}} = \langle \mathbf{b}, O_{-\mathbf{b}} \mathbf{a} \rangle. \end{aligned} \quad (29.30)$$

Здесь учтены соотношения (см. (29.13))

$$O_{\pm \mathbf{a}} \mathbf{a} = \mathbf{a} O_{\pm \mathbf{a}} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} O_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} O_{-\mathbf{b}} \mathbf{a} = \mathbf{ab}. \quad (29.31)$$

Компонируя равенство (29.29) справа с вектором  $-\mathbf{a}$ , получаем

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{a} \rangle = O_{\mathbf{a}} \mathbf{b}. \quad (29.32)$$

Заметим, что из (29.20) следует соотношение

$$1 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = \frac{(1 + \mathbf{a}^2)(1 + \mathbf{b}^2)}{(1 - \mathbf{ab})^2}. \quad (29.33)$$

Интересно отметить также, что соотношения (28.14) предыдущего параграфа могут быть выражены через посредство закона композиции (29.20)

$$in_+ = \left\langle i \frac{c}{\sqrt{c^{*2}}}, i \frac{c}{\sqrt{c^2}} \right\rangle, \quad in_- = \left\langle i \frac{c}{\sqrt{c^2}}, i \frac{c^*}{\sqrt{c^{*2}}} \right\rangle \quad (29.34)$$

и аналогично

$$\frac{ic}{\sqrt{c^2}} = \langle in_-, in_+ \rangle. \quad (29.35)$$

Выражению (29.8) для преобразования группы вращений можно придать другой вид, если использовать для вектор-параметра представление (см. (29.15))

$$\mathbf{n} = n_1 \operatorname{tg} \chi / 2, \quad n_1^2 = 1. \quad (29.36)$$

Подставляя это значение в формулу (29.8) и учитывая, что

$$\frac{2|\mathbf{n}|}{1+n^2} = \sin \chi, \quad \frac{1-n^2}{1+n^2} = \cos \chi \quad (\chi < \pi),$$

получаем после простых преобразований

$$O = \cos \chi + \sin \chi \mathbf{n} \times + (1 - \cos \chi) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1. \quad (29.37)$$

Как известно, кристаллические среды обладают упорядоченной внутренней структурой. Последнее означает, что атомы, ионы или молекулы внутри кристалла располагаются в виде правильной пространственной решетки, которая (в бесконечном кристалле) обладает *трансляционной симметрией*. Эта симметрия характеризуется тем, что при выборе начала отсчета в одном из *узлов* решетки (точке расположения какого-либо атома) радиус-вектор любого другого узла может быть определен по формуле

$$\mathbf{r} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + k_3 \mathbf{a}_3, \quad (29.38)$$

где  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  — три фиксированных некопланарных вектора, определяющих расстояния между соседними узлами, а  $k_1, k_2, k_3$  — любые целые числа.

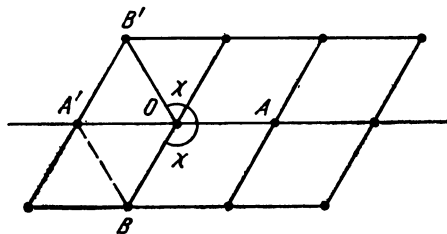


Рис. 29.1

Наряду с трансляционной симметрией кристаллическая решетка может обладать симметрией по отношению к некоторым преобразованиям ортогональной группы. Последние образуют дискретную подгруппу группы  $O(3)$ , которая называется группой симметрии кристалла. Весьма существенно то, что наличие трансляционной симметрии резко ограничивает возможные преобразования группы вращений, соответствующие симметрии кристалла. Действительно, допустимые преобразования должны совмещать решетку кристалла с самой собой. Пусть (см. рис. 29.1) вращение  $O_n$  поворачивает вектор  $\mathbf{a}_1 = OA$  на угол  $\chi$  в положение  $OB$ , причем в точке  $B$  находится узел решетки. Очевидно, поворот на тот же угол в противоположную сторону, преобразующий  $OA$  в  $OB'$ , также приведет к совмещению узла  $A$  с другим узлом  $B'$ . Следствием трансляционной симметрии является то, что, во-первых, геометрическая сумма радиусов-векторов, соответствующих любым двум узлам решетки, снова дает радиус-вектор некоторого узла решетки. Во-вторых, расстояние между любыми двумя узлами, лежащими на некоторой прямой, должно быть целым кратным минимального расстояния между узлами, лежащими на этой прямой. Пусть  $\mathbf{a}_1 = OA$  есть такое минимальное расстояние. Поскольку  $OB$  и  $OB'$  — радиусы-векторы двух узлов, то их сумма, направленная по  $OA$ , также будет радиусом-вектором некоторого узла. Из рис. 29.1 ясно, что в соответствии со сказанным выше должно быть

$$OA' = |OB + OB'| = 2|\mathbf{a}_1| \cos \chi = k|\mathbf{a}_1|,$$

где  $k$  — целое число. Таким образом, допустимы лишь такие углы поворота  $\chi$ , для которых  $\cos \chi = k/2$ . Поскольку  $|\cos \chi| \leq 1$ , то для  $k$  возможны только значения  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ . Им соответствуют значения  $\chi = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \pi$  или, короче,

$\chi = \frac{2\pi}{k}, k = 1, 2, 3, 4, 6$ . Число  $k$  определяет *порядок* соответствующей оси вращения, или *оси симметрии* кристалла.

Кроме осей симметрии различного порядка и различного направления в кристаллах возможны такие элементы симметрии, как *инверсия* (см. § 14), *плоскость симметрии*, которой соответствует операция отражения в плоскости, перпендикулярной единичному вектору  $\mathbf{c}$ :

$$O_m = 1 - 2\mathbf{c}\mathbf{c},$$

а также инверсионные оси симметрии 4-го и 6-го порядков. Преобразования, соответствующие последним, лишь множителем — 1 отличаются от преобразований, отвечающих обычным осям симметрии того же порядка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Стрэттон. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. Ф. И. Федоров. УФН, 108, 762, 1972.
3. Ф. И. Федоров. ДАН СССР, 84, 1171, 1952.
4. Ф. И. Федоров. Инвариантные методы в оптике анизотропных сред. Автореф. докт. дис. Минск, 1954.
5. Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Изд. АН БССР, Минск, 1958.
6. Ф. И. Федоров. Теория упругих волн в кристаллах. «Наука», М., 1965.
7. Ф. И. Федоров. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат., 6, 83, 1954.
8. Ф. И. Федоров. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат., 2, 109, 1955.
9. Ф. И. Федоров. ДАН СССР, 102, 69, 1955.
10. М. Борн. Оптика. ГНТИУ, Харьков, 1937.
11. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. «Наука», М., 1973.
12. G. Stokes. Trans. Cambr. Phil. Soc., 9, 339, 1852.
13. C. Jones. JOSA, 37, 107, 110, 1947.
14. Г. ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. ИЛ, М., 1961.
15. Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. «Мир», М., 1969.
16. Г. В. Розенберг. УФН, 56, 77, 1955.
17. А. М. Самсон, К. С. Адзериho. Изв. АН БССР, сер. физ.-техн., 4, 23, 1964.
18. Ф. И. Федоров. ЖПС, 2, 523, 1965.
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. ОГИЗ, М., 1948.
20. П. П. Феофилов. Поляризованная люминесценция атомов, молекул и кристаллов. Физматгиз, М., 1959.
21. Ю. В. Новожилов. Введение в теорию элементарных частиц. «Наука», М., 1972.
22. Ф. И. Федоров. ЖПС, 4, 58, 1966.
23. С. Чандрасекар. Перенос лучистой энергии. ИЛ, 1953.
24. М. В. Волькенштейн. Молекулярная оптика. ГИТТЛ, М., 1961.
25. Б. И. Степанов, В. П. Гриboвский. Введение в теорию люминесценции. Изд. АН БССР, Минск, 1963.
26. Ф. И. Федоров. Кристаллография, 3, 49, 1958.
27. F. Roeskels. Lehrbuch der Kristalloptik. Teubner, Leipzig, 1906.
28. G. S z i v e s s y. Handbuch der Physik, XX. Springer, Berlin, 1928.
29. Ф. И. Федоров. Уч. зап. БГУ, 16, 99, 1954.
30. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 1, 926, 1956.
31. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 2, 361, 1956.
32. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 2, 514, 1956.
33. Л. М. Томильчик, Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 4, 109, 1958.
34. Л. М. Томильчик, Ф. И. Федоров. Кристаллография, 4, 498, 1959.
35. Ф. И. Федоров. Труды Ин-та физ.-мат. АН БССР, 2, 230, 1957.
36. Ф. И. Федоров. Весті АН БССР, сер. физ.-мат., 5, 70, 1973.
37. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. «Наука», М., 1965.

38. Ф. И. Федоров. ДАН СССР, 105, 465, 1955.
39. Ф. И. Федоров. Труды Ин-та физ.-мат. АН БССР, № 1, 11, 1956.
40. Ф. И. Федоров. Труды Ин-та физ.-мат. АН БССР, № 1, 32, 1956.
41. П. Друде. Оптика. ОНТИ, 1935.
42. К. Шефер. Теоретическая физика, т. III, ч. II. Оптика, ГОНТИ, 1938.
43. M. R. Lefever. Propagation of the heterogeneous, plane and uniform electromagnetic waves in the homogeneous and isotropic media. Univ. de Lille, 1971.
44. W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig, 1900
45. M. Versek. Zs. Krist., 80, 18, 1931.
46. M. Versek. N. Jahrb. Min., 64, 123, 1931.
47. M. Versek. Fortschr. Min., 22, 1, 1937.
48. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 1, 807, 1956.
49. Ф. И. Федоров. Изв. АН СССР, сер. физ., 20, 564, 1956.
50. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 2, 616, 1957.
51. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 2, 775, 1957.
52. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 5, 322, 1958.
53. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 5, 450, 1958.
54. А. М. Гончаренко, Ф. И. Федоров. Кристаллография, 3, 587, 1958.
55. А. М. Гончаренко, С. В. Грум-Гржимайло, Ф. И. Федоров. Кристаллография, 9, 589, 1964.
56. Ф. И. Федоров. Труды Ин-та физ.-мат. АН БССР, 2, 230, 1957.
57. А. М. Гончаренко. ДАН БССР, 2, 457, 1958.
58. А. М. Гончаренко. Кристаллография, 4, 393, 1959.
59. А. М. Гончаренко. Кристаллография, 4, 727, 1959.
60. А. М. Гончаренко. Кристаллография, 4, 849, 1959.
61. А. М. Гончаренко. Исследования оптических свойств поглощающих кристаллов на основе инвариантного метода. Автореф. канд. дис. Минск, 1960.
62. А. М. Гончаренко, С. В. Грум-Гржимайло, Ф. И. Федоров. Кристаллография, 6, 67, 1961.
63. А. М. Гончаренко, Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 14, 94, 1963.
64. Ф. И. Федоров, А. М. Гончаренко. Опт. и спектр., 14, 100, 1963.
65. W. Voigt. Gött. Nachr., II, 5, 269, 1902.
66. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
67. Ю. Э. Камач, Е. Н. Козловский, Н. С. Петров, В. В. Филиппов. ЖПС, 20, 1058, 1974.
68. Ю. Э. Камач, Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. ЖПС, 21, 351, 1974.
69. Ф. И. Федоров. Уч. зап. БГУ, 32, 169, 1957.
70. Ф. И. Федоров. Уч. зап. БГУ, 41, 219, 1958.
71. Ф. И. Федоров. ИФЖ, 1, 41, 1958.
72. Ф. И. Федоров. Кристаллография, 3, 322, 1958.
73. Ф. И. Федоров, Т. Л. Котяш. Опт. и спектр., 12, 298, 1962.
74. Ф. И. Федоров, Н. С. Петров. Опт. и спектр., 14, 256, 1963.
75. Н. С. Петров, Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 15, 792, 1963.
76. Н. С. Петров, Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 18, 1053, 1965.
77. Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. ЖПС, 9, 1031, 1968.
78. Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. Опт. и спектр., 29, 56, 1970.
79. Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. Кристаллография, 16, 36, 1971.
80. Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. Опт. и спектр., 30, 318, 1971.
81. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 30, 528, 1971.
82. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, И. З. Джилавдари. ЖПС, 18, 727, 1973.
83. А. А. Эйхенвальд. ЖРФХО, 41, 131, 1909.
84. Goos n. Hänchen. Ann. d. Phys., 1, 333, 1947; 5, 251, 1949.

85. C. Imbert. Comt. Rendu, 267, B1401, 1968.
86. C. Imbert. Comt. Rendu, 269, B1227, 1969.
87. C. Imbert. Comt. Rendu, 270, B259, 1970.
88. C. Imbert. Phys. Letters, 31A, 337, 1970.
89. C. Imbert. Phys. Rev., 5, 3, 787, 1972.
90. J. Ricard. Nouv. Revue d'Opt., 1, 275, 1970.
91. T. Tamir. Optik, 36, 209, 1972.
92. D. G. Boulware. Phys. Rev., 7, D2375, 1973.
93. N. Ashby, S. C. Miller. Phys. Rev., 7, D2383, 1973.
94. C. Schaefer, C. Fragstein. Ann. Phys., 6, 39, 1949.
95. A. Cornu. Comt. Rendu, 50, 47, 1865.
96. A. Cornu. Ann. Chim. Phys., 11, 283, 1867.
97. В. А. Кизель. Отражение света. «Наука», М., 1973.
98. A. Vašíček. Optik, 19, № 6, 1962.
99. Л. Дунайский. Чехосл. физ. ж., 12, № 9, 1962.
100. R. Dold. Optik, 22, № 9, 1965.
101. J. Santavi. Atti Fondaz «G. Ronchi», econt. Inst. naz. Ottika, 25, 201, 1970.
102. Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 35, 1171, 1973.
103. Н. Р. Иванов, Л. А. Шувалов, А. В. Миренский, Г. Д. Шнырев. Кристаллография, 12, 307, 1967.
104. Н. С. Петров. Опт. и спектр., 14, 106, 1963.
105. J. Billard. Theses. Univ. de Paris, 1966.
106. M. Born. Phys. Zs., 16, 251, 437, 1915; Ann. Phys., 55, 177, 1917.
107. C. Oseen. Ann. Phys., 48, 1, 1915.
108. В. Бурсиан, А. Тиморева. Zs. Phys., 38, 475, 1926.
109. L. Rosenfeld. Zs. Phys., 52, 161, 1928.
110. I. Tinoco, W. Hammerle. J. Phys. Chem., 60, 1619, 1956.
111. M. Stephen. Proc. Camb. Phil. Soc., 54, 81, 1958.
112. Н. Накао, Н. Кимура. J. Phys. Soc. Jap., 27, 519, 1969.
113. Я. И. Френкель. Электродинамика. ОНТИ, т. I, 1934; т. II, 1935.
114. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. «Наука», М., 1965.
115. J. W. Gibbs. Amer. Journ. Sci., III, 23, 460, 1882.
116. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. Основы кристаллофизики. «Наука», М., 1976.
117. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 6, 85, 1959.
118. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров. Кристаллография, 15, 1002, 1970.
119. В. Н. Александров. Кристаллография, 15, 996, 1970.
120. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. ЖЭТФ, 61, 1808, 1971.
121. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 37, 288, 1974.
122. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров, Н. А. Хило. Кристаллография, 18, 227, 1973.
123. K. Försterling. Lehrbuch der Optik. Leipzig, 1906.
124. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. ЖПС, 12, 65, 139, 1970.
125. В. Л. Гинзбург. УФН, 108, 749, 1972.
126. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 63, 838, 1972.
127. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров. ЖПС, 19, 377, 1973.
128. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. ЖПС, 20, 677, 1974.
129. V. M. Agranovich, V. I. Yudson. Opt. Comm., 9, 58, 1973.
130. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, В. В. Шепелевич. Препринт ИФ АН БССР, 1972.
131. А. В. Шубников. Оптическая кристаллография. Изд. АН СССР, М., 1950.

132. В. А. Копцик. Шубниковские группы. Изд. МГУ, 1966.
133. Б. В. Бокуть, Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 6, 537, 1959.
134. А. Зоммерфельд. Оптика. ИЛ, 1953.
135. Ф. И. Федоров. Вестн. АН БССР, сер. физ.-мат., 5, 70, 1973.
136. А. В. Шубников, В. А. Копцик. Симметрия в науке и искусстве. «Наука», М., 1972.
137. Ф. И. Федоров, Л. М. Барковский. Кристаллография, 11, 766, 1966.
138. А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры. ОГИЗ, М., 1948.
139. А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры. ОГИЗ, М., 1941.
140. Ф. И. Федоров. Некоторые методы релятивистской кинематики. Сб. лекций Гомельской межд. школы по физике высоких энергий. Дубна, ОИЯИ, 2-63-71, 1972.
141. Ф. И. Федоров. ДАН БССР, 2, 408, 1958.
142. Е. Т. Уиттекер. Аналитическая динамика. ОНТИ, 1937.
143. Ф. И. Федоров. ДАН БССР, 5, 101, 1961.
144. Ф. И. Федоров. ДАН СССР, 143, 56, 1962.
145. А. А. Богуш, Ф. И. Федоров. ТМФ, 13, 67, 1972.
146. Л. М. Барковский. Кристаллография, 18, 465, 1973.
147. Л. М. Барковский. Опт. и спектр., 36, 1140, 1974.
148. Л. М. Барковский, Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., 34, 1193, 1973.
149. И. С. Желудев. Кристаллография, 9, 501, 1964.
150. G. N. Ramachandran, S. Ramaseshan. Handb. der Physik, Bd. XXV/1. Springer, Berlin, 1961.
151. В. В. Филиппов. ДАН БССР, 19, 19, 1975.
152. В. А. Кизель, Ю. И. Красилов, В. И. Бурков. УФН, 114, 295, 1974.
153. Л. М. Барковский, Ф. И. Федоров. Кристаллография, 10, 174, 1965.
154. Ф. И. Федоров, Л. М. Барковский. Опт. и спектр., 18, 1047, 1965.
155. Ф. И. Федоров, Л. М. Барковский. ЖПС, 3, 83, 1965.
156. Л. М. Барковский, Ф. И. Федоров. ЖПС, 3, 463, 1965.
157. Ф. И. Федоров, Л. М. Барковский. ЖПС, 5, 371, 1966.
158. Ф. И. Федоров, Л. М. Барковский. ДАН БССР, 11, 830, 1966.
159. Ф. И. Федоров. Кристаллография, 12, 287, 1967.
160. Л. М. Барковский, Ф. И. Федоров. ЖПС, 10, 115, 1969.
161. Л. М. Барковский, Ф. И. Федоров. ЖПС, 12, 726, 1970.
162. Ф. И. Федоров. Уч. зап. БГУ, сер. физ.-мат., 15, 68, 1953.
163. Л. М. Барковский. Опт. и спектр., 38, 115, 1975.
164. В. Л. Гинзбург. Теоретическая физика и астрофизика. «Наука», М., 1975.
165. Г. К. Суслов. Теоретическая механика. ОГИЗ, М., 1944.
166. О. Г. Влох, Л. А. Лазько, И. С. Желудев. Кристаллография, 20, 1056, 1975.
167. О. Г. Влох, И. С. Желудев, Л. А. Лазько. Кристаллография, 20, 654, 1975.
168. О. Г. Влох, И. С. Желудев, И. И. Климов. ДАН СССР, 223, 1391, 1975.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора . . . . .	3
<b>Глава I. Основы оптики негиротропных кристаллов в ковариантном изложении</b>	<b>5</b>
§ 1. Уравнения Максвелла и материальные уравнения. Сохранение энергии. Плоские волны . . . . .	5
§ 2. Ковариантное описание поляризации плоских волн . . . . .	13
§ 3. Частичная поляризация. Параметры Стокса и тензор пучка . . . . .	25
§ 4. Плоские волны в прозрачных немагнитных кристаллах . . . . .	44
§ 5. Прозрачные магнитные кристаллы . . . . .	58
§ 6. Неоднородные плоские электромагнитные волны в изотропных средах . . . . .	67
§ 7. Поглощающие немагнитные кристаллы . . . . .	82
§ 8. Граничные условия. Отражение и преломление света на поверхности кристалла . . . . .	111
§ 9. Специальные случаи отражения и преломления света . . . . .	133
§ 10. Прохождение света через плоскопараллельные пластинки . . . . .	174
<b>Глава II. Уравнения электродинамики гиротропных сред</b>	<b>202</b>
§ 11. Вращение плоскости поляризации . . . . .	202
§ 12. Уравнения связи в гиротропных средах . . . . .	210
§ 13. Другие формы уравнений связи . . . . .	225
§ 14. Тензор гирации в кристаллах различной симметрии . . . . .	236
§ 15. Плоские волны и уравнение нормалей . . . . .	252
§ 16. Собственно гиротропные среды . . . . .	261
§ 17. Вынужденная гиротропия . . . . .	269
§ 18. Другой подход к описанию гиротропии . . . . .	275
<b>Глава III. Распространение света в гиротропных средах</b>	<b>285</b>
§ 19. Общие соотношения. Принцип фазолучевой симметрии . . . . .	285
§ 20. Плоские волны в собственно гиротропных средах . . . . .	295
§ 21. Приближенная теория естественной гиротропии . . . . .	311
§ 22. Точная теория плоских волн в естественно гиротропных средах . . . . .	320
§ 23. Поглощающие гиротропные среды . . . . .	342
§ 24. Отражение и преломление света в гиротропных средах . . . . .	349



**Глава IV. Элементы линейной алгебры и прямого тензорного исчисления**

362

§ 25. Матрицы и их свойства . . . . .	363
§ 26. Тензоры в трехмерном вещественном пространстве . . . . .	378
§ 27. Трехмерные комплексные векторы . . . . .	400
§ 28. Трехмерные комплексные тензоры . . . . .	419
§ 29. Ортогональная группа в трехмерном пространстве . . . . .	440
Литература . . . . .	451

**ФЕДОР ИВАНОВИЧ ФЕДОРОВ**

**ТЕОРИЯ ГИРОТРОПИИ**

Редактор Е. Г. Волкин д, обложка С. Т. Савченко, художественный редактор Л. И. Усачев, технический редактор Г. И. Якубовская, корректор В. И. Борисова Печатается по постановлению РИСО АН БССР. АТ 15007. Сдано в набор 17.VI 1976 г. Подписано в печать 25.X 1976 г. Бум. тип. № 1. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. л. 28,5. Уч.-изд. л. 24,2. Изд. зак. 22. Тип. зак. 780. Тираж 1050. Цена 2 р. 66 к. Издательство «Наука и техника». Минск, Ленинский проспект, 68. Типография им. Франциска (Георгия) Скорины издательства «Наука и техника» АН БССР и Госкомитета СМ БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Минск, Ленинский проспект, 68.