

В. А. ФОК

**РАБОТЫ  
ПО КВАНТОВОЙ  
ТЕОРИИ ПОЛЯ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ЛЕНИНГРАДСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

1957

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

---

Академик В. А. ФОК

# РАБОТЫ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1957



*Печатается по постановлению  
редакционно-издательского совета  
Ленинградского университета*

Сборник содержит работы В. А. Фока по вторичному квантованию и квантовой электродинамике, выполненные им в 1928—1937 гг. Значение этих работ В. А. Фока особенно возросло в настоящее время в связи с тем, что теория волновых полей стала одним из актуальнейших разделов современной теоретической физики. Однако изучение работ акад. В. А. Фока по квантовой электродинамике затруднено тем, что они опубликованы на иностранных языках в журналах, которые трудно достать. Издание упрощает эту задачу.

В предисловии к сборнику кратко освещено развитие идей и методов В. А. Фока в современной квантовой теории поля.

Книга рассчитана на специалистов, работающих в области теоретической физики, аспирантов и студентов старших курсов.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем сборнике помещены работы акад. В. А. Фока по вторичному квантованию и квантовой электродинамике, выполненные им в 1928—1937 гг.

Квантовая теория поля является одним из основных разделов современной теоретической физики. Квантовая теория поля — это теория элементарных частиц. Значение квантовой теории поля особенно возросло после объяснения квантовой электродинамикой сдвига уровней атомных электронов и дополнительного магнитного момента электрона. В ряде работ, опубликованных в 1949—1954 гг., квантовой электродинамике была придана релятивистская форма и были разработаны методы, позволяющие вычислять средние значения физических величин и вероятности переходов в любом приближении теории возмущений. Методы, развитые в квантовой электродинамике, были перенесены в теорию мезонного поля.

Однако в современной квантовой теории поля имеются еще серьезные трудности. Еще до сих пор не выяснен вопрос о сходимости последовательности приближений теории возмущений. В квантовой теории поля отсутствуют методы решения уравнений без применения теории возмущений, что особенно важно в случае мезонного поля. Более того, в последнее время выявилась невозможность провести последовательно перенормировку даже в случае квантовой электродинамики. В мезонной теории еще не удалось добиться количественного согласия с опытом. Поэтому проблемы квантовой теории поля сейчас весьма актуальны.

Публикуемые в настоящем сборнике работы акад. В. А. Фока внесли большой вклад в развитие квантовой теории поля. Эти работы входят в число работ, составляющих „основной фонд“ квантовой теории поля. Любопытно отметить, что идеи и методы, разработанные акад. В. А. Фоком в этих статьях, стали особенно широко применяться в последнее время, т. е. спустя двадцать лет после их создания.

Между тем многие статьи акад. В. А. Фока по вторичному квантованию и квантовой электродинамике, которые печатались в свое время в различных журналах, стали теперь библиографической редкостью.

Поэтому было сочтено целесообразным издать сборник работ акад. В. А. Фока по вторичному квантованию и теории поля,<sup>1</sup> чтобы сделать их доступными для всех читателей, интересующихся этими вопросами.

Рассмотрим кратко работы, помещенные в настоящем сборнике в плане развития квантовой теории поля за время, истекшее с момента их опубликования.

В работе „Вторичное квантование и конфигурационное пространство“ (1932 г.) последовательно выводятся основные соотношения метода вторичного квантования и развивается метод конфигурационного пространства для систем с переменным числом частиц. Уравнение Шредингера для функционала состояния взаимодействующих полей в таком методе конфигурационного пространства эквивалентно бесконечной системе „зацепляющихся“ уравнений для функций, описывающих состояние поля с определенным числом частиц. При этом времена всех частиц считаются одинаковыми. В некоторых зарубежных работах этот метод называется методом рассмотрения системы в „пространстве Фока“ (Fock Space).

В этой работе также впервые представлено изменение волновых функций с течением времени при помощи унитарного преобразования. Кроме того, в работе впервые установлена связь между оператором Гамильтона и оператором унитарного преобразования от одного момента времени к другому.

Следует отметить, что в работе „Вторичное квантование и конфигурационное пространство“ было дано первое ясное и последовательное изложение метода вторичного квантования и его связи с квантовой механикой системы частиц в конфигурационном пространстве. До появления этой работы связь вторичного квантования с обычной квантовой механикой не была ясна, и, например, в некоторых работах предполагалось, что метод вторичного квантования выходит за рамки квантовой механики. Статья „Вторичное квантование и конфигурационное пространство“ может служить основным пособием для изучающих вторичное квантование. В течение почти пятнадцати лет со дня опубликования этой статьи развитый в ней метод рассмотрения систем с переменным числом частиц в конфигурационном пространстве в теории поля не применялся. В последнее время в связи с трудностями, вызванными неприменимостью теории возмущений для мезонного поля, этот метод стал широко применяться для расчетов в теории мезонного поля.

---

<sup>1</sup> Переводы статей выполнены сотрудниками кафедры теоретической физики.

Эта работа является также важным этапом в создании В. А. Фоком метода функционалов.

Обобщение метода конфигурационного пространства в духе современной инвариантной теории поля было предложено в ряде работ [1—3] 1953—1954 г. В этих работах вместо последовательности волновых функций, каждая из которых описывает систему из определенного числа частиц с одинаковыми временами, вводятся волновые функции аналогичного типа, но со своим временем для каждой частицы.

В работе „К теории позитронов“ (1933 г.) кратко сформулирован метод рассмотрения позитронов во вторичном квантовании.

Независимо от В. А. Фока в 1934 г. Дираком [4] был опубликован аналогичный метод. Этот метод, развитый в дальнейшем Гейзенбергом [5], известен под названием метода „матрицы плотности“.

В настоящее время результаты работы сохраняют свое значение, хотя теперь они обычно выводятся иным образом — из требования зарядовой симметрии теории.

В работах В. А. Фока „К электродинамике Дирака“ (1932 г.), „О квантовании электромагнитных волн и взаимодействии зарядов в теории Дирака“ (1932 г.), „Вывод формулы Меллера из теории Дирака“ (1932 г.), написанных совместно с Б. Подольским, для случая трехмерного движения развивается идея Дирака о том, что кулоновское взаимодействие должно появляться в результате исключения продольного электромагнитного поля. (В статье [6] Дирак пояснил эту идею лишь на примере движения в одном измерении.) Работы В. А. Фока и Б. Подольского входят в цикл работ, который завершился созданием многовременного формализма Дирака — Фока — Подольского, изложенного (1932 г.) в заключительной статье цикла „О квантовой электродинамике“.

Многовременный формализм Дирака — Фока — Подольского представляет собой релятивистски инвариантную форму квантовой электродинамики. Каждой частице в многовременном формализме приписывается свое время, отдельное время сопоставляется также электромагнитному полю. Уравнение Максвелла в многовременном формализме обобщается на случай, когда времена электронов не равны времени поля.

Обобщением многовременного формализма на случай, когда оба поля — электромагнитное и электронно-позитронное — считаются квантованными, явился сверхмноговременный формализм, предложенный в 1946—1948 гг. Томонагой [7] и Швингером [8]. В сверхмноговременном формализме каждой точке пространства сопоставляется свое время. Следует отметить, что применение сверхмноговременного формализма предполагает решение задачи по теории возмущений и связано с громоздкими вычислениями.

Три статьи „Обобщение и решение дираковского статистического уравнения“ (1928 г.), „О квантовой электродинамике“ (1934 г.) и „Метод функционалов в квантовой электродинамике“ (1937 г.) составляют цикл работ, в которых развит метод функционалов Фока.

В первой из перечисленных работ В. А. Фок разрабатывает идею об описании системы с неопределенным числом частиц с помощью производящей функции вместо бесконечной последовательности волновых функций, каждая из которых относится к системе определенного числа частиц. В окончательном виде с приложением к квантовой электродинамике эта идея получила воплощение во второй, основной статье. (Поправки к первой статье, напечатанные отдельно, при переводе были внесены в текст.)

В методе функционалов состояние поля бозе-частиц описывается в представлении, где диагональны операторы рождения бозе-частиц, а операторы поглощения выражаются посредством функциональной производной по собственному значению оператора рождения. Волновая функция поля (функционал состояния) разлагается по собственным функциям оператора числа частиц. Так как такими функциями являются любые произведения операторов рождения, действующих на функционал вакуума, то это разложение представляет собой функциональный степенной ряд, а сам функционал в таком представлении является производящей функцией для амплитуд вероятности состояний поля с определенным числом частиц. Эти амплитуды могут быть найдены из системы, аналогичной бесконечной системе „зацепляющихся“ уравнений метода конфигурационного пространства (см. статью „Вторичное квантование и конфигурационное пространство“).

Метод функционалов Фока представляет собой совершенно строгую формулировку теории взаимодействия с полем бозе-частиц. Метод функционалов применялся неоднократно для решения конкретных задач.

После создания инвариантной теории  $S$ -матрицы и метода устранения бесконечностей с помощью перенормировки массы и заряда, метод функционалов Фока был приведен к ковариантному виду, согласующемуся с теорией позитрона и не содержащему расходящихся выражений.

Подробное изложение современного состояния метода функционалов имеется в обзоре [9]. Метод функционалов Фока кратко изложен в 3-м издании „Квантовой механики“ Дирака.

Идея о производящем функционале получила значительное развитие в последние годы. В своем методе функционалов В. А. Фок развил эту идею, выбрав в качестве основных функций, описывающих поле, последовательность амплитуд вероятности в конфигурационном пространстве. Однако, разумеется, кроме амплитуд вероятности можно построить последователь-

ности функций другого типа, позволяющих полностью описать поле. Такими функциями являются, например,  $T$ -функции, фейнмановские амплитуды и т. д. Вместо бесконечной последовательности этих функций так же, как и в методе функционалов Фока, мы можем характеризовать состояние (или переходы между состояниями) одной величиной — производящим функционалом. Производящие функционалы для  $T$ -функций и фейнмановских амплитуд и  $\rho$ -функций являются функционалами от внешних источников полей. Трактровка с внешними источниками была предложена Швингером [10]. В отличие от функционалов Фока, которые зависят от функций векторного аргумента, функционалы внешних источников зависят от функций пространственно-временной точки.

Идеи метода функционалов Фока использованы и в пространственно-временной трактовке квантовой теории поля — см., например, обзор [10]. Понятие о производящем функционале будет иметь важное значение и в будущей теории, свободной от недостатков современной квантовой теории поля. Действительно, и в будущей теории поля будет, очевидно, сохранен корпускулярный аспект. А это значит, что поле придется по-прежнему описывать бесконечной последовательностью функций, зависящих от переменных определенного числа частиц, и что по-прежнему вместо этой последовательности можно будет воспользоваться производящим функционалом.

Отдельное место занимает работа „Собственное время в классической и квантовой механике“ (1937 г.). В ней излагается новый метод решения уравнения Дирака с электромагнитным полем, основывающийся на введении в уравнение Дирака нового параметра, который имеет смысл собственного времени. Значение этого метода было понято только в 1950—1952 гг., после того, как была создана ковариантная формулировка квантовой теории поля.

В методе собственного времени Фока решение уравнения Дирака представляется в виде контурного интеграла по собственному времени. Как известно, собственное время является инвариантом. Это обстоятельство важно для современной квантовой теории поля, где релятивистская инвариантность является одним из главных требований. Например, для однозначного выделения расходимостей тока собственной энергии и поляризации вакуума необходимо, чтобы эти расходимости содержались в интегралах, не зависящих от системы координат и калибровки потенциалов (метод регуляризации). Поэтому применение метода собственного времени дает автоматически однозначные результаты, если только интегрирование по собственному времени проводится в конце вычислений [11].

Метод собственного времени был использован также для рассмотрения проблемы градиентной инвариантности [11] и определения „позитронной“ функции Грина для уравнения Ди-



рака [12]. Развитый в работе Швингера [11] метод собственного времени был использован для вычислений некоторых радиационных поправок и функций Грина.

Выше мы перечислили основные применения и обобщения методов; разработанных акад. В. А. Фоком во вторичном квантовании и теории поля. Но развитые методы настолько общи, что они использовались ранее и могут с успехом применяться в будущем и в других областях теоретической физики — там, где рассматриваются системы многих частиц или систем с переменным числом частиц, например в теории твердого тела.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. P. T. Matthews, A. Salam. Proc. Roy. Soc., **A221**, 128 (1954).
2. Nishijima. Prog. Theor. Phys., **10**: 549 (1953).
3. E. Fréese. Zs. f. Naturforsch., **8a**, № 12 (1953).
4. P. A. M. Dirac. Proc. Camb. Phil. Soc., **30**, 150 (1934).
5. W. Heisenberg. Zs. f. Phys., **90**, 209 (1934).
6. P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., **A136**, 453 (1932).
7. S. Tomonaga. Prog. Theor. Phys., **1**, 127 (1946).
8. J. Schwinger. Phys. Rev., **74**, 1439 (1948).
9. Ю. В. Новожилов, А. В. Тулуб. УФН, **61**, № 1 (1957).
10. J. Schwinger. Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452, 455 (1951).
11. J. Schwinger. Phys. Rev., **82**, 664 (1951).
12. Y. Nambu. Prog. Theor. Phys., **5**, 82 (1950).

#### ОТ АВТОРА

Настоящий сборник моих работ 1928—1937 гг. по квантовой теории поля выпущен по инициативе сотрудников кафедры теоретической физики Ленинградского университета. Особенно деятельное участие в выпуске сборника принял Ю. В. Новожилов, который написал и предисловие к нему. Переводы работ, первоначально опубликованных на иностранных языках, выполнены М. Г. Веселовым (работа 2), Ю. Н. Демковым (работа 1), Г. Ф. Друкаревым (работы 4 и 5) и А. В. Тулубом (работы 3, 6 и 8). (Номера работ указаны по списку на стр. 158.) Все переводы просмотрены автором.

Всем сотрудникам кафедры теоретической физики ЛГУ, принимавшим участие в переводах и проявившим инициативу в издании книги, а также директору Физического института ЛГУ С. Э. Фришу, и ректору ЛГУ А. Д. Александрову, подержавшим эту инициативу, автор приносит свою глубокую благодарность.

В. Фок

## ОБОБЩЕНИЕ И РЕШЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА <sup>1</sup>

В. А. Фок

Исследованная Дираком статистическая задача о распределении состояний в совокупности механических систем обобщается и затем решается в общем виде с помощью производящей функции, которая удовлетворяет волновому уравнению в гильбертовом пространстве.

В работе Дирака „Испускание и поглощение света“ <sup>2</sup> бозе-эйнштейновская статистика совокупности механических систем рассмотрена по совершенно новому методу. Дирак принимает, что имеет место возмущение системы внешней силой и рассматривает вызванное этим возмущением изменение вероятности данного распределения систем по энергетическим уровням.

Существенно новое в методе Дирака состоит в том, что число  $N_s$  систем на  $s$ -том энергетическом уровне рассматривается им как каноническая переменная. В пространстве этих переменных (мы будем называть его пространством Дирака) Дирак устанавливает волновое уравнение; решения этого уравнения являются функциями от переменных  $N_s$  и от времени. Квадрат модуля решения определяет вероятность соответствующего распределения уровней энергии в совокупности.

Дирак не указывает, однако, способа решения полученного им уравнения.

В предлагаемой работе <sup>3</sup> задача обобщается в том отношении, что ищется вероятность распределения любой механиче-

---

<sup>1</sup> Впервые опубликовано в 1928 г. V. Fock. Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung. Zs. f. Physik., 49, 339—357 (1928).

<sup>2</sup> P. A. M. Dirac. The Quantum Theory of Emission and Absorption of Radiation, Proc. Roy. Soc., (A) 144, 243 (1926).

<sup>3</sup> В оригинальном тексте была сделана попытка применить разработанный в этой статье метод также и к случаю статистики Ферми. Эта попытка оказалась неудачной, вследствие чего относящиеся к случаю статистики Ферми места (в частности, § 8) здесь опущены. Поправка была дана в работе: „Zur Quantenelektrodynamik“. Sow. Phys., 6, 5, 428 (1934) (в печатаемом здесь русском переводе этой работы упомянутая сноска опущена). На трудности, связанные с применением данного метода к статистике Ферми, указывалось уже в оригинальной работе (В. Ф.).

ской величины (а не только энергии). При этом амплитуды вероятности любой другой (или той же самой) механической величины считаются заданными в момент времени  $t=0$ .

Обобщенное уравнение Дирака решается с помощью производящей функции, для которой можно указать явное выражение.

§ 1. Рассмотрим совокупность одинаковых механических систем. Оператор энергии  $H$  каждой системы может содержать время. Наряду с энергией рассмотрим две другие механические величины  $a$  и  $b$  с операторами  $A$  и  $B$ .

Оператор  $A$  понадобится нам в дальнейшем лишь для определенного момента времени  $t_0 = 0$ , поэтому мы можем принять, что он не содержит времени явно. Оператор  $B$ , напротив, рассматривается нами в различные моменты времени и соответственно этому мы примем, что он может явно содержать время.<sup>1</sup>

Уравнение Шредингера для одной системы имеет вид

$$H\psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Собственные функции операторов  $A$  и  $B$  удовлетворяют уравнениям

$$A\psi_s(q) = a_s\psi_s(q), \quad (2)$$

$$B\varphi_s(q, t) = \beta_s\varphi_s(q, t). \quad (3)$$

Произвольные, зависящие от времени, фазовые множители функций  $\varphi_s(q, t)$  можно для определенности считать выбранными по рецепту,<sup>2</sup> предложенному автором в работе.<sup>3</sup>

Мы будем также рассматривать систему решений  $\psi_s(q, t)$  уравнения Шредингера

$$H\psi_s(q, t) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_s}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$\psi_s(q, 0) = \psi_s(q). \quad (5)$$

Согласно теореме, доказанной в цитированной работе автора, система функций  $\psi_s(q, t)$  будет полной, ортогональной и нормированной для всех значений  $t$ . В дальнейшем мы будем называть ее основной системой.

§ 2. Каждое решение  $f(q, t)$  уравнения Шредингера (1) однозначно определяется своим начальным значением  $f(q, 0)$ .

<sup>1</sup> У Дирака операторы  $A$  и  $B$  совпадают и равны оператору энергии невозмущенной системы.

<sup>2</sup> Каждая собственная функция, нормированная таким образом, ортогональна к своей производной по времени.

<sup>3</sup> V. Fock. Über die Beziehung zwischen den Integralen der quantenmechanischen Bewegungsgleichungen und der Schrödingerschen Wellengleichung. Zs. f. Phys., 49, 323 (1928).

Если разложить это начальное значение по функциям  $\psi_s(q) = \psi_s(q, 0)$ :

$$f(q, 0) = \sum_s g_s \psi_s(q, 0), \quad (6)$$

то в момент  $t$  решение будет равно

$$f(q, t) = \sum_s g_s \psi_s(q, t). \quad (7)$$

Это же решение мы можем разложить по собственным функциям операторов  $A$  и  $B$ :

$$f(q, t) = \sum_s x_s \psi_s(q, 0), \quad (8)$$

$$f(q, t) = \sum_s y_s \varphi_s(q, t), \quad (9)$$

где коэффициенты  $x_s$  и  $y_s$  являются функциями времени, тогда как в формуле (7) коэффициенты  $g_s$  были постоянными.<sup>1</sup> Бесконечно-мерное пространство всех последовательностей коэффициентов разложения

$$\left. \begin{array}{l} g_1, g_2, \dots, g_s, \dots \\ x_1, x_2, \dots, x_s, \dots \\ y_1, y_2, \dots, y_s, \dots \end{array} \right\} \quad (10)$$

называют комплексным гильбертовым пространством. Элементы каждой последовательности (10) будут „координатами“ в этом пространстве. Переходу от одной последовательности к другой соответствует линейное ортогональное (унитарное) преобразование координат, которое можно рассматривать как вращение координатной системы в гильбертовом пространстве.

Физический смысл величин  $y_s$  следующий. Пусть физической величине  $b$  соответствует оператор  $B$ , имеющий собственные значения  $\beta_s$  и собственные функции  $\varphi_s(q, t)$ . Если разложить решение уравнения Шредингера  $f(q, t)$  по функциям  $\varphi_s(q, t)$ , то квадрат модуля  $|y_s|^2$  коэффициента разложения  $y_s$  дает относительную вероятность того, что в момент  $t$  величина  $b$  равна  $\beta_s$ .

Вместо того чтобы говорить „величина  $b$  равна собственному значению  $\beta_s$  оператора  $B$ “, можно сказать короче „система находится в состоянии  $s$ “, по крайней мере в том случае, когда ясно, каким оператором определяются состояния, о которых идет речь.

Так как сумма квадратов модулей  $|y_s|^2$  равна соответствующей сумме  $|g_s|^2$  и, следовательно, постоянна, мы можем поло-

<sup>1</sup> Если понимать под функциями  $\psi_s(q, 0)$  собственные функции невозмущенной системы, то наши  $x_s$  суть те самые величины, которые Дирак обозначает через  $b_s$ .

жить ее равной числу  $N$  систем в совокупности

$$\sum_s |y_s|^2 = \sum_s |g_s|^2 = N. \quad (11)$$

Квадрат модуля

$$|y_s|^2 = N_s^{(\beta)} \quad (12)$$

будет тогда равен вероятному числу  $N_s^{(\beta)}$  систем в состоянии  $s$  (т. е. с собственным значением  $\beta_s$ ). Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для оператора  $A$ .

§ 3. Установим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты разложения  $y_s$ .

Если помножить каждое из разложений (7) и (9) на

$$\bar{\varphi}_r(q, t) \rho(q) dq$$

[ $\rho(q)$  — весовая функция в пространстве  $q$ ], проинтегрировать по пространству переменных  $q$  и приравнять результаты, то получится выражение для  $y_r$  через постоянные  $g_s$

$$y_r = \sum_s Y_{rs} g_s, \quad (13)$$

где для краткости введено обозначение

$$Y_{rs} = \int \bar{\varphi}_r(q, t) \psi_s(q, t) \rho dq. \quad (14)$$

Величины  $Y_{rs}$  удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \sum_l Y_{rl} \bar{Y}_{sl} &= \delta_{rs} \\ \sum_l Y_{lr} \bar{Y}_{ls} &= \delta_{rs} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и являются, тем самым, элементами унитарной матрицы.

Дифференцируя выражение (14) по времени и учитывая, что функция  $\psi_s(q, t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера (4), получим

$$\frac{dY_{rs}}{dt} = \int \frac{\partial \bar{\varphi}_r}{\partial t} \psi_s \rho dq - \frac{i}{\hbar} \int \bar{\varphi}_r H \psi_s \rho dq. \quad (16)$$

Разлагая в этом выражении  $\psi_s(q, t)$  по  $\varphi_l(q, t)$

$$\psi_s(q, t) = \sum_l Y_{ls} \varphi_l(q, t) \quad (17)$$

и полагая для краткости

$$K_{rl} = \int \bar{\varphi}_r(q, t) H \varphi_l(q, t) \rho dq + \frac{\hbar}{i} \int \bar{\varphi}_r(q, t) \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} \rho dq, \quad (18)$$

получаем дифференциальные уравнения

$$\frac{\hbar}{i} \frac{dY_{rs}}{dt} = - \sum_l K_{rl} Y_{ls}. \quad (19)$$

Матрица коэффициентов  $K_{rl}$ , очевидно, эрмитова. Поскольку величины  $y_r$  являются линейными функциями от  $Y_{rs}$  с постоянными коэффициентами  $g_s$ , то и  $y_r$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям того же вида (19). Этот результат можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема 1.** Если разложить решение уравнения Шредингера по системе ортогональных функций  $\varphi_s(q, t)$ , то коэффициенты разложения  $y_r$  будут удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{\hbar}{i} \frac{dy_r}{dt} = - \sum_l K_{rl} y_l, \quad (20)$$

где величины  $K_{rl}$  определены формулой (18).

Эта теорема справедлива, очевидно, для любой полной ортогональной системы функций. В частности, для основной системы, например для  $\psi_r(q, t)$ , выражение (18) равно нулю и коэффициенты разложения постоянны.

§ 4. Рассмотрим, наряду с системой уравнений (20), комплексно сопряженную систему

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d\bar{y}_r}{dt} = \sum_l K_{lr} \bar{y}_l. \quad (20^*)$$

Обозначая через  $F$  билинейную форму

$$F = \sum_{sr} K_{sr} \bar{y}_s y_r, \quad (21)$$

мы можем записать уравнения (20) и (20\*) в виде

$$\frac{\hbar}{i} \frac{dy_r}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial \bar{y}_r}, \quad (22)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d\bar{y}_r}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_r}. \quad (22^*)$$

Если рассматривать  $\bar{y}_r$  (или  $y_r$ ) как каноническую координату, а  $\frac{\hbar}{i} y_r$  (или  $-\frac{\hbar}{i} \bar{y}_r$ ) как канонический импульс, т. е. если положить

$$Q_r = \bar{y}_r, \quad P_r = \frac{\hbar}{i} y_r, \quad (23)$$

или

$$Q_r = y_r, \quad P_r = -\frac{\hbar}{i} \bar{y}_r, \quad (23^*)$$

то уравнения (22) и (22\*) могут рассматриваться как уравнения движения в гильбертовом пространстве с функцией Гамильтона  $F$ .

Будем теперь считать, следуя Дираку, что канонические переменные являются операторами (матрицами,  $q$  — числами) и установим волновое уравнение, соответствующее оператору Гамильтона  $F$ . При этом мы можем использовать либо „пространство“  $y_r$ , либо „пространство“  $\bar{y}_r$ .

В пространстве  $y_r$  оператор  $y_r$  означает „умножение на  $y_r$ “, а оператор  $\bar{y}_r$  — „изменение знака и дифференцирование по  $y_r$ “:

$$y_r \rightarrow y_r; \bar{y}_r \rightarrow -\frac{\partial}{\partial y_r}. \quad (24)$$

В пространстве  $\bar{y}_r$  оператор  $\bar{y}_r$  означает „умножение на  $\bar{y}_r$ “, а оператор  $y_r$  — „дифференцирование по  $\bar{y}_r$ “:

$$\bar{y}_r \rightarrow \bar{y}_r; y_r \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{y}_r}. \quad (25)$$

Это следует из известных общих формул

$$P_r = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial Q_r}; Q_r = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial P_r} \quad (26)$$

и притом независимо от того, определим ли мы канонические переменные  $P_r$  и  $Q_r$  согласно (23) или согласно (23\*). Обозначая волновую функцию в пространстве  $y_r$  через  $\Omega$ , получим

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \sum_{sr} K_{sr} y_r \frac{\partial \Omega}{\partial y_s} = 0. \quad (27)$$

Здесь следует отметить, что последовательность операторов в диагональных членах (27) не существенна. В самом деле, если бы мы подействовали операторами  $y_r$  и  $\frac{\partial}{\partial y_r}$  какой-либо иной последовательности, например писали бы

$$\frac{\partial}{\partial y_r} (y_r \Omega)$$

или

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial y_r} (y_r \Omega) + y_r \frac{\partial \Omega}{\partial y_r} \right],$$

то в правой части (27) вместо нуля стоял бы член вида  $c(t) \Omega$ , где  $c(t)$  — вещественная функция от времени. Однако легко убедиться, что решение нового уравнения отличается от решения уравнения (27) лишь на множитель, по модулю равный единице, т. е. на несущественный фазовый множитель.

Уравнение (27) представляет собой волновое уравнение в пространстве  $y_r$ . Чтобы получить соответствующее уравнение в гильбертовом пространстве с координатами  $\bar{y}_r$ , мы долж-

ны подставить в гамильтонову функцию (21) в качестве операторов для  $\bar{y}_r$  и для  $y_r$  выражения (25). Обозначая через  $\bar{\Omega}$  волновую функцию в пространстве  $\bar{y}_r$ , находим

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + \sum_{sr} K_{sr} \bar{y}_s \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y_r} = 0. \quad (28)$$

В силу соотношения  $K_{sr} = \bar{K}_{rs}$  это уравнение будет в точности комплексно сопряженным к уравнению (27).

Таким образом, для установления вида волнового уравнения в гильбертовом пространстве несущественно, будем ли мы рассматривать в качестве координат и импульсов выражения (23), или же выражения (23\*). Так как последовательность операторов в функции Гамильтона также безразлична, мы можем утверждать, что волновое уравнение в гильбертовом пространстве установлено однозначно.

Вернемся к уравнению (27). Это есть линейное уравнение в частных производных первого порядка. Если составить связанную с ним систему обыкновенных дифференциальных уравнений, то получится в точности система (20). Эта система и уравнение (27) будут, таким образом, сопряженными в смысле теории уравнений в частных производных первого порядка. Отсюда следует, что преобразование волнового уравнения (25) к другой системе координат в гильбертовом пространстве производится путем простой замены независимых переменных по обычным правилам дифференциального исчисления; сама же волновая функция  $\Omega$  остается при таком преобразовании инвариантной.

Это замечание позволяет найти общее решение волнового уравнения (27) без всяких вычислений. Действительно, если в качестве координат в гильбертовом пространстве взять коэффициенты разложения  $g_s$  по основной системе функций, то в этих координатах волновое уравнение будет иметь простой вид

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_{g_s} = 0, \quad (29)$$

где значок  $\dot{g}_s$  означает, что производная по времени берется при постоянных  $g_s$ . Общим решением этого уравнения, а следовательно, и уравнения (25) будет произвольная функция от переменных  $g_s$ :

$$\Omega = \Omega(g_1, g_2, \dots, g_s, \dots), \quad (30)$$

где в случае уравнения (25) под переменными  $g_s$  надо понимать их выражения через величины  $y_r$

$$g_s = \sum_r \bar{Y}_{rs} y_r. \quad (31)$$



Общим решением уравнения (28) будет выражение, комплексно сопряженное к (30).

Результаты этого параграфа можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** Статистическое волновое уравнение Дирака в пространстве Гильберта с координатами  $y_r$  является уравнением в частных производных, сопряженным к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (20) теоремы 1. Его общим решением будет произвольная функция от коэффициентов разложения по основной системе функций.

§ 5. Как мы уже упоминали в § 2, физический смысл имеют не сами коэффициенты разложения  $y_s$ , а их квадраты модуля  $|\bar{y}_s|^2 = \bar{y}_s y_s$  (вероятное число систем в состоянии  $s$ ). Введем поэтому с помощью канонического преобразования такие новые переменные  $n_s$  и  $\theta_s$ , чтобы в пространстве  $n_s$  оператор

$$\bar{y}_s y_s \rightarrow \bar{y}_s \frac{\partial}{\partial y_s} \rightarrow n_s \quad (32)$$

означал бы простое умножение на целое неотрицательное число  $n_s$ . Таким каноническим преобразованием будет

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_s &= \frac{\Phi(n_s)}{\Phi(n_s-1)} e^{\frac{i}{\hbar} \theta_s} = e^{\frac{i}{\hbar} \theta_s} \frac{\Phi(n_s+1)}{\Phi(n_s)} \\ y_s &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}_s} = \frac{(n_s+1) \Phi(n_s)}{\Phi(n_s+1)} e^{-\frac{i}{\hbar} \theta_s} = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta_s} \frac{n_s \Phi(n_s-1)}{\Phi(n_s)} \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

где  $\Phi(n)$  есть произвольная функция целого числа  $n$ , относительно которой мы потребуем, чтобы при  $n=0$  она равнялась единице, а для отрицательных  $n$  обращалась в бесконечность<sup>1</sup>

$$\Phi(0) = 1; \quad \frac{1}{\Phi(-k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (34)$$

Величины  $\theta_s$  должны рассматриваться здесь как канонические координаты, а величины  $n_s$  — как импульсы. Смысл  $\theta_s$  будет тогда такой:

$$\theta_s \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial n_s},$$

и оператор

$$e^{\frac{i}{\hbar} \theta_s} = e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}}$$

<sup>1</sup> В оригинальном тексте вид функции  $\Phi(n)$  связывался с видом статистики, тогда как на самом деле он связан с условием нормировки; см. ниже формулу (\*). В настоящем издании эта ошибка исправлена (В. Ф.).

будет обозначать „уменьшение числа  $n_s$  на единицу“, тогда как оператор

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \theta_s} = e^{\frac{\partial}{\partial n_s}}$$

обозначает „увеличение числа  $n_s$  на единицу“.

Формулы преобразования можно также записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_s &= \Phi(n_s) e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}} \frac{1}{\Phi(n_s)} \\ y_s &= \frac{\partial}{\partial y_s} = \frac{\Phi(n_s)}{n_s!} e^{\frac{\partial}{\partial n_s}} \frac{n_s!}{\Phi(n_s)} \end{aligned} \right\} \quad (33^*)$$

Мы должны потребовать, чтобы оператор  $y_s$  был сопряженным с  $\bar{y}_s$ . Это дает

$$|\Phi(n)|^2 = n!$$

Считая функцию  $\Phi(n)$  вещественной, мы можем положить

$$\Phi(n) = \sqrt{\Gamma(n+1)} = \sqrt{n!} \quad (35)$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям (34). Подставляя (35) в (33), получаем преобразование, использованное Дираком, а именно

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_s &= \sqrt{n_s} e^{\frac{i}{\hbar} \theta_s} = e^{\frac{i}{\hbar} \theta_s} \sqrt{n_s + 1} \\ y_s &= \sqrt{n_s + 1} e^{-\frac{i}{\hbar} \theta_s} = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta_s} \sqrt{n_s} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_s &= \sqrt{n_s} e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}} = e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}} \sqrt{n_s + 1} \\ y_s &= \sqrt{n_s + 1} e^{\frac{\partial}{\partial n_s}} = e^{\frac{\partial}{\partial n_s}} \sqrt{n_s} \end{aligned} \right\} \quad (36^*)$$

Мы должны еще показать, что преобразование (33) или (36) действительно каноническое, т. е. что выполняются перестановочные соотношения между операторами  $\bar{y}_s$  и  $\frac{\partial}{\partial y_s}$ , которые имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_s} \bar{y}_r - \bar{y}_r \frac{\partial}{\partial y_s} &= \delta_{rs} \\ \frac{\partial}{\partial y_s} \frac{\partial}{\partial y_r} - \frac{\partial}{\partial y_r} \frac{\partial}{\partial y_s} &= 0 \\ \bar{y}_s \bar{y}_r - \bar{y}_r \bar{y}_s &= 0; \quad y_s y_r - y_r y_s = 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Первое из этих соотношений следует при  $r = s$  из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial y_s} \bar{y}_s = n_s + 1; \quad \bar{y}_s \frac{\partial}{\partial y_s} = n_s, \quad (37^*)$$

которые выводятся из (33), а при  $r \neq s$ , оно очевидно. Остальные соотношения также очевидно выполняются. Таким образом, преобразование (33) или (36) является каноническим.

§ 6. Мы должны теперь исследовать даваемый формулами (33) и (36) переход от гильбертова пространства переменных  $y_r$  к дираковскому пространству переменных  $n_r$ . Рассмотрим сперва случай одной переменной  $y_r$ , которую обозначим через  $z$ .

Функции  $F(z)$  от переменной  $z$  в пространстве Гильберта соответствует функция  $c(n)$  от целого числа  $n$  в пространстве Дирака. Согласно общей теории представлений Дирака, переход от  $F(z)$  к  $c(n)$  осуществляется посредством полной системы функций  $f(n, z)$ , а именно

$$F(z) = \sum_n c(n) f(n, z). \quad (38)$$

Прежде чем идти дальше, напомним, что вид (35) функции  $\Phi(n)$  был определен нами из требования, чтобы оба оператора (33) были друг к другу сопряженными. Но вид условия сопряженности операторов зависит от вида весовой функции в условии нормировки. Следовательно, функция  $\Phi(n)$  связана с весовой функцией. А именно, произвольной функции  $\Phi(n)$  соответствует условие нормировки

$$\sum_n \frac{n!}{|\Phi(n)|^2} |c(n)|^2 = 1, \quad (*)$$

таким образом, требование (35) означает, что условие нормировки имеет обычный вид

$$\sum_n |c(n)|^2 = 1. \quad (**)$$

В рассуждениях этого параграфа мы сохраним  $\Phi(n)$  произвольным и положим  $\Phi(n) = \sqrt{n!}$  лишь в окончательных формулах.<sup>1</sup>

Уравнения (33), которые определяют рассматриваемое преобразование, мы запишем в виде

$$\begin{aligned} z \rightarrow S &= \frac{\Phi(n)}{\Phi(n-1)} e^{-\frac{\partial}{\partial n}}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow T &= \frac{(n+1)\Phi(n)}{\Phi(n+1)} e^{\frac{\partial}{\partial n}}. \end{aligned} \quad (39)$$

<sup>1</sup> Текст между формулами (38) и (39) добавлен в настоящем издании (В. Ф.).

Они означают, что результат действия оператора  $z$  (или  $\frac{\partial}{\partial z}$ ) на левую часть  $F(z)$  формулы (38) можно разложить по функциям  $f(n, z)$ , причем коэффициентами разложения будут результаты  $Sc(n)$  (или  $Tc(n)$ ) действия оператора  $S$  (или  $T$ ) на функцию  $c(n)$ . Таким образом,

$$zF(z) = \sum_n [Sc(n)] f(n, z), \quad (40)$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \sum_n [Tc(n)] f(n, z), \quad (41)$$

где, согласно формулам (39), коэффициенты  $Sc(n)$  и  $Tc(n)$  имеют следующие значения:

$$Sc(n) = \frac{\Phi(n)}{\Phi(n-1)} c(n-1), \quad (42)$$

$$Tc(n) = \frac{(n+1)\Phi(n)}{\Phi(n+1)} c(n+1). \quad (43)$$

Заменяя в формуле (40)  $n$  на  $n+1$ , а в формуле (41)  $n$  на  $n-1$ , можно записать эти формулы в виде:

$$zF(z) = \sum_n \frac{\Phi(n+1)}{\Phi(n)} c(n) f(n+1, z), \quad (44)$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \sum_n \frac{n\Phi(n-1)}{\Phi(n)} c(n) f(n-1, z). \quad (45)$$

С другой стороны, мы можем прямо взять разложение (38) и помножить его на  $z$  или продифференцировать по  $z$ . Тогда получим

$$zF(z) = \sum_n c(n) z f(n, z), \quad (46)$$

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \sum_n c(n) \frac{f(n, z)}{z}. \quad (47)$$

Выражения (44) и (46), а также (45) и (47) должны быть равны между собой и притом тождественно относительно функции  $F(z)$ , а следовательно, и относительно  $c(n)$ , т. е. почленно. Для этого функция  $f(n, z)$  должна удовлетворять следующим функциональным уравнениям

$$zf(n, z) = \frac{\Phi(n+1)}{\Phi(n)} f(n+1, z), \quad (48)$$

$$\frac{\partial f(n, z)}{\partial z} = \frac{n\Phi(n-1)}{\Phi(n)} f(n-1, z). \quad (49)$$

Умножая обе части (49) на  $z$  и выражая произведение

$zf(n-1, z)$  по формуле (48) через  $f(n, z)$ , получим

$$z \frac{\partial f(n, z)}{\partial z} = nf(n, z) \quad (50)$$

— дифференциальное уравнение, справедливость которого можно было бы усмотреть и непосредственно из (37\*). Его решением будет

$$f(n, z) = f(n) z^n. \quad (51)$$

Подставляя выражение (51) в формулу (48), получим

$$f(n) \Phi(n) = f(n+1) \Phi(n+1). \quad (52)$$

Таким образом, величина (52) не зависит от  $n$ ; можно положить ее равной единице.

Итак, мы определили функцию  $f(n, z)$  с точностью до множителя, не зависящего от  $n$  и от  $z$

$$f(n, z) = \frac{z^n}{\Phi(n)}. \quad (53)$$

При обычном условии нормировки (\*\*\*) будет  $\Phi(n) = \sqrt{n!}$  и, следовательно,

$$f(n, z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}. \quad (53^*)$$

Переход ко многим переменным получается без всякого труда; собственные функции являются произведениями собственных функций одной переменной. Мы выпишем лишь окончательную формулу для канонического преобразования функции  $\bar{\Omega}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots)$  в гильбертовом пространстве в функцию  $\psi(n_1, n_2, \dots)$  в пространстве Дирака

$$\bar{\Omega}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \psi(n_1, n_2, \dots) \frac{\bar{y}_1^{n_1} \bar{y}_2^{n_2} \dots}{\Phi(n_1) \Phi(n_2) \dots} \quad (54)$$

или, при обычном условии нормировки для  $\psi$ ,

$$\bar{\Omega}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \psi(n_1, n_2, \dots) \frac{\bar{y}_1^{n_1} \bar{y}_2^{n_2} \dots}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!} \dots}. \quad (54^*)$$

§ 7. Рассмотренная в последних двух параграфах теория канонического преобразования (33) или (36) позволяет нам не только установить вид волнового уравнения в пространстве Дирака, но и сразу получить его решение, если известно решение волнового уравнения в гильбертовом пространстве. Преобразование самого уравнения, в сущности, не нужно; тем не менее мы его проведем, чтобы облегчить сравнение с формулами Дирака.

В формуле (21) для функции Гамильтона мы должны заменить операторы  $\bar{y}_s$  и  $y_r = \frac{\partial}{\partial \bar{y}_r}$  их выражениями согласно (33) или (36). Мы получим

$$F = \sum_s K_{ss} n_s + \sum_{r \neq s} K_{rs} \frac{\Phi(n_r) \Phi(n_s) (n_s + 1)}{\Phi(n_r - 1) \Phi(n_s + 1)} e^{\frac{i}{\hbar} (\theta_r - \theta_s)} \quad (55)$$

и при обычном условии нормировки, когда  $\Phi(n) = \sqrt{n!}$ ,

$$F = \sum_s K_{ss} n_s + \sum_{r \neq s} K_{rs} \sqrt{n_r} \sqrt{n_s + 1} e^{\frac{i}{\hbar} (\theta_r - \theta_s)}. \quad (55^*)$$

Обозначим волновую функцию в пространстве Дирака через  $\psi(n_1, n_2, \dots)$ . Эта функция удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(n_1, n_2, \dots) + F \psi(n_1, n_2, \dots) = 0. \quad (56)$$

В явной форме это уравнение напишется

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(n_1, n_2, \dots) + \sum_s K_{ss} n_s \psi(n_1, n_2, \dots) + \\ & + \sum_{r \neq s} K_{rs} \frac{\Phi(n_r) \Phi(n_s) (n_s + 1)}{\Phi(n_r - 1) \Phi(n_s + 1)} \psi(n_1, \dots, n_r - 1, \dots, n_s + 1, \dots) = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Если функция  $\psi(n_1, n_2, \dots)$  нормирована по формуле

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} |\psi(n_1, n_2, \dots)|^2 = \text{const}, \quad (58)$$

то будет  $\Phi(n) = \sqrt{n!}$  и уравнение (57) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(n_1, n_2, \dots) + \sum_s K_{ss} n_s \psi(n_1, n_2, \dots) + \\ & + \sum_{r \neq s} K_{rs} \sqrt{n_r} \sqrt{n_s + 1} \psi(n_1, \dots, n_r - 1, \dots, n_s + 1, \dots). \end{aligned} \quad (57^*)$$

Решение этого уравнения нам уже известно:  $\psi(n_1, n_2, \dots)$  будет коэффициентом разложения в формуле (54) или (54\*), если  $\bar{Q}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (28). В этом можно убедиться и непосредственно, если подставить выражение (54) или (54\*) в дифференциальное уравнение и приравнять нулю коэффициенты при всевозможных произведениях степеней  $\bar{y}_s$ ; при этом получится в точности уравнение (57) и соответственно (57\*).

§ 9.<sup>1</sup> Теперь мы в состоянии сформулировать статистическую задачу в общем виде и указать ее решение.

Рассмотрим две механические величины  $a$  и  $b$  с операторами  $A$  и  $B$  и (дискретными) собственными значениями  $\alpha_s$  и  $\beta_s$ . Пусть в момент  $t = 0$  заданы амплитуды вероятности

$$\psi_0^{(a)}(n_1, n_2, \dots) \quad (59)$$

для распределения систем по состояниям оператора  $A$ . Требуется вычислить амплитуды вероятности

$$\psi_t^{(b)}(n_1, n_2, \dots) \quad (60)$$

для распределения систем по состояниям оператора  $B$  в момент  $t$ .

Задача, рассмотренная Дираком, получится, если принять, что операторы  $A$  и  $B$  совпадают и равны оператору энергии невозмущенной системы. Решение данной задачи можно получить следующим путем.

Построим, как указано в § 1, основную систему функций, которые при  $t = 0$  переходят в собственные функции оператора  $A$ . Рассмотрим также собственные функции оператора  $B$ . С помощью этих систем функций составим по формуле (14) матрицу  $Y_{rs}$ .

Используя величины, сопряженные заданным амплитудам вероятности (59), и вводя произвольные параметры  $g_1, g_2, \dots$ , образуем производящую функцию

$$\Omega^0(g_1, g_2, \dots) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \bar{\psi}_0^{(a)}(n_1, n_2, \dots) \frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!} \dots}, \quad (61)$$

где суммирование распространяется на все неотрицательные значения  $n_1, n_2, \dots$ , удовлетворяющие условию

$$n_1 + n_2 + \dots = N \text{ (число систем)}. \quad (62)$$

Функция  $\Omega^0$  является, таким образом, однородной функцией  $N$ -ой степени относительно параметров  $g_s$ . Заменим теперь входящие в  $\Omega^0$  параметры  $g_s$  линейными формами

$$g_s = \sum_r \bar{Y}_{rs} y_r, \quad (63)$$

где  $y_r$  — новые параметры. Полученную таким путем функцию от  $y_r$  мы обозначим через  $\Omega$ , так что

$$\Omega(y_1, y_2, \dots) = \Omega^0(g_1, g_2, \dots). \quad (64)$$

<sup>1</sup> § 8, содержащий попытку применения теории к статистике Ферми, здесь опущен, а § 9 несколько сокращен. (В. Ф.).

Эта функция  $\Omega$  удовлетворяет волновому уравнению (27) в гильбертовом пространстве. Разложим  $\Omega$  по степеням  $y_s$  и запишем разложение в виде

$$\Omega(y_1, y_2, \dots) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \bar{\psi}_t^{(\beta)}(n_1, n_2, \dots) \frac{y_1^{n_1} y_2^{n_2} \dots}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!} \dots}. \quad (65)$$

Тогда сопряженные с коэффициентами разложения величины  $\bar{\psi}_t^{(\beta)}(n_1, n_2, \dots)$  удовлетворяют волновому уравнению в пространстве Дирака и являются искомыми амплитудами вероятности.

§ 10. Рассмотрим теперь частные случаи общей задачи. Пусть оператор  $A$  есть оператор энергии в момент  $t=0$ , а  $B$  есть оператор энергии в момент  $t$

$$\begin{aligned} A &= H(0); \\ B &= H(t). \end{aligned} \quad (66)$$

В этом случае функции  $\psi_s(q, t)$  и  $\varphi_s(q, t)$  в момент  $t=0$  совпадают

$$\psi_s(q, 0) = \varphi_s(q, 0) \quad (67)$$

и матричный элемент  $Y_{rs}$  обращается при  $t=0$  в  $\delta_{rs}$ , так что тогда величины  $y_s$  совпадают с  $g_s$

$$\begin{aligned} y_s(0) &= g_s; \\ Y_{rs}(0) &= \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (68)$$

Начальными значениями коэффициентов  $\bar{\psi}_t^{(\beta)}(n_1, n_2, \dots)$  разложения (65) будут величины  $\bar{\psi}_0^{(\alpha)}(n_1, n_2, \dots)$  из формулы (61); таким образом, описанный в § 9 метод позволяет построить решение уравнения Дирака по заданным начальным условиям.

Рассмотрим теперь случай, когда множество систем приводится к одной единственной системе, которая при  $t=0$  находится в состоянии  $s$ . Тогда производящая функция  $\Omega^0$  равна

$$\Omega^0(g_1, g_2, \dots) = g_s \quad (69)$$

и функция  $\Omega(y_1, y_2, \dots)$  имеет вид

$$\Omega(y_1, y_2, \dots) = \sum_r \bar{Y}_{rs} y_r. \quad (70)$$

Сопоставляя эту формулу с (65), получим

$$\bar{\psi}_t(0, 0, \dots, \overset{(r)}{1}, 0, \dots) = \bar{Y}_{rs} \quad (71)$$

(в левой части единица стоит на  $r$ -том месте). Квадрат модуля этой величины

$$|\bar{\psi}_t|^2 = |Y_{rs}|^2 \quad (72)$$



есть вероятность того, что в момент времени  $t$  в состоянии  $r$  находится одна система (в данном случае единственная). Другими словами,  $|\psi_t|^2$  есть вероятность перехода из состояния  $s$  в состояние  $r$ , что совпадает с определением этой величины данным Борном.<sup>1</sup>

В качестве следующего примера рассмотрим совокупность  $N$  систем, находившихся в момент  $t=0$  в одном и том же состоянии. Тогда функции  $\Omega^0$  и  $\Omega$  будут

$$\left. \begin{aligned} \Omega^0 &= \frac{(g_s)^N}{\sqrt{N!}} \\ \Omega &= \frac{\left(\sum_r \bar{Y}_{rs} y_r\right)^N}{\sqrt{N!}} \end{aligned} \right\}. \quad (73)$$

Амплитуда вероятности  $\bar{\psi}_t(n_1, n_2, \dots)$  для распределения  $(n_1, n_2, \dots)$  в момент  $t$  будет

$$\bar{\psi}_t(n_1, n_2, \dots) = \frac{\sqrt{N!}}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!} \dots} Y_{1s}^{n_1} Y_{2s}^{n_2} \dots \quad (74)$$

Квадрат модуля этой величины, который дает вероятность данного распределения, равен

$$|\psi_t(n_1, n_2, \dots)|^2 = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} |Y_{1s}|^{2n_1} |Y_{2s}|^{2n_2} \dots \quad (75)$$

Поскольку величины  $|Y_{rs}|^2$  дают нам вероятности для одной системы (см. формулу 72), данное выражение, соответствующее бозе-эйнштейновской статистике, совпадает с тем, которое можно вычислить по обычной теории вероятности.

<sup>1</sup> М. Борн. Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik. Zs. f. Phys., 40, 107 (1926).

# КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО И ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ <sup>1</sup>

В. Фок

Исследуется связь между методом квантованной волновой функции и методом волновых функций в конфигурационном пространстве. Операторы вторичного квантования представлены в последовательности конфигурационных пространств одной, двух и т. д. частиц. Полученное представление позволяет дать простой вывод уравнений Хартри с обменом <sup>2</sup>

Тот факт, что метод квантованной волновой функции эквивалентен методу обычных волновых функций в конфигурационном пространстве, в принципе известен; однако тесная связь между обоими методами не была должным образом отмечена. В предлагаемой работе эта связь прослежена подробно. Оказывается, она настолько тесна, что в каждой стадии вычисления с квантованной волновой функцией допускает прямой переход к конфигурационному пространству.

Настоящая работа содержит две части. Первая часть имеет вводный характер и содержит вывод и сопоставление известных результатов. Здесь рассматривается переход от конфигурационного пространства к вторичному квантованию для случая статистик Бозе и Ферми, причем особенно подчеркивается однозначность определения порядка некоммутирующих множителей. Исходным пунктом рассмотрения второй части являются перестановочные соотношения между квантованными волновыми функциями (операторами  $\Psi$ ). Показано, что эти соотношения удовлетворяются некоторыми операторами, действующими на последовательность обыкновенных волновых функций  $1, 2, \dots, n$  частиц. Тем самым получается представление операторов  $\Psi$  в конфигурационном пространстве (точнее в последовательности конфигурационных пространств). Далее рассматривается зависимость операторов  $\Psi$  от времени и определяется вид оператора  $\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ . На основе полученного представления показано, что

<sup>1</sup> Впервые опубликовано в 1932 г. V. Fock. Konfigurationsraum und zweite Quantelung. Zs. f. Phys., 75, 622—647 (1932).

<sup>2</sup> Содержание этой работы доложено на теоретическом семинаре Ленинградского Университета в январе 1931 г.

содержащее производную по времени уравнение Шредингера для оператора  $\Psi$  может быть записано в виде совокупности обыкновенных уравнений Шредингера для 1, 2, ...  $n$  частиц. В качестве применения полученного представления дается простой вывод уравнений Хартри с обменом.

## 1. ПЕРЕХОД ОТ КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА К ВТОРИЧНОМУ КВАНТОВАНИЮ<sup>1</sup>

Обозначим через  $x_r$  совокупность переменных  $r$ -той частицы (например, координаты и спин электрона,  $x_r = (x_r, y_r, z_r, \sigma_r)$ ) и рассмотрим волновую функцию

$$\psi(x_1 x_2 \dots x_n; t), \quad (1)$$

которая описывает совокупность  $n$  одинаковых частиц в конфигурационном пространстве. Для удобства перейдем посредством канонического преобразования от первоначальной переменной  $x$  к новой переменной  $E$ , принимающей только дискретные значения

$$E = E^{(1)}, E^{(2)}, \dots E^{(r)}, \dots \quad (2)$$

Под величинами (2) можно разумеать собственные значения оператора с дискретным спектром. Если обозначить соответствующие собственные функции через

$$\psi_r(x) = \psi(E^{(r)}, x), \quad (3)$$

то преобразованная волновая функция

$$c(E_1, E_2, \dots, E_n; t) \quad (4)$$

связана с первоначальной волновой функцией (1) соотношением

$$\begin{aligned} & \psi(x_1 x_2, \dots, x_n; t) = \\ & = \sum_{E_1, \dots, E_n} c(E_1, E_2, \dots, E_n; t) \psi(E_1; x_1) \dots \psi(E_n; x_n), \end{aligned} \quad (5)$$

где каждая переменная суммирования  $E_1, E_2, \dots, E_n$  пробегает все значения (2).

Уравнение Шредингера в конфигурационном пространстве напишется<sup>2</sup>

$$H\psi(x_1 \dots x_n; t) - i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Положим, что оператор энергии  $H$  имеет вид

$$H = \sum_{k=1}^n H(x_k) + \sum_{k < l=1}^n G(x_k; x_l). \quad (7)$$

<sup>1</sup> Читатель, знакомый с теорией вторичного квантования, может эту первую часть пропустить и начать чтение сразу со второй части.

<sup>2</sup> Через  $\hbar$  здесь обозначена постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ .

Здесь простая сумма дает энергию отдельных частиц, а двойная сумма — энергию их взаимодействия. В случае Кулоновских сил

$$G(x, x') = \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (8)$$

Чтобы получить уравнение Шредингера для преобразованной волновой функции (4), нужно подставить разложение (5) в уравнение (6), разложить результат по произведениям

$$\psi(E_1; x_1) \dots \psi(E_n; x_n)$$

функций (3) и приравнять нулю коэффициенты при каждом произведении. Таким путем получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_W (E_k | H | W) c(E_1 \dots E_{k-1} W E_{k+1} \dots E_n; t) + \\ & + \sum_{k < l=1}^n \sum_{WW'} (E_k E_l | G | WW') c(E_1 \dots E_{k-1} W E_{k+1} \dots \\ & \dots E_{l-1} W' E_{l+1} \dots E_n; t) - ih \frac{\partial}{\partial t} c(E_1 E_2 \dots E_n; t) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены следующие обозначения для матричных элементов

$$(E | H | W) = \int \bar{\psi}(E; x) H(x) \psi(W; x) dx, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (EE' | G | WW') = \\ & = \iint \bar{\psi}(E; x) \bar{\psi}(E'; x') G(x, x') \psi(W; x) \psi(W'; x') dx dx'. \end{aligned} \quad (10^*)$$

Пусть аргументы

$$E_1, E_2, \dots, E_k, \dots, E_n$$

волновой функции  $c$  в уравнении (9) равны соответственно собственным значениям

$$E^{(r_1)}, E^{(r_2)}, \dots, E^{(r_k)}, \dots, E^{(r_n)}.$$

Если писать для краткости

$$(r | H | s) \text{ вместо } (E^{(r)} | H | E^{(s)}),$$

$$(rt | G | su) \text{ вместо } (E^{(r)} E^{(t)} | G | E^{(s)} E^{(u)}),$$

$$c(r_1, r_2 \dots r_n; t) \text{ вместо } c(E^{(r_1)} E^{(r_2)} \dots E^{(r_n)}; t),$$

то волновое уравнение (9) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_r \sum_{k=1}^n (r_k | H | r) c(r_1 \dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots r_n; t) + \\ & + \sum_{rs} \sum_{k < l=1}^n (r_k r_l | G | rs) c(r_1 \dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots r_n; t) - \\ & - ih \frac{\partial}{\partial t} c(r_1 \dots r_n; t) = 0. \end{aligned} \quad (9^*)$$

До сих пор мы не принимали во внимание свойств симметрии волновой функции (следовательно и вида статистики). Но волновая функция (как  $\psi$ , так и  $c$ ) либо симметрична (статистика Бозе), либо антисимметрична (статистика Ферми). В случае симметричной волновой функции значение  $c(r_1, r_2 \dots r_n; t)$  определяется заданием чисел

$$n_1, n_2, \dots, n_r, \quad (11)$$

которые указывают, сколько раз соответствующие аргументы  $1, 2, \dots, r$ , или  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(r)}$ , встречаются в  $c$ . Поэтому мы можем положить

$$c(r_1 r_2 \dots r_n; t) = c^*(n_1 n_2 \dots; t). \quad (12)$$

Каждому ряду чисел (11) соответствует теперь совокупность значений  $r_1, r_2, \dots, r_n$  (определенная независимо от порядка расположения этих последних). Мы имеем, например (для  $n = 3$ ):  $c(4, 4, 5) = c(4, 5, 4) = c(5, 4, 4) = c^*(0, 0, 0, 2, 1, 0, 0 \dots)$ .

В нормировочном условии

$$\sum_{r_1, \dots, r_n} |c(r_1 r_2 \dots r_n; t)|^2 = 1 \quad (13)$$

можно произвести суммирование сначала по всем перестановкам чисел данного набора значений  $r_1 r_2 \dots r_n$ , а затем по различным наборам

$$\sum_{(r_1 \dots r_n)} \sum_{\text{Perm}} |c(r_1 r_2 \dots r_n; t)|^2 = 1.$$

Сумма  $\sum_{\text{Perm}}$  содержит  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$  одинаковых членов; следовательно, мы имеем

$$\sum_{(r_1 \dots r_n)} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots} |c(r_1 r_2 \dots r_n; t)|^2 = 1$$

или, введя согласно (12) в качестве переменных величины  $n_r$ ,

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots} |c^*(n_1 n_2 \dots; t)|^2 = 1. \quad (14)$$

В нормировочном условии (14) весовую функцию  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$  можно свести к единице подстановкой

$$c^*(n_1 n_2 \dots; t) = \sqrt{\frac{n_1! n_2! \dots}{n!}} f(n_1 n_2 \dots; t). \quad (15)$$

Для новой волновой функции  $f$  нормировочное условие принимает вид

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} |f(n_1 n_2 \dots; t)|^2 = 1. \quad (16)$$

В случае статистики Ферми задания чисел  $n_r$  еще недостаточно для однозначного определения  $c(r_1 r_2 \dots; t)$ , так как величина  $c$  определяется им лишь с точностью до знака. Однако мы можем сохранить уравнения (12) и (15) и для статистики Ферми, если введем добавочное условие, что в этом случае аргументы в  $c(r_1 r_2 \dots; t)$  образуют „натуральную“ последовательность, например:

$$r_1 < r_2 < r_3 \dots < r_n.$$

Если последовательность аргументов получается из натуральной посредством четной перестановки, то уравнение (12) остается неизменным; для нечетной перестановки в нем должен быть изменен знак, например:

$$c(1, 4, 5) = -c(4, 1, 5) = c^*(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \dots).$$

В дальнейшем статистика Бозе и статистика Ферми будут рассматриваться раздельно.

### Статистика Бозе

В случае статистики Бозе в волновой функции  $c(r_1 r_2 \dots; t)$  может встретиться несколько одинаковых аргументов, например:

$$c = c(u, u, u, v, v, w, \dots).$$

В выражении (9\*) могут поэтому появиться в первой сумме функции, которые различаются только порядком аргументов, а именно может встретиться  $n_u$  слагаемых, в которых аргумент  $r$  стоит на месте  $u$ ,  $n_v$  слагаемых с  $r$  на месте  $v$  и т. д. Если собрать одинаковые слагаемые, то для первой суммы в (9\*) мы получим выражение

$$\begin{aligned} & \sum_r (u | H | r) n_u c(r, u, u, v, v, w, \dots) + \\ & + \sum_r (v | H | r) n_v c(u, u, u, r, v, w, \dots) + \dots \end{aligned}$$

Введя здесь согласно (12) в качестве переменных величины  $n_k$ , получим

$$\begin{aligned} & \sum_r (u | H | r) n_u c^*(\dots n_u - 1, \dots n_r + 1, \dots) + \\ & + \sum_r (v | H | r) n_v c^*(\dots n_v - 1, \dots n_r + 1, \dots) + \dots \end{aligned}$$

или проще

$$\sum_p \sum_r (p | H | r) n_p c^*(\dots n_p - 1, \dots n_r + 1, \dots), \quad (17)$$

где индекс  $p$  может теперь пробегать уже все значения (а не только значения  $p = u, v, w, \dots$ ), так как лишние члены исчезают благодаря множителю  $n_p$ . При этом для  $r = p$  под вели-

чиной  $c^*(\dots n_p - 1, \dots n_r + 1, \dots)$  должно понимать просто  $c^*(\dots n_r \dots)$ .

Аналогично можно преобразовать и вторую сумму выражения (9\*). Учитывая число одинаковых слагаемых, мы получим:

$$\sum_{r,s} \left\{ (uu | G | rs) \frac{1}{2} n_u (n_u - 1) c(r, s, u, v, w, \dots) + \right. \\ \left. + (uv | G | rs) n_u n_v c(r, u, u, s, v, w, \dots) + \right. \\ \left. + (vv | G | rs) \frac{1}{2} n_v (n_v - 1) c(u, u, u, r, s, w, \dots) + \dots \right\}.$$

Вводя величины  $c^*(n_1 n_2 \dots)$ , можем написать

$$\sum_{r,s} \left\{ (uu | G | rs) \frac{1}{2} n_u (n_u - 1) c^*(\dots n_u - 2, \dots n_r + 1, \dots n_s + 1, \dots) + \right. \\ \left. + (uv | G | rs) n_u n_v c^*(\dots n_u - 1, \dots n_v - 1, \dots n_r + 1, \dots n_s + 1, \dots) + \right. \\ \left. + (vv | G | rs) \frac{1}{2} n_v (n_v - 1) \times \right. \\ \left. \times c^*(\dots n_v - 2, \dots n_r + 1, \dots n_s + 1, \dots) + \dots \right\}$$

или проще

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q} \sum_{r,s} (pq | G | rs) n_p (n_q - \delta_{pq}) \times \\ \times c^*(\dots n_p - 1, \dots n_q - 1, \dots n_r + 1, \dots n_s + 1, \dots). \quad (18)$$

Здесь индексы суммирования  $p$  и  $q$  также могут пробегать все значения без исключений (а не только  $p, q = u, v, w$ ).

Множитель  $\frac{1}{2}$  должен стоять при *всех* слагаемых, так как

в (18) встречается, например, комбинация  $p = u, q = v$  и комбинация  $p = v, q = u$ ; смысл членов в (18), в которых два или несколько чисел  $p, q, r, s$  совпадают, ясен сам собой.

С помощью (17) и (18) уравнение (9\*) может быть написано в виде

$$\sum_p \sum_r (p | H | r) n_p c^*(\dots n_p - 1, \dots n_r + 1, \dots) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{pq} \sum_{rs} (pq | G | rs) n_p (n_q - \delta_{pq}) \times \\ \times c^*(\dots n_p - 1, \dots n_q - 1, \dots n_r + 1, \dots n_s + 1, \dots) - \\ - i\hbar \frac{\partial c^*(n_1 n_2 \dots; t)}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

Для дальнейшего целесообразно ввести оператор  $U_r$ , который превращает функцию  $f(n_1, n_2, \dots)$  в функцию

$$U_r f(n_1 n_2 \dots n_r \dots) = f(n_1 n_2 \dots n_r + 1, \dots). \quad (20)$$

Величина  $U_r$ , рассматриваемая как матрица относительно переменной  $n_r$ , и сопряженная с ней матрица  $U_r^+$ , имеют вид

$$U_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad U_r^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Следовательно, сопряженный оператор  $U_r^+$  функцию  $f(n_1 n_2 \dots \dots n_r \dots)$  превращает в  $f''$ , где  $f''(n_1 n_2 \dots n_r \dots) = f(n_1 n_2 \dots \dots n_r - 1 \dots)$  в случае  $n_r \neq 0$  и  $f'' = 0$  при  $n_r = 0$ . Итак,

$$\left. \begin{aligned} U_r^+ f(n_1 n_2 \dots n_r \dots) &= f(n_1 n_2 \dots n_r - 1, \dots) \text{ при } n_r \neq 0, \\ &= 0 \text{ при } n_r = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Из определения  $U_r$  следует

$$U_r U_r^+ = 1. \quad (23)$$

Напротив  $U_r^+ U_r \neq 1$ ; мы имеем:

$$U_r^+ U_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (23^*)$$

Таким образом, оператор  $U_r$  не унитарен.

При  $p \neq r$  операторы  $U_r$  и  $U_r^+$  коммутируют с  $U_p$  и  $U_p^+$ . С помощью операторов  $U_p$ , входящие в формулу (19) функции  $c^*$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} c^*(\dots n_p - 1, \dots n_r + 1 \dots) &= U_r U_p^+ c^*(\dots n_p \dots n_r \dots) \\ c^*(\dots n_p - 1, \dots n_q - 1, \dots n_r + 1, \dots n_s + 1, \dots) &= \\ &= U_r U_s U_p^+ U_q^+ c^*(\dots n_p, \dots n_q, \dots n_r, \dots n_s \dots). \end{aligned}$$

Порядок множителей ( $U^+$  справа от  $U$ ) однозначно следует из определения  $c^*$  для  $p = r$  в связи с (23) и (23\*).<sup>1</sup> Эти выражения справедливы для любых (также и совпадающих) значений  $p, q, r, s$ . Если ввести их в (19), то получается

$$\begin{aligned} &\sum_p \sum_r (p|H|r) n_p U_r U_p^+ c^*(n_1 n_2 \dots) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{pq} \sum_{rs} (pq|G|rs) n_p (n_q - \delta_{pq}) U_r U_s U_p^+ U_q^+ c^*(n_1 n_2 \dots) - \\ &- i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c^*(n_1 n_2 \dots) = 0. \end{aligned} \quad (19^*)$$

<sup>1</sup> Впрочем, после умножения на  $n_p$  и на  $n_p (n_p - \delta_{pq})$  порядок множителей  $U$  и  $U^+$  становится здесь несущественным, см. ниже формулы (23\*\*) и (23\*\*\*) (В. Ф.).



Но если учесть, что

$$n_p U_r U_p^+ = n_p U_p^+ U_r \quad (23^{**})$$

и

$$n_p (n_q - \delta_{pq}) U_r U_s U_p^+ U_q^+ = n_p (n_q - \delta_{pq}) U_p^+ U_q^+ U_s U_r, \quad (23^{***})$$

то формулу (19\*) можно написать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_p \sum_r (p|H|r) n_p U_p^+ U_r c^*(n_1 n_2 \dots) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{pq} \sum_{rs} (pq|G|rs) n_p (n_q - \delta_{pq}) U_p^+ U_q^+ U_s U_r c^*(n_1 n_2 \dots) - \\ & - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c^*(n_1 n_2 \dots) = 0. \end{aligned} \quad (19^{**})$$

Мы должны здесь еще выразить согласно (15) величину  $c^*(n_1 n_2 \dots)$  через  $f(n_1 n_2 \dots)$ . Оператор  $n$  для полного числа частиц, а следовательно, и  $n!$ , очевидно, коммутирует с произведениями  $U_p^+ U_r$  и  $U_p^+ U_q^+ U_r U_s$ ; кроме того, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} U_r \sqrt{n_1! n_2! \dots} = \sqrt{n_r + 1} U_r = U_r \sqrt{n_r} \quad (24)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} U_r^+ \sqrt{n_1! n_2! \dots} = \frac{1}{\sqrt{n_r}} U_r^+. \quad (24^*)$$

Умноженное на  $\sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}}$  слагаемое  $n_p U_p^+ U_r c^*(n_1 n_2 \dots)$  первой суммы в (19\*\*) поэтому равно

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}} n_p U_p^+ U_r \sqrt{\frac{n_1! n_2! \dots}{n!}} f(n_1 n_2 \dots) = \\ & = \sqrt{n_p} U_p^+ U_r \sqrt{n_r} f(n_1 n_2 \dots). \end{aligned}$$

Аналогично, с помощью формул (24) и соотношения

$$(n_q - \delta_{pq}) U_p^+ = U_p^+ n_q$$

для слагаемых второй суммы в (19\*\*) получаем выражение

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}} n_p (n_q - \delta_{pq}) U_p^+ U_q^+ U_r U_s \sqrt{\frac{n_1! n_2! \dots}{n!}} f(n_1 n_2 \dots) = \\ & = \sqrt{n_p} U_p^+ \sqrt{n_q} U_q^+ U_r \sqrt{n_r} U_s \sqrt{n_s} f(n_1 n_2 \dots). \end{aligned}$$

Введя эти выражения в (19\*\*), получим для  $f(n_1 n_2 \dots)$  волновое уравнение в виде

$$\mathbf{H} f(n_1 n_2 \dots) - i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (25)$$

где  $\mathbf{H}$  означает преобразованный оператор энергии

$$\mathbf{H} = \sum_{pr} (p|H|r) \sqrt{n_p} U_p^+ U_r \sqrt{n_r} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{pq} \sum_{rs} (pq | G | rs) \sqrt{n_p} U_p^+ \sqrt{n_q} U_q^+ U_r \sqrt{n_r} U_s \sqrt{n_s}. \quad (26)$$

Операторы  $U_r$  и  $n_r$  входят здесь только в комбинациях

$$b_r = U_r \sqrt{n_r}, \quad b_r^+ = \sqrt{n_r} U_r^+. \quad (27)$$

Если выражения (27) ввести в (26), то оператор  $\mathbf{H}$  принимает вид

$$\mathbf{H} = \sum_{pr} b_p^+ (p | H | r) b_r + \frac{1}{2} \sum_{pr} \sum_{qs} b_p^+ b_q^+ (pq | G | rs) b_r b_s. \quad (28)$$

Как вытекает из определений (20) и (22) операторов  $U_r$  и  $U_r^+$ , только что введенные операторы  $b_r$  удовлетворяют соотношениям

$$b_r^+ b_r = n_r, \quad b_r b_r^+ = n_r + 1 \quad (29)$$

и так как, кроме того, для  $r \neq s$  операторы  $b_r^+$  и  $b_s^+$  коммутируют с  $b_r$  и  $b_s$ , то имеют место известные перестановочные соотношения

$$b_r b_s^+ - b_s^+ b_r = \delta_{rs}, \quad (30)$$

$$b_r b_s - b_s b_r = 0. \quad (30^*)$$

Образуя с помощью  $b_r$  квантованную волновую функцию

$$\Psi(x) = \sum_r b_r \psi_r(x) \quad (31)$$

и сопряженную к ней волновую функцию

$$\Psi^+(x) = \sum_r b_r^+ \bar{\psi}_r(x), \quad (31^*)$$

Мы можем представить оператор энергии в следующей форме:

$$\mathbf{H} = \int \Psi^+(x) H(x) \Psi(x) dx + \frac{1}{2} \iint \Psi^+(x) \Psi^+(x') G(x x') \Psi(x') \Psi(x) dx dx'. \quad (32)$$

Перестановочные соотношения для квантованных волновых функций (операторов  $\Psi$ ) легко получить из соотношений (30) и (30\*), приняв во внимание равенство

$$\sum_r \bar{\psi}_r(x) \psi_r(x') = \delta(x - x').$$

Таким путем получается

$$\Psi(x') \Psi^+(x) - \Psi^+(x) \Psi(x') = \delta(x - x'), \quad (33)$$

$$\Psi(x) \Psi(x') - \Psi(x') \Psi(x) = 0. \quad (33^*)$$

## Статистика Ферми

Обратимся снова к волновому уравнению (9\*). Мы предполагаем, что числа  $r_1 r_2 r_3 r_4 \dots$  расположены в натуральном порядке

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_n, \quad (34)$$

так что согласно (12) мы имеем:

$$c(r_1 r_2 \dots r_n; t) = c^*(n_1 n_2 \dots; t). \quad (35)$$

В натуральном порядке число  $r_k$  стоит на месте номер  $k$ , где

$$k = n_1 + n_2 + \dots + n_{r_k}. \quad (36)$$

В  $k$ -том слагаемом первой суммы в (9\*)  $r_k$  заменено на  $r$ , так что аргументы в  $c$  расположены в порядке

$$r_1 r_2 \dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots r_n, \quad (*)$$

который не является натуральным:  $r$  стоит здесь на месте  $k$ , в то время как оно должно было бы стоять на месте

$$k' = n_1' + n_2' + \dots + n_r'.$$

(Штрихованные величины суть те новые значения  $n_s$ , которые соответствуют аргументам (\*) в  $c$ ). Поэтому

$$c(r_1 \dots r_{k-1} r r_{k+1} r_n; t) = (-1)^{k+k'} c^*(\dots n_{r_k} - 1, \dots n_r + 1, \dots).$$

Введем теперь операторы  $\alpha_r^+$  и  $\alpha_r$ , полагая

$$\alpha_r f(n_1 \dots n_r \dots) = \begin{cases} f(n_1 \dots n_r + 1 \dots) & \text{при } n_r = 0 \\ 0 & \text{при } n_r = 1 \end{cases} \quad (37)$$

$$\alpha_r^+ f(n_1 \dots n_r \dots) = \begin{cases} f(n_1 \dots n_r - 1 \dots) & \text{при } n_r = 1 \\ 0 & \text{при } n_r = 0. \end{cases} \quad (37^*)$$

Из этого определения следует, что для  $r \neq s$  операторы  $\alpha_r$  и  $\alpha_r^+$  коммутируют с  $\alpha_s$  и  $\alpha_s^+$  (так как они действуют на разные переменные), в то время как для  $r = s$  справедливы равенства

$$\alpha_r^+ \alpha_r = n_r, \quad \alpha_r \alpha_r^+ = 1 - n_r. \quad (38)$$

Легко доказать равенство

$$\alpha_r (1 - 2n_r) = -(1 - 2n_r) \alpha_r. \quad (39)$$

Используя операторы  $\alpha_r$ , можно написать

$$c^*(\dots n_{r_k} - 1, \dots n_r + 1, \dots) = \alpha_{r_k}^+ \alpha_r c^*(n_1 n_2 \dots).$$

Порядок множителей  $\alpha_r^+$  и  $\alpha_r$  здесь определяется однозначно, потому что для  $r = r_k$  и  $n_{r_k} = 1$  множитель перед  $c^*$  в правой

части сводится к единице, как и должно быть. Мы имеем:

$$(-1)^k = (-1)^{n_1 + \dots + n_{r_k}},$$

но так как для  $n=0$  и  $n=1$  величина  $(-1)^n$  совпадает с  $(1-2n)$ , вместо этого можно написать

$$(-1)^k = \prod_{p=1}^{r_k} (1-2n_p) = \nu_{r_k},$$

где

$$\nu_s = \prod_{p=1}^s (1-2n_p) \quad (40)$$

обозначает знаковую функцию Вигнера. Аналогично  $(-1)^{k'} = \nu_{r'}$ , где  $\nu_{r'}$  построено из чисел  $n_{r'}$ . Таким образом, имеем:

$$c(r_1 \dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots; t) = \nu_{r_k} \nu_{r'} \alpha^+_{r_k} \alpha_r c^*(n_1 n_2 \dots).$$

На основании

$$\nu_{r'} \alpha^+_{r_k} \alpha_r = \alpha^+_{r_k} \alpha_r \nu_r$$

можем также написать

$$c(r_1 r_2 \dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots; t) = \nu_{r_k} \alpha^+_{r_k} \alpha_r \nu_r c^*(n_1 n_2 \dots).$$

Тогда первая сумма в (9\*) равна

$$\sum_r \sum_{k=1}^n (r_k | H | r) \nu_{r_k} \alpha^+_{r_k} \alpha_r \nu_r c^*(n_1 n_2 \dots).$$

При суммировании по  $k$  индекс  $r_k$  пробегает здесь значения  $r_1 r_2 \dots r_n$ .

Вместо этого можно считать, что  $r_k$  пробегает *все* значения, потому что излишние слагаемые исчезают в силу свойств оператора  $\alpha^+$ . Таким образом, для рассматриваемой суммы мы получаем выражение

$$\sum_p \sum_r (p | H | r) \nu_p \alpha^+_p \alpha_r \nu_r c^*(n_1 n_2 \dots). \quad (41)$$

Преобразуем теперь вторую сумму в (9\*). Для этого нужно прежде всего определить знак в равенстве

$$\begin{aligned} & \pm c(r_1 \dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots r_n; t) = \\ & = c^*(\dots n_{r_k} - 1, \dots n_{r_l} - 1, \dots n_r + 1, \dots n_s + 1, \dots) = \\ & = c^*(n'_1, n'_2, \dots). \end{aligned}$$

В функции  $c$  аргумент  $r$  стоит на  $k$ -том месте. Сначала мы переводим его на первое место; при этом  $c$  приобретает множитель  $-(-1)^k = -\nu_{r_k}$  и мы получаем

$$\begin{aligned} & c(r_1 \dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots; t) = \\ & = -\nu_{r_k} c(r r_1 \dots r_{k-1} r_{k+1} \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots r_n; t). \end{aligned}$$

В том случае, если  $r_l > r_k$ , аргумент  $s$  остается на месте номер  $l$ , где

$$l = n_1 + n_2 \dots + n_{r_l}.$$

В случае же  $r_l < r_k$  аргумент  $s$  смещается на одно место вправо и становится, таким образом, на место номер  $l + 1$ . Если мы теперь переведем  $s$  на второе место, то получим

$$c(\dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots) = \begin{cases} -\nu_{r_k} \nu_{r_l} c(r s r_1 r_2 \dots) & \text{для } r_l > r_k \\ +\nu_{r_k} \nu_{r_l} c(r s r_1 r_2 \dots) & \text{для } r_l < r_k. \end{cases}$$

С другой стороны, если мы обозначим места  $r$  и  $s$  в натуральной последовательности через  $k'$  и  $l'$ , где

$$\begin{aligned} k' &= n_1' + n_2' + \dots + n_{r'}', \\ l' &= n_1' + n_2' + \dots + n_{s'}', \end{aligned}$$

то на основании совершенно аналогичных соображений получим

$$\begin{aligned} \overbrace{c(r_1 \dots r \dots s \dots)}^{\text{натур. послед.}} &= c^*(n_1' n_2' \dots) = \\ &= \begin{cases} -\nu_{r'} \nu_{s'} c(r s r_1 \dots) & \text{для } s > r, \\ \nu_{r'} \nu_{s'} c(r s r_1 \dots) & \text{для } s < r. \end{cases} \end{aligned}$$

Вместе с предыдущими равенствами это дает

$$\begin{aligned} c(\dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots) &= \\ \begin{cases} +\nu_{r_k} \nu_{r_l} \nu_{r'} \nu_{s'} c(n_1' n_2' \dots) & \text{в случае I,} \\ -\nu_{r_k} \nu_{r_l} \nu_{r'} \nu_{s'} c(n_1' n_2' \dots) & \text{в случае II,} \end{cases} \end{aligned}$$

где случаи I и II характеризуются неравенствами:

$$\begin{aligned} \text{или} & \left. \begin{aligned} r_l > r_k \text{ и } s > r \\ r_l < r_k \text{ и } s < r \end{aligned} \right\} \text{случай I,} \\ \text{или} & \left. \begin{aligned} r_l > r_k \text{ и } s < r \\ r_l < r_k \text{ и } s > r \end{aligned} \right\} \text{случай II.} \end{aligned}$$

Замена аргументов  $n_1 n_2 \dots$  в функции  $c^*$  на  $n_1' n_2' \dots$  производится посредством оператора  $\alpha_{r_k}^+ \alpha_{r_l}^+ \alpha_s \alpha_r$

$$c^*(n_1' n_2' \dots) = \alpha_{r_k}^+ \alpha_{r_l}^+ \alpha_s \alpha_r c^*(n_1 n_2 \dots).$$

В том, что здесь порядок множителей  $\alpha^+$  и  $\alpha$  (поскольку он имеет значение) выбран правильно, мы убеждаемся на рассмо-

трени частных случаев  $r = r_k$ ,  $s = r_l$  и  $r = r_l$ ,  $s = r_k$ . Если мы еще примем во внимание равенство

$$\nu_r' \nu_s' \alpha_{r_k}^+ \alpha_{r_l}^+ \alpha_s \alpha_r = \alpha_{r_k}^+ \alpha_{r_l}^+ \alpha_s \alpha_r \nu_r \nu_s,$$

то получим

$$\begin{aligned} & c(\dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots) = \\ & = \begin{cases} + \nu_{r_k} \nu_{r_l} \alpha_{r_k}^+ \alpha_{r_l}^+ \alpha_s \alpha_r \nu_r \nu_s c^*(n_1 n_2 \dots) & \text{в случае I,} \\ - \nu_{r_k} \nu_{r_l} \alpha_{r_k}^+ \alpha_{r_l}^+ \alpha_s \alpha_r \nu_r \nu_s c^*(n_1 n_2 \dots) & \text{в случае II.} \end{cases} \end{aligned}$$

Но из формулы (39) и из определения (40) величины  $\nu_s$  следует

$$\begin{aligned} \alpha_r \nu_s &= \nu_s \alpha_r & \text{для } r > s, \\ \alpha_r \nu_s &= -\nu_s \alpha_r & \text{для } r \leq s. \end{aligned} \quad (42)$$

Поэтому в случае I будет либо одновременно

$$\alpha_r \nu_s = \nu_s \alpha_r \quad \text{и} \quad \alpha_{r_k}^+ \nu_{r_l} = \nu_{r_l} \alpha_{r_k}^+ \quad (\text{для } r > s \text{ и } r_k > r_l),$$

либо одновременно

$$\alpha_r \nu_s = -\nu_s \alpha_r \quad \text{и} \quad \alpha_{r_k}^+ \nu_{r_l} = -\nu_{r_l} \alpha_{r_k}^+ \quad (\text{для } r \leq s \text{ и } r_k \leq r_l).$$

Следовательно, в случае I оператор, действующий на  $c^*(n_1 n_2 \dots)$ , равен

$$\nu_{r_k} \alpha_{r_k}^+ \nu_{r_l} \alpha_{r_l}^+ \alpha_s \nu_s \alpha_r \nu_r.$$

Но этот оператор тот же самый знак имеет и в случае II, потому что тогда мы имеем либо одновременно

$$\alpha_r \nu_s = \nu_s \alpha_r \quad \text{и} \quad \alpha_{r_k}^+ \nu_{r_l} = -\nu_{r_l} \alpha_{r_k}^+ \quad (\text{для } r > s, r_k < r_l),$$

либо одновременно

$$\alpha_r \nu_s = -\nu_s \alpha_r \quad \text{и} \quad \alpha_{r_k}^+ \nu_{r_l} = \nu_{r_l} \alpha_{r_k}^+ \quad (\text{для } r < s \text{ и } r_k > r_l).$$

Таким образом, всегда

$$c(\dots r_{k-1} r r_{k+1} \dots r_{l-1} s r_{l+1} \dots) = \nu_{r_k} \alpha_{r_k}^+ \nu_{r_l} \alpha_{r_l}^+ \alpha_s \nu_s \alpha_r \nu_r c^*(n_1 n_2 \dots).$$

Это выражение мы должны теперь ввести во вторую сумму в формуле (9\*). Эта сумма будет равна

$$\sum_{rs} \sum_{k < l}^n (r_k r_l | G | rs) \nu_{r_k} \alpha_{r_k}^+ \nu_{r_l} \alpha_{r_l}^+ \alpha_s \nu_s \alpha_r \nu_r c^*(n_1 n_2 \dots).$$

Если отбросить ограничение  $k < l$ , то сумма удвоится и мы должны добавить множитель  $\frac{1}{2}$ . Тогда получается

$$\frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{pq} (pq | G | rs) \nu_p \alpha_p^+ \nu_q \alpha_q^+ \alpha_s \nu_s \alpha_r \nu_r c^*(n_1 n_2 \dots). \quad (43)$$

Здесь  $p$  и  $q$  пробегает по первоначальному определению только значения  $r_1, r_2, \dots, r_n$  (причем  $p \neq q$ ). Однако можно допустить для них все значения без исключения, если учесть, что излишние слагаемые исчезают.

Подстановка выражений (35), (41) и (43) в формулу (9\*) дает волновое уравнение для волновой функции  $c^*(n_1 n_2 \dots; t)$ . Но в случае статистики Ферми эта волновая функция отличается от волновой функции  $f(n_1 n_2 \dots; t)$  уравнения (15) только множителем (а именно  $\sqrt{n!}$ ), который коммутирует с отдельными слагаемыми оператора энергии. Поэтому волновое уравнение для  $f(n_1 n_2 \dots)$  имеет тот же вид, что и для  $c^*(n_1 n_2 \dots)$ , а именно

$$\mathbf{H}f(n_1 n_2 \dots; t) - i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

где оператор энергии  $\mathbf{H}$  согласно (41) и (43) равен

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \sum_{pr} (p|H|r) \nu_p \alpha_p^+ \alpha_r \nu_r + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{pqrs} (pq|G|rs) \nu_p \alpha_p^+ \nu_q \alpha_q^+ \alpha_s \nu_s \alpha_r \nu_r. \end{aligned} \quad (44)$$

Операторы  $\alpha_r$  и  $\nu_r$  входят в оператор энергии  $\mathbf{H}$  только в комбинациях

$$\begin{aligned} a_r &= \alpha_r \nu_r, \\ a_r^+ &= \nu_r \alpha_r^+. \end{aligned} \quad (45)$$

В самом деле мы имеем

$$\mathbf{H} = \sum_{pr} a_p^+ (p|H|r) a_r + \frac{1}{2} \sum_{pqrs} a_p^+ a_q^+ (pq|G|rs) a_r a_s. \quad (44^*)$$

Как легко доказать с помощью (38) и (42), для квантованных амплитуд  $a_r$  имеют место равенства

$$a_r^+ a_r = n_r, \quad a_r a_r^+ = 1 - n_r \quad (46)$$

и перестановочные соотношения

$$a_r a_s^+ + a_s^+ a_r = \delta_{rs}, \quad (47)$$

$$a_r a_s + a_s a_r = 0. \quad (47^*)$$

С помощью „амплитуд“  $a_r$  можно построить квантованные волновые функции

$$\Psi(x) = \sum_r a_r \psi_r(x), \quad (48)$$

$$\Psi^+(x) = \sum_r a_r^+ \bar{\psi}_r(x), \quad (48^*)$$

которые удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\Psi(x') \Psi^+(x) + \Psi^+(x) \Psi(x') = \delta(x - x'), \quad (49)$$

$$\Psi(x') \Psi(x) + \Psi(x) \Psi(x') = 0. \quad (49^*)$$

Как и в случае статистики Бозе, оператор энергии может быть теперь записан в виде

$$H = \int \Psi^+(x) H(x) \Psi(x) dx + \frac{1}{2} \iint \Psi^+(x) \Psi^+(x') G(x, x') \Psi(x') \Psi(x) dx dx'. \quad (50)$$

Переход от амплитуд  $a_r$  (или, в случае статистики Бозе, от  $b_r$ ) к квантованным волновым функциям  $\Psi(x)$  представляет унитарное каноническое преобразование переменных одной частицы (переход от переменных  $E^{(r)}$  формулы (2) к переменным  $x$ ). Амплитуды  $a_r$  (или  $b_r$ ) можно с тем же правом, как и  $\Psi(x)$ , рассматривать в качестве квантованных волновых функций, а формулы (как, например, перестановочные соотношения или выражение для оператора энергии), написанные с помощью  $a_r$  (или  $b_r$ ) по существу равнозначны с теми, которые написаны с помощью  $\Psi(x)$ .

Заметим еще, что все другие операторы в конфигурационном пространстве преобразуются по образцу оператора энергии и могут быть представлены посредством квантованных волновых функций. Порядок некоммутирующих множителей получается при этом, как и в операторе энергии, вполне однозначным.

## II. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ $\Psi$ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В формулы вторичного квантования полное число частиц явно не входит; формулы эти справедливы для произвольного и даже для неопределенного  $n$ . Числу  $n$  можно сопоставить оператор

$$n = \int \Psi^+(x) \Psi(x) dx, \quad (1)$$

который имеет собственные значения  $n = 0, 1, 2, \dots$

По отношению к оператору  $n$  все операторы можно разделить на два класса: к первому классу принадлежат коммутирующие с  $n$  операторы, ко второму — не коммутирующие.

Мы займемся здесь представлением в конфигурационном пространстве операторов общего вида, не коммутирующих с  $n$ ; прежде всего представлением операторов  $\Psi(x)$ . Само собой разумеется, что результаты будут применимы также и к операторам, коммутирующим с  $n$ , поскольку они могут быть выражены через  $\Psi(x)$  и  $\Psi^+(x)$ .



Для того чтобы объединить оба вида статистики, запишем перестановочные соотношения для квантованной волновой функции в виде:

$$\Psi(x') \Psi^+(x) - \varepsilon \Psi^+(x) \Psi(x') = \delta(x - x'), \quad (2)$$

$$\Psi(x') \Psi(x) - \varepsilon \Psi(x) \Psi(x') = 0, \quad (2^*)$$

где для статистики Бозе следует положить  $\varepsilon = 1$ , а для статистики Ферми  $\varepsilon = -1$ . Из определения (1) оператора  $\mathbf{n}$  и из перестановочных соотношений (2) для обоих видов статистики следует

$$\mathbf{n}\Psi - \Psi(\mathbf{n} - 1) = 0. \quad (3)$$

Для  $\Psi(x)$  мы выбираем представление, в котором  $\mathbf{n}$  имеет диагональную форму. Если матричные элементы  $\Psi(x)$  в этом представлении обозначить через  $(n|\Psi|n')$ , то из соотношения (3) вытекают „правила отбора“

$$(n - n' + 1)(n|\Psi|n') = 0, \quad (3^*)$$

согласно которым отличны от нуля только матричные элементы вида  $(n|\Psi|n + 1)$ . Следовательно, матрица  $\Psi(x)$  имеет вид

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} 0 & (0|\Psi|1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & (1|\Psi|2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (2|\Psi|3) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Отдельному матричному элементу  $(n - 1|\Psi|n)$  можно придать смысл оператора, который действует на функцию от  $n$  переменных<sup>1</sup>  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и эту функцию переводит в функцию  $n - 1$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  и параметра  $x$ . Таким образом, оператор  $\Psi(x)$  действует на последовательность функций

$$\begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1 x_2) \\ \psi(x_1 x_2 x_3) \\ \dots \end{pmatrix} \quad (5)$$

от 0, 1, 2, 3... переменных и переводит ее в аналогичную последовательность; функции (5) могут быть истолкованы как обыкновенные шредингеровские волновые функции в конфигурационном пространстве.<sup>2</sup> Мы будем говорить, что  $\psi(x_1 x_2 \dots x_n)$

<sup>1</sup> Каждая переменная  $x_r$  есть собственно совокупность переменных, например:  $x_r, y_r, z_r, \sigma_r$ , которые описывают  $r$ -тую частицу.

<sup>2</sup> Такие последовательности функций были впервые рассмотрены Л. Ландау и Р. Пайерльсом (Zs. f. Phys., 62, 188 (1930)).

есть волновая функция в „ $n$ -том подпространстве“. Положим, что действие оператора  $(n-1|\Psi(x)|n)$  определяется равенством

$$(n-1|\Psi(x)|n)\psi(x_1x_2\dots x_n) = \sqrt{n}\psi(xx_1x_2\dots x_{n-1}) \quad (6)$$

и покажем, что при надлежащем определении сопряженного с  $\Psi(x)$  оператора  $\Psi^+(x)$  будут выполняться перестановочные соотношения (2). На основании (4) матрица  $\Psi^+(x)$  имеет вид

$$\Psi^+(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ (1|\Psi^+|0) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (2|\Psi^+|1) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (4^*)$$

где  $(n|\Psi^+|n-1)$  есть оператор, сопряженный к  $(n-1|\Psi|n)$ . Этот оператор переводит функцию от  $n-1$  переменных  $x_1x_2\dots x_{n-1}$  в функцию от  $n$  переменных  $x_1x_2\dots x_n$  и от параметра  $x$ . При этом необходимо учесть, что оператор  $(n|\Psi^+|n-1)$  не должен менять свойств симметрии волновой функции; симметричную функцию он должен переводить в симметричную же, а антисимметричную — в антисимметричную. Найдем оператор  $(n|\Psi^+|n-1)$ , определив его ядро; мы можем это сделать, если образуем ядро  $(n-1|\Psi|n)$ , а затем перейдем к сопряженному ядру.

Поскольку волновая функция либо симметрична, либо антисимметрична, вместо (6) можно также написать

$$\begin{aligned} & (n-1|\Psi|n)\psi(x_1x_2\dots x_n) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{n}} [\psi(xx_1\dots x_{n-1}) + \epsilon\psi(x_1xx_2\dots x_{n-1}) + \dots + \\ & \quad + \epsilon^{n-1}\psi(x_1\dots x_{n-1}x)]. \end{aligned} \quad (6^*)$$

Ядро оператора, определяемого формулой (6\*), есть

$$\begin{aligned} & (n-1; x_1x_2\dots x_{n-1}|\Psi(x)|n; \xi_1\xi_2\dots \xi_n) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{n}} [\delta(\xi_1-x)\delta(\xi_2-x_1)\dots\delta(\xi_n-x_{n-1}) + \dots \\ & \quad + \epsilon^{k-1}\delta(\xi_1-x_1)\dots\delta(\xi_{k-1}-x_{k-1})\delta(\xi_k-x) \times \\ & \quad \times \delta(\xi_{k+1}-x_k)\dots\delta(\xi_n-x_{n-1}) + \\ & \quad \dots + \epsilon^{n-1}\delta(\xi_1-x_1)\dots\delta(\xi_{n-1}-x_{n-1})\delta(\xi_n-x)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Ядро сопряженного оператора  $(n|\Psi^+(x)|n-1)$  получится, если в формуле (7) заменить переменные  $\xi_1\xi_2\dots \xi_n$  на  $x_1x_2\dots x_n$  и переменные  $x_1x_2\dots x_{n-1}$  на  $\xi_1\xi_2\dots \xi_{n-1}$ . Тогда результат применения оператора  $(n|\Psi^+(x)|n-1)$  к волновой функции

$\Psi(x_1 x_2 \dots x_n)$  будет равен

$$\begin{aligned} & (n | \Psi^+ | n-1) \psi(x_1 x_2 \dots x_{n-1}) = \\ & = \frac{1}{\sqrt{n}} [\delta(x_1 - x) \psi(x_2 x_3 \dots x_n) + \varepsilon \delta(x_2 - x) \psi(x_1 x_3 \dots x_n) + \dots \\ & \quad + \varepsilon^{k-1} \delta(x_k - x) \psi(x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n) + \dots \\ & \quad + \varepsilon^{n-1} \delta(x_n - x) \psi(x_1 x_2 \dots x_{n-1})]. \end{aligned} \quad (8)$$

Определенный этим равенством оператор  $(n | \Psi^+ | n-1)$  удовлетворяет требованию, чтобы он оставлял неизменными свойства симметрии волновой функции; с этой целью мы и перешли от соотношения (6) к соотношению (6\*).

После того как определены  $\Psi(x)$  и  $\Psi^+(x)$ , мы можем приступить к доказательству перестановочных соотношений (2) и (2\*). образуем операторы  $\Psi^+(x) \Psi(x')$  и  $\Psi(x') \Psi^+(x)$ . Эти операторы коммутируют с  $n$ , поэтому относительно  $n$  они имеют диагональную форму. Имеем:

$$\Psi^+(x) \Psi(x') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (9)$$

и

$$\Psi(x') \Psi^+(x) = \begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & B_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & B_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (9^*)$$

где через  $A_n$  и  $B_n$  обозначены операторы

$$\begin{aligned} A_n &= (n | \Psi^+(x) \Psi(x') | n) = \\ &= (n | \Psi^+(x) | n-1) (n-1 | \Psi(x') | n), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_n &= (n | \Psi(x') \Psi^+(x) | n) = \\ &= (n | \Psi(x') | n+1) (n+1 | \Psi^+(x) | n), \end{aligned} \quad (10^*)$$

которые действуют в  $n$ -том подпространстве. Применив сначала (6), а затем (8), находим

$$\begin{aligned} A_n \psi(x_1 x_2 \dots x_n) &= \delta(x_1 - x) \psi(x' x_2 \dots x_n) + \dots \\ &+ \varepsilon^{k-1} \delta(x_k - x) \psi(x' x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n) + \dots \\ &+ \varepsilon^{n-1} \delta(x_n - x) \psi(x' x_1 \dots x_{n-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

или, принимая во внимание свойства симметрии волновой функции,

$$\begin{aligned} & (n | \Psi^+(x) \Psi(x') | n) \psi(x_1 x_2 \dots x_n) = \\ &= \delta(x_1 - x) \psi(x' x_2 \dots x_n) + \\ &\dots + \delta(x_k - x) \psi(x_1 \dots x_{k-1} x' x_{k+1} \dots x_n) + \dots \\ &+ \delta(x_n - x) \psi(x_1 \dots x_{n-1} x'). \end{aligned} \quad (11^*)$$

Если же применить сначала (8), а затем (6), то после замены  $n$  на  $n + 1$  мы найдем

$$\begin{aligned}
 B_n \psi(x_1 \dots x_n) &= (n | \Psi(x') \Psi^+(x) | n) \psi(x_1 \dots x_n) = \\
 &= \delta(x' - x) \psi(x_1 x_2 \dots x_n) + \varepsilon \delta(x_1 - x) \psi(x' x_2 \dots x_n) + \dots \\
 &\quad + \varepsilon^k \delta(x_k - x) \psi(x' x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n) + \dots \\
 &\quad + \varepsilon^n \delta(x_n - x) \psi(x' x_1 \dots x_{n-1}).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Сравнение (11) и (12) показывает, что

$$\begin{aligned}
 B_n \psi(x_1 x_2 \dots x_n) - \varepsilon A_n \psi(x_1 x_2 \dots x_n) &= \\
 &= \delta(x - x') \psi(x_1 x_2 \dots x_n).
 \end{aligned} \tag{13}$$

В силу (9) и (9\*) это означает, что имеют место перестановочные соотношения

$$\Psi(x') \Psi^+(x) - \varepsilon \Psi^+(x) \Psi(x') = \delta(x - x'), \tag{2}$$

где единичная (относительно  $n$ ) матрица в правой части подразумевается.

Еще проще доказывается соотношение (2\*). Согласно формуле (6) оператор  $\Psi(x)$  переводит последовательность функций (5) в последовательность

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \sqrt{2} \psi(xx_1) \\ \sqrt{3} \psi(xx_1 x_2) \\ \dots \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\Psi(x) \begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1 x_2) \\ \psi(x_1 x_2 x_3) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \sqrt{2} \psi(xx_1) \\ \sqrt{3} \psi(xx_1 x_2) \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Применив к (14) оператор  $\Psi(x')$ , будем иметь:

$$\Psi(x') \Psi(x) \begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1 x_2) \\ \psi(x_1 x_2 x_3) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2 \cdot 1} \psi(xx') \\ \sqrt{3 \cdot 2} \psi(xx' x_1) \\ \sqrt{4 \cdot 3} \psi(xx' x_1 x_2) \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Отсюда перестановкой  $x$  и  $x'$  получаем

$$\Psi(x) \Psi(x') \begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1 x_2) \\ \psi(x_1 x_2 x_3) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2 \cdot 1} \psi(x'x) \\ \sqrt{3 \cdot 2} \psi(x'x x_1) \\ \sqrt{4 \cdot 3} \psi(x'x x_1 x_2) \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{15*}$$

Но выражения (15) и (15\*) либо равны ( $\epsilon = +1$ , симметричные функции), либо равны по величине, но противоположны по знаку ( $\epsilon = -1$ , антисимметричные функции); тем самым перестановочное соотношение (2\*) доказано.

С помощью полученных формул все операторы вторичного квантования могут быть построены в конфигурационном пространстве. Те из них, которые не коммутируют с  $\mathbf{n}$ , действуют на последовательность функций вида (5) и не могут быть представлены в конфигурационном пространстве определенного числа частиц. Для операторов, коммутирующих с  $\mathbf{n}$ , достаточно рассматривать диагональный (относительно  $\mathbf{n}$ ) элемент матрицы, который можно толковать, как оператор в  $n$ -том подпространстве, т. е. в конфигурационном пространстве заданного числа  $n$  частиц. Например, коммутирующим с  $\mathbf{n}$  оператором является оператор энергии (формула 50, раздел 1) и в результате построения его в конфигурационном пространстве мы приходим обратно к обыкновенному шредингеровскому оператору энергии для  $n$  частиц. Рассмотрим еще некоторые примеры коммутирующих с  $\mathbf{n}$  операторов.

Оператор  $\Psi^+(x)\Psi(x)$  плотности частиц в  $n$ -том подпространстве имеет представление

$$\begin{aligned} (n | \Psi^+(x)\Psi(x) | n) \Psi(x_1 x_2 \dots x_n) &= \\ &= [\delta(x_1 - x) + \delta(x_2 - x) + \dots \\ &+ \delta(x_n - x)] \psi(x_1 x_2 \dots x_n). \end{aligned} \quad (16)$$

Эта формула есть частный случай формулы (11), который получается, если в (11) положить  $x' = x$  и использовать соотношение  $\delta(x_k - x) f(x) = \delta(x_k - x) f(x_k)$ , справедливое для любой непрерывной функции.

Умножая выражение (16) на элемент объема  $dx$  и интегрируя по некоторому объему  $V$ , мы можем заключить, что оператор

$$\mathbf{n}_V = \int_V \Psi^+(x)\Psi(x) dx \quad (17)$$

имеет в  $n$ -том подпространстве следующее представление:

$$(n | \mathbf{n}_V | n) \psi(x_1 \dots x_n) = n'_V(x_1 \dots x_n) \psi(x_1 \dots x_n). \quad (18)$$

Значение функции  $n'_V(x_1 \dots x_n)$  в (18) равно числу тех аргументов  $x_1 \dots x_n$ , которые принадлежат объему  $V$ . Оператор  $(n | \mathbf{n}_V | n)$ , как это и следовало ожидать, имеет поэтому целочисленные собственные значения.

В качестве следующего примера рассмотрим оператор кулоновского потенциала

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = e^2 \int \frac{\Psi^+(x')\Psi(x')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx'. \quad (19)$$

Для построения матричного элемента  $(n|V(\mathbf{r})|n)$  в (16) заменим  $x$  на  $x'$ , умножим на  $\frac{e^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$  и проинтегрируем по  $x'$ . Мы получим

$$(n|V(\mathbf{r})|n)\psi(x_1 \dots x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{e^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|} \psi(x_1 \dots x_n). \quad (20)$$

Таким образом, оператор  $V(\mathbf{r})$  в  $n$ -том подпространстве означает „умножение на  $\sum_{k=1}^n \frac{e^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|}$ “.

### Зависимость операторов $\Psi$ от времени и квантованное волновое уравнение

Изменение во времени состояния физической системы проявляется, как известно, либо в зависимости от времени волновой функции, либо в зависимости от времени оператора. То представление операторов, в котором зависимость от времени переносится на волновую функцию, мы будем, следуя Дираку,<sup>1</sup> называть шредингеровским представлением; представление же, в котором зависимость от времени переносится на операторы (матрицы), мы будем называть гейзенберговским представлением.

Пусть  $\psi$  есть волновая функция системы, а  $S(t)$  — унитарный оператор, который начальную волновую функцию  $\psi(\cdot, 0)$  переводит в волновую функцию  $\psi(\cdot, t)$ , соответствующую времени  $t$  (точкой здесь обозначены переменные системы). Мы имеем:

$$\psi(\cdot, t) = S(t) \psi(\cdot, 0). \quad (21)$$

Дифференцируя это уравнение по времени и заменяя  $\psi(\cdot, 0)$  через

$$\psi(\cdot, 0) = S^+(t) \psi(\cdot, t), \quad (21^*)$$

получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{S}(t) \psi(\cdot, 0) = \dot{S}(t) S^+(t) \psi(\cdot, t). \quad (22)$$

Оператор  $i\dot{S}S^+$ , который в силу  $SS^+ = 1$  будет эрмитовским, обозначим через

$$i\dot{S}(t) S^+(t) = -iS(t) \dot{S}^+(t) = \frac{1}{\hbar} H. \quad (23)$$

Тогда  $H$  есть оператор Гамильтона системы. Обозначив через  $L$  некоторый оператор в шредингеровском представлении, а через

<sup>1</sup> Д и р а к. Основы квантовой механики. ОГИЗ, 1930.

$L'(t)$  тот же оператор в гейзенберговском представлении, мы будем иметь:

$$L'(t) = S^+(t) L S(t). \quad (24)$$

Из (24) и (21) получается

$$L'(t) \psi(\cdot, 0) = S^+(t) L \psi(\cdot, t). \quad (25)$$

Производная по времени от этого выражения равна

$$\frac{dL'(t)}{dt} \psi(\cdot, 0) = \frac{d}{dt} [S^+(t) L \psi(\cdot, t)]. \quad (26)$$

Слева стоит оператор  $\frac{dL'}{dt}$  в гейзенберговском представлении. Обозначив тот же оператор в шредингеровском представлении через  $\frac{dL}{dt}$ , аналогично (24) и (25) получим

$$\frac{dL'}{dt} = S^+(t) \frac{dL}{dt} S(t) \quad (27)$$

и

$$\frac{dL'}{dt} \psi(\cdot, 0) = S^+(t) \frac{dL}{dt} \psi(\cdot, t). \quad (28)$$

Сравнение (26) и (28) дает

$$\frac{dL}{dt} \psi(\cdot, t) = S(t) \frac{d}{dt} [S^+(t) L \psi(\cdot, t)] \quad (29)$$

или после выполнения дифференцирования

$$\frac{dL}{dt} \psi(\cdot, t) = S(t) \dot{S}^+(t) L \psi(\cdot, t) + \frac{d}{dt} [L \psi(\cdot, t)]. \quad (30)$$

Согласно (21) оператор  $S(t)$  дает продолжение во времени волновой функции на время  $t$  в положительном направлении.

Аналогично оператор  $S^+(t)$  дает продолжение во времени волновой функции на время  $t$  в отрицательном направлении. Имея это в виду, можно формулировать смысл уравнения (29) следующим образом.

Результат применения оператора  $\frac{dL}{dt}$  к волновой функции  $\psi(\cdot, t)$  в шредингеровском представлении получается путем выполнения следующих операций:

1. Применение оператора  $L$ .
2. Продолжение во времени на величину  $t$  в отрицательном направлении.
3. Дифференцирование по  $t$ .
4. Продолжение во времени на величину  $t$  в положительном направлении.

Эта формулировка имеет то преимущество, что не использует оператор Гамильтона, по крайней мере явным образом.

Применим теперь это правило к определению оператора  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ , который входит в квантованное волновое уравнение. В этом случае оператором является квантованная волновая функция  $\Psi(x, t)$ , а  $\psi(\cdot, t)$  есть последовательность функций (5). Мы ограничимся случаем, когда число частиц со временем не изменяется, исключая тем самым из рассмотрения фотоны. Для наглядности рассмотрим квантованное уравнение Шредингера

$$[H^0(x) + V(x)] \Psi(x) = ih \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (31)$$

где  $H^0(x)$  означает обычный оператор Шредингера задачи одного тела

$$H^0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(x, y, z), \quad (32)$$

а  $V(x) = V(\mathbf{r})$  — определенный в (19) оператор кулоновского потенциала.

В нашем случае оператор  $S(t)$  производит в конфигурационном пространстве просто продолжение во времени отдельных волновых функций последовательности (5)

$$S(t) \begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1; 0) \\ \psi(x_1 x_2; 0) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1; t) \\ \psi(x_1 x_2; t) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Следовательно, оператор  $S(t)$  имеет диагональную форму

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & S_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где  $S_n = S_n(t)$  есть оператор, который продолжает во времени волновую функцию в  $n$ -том подпространстве

$$S_n(t) \psi(x_1 x_2 \dots x_n; 0) = \psi(x_1 x_2 \dots x_n; t). \quad (35)$$

Далее согласно (23) имеем:

$$-ih S_n(t) \dot{S}_n^+(t) = H(x_1 \dots x_n), \quad (36)$$

где  $H(x_1 \dots x_n)$  обозначает оператор Гамильтона в  $n$ -том подпространстве. Оператор  $-ih S(t) \dot{S}^+(t)$  будет поэтому тоже диагональным, и его диагональными элементами будут операторы (36).



Образуем теперь оператор  $\dot{\Psi}(xt) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ . Согласно (29) или (30) имеем:

$$\dot{\Psi}(x, t) \begin{pmatrix} \text{const} \\ \dot{\psi}(x_1 t) \\ \dot{\psi}(x_1 x_2 t) \\ \dots \end{pmatrix} = S(t) \dot{S}^+(t) \begin{pmatrix} \dot{\psi}(xt) \\ \sqrt{2} \dot{\psi}(xx_1 t) \\ \sqrt{3} \dot{\psi}(xx_1 x_2 t) \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\psi}(xt) \\ \sqrt{2} \dot{\psi}(xx_1 t) \\ \sqrt{3} \dot{\psi}(xx_1 x_2 t) \\ \dots \end{pmatrix} \quad (37)$$

или, приняв во внимание (36),

$$ih \dot{\Psi}(xt) \begin{pmatrix} \text{const} \\ \dot{\psi}(x_1 t) \\ \dot{\psi}(x_1 x_2 t) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} H(x_1) \dot{\psi}(xx_1 t) \\ -\sqrt{3} H(x_1 x_2) \dot{\psi}(xx_1 x_2 t) \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\psi}(xt) \\ \sqrt{2} \dot{\psi}(xx_1 t) \\ \sqrt{3} \dot{\psi}(xx_1 x_2 t) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Учитывая (20), для оператора в левой части квантованного волнового уравнения (31) получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} [H_0(x) + \mathbf{V}(x)] \Psi \begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1 t) \\ \psi(x_1 x_2 t) \\ \dots \end{pmatrix} &= \\ = [H^0(x) + \mathbf{V}(x)] \begin{pmatrix} \psi(xt) \\ \sqrt{2} \psi(xx_1 t) \\ \sqrt{3} \psi(xx_1 x_2 t) \\ \dots \end{pmatrix} &= \quad (39) \\ = \begin{pmatrix} H^0(x) \psi(xt) \\ \sqrt{2} \left[ H^0(x) + \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right] \psi(xx_1 t) \\ \sqrt{3} \left[ H^0(x) + \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right] \psi(xx_1 x_2 t) \\ \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Приравнявая (38) и (39), мы получим (после сокращения на  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  и т. д.) цепь уравнений:

$$H^0(x)\psi(xt) = ih \frac{\partial \psi(xt)}{\partial t}; \quad (40_1)$$

$$\left[ H^0(x) + \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + H(x_1) \right] \psi(xx_1t) = ih \frac{\partial \psi(xx_1t)}{\partial t}; \quad (40_2)$$

$$\left[ H^0(x) + \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + H(x_1x_2) \right] \psi(xx_1x_2t) = \\ = ih \frac{\partial \psi(xx_1x_2t)}{\partial t}; \quad (40_3)$$

$$\dots \dots \dots \\ \left[ H^0(x) + \sum_{k=1}^n \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} + H(x_1x_2 \dots x_n) \right] \psi(xx_1 \dots x_nt) = \\ = ih \frac{\partial \psi(xx_1 \dots x_nt)}{\partial t}. \quad (40_{n+1})$$

Из уравнения (40<sub>1</sub>) заключаем, что

$$H(x) = H^0(x).$$

Уравнение (40<sub>2</sub>) дает тогда

$$H(xx_1) = H^0(x) + H^0(x_1) + \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

и т. д. Вообще (n + 1)-ое уравнение дает рекуррентное соотношение между операторами Шредингера для n и n + 1 частиц, а именно

$$H(xx_1x_2 \dots x_n) = H^0(x) + \sum_{k=1}^n \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} + H(x_1x_2 \dots x_n). \quad (41)$$

Выражая теперь  $H(x_1x_2 \dots x_n)$  непосредственно через  $H^0$ , мы получим для оператора Гамильтона задачи n тел обычное шредингеровское выражение

$$H(x_1x_2 \dots x_n) = \sum_{k=1}^n H^0(x_k) + \sum_{k > l=1}^n \frac{e^2}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|}. \quad (42)$$

Квантованное волновое уравнение, таким образом, распадается в конфигурационном пространстве на ряд обыкновенных уравнений Шредингера, вида

$$H(x_1x_2 \dots x_n)\psi(x_1x_2 \dots x_nt) = ih \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (43)$$

Из этого примера видно, что рассуждения с квантованной волновой функцией допускают в любой стадии непосредственный переход к обыкновенному конфигурационному пространству.

## Вывод уравнений Хартри по методу вторичного квантования

В качестве простого применения полученных результатов выведем дополненные учетом обмена уравнения Хартри.<sup>1</sup>

Уравнения для собственных функций оператора энергии (а также и уравнения Хартри), как известно, могут быть выведены из вариационного начала

$$\delta W = 0, \quad (44)$$

где  $W$  означает энергию атома в рассматриваемом стационарном состоянии. Поэтому достаточно найти выражение для энергии. Но величина  $W$  равна диагональному элементу

$$W = (Wn | H | Wn) \quad (45)$$

матрицы квантованного оператора энергии  $H$  (формула (50) первой части)

$$H = \int \Psi^+(x) H(x) \Psi(x) dx + \frac{e^2}{2} \int \frac{\Psi^+(x) \Psi^+(x') \Psi(x') \Psi(x)}{|r - r'|} dx dx'. \quad (46)$$

Чтобы определить  $W$ , мы должны вычислить матричные элементы операторов, стоящих под знаком интеграла. Имеем:

$$\begin{aligned} & (Wn | \Psi^+(x) H(x) \Psi(x) | Wn) = \\ & = H(x') (Wn | \Psi^+(x) \Psi(x') | Wn), \quad x = x'. \end{aligned} \quad (47)$$

Поэтому для вычисления матричного элемента оператора, стоящего под знаком первого интеграла, достаточно определить величину

$$\rho(x x') = (Wn | \Psi^+(x) \Psi(x') | Wn). \quad (48)$$

Выражение для оператора  $\Psi^+(x) \Psi(x')$  в  $n$ -том подпространстве нами уже найдено (11\*). Пусть  $\psi_W(x_1 x_2 \dots x_n)$  есть принадлежащая собственному значению  $W$  собственная функция оператора энергии в  $n$ -том подпространстве. При учете свойств симметрии волновой функции формула (48) тогда дает

$$\rho(x x') = n \int \dots \int \bar{\psi}_W(x x_2 \dots x_n) \psi_W(x' x_2 \dots x_n) dx_2 \dots dx_n. \quad (49)$$

Для вывода уравнений Хартри в этом точном выражении мы должны заменить волновую функцию приближенным выражением в виде определителя

$$\psi_W(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \|\varphi_i(x_k)\| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (50)$$

где  $\varphi_i(x)$  предполагаются ортогональными и нормированными

$$\int \bar{\varphi}_i(x) \varphi_k(x) dx = \delta_{ik}. \quad (51)$$

<sup>1</sup> V. Fock. Zs. f. Phys., 61, 126 (1930).

Тогда получим

$$\rho(xx') = \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i(x) \varphi_i(x') \quad (49^*)$$

и формулы (47) и (48) дадут

$$(Wn | \Psi^+(x) H \Psi(x) | Wn) = \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i(x) H(x) \varphi_i(x). \quad (52)$$

Вычислим теперь матричный элемент оператора в двойном интеграле (46). С помощью соотношений (14), (16) и (8) легко найти, что в  $n$ -том подпространстве этот оператор имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (n | \Psi^+(x) \Psi^+(x') \Psi(x') \Psi(x) | n) \psi(x_1 x_2 \dots x_n) = \\ = \sum_{\substack{k, l=1 \\ k \neq l}}^n \delta(x_k - x) \delta(x_l - x') \psi(x_1 x_2 \dots x_n). \end{aligned} \quad (53)$$

Следовательно, его матричный элемент равен

$$\begin{aligned} (Wn | \Psi^+(x) \Psi^+(x') \Psi(x') \Psi(x) | Wn) = \\ = n(n-1) \int \dots \int |\psi_n(xx'x_3 \dots x_n)|^2 dx_3 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (54)$$

После подстановки выражения для  $\psi_n$  в виде определителя (50) из (54) мы получим приближенную формулу

$$\begin{aligned} (Wn | \Psi^+(x) \Psi^+(x') \Psi(x') \Psi(x) | Wn) = \\ = \rho(xx) \rho(x'x') - |\rho(xx')|^2. \end{aligned} \quad (55)$$

Введя теперь выражения (52) и (55) в формулу (46), для матричного элемента  $H$ , т. е. для энергии  $W$ , получаем выражение  $W$

$$\begin{aligned} W = \int \sum_{r=1}^n \bar{\varphi}_r(x) H(x) \varphi_r(x) dx + \\ + \frac{e^2}{2} \iint \frac{\rho(xx) \rho(x'x') - |\rho(xx')|^2}{|r-r'|} dx dx'. \end{aligned} \quad (56)$$

Это выражение отличается от полученного в нашей цитированной работе только тем, что здесь мы предполагаем спиновую координату включенной в переменную  $x$  и, следовательно, можем оперировать с чисто антисимметричными волновыми функциями.

# О КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДИРАКА<sup>1</sup>

В. Фок и Б. Подольский

В своей новой работе<sup>2</sup> Дирак предложил своеобразное сочетание квантовой электродинамики вакуума с волновым уравнением для материи и показал на одномерном примере, как в определенном приближении может появиться кулоновское взаимодействие.

Так как одномерный случай не может иметь физического смысла, то естественно попытаться сделать подсчет для трехмерного случая. Это и будет здесь сделано, хотя совсем коротко; более подробное изложение будет дано в другой работе.

Обозначим компоненты четырехмерного потенциала в единицах Хевисайда через  $A_0 = V$ ;  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и напишем в разложении Фурье для этих величин в виде

$$A_l(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int a_l(\mathbf{k}) e^{-ic|\mathbf{k}|t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}(d\mathbf{k}) + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int a_l^+(\mathbf{k}) e^{ic|\mathbf{k}|t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}(d\mathbf{k}),$$

где

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3); \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3).$$

Применяя соответствующим образом известные правила квантования, получим для амплитуд  $a_l(\mathbf{k})$  перестановочные соотношения

$$a_l(\mathbf{k}') a_m^+(\mathbf{k}) - a_m^+(\mathbf{k}) a_l(\mathbf{k}') = -\frac{\hbar c}{2|\mathbf{k}|} e_l \delta_{lm} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

(здесь  $e_0 = 1$ ;  $e_1 = e_2 = e_3 = -1$ ;  $l, m = 0, 1, 2, 3$ ;  $2\pi\hbar$  — постоянная Планка).

Так как мы будем пренебрегать релятивистскими эффектами, то ограничимся рассмотрением скалярного потенциала.

---

<sup>1</sup> Впервые опубликовано в 1932 г. V. Fock und B. Podolsky. Zur Diracschen Quantenelektrodynamik, Sow. Phys., 1, 798 — 800 (1932).

<sup>2</sup> P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., A136, 453 (1932).

Согласно Дираку, волновое уравнение имеет вид

$$W\psi - ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -(\epsilon_1 V(\mathbf{r}_1, t) + \epsilon_2 V(\mathbf{r}_2, t))\psi,$$

где

$$W = \frac{1}{2m_1} \mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \mathbf{p}_2^2.$$

Волновую функцию мы будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots,$$

где  $\psi_n$  представляет члены  $n$ -го порядка относительно зарядов  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Преобразуем уравнение к пространству импульсов и напишем для соответствующей волновой функции разложение

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

Положим

$$\psi_0 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_1^0 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2^0 \cdot \mathbf{r}_2 - W_0 t)} \cdot \delta_{j_0}.$$

Тогда будет

$$\varphi_0 = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0) e^{-\frac{i}{\hbar} W_0 t} \cdot \delta_{j_0}.$$

Для функции  $\varphi_1$  мы получим линейное относительно операторов  $a_0(\mathbf{k}')$  и  $a_0^+(\mathbf{k})$  выражение, содержащее четыре члена. Правая часть уравнения для  $\varphi_2$  будет уже квадратичной относительно  $a_0(\mathbf{k}')$  и  $a_0^+(\mathbf{k})$ . Члены вида  $a_0(\mathbf{k}') a_0(\mathbf{k})$ ;  $a_0^+(\mathbf{k}') a_0^+(\mathbf{k})$ ;  $a_0(\mathbf{k}') a_0^+(\mathbf{k})$  мы должны заменить на нуль, а в члене  $a_0^+ a_0$  сделать замену<sup>1</sup>

$$a_0^+(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}') \rightarrow \frac{ch}{2|\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Тогда мы получим

$$W\varphi_2 - ih \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = K\varphi_0 - \\ - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(2\pi)^3 \hbar} \frac{1}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|^2} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_2^0) e^{-\frac{i}{\hbar} W_0 t} \delta_{j_0},$$

где  $K$  есть постоянная (правда, бесконечно большая). Если преобразовать это уравнение обратно в координатное пространство, то получится

$$W\psi_2 - ih \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \left( K - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{4\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right) \psi_0 = -U\psi_0.$$

<sup>1</sup> Мы ищем ту часть волнового функционала  $\varphi$  (или  $\psi$ ), которая соответствует бесквантовому состоянию (последнее обозначено символически множителем  $\delta_{j_0}$ , где  $j$  — число квантов). Только удерживаемый оператор  $a_0^+ a_0$  переводит эту бесквантовую часть в бесквантовую же, тогда как отброшенные операторы  $a_0 a_0^+$ ,  $a_0^+ a_0^+$  и  $a_0 a_0$  либо обращают ее в нуль, либо переводят в двухквантовую ( $B. \Phi.$ ).

Отсюда видно, что энергия взаимодействия равна

$$U = \frac{e_1 e_2}{4\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - K.$$

Но это как раз и есть кулоновская энергия (в единицах Хэви-сайда) и притом с правильным знаком.

Представляется весьма вероятным, что если не пренебрегать векторным потенциалом, то в соответствующее приближение войдет Брейтовская поправка на запаздывание.

---

# О КВАНТОВАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН И ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАРЯДОВ ПО ТЕОРИИ ДИРАКА<sup>1</sup>

*В. А. Фок и Е. Подольский*

В предыдущей заметке<sup>2</sup> мы сформулировали результат приложения новых идей Дирака к вычислению электростатического взаимодействия двух зарядов. В этой статье мы даем подробное изложение вывода этого результата, а также применение идей Дирака к более точному расчету взаимодействия при помощи дираковской линейной в импульсах гамильтоновой функции. Работа состоит из трех частей. В первой части мы рассматриваем проблему квантования электромагнитного поля в пустом пространстве; эта проблема приобретает новый интерес в свете идей Дирака. Во второй части произведен расчет взаимодействия происходящего от скалярного потенциала в уравнении Шредингера, причем получено кулоновское взаимодействие. Этот раздел, в сокращенной форме, был предметом предыдущей заметки. В третьем разделе произведен расчет для случая дираковского оператора Гамильтона.

## 1. КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

§ 1. В применяемой здесь теории Дирака достаточно рассматривать поля, удовлетворяющие электромагнитным уравнениям в пустом пространстве. Каждая компонента электрического и магнитного поля, равно как и каждая компонента скалярного и векторного потенциалов, должна поэтому удов-

---

<sup>1</sup> Работа „О квантовании электромагнитных волн и взаимодействии зарядов по теории Дирака“ — V. Fock and E. Podolsky. On the quantization of electromagnetic waves and the interaction of charges on Dirac's theory. *Sov. Phys.*, 1, 801—817 (1932)—включает в себя поправку, опубликованную в виде отдельной статьи под названием „Вывод формулы Мёллера из теории Дирака“ — E. Podolsky and V. Fock. Derivation of Möllers formula from Dirac's theory. *Sov. Phys.*, 2, 275—277 (1932). — Печатаемый здесь текст до формулы (61) совпадает с текстом первой работы, а после формулы (61)—с текстом § 2 второй работы (В. Ф.).

<sup>2</sup> В. Фок и Е. Подольский. О квантовой электродинамике Дирака. *Набл. сб.*, стр. 52—54.



летворять волновому уравнению Даламбера. Прилагая общую теорию квантования полей, развитую Гейзенбергом и Паули,<sup>1</sup> мы рассматриваем уравнения Даламбера как основные, а уравнения Максвелла как дополнительные. Мы выбираем поэтому лагранжеву функцию так, чтобы получить уравнение Даламбера как уравнение движения. Таким путем можно обойти затруднение, связанное с обращением в нуль импульса  $P_0$ , и максвелловы уравнения оказываются следствием дополнительного условия  $P_0 = 0$ .

Мы берем в качестве четырех координат поля  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3$  величины  $\Phi, A_x, A_y, A_z$  соответственно, где  $\Phi$  — скалярный, а  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  векторный потенциал. Как обычно, мы полагаем

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \quad (1)$$

и

$$\mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A}. \quad (2)$$

Во всей работе используются хевисайдовы единицы.

Лагранжева функция полагается равной

$$L = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) - \frac{1}{2} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} \right)^2, \quad (3)$$

что представляет собой четырехмерный инвариант. Выраженная через координаты поля и их производные функция Лагранжа принимает вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \left( \frac{1}{c} \dot{Q}_l + \frac{\partial Q_0}{\partial x_l} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{l>m} \left( \frac{\partial Q_l}{\partial x_m} - \frac{\partial Q_m}{\partial x_l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} \dot{Q}_0 + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial Q_l}{\partial x_l} \right)^2. \quad (4)$$

Отсюда следует для  $l = 1, 2, 3$

$$P_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_l} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial Q_0}{\partial x_l} + \frac{1}{c} \dot{Q}_l \right) \quad (5)$$

и для  $l = 0$

$$P_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_0} = -\frac{1}{c} \left( \frac{1}{c} \dot{Q}_0 + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial Q_l}{\partial x_l} \right) = -\frac{1}{c} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} \right). \quad (6)$$

<sup>1</sup> Heisenberg und Pauli. Zs. f. Phys., 56, 1 (1929).

Гамильтонова функция строится обычным путем и оказывается равной

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) - c\mathbf{P} \cdot \text{grad } \Phi - cP_0 \text{div } \mathbf{A} - \frac{1}{2} c^2 P_0^2. \quad (7)$$

Выраженная через импульсы гамильтонова функция равна

$$H = \frac{c^2}{2} (\mathbf{P}^2 - P_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{l>m} \left( \frac{\partial Q_l}{\partial x_m} - \frac{\partial Q_m}{\partial x_l} \right)^2 - cP_0 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial Q_l}{\partial x_l} - c\mathbf{P} \cdot \text{grad } Q_0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{P}$  есть вектор  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ . Следует заметить, что это выражение для  $H$  не содержит некоммутирующих множителей и поэтому может быть непосредственно принято в квантовой механике.

Согласно Гейзенбергу и Паули,<sup>1</sup> уравнения движения получаются из функции Гамильтона по правилу

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha};$$

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial H}{\partial \left( \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_l} \right)}. \quad (9)$$

Применение этого правила к нашему случаю дает

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= c^2 \mathbf{P} - c \text{grad } \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -c^2 P_0 - c \text{div } \mathbf{A}, \\ \dot{\mathbf{P}} &= \Delta \mathbf{A} - \text{grad div } \mathbf{A} - c \text{grad } P_0, \\ \dot{P}_0 &= -c \text{div } \mathbf{P}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Исключая из этих уравнений величины  $\mathbf{P}$  и  $P_0$  получаем искомые уравнения

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0, \quad \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = 0. \quad (11)$$

Если мы добавим условие  $P_0 = 0$ , которое согласно уравнению (6) может быть написано в виде

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0, \quad (12)$$

то уравнения (1), (2), (11) и (12) приводят к максвелловым уравнениям для пустоты, как это и должно быть.

<sup>1</sup> Heisenberg und Pauli. Zs. f. Phys., 56, 1 (1929), уравнение (10).

§ 2. Каждой переменной поля  $F = F(x, y, z, t)$  мы приводим в соответствие амплитуды  $F(\mathbf{k})$  и  $F^+(\mathbf{k})$ , определяемые разложением  $F$  по плоским монохроматическим волнам. Это разложение имеет вид

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \{F(\mathbf{k}) e^{-ic|\mathbf{k}|t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + F^+(\mathbf{k}) e^{+ic|\mathbf{k}|t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}\} (d\mathbf{k}), \quad (13)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  есть радиус-вектор, а  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  есть волновой вектор (направление волнового вектора совпадает с направлением распространения волны, а величина его равна  $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина волны). Далее  $(d\mathbf{k}) = dk_x dk_y dk_z$ ; интегрирование происходит по каждой компоненте  $\mathbf{k}$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Очевидно, что если  $F$  есть вектор, то каждой его компоненте соответствует своя амплитуда, так что  $F(\mathbf{k})$  есть также вектор.<sup>1</sup> Каждому соотношению между величинами поля соответствует соотношение между амплитудами. Мы будем обозначать эти соотношения теми же номерами со звездочкой. Так, соответственно уравнению (10) имеем:

$$\begin{aligned} -ic|\mathbf{k}| \mathbf{A}(\mathbf{k}) &= c^2 \mathbf{P}(\mathbf{k}) - ic\mathbf{k}\Phi(\mathbf{k}), \\ -ic|\mathbf{k}| \Phi(\mathbf{k}) &= -c^2 P_0(\mathbf{k}) - ic\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}), \\ -ic|\mathbf{k}| \mathbf{P}(\mathbf{k}) &= -|\mathbf{k}|^2 \mathbf{A}(\mathbf{k}) + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})) - ic\mathbf{k}P_0(\mathbf{k}), \\ -ic|\mathbf{k}| P_0(\mathbf{k}) &= -ic\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (10^*)$$

Легко видеть, что в формулах (10\*) последние два уравнения являются алгебраическими следствиями первых двух. Эти уравнения определяют амплитуды импульсов через амплитуды потенциалов:

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = \frac{i}{c} [\mathbf{k}\Phi(\mathbf{k}) - |\mathbf{k}| \mathbf{A}(\mathbf{k})] = -\frac{1}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}), \quad (5^*)$$

$$P_0(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} = \frac{i}{c} [|\mathbf{k}| \Phi(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})]. \quad (6^*)$$

Необходимо помнить, что каждому такому уравнению соответствует сопряженное (в классической теории это есть обычное комплексно-сопряженное). Выполнение сопряженного уравнения подразумевается. Уравнение Даламбера, выраженное в амплитудах, принимает вид алгебраического тождества.

В силу соотношений (5\*) и (6\*) дополнительное условие  $P_0 = 0$  принимает вид

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}) = \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{k}) = 0, \quad (14)$$

<sup>1</sup> Мы подразумеваем трехмерный вектор. В четырехмерном случае можно показать, что не  $F(\mathbf{k})$ , а  $|\mathbf{k}|F(\mathbf{k})$  будет четырехмерным вектором, если им является  $F(x, y, z, t)$ .

откуда следует, что когда удовлетворяются уравнения Максвелла, то будет  $\mathbf{E}(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k}$  и  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ .

§ 3. Объемный интеграл от произведения двух переменных поля  $M$  и  $N$  может быть выражен через амплитуды следующим образом:

$$\int M N d\tau = \int \{ M(\mathbf{k}) N(-\mathbf{k}) e^{-2ic|\mathbf{k}|t} + M^+(\mathbf{k}) N^+(-\mathbf{k}) e^{2ic|\mathbf{k}|t} + M(\mathbf{k}) N^+(\mathbf{k}) + M^+(\mathbf{k}) N(\mathbf{k}) \} (dk). \quad (15)$$

Здесь использовано соотношение

$$\int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} d\tau = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Применяя формулу (15) к вычислению объемного интеграла от функции Гамильтона  $H$ , получим

$$\bar{H} = \int H d\tau = \int \{ [A(\mathbf{k}) \cdot A^+(\mathbf{k}) + A^+(\mathbf{k}) \cdot A(\mathbf{k})] - [\Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}) + \Phi^+(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k})] \} |k|^2 (dk)$$

или, меняя порядок сомножителей<sup>1</sup> и переходя к составляющим,

$$\bar{H} = 2 \int \{ A_1^+(\mathbf{k}) A_1(\mathbf{k}) + A_2^+(\mathbf{k}) A_2(\mathbf{k}) + A_3^+(\mathbf{k}) A_3(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}) \} |k|^2 (dk). \quad (16)$$

Следует отметить, что выражение для  $H$  не содержит членов, зависящих от времени, тогда как в общей формуле (15) такие члены содержатся. Это является подтверждением правильности выбора лагранжевой функции. Без последнего члена в формуле (3) члены, содержащие время, не сократились бы.

§ 4. Переходя от классических уравнений к квантовым, мы должны прежде всего установить перестановочные соотношения для амплитуд  $A(\mathbf{k})$ ,  $\Phi(\mathbf{k})$  и их сопряженных  $A^+(\mathbf{k})$  и  $\Phi^+(\mathbf{k})$ . Это может быть сделано одним из двух способов: или путем непосредственного применения перестановочных соотношений Гейзенберга—Паули<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, Q'_\beta] &= 0; & [P_\alpha, P'_\beta] &= 0; \\ [P_\alpha, Q'_\beta] &= [P'_\alpha, Q_\beta] = \frac{\hbar}{i} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (17)$$

<sup>1</sup> Изменение порядка множителей произведено здесь несколько иначе, чем в оригинальной работе, а именно мы пишем здесь  $\Phi\Phi^+$  вместо  $\Phi^+\Phi$ . Точно так же исправлены формулы (18\*) и (21). Эти исправления сделаны в соответствии с работой 1934 г. Наст. сб., стр. 88—123 (В. Ф.).

<sup>2</sup> Heisenberg und Pauli. Zs. f. Phys., 56, 1 (1929), уравнение (11).

или путем использования уравнений движения<sup>1</sup>

$$\dot{F} = \frac{i}{\hbar} [\bar{H}, F]. \quad (18)$$

Мы применим второй способ. Выражая  $F$  через амплитуды, подставляя это выражение в (18) и сравнивая коэффициенты, получим

$$\begin{aligned} & \int |k|^3 \{ [A^+(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k})] F(\mathbf{k}') - \\ & - F(\mathbf{k}') [A^+(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k})] \} (dk) = \\ & = -\frac{1}{2} ch |k'| F(\mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (18^*)$$

Подставляя последовательно  $F = \Phi$  и  $F = A_l$  и предполагая, что для любых  $F$  и  $G$  все выражения вида

$$F(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') - G(\mathbf{k}') F(\mathbf{k}), \quad F(\mathbf{k}) G^+(\mathbf{k}') - G^+(\mathbf{k}') F(\mathbf{k})$$

и т. д. пропорциональны  $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , мы легко получим

$$\Phi^+(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}') - \Phi(\mathbf{k}') \Phi^+(\mathbf{k}) = \frac{ch}{2|k|} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'); \quad (17^*)$$

$$A_l^+(\mathbf{k}) A_m(\mathbf{k}') - A_m(\mathbf{k}') A_l^+(\mathbf{k}) = -\frac{ch}{2|k|} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}');$$

$$[\Phi(\mathbf{k}), \Phi(\mathbf{k}')] = 0; \quad [\Phi^+(\mathbf{k}), \Phi^+(\mathbf{k}')] = 0;$$

$$[A_l(\mathbf{k}), A_m(\mathbf{k}')] = 0; \quad [A_l^+(\mathbf{k}), A_m^+(\mathbf{k}')] = 0; \quad (17^{**})$$

$$[A_l(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k})] = 0; \quad [A_l^+(\mathbf{k}), \Phi(\mathbf{k})] = 0.$$

Те же самые результаты получаются путем непосредственного применения перестановочных соотношений (17).

Пользуясь уравнениями (1) и (2), мы сразу получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = i [|k| \mathbf{A}(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \Phi(\mathbf{k})]; \quad (1^*)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{k}) = i \mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k}). \quad (2^*)$$

Отсюда вытекают перестановочные соотношения для амплитуд переменных поля, а именно:

$$\left. \begin{aligned} E_l(\mathbf{k}) E_m^+(\mathbf{k}') - E_m^+(\mathbf{k}') E_l(\mathbf{k}) &= \frac{ch}{2|k|} [k^2 \delta_{lm} - k_l k_m] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ H_l(\mathbf{k}) H_m^+(\mathbf{k}') - H_m^+(\mathbf{k}') H_l(\mathbf{k}) &= \frac{ch}{2|k|} [k^2 \delta_{lm} - k_l k_m] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ E_s(\mathbf{k}) H_m^+(\mathbf{k}') - H_m^+(\mathbf{k}') E_s(\mathbf{k}) &= \frac{ch}{2} (k_n \delta_{sl} - k_l \delta_{sn}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \right\} (19)$$

<sup>1</sup> Heisenberg und Pauli. Zs. f. Phys., 56, 1 (1929), уравнение (21).

$$\left. \begin{aligned} [E_l(\mathbf{k}), E_m(\mathbf{k}')] &= 0; & [E_l^+(\mathbf{k}), E_m^+(\mathbf{k}')] &= 0 \\ [H_l(\mathbf{k}), H_m(\mathbf{k}')] &= 0; & [H_l^+(\mathbf{k}), H_m^+(\mathbf{k}')] &= 0 \\ [E_l(\mathbf{k}), H_m(\mathbf{k}')] &= 0; & [E_l^+(\mathbf{k}), H_m^+(\mathbf{k}')] &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (19^*)$$

где в последнем уравнении (19) числа  $l, m, n$  означают любую правовинтовую систему трех взаимно-перпендикулярных направлений.

§ 5. В заключение мы рассмотрим собственные значения энергии поля  $\bar{H}$ . Она состоит из четырех членов, коммутирующих друг с другом. Поэтому достаточно рассмотреть каждый член в отдельности, а затем взять сумму. Интегрируя по объему ( $\Delta k$ ) настолько малому, что внутри него можно рассматривать  $k$  как постоянную, мы получим

$$\text{соб. зн. } 2 \int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}} \mathbf{A}^+(\mathbf{k}) \mathbf{A}(\mathbf{k}) |k|^2 (d\mathbf{k}) = c |k| h (n_1 + n_2 + n_3) \quad (20)$$

и

$$\text{соб. зн. } 2 \int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}} \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}) |k|^2 (d\mathbf{k}) = c |k| h n_0, \quad (21)$$

где каждое из квантовых чисел  $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$  пробегает значения  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом,<sup>1</sup>

$$\text{соб. зн. } \bar{H}(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{k}) = c |k| h (n_1 + n_2 + n_3 - n_0). \quad (22)$$

Этот вывод страдает, однако, тем недостатком, что в нем не учитывается дополнительное условие (12), вследствие чего остается неопределенным знак энергии поля. Указанный недостаток легко исправить, воспользовавшись соотношением

$$\begin{aligned} k^2 (\mathbf{A}^+ \mathbf{A} - \Phi \Phi^+) &= [\mathbf{k} \times \mathbf{A}^+] \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{A}] + \\ &+ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^+) \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - |k| |\Phi|\} + |k| |\Phi| \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^+) - |k| |\Phi^+|\}. \end{aligned} \quad (23)$$

В силу дополнительного условия (12) и условия, к нему сопряженного, последние два члена в (23) дают нуль, первый же член положителен. Этот первый член содержит не все три, а только две поперечные к волновому вектору составляющие векторного потенциала. Соответствующие ему собственные значения отличаются от (20) только тем, что имеют множителем сумму не трех, а двух неотрицательных целых чисел, которая тоже равна неотрицательному целому числу. Окончательно мы имеем:

$$\text{соб. зн. } \bar{H}(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{k}) = c |k| h n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (24)$$

<sup>1</sup> Рассуждения конца § 5 (после формулы 21) изменены в соответствии с работой 1934 г. наст. сб., стр. 88—123 (В. Ф.).

## II. ПРИМЕНЕНИЕ К УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА

§ 6. Согласно идеям Дирака,<sup>1</sup> задача состоит в решении системы двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \varepsilon_1 \Phi(\mathbf{r}_1) \right) \psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t_1} = 0 \\ \left( \frac{1}{2m_2} p_2^2 + \varepsilon_2 \Phi(\mathbf{r}_2) \right) \psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t_2} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Полагая  $t = t_1 = t_2$  и замечая, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t_1} + \frac{\partial \psi}{\partial t_2}, \quad (26)$$

мы можем заключить, что решение системы (25), в котором положено  $t_1 = t_2 = t$ , должно удовлетворять уравнению

$$\left( W - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = -(\varepsilon_1 \Phi(\mathbf{r}_1) + \varepsilon_2 \Phi(\mathbf{r}_2)) \psi, \quad (27)$$

где

$$W = \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2. \quad (28)$$

Следует помнить, что эти уравнения — трехмерные и что, например, оператор  $p_1^2$ , выписанный полностью, есть

$$p_2^2 = \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right). \quad (29)$$

Положим

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots,$$

где  $\psi_n$  есть совокупность членов  $n$ -той степени относительно зарядов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Тогда мы будем иметь:

$$\left( W - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_0 = 0; \quad (30)$$

$$\left( W - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_1 = -(\varepsilon_1 \Phi(\mathbf{r}_1) + \varepsilon_2 \Phi(\mathbf{r}_2)) \psi_0; \quad (31)$$

$$\left( W - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_2 = -(\varepsilon_1 \Phi(\mathbf{r}_1) + \varepsilon_2 \Phi(\mathbf{r}_2)) \psi_1 \quad (32)$$

и т. д. Согласно общей теории части 1 мы имеем также

$$\Phi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \{ \Phi(\mathbf{k}) e^{-ic|\mathbf{k}|t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} + \Phi^+(\mathbf{k}) e^{ic|\mathbf{k}|t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} \} (dk) \quad (33)$$

и соответствующее уравнение для  $\Phi(\mathbf{r}_2)$ .

<sup>1</sup> Dirac, Proc. Roy. Soc., A 136, 453 (1932).

§ 7. Уравнения (30)–(32) удобно решать путем перехода в импульсное пространство по формуле

$$\psi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iint \varphi_n(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} (d\mathbf{p}_1) (d\mathbf{p}_2). \quad (34)$$

Здесь  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  векторы;  $(d\mathbf{p}_1) = dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z}$  и т. д.; величины  $p_{1x}, p_{1y}, \dots, p_{2z}$  — уже не операторы, а числа. Интегрирование производится от  $-\infty$  до  $+\infty$  по всем переменным.

В качестве решения уравнения (30) мы возьмем<sup>1</sup>

$$\psi_0 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_1^0 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2^0 \cdot \mathbf{r}_2)} \delta_{j_0}, \quad (35)$$

что, совместно с формулой преобразования (34), дает

$$\varphi_0 = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0) e^{-\frac{i}{\hbar} W^0 t} \delta_{j_0}. \quad (36)$$

Подстановка выражения (34) в уравнения (31) и (32) дает

$$\begin{aligned} & - \left( W - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_n(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \\ & = \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Phi(\mathbf{k}) \varphi_{n-1}(\mathbf{p}_1 - \hbar\mathbf{k}, \mathbf{p}_2) e^{-ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}) + \\ & + \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Phi^+(\mathbf{k}) \varphi_{n-1}(\mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}, \mathbf{p}_2) e^{ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}) + \\ & + \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}} \int \Phi(\mathbf{k}) \varphi_{n-1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}) e^{-ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}) + \\ & + \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}} \int \Phi^+(\mathbf{k}) \varphi_{n-1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k}) e^{ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}), \quad (37) \end{aligned}$$

где  $W$  по-прежнему имеет вид (28), но  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  теперь уже числа, а не операторы.

§ 8. Полагая  $n = 1$  и беря значение (36) для  $\varphi_0$ , мы получаем выражение для  $\left( W - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_1$ . Это уравнение может быть решено относительно  $\varphi_1$ . Повторяя процесс с  $n = 2$ , можно получить  $\varphi_2$ . Результат будет содержать интегралы, в которые войдут произведения

$$\Phi(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}'), \quad \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}'), \quad \Phi^+(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}'), \quad \Phi^+(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}').$$

Перестановочные соотношения для  $\Phi(\mathbf{k})$  и  $\Phi^+(\mathbf{k})$  с точностью до постоянного множителя аналогичны перестановочным соотношениям для операторов, выражающих рождение и исчезновение одного кванта в состоянии  $\mathbf{k}$ . Произведения  $\Phi^+(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k})$  и  $\Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k})$  пропорциональны  $n_{\mathbf{k}} + 1$  и  $n_{\mathbf{k}}$ , где  $n_{\mathbf{k}}$  есть число

<sup>1</sup> Символ  $\delta_{j_0}$  означает, что мы берем бесквантовое состояние ( $j$  — число световых квантов). См. Digas. Proc. Roy. Soc., A 136, 453 (1932) (В. Ф.).



квантов в состоянии  $k$ . Поэтому, если мы исходим из невозбужденного поля, т. е. если  $n_k = 0$ , мы должны положить в соответствии с перестановочными соотношениями (17)<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{k})\Phi^+(\mathbf{k}') &\sim 0, \\ \Phi^+(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}') &\sim \frac{c\hbar}{2|k|}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').\end{aligned}\quad (38)$$

Мы интересуемся той частью  $\psi$ , которая соответствует начальному и конечному состояниям без поля. Эта часть может быть получена, если отбросить члены  $\Phi(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}')$  и  $\Phi^+(\mathbf{k})\Phi^+(\mathbf{k}')$ , так как они соответствуют рождению и исчезновению двух квантов.

Принимая это во внимание, мы можем написать

$$\begin{aligned}-\left(W - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2 &\sim \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}}\int\Phi^+(\mathbf{k})\varphi_1(\mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}, \mathbf{p}_2)e^{ic|\mathbf{k}|t}(d\mathbf{k}) + \\ &+ \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}}\int\Phi^+(\mathbf{k})\varphi_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k})e^{ic|\mathbf{k}|t}(d\mathbf{k})\end{aligned}\quad (39)$$

и

$$\begin{aligned}-\left(W - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_1 &\sim \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}}\int\Phi(\mathbf{k})\varphi_0(\mathbf{p}_1 - \hbar\mathbf{k}, \mathbf{p}_2)e^{-ic|\mathbf{k}|t}(d\mathbf{k}) + \\ &+ \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}}\int\Phi(\mathbf{k})\varphi_0(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k})e^{-ic|\mathbf{k}|t}(d\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (40)$$

Решая уравнение (40) относительно  $\varphi_1$ , получим

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\sim -\frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\hbar^3}\Phi\left(\frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0}{\hbar}\right)\frac{\delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0)\delta_{j0}}{W - W^0 - c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|}\times \\ \times e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 + c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|)t} &- \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\hbar^3}\Phi\left(\frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0}{\hbar}\right)\frac{\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0)\delta_{j0}}{W - W^0 - c|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0|}\times \\ \times e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 + c|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0|)t} &.\end{aligned}\quad (41)$$

Подставляя выражение (41) в уравнение (39) и используя (38), будем иметь:

$$\begin{aligned}\left(W - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2 &= K\varphi_0 - \\ -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(2\pi)^3\hbar}\frac{\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0)\delta_{j0}}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|^2}e^{\frac{i}{\hbar}W^0t} &.\end{aligned}\quad (42)$$

Здесь мы пренебрегли величиной  $W - W^0$  по сравнению с  $c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|$ . Величина  $K$  равна  $K = \varepsilon_1^2 K_1 + \varepsilon_2^2 K_2$ , где  $K_1$  и  $K_2$  — бесконечные постоянные. Эти члены аналогичны бесконечному действию электрона самого на себя — трудность, остающаяся в этой теории.

<sup>1</sup> См. напр: Дирак. Основы квантовой механики, I изд., § 41, 67, 68 и особенно уравнения (11) и (12).

§ 9. Возвращаясь с помощью уравнения (34) к координатному пространству, получим

$$\left(W - ih \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi_2 \sim \left(K - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) \psi_0. \quad (43)$$

Это уравнение дает тот член в  $\psi_2$ , который соответствует состоянию без квантов. Величина  $\psi_1$  таких членов не содержит. Таким образом, второе приближение для  $\psi$  дает первую поправку к  $\psi_0$  и представляет собой первое приближение для той части  $\psi$ , которая нас интересует. Эта часть может быть, очевидно, получена решением уравнения

$$\left(W - ih \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - K\right) \psi = 0. \quad (44)$$

Это уравнение соответствует энергии взаимодействия  $\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ , т. е. кулоновскому взаимодействию.

### III. ПРИЛОЖЕНИЕ К УРАВНЕНИЮ ДИРАКА

§ 10. Здесь мы отступаем от предложения Дирака использовать квадратичный оператор Гамильтона и пользуемся дираковским линейным оператором. Вместо уравнения (27) мы имеем теперь

$$\left(D_1 + D_2 - ih \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi = (\varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2) \psi, \quad (45)$$

где

$$D_1 = \bar{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p}_1 + c^2 m_1 \beta_1, \quad (46)$$

$$D_2 = \bar{\alpha}_2 \cdot \mathbf{p}_2 + c^2 m_2 \beta_2,$$

$$V_1 = \bar{\alpha}_1 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_1), \quad (47)$$

$$V_2 = \bar{\alpha}_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_2).$$

Величины  $\bar{\alpha}_1 = (\alpha_{1x}, \alpha_{1y}, \alpha_{1z})$ ,  $\beta_1$ ;  $\bar{\alpha}_2 = (\alpha_{2x}, \alpha_{2y}, \alpha_{2z})$ ,  $\beta_2$  суть дираковские матрицы, относящиеся к внутренним переменным первого и второго заряда.

Рассматривая разложение  $V_1$  и  $V_2$  на плоские волны, соответственно уравнению (13) мы положим

$$\left. \begin{aligned} V_1(\mathbf{k}) &= \bar{\alpha}_1 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \\ V_2(\mathbf{k}) &= \bar{\alpha}_2 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Как и раньше, мы полагаем  $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$  и получаем уравнения, вполне аналогичные уравнениям (30) — (32). Мы можем по-прежнему использовать формулу преобразования

(34) в пространство импульсов. Вместо уравнения (37) мы теперь имеем:

$$\begin{aligned}
 & \left( D_1 + D_2 - ih \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_n(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \\
 & = \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}} \int V_1(\mathbf{k}) \varphi_{n-1}(\mathbf{p}_1 - h\mathbf{k}, \mathbf{p}_2) e^{-ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}) + \\
 & + \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}} \int V_1^+(\mathbf{k}) \varphi_{n-1}(\mathbf{p}_1 + h\mathbf{k}, \mathbf{p}_2) e^{ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}) + \\
 & + \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}} \int V_2(\mathbf{k}) \varphi_{n-1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 - h\mathbf{k}) e^{-ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}) + \\
 & + \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}} \int V_2^+(\mathbf{k}) \varphi_{n-1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 + h\mathbf{k}) e^{ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}). \quad (49)
 \end{aligned}$$

§ 11. Мы берем  $\psi_0$  в виде

$$\psi_0 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \psi_{00} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_1^0 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2^0 \cdot \mathbf{r}_2 - W^0 t)} \quad (50)$$

(множитель  $\delta_{j_0}$ , определяющий бесквантовое состояние, для краткости опущен). Здесь  $\psi_{00}$  есть функция импульса и внутренних переменных, удовлетворяющая уравнениям

$$D_1^0 \psi_{00} = W_1^0 \psi_{00}; \quad D_2^0 \psi_{00} = W_2^0 \psi_{00}. \quad (51)$$

$D_1^0$  и  $D_2^0$  даются уравнением (46), где  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  заменены на  $\mathbf{p}_1^0$  и  $\mathbf{p}_2^0$ ;  $W_1^0$  и  $W_2^0$  — энергии свободных электронов, соответствующие импульсам  $\mathbf{p}_1^0$  и  $\mathbf{p}_2^0$ , и

$$W^0 = W_1^0 + W_2^0. \quad (52)$$

Заданному значению импульса  $\mathbf{p}$  соответствуют четыре решения уравнения Дирака; мы их будем различать, когда это понадобится, индексом  $s$ , пробегающим четыре значения ( $s=1, 2, 3, 4$ ). При таких обозначениях волновая функция в пространстве импульсов равна

$$\varphi_0 = \psi_{00} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0) e^{-\frac{i}{\hbar} W^0 t}, \quad (53)$$

где

$$\psi_{00} = \psi_{00}(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0, s_1^0, s_2^0).$$

Подстановка выражения (53) в уравнение (49) дает

$$\begin{aligned}
 & \left( D_1 + D_2 - ih \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_1 = \\
 & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} \left\{ \varepsilon_1 \xi_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 + c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|)t} + \varepsilon_1 \eta_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 - c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|)t} + \right. \\
 & \left. + \varepsilon_2 \xi_2 e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 + c|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0|)t} + \varepsilon_2 \eta_2 e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 - c|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0|)t} \right\}, \quad (54)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= V_1 \left( \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0}{\hbar} \right) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0) \psi_{00} \\ \eta_1 &= V_1^+ \left( -\frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0}{\hbar} \right) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0) \psi_{00} \\ \xi_2 &= V_2 \left( \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0}{\hbar} \right) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0) \psi_{00} \\ \eta_2 &= V_2^+ \left( -\frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0}{\hbar} \right) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0) \psi_{00} \end{aligned} \right\}. \quad (55)$$

Отсюда ясно, что величина  $\varphi_1$  должна иметь вид правой части уравнения (54) с заменой  $\xi_s$  и  $\eta_s$  на

$$\xi_s' = (D_1 + D_2 - W^0 - c|\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_s^0|)^{-1} \xi_s = \theta_s \xi_s \quad (56)$$

и

$$\eta_s' = (D_1 + D_2 - W^0 + c|\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_s^0|)^{-1} \eta_s = \Omega_s \eta_s.$$

Величины  $\xi_1$  и  $\eta_1$  являются собственными функциями оператора  $D_2$  с собственным значением  $W_2^0$ . Так как все другие члены в операторах  $\theta_1$  и  $\Omega_1$ , определяемых уравнением (56), коммутируют с  $D_2$ , мы можем заменить в  $\theta_1$  и  $\Omega_1$  оператор  $D_2$  числом  $W_2^0$ . Пользуясь уравнением (52), мы запишем  $\theta_s$  и  $\Omega_s$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \theta_s &= (D_s - W_s^0 - c|\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_s^0|)^{-1} \\ \Omega_s &= (D_s - W_s^0 + c|\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_s^0|)^{-1} \end{aligned} \right\}. \quad (57)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} \left\{ \varepsilon_1 \theta_1 \xi_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 + c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|)t} + \right. \\ &+ \varepsilon_1 \Omega_1 \eta_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 - c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|)t} + \varepsilon_2 \theta_2 \xi_2 e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 + c|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0|)t} + \\ &\left. + \varepsilon_2 \Omega_2 \eta_2 e^{-\frac{i}{\hbar}(W^0 - c|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0|)t} \right\}, \quad (58) \end{aligned}$$

где  $\theta_s$  и  $\Omega_s$  определены уравнением (57).

Подстановка выражений (56) и (58) в формулу (49) для  $n=2$  дает шестнадцать членов, квадратичных в  $V$  и  $V^+$ , из которых мы исключаем восемь, содержащих  $VV$  и  $V^+V^+$ , как соответствующих двухквантовым переходам. Остаются восемь членов, содержащих только произведения  $VV^+$  и  $V^+V$ . Из них два содержат  $\varepsilon_1^2$ , два  $\varepsilon_2^2$  и четыре  $\varepsilon_1\varepsilon_2$ .

Члены, пропорциональные  $\varepsilon_1^2$  и  $\varepsilon_2^2$ , мы отбрасываем, как и в разделе II.

Члены в выражении для  $(D_1 + D_2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t})\varphi_2$ , содержащие

$\varepsilon_1 \varepsilon_2$ , ИМЕЮТ ВИД

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(2\pi\hbar)^3} \int (dk) \left\{ \left[ V_1(\mathbf{k}) e^{\frac{i}{\hbar} c |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0| t} \Omega_2 V_2^+ \left( -\frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0}{\hbar} \right) \delta(\mathbf{p}_1 - \hbar\mathbf{k} - \mathbf{p}_1^0) + \right. \right. \\ \left. \left. + V_2(\mathbf{k}) e^{\frac{i}{\hbar} c |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0| t} \Omega_1 V_1^+ \left( -\frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0}{\hbar} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \delta(\mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k} - \mathbf{p}_2^0) \right] e^{-\frac{i}{\hbar} (W^0 + ch|k|) t} + \right. \\ \left. + \left[ V_1^+(\mathbf{k}) e^{-\frac{i}{\hbar} c |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0| t} \theta_2 V_2 \left( \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0}{\hbar} \right) \delta(\mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k} - \mathbf{p}_1^0) + \right. \right. \\ \left. \left. + V_2^+(\mathbf{k}) e^{-\frac{i}{\hbar} c |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0| t} \theta_1 V_1 \left( \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0}{\hbar} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \delta(\mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k} - \mathbf{p}_2^0) \right] e^{-\frac{i}{\hbar} (W^0 - ch|k|) t} \right\} \psi_{00}. \quad (59) \end{aligned}$$

Мы должны положить здесь аналогично (38) и по тем же причинам

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}') \sim 0, \quad A_l^+(\mathbf{k}) A_m(\mathbf{k}') \sim 0 \\ A_l(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}') = \Phi^+(\mathbf{k}') A_l(\mathbf{k}) \sim 0 \\ \Phi^+(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}') \sim \frac{ch}{2|k|} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ A_l(\mathbf{k}) A_m^+(\mathbf{k}') \sim \frac{ch}{2|k|} \delta_{lm} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \right\}. \quad (60)$$

Выполняя интеграцию, мы получаем выражение, которое при подстановке в уравнение для  $\varphi_2$  дает

$$\left( D_1 + D_2 - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_2 \sim K\varphi_0 + U\varphi_0, \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} U\varphi_0 = - \frac{c\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0)}{2\hbar(2\pi)^3 |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|} \times \\ \times \{ \theta_1 + \theta_2 + \bar{\alpha}_1 \cdot \Omega_2 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_2 \cdot \Omega_1 \bar{\alpha}_1 \} \psi_{00} e^{-\frac{i}{\hbar} W^0 t}. \quad (62) \end{aligned}$$

Здесь члены, содержащие  $\theta$ , происходят от скалярного, а члены, содержащие  $\Omega$ , — от векторного потенциала.

Найдем матричный элемент  $U$ . Мы имеем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, s_1, s_2 | U | \mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0, s_1^0, s_2^0) = \\ = \int \int (dp_1') (dp_2') \widetilde{\varphi}_0(\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, s_1, s_2) U \times \\ \times \varphi_0(\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'; \mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0, s_1^0, s_2^0) = e^{\frac{i}{\hbar} W^0 t} \widetilde{\psi}_{00}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, s_1, s_2) \times \\ \times U\varphi_0(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0, s_1^0, s_2^0), \quad (63) \end{aligned}$$

где для  $\varphi_0$  использовано выражение (53). Подставив сюда выражение (62) для  $U\varphi_0$ , найдем

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, s_1, s_2 | U | \mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0, s_1^0, s_2^0) = \\ & = -\frac{c\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\hbar(2\pi)^3} \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_2^0)}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|} \times \end{aligned}$$

$$\times \widetilde{\Psi}_{00}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, s_1, s_2) B \Psi_{00}(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0, s_1^0, s_2^0) e^{\frac{i}{\hbar}(W - W^0)t}, \quad (64)$$

где

$$B = \theta_1 + \theta_2 + \bar{\alpha}_1 \Omega_2 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_2 \Omega_1 \bar{\alpha}_1. \quad (65)$$

Так как величина  $\psi_{00}$ , стоящая слева от  $B$ , есть собственная функция  $D_1$  и  $D_2$ , мы можем упростить формулу (64), заменив в ней операторы  $D_1$  и  $D_2$ , которые входят в  $B$ , числами  $W_1$  и  $W_2$ . Это дает

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{W_1 - W_1^0 - c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|} + \frac{1}{W_2 - W_2^0 - c|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0|} + \\ & + \left( \frac{1}{W_1 - W_1^0 + c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|} + \frac{1}{W_2 - W_2^0 + c|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0|} \right) \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2. \end{aligned} \quad (66)$$

Далее, мы имеем:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^0 + \mathbf{p}_2^0, \quad (67)$$

и поскольку нас интересуют только матричные элементы, для которых выполняется закон сохранения энергии,

$$W_1 + W_2 = W_1^0 + W_2^0. \quad (68)$$

Используя (67) и (68), выражение (66) можно привести к виду

$$B = -\frac{2c|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|}{c^2|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|^2 - (W_1 - W_1^0)^2} (1 - \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2). \quad (69)$$

С этим значением  $B$  формула (64) принимает вид

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, s_1, s_2 | U | \mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0, s_1^0, s_2^0) = \\ & = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\hbar(2\pi)^3} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_2^0) \times \\ & \times \frac{\widetilde{\Psi}_{00}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, s_1, s_2) (1 - \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2) \Psi_{00}(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0, s_1^0, s_2^0)}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|^2 - \frac{1}{c^2} (W_1 - W_1^0)^2}, \end{aligned} \quad (70)$$

что представляет собой формулу Мёллера,<sup>1</sup> записанную в нескольких иных обозначениях.

<sup>1</sup> M ö l l e r. Zs. f. Phys., 70, 786 (1931).

# О КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ<sup>1</sup>

П. А. М. Дирак, В. А. Фок и Б. Подольский

В первом разделе этой работы дается новое доказательство того, что новая форма релятивистской квантовой механики<sup>2</sup> эквивалентна теории Гейзенберга и Паули.<sup>3</sup> Доказательство обладает тем преимуществом, что делает наглядной физическую связь обеих теорий, и тем самым намечает путь к дальнейшему развитию, рассмотренному во втором разделе.

## 1. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТЕОРИЙ ДИРАКА И ГЕЙЗЕНБЕРГА—ПАУЛИ

§ 1. Недавно Розенфельд показал,<sup>4</sup> что новая форма релятивистской квантовой механики эквивалентна теории Гейзенберга и Паули. Однако доказательство Розенфельда трудно понимаемо и не проливает света на некоторые особенности связи между обеими теориями. Имея в виду дальнейшее развитие теории, мы приведем здесь более простое доказательство эквивалентности.

Рассмотрим систему, состоящую из двух частей  $A$  и  $B$ . Ее оператор Гамильтона  $H$  составлен из операторов Гамильтона  $H_a$  и  $H_b$  частей системы и из энергии взаимодействия  $V$ . Мы имеем:

$$H = H_a + H_b + V, \quad (1)$$

где

$$H_a = H_a(p_a, q_a, T); \quad H_b = H_b(p_b, q_b, T), \\ V = V(p_a, q_a, p_b, q_b, T),$$

а  $T$  есть время для всей системы. Волновая функция всей системы удовлетворяет уравнению<sup>5</sup>

$$\left( H - i\hbar \frac{\partial}{\partial T} \right) \psi(q_a, q_b, T) = 0 \quad (2)$$

<sup>1</sup> Впервые опубликовано в 1932 г. P. A. M. Dirac, V. A. Fock and B. Podolsky. *On Quantum electrodynamics*, *Sov. Phys.*, 2, 468—479 (1932).

<sup>2</sup> Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, A 136, 453 (1932).

<sup>3</sup> Heisenberg und Pauli, *Zs. f. Phys.*, 56, 1 (1929) и 59, 168 (1930).

<sup>4</sup> Rosenfeld. *Zs. f. Phys.*, 76, 729 (1932).

<sup>5</sup> Величина  $\hbar$  есть постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ .

и будет функцией указанных переменных. Произведем теперь каноническое преобразование<sup>1</sup>

$$\psi^* = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} \psi. \quad (3)$$

При этом динамические переменные, например  $F$ , преобразуются следующим образом:

$$F^* = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} F e^{-\frac{i}{\hbar} H_b T}. \quad (4)$$

Уравнение (2) принимает вид

$$\left( H_a^* + V^* - i\hbar \frac{\partial}{\partial T} \right) \psi^* = 0. \quad (5)$$

Поскольку  $H_a$  коммутирует с  $H_b$ , то  $H_a^* = H_a$ . С другой стороны, в силу того, что каноническое преобразование (3) не меняет функциональной связи между переменными, величина  $V^*$  будет такой же функцией от преобразованных переменных  $p^*$ ,  $q^*$ , какой была величина  $V$  от переменных  $p$ ,  $q$ . Но переменные  $p_a$  и  $q_a$  коммутируют с  $H_b$ . Поэтому

$$p_a^* = p_a; \quad q_a^* = q_a.$$

Следовательно,

$$V^* = V(p_a, q_a, p_b^*, q_b^*), \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_b^* &= e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} q_b e^{-\frac{i}{\hbar} H_b T} \\ p_b^* &= e^{\frac{i}{\hbar} H_b T} p_b e^{-\frac{i}{\hbar} H_b T} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

В § 7 будет показано, что уравнения (7) эквивалентны следующим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} (H_b q_b^* - q_b^* H_b) \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} (H_b p_b^* - p_b^* H_b) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $t$  — индивидуальное время части  $B$ .

<sup>1</sup> Каноническое преобразование (3) следует, строго говоря, писать в виде  $\psi^* = S\psi$ , где  $S$  есть унитарный оператор, представляющий решение уравнения  $-i\hbar S^{-1} \frac{\partial S}{\partial T} = H_b$ . При этом используемое в тексте соотношение

$S H_b - H_b S = 0$  остается в силе. Оператор  $S$  имеет вид  $S = e^{\frac{i}{\hbar} H_b T}$  только в том случае, когда  $H_b$  не зависит явно от  $T$  (В. Ф.).



Последние же уравнения представляют как раз уравнения движения для части  $B$ , взятой в отдельности и не возмущенной присутствием части  $A$ .

§ 2. Предположим теперь, что часть  $B$  соответствует полю, а часть  $A$  — частицам. Тогда уравнения (8) должны быть эквивалентны уравнениям Максвелла для пустого пространства. Уравнение (2) будет волновым уравнением теории Гейзенберга и Паули, тогда как уравнение (5), в котором возмущение выражено через потенциалы, соответствующие пустому пространству, будет волновым уравнением новой теории.

Таким образом, эта теория соответствует выделению и раздельному рассмотрению части системы, что бывает в некоторых вопросах более удобным.<sup>1</sup>

Оператор  $H_a$  может быть представлен в виде суммы операторов Гамильтона отдельных частиц. Взаимодействие между частицами в  $H_a$  не включается, так как оно рассматривается как результат взаимодействия частиц с полем. Аналогично,  $V$  есть сумма взаимодействий частиц с полем. Таким образом, можно написать

$$H_a = \sum_{s=1}^n (c\bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s c^2 \beta_s) = \sum_{s=1}^n H_s$$

$$V^* = \sum_{s=1}^n \epsilon_s [\Phi(\mathbf{r}_s, T) - \bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t)] = \sum_{s=1}^n V_s^*, \quad (9)$$

где  $\mathbf{r}_s$  — координаты  $s$ -той частицы, а  $n$  — число частиц.

Уравнение (5) примет вид

$$\left[ \sum_{s=1}^n (H_s + V_s^*) - ih \frac{\partial}{\partial T} \right] \psi^*(\mathbf{r}_s, J, T), \quad (10)$$

где символ  $J$  обозначает переменные, описывающие поле.

Введем наряду с общим временем  $T$  и временем поля  $t$  индивидуальные времена  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , свое для каждой частицы.

Уравнению (10) удовлетворяет общее решение системы уравнений

$$\left( R_s - ih \frac{\partial}{\partial t_s} \right) \psi^* = 0, \quad (11)$$

где

$$R_s = c\bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s c^2 \beta_s + \epsilon_s [\Phi(\mathbf{r}_s, t_s) - \bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s)]. \quad (11^*)$$

<sup>1</sup> Это имеет некоторую аналогию с принадлежащим Френкелю методом трактовки неполных систем (J. Frenkel. Sow. Phys., I, 99 (1932)).

Функция  $\psi^*$  в уравнении (10) получается из

$$\psi^* = \psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; t_1, t_2, \dots, t_n; J),$$

если все времена положить равными общему времени  $T$ .

Уравнения (11) являются уравнениями теории Дирака. Они, очевидно, релятивистски инвариантны и представляют обобщение уравнения (10). Релятивистская инвариантность здесь стала очевидной благодаря введению индивидуального времени для каждой из частиц.

§ 3. В дальнейшем нам понадобятся некоторые формулы квантования электромагнитного поля. Мы будем пользоваться формулами, полученными Фоком и Подольским.<sup>1</sup> Если исходить из функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) - \frac{1}{2} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} \right)^2 \quad (12)$$

и брать в качестве координат  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$  потенциалы  $(\Phi, A_1, A_2, A_3)$  причем сохранять обычные соотношения

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}; \quad \mathbf{H} = \operatorname{curl} \mathbf{A}, \quad (13)$$

то получим

$$\begin{aligned} (P_1, P_2, P_3) = \mathbf{P} &= -\frac{1}{c} \mathbf{E}, \\ P_0 &= -\frac{1}{c} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Гамильтонova функция будет равна

$$\begin{aligned} H &= \frac{c^2}{2} (\mathbf{P}^2 - P_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{l>m} \left( \frac{\partial Q_l}{\partial x_m} - \frac{\partial Q_m}{\partial x_l} \right)^2 - \\ &- c P_0 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial Q_l}{\partial x_l} - c \mathbf{P} \operatorname{grad} Q_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения движения имеют вид:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= c^2 \mathbf{P} - c \operatorname{grad} \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -c^2 P_0 - c \operatorname{div} \mathbf{A}, \\ \dot{\mathbf{P}} &= \Delta \mathbf{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - c \operatorname{grad} P_0, \\ \dot{P}_0 &= -c \operatorname{div} \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (16)$$

<sup>1</sup> В. Фок и Б. Подольский, этот сборник, стр. 55—69. Далее будет обозначаться как цитированная работа. Относительно других методов см.: Jordan und Pauli. Zs. f. Phys., 47, 151 (1928) или Fermi. Rend. Lincei, 9, 881 (1929). Функция Лагранжа (12) отличается от рассмотренной функции Ферми только четырехмерной расходимостью.

<sup>2</sup> Точка над функцией, относящейся к полю, означает производную по времени поля  $t$ .

После исключения величин  $\mathbf{P}$  и  $P_0$  уравнения (16) приводят к уравнению Даламбера для потенциалов  $\Phi$  и  $\mathbf{A}$ . Для того чтобы получить уравнения Максвелла для пустого пространства, необходимо положить  $P_0 = 0$ .

Правила квантования выражаются через амплитуды Фурье. Для каждой функции поля  $F = F(x, y, z, t)$  вводятся амплитуды  $F(\mathbf{k})$  и  $F^+(\mathbf{k})$  посредством равенства

$$F = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \{ F(\mathbf{k}) e^{-ic|\mathbf{k}|t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + F^+(\mathbf{k}) e^{ic|\mathbf{k}|t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \} (d\mathbf{k}), \quad (17)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — есть радиус-вектор,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  — волновой вектор, равный по величине  $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$  и, наконец,  $(d\mathbf{k}) = dk_x dk_y dk_z$ . Интегрирование производится по каждой компоненте  $k$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Уравнения движения, выраженные через амплитуды, могут быть написаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{k}) &= \frac{i}{c} [\mathbf{k} \Phi(\mathbf{k}) - |\mathbf{k}| \mathbf{A}(\mathbf{k})] = -\frac{1}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}) \\ P_0(\mathbf{k}) &= \frac{i}{c} [|\mathbf{k}| \Phi(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Остальные два уравнения являются алгебраическим следствием предыдущих. Перестановочные соотношения для потенциалов имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}') - \Phi(\mathbf{k}') \Phi^+(\mathbf{k}) &= \frac{ch}{2|\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ A_l^+(\mathbf{k}) A_m(\mathbf{k}') - A_m(\mathbf{k}') A_l^+(\mathbf{k}) &= -\frac{ch}{2|\mathbf{k}|} \delta_{lm} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (19)$$

тогда как все остальные комбинации амплитуд между собой коммутируют.

## II. МАКСВЕЛЛОВО ПОЛЕ

**§ 4.** В случае максвеллова поля необходимы следующие дополнительные соображения. Для определения переменных, наряду с обычными уравнениями движения, нужно использовать дополнительное условие  $P_0 = 0$  или  $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0$ . Это условие надо рассматривать не как равенство нулю некоторого квантово-механического оператора, а как условие, налагаемое на возможные функции  $\psi$ .

Это видно, например, из того факта, что операторное равенство  $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0$  противоречило бы перестановочным соотношениям. Таким образом, только те функции  $\psi$  должны

рассматриваться как имеющие физический смысл, которые удовлетворяют условию

$$-cP_0\psi = \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} \right) \psi = 0. \quad (20)$$

Условие (20), выраженное при помощи (18) через амплитуды, принимает вид

$$\begin{aligned} i [\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) - |k| \Phi(\mathbf{k})] \psi &= 0, \\ -i [\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^+(\mathbf{k}) - |k| \Phi^+(\mathbf{k})] \psi &= 0. \end{aligned} \quad (20^*)$$

К этим уравнениям необходимо, конечно, присоединить волновое уравнение

$$\left( H_b - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0, \quad (21)$$

где  $H_b$  есть оператор Гамильтона для поля

$$H_b = 2 \int \{ \mathbf{A}^+(\mathbf{k}) \mathbf{A}(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}) \} |k|^2 (dk), \quad (22)$$

как и в цитированной работе.

Если несколько уравнений  $A\psi = 0$ ,  $B\psi = 0$  и т. д. должны выполняться одновременно, то должно быть и  $AB\psi = 0$ ,  $BA\psi = 0$  и т. д., а значит и  $(AB - BA)\psi = 0$  и т. д. Все такие новые уравнения должны быть следствиями старых, т. е. они не должны налагать новых условий на  $\psi$ . Это можно рассматривать как критерий совместности исходных уравнений.

Применяя эти рассуждения к нашим уравнениям (20\*) и (21), получим

$$\begin{aligned} P_0(\mathbf{k}) P_0^+(\mathbf{k}') - P_0^+(\mathbf{k}') P_0(\mathbf{k}) &= \\ = c^2 [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})) (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{A}^+(\mathbf{k}')) - (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{A}^+(\mathbf{k}')) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}))] + \\ + c^2 |k| \cdot |k'| [\Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}') - \Phi^+(\mathbf{k}') \Phi(\mathbf{k})], \end{aligned} \quad (23)$$

так как все  $A_l$  и  $A_l^+$  коммутируют с  $\Phi$  и  $\Phi^+$ . Используя теперь перестановочные соотношения (19), мы будем иметь:

$$\begin{aligned} P_0(\mathbf{k}) P_0^+(\mathbf{k}') - P_0^+(\mathbf{k}') P_0(\mathbf{k}) &= \\ = \frac{c^2 \hbar}{2|k|} \left( \sum_{l,m} k_l k_m \hat{g}_{lm} - |k|^2 \right) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношение (24) выполняется как операторное равенство, вследствие чего

$$\left[ P_0(\mathbf{k}) P_0^+(\mathbf{k}') - P_0^+(\mathbf{k}') P_0(\mathbf{k}) \right] \psi = 0$$

не является условием, налагаемым на  $\psi$ . Таким образом, оба условия (20\*) совместны.

Так как  $P_0(\mathbf{k})$  и  $P_0^+(\mathbf{k})$  коммутируют с  $\frac{\partial}{\partial t}$ , то для проверки совместимости условия (20) с волновым уравнением (21) необходимо проверить соотношение

$$(H_b P_0 - P_0 H_b) \psi = 0. \quad (25)$$

В силу равенства  $\dot{P}_0 = \frac{i}{\hbar} (H_b P_0 - P_0 H_b)$  уравнение (25) может быть написано в виде  $\dot{P}_0 \psi = 0$  или в компонентах Фурье

$$\dot{P}_0(\mathbf{k}) \psi = -ic |k| P_0(\mathbf{k}) \psi = 0,$$

а также

$$\dot{P}_0^+(\mathbf{k}) \psi = ic |k| P_0^+(\mathbf{k}) \psi = 0.$$

Но эти два уравнения представляют как раз условия (20\*). Таким образом, условия (20) и (21) также совместны.

§ 5. Дополнительное условие (20) является не уравнением движения, а уравнением связи, налагаемым на начальные координаты и скорости, причем это уравнение связи выполняется в последующее время уже в силу уравнений движения. Тот факт, что в максвелловом случае существует такое уравнение связи и обуславливает необходимость тех дополнительных соображений, которые были проведены в начале § 4.

Оказывается, что при наличии частиц уравнение связи должно быть видоизменено, с тем, чтобы новое уравнение связи выполнялось в силу уравнений движения во все времена.

Условия для  $\psi$  в форме (20\*) не совместны с уравнениями (11). Однако нетрудно видеть, что их можно заменить несколько иной совокупностью условий,<sup>1</sup> а именно:

$$C(\mathbf{k}) \psi = 0; \quad C^+(\mathbf{k}) \psi = 0, \quad (26^*)$$

где

$$C(\mathbf{k}) = i [ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})) - |k| \Phi(\mathbf{k}) ] + \\ + \frac{i}{2(2\pi)^{3/2} |k|} \sum_{s=1}^n \varepsilon_s e^{ic|k|t_s - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s}. \quad (27^*)$$

Члены в  $C(\mathbf{k})$ , которые не содержатся в  $-cP_0(\mathbf{k})$ , являются функциями от координат и времен частиц. Они коммутируют с операторами  $H_b - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  и  $P_0(\mathbf{k})$  и друг с другом. Поэтому уравнения (26\*) совместны друг с другом и с уравнением (21). Остается показать, что уравнения (26\*) совместны также и

<sup>1</sup> Мы опускаем здесь, в отличие от § 1 и 2, звездочку и пишем в дальнейшем  $\psi$  вместо  $\psi^*$ .

с уравнением (11), т. е. что  $C(\mathbf{k})$  и  $C^+(\mathbf{k})$  коммутируют с  $R_s - ih \frac{\partial}{\partial t_s}$ .

Покажем это для  $C(\mathbf{k})$ . Обозначим, как обычно,  $AB - BA$  через  $[A, B]$ . Очевидно, достаточно показать, что

$$\left[ C(\mathbf{k}), \mathbf{p}_s - \frac{\varepsilon_s}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s) \right] = 0 \quad (28)$$

и

$$\left[ C(\mathbf{k}), ih \frac{\partial}{\partial t_s} - \varepsilon_s \Phi(\mathbf{r}_s, t) \right] = 0. \quad (29)$$

Учитывая вид  $C(\mathbf{k})$ , можно преобразовать эти два уравнения соответственно в

$$[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})), \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s)] - \frac{c e^{i c |\mathbf{k}| t_s}}{2 (2\pi)^{3/2} |\mathbf{k}|} [e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s}, \mathbf{p}_s] = 0 \quad (30)$$

и

$$[|\mathbf{k}| \Phi(\mathbf{k}), \Phi(\mathbf{r}_s, t_s)] + \frac{e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s}}{2 (2\pi)^{3/2} |\mathbf{k}|} \left[ e^{i c |\mathbf{k}| t_s}, ih \frac{\partial}{\partial t_s} \right] = 0. \quad (31)$$

С другой стороны, мы имеем:

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})), \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s)] = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})), \mathbf{A}^+(\mathbf{k}')] e^{i c |\mathbf{k}'| t_s - i \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_s} (d\mathbf{k}') \end{aligned}$$

в силу уравнения (17) и в силу того, что  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$  коммутирует с  $\mathbf{A}(\mathbf{k}')$ . Используя перестановочные соотношения и выполняя интегрирование, получаем

$$[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})), \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s)] = \frac{c h \mathbf{k}}{2 (2\pi)^{3/2} |\mathbf{k}|} e^{i c |\mathbf{k}| t_s - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s}. \quad (32)$$

Далее

$$[e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s}, \mathbf{p}_s] = ih \text{grad} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s} = h \mathbf{k} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s}. \quad (33)$$

Вводя эти выражения в уравнение (30), мы видим, что оно удовлетворяется. Аналогично убеждаемся, что уравнение (31) также удовлетворяется в силу соотношений

$$[|\mathbf{k}| \Phi(\mathbf{k}), \Phi(\mathbf{r}_s, t_s)] = - \frac{c h}{2 (2\pi)^{3/2}} e^{i c |\mathbf{k}| t_s - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_s} \quad (34)$$

и

$$\left[ e^{i c |\mathbf{k}| t_s}, ih \frac{\partial}{\partial t_s} \right] = c h |\mathbf{k}| e^{i c |\mathbf{k}| t_s}. \quad (35)$$

Таким образом, условия (26\*) удовлетворяют всем требованиям совместности. Можно также показать, что эти требования совместности определяют  $C(\mathbf{k})$  однозначно с точностью до аддитивной постоянной, если только искать  $C(\mathbf{k})$  в виде

$$C(\mathbf{k}) = i [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})) - |\mathbf{k}| \Phi(\mathbf{k})] + \sum_s f(\mathbf{r}_s, t_s).$$

§ 6. Покажем теперь, что введение отдельных времен для поля и для каждой частицы позволяет использовать всю электродинамику вакуума, изложенную в § 3 и в цитированной работе, если не считать изменения, рассмотренного в § 5. Действительно, покажем, что максвелловские уравнения электродинамики, содержащие плотность заряда и плотность тока, становятся условиями, налагаемыми на функцию  $\psi$ .

Для удобства соберем вместе наши основные уравнения. Уравнения электродинамики вакуума имеют вид

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}; \quad \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A}, \quad (13)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = 0; \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0. \quad (36)$$

Волновые уравнения имеют вид

$$\left( R_s - ih \frac{\partial}{\partial t_s} \right) \psi = 0, \quad (11)$$

где

$$R_s = c \bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s c^2 \beta_s - \varepsilon_s \bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s) + \varepsilon_s \Phi(\mathbf{r}_s, t_s). \quad (11^*)$$

Дополнительными условиями для функции  $\psi$  являются

$$C(\mathbf{k}) \psi = 0; \quad C^+(\mathbf{k}) \psi = 0, \quad (26^*)$$

где

$$C(\mathbf{k}) = i [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})) - |k| \Phi(\mathbf{k})] + \\ + \frac{i}{2(2\pi)^{3/2} |k|} \sum_{s=1}^n \varepsilon_s e^{ic|k|t_s - ik \cdot \mathbf{r}_s}. \quad (27^*)$$

Преобразуем последние два уравнения, переходя по формуле (17) от амплитуд  $C(\mathbf{k})$  и  $C^+(\mathbf{k})$  к функции поля  $C(\mathbf{r}, t)$ . Мы получим

$$C(\mathbf{r}, t) \psi = 0, \quad (26)$$

где

$$C(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \Delta (X - X_s). \quad (27)$$

Здесь  $X$  и  $X_s$  — четырехмерные векторы:  $X = (x, y, z, t)$ ,  $X_s = (x_s, y_s, z_s, t_s)$ , а  $\Delta$  — так называемая инвариантная функция дельта<sup>1</sup>

$$\Delta(X) = \frac{1}{r} [\delta(r + ct) - \delta(r - ct)]. \quad (37)$$

Из уравнений (13) непосредственно вытекает

$$\text{div } \mathbf{H} = 0; \quad \text{curl } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (38)$$

<sup>1</sup> См.: Jordan und Pauli. Zs. f. Phys., 47, 159 (1928).

так что эти уравнения сохраняются в качестве квантовомеханических операторных равенств.

Используя уравнения (13) и (36) и условие (26), прямым вычислением получаем

$$\left(\operatorname{curl} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \psi = \operatorname{grad} \sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \Delta (X - X_s) \psi \quad (39)$$

и

$$(\operatorname{div} \mathbf{E}) \psi = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} \sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \Delta (X - X_s) \right) \psi. \quad (40)$$

Рассмотрим теперь, что произойдет с нашими уравнениями, если положить в них  $t = t_1 = t_2 = \dots = t_n = T$  (или короче  $t_s = T$ ), как это подразумевается в уравнениях Максвелла.

Для любой величины  $f(t, t_1, t_2, \dots, t_n)$  мы имеем

$$\frac{\partial f(T, T, \dots, T)}{\partial T} = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_n} \right]_{t_s=T}, \quad (41)$$

причем для каждой из  $n$  частных производных  $\frac{\partial}{\partial t_s}$  имеется уравнение движения

$$\frac{\partial f}{\partial t_s} = \frac{i}{h} (R_s f - f R_s). \quad (42)$$

Если положить  $f = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  или  $f = \Phi(\mathbf{r}, t)$ , то, так как оба эти оператора коммутируют с  $R_s$ , будет  $\frac{\partial f}{\partial t_s} = 0$  и мы получим

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial T}. \quad (43)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T} - \operatorname{grad} \Phi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{curl} \mathbf{A}, \quad (44)$$

так что форма связи между полем и потенциалами сохраняется. Для  $t = t_s$  имеет место равенство  $\Delta (X - X_s) = 0$  откуда  $\operatorname{grad} \Delta (X - X_s) = 0$ . Используя это равенство, а также уравнения (26), (39) и (40), получаем

$$\left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial T}\right) \psi = 0; \quad (45)$$

$$\left(\operatorname{curl} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)_{t_s=T} \psi = 0; \quad (46)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{E}) \psi = -\sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta (X - X_s) \right]_{t=t_s} \psi. \quad (47)$$



Для дальнейшего преобразования уравнения (46) необходимо использовать уравнения (41) и (42), из которых следует

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}\right)_{t_s - \tau} = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial T} - \frac{i}{ch} \sum_{s=1}^n [R_s, E]. \quad (48)$$

Величина  $[R_s, E]$  легко вычисляется, так как единственный член в  $R_s$ , который не коммутирует с  $E$ , есть  $-\varepsilon_s \bar{\alpha}_s \cdot A(\mathbf{r}_s, t_s)$ , причем  $-\frac{1}{c} E$  является канонически сопряженным импульсом по отношению к  $A$ . Таким путем получается

$$[R_s, E] = ich \varepsilon_s \bar{\alpha}_s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s). \quad (49)$$

Для преобразования уравнения (47) необходимо только помнить,<sup>1</sup> что

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta(X)\right)_{t=0} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (50)$$

Таким образом, уравнения (46) и (47) принимают вид

$$\left(\text{curl } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}\right) \psi = \sum_{s=1}^n \varepsilon_s \bar{\alpha}_s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \psi \quad (51)$$

и

$$(\text{div } \mathbf{E}) \psi = \sum_{s=1}^n \varepsilon_s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \psi. \quad (52)$$

Эти уравнения как раз и являются остальными уравнениями Максвелла, причем они выступают в качестве условий, налагаемых на функцию  $\psi$ . Уравнение (52) является дополнительным условием теории Гейзенберга — Паули.

§ 7. Мы должны теперь вывести уравнение (8) параграфа 1. Напомним, что преобразование (7) является каноническим преобразованием, которое сохраняет как алгебраическую связь между переменными, так и вид уравнений движения.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Heisenberg und Pauli. Zs. f. Phys., 56, 34 (1929).

<sup>2</sup> Символы  $\frac{\partial q}{\partial T}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial t_s}$  и т. д., написанные с круглыми  $\partial$ , означают здесь частные производные в том смысле, что производные эти берутся по разным переменным  $T$ ,  $t$  или  $t_s$ , но не в смысле явной зависимости данного оператора  $q$  от соответствующей переменной. Если писать производные в этом последнем смысле с буквой  $\delta$ , то выражение, называемое обычно «полной» производной оператора  $q$  по времени, напишется

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\delta q}{\delta t} + \frac{i}{h} (Hq - qH).$$

(Заметим, что в этом выражении обычно пишут  $d$  вместо  $\delta$  и  $\delta$  вместо  $\delta$ ) (В. Ф.).

В только что введенных более точных обозначениях уравнения движения напишутся

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} [H^*, q_b^*]_{t_s=T} \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} [H^*, p_b^*]_{t_s=T} \end{aligned} \right\}. \quad (53)$$

Как уже было сказано по поводу уравнения (5), мы имеем:

$$H^* = H_a + H_b + V^*. \quad (54)$$

Так как величины  $q_b$  и  $p_b$  коммутируют с  $H_a$ , то  $q_b^*$  и  $p_b^*$  будут коммутировать с  $H_a^*$ , а значит и с  $H_a$ . Поэтому уравнения (53) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} \{ [H_b, q_b^*] + [V^*, q_b^*] \}_{t_s=T} \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \frac{i}{\hbar} \{ [H_b, p_b^*] + [V^*, p_b^*] \}_{t_s=T} \end{aligned} \right\}. \quad (55)$$

С другой стороны, уравнения (41) и (42) дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial q_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^n [R_s, q_b^*] \right\}_{t_s=T} \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial p_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sum_{s=1}^n [R_s, p_b^*] \right\}_{t_s=T} \end{aligned} \right\}. \quad (56)$$

Но единственный член в  $R_s$ , не коммутирующий с  $p_b^*$  и  $q_b^*$ , есть  $V_s^*$ . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} [R_s, q_b^*] &= [V_s^*, q_b^*] \\ [R_s, p_b^*] &= [V_s^*, p_b^*] \end{aligned} \right\}. \quad (57)$$

Так как  $\sum_s V_s^* = V^*$ , то уравнения (56) переходят в следующие

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial q_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [V^*, q_b^*] \right\}_{t_s=T} \\ \frac{\partial p_b^*}{\partial T} &= \left\{ \frac{\partial p_b^*}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [V^*, p_b^*] \right\}_{t_s=T} \end{aligned} \right\}. \quad (58)$$

Сравнение уравнений (55) и (58) дает окончательно

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial q_b^*}{\partial t} \right)_{t=T} &= \frac{i}{\hbar} [H_b, q_b^*]_{t=T} \\ \left( \frac{\partial p_b^*}{\partial t} \right)_{t=T} &= \frac{i}{\hbar} [H_b, p_b^*]_{t=T} \end{aligned} \right\}. \quad (59)$$

Эти уравнения являются как раз уравнениями (8), написанными в более точных обозначениях.

---

В. А. Фок

Настоящая работа представляет попытку дать математическую формулировку предложенной Дираком теории состояний электронов с отрицательной энергией и установить общий вид волновых уравнений в конфигурационном пространстве электронов и позитронов.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Для формулировки теории Дирака необходимо прежде всего дать определение положительных и отрицательных состояний электрона. Если обозначить через  $T$  оператор кинетической энергии электрона и через  $|T|$  оператор для ее абсолютного значения, то оператор для знака кинетической энергии будет иметь вид

$$\varepsilon = \frac{T}{|T|}. \quad (1)$$

Собственная функция  $\psi_+$  оператора  $\varepsilon$ , соответствующая собственному значению  $\varepsilon = +1$ , описывает „положительное“ состояние, а собственная функция  $\psi_-$ , соответствующая  $\varepsilon = -1$ , описывает „отрицательное“ состояние электрона. Произвольная волновая функция  $\psi$  может быть представлена в виде суммы  $\psi = \psi_+ + \psi_-$ . Совокупность матричных элементов какого-либо оператора, соответствующих переходам от  $\psi_+$  к  $\psi_-$  представляет, по Шредингеру, нечетную часть этого оператора, тогда как остальные матричные элементы представляют четную его часть.

При формулировке дираковской теории позитронов приходится прибегать к шредингеровскому разложению операторов на четную и нечетную часть. При этом оказывается весьма затруднительным удовлетворить требованию инвариантности по отношению к прибавке градиента к потенциалам (Eichinvarianz). В самом деле, во-первых, шредингеровское разделение

<sup>1</sup> Впервые опубликовано в 1933 г. ДАН СССР, нов. серия, № 6, стр. 265—267 (1933).

операторов (по крайней мере в его первоначальной форме) не обладает этим свойством инвариантности, а во-вторых, и самый оператор полной энергии электрона не инвариантен. Поэтому дираковская теория позитронов также не является инвариантной в указанном смысле.

## 2. КВАНТОВАННАЯ ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ

Предположим, что вид оператора энергии, а также разделение состояний на четные и нечетные нами установлены. После этого мы можем, для дальнейшей формулировки дираковской теории, воспользоваться результатами Гейзенберга, которые были получены им в его работе о „дырках“ в электронных оболочках атомов.<sup>1</sup>

Мы будем рассматривать такое представление операторов, в котором оператор  $\varepsilon$  (1) приведен к диагональному виду. Остальные независимые переменные (например, спин и импульс) мы обозначим через  $q$ . Квантованная волновая функция удовлетворяет правилам коммутации

$$\left. \begin{aligned} \psi(q, \varepsilon) \psi^+(q', \varepsilon') + \psi^+(q', \varepsilon') \psi(q, \varepsilon) &= \delta(q - q') \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \\ \psi(q, \varepsilon) \psi(q', \varepsilon') + \psi(q', \varepsilon') \psi(q, \varepsilon) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Обобщая соответствующую формулу Гейзенберга, введем, согласно уравнению

$$\psi(q, +1) = \varphi(q, 1); \quad \psi^+(q, -1) = \varphi(q, 2) \quad (3)$$

вместо  $\psi$ , функцию  $\varphi$ . Правила коммутации для  $\varphi(q, \alpha)$  ( $\alpha=1, 2$ ) будут тогда иметь тот же вид, как и для  $\psi(q, \varepsilon)$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(q, \alpha) \varphi^+(q', \alpha') + \varphi^+(q', \alpha') \varphi(q, \alpha) &= \delta(q - q') \delta_{\alpha\alpha'} \\ \varphi(q, \alpha) \varphi(q', \alpha') + \varphi(q', \alpha') \varphi(q, \alpha) &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Введенное Дираком предположение о заполнении всех отрицательных состояний может быть теперь сформулировано следующим образом. В операторах вторичного квантования нужно выразить  $\psi(q, \varepsilon)$  и  $\psi^+(q, \varepsilon)$  через  $\varphi(q, \alpha)$  и  $\varphi^+(q, \alpha)$  и рассматривать  $\varphi(q, \alpha)$  как квантованную волновую функцию частицы, которая может быть либо электроном ( $\alpha=1$ ), либо позитроном ( $\alpha=2$ ).

## 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАНТОВАННОГО ОПЕРАТОРА

Мы применим сформулированное выше правило к оператору, который в своей первоначальной форме (т. е. выраженный через  $\psi$  и  $\psi^+$ ) действует на одну частицу. Для определенности

<sup>1</sup> W. Heisenberg. Zum Paulischen Ausschliessungsprinzip. Ann. d. Physik [5], 10, p. 888 (1931).

мы будем говорить об операторе энергии  $H$ . Пусть матрица этого оператора, в принятом нами представлении, будет

$$(q, \varepsilon | H | q', \varepsilon').$$

Матричные элементы с  $\varepsilon = \varepsilon'$  образуют четную, а элементы с  $\varepsilon \neq \varepsilon'$  нечетную часть оператора. Первую мы обозначим через  $H_g$ , а вторую через  $H_u$ . Квантованный оператор  $H$  будет иметь вид

$$H = \sum_{\varepsilon \varepsilon'} \iint dq dq' \psi^+(q, \varepsilon) (q, \varepsilon | H | q', \varepsilon') \psi(q', \varepsilon'). \quad (5)$$

Мы рассмотрим сперва члены с  $\varepsilon = \varepsilon'$ , образующие четную часть  $H_g$ , и введем обозначения

$$\begin{aligned} (q, +1 | H | q', +1) &= (q | H_1 | q'), \\ (q', -1 | H | q, -1) &= \overline{(q, -1 | H | q', -1)} = - (q | H_2 | q'). \end{aligned} \quad (6)$$

В выражении для  $H_g$  мы выразим согласно (3)  $\psi$  через  $\varphi$ , и преобразуем полученное выражение так, чтобы  $\varphi^+$  всегда стояло слева от  $\varphi$ . На основании правил коммутации (4), пользуясь обозначениями (6), мы получаем выражение

$$\begin{aligned} H_g &= \sum_{\alpha=1}^2 \iint dq dq' \varphi^+(q, \alpha) (q | H_\alpha | q') \varphi(q', \alpha) - \\ &\quad - \int dq (q | H_2 | q). \end{aligned} \quad (7)$$

Последний член в (7) представляет бесконечно большую отрицательную постоянную (бесконечно большую энергию электронов в отрицательных состояниях); этот член мы должны отбросить.

Если под  $H$  мы будем понимать оператор  $T$  для кинетической энергии частицы, то  $H_1$  и  $H_2$  будут представлять кинетические энергии электрона и позитрона. Оба эти оператора имеют только положительные собственные значения: в этом и состояла цель введенной Дираком гипотезы.

Нечетную часть  $H_u$  оператора  $H$ , введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} (q, +1 | H | q', -1) &= (q | U | q') \\ (q, -1 | H | q', +1) &= (q | U^+ | q') \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

можно переписать без существенных изменений. Тогда для  $H_u$  мы получим выражение

$$\begin{aligned} H_u &= \iint dq dq' \varphi^+(q, 1) \varphi^+(q', 2) (q | U^+ | q') + \\ &\quad + \iint dq dq' (q | U^+ | q') \varphi(q, 2) \varphi(q', 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Оператор  $H_u$  будет коммутировать с оператором  $L$

$$L = (-e) \int dq [\varphi^+(q, 1) \varphi(q, 1) - \varphi^+(q, 2) \varphi(q, 2)] \quad (10)$$

для полного заряда, но не будет коммутировать с оператором  $N$

$$N = \int dq [\varphi^+(q, 1) \varphi(q, 1) + \varphi^+(q, 2) \varphi(q, 2)] \quad (11)$$

для полного числа частиц (электронов и позитронов). Поэтому, если в квантовом волновом уравнении встречается оператор вида  $H_u$ , то он вызывает изменение числа частиц. В теории Дирака это изменение обусловлено, таким образом, нечетной частью оператора энергии.

#### 4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Предположим, что между частицами нет взаимодействия, так что оператор энергии имеет вид  $H = H_g + H_u$ . Этот оператор действует на последовательность функций

$$\varphi_1(q_1, \alpha_1); \varphi_2(q_1, \alpha_1; q_2, \alpha_2); \dots \varphi_n(q_1, \alpha_1 \dots q_n, \alpha_n), \quad (12)$$

которые все антисимметричны относительно переменных  $q_i, \alpha_i$ . Для этих функций  $\varphi_n$  получается система уравнений вида

$$\begin{aligned} & [H_{\alpha_1}(q_1) + \dots + H_{\alpha_n}(q_n)] \varphi_n(q_1, \alpha_1; \dots q_n, \alpha_n) - i\hbar \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \\ & = -\sqrt{n(n-1)} \{ (q_1 | U | q_2) \delta_{1\alpha_1} \delta_{2\alpha_2} \varphi_{n-2}(q_3, \alpha_3, \dots q_n, \alpha_n) \}_{ant} - \\ & - \sqrt{n(n+1)} \iint dq dq' (q' | U^+ | q) \varphi_{n+2}(q, 1; q', 2; q_1, \alpha_1; \dots q_n, \alpha_n) \end{aligned} \quad (13)$$

(значок *ant* при первом члене правой части означает, что соответствующее выражение нужно антисимметризовать относительно переменных  $q_1, \alpha_1; \dots q_n, \alpha_n$ ). Уравнения (13) связывают волновые функции, соответствующие либо только четному, либо только нечетному числу частиц. Физически это понятно, так как вследствие сохранения заряда новые частицы могут образовываться лишь парами (один электрон и один позитрон). Вероятность того, что имеется ровно  $n$  частиц, выражается формулой

$$W_n = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \int dq_1 \dots dq_n |\varphi_n(q_1, \alpha_1; \dots q_n, \alpha_n)|^2. \quad (14)$$

Сумма вероятностей  $\left( \sum_n W_n \right)$  не зависит от времени, как это и должно быть.

Если бы мы при составлении волнового уравнения учли взаимодействие частиц, то в уравнениях (13) к операторам  $H_{\alpha}$  прибавилась бы „четно-четная часть“, а к оператору  $U$  — „нечетно-четная“ часть оператора энергии взаимодействия. Кроме

того, прибавились бы новые члены, происходящие от „нечетно-нечетной“ части этого оператора и соответствующие одновременному возникновению двух пар частиц.

Из физических соображений следовало бы ожидать, что в уравнениях (13) члены, содержащие операторы  $U$  и  $U^+$ , могут рассматриваться, как возмущения, создающие некоторую (вообще говоря, малую) вероятность изменения числа частиц. К сожалению, такое толкование этих членов встречает, с математической стороны, препятствие в том, что при решении уравнений эти члены приводят к бесконечностям (например, вида  $\text{Spur } UU^+$ ).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Заключительные замечания (§ 5) нами опущены (В. Ф.).



# О КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ <sup>1</sup>

В. А. Фок

Целью работы является упрощение математического аппарата квантовой электродинамики. Работа состоит из трех разделов. В первом разделе разрабатывается математический аппарат вторичного квантования для случая статистики Бозе, причем вводится волновой функционал в виде бесконечного ряда многократных интегралов. Во втором разделе рассматривается электродинамика вакуума и находится общий вид функционала, удовлетворяющего дополнительным условиям. В третьем разделе рассматривается взаимодействие поля и вещества, причем исходным пунктом является дираковская формулировка проблемы многих тел с различными временами; рассмотрение ведется для случая фиксированного числа материальных частиц.

С помощью канонического преобразования исключаются дополнительные условия, налагаемые на волновой функционал, а затем вычисляются преобразованные операторы кинетической энергии и импульса и определяются волновые уравнения. Далее времена частиц полагаются равными друг другу и вводится уравнение, соответствующее волновому уравнению Гейзенберга и Паули, а также выводятся уравнения для отдельных волновых функций в импульсном пространстве световых квантов.

В заключение на простых примерах (формула Брейта, формула Меллера для энергии взаимодействия, естественная ширина спектральных линий) показано, как надо применять развиваемый здесь математический аппарат к конкретным вопросам.

## ВВЕДЕНИЕ

Целью этой работы <sup>2</sup> является разработка и упрощение математического аппарата квантовой электродинамики. Эта теория, созданная Дираком <sup>3</sup> и Гейзенбергом и Паули <sup>4</sup> представляет последовательное обобщение классической электродинамики, удовлетворяющее принципу соответствия [...]. При-

---

<sup>1</sup> Впервые опубликовано в 1934 г. V. Fock. Zur Quantenelektrodynamik, Sow. Phys., 6, 425—469 (1934).

<sup>2</sup> Содержание работы было доложено в ноябре 1932 г. на теоретическом семинаре в физико-техническом институте в Ленинграде.

<sup>3</sup> P. A. M. Dirac. Relativistic Quantum Mechanics. Proc. Roy. Soc., A 136, 453 (1932); P. Dirac, V. Fock and B. Podolsky. On Quantum Electrodynamics. Sow. Phys., 2, 468 (1932).

<sup>4</sup> W. Heisenberg und W. Pauli. Zur Quantendynamik den Wellenfelder. Zs. f. Phys., 59, 1 (1929); Zur Quantentheorie der Wellenfelder. II. Zs. f. Phys., 59, 168 (1929).

сущие теории трудности, связанные с бесконечной собственной энергией электрона, хорошо известны [...]. Не следует, однако, забывать, что все результаты той квантовой теории излучения, которая представляет непосредственное применение принципа соответствия, могут быть получены из квантовой электродинамики. Правда при этом часто приходится поступаться математической строгостью. Физический смысл применяемых при этом „незаконных“ математических операций (обрывание разложения в ряд на определенной степени постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , отбрасывание расходящихся интегралов и т. д.) заключается в том, что при помощи них пытаются устранить неувязки, происходящие от несовершенства теории. К числу результатов, могущих быть полученными из квантовой электродинамики, относятся также и те, которые (как, например, формулы Брейта и Мёллера для взаимодействия электронов) первоначально были выведены совсем другим путем и лишь затем обоснованы квантовой электродинамикой.

Присущие квантовой электродинамике трудности вызвали сомнения в правильности этой теории; даже подвергался обсуждению вопрос, применима ли она вообще в собственно квантовой области.<sup>1</sup> Это последнее сомнение оказалось однако необоснованным. В фундаментальной работе Бора и Розенфельда,<sup>2</sup> выяснившей область применимости теории, было показано, что во всех тех случаях, когда можно пренебречь атомистической структурой измерительного прибора и когда рассматриваемые расстояния и длины волн значительно превосходят классический радиус электрона, применение квантовой электродинамики к вопросу об измеримости электромагнитного поля ведет к разумным результатам.

Поскольку граница применимости теории может считаться установленной, для дальнейшего ее развития необходимо прежде всего обратить внимание на построение ее математического аппарата. Предлагаемая работа и посвящена этому вопросу [...].

## 1. ВВЕДЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ В СЛУЧАЕ СТАТИСТИКИ БОЗЕ

При изложении теории вторичного квантования, а также в ее применениях обычно вводят дискретный спектр даже и в тех случаях, когда физическая задача требует рассмотрения состояний, принадлежащих непрерывному спектру. В этих случаях прежде всего видоизменяют задачу так, чтобы добиться

<sup>1</sup> Л. Ландау и Р. Пайерльс. Распространение принципа неопределенности на релятивистскую квантовую теорию. L. Landau und R. Peierls. Zs. f. Phys., 69, 56, 1931. Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie.

<sup>2</sup> Н. Бор и Л. Розенфельд. К вопросу об измеримости электромагнитных напряженностей. N. Bohr und L. Rosenfeld. Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen. Kgl. Danske Vid. Selskab, Math.-fys. Meddeleser, XII, 8, Копенгаген, 1933.

появления точечного спектра (введение „ящиков“, условий периодичности и т. д.) и лишь в конце вычислений возвращаются путем предельного перехода к первоначальной задаче. Этот окольный путь, который часто бывает весьма неудобен и излишне усложняет вычисления, ни в коем случае не является необходимым. В дальнейшем для случая статистики Бозе мы предложим метод, который позволит оперировать одинаковым образом как с состояниями дискретного, так и состояниями непрерывного спектра; кроме того, он обладает тем преимуществом, что в нем ясна взаимосвязь вторичного квантования и конфигурационного пространства. Этот метод основан на применении производящих функций (функционалов) и является обобщением метода, развитого автором в одной из прежних работ.<sup>1</sup>

Как известно, квантованная волновая функция  $\Psi(x)$  в случае статистики Бозе удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} \Psi(x')\Psi^+(x) - \Psi^+(x)\Psi(x') &= \delta(x - x'), \\ \Psi(x')\Psi(x) - \Psi(x)\Psi(x') &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где через  $x$  обозначена совокупность независимых переменных.

Величину  $\Psi(x)$  можно рассматривать как оператор, который действует на последовательность волновых функций

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1x_2) \\ \psi(x_1x_2x_3) \\ \dots \end{array} \right\} \quad (2)$$

в конфигурационных пространствах  $0, 1, 2, \dots, n, \dots$  измерений и переводит эту последовательность в следующую<sup>2</sup>

$$\Psi(x) \left\{ \begin{array}{c} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1x_2) \\ \dots \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \psi(x) \\ \sqrt{2}\psi(xx_1) \\ \sqrt{3}\psi(xx_1x_2) \\ \dots \end{array} \right\}. \quad (3)$$

При этом все функции  $\psi$  предполагаются симметричными. Сопряженный оператор  $\Psi^+(x)$  переводит последовательность (2) в аналогичную последовательность  $\psi'(x_1), \psi'(x_1x_2), \dots$ , причем преобразованная функция  $n$ -того подпространства выражается через первоначальную функцию  $(n-1)$ -ого подпространства

<sup>1</sup> В. Ф о к. Наст. сб., стр. 9—24.

<sup>2</sup> Там же, стр. 25—51.

следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi'(x_1 x_2 \dots x_n) = & \frac{1}{\sqrt{n}} [\delta(x_1 - x) \psi(x_2 x_3 \dots x_n) + \dots + \\ & + \delta(x_k - x) \psi(x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n) + \dots + \\ & + \delta(x_n - x) \psi(x_1 \dots x_{n-1})]. \end{aligned} \quad (4)$$

С другой стороны, для оператора  $\Psi(x)$  можно выбрать такое представление, в котором сопряженный оператор  $\Psi^+(x)$  будет соответствовать умножению на некоторую функцию  $\bar{b}(x)$ .<sup>1</sup> Объектом, на который действуют операторы  $\Psi$  и  $\Psi^+$ , будет тогда функционал  $\Omega$  от функции  $\bar{b}(x)$ . Вид этого функционала должен вполне определяться заданием последовательности функций (2). Мы покажем, что функционал  $\Omega$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega = & \psi_0 + \frac{1}{\sqrt{1!}} \int \psi(x_1) \bar{b}(x_1) dx_1 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2!}} \iint \psi(x_1 x_2) \bar{b}(x_1) \bar{b}(x_2) dx_1 dx_2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n, \quad (6)$$

где  $\Omega_n$  имеет вид  $n$ -кратного интеграла

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \dots \int \psi(x_1 \dots x_n) \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (7)$$

Нам нужно прежде всего дать определение функциональной производной  $\frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(x)}$  от  $\Omega$  по  $\bar{b}(x)$ . Общим определением является

$$\frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(x)} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \{ \Omega [\bar{b}(x') + \eta \delta(x' - x)] - \Omega [\bar{b}(x')] \}, \quad (8)$$

где через  $x'$  обозначена текущая координата в  $\Omega = \Omega[\bar{b}(x')]$ . Для практических целей удобнее иное определение, которое, впрочем, эквивалентно (8). Напишем вариацию  $\delta \Omega$  от  $\bar{b}$  в форме однократного интеграла

$$\delta \Omega = \int A \delta \bar{b}(x) dx. \quad (9)$$

Тогда функциональная производная будет равна коэффициенту при  $\delta \bar{b}(x)$  в подынтегральном выражении

$$\frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(x)} = A. \quad (9^*)$$

<sup>1</sup> Более последовательно было бы обозначать эту функцию через  $\bar{\psi}(x)$ , но мы предпочитаем обозначение  $\bar{b}(x)$ , чтобы не употреблять символ  $\psi$  слишком во многих значениях.

Положим, например,

$$\Omega = \bar{b}(x') = \int \delta(x_1 - x') \bar{b}(x_1) dx_1,$$

тогда будет

$$\frac{\delta' \bar{b}(x')}{\delta \bar{b}(x)} = \delta(x - x'). \quad (10)$$

Из определения функциональной производной вытекает для произвольного функционала соотношение

$$\frac{\delta'}{\delta \bar{b}(x')} \bar{b}(x) \Omega - \bar{b}(x) \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(x')} = \delta(x - x') \Omega. \quad (11)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом представлении, в котором оператору  $\Psi^+(x)$  соответствует умножение на  $\bar{b}(x)$  оператору  $\Psi(x)$  действительно сопоставляется образование функциональной производной по  $\bar{b}(x)$ .

Мы должны еще доказать, что функционал  $\Omega$  действительно выражается через волновые функции  $\psi(x_1 x_2 \dots x_n)$  отдельных подпространств по формуле (5). Для этого достаточно показать, что составлению функциональной производной от  $\Omega$  по  $\bar{b}(x)$  соответствует для последовательности коэффициентов (2) в ряде (5) преобразование (3), а умножению  $\Omega$  на  $\bar{b}(x)$  соответствует для тех же коэффициентов преобразование (4).

Рассмотрим выражение (7) для  $\Omega_n$  и образуем вариацию  $\Omega_n$  по  $\bar{b}(x)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \delta \Omega_n &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot n \int \psi(x x_1 \dots x_{n-1}) \times \\ &\times \delta \bar{b}(x) \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_{n-1}) dx dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Согласно определению (9) и (9\*) функциональная производная равна

$$\begin{aligned} \frac{\delta' \Omega_n}{\delta \bar{b}(x)} &= \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \sqrt{n} \int \psi(x x_1 \dots x_{n-1}) \times \\ &\times \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1} \end{aligned} \quad (12)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\delta' \Omega_n}{\delta \bar{b}(x)} &= \Omega'_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \int \psi'(x_1 \dots x_{n-1}) \times \\ &\times \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1}, \end{aligned}$$

где новая  $(n-1)$ -мерная волновая функция  $\psi'(x_1 \dots x_{n-1})$  выражается через первоначальную  $n$ -мерную следующим образом:

$$\psi'(x_1 \dots x_{n-1}) = \sqrt{n} \psi(x x_1 \dots x_{n-1}).$$

Но это как раз то преобразование, которое производится

оператором  $\Psi(x)$  в (3). Так как эта формула справедлива для любого  $n$ , то мы действительно имеем:

$$\Psi(x) \Omega = \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(x)}. \quad (13)$$

С другой стороны, если умножить  $\Omega_{n-1}$  на

$$\bar{b}(x) = \int \delta(x_n - x) \bar{b}(x_n) dx_n,$$

то получится

$$\begin{aligned} & \bar{b}(x) \Omega_{n-1} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \int \delta(x_n - x) \psi(x_1 \dots x_{n-1}) \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

или, если симметризовать функцию  $\delta(x_n - x) \psi(x_1 \dots x_{n-1})$  по отношению  $x_1 \dots x_n$ ,

$$\bar{b}(x) \Omega_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \psi'(x_1 \dots x_n) \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где  $\psi'$  имеет значение (4). Так как полученная формула справедлива для любого  $n$ , то мы имеем:

$$\Psi^+(x) \Omega = \bar{b}(x) \Omega. \quad (14)$$

Наше утверждение тем самым доказано. Коэффициенты  $\psi_0, \psi(x_1), \psi(x_1 x_2) \dots$  в ряде (5) действительно могут быть отождествлены с волновыми функциями в соответствующих подпространствах конфигурационного пространства.

В теории вторичного квантования большую роль играет оператор числа частиц

$$\mathbf{n} = \int \Psi^+(x) \Psi(x) dx. \quad (15)$$

Мы покажем, что величина  $\Omega_n$  (7) является собственным функционалом этого оператора. В самом деле, принимая во внимание (12), имеем:

$$\mathbf{n} \Omega_n = \int \bar{b}(x) \frac{\delta' \Omega_n}{\delta \bar{b}(x)} dx = n \Omega_n. \quad (16)$$

Таким образом, можно рассматривать ряд (6) как разложение произвольного функционала  $\Omega$  по собственным функционалам оператора  $\mathbf{n}$ .

С помощью соотношений (13) и (14) любой оператор теории вторичного квантования можно представить как оператор в конфигурационном пространстве. Например, для оператора, имеющего вид

$$\mathbf{L} = \int \Psi^+(x) L(x) \Psi(x) dx, \quad (17)$$

получаем

$$\mathbf{L} \Omega = \int \bar{b}(x) L(x) \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(x)} dx. \quad (17^*)$$

Если подставить сюда для  $\Omega$  ряд (6) и использовать (12), то для  $L\Omega$  получается аналогичный ряд

$$L\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n',$$

где через  $\Omega_n'$  обозначено выражение

$$\Omega_n' = \frac{1}{\sqrt{n!}} n \int [L(x) \psi(x x_1 \dots x_{n-1})] \times \\ \times \bar{b}(x) \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_{n-1}) dx dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Если написать здесь  $x_n$  вместо  $x$  и симметризовать подынтегральное выражение относительно  $x_1 \dots x_n$ , то функционал  $\Omega_n'$  может быть записан в форме (7), где функция  $\psi(x_1 \dots x_n)$  заменена на

$$\psi'(x_1 \dots x_n) = [L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_n)] \psi(x_1 \dots x_n). \quad (17^{**})$$

Последнее уравнение и дает представление оператора  $L$  в конфигурационном пространстве.

Для оператора, не коммутирующего с  $\mathbf{n}$ , также может быть найдено представление в конфигурационном пространстве. Само собою разумеется, что в этом случае функция  $\psi'(x_1 \dots x_n)$  выражается не через одну только функцию  $\psi(x_1 \dots x_n)$ , а через волновые функции в подпространствах различного числа измерений.

Скалярное произведение двух функционалов  $\Omega$  и  $\Omega'$  может быть определено при помощи волновых функций в соответствующих подпространствах, а именно:

$$(\Omega, \Omega') = \bar{\psi}_0 \psi_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \int \bar{\psi}(x_1 \dots x_n) \psi'(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (18)$$

Условием ортогональности будет поэтому

$$(\Omega, \Omega') = 0, \quad (19)$$

а нормировочным условием

$$(\Omega, \Omega) = 1 \text{ или } (\Omega, \Omega) = \text{const}. \quad (19^*)$$

Чтобы установить связь с формулами нашей прежней работы, рассмотрим вкратце, как надо писать выражение для  $\Omega_n$ , когда переменная  $x$  принимает только дискретный ряд значений  $x^{(1)}, x^{(2)} \dots$ . Будем писать  $\bar{b}_r$  вместо  $\bar{b}(x^{(r)})$  и  $c(r_1 \dots r_n)$  вместо  $\psi(x^{(r_1)}, x^{(r_2)} \dots x^{(r_n)})$  и в выражении (7) заменим интеграл суммой. Мы получим тогда для  $\Omega_n$  выражение

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{r_1 r_2 \dots r_n} c(r_1 r_2 \dots r_n) \bar{b}_{r_1} \bar{b}_{r_2} \dots \bar{b}_{r_n}. \quad (20)$$

В этой сумме член, содержащий  $n_1$  раз множитель  $\bar{b}_1$ , затем  $n_2$  раз множитель  $\bar{b}_2$  и т. д., встречается  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots}$  раз; поэтому если мы положим

$$c(r_1 r_2 \dots r_n) = c^*(n_1 n_2 \dots),$$

то будет

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots} c^*(n_1 n_2 \dots) \bar{b}_1^{n_1} \bar{b}_2^{n_2} \dots$$

Если же положить

$$\sqrt{\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}} \cdot c^*(n_1 n_2 \dots) = f(n_1 n_2 \dots),$$

то получится

$$\Omega_n = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} f(n_1 n_2 \dots) \bar{b}_1^{n_1} \bar{b}_2^{n_2} \dots \quad (21)$$

Здесь целые числа  $n_1, n_2, \dots$  удовлетворяют условию

$$n_1 + n_2 + \dots = n. \quad (22)$$

Если же это условие отбросить, то из (21) получится выражение для общего функционала  $\Omega$ . Формула (21) с точностью до обозначений совпадает с соответствующей формулой нашей цитированной работы.<sup>1</sup>

## II. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ВАКУУМА

В случае вакуума применение правил квантования электромагнитного поля не встречает особых затруднений. Чтобы установить уравнения движения для поля,<sup>2</sup> выразим электромагнитное поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  обычным образом через скалярный и векторный потенциалы

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A}. \quad (1)$$

Будем рассматривать компоненты потенциалов ( $\Phi, A_1, A_2, A_3$ ) как координаты поля ( $Q, Q_1, Q_2, Q_3$ ) и возьмем в качестве функции Лагранжа для поля выражение

$$L = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) - \frac{1}{2} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2, \quad (2)$$

которое отличается лишь на четырехмерную расходимость от выражения Ферми.<sup>3</sup> Импульсы, канонически сопряженные

<sup>1</sup> В. Фок. Этот сборник, стр. 9—24, формула (54).

<sup>2</sup> В. Фок и Б. Подольский. Этот сборник, стр. 55—69.

<sup>3</sup> E. Fermi. Rend. Lincei (6) 9, 881 (1929).



ж координатам поля  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= -\frac{1}{c} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ (P_1, P_2, P_3) &= \mathbf{P} = -\frac{1}{c} \mathbf{E} \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Для функции Гамильтона  $H$  получается выражение

$$H = \frac{c^2}{2} (\mathbf{P}^2 - \mathbf{P}_0^2) + \frac{1}{2} (\operatorname{curl} \mathbf{A})^2 - c P_0 \operatorname{div} \mathbf{A} - c \mathbf{P} \operatorname{grad} \Phi. \quad (4)$$

Уравнения движения Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= c^2 \mathbf{P} - c \operatorname{grad} \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -c^2 P_0 - c \operatorname{div} \mathbf{A}, \\ \dot{\mathbf{P}} &= \Delta \mathbf{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - c \operatorname{grad} P_0, \\ \dot{P}_0 &= -c \operatorname{div} \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (5)$$

где точкой сверху обозначено дифференцирование по времени. Исключив импульсы для компонент потенциалов, мы получим уравнение Даламбера. Чтобы получить уравнения Максвелла для вакуума, в случае классической теории поля, необходимо положить  $P_0 = 0$ .

Переходя к квантованию поля, мы должны иметь в виду, что в качестве волновых функций светового кванта следует брать не вещественные переменные поля, а некоторые комплексные величины, которые получаются из первых разложением по Фурье. Для некоторой вещественной переменной поля, удовлетворяющей уравнению Даламбера, мы будем писать разложение в интеграл Фурье в виде

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F(\mathbf{k}) e^{-ickt + i\mathbf{k}\mathbf{r}} (d\mathbf{k}) + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int F^+(\mathbf{k}) e^{ickt - i\mathbf{k}\mathbf{r}} (d\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь через  $k$  обозначена абсолютная величина волнового вектора  $\mathbf{k}$ ;  $(d\mathbf{k})$  стоит вместо  $dk_1 dk_2 dk_3$ . Так как величины  $(k, k_1, k_2, k_3)$  являются компонентами четырехмерного вектора (а именно нулевого вектора), то выражения  $\frac{(d\mathbf{k})}{k}$  и  $k\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  являются инвариантами при преобразованиях Лоренца. Следовательно, величины  $k F(\mathbf{k})$ , т. е. умноженные на  $k$  амплитуды компонент поля  $F(\mathbf{r}, t)$ , преобразуются так же, как и сами эти компоненты.

Компонентой волновой функции светового кванта является первый интеграл в (6), взятый в отдельности. Амплитуду  $F(\mathbf{k})$  можно рассматривать как волновую функцию в импульсном

пространстве световых квантов в Гейзенберговском представлении. Соответствующая волновая функция в Шредингеровском представлении будет тогда

$$F'(\mathbf{k}, t) = F(\mathbf{k}) e^{-ickt}.$$

Амплитуды компонент поля удовлетворяют следующим уравнениям движения

$$\left. \begin{aligned} P(\mathbf{k}) &= \frac{i}{c} [\mathbf{k} \Phi(\mathbf{k}) - k\mathbf{A}(\mathbf{k})] = -\frac{1}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}) \\ P_0(\mathbf{k}) &= \frac{i}{c} [k\Phi(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{k})] \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Чтобы перейти от обычных амплитуд („малое“ поле) к квантованным амплитудам („большое“ поле),<sup>1</sup> необходимо установить для последних перестановочные соотношения. Применяя обычные правила квантования, получаем

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}') - \Phi(\mathbf{k}') \Phi^+(\mathbf{k}) &= \frac{hc}{2k} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ A_l^+(\mathbf{k}) A_m(\mathbf{k}') - A_m(\mathbf{k}') A_l^+(\mathbf{k}) &= -\frac{hc}{2k} \delta_{lm} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

тогда как все компоненты,  $A_1(\mathbf{k})$ ,  $A_2(\mathbf{k})$ ,  $A_3(\mathbf{k})$ ,  $\Phi(\mathbf{k})$  квантованной волновой функции между собой коммутируют. Релятивистская инвариантность перестановочных соотношений (8) вытекает из того, что величины  $k\Phi(\mathbf{k})$ ,  $k\mathbf{A}(\mathbf{k})$  являются компонентами четырехмерного вектора, а  $k\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  есть инвариант.

Объемный интеграл от гамильтоновой функции (4), представленный как интеграл в пространстве импульсов, равен

$$H = \int [A^+(\mathbf{k}) \mathbf{A}(\mathbf{k}) + \mathbf{A}(\mathbf{k}) A^+(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k}) - \Phi^+(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k})] k^2 (d\mathbf{k}).$$

Чтобы устранить так называемую нулевую энергию, а также отрицательные собственные значения, мы должны изменить здесь порядок сомножителей и писать

$$H = 2 \int [A^+(\mathbf{k}) \mathbf{A}(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k})] k^2 (d\mathbf{k}). \quad (9)$$

Это выражение и является оператором энергии поля излучения. В отношении преобразований Лоренца оператор  $H$  ведет себя, как временная компонента четырехмерного вектора, пространственные компоненты которого равны

$$\mathbf{G} = \frac{2}{c} \int \mathbf{k} [A^+(\mathbf{k}) \mathbf{A}(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k})] k (d\mathbf{k}) \quad (10)$$

<sup>1</sup> Термины „малое“ и „большое“ поле — по Паули. См.: W. Pauli. Zs. f. Phys., 80, 373 (1933).

и представляют собой количество движения (импульс) поля. Наряду с вектором энергии и количества движения можно рассматривать инвариант

$$N = \frac{2}{hc} \int [A^+(\mathbf{k}) A(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k})] k(d\mathbf{k}), \quad (11)$$

который нужно толковать как оператор полного числа квантов. Если ввести соответствующую выражению (11) плотность в пространстве импульсов, равную

$$n(\mathbf{k}) = \frac{2}{hc} [A^+(\mathbf{k}) A(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) \Phi^+(\mathbf{k})] k, \quad (12)$$

то вектор энергии и количества движения поля может быть написан в виде

$$H = hc \int kn(\mathbf{k})(d\mathbf{k}), \quad (9^*)$$

$$\mathbf{G} = h \int \mathbf{k}n(\mathbf{k})(d\mathbf{k}). \quad (10^*)$$

Оператор  $n(\mathbf{k})$  сам по себе не является положительно определенным; однако в силу дополнительных условий, которые будут установлены ниже, математическое ожидание величин  $N$  и  $H$  в любом физически возможном состоянии поля будет положительным (или равным нулю).

Как отмечено выше, Гейзенберговское представление волновых функций  $\Phi(\mathbf{k})$ ,  $A(\mathbf{k})$  связано со Шредингеровским представлением  $\Phi'(\mathbf{k}, t)$  соотношениями

$$\Phi'(\mathbf{k}, t) = \Phi(\mathbf{k}) e^{-ickt}; \quad A'(\mathbf{k}, t) = A(\mathbf{k}) e^{-ickt}. \quad (13)$$

В случае Гейзенберговского представления функционал  $\Omega$ , описывающий состояние поля, содержит в качестве аргументных функций следующие

$$\Phi(\mathbf{k}), \bar{A}_1(\mathbf{k}), \bar{A}_2(\mathbf{k}), \bar{A}_3(\mathbf{k}). \quad (14)$$

В этом случае он не зависит явно от времени, так что волновое уравнение приводится к виду  $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ .

В случае Шредингеровского представления аргументными функциями в функционале  $\Omega$  будут величины  $\Phi'(\mathbf{k}, t)$  и  $\bar{A}'(\mathbf{k}, t)$ , а волновое уравнение принимает вид

$$\left( H - ih \frac{\partial}{\partial t} \right) \Omega = 0. \quad (15)$$

Выбор величин (14) в качестве аргументных функций в функционале  $\Omega$  однозначно определяется перестановочными соот-

ношениями (8). Операторы  $\Phi^+(\mathbf{k})$  и  $A_l(\mathbf{k})$  имеют тогда вид

$$\Phi^+(\mathbf{k})\Omega = \frac{hc}{2k} \frac{\delta'\Omega}{\delta\Phi(\mathbf{k})}; \quad A_l(\mathbf{k})\Omega = \frac{hc}{2k} \frac{\delta'\Omega}{\delta A_l(\mathbf{k})}. \quad (16)$$

В отличие от случая пространственного вращения, преобразованию Лоренца соответствует не просто линейная подстановка между аргументными функциями (14), а каноническое преобразование между не коммутирующими операторами.

Так как операторы  $\Phi(\mathbf{k}, t)$  и  $\Phi^+(\mathbf{k}, t)$  и т. д. (в представлении Шредингера) удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям (8), что и операторы  $\Phi(\mathbf{k})$ ,  $\Phi^+(\mathbf{k})$  (в представлении Гейзенберга), то и для первых справедливы формулы (16). Если вместо  $\Phi(\mathbf{k}, t)$  и т. д. мы будем снова писать просто  $\Phi(\mathbf{k})$  и т. д., то волновое уравнение (15), написанное в явной форме, будет иметь вид

$$H\Omega = hc \int \left[ \sum_{l=1}^3 \bar{A}_l(\mathbf{k}) \frac{\delta'\Omega}{\delta \bar{A}_l(\mathbf{k})} - \Phi(\mathbf{k}) \frac{\delta'\Omega}{\delta \Phi(\mathbf{k})} \right] k(d\mathbf{k}) = ih \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (17)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться, главным образом, Гейзенберговским представлением.

Мы должны теперь рассмотреть вопрос о тех дополнительных условиях для функционала  $\Omega$ , которые соответствуют классическому соотношению  $P_0 = 0$ . Будем толковать это уравнение, по Дираку, в смысле двух условий, которые состоят в равенстве нулю амплитуды  $P_0(\mathbf{k})$  и сопряженной с ней величины  $P_0^+(\mathbf{k})$

$$P_0(\mathbf{k})\Omega = \frac{i}{c} [k\Phi(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})]\Omega = 0; \quad (18)$$

$$P_0^+(\mathbf{k})\Omega = -\frac{i}{c} [k\Phi^+(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^+(\mathbf{k})]\Omega = 0. \quad (18^*)$$

Оба эти условия релятивистски инвариантны. Они совместны между собой, так как для произвольных значений  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , включая совпадающие значения, имеет место операторное равенство

$$P_0^+(\mathbf{k})P_0(\mathbf{k}') - P_0(\mathbf{k}')P_0^+(\mathbf{k}) = 0. \quad (19)$$

Далее, условия (18) и (18\*) совместны также и с волновым уравнением, что особенно легко видеть из того, что в Гейзенберговском представлении волновое уравнение имеет простую форму  $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ .

Теперь можно легко получить общий вид функционала  $\Omega$ , удовлетворяющего этой системе уравнений. Для этого выделим из  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$  компоненту  $\theta(\mathbf{k})$  в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}$

и положим

$$\theta(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})}{k}; \quad (20)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \mathbf{A}(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})}{k^2}. \quad (21)$$

В качестве аргументных функций в  $\Omega$  мы возьмем пять величин:

$$\Phi(\mathbf{k}), \bar{\theta}(\mathbf{k}), \bar{B}_1(\mathbf{k}), \bar{B}_2(\mathbf{k}), \bar{B}_3(\mathbf{k}),$$

причем три последние связаны тождественным соотношением

$$\mathbf{k} \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) = 0.$$

В новых обозначениях уравнения (18) и (18\*) напишутся

$$[\Phi(\mathbf{k}) - \theta(\mathbf{k})] \Omega = 0; \quad (22)$$

$$[\Phi^+(\mathbf{k}) - \theta^+(\mathbf{k})] \Omega = 0. \quad (22^*)$$

Так как величина  $\theta$  является одной из компонент векторного потенциала, то и перестановочные соотношения для  $\theta$  и  $\theta^+$  будут те же, как для некоторой его компоненты и для ее сопряженной. Поэтому оператор  $\theta(\mathbf{k})$  имеет значение

$$\theta(\mathbf{k}) \Omega = \frac{\hbar c}{2k} \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{\theta}(\mathbf{k})}. \quad (23)$$

Отсюда следует, что уравнения (22 и 22\*), написанные в явной форме, будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hbar c}{2k} \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{\theta}(\mathbf{k})} - \bar{\theta}(\mathbf{k}) \Omega &= 0 \\ \frac{\hbar c}{2k} \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{\theta}(\mathbf{k})} - \Phi(\mathbf{k}) \Omega &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Эти уравнения дают

$$\Omega = e^\chi \Omega^\circ [\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k})], \quad (25)$$

где функционал  $\chi$  имеет следующее значение

$$\chi = \frac{2}{\hbar c} \int \bar{\theta}(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}) k(d\mathbf{k}), \quad (26)$$

а  $\Omega^\circ$  есть произвольный функционал, который уже не содержит  $\bar{\theta}(\mathbf{k})$  и  $\Phi(\mathbf{k})$ . Таким образом, дополнительные условия позволили нам привести общий функционал  $\Omega$ , зависящий от четырех аргументных функций (14) к функционалу  $\Omega^\circ$ , зависящему только от двух аргументных функций, а именно от двух компонент векторного потенциала, перпендикулярных волновому вектору.

Это приведение соответствует тому факту, что поперечный световой квант при заданном импульсе характеризуется двумя

числами, скажем, двумя возможными состояниями поляризации. Функционал (25) удовлетворяет также волновому уравнению, так что он описывает самое общее состояние поля излучения в вакууме.

С помощью дополнительных условий из оператора (11) для числа световых квантов, а также и из операторов энергии и количества движения можно исключить величины  $\theta$  и  $\Phi$ . Рассмотрим величину  $n(\mathbf{k})$  — уравнение (12) — и напомним ее в виде

$$n(\mathbf{k}) = n'(\mathbf{k}) + n''(\mathbf{k}), \quad (27)$$

где мы положили

$$n'(\mathbf{k}) = \frac{2}{\hbar c k} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}^+(\mathbf{k})) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k})), \quad (28)$$

или иначе

$$n'(\mathbf{k}) = \frac{2}{\hbar c k} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}^+(\mathbf{k})) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k})), \quad (28^*)$$

а также

$$n''(\mathbf{k}) = \frac{2k}{\hbar c} [\theta^+(\mathbf{k})\theta(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k})\Phi^+(\mathbf{k})]. \quad (29)$$

Если последнюю величину мы напомним в виде

$$n''(\mathbf{k}) = \frac{2k}{\hbar c} \{ \theta^+(\mathbf{k}) [\theta(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k})] + \Phi(\mathbf{k}) [\theta^+(\mathbf{k}) - \Phi^+(\mathbf{k})] \} \quad (29^*)$$

и учтем уравнения (22) и (22\*), то убедимся, что оператор  $n''(\mathbf{k})$ , будучи применен к любому допустимому (т. е. удовлетворяющему дополнительному условию) функционалу, дает нуль. Но оператор  $n'(\mathbf{k})$  зависит только от величин  $\mathbf{B}$  и, кроме того, он является положительно определенным (дефинитным). Тем самым доказывается наше утверждение о положительном знаке математического ожидания энергии и числа световых квантов.

Чтобы установить связь с рассуждениями первой части, введем применительно к нашей задаче величины  $b$  и  $b^+$ . Пусть и  $\mathbf{e}(\mathbf{k}, 1)$  и  $\mathbf{e}(\mathbf{k}, 2)$  два единичных вектора, перпендикулярных как между собой, так и к волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Эти единичные векторы соответствуют двум состояниям поляризации. Так как согласно (21) вектор  $\mathbf{B}(\mathbf{k})$  тоже перпендикулярен к волновому вектору, то можно положить

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\hbar c}{2k}} \sum_{j=1}^2 \mathbf{e}(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j). \quad (30)$$

На основании формул (8) и (21) легко показать, что определенные таким образом операторы  $b(\mathbf{k}, j)$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} b(\mathbf{k}', j') b^+(\mathbf{k}, j) - b^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}', j') &= \delta_{jj'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ b(\mathbf{k}', j') b(\mathbf{k}, j) - b(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}', j') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Эти соотношения совпадают с (1,1), если понимать там под переменной  $x$  совокупность трех непрерывных переменных  $k_1, k_2, k_3$  и одной дискретной переменной  $j$ , принимающей только два значения  $j = 1, 2$ . Следовательно, к нашей задаче применима вся, развитая в I части, математическая теория функционалов. В частности, вид функционала  $\Omega^\circ$  в (25) дается формулой (5, 1), где  $\psi$  есть волновая функция в импульсном пространстве световых квантов. В частном случае, когда нет световых квантов, функционал в (25) приводится к выражению

$$\Omega = \exp\left(\frac{2}{\hbar c} \int \bar{\theta}(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}) k(d\mathbf{k})\right). \quad (25^*)$$

Бесквантовое состояние, само собой разумеется, есть релятивистски инвариантное понятие, несмотря на то, что выражение (25\*) не является инвариантом.

Выразим теперь операторы  $n(\mathbf{k})$ ,  $N$ ,  $H$ ,  $G$  через только что введенные величины  $b$  и  $b^+$ . Если не писать „исчезающую“ в силу дополнительных условий (22) и (22\*) часть этих операторов и обозначить остающуюся часть соответственно через  $n'$ ,  $N'$ ,  $H'$ ,  $G'$ , то получится

$$n'(\mathbf{k}) = b^+(\mathbf{k}, 1)b(\mathbf{k}, 1) + b^+(\mathbf{k}, 2)b(\mathbf{k}, 2); \quad (32)$$

$$N' = \sum_j \int b^+(\mathbf{k}, j)b(\mathbf{k}, j)(d\mathbf{k}); \quad (33)$$

$$H' = \sum_j \int \hbar c k b^+(\mathbf{k}, j)b(\mathbf{k}, j)(d\mathbf{k}); \quad (34)$$

$$G' = \sum_j \int \hbar k b^+(\mathbf{k}, j)b(\mathbf{k}, j)(d\mathbf{k}). \quad (35)$$

Из общей теории вторичного квантования следует, что оператор  $N'$  полного числа световых квантов имеет целочисленные собственные значения 0, 1, 2 ... Те же собственные значения имеет и оператор

$$N'(\mathbf{k}, \Delta\mathbf{k}) = \sum_j \int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}} b^+(\mathbf{k}, j)b(\mathbf{k}, j)(d\mathbf{k}) \quad (36)$$

для числа световых квантов с волновым числом  $\mathbf{k}$ , лежащим в интервале  $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$ . Чтобы показать это, введем „нормированные собственные дифференциалы“

$$b_j = \frac{1}{\sqrt{(\Delta\mathbf{k})}} \int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}} b(\mathbf{k}, j)(d\mathbf{k}), \quad (37)$$

которые, как это следует из (31), удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} b_{j'} b_j^+ - b_j^+ b_{j'} &= \delta_{jj'} \\ b_{j'} b_j - b_j b_{j'} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (38)$$

Выражение (36) будет равно

$$N'(\mathbf{k}, \Delta \mathbf{k}) = \sum_j b_j^+ b_j \quad (36^*)$$

и из теории гармонического вибратора следует тогда, что оператор (36\*) имеет собственные значения 0, 1, 2...

Подобным же образом можно исследовать операторы  $H'(\mathbf{k}, \Delta \mathbf{k})$  и  $G'(\mathbf{k}, \Delta \mathbf{k})$  энергии и количества движения световых квантов с волновым вектором в интервале  $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \Delta \mathbf{k})$  и показать, что эти операторы, определенные аналогично (36), имеют собственные значения  $nhck$  и соответственно  $nhk$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , как это и должно быть.

### Об измеримости компонент Фурье для поля

Мы выведем теперь соотношение, выражающее „дополнительность“ (в смысле Бора) между представлением световых квантов и понятием о классически измеримой амплитуде электромагнитного поля.

Комплексная амплитуда  $F(\mathbf{k})$  компоненты поля, собственно говоря, не является измеримой физической величиной, потому что вещественная часть амплитуды не коммутирует с ее мнимой частью. Однако в области больших квантовых чисел эта некоммутативность становится несущественной и амплитуды ведут себя так, как классические величины, а значит они оказываются приближенно измеримыми. Рассмотрим подробнее, как здесь обстоит дело, и докажем следующее предложение: если взять амплитуды, усредненные по интервалу  $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \Delta \mathbf{k})$ , и подсчитать при помощи них энергию излучения  $E$ , принадлежащую на этот интервал, то неопределенность в  $E$  будет всегда больше одного кванта энергии  $hck$  соответствующей частоты.

Прежде всего заметим, что совершенно безразлично, будем ли мы пользоваться амплитудами для напряженностей поля или же какими-нибудь вспомогательными величинами, например величинами  $b(\mathbf{k}, j)$  — уравнение (30). Мы воспользуемся последними величинами и напишем оператор энергии излучения в интервале  $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \Delta \mathbf{k})$  в виде

$$H'(\mathbf{k}, \Delta \mathbf{k}) = \int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k} + \Delta \mathbf{k}} hck [b^+(\mathbf{k}, 1)b(\mathbf{k}, 1) + b^+(\mathbf{k}, 2)b(\mathbf{k}, 2)] (d\mathbf{k}). \quad (39)$$

Предположим теперь, что вещественная и мнимая части усредненных амплитуд

$$\bar{b}_j = \frac{1}{(\Delta \mathbf{k})} \int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k} + \Delta \mathbf{k}} b(\mathbf{k}, j) (d\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{(\Delta \mathbf{k})}} b_j \quad (40)$$



измерены с точностью, допускаемой соотношением неопределенности, и вычислим отсюда энергию  $E$  по формуле

$$E = H'(\mathbf{k}, \Delta \mathbf{k}) = hck (\bar{b}_1^+ \bar{b}_1 + \bar{b}_2^+ \bar{b}_2) (\Delta \mathbf{k}) = \\ = hck (b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2). \quad (39^*)$$

Спрашивается, какова будет неопределенность в энергии.

Эта задача решается элементарно, так как она сводится к аналогичной задаче для гармонического вибратора. Если в выражении для энергии вибратора (без нулевой энергии)

$$H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 - \frac{1}{2} h \omega \quad (41)$$

сделать подстановку

$$b = \frac{p - im\omega q}{\sqrt{2m\omega h}}; \quad b^+ = \frac{p + im\omega q}{\sqrt{2m\omega h}}, \quad (42)$$

то из перестановочных соотношений для  $p$  и  $q$  будет следовать соотношение

$$bb^+ - b^+b = 1 \quad (43)$$

и энергия вибратора будет равна

$$H_0 = h\omega b^+ b. \quad (41^*)$$

Приведенное выше выражение (39\*) для энергии  $E$  является суммой двух членов вида (41\*), причем  $\omega = ck$ .

Если одновременно измерить импульс и координату гармонического вибратора с неопределенностью  $\Delta p$  и  $\Delta q$ , то неопределенность в энергии, вычисленной по этим  $p$  и  $q$ , будет по крайней мере равна

$$\Delta E_0 = \frac{1}{2m} (\Delta p)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (\Delta q)^2. \quad (44)$$

В наиболее благоприятном случае  $\Delta p$  и  $\Delta q$  связаны соотношением  $\Delta p \Delta q = \frac{h}{2}$ ; тогда неопределенность в энергии  $\Delta E_0$  удовлетворяет неравенству

$$\Delta E_0 \geq \frac{1}{2} h \omega. \quad (45)$$

Отсюда для энергии излучения  $E$  (39\*) следует сформулированное нами выше предложение.

В ходе наших рассуждений мы говорили об *измерении поля*; но такое измерение невозможно без взаимодействия с веществом. Однако это обстоятельство ни в какой мере не обесценивает наших рассуждений, так как здесь мы имеем дело со свойствами поля, так сказать, чисто кинематическими. В самом деле, мы основывались только на перестановочных соотношениях, которые остаются неизменными и при наличии вещества.

Вопрос об измеримости самого поля, усредненного по некоторой области пространства-времени (а не его компонент Фурье), был исчерпывающе разобран Бором и Розенфельдом в работе, цитированной нами во введении.

### III. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВЕЩЕСТВОМ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы будем рассматривать квантовомеханическую систему, состоящую из неопределенного числа световых квантов и из фиксированного числа  $n$  материальных частиц с массами  $m_s$  и зарядами  $\epsilon_s$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ). Случай переменного числа материальных частиц (дираковская „дырочная“ теория позитрона) нами, таким образом, не рассматривается. Для определенности мы будем говорить об электронах, хотя вид волнового уравнения для материальных частиц остается пока произвольным. Мы будем описывать рассматриваемую квантовомеханическую систему с помощью следующих независимых переменных: поле — его амплитудами (как и в предыдущем параграфе), частицы — их координатами  $\mathbf{r}_s = (x_s y_s z_s)$ , временами  $t_s$ , а также переменными для их внутренних степеней свободы. Это значит, что, следуя Дираку, мы вводим для каждой частицы свое особое время  $t_s$ ; время для световых квантов мы будем обозначать через  $t$ . Только в конце вычислений мы положим  $t_s = t$ .

Операторы для количества движения и кинетической энергии частицы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P_x^{(s)} &= -ih \frac{\partial}{\partial x_s} - \frac{\epsilon_s}{c} A_x(\mathbf{r}_s, t_s) \\ P_y^{(s)} &= -ih \frac{\partial}{\partial y_s} - \frac{\epsilon_s}{c} A_y(\mathbf{r}_s, t_s) \\ P_z^{(s)} &= -ih \frac{\partial}{\partial z_s} - \frac{\epsilon_s}{c} A_z(\mathbf{r}_s, t_s) \end{aligned} \right\}; \quad (1)$$

$$T^{(s)} = ih \frac{\partial}{\partial t_s} - \epsilon_s \Phi(\mathbf{r}_s, t_s). \quad (2)$$

Операторы, относящиеся к различным частицам, коммутируют между собой. Операторы же, относящиеся к одной и той же частице, удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} TP_x - P_x T &= i\hbar \epsilon E_x; & P_y P_z - P_z P_y &= i\hbar \epsilon H_x \\ TP_y - P_y T &= i\hbar \epsilon E_y; & P_z P_x - P_x P_z &= i\hbar \epsilon H_y \\ TP_z - P_z T &= i\hbar \epsilon E_z; & P_x P_y - P_y P_x &= i\hbar \epsilon H_z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(значок  $s$  здесь опущен). Обозначим через  $\sigma_x^{(s)}$ ,  $\sigma_y^{(s)}$ ,  $\sigma_z^{(s)}$  составляющие спина  $s$ -того электрона и построим оператор

$$P^{(s)} = \sigma_x^{(s)} P_x^{(s)} + \sigma_y^{(s)} P_y^{(s)} + \sigma_z^{(s)} P_z^{(s)}. \quad (4)$$

Согласно Дираку, для каждого электрона можно написать свое волновое уравнение. В нерелятивистском случае оно имеет вид<sup>1</sup>

$$\frac{1}{2m_s} (P^{(s)})^2 \Psi = T^{(s)} \Psi \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

и в релятивистском случае

$$[c\rho_a^{(s)} P^{(s)} + m_s c^2 \rho_c^{(s)}] \Psi = T^{(s)} \Psi \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

где через  $\rho_a^{(s)}$ ,  $\rho_b^{(s)}$ ,  $\rho_c^{(s)}$  обозначены операторы, относящиеся ко второй внутренней степени свободы  $s$ -того электрона (дираковские  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ).

Волновое уравнение (5) или (6) можно рассматривать как некое дополнительное условие для волнового функционала  $\Psi$ ; это дополнительное условие и дает ту зависимость между количеством движения и энергией, какая требуется по соответствующей теории (нерелятивистской или релятивистской).

Кроме волновых уравнений, для волнового функционала должны существовать еще и другие дополнительные условия, которые бы соответствовали равенству нулю расходимости четырехмерного потенциала, т. е. уравнениям (18, II) или (22, II). Мы напомним эти дополнительные условия в виде<sup>2</sup>

$$\left. \begin{aligned} C(\mathbf{k}) \Psi &= 0 \\ C^+(\mathbf{k}) \Psi &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где через  $C(\mathbf{k})$  обозначен оператор

$$C(\mathbf{k}) = ik [\theta(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k})] + \frac{-i}{2(2\pi)^{3/2}k} \sum_{s=1}^n \epsilon_s e^{i\mathbf{k}r_s - i\mathbf{k}r_s}. \quad (8)$$

Если рассматривать  $C(\mathbf{k})$  как амплитуду некоторого поля  $C(\mathbf{r}, t)$ , то это поле будет равно

$$C(\mathbf{r}, t) = \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{s=1}^n \frac{\epsilon_s}{4\pi} \Delta (X - X_s), \quad (9)$$

где  $X = (\mathbf{r}, t)$  и  $X_s = (\mathbf{r}_s, t_s)$  суть четырехмерные векторы, а  $\Delta(X)$  так называемая инвариантная функция дельта

$$\Delta(X) = \frac{1}{r} [\delta(r + ct) - \delta(r - ct)]. \quad (10)$$

Вид членов, пропорциональных зарядам  $\epsilon_s$ , в выражении для величины  $C(\mathbf{k})$  следует из требования коммутативности этой величины с операторами (1) и (2) для составляющих четырех-

<sup>1</sup> Буква  $\Psi$  означает здесь волновой функционал, а не квантованную волновую функцию, как в первой части.

<sup>2</sup> П. Дирак, В. Фоки и Б. Подольский. Этот сборник, стр. 70—82.

мерного вектора энергии — количества движения. Легко проверить, что  $C(\mathbf{k})$  коммутирует с  $C^+(\mathbf{k})$ .

Таким образом, волновой функционал  $\Psi$  задачи  $n$  тел должен удовлетворять  $n$  волновым уравнениям вида (5) или (6) и обоим дополнительным условиям вида (7). Так как дополнительные условия (7) не содержат производных по времени от  $\Psi$ , то им должно удовлетворять и начальное состояние квантовомеханической системы. Можно сказать, что физический смысл имеют только те состояния, которые удовлетворяют условию (7). Далее из этого следует, что физически измеримы только те величины, которые (т. е. операторы которых) коммутируют с  $C(\mathbf{k})$  и  $C^+(\mathbf{k})$ . Таковыми являются так называемые градиентно инвариантные величины, а прежде всего величины (1), (2) и (3).

### Исключение дополнительных условий

При помощи дополнительных условий (7) можно получить в общем виде зависимость волнового функционала  $\Psi$  от аргументных функций  $\bar{\theta}(\mathbf{k})$  и  $\Phi(\mathbf{k})$ , совершенно так же, как и в случае отсутствия материи.<sup>1</sup>

Если для краткости положить

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=1}^n \varepsilon_s e^{i\varphi_s}, \quad \varphi_s = ckt_s - \mathbf{k}\mathbf{r}_s, \quad (11)$$

то оба уравнения (7) напишутся

$$\left. \begin{aligned} \left[ \theta(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k}) + \frac{1}{2k^2} f \right] \Psi = 0 \\ \left[ \theta^+(\mathbf{k}) - \Phi^+(\mathbf{k}) + \frac{1}{2k^2} f^+ \right] \Psi = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Если здесь в качестве  $\Phi^+(\mathbf{k})$  и  $\theta(\mathbf{k})$  взять операторы (16,II) и (23,II), то формула (12) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta' \Psi}{\delta \Phi(\mathbf{k})} = \left( \frac{2k}{\hbar c} \bar{\theta}(\mathbf{k}) + \frac{1}{\hbar c k} \bar{f} \right) \Psi \\ \frac{\delta' \Psi}{\delta \bar{\theta}(\mathbf{k})} = \left( \frac{2k}{\hbar c} \Phi(\mathbf{k}) - \frac{1}{\hbar c k} f \right) \Psi \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Решением этих уравнений будет

$$\Psi = e^{\lambda \Omega(\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k}))}, \quad (14)$$

<sup>1</sup> Cp. L. Rosenfeld. La théorie quantique des champs. Annales de l'Institut H. Poincaré. Paris, 1931; а также: Enrico Fermi. Quantum Theory of Radiation. Rev. of Mod. Phys., January, 1932.

где через  $\chi$  обозначен функционал

$$\chi = \frac{2}{\hbar c} \int \bar{\theta}(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}) k(d\mathbf{k}) + \\ + \frac{1}{\hbar c} \int \Phi(\mathbf{k}) \frac{\bar{f}}{k}(d\mathbf{k}) - \frac{1}{\hbar c} \int \bar{\theta}(\mathbf{k}) \frac{f}{k}(d\mathbf{k}) + \chi'. \quad (15)$$

Добавочный член  $\chi'$  в формуле (15) является функцией координат и времени  $n$  частиц и будет определен в дальнейшем. Функционал  $\Omega$  в формуле (14) от аргументных функций  $\bar{\theta}(\mathbf{k})$  и  $\Phi(\mathbf{k})$  уже не зависит.

Выполненное здесь преобразование может быть записано и в операторной форме. Его можно рассматривать как неунитарное каноническое преобразование, которое переводит оператор  $L$ , действующий на функционал  $\Psi$ , в оператор  $L'$ , действующий на функционал  $\Omega$ , причем оператор  $L'$  связан с  $L$  соотношением

$$L' = e^{-\chi} L e^{\chi}. \quad (16)$$

В этой формуле символ  $\chi$  следует рассматривать как оператор, получаемый из (15) заменой  $\bar{\theta}(\mathbf{k})$  на  $\theta^+(\mathbf{k})$ .

Исследуем теперь, как преобразуются наши операторы, в частности операторы (1) и (2), для энергии и количества движения. Величины  $\mathbf{B}(\mathbf{k})$  и  $\mathbf{B}^+(\mathbf{k})$  остаются инвариантными относительно преобразования (16), так как  $\chi$  с ними коммутирует. Величины  $\theta^+(\mathbf{k})$  и  $\Phi(\mathbf{k})$  остаются, разумеется, тоже инвариантными. Для  $\theta(\mathbf{k})$  и  $\Phi^+(\mathbf{k})$  мы имеем формулы преобразования

$$e^{-\chi} \theta(\mathbf{k}) e^{\chi} = \theta(\mathbf{k}) + \frac{\hbar c}{2k} \frac{\delta' \chi}{\delta \bar{\theta}(\mathbf{k})} = \theta(\mathbf{k}) + \Phi(\mathbf{k}) - \frac{1}{2k^2} f, \quad (17)$$

$$e^{-\chi} \Phi^+(\mathbf{k}) e^{\chi} = \Phi^+(\mathbf{k}) + \frac{\hbar c}{2k} \frac{\delta' \chi}{\delta \Phi(\mathbf{k})} = \Phi^+(\mathbf{k}) + \theta^+(\mathbf{k}) + \frac{1}{2k^2} f^+. \quad (18)$$

Из формулы (17) получаем

$$e^{-\chi} \mathbf{A}(\mathbf{k}) e^{\chi} = \mathbf{A}(\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{k}}{k} \Phi(\mathbf{k}) - \frac{\mathbf{k}}{2k^2} f. \quad (19)$$

Отсюда и из (18) следует для  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s)$  и  $\Phi(\mathbf{r}_s, t_s)$

$$e^{-\chi} \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s) e^{\chi} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathbf{k}}{k} \Phi(\mathbf{k}) e^{-i\varphi_s} (d\mathbf{k}) - \\ - \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathbf{k}}{k^3} f e^{-i\varphi_s} (d\mathbf{k}); \quad (20)$$

$$e^{-\chi} \Phi(\mathbf{r}_s, t_s) e^{\chi} = \Phi(\mathbf{r}_s, t_s) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \theta^+(\mathbf{k}) e^{i\varphi_s} (d\mathbf{k}) + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{k^2} f^+ e^{i\varphi_s} (d\mathbf{k}). \quad (21)$$

Последний интеграл в (21) содержит бесконечно большую константу, которая происходит от члена с  $e^{-i\varphi_s}$  в сумме  $f^+$ . Операторы

$$p_x^{(s)} = -ih \frac{\partial}{\partial x_s}; \dots; ih \frac{\partial}{\partial t_s}$$

преобразуются по формулам

$$e^{-\chi} p_x^{(s)} e^{\chi} = p_x^{(s)} - ih \frac{\partial \chi}{\partial x_s}, \quad (22)$$

$$e^{-\chi} ih \frac{\partial}{\partial t_s} e^{\chi} = ih \frac{\partial}{\partial t_s} + ih \frac{\partial \chi}{\partial t_s}. \quad (23)$$

С помощью полученных формул операторы (1) и (2) для энергии и количества движения можно преобразовать следующим образом. Построим согласно (II,6) вектор, соответствующий амплитуде  $\mathbf{B}(\mathbf{k})$  (уравнение II,21)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathbf{B}(\mathbf{k}) e^{-i\varphi} (d\mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathbf{B}^+(\mathbf{k}) e^{i\varphi} (d\mathbf{k}). \quad (24)$$

Этот вектор можно толковать как вектор-потенциал, нормированный условием

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (25)$$

Мы получим тогда

$$\begin{aligned} e^{-\chi} \left( p_x^{(s)} - \frac{\varepsilon_s}{c} A_x(\mathbf{r}_s, t_s) \right) e^{\chi} &= p_x^{(s)} - \frac{\varepsilon_s}{c} B_x(\mathbf{r}_s, t_s) - \\ &- ih \frac{\partial \chi'}{\partial x_s} - \frac{\varepsilon_s}{c} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \theta(\mathbf{k}) \frac{k_x}{k} e^{-i\varphi_s} (d\mathbf{k}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_s}{c} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{k_x}{k^3} f e^{-i\varphi_s} (d\mathbf{k}); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} e^{-\chi} \mathcal{T}^{(s)} e^{\chi} &= ih \frac{\partial}{\partial t_s} + ih \frac{\partial \chi'}{\partial t_s} - \frac{\varepsilon_s}{(2\pi)^{3/2}} \int \Phi^+(\mathbf{k}) e^{i\varphi_s} (d\mathbf{k}) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_s}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{f^+}{k^2} e^{i\varphi_s} (d\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (27)$$

Так как преобразованные операторы (26) и (27) действуют только на такие функционалы  $\Omega$ , которые не содержат аргументных функций  $\bar{\theta}(\mathbf{k})$  и  $\Phi(\mathbf{k})$  и, следовательно, удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \theta(\mathbf{k}) \Omega &= \frac{hc}{2k} \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{\theta}(\mathbf{k})} = 0 \\ \Phi^+(\mathbf{k}) \Omega &= \frac{hc}{2k} \cdot \frac{\delta' \Omega}{\delta \Phi(\mathbf{k})} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (28)$$

то в формулах (26) и (27) можно опустить интегралы, содержащие амплитуды  $\theta(\mathbf{k})$  и  $\Phi^+(\mathbf{k})$  (эти интегралы представляют

неэрмитовы операторы). Правда, оба другие интеграла тоже являются комплексными величинами. Однако можно так подобрать оставшуюся до сих пор неопределенной функцию  $\chi'$ , чтобы мнимая часть этих величин как раз сократилась с членами  $-ih \frac{\partial \chi'}{\partial x_s}$  и  $ih \frac{\partial \chi'}{\partial t_s}$ . Для этого положим

$$\chi' = -\frac{1}{4hc} \int \frac{f^+ f}{k^3} (d\mathbf{k}) + \text{const.} \quad (29)$$

Интеграл, который вследствие расходимости при  $k=0$  определен лишь с точностью до аддитивной постоянной, может быть вычислен. Мы имеем:

$$\chi' = -\frac{1}{4hc} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{uv} \varepsilon_u \varepsilon_v F(X_u - X_v) + \text{const}, \quad (30)$$

где  $X$  означает четырехмерный вектор  $(\mathbf{r}, t)$ , а  $F(X)$  имеет следующее значение:

$$F(X) = F(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\cos(ckt - \mathbf{kr})}{k^3} (d\mathbf{k}) + \text{const} = \\ = -\frac{2\pi}{r} \{ (r+ct) \lg|r+ct| + (r-ct) \lg|r-ct| \}. \quad (31)$$

Если в формуле (30) под  $F$  понимать последнее выражение (с логарифмами) и если опустить в ней члены с  $u=v$ , а также и постоянную, то величина  $\chi'$  будет вполне определенной функцией от координат  $\mathbf{r}_s$  и времен  $t_s$ , причем производные от этой функции совпадают с формально взятыми производными от выражения (29). Для этих производных получаются выражения

$$ih \frac{\partial \chi'}{\partial x_s} = i \frac{\varepsilon_s}{2c} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{k_x}{k^3} \sum_u \varepsilon_u \sin(\varphi_u - \varphi_s) (d\mathbf{k}), \quad (32)$$

$$-ih \frac{\partial \chi'}{\partial t_s} = i \frac{\varepsilon_s}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} \sum_u \varepsilon_u \sin(\varphi_u - \varphi_s) (d\mathbf{k}), \quad (33)$$

которые в самом деле совпадают с мнимыми частями интегралов, входящих в (26) и (27) — последние члены правой части. Принимая во внимание соотношение (28), мы можем рассматривать операторы

$$P'_x^{(s)} = p'_x^{(s)} - \frac{\varepsilon_s}{c} B_x(\mathbf{r}_s, t_s) + \\ + \frac{\varepsilon_s}{2c} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_u \varepsilon_u \int \frac{k_x}{k^3} \cos(\varphi_u - \varphi_s) (d\mathbf{k}), \quad (34)$$

$$T'^{(s)} = ih \frac{\partial}{\partial t_s} - \frac{\varepsilon_s}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_u \varepsilon_u \int \frac{1}{k^2} \cos(\varphi_u - \varphi_s) (d\mathbf{k}) \quad (35)$$

как преобразованные операторы для количества движения и кинетической энергии  $s$ -той частицы. В сумме, стоящей в (35), член с  $u = s$  является бесконечно большой постоянной.

Эти выражения можно написать проще, если ввести величины

$$V_s = \sum_u \frac{\varepsilon_u}{(2\pi)^3} \int \frac{\sin(\varphi_s - \varphi_u)}{k^3} (dk). \quad (36)$$

Тогда будет

$$P'_x{}^{(s)} = p_x^{(s)} - \frac{\varepsilon_s}{c} B_x(\mathbf{r}_s, t_s) - \frac{\varepsilon_s}{2c} \frac{\partial V_s}{\partial x_s}, \quad (37)$$

$$T'^{(s)} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s} - \frac{\varepsilon_s}{2c} \frac{\partial V_s}{\partial t_s}. \quad (38)$$

Интегралы в формуле (36) легко вычисляются. Напишем выражение (36) в виде

$$V_s = \sum_u \frac{\varepsilon_u}{4\pi} V(X_s - X_u), \quad (39)$$

где через  $V(X) = V(\mathbf{r}, t)$  обозначен интеграл

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{\sin(ckt - \mathbf{kr})}{k^3} (dk). \quad (40)$$

Этот интеграл равен

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2r} (|r + ct| - |r - ct|) \quad (41)$$

или если с помощью уравнений

$$\left. \begin{aligned} \xi(x) &= -1 \quad \text{для } x \leq -1 \\ \xi(x) &= x \quad \text{для } -1 \leq x \leq 1 \\ \xi(x) &= 1 \quad \text{для } 1 \leq x \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ввести вспомогательную функцию  $\xi(x)$ , то

$$V(\mathbf{r}, t) = \xi\left(\frac{ct}{r}\right). \quad (43)$$

Если подставить значение (41) или (43) для  $V(\mathbf{r}, t)$  в сумму (39) и вычислить входящие в формулы (37) и (38) производные от  $V_s$ , то для  $P'_x{}^{(s)}$  и  $T'^{(s)}$  получатся выражения

$$P'_x{}^{(s)} = p_x^{(s)} - \frac{\varepsilon_s}{c} B_x(\mathbf{r}_s, t_s) + \frac{\varepsilon_s}{2} \sum_u' \frac{\varepsilon_u}{4\pi} \frac{(x_s - x_u)(t_s - t_u)}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_u|^3}, \quad (44)$$

$$T'^{(s)} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s} - \frac{\varepsilon_s}{2} \sum_u' \frac{\varepsilon_u}{4\pi |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_u|}. \quad (45)$$

При этом следует иметь в виду, что функция  $V(\mathbf{r}, t)$  отлична от постоянной только для пространственно-подобного интер-



вала ( $\mathbf{r}, t$ ). Поэтому суммы в (44) и (45) берутся только по тем частицам, интервалы которых по отношению к данной частице пространственно-подобны. Следовательно, только пары частиц с пространственно-подобным интервалом вносят вклад в то взаимодействие, которое соответствует исключенным посредством нашего преобразования „продольным световым квантам“.

Волновые уравнения для функционала  $\Omega$  имеют такой же вид, как и приведенные ранее уравнения для функционала  $\Psi$ , а именно:

$$\frac{1}{2m_s} (P'^{(s)})^2 \Omega = T'^{(s)} \Omega \quad (s = 1, \dots, n) \quad (46)$$

в нерелятивистском случае и

$$[c\rho_a^{(s)} P'^{(s)} + m_s c^2 \rho_c^{(s)}] \Omega = T'^{(s)} \Omega \quad (s = 1, \dots, n) \quad (47)$$

в релятивистском случае. Здесь  $P'^{(s)}$  обозначает оператор (4), составленный из операторов (37), тогда как  $T'^{(s)}$  имеет значение (38). Дополнительные условия (7) при этом выполняются автоматически, если функционал  $\Omega$  зависит, кроме переменных  $q_s$  материальных частиц, только от аргументных функций  $\bar{\mathbf{V}}(\mathbf{k})$  (или же от связанных с ними согласно (II,30) функций  $\bar{b}(\mathbf{k}, j)$ ).

Вводя функциональные производные от  $\Omega$  по  $\bar{b}(\mathbf{k}, j)$ , нетрудно написать волновые уравнения (47) или (46) в явном виде; однако здесь мы этого делать не будем.

Заметим еще, что если рассматривать одно какое-нибудь из уравнений (47) или (46) (скажем,  $s$ -тое), то вид операторов  $P_x'^{(s)}$  и  $T'^{(s)}$  допускает дальнейшее упрощение. При помощи подходящего канонического преобразования (зависящего от номера  $s$  рассматриваемого уравнения) можно в выражении (37) для  $P_x'^{(s)}$  избавиться от члена  $-\frac{\epsilon_s}{2c} \frac{\partial V_s}{\partial x_s}$ ; в результате член  $-\frac{\epsilon_s}{2c} \frac{\partial V_s}{\partial t_s}$  в выражении (38) удвоится. Если затем опустить значок  $s$ , то будет

$$P_x'' = p_x - \frac{\epsilon}{c} B_x(\mathbf{r}, t),$$

$$T'' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \sum_u' \frac{\epsilon \epsilon_u}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_u|},$$

где сумма распространяется на все те электроны, интервалы которых относительно рассматриваемого ( $s$ -того) электрона пространственно-подобны. Если положить все времена равными друг другу, то сумма сводится к потенциальной энергии рас-

сматриваемого электрона в электростатическом поле остальных частиц.<sup>1</sup>

### Волновое уравнение для случая совпадающих времен

Напишем наши уравнения для того случая, когда все времена частиц  $t_s$  и время  $t$  световых квантов между собой совпадают.<sup>2</sup> Общее время мы обозначим пока через  $T$ , в дальнейшем же будем опять употреблять букву  $t$ . Мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial t_s}.$$

Чтобы составить выражение для производной  $\frac{\partial \Omega}{\partial T}$  от волнового функционала  $\Omega$  по общему времени  $T$ , нужно, следовательно, сложить друг с другом правые части отдельных волновых уравнений (46) или (47). Согласно (45) оператор для суммы кинетических энергий отдельных частиц равен

$$\sum_{s=1}^n T'^{(s)} = ih \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{uv} \frac{\epsilon_u \epsilon_v}{4\pi |\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v|} \quad (48)$$

(здесь мы уже опять написали  $t$  вместо  $T$ ). Чтобы получить конечное выражение, нужно отбросить здесь члены с  $u=v$ ; эти члены соответствуют собственной энергии электронов. Остальные члены дают в точности кулоновскую потенциальную энергию электронов.

Чтобы составить левую часть волнового уравнения, нужно использовать выражения (37) или (44) для  $P_x'^{(s)}$ . В нашем случае эти выражения упрощаются, так как для совпадающих времен величины  $V_s$  и их пространственные производные обращаются в нуль. Тогда имеем просто

$$P_x'^{(s)} = p_x^{(s)} - \frac{\epsilon_s}{c} B_x(\mathbf{r}_s, t). \quad (49)$$

<sup>1</sup> Как было указано Ф. Блохом (F. Bloch. Sow. Phys., 5, 301 (1934)), в случае несовпадающих времен волновые уравнения для разных частиц совместны только в том случае, если все интервалы между частицами имеют пространственный характер (В. Ф.).

<sup>2</sup> Заметим, что в случае совпадающих времен величина (30) приводится к

$$\chi' = + \frac{\alpha}{\pi} \sum_{u < v} \lg |\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v|,$$

где через  $\alpha$  обозначена постоянная тонкой структуры (все величины  $\epsilon_s$  положены здесь равными заряду электрона). Вследствие (14) отсюда вытекает, что при  $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_v$  функционал  $\Psi$  обращается в нуль даже, если  $\Omega$  конечно.

Мы ограничимся преобразованием релятивистских уравнений (47). Если обозначим через  $D_s$  дираковский оператор энергии в отсутствие поля, примененный к координатам  $s$ -того электрона

$$D_s = c (\alpha_x^{(s)} p_x^{(s)} + \alpha_y^{(s)} p_y^{(s)} + \alpha_z^{(s)} p_z^{(s)}) + m_s c^2 \alpha_4^{(s)}, \quad (50)$$

то волновое уравнение для функционала  $\Omega$  примет вид

$$\sum_{s=1}^n (D_s - \varepsilon_s \bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_s, t)) \Omega + \frac{1}{2} \sum_{uv} \frac{\varepsilon_u \varepsilon_v}{4\pi |\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v|} \Omega = i\hbar \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (51)$$

Мы должны преобразовать здесь оператор, содержащий векторный потенциал  $\mathbf{V}$ , и написать его в более явной форме. Если подставить в формулу (24) для  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  выражение (II, 30) для амплитуды  $\mathbf{V}(\mathbf{k})$ , то получится

$$\sum_{s=1}^n \varepsilon_s \bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_s, t) = \sum_{j=1}^2 \int (d\mathbf{k}) \{G^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j) + G(\mathbf{k}, j) b^+(\mathbf{k}, j)\}, \quad (52)$$

где для краткости положено  $\int$

$$G(\mathbf{k}, j) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2k}} \sum_{s=1}^n \varepsilon_s (\bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, j)) e^{ickt - i\mathbf{k}\mathbf{r}_s}. \quad (53)$$

Далее, если обозначить через  $H$  обычный оператор энергии задачи  $n$  тел, действующий в конфигурационном пространстве  $n$  частиц

$$H = \sum_{s=1}^n D_s + \frac{1}{2} \sum_{uv} \frac{\varepsilon_u \varepsilon_v}{4\pi |\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v|}, \quad (54)$$

то волновое уравнение примет вид

$$H\Omega - i\hbar \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \sum_j \int (d\mathbf{k}) \{G^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j) + G(\mathbf{k}, j) b^+(\mathbf{k}, j)\} \Omega. \quad (55)$$

Если рассматривать  $\Omega$  как функционал от  $\bar{b}(\mathbf{k}, j)$ , то предыдущее уравнение напишется

$$H\Omega - i\hbar \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \sum_j \int (d\mathbf{k}) \left\{ G^+(\mathbf{k}, j) \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(\mathbf{k}, j)} + G(\mathbf{k}, j) \bar{b}(\mathbf{k}, j) \right\}. \quad (56)$$

Это — явная форма волнового уравнения для функционала  $\Omega$ , который, согласно квантовой электродинамике, должен описывать систему из  $n$  электронов вместе с неопределенным числом световых квантов. Волновое уравнение (55) или (56) в матема-

тическом отношении эквивалентно другим видам волнового уравнения, употреблявшимся в литературе ранее, но оно значительно проще и им легче пользоваться.

Коэффициенты  $G$  и  $G^+$  волнового уравнения зависят явно от времени; однако с помощью канонического преобразования<sup>1</sup> эту зависимость от времени можно исключить. Таким образом, получается то представление операторов, которое соответствует употреблявшемуся Гейзенбергом и Паули.

Если обозначить через  $L^\circ$  какой-либо оператор в этом последнем представлении, а через  $L$  тот же оператор в первоначальном представлении, то упомянутое каноническое преобразование имеет вид

$$L^\circ = e^{-i\omega t} L e^{i\omega t}, \quad (57)$$

где  $\omega$  есть оператор

$$\omega = c \sum_j \int k b^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j) (d\mathbf{k}) \quad (58)$$

для деленной на  $h$  энергии световых квантов (ср. (II, 34)). Из перестановочных соотношений для величин  $b(\mathbf{k}, j)$  и  $b^+(\mathbf{k}, j)$  следует

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} b e^{i\omega t} &= e^{ickt} b, \\ e^{-i\omega t} b^+ e^{i\omega t} &= e^{-ickt} b^+. \end{aligned} \quad (59)$$

После преобразования оператор  $b(\mathbf{k}, j)$  умножается, таким образом, на множитель  $e^{ickt}$ . Но тот же множитель дает зависимость от времени величины  $G$ , определяемой формулой (53). Мы имеем:

$$G(\mathbf{k}, j) = e^{ickt} G_0(\mathbf{k}, j). \quad (60)$$

Поэтому в произведениях  $G b^+$  и  $G^+ b$ , входящих в волновое уравнение, множители  $e^{\pm ickt}$  сокращаются. Далее мы имеем соотношение

$$e^{-i\omega t} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{i\omega t} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hbar\omega. \quad (61)$$

В результате волновое уравнение для преобразованного функционала, который мы снова обозначим через  $\Omega$  (вместо  $\Omega^\circ$ ), принимает вид

$$\begin{aligned} H\Omega + \hbar c \sum_j \int k b^+ b (d\mathbf{k}) \Omega - i\hbar \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= \\ &= \sum_j \int (d\mathbf{k}) \{G_0^+ b + G_0 b^+\} \Omega. \end{aligned} \quad (62)$$

Эта форма волнового уравнения отличается от (55), во-первых, тем, что энергия световых квантов входит в него явно, и, во-

<sup>1</sup> См.: L. Rosenfeld. Zs. f. Phys., 76, 729 (1932).

вторых, тем, что коэффициенты уравнения не зависят от времени.

В случае одного электрона с помощью аналогичного преобразования

$$L^{\circ} = e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}} L e^{i\omega t - i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (63)$$

в котором

$$\mathbf{q} = \sum_j \int (d\mathbf{k}) \mathbf{k} b^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j), \quad (64)$$

можно исключить также и координаты электрона.<sup>1</sup> Для преобразованного волнового функционала  $\Omega$  получается уравнение

$$\begin{aligned} & \{ c\bar{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - h\mathbf{q}) + mc^2\alpha_4 + h\omega \} \Omega - ih \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \\ & = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \sum_j \int (d\mathbf{k}) \sqrt{\frac{\hbar c}{2k}} \bar{\alpha} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \{ b(\mathbf{k}, j) + b^+(\mathbf{k}, j) \} \Omega. \end{aligned} \quad (65)$$

Из-за наличия члена с  $b^+$  в этом уравнении, из него вытекает парадоксальный результат, что стационарное состояние без световых квантов невозможно, т. е. что излучать должен даже свободный равномерно движущийся электрон. Учитывая это, может быть было бы физически правильнее отбрасывать всю правую часть (65). Тогда из получаемого таким путем уравнения

$$\{ c\bar{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - h\mathbf{q}) + mc^2\alpha_4 + h\omega \} \Omega - ih \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (66)$$

следует закон сохранения количества движения в его обычной форме (явление Комптона).

### Представление уравнений в пространстве импульсов световых квантов

Для большинства приложений достаточно рассматривать конечное число световых квантов. В этом случае выгодно перейти к волновым функциям в пространстве импульсов световых квантов. Так как мы рассматриваем систему, состоящую из световых квантов и из  $n$  частиц (электронов), то упомянутые волновые функции

$$\psi_q = \psi_q(\mathbf{r}_1\zeta_1 \dots \mathbf{r}_n\zeta_n; \mathbf{k}_1j_1, \dots, \mathbf{k}_qj_q) \quad (67)$$

будут содержать наряду с переменными  $(\mathbf{k}_uj_u)$  световых квантов еще и переменные  $(\mathbf{r}_s\zeta_s)$  всех  $n$  электронов. При этом волновые функции будут симметричны в переменных  $(\mathbf{k}_uj_u)$  и антисимметричны в переменных  $(\mathbf{r}_s\zeta_s)$ . В дальнейшем для краткости мы будем опускать переменные электронов  $(\mathbf{r}_s\zeta_s)$  и писать вместо (67) просто

$$\psi_q = \psi_q(\mathbf{k}_1j_1, \dots, \mathbf{k}_qj_q). \quad (67^*)$$

<sup>1</sup> См.: W. Heisenberg. Zs. f. Phys., 65, 4 (1930).

Разложение волнового функционала  $\Omega$  по собственным функционалам  $\Omega_q$  оператора

$$N = \sum_j \int (d\mathbf{k}) b^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j) \quad (68)$$

для числа световых квантов имеет вид

$$\Omega = \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_q, \quad (69)$$

где через

$$\Omega_q = \frac{1}{\sqrt{q!}} \sum_{j_1 \dots j_q} \int (d\mathbf{k}_1) \dots (d\mathbf{k}_q) \psi_q(\mathbf{k}_1 j_1 \dots \mathbf{k}_q j_q) \times \\ \times \bar{b}(\mathbf{k}_1 j_1) \dots \bar{b}(\mathbf{k}_q j_q) \quad (70)$$

обозначен названный собственный функционал. Если оборвать ряд (69) на конечном числе членов, то это как раз и значит, что мы ограничиваемся рассмотрением конечного числа световых квантов. Если подставить ряд (69) в волновое уравнение (62), то для волновых функций (67) получатся уравнения:

$$H\psi_q + hc(k_1 + \dots + k_q)\psi_q - ih \frac{\partial \psi_q}{\partial t} = \\ = \sqrt{q+1} \sum_j \int (d\mathbf{k}) G_0^+(\mathbf{k}, j) \psi_{q+1}(\mathbf{k}j, \mathbf{k}_1 j_1, \dots, \mathbf{k}_q j_q) + \\ + \frac{1}{\sqrt{q}} \{G_0(\mathbf{k}_1, j_1) \psi_{q-1}(\mathbf{k}_2 j_2, \dots, \mathbf{k}_q j_q) + \dots + \\ + G_0(\mathbf{k}_q j_q) \psi_{q-1}(\mathbf{k}_1 j_1, \dots, \mathbf{k}_{q-1} j_{q-1})\}. \quad (71)$$

Эти же уравнения можно было бы, разумеется, получить и более формальным путем, если произвести в (62) рассмотренный в первой части переход от операторов вторичного квантования к конфигурационному пространству (в данном случае к пространству импульсов).

Ту систему уравнений, которая вытекает из волнового уравнения (55) или (56), мы здесь выписывать не будем, так как она, очевидно, получается из (71) просто вычеркиванием членов с энергией световых квантов и заменой  $G_0$  на  $G$ .

### Некоторые применения<sup>1</sup>

Если оборвать ряд (69) уже на первом члене, т. е. положить просто  $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1$ , то для  $\psi_0$  и  $\psi_1$  получаются следующие

<sup>1</sup> После того как установлен общий вид функционала в виде бесконечного ряда (6), применяемый ниже метод, основанный на рассмотрении конечного числа членов этого ряда, представляется совершенно естественным. В работах И. Е. Тамма (1945 г. и последующих) этот метод применялся к теории мезонов и получил наименование „метода обрезания уравнений по числу частиц“. В литературе его называют также „методом Тамма—Данкова“ (В. Ф.).

щие уравнения:

$$H\psi_0 - ih \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = \sum_j \int (d\mathbf{k}) G_0^+(\mathbf{k}, j) \psi_1(\mathbf{k}, j), \quad (72)$$

$$H\psi_1 + hck\psi_1 - ih \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = G_0(\mathbf{k}, j) \psi_0. \quad (72^*)$$

**Формулы Брейта и Мёллера.** Покажем, что в этой системе уравнений содержатся как формула Брейта, так и формула Мёллера.

Выведем сперва формулу Брейта. Для этого предположим, что в уравнении (72\*) можно пренебречь членами  $H\psi_1 - ih \frac{\partial \psi_1}{\partial t}$  по сравнению с  $hck\psi_1$ . Тогда мы будем иметь:

$$\psi_1(\mathbf{k}, j) = \frac{1}{hck} G_0(\mathbf{k}, j) \psi_0. \quad (73)$$

Подставив это значение  $\psi_1$  в уравнение (72) и вычислив интеграл

$$\sum_j \int (d\mathbf{k}) \frac{1}{hck} G^+(\mathbf{k}, j) G(\mathbf{k}, j) = E_0 + \sum_{u>v} \frac{\varepsilon_u \varepsilon_v}{8\pi} \left\{ \frac{\bar{\alpha}_u \cdot \bar{\alpha}_v}{|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v|} + \frac{[\bar{\alpha}_u \cdot (\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v)] [\bar{\alpha}_v \cdot (\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v)]}{|\mathbf{r}_u - \mathbf{r}_v|^3} \right\}, \quad (74)$$

мы сразу приходим к известной формуле Брейта. (Бесконечно большая собственная энергия  $E_0$ , соответствующая членам, пропорциональным квадратам зарядов, должна быть при этом отброшена.)

Напомним здесь, что, как показал Брейт, выражение (74) должно рассматриваться как возмущающая энергия, причем ее следует учитывать только в первом приближении; переход ко второму приближению приводит к неверным результатам.

Основанный на другом принципе метод приближения, в котором пренебрегают высшими степенями зарядов, приводит к формуле Мёллера.<sup>1</sup>

Для вывода этой формулы нужно, как известно, взять в качестве нулевого приближения для  $\psi_0$  такое выражение, которое соответствует свободному движению двух электронов и вычислить затем матричный элемент энергии взаимодействия.

Мы будем пользоваться представлением волновых функций в пространстве импульсов. Функцию  $\psi_0$  полагаем равной

$$\psi_0 = e^{-\frac{iWt}{\hbar}} \psi_0^0 = e^{-\frac{iWt}{\hbar}} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0) \psi(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0), \quad (75)$$

где  $\psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  есть общее решение уравнений

$$D_1\psi = W_1\psi; \quad D_2\psi = W_2\psi. \quad (76)$$

<sup>1</sup> С. Möller. Zs. f. Phys., 70, 786 (1931).

При заданном импульсе каждое из этих уравнений имеет четыре решения. Поэтому следовало бы, собственно говоря, писать вместо  $\psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  подробнее  $\psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, s_1, s_2)$ , где переменная  $s=1, 2, 3, 4$  обозначает номер решения. Для краткости мы будем, однако, опускать переменную  $s$ . В формуле (75) величина в показателе есть сумма кинетических энергий обеих частиц

$$W = W_1 + W_2. \quad (77)$$

Величины  $W_1, W_2, D_1, D_2, W$ , соответствующие значениям импульса  $\mathbf{p}_1^0$  и  $\mathbf{p}_2^0$ , мы будем обозначать через  $W_1^0, W_2^0$  и т. д.

В формулу Мёллера входит только тот матричный элемент энергии взаимодействия, который соответствует закону сохранения  $W = W^0$ . Поэтому мы можем положить в наших формулах

$$W = W_1 + W_2 = W_1^0 + W_2^0 = W^0. \quad (78)$$

Зависимость функции  $\psi_1(\mathbf{k}, j)$  от времени, очевидно, будет та же, как и для  $\psi_0$ . Мы имеем:

$$\psi_1(\mathbf{k}, j) = e^{-\frac{i}{\hbar} W t} \psi_1^0(\mathbf{k}, j). \quad (79)$$

Подставляем это выражение в уравнение (72\*) и пренебрегаем там кулоновскими членами. Получаем

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2 + hck - W) \psi_1^0(\mathbf{k}, j) &= G_0(\mathbf{k}, j) \psi_0^0 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2k}} \{ \varepsilon_1(\bar{\alpha}_1 \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, j)) \delta(\mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k} - \mathbf{p}_1^0) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0) + \\ &+ \varepsilon_2(\bar{\alpha}_2 \mathbf{e}(\mathbf{k}, j)) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0) \delta(\mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k} - \mathbf{p}_2^0) \} \psi(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0). \end{aligned} \quad (80)$$

Это уравнение мы решаем относительно  $\psi_1^0(\mathbf{k}, j)$ . Решение облегчается тем, что функция  $\psi$  удовлетворяет уравнениям (76). Мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_1^0(\mathbf{k}, j) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2k}} \times \\ &\times \{ (D_1 + hck - W_1^0)^{-1} \varepsilon_1(\bar{\alpha}_1 \mathbf{e}) \delta(\mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k} - \mathbf{p}_1^0) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0) + \\ &+ (D_2 + hck - W_2^0)^{-1} \varepsilon_2(\bar{\alpha}_2 \mathbf{e}) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0) \delta(\mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k} - \mathbf{p}_2^0) \} \times \\ &\times \psi(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0). \end{aligned} \quad (81)$$

Искомый матричный элемент энергии взаимодействия есть сумма матричного элемента

$$\begin{aligned} &(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | U' | \mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0) = \\ &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\hbar (2\pi)^3} \cdot \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_2^0) \frac{\bar{\psi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \psi(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0)}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|^2} \end{aligned} \quad (82)$$



для кулоновской энергии, которая в формуле (72\*) уже вошла в оператор  $H$  и того члена в выражении

$$-\bar{\psi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \sum_j \int (d\mathbf{k}) G_0^+(\mathbf{k}j) \psi_1^0(\mathbf{k}, j), \quad (83)$$

который пропорционален произведению  $\epsilon_1 \epsilon_2$ . Члены же, пропорциональные  $\epsilon_1^2$  и  $\epsilon_2^2$  бесконечны и должны быть отброшены. После некоторых выкладок, в которых используются соотношения (76) и (78), а также формула

$$\sum_j [\bar{\alpha}_1 \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, j)] [\bar{\alpha}_2 \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, j)] = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 - \frac{1}{k^2} (\bar{\alpha}_1 \cdot \mathbf{k}) (\bar{\alpha}_2 \cdot \mathbf{k}) \quad (84)$$

для члена пропорционального  $\epsilon_1 \epsilon_2$  получается выражение

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | U'' | \mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0) = \\ & = -\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\hbar (2\pi)^3} \cdot \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_2^0)}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0)^2 - \frac{1}{c^2} (W_1 - W_1^0)^2} \times \\ & \times \bar{\psi}(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \cdot \left\{ \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 - \frac{[\bar{\alpha}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0)] [\bar{\alpha}_2 \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0)]}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0|^2} \right\} \psi(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0). \quad (85) \end{aligned}$$

В силу закона сохранения для импульса (функция  $\delta$  в качестве множителя) и для энергии (равенство (78)) в этой формуле можно заменить  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0$  на  $\mathbf{p}_2^0 - \mathbf{p}_2$  и  $W_1 - W_1^0$  на  $W_2^0 - W_2$ . Из соотношения (76) следует также

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) [\bar{\alpha}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0)] [\bar{\alpha}_2 \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2^0)] \psi(\mathbf{p}_1^0 \mathbf{p}_2^0) = \\ & = \frac{1}{c^2} (W_1 - W_1^0) (W_2 - W_2^0) \bar{\psi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \psi(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0). \quad (86) \end{aligned}$$

Принимая во внимание (78) и (76), получаем для суммы матричных элементов (82) и (85) выражение

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | U | \mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0) = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\hbar (2\pi)^3} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_2^0) \times \\ & \times \frac{\bar{\psi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) (1 - \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2) \psi(\mathbf{p}_1^0, \mathbf{p}_2^0)}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^0)^2 - \frac{1}{c^2} (W_1 - W_1^0)^2}. \quad (87) \end{aligned}$$

Это и есть предложенная Мёллером формула для матричного элемента энергии взаимодействия двух электронов. Тем самым мы показали, что эта формула, так же как и формула Брейта, вытекает из нашей системы уравнений (72). При выводе той и другой формулы приходилось, правда, вычеркивать некоторые бесконечные члены.

**Естественная ширина спектральных линий.** В качестве последнего примера рассмотрим вывод известной формулы для естественной ширины спектральных линий. И в этом случае в основу наших рассуждений можно положить формулы (72).

В нашем случае оператор  $H$  есть оператор энергии атома; поле ядра включено в  $H$ . Обозначим собственные функции через  $u_n$  и собственные значения через  $E_n$

$$Hu_n = E_n u_n. \quad (88)$$

Входящие в формулы (72) функции  $\psi_0$  и  $\psi_1(\mathbf{k}, j)$  мы будем разлагать по функциям  $u_n$

$$\psi_0 = \sum_n a_n u_n, \quad (89)$$

$$\psi_1(\mathbf{k}, j) = \sum_n c_n(\mathbf{k}, j) u_n. \quad (90)$$

В дальнейшем мы ограничимся тем, что будем рассматривать в разложениях (89) и (90) только по одному члену; но сначала выпишем полные разложения. Нам нужно вычислить матричный элемент от входящего в (72) оператора  $G_0$ . При этом будем считать, что длина волны рассматриваемого света велика по сравнению с атомными размерами. Мы можем тогда заменить в выражении для  $G_0$  все множители  $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  множителем  $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ , где  $\mathbf{r}$  есть, скажем, радиус-вектор центра тяжести атома. Мы будем тогда иметь:

$$(n | G_0 | n') = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2ck}} \dot{D}_{nn'} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{k}, j), \quad (91)$$

где  $\dot{D}_{nn'}$  означает матричный элемент для производной по времени от электрического момента атома. Если ввести разложения (89) и (90), а также величины (91) в формулы (72), то получится система уравнений

$$E_n a_n - i\hbar \dot{a}_n = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_j \int (d\mathbf{k}) \sqrt{\frac{\hbar}{2ck}} e^{i\mathbf{r}\mathbf{k}} \sum_{n'} [\mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \cdot \dot{D}_{nn'}] c_{n'}(\mathbf{k}, j), \quad (92)$$

$$\begin{aligned} & (E_n + \hbar ck) c_n(\mathbf{k}, j) - i\hbar c_n(\mathbf{k}, j) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2ck}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sum_{n'} [\mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \cdot \dot{D}_{nn'}] a_{n'}. \end{aligned} \quad (92^*)$$

Мы ограничимся теперь рассмотрением следующих двух состояний:

1) возбужденного состояния атома ( $n=2$ ) без световых квантов;

2) основного состояния атома ( $n=1$ ) с одним световым квантом.

Следовательно, мы полагаем равными нулю все величины  $a_n$  и  $c_n$ , за исключением  $a_2$  и  $c_1(\mathbf{k}, j)$ . Так как диагональные

элементы матрицы  $D_{nn'}$  равны нулю, то уравнения (92) принимают в нашем случае вид

$$E_2 a_2 - i\hbar \dot{a}_2 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_j \int (dk) \sqrt{\frac{\hbar}{2ck}} e^{ikr} \mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \cdot \dot{D}_{21} c_1(\mathbf{k}, j), \quad (93)$$

$$(E_1 + \hbar ck) c_1(\mathbf{k}, j) - i\hbar \dot{c}_1(\mathbf{k}, j) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2ck}} e^{-ikr} \mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \cdot \dot{D}_{12} a_2. \quad (93^*)$$

В качестве начальных условий мы возьмем

$$a_2 = 1; \quad c_1(\mathbf{k}, j) = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (94)$$

и положим величину  $a_2$  равной

$$a_2 = e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t - \gamma t}, \quad (95)$$

где постоянная  $\gamma$  подлежит определению из системы уравнений (93). Если подставить выражение (95) в (93\*), то для  $c_1(\mathbf{k}, j)$  получится дифференциальное уравнение, решение которого, удовлетворяющее начальным условиям (94), имеет вид

$$c_1(\mathbf{k}, j) = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\hbar ck}} e^{-ikr} \mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \cdot \dot{D}_{12} \times \\ \times e^{-\frac{i}{\hbar} (E_0 + \hbar ck) t} \cdot \frac{e^{i(ck - \omega) t - \gamma t} - 1}{ck - \omega + i\gamma}. \quad (96)$$

Теперь мы должны подставить выражения (95) и (96) для  $a_2$  и для  $c_1(\mathbf{k}, j)$  в уравнение (93). Мы получим

$$i\hbar \gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2c} \sum_j \int \frac{(dk)}{k} (\mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \cdot \dot{D}_{12}) (\mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \dot{D}_{21}) \times \\ \times \frac{1 - e^{-i(ck - \omega) t + \gamma t}}{ck - \omega + i\gamma}. \quad (97)$$

Очевидно, что это равенство не может выполняться строго; в самом деле, правая часть его зависит от  $t$  и при  $t = 0$  обращается в нуль, тогда как левая часть постоянна. Кроме того, интеграл по волновому вектору светового кванта нельзя распространить на все пространство импульсов (потому что он тогда расходится и тогда не выполняется предположение, сделанное при выводе формулы (91)). Интеграл этот следует распространить только на область резонанса  $k = \frac{\omega}{c}$ . Если принять это во внимание, то можно показать, что для больших значений  $\omega t$  правая часть равенства (97) действительно почти

постоянна. Интегрирование (точнее, усреднение) по всем направлениям волнового вектора дает

$$\begin{aligned} \text{Средн. зн. } \sum_j (\mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \dot{\mathbf{D}}_{21}) (\mathbf{e}(\mathbf{k}, j) \mathbf{D}_{12}) = \\ = \frac{2}{3} |\dot{\mathbf{D}}_{12}|^2. \end{aligned} \quad (98)$$

Поэтому равенство (97) принимает вид

$$ih\gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3c} |\dot{\mathbf{D}}_{12}|^2 \cdot \int k dk \frac{1 - e^{-i(ck - \omega)t + \gamma t}}{ck - \omega + i\gamma}. \quad (99)$$

Если заменить здесь в подынтегральной функции множитель  $k$  на  $\frac{\omega}{c}$  и воспользоваться формулой

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^{+X} \frac{dx}{x + iy} (1 - e^{-i(x+iy)}) = \pi i, \quad (100)$$

то для величины  $\gamma$  получится выражение

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{3hc^3} |\dot{\mathbf{D}}_{12}|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^3}{3hc^3} |\mathbf{D}_{12}|^2. \quad (101)$$

Если перейти от используемых здесь хэвисайдовских единиц для электрического момента к обычным электростатическим единицам, то полученное для  $\gamma$  выражение совпадет с обычным.

В только что разобранном простейшем случае вычисления были произведены с большой подробностью. Мы это сделали для того, чтобы показать на примере, как следует применять математический аппарат, предложенный в этой работе. Подобным же образом ведется расчет и в более сложных случаях, когда вводится в рассмотрение несколько световых квантов. В этих случаях в разложении (69) волнового функционала следует удерживать несколько членов, а в уравнениях (71) брать несколько волновых функций  $\psi_q$ . С другой стороны, если желательно принять в расчет неопределенное число световых квантов с заданными частотами, можно ввести по формулам (II,37) величины  $b_j$  и заменить функциональные производные обыкновенными.

Развитый здесь математический аппарат достаточно гибок для того, чтобы охватить все те задачи, к которым вообще применима квантовая электродинамика.

# МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ <sup>1</sup>

В. А. Фок

## ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Шредингера для материальной системы (атома или молекулы) дает для энергии этой системы ряд уровней, соответствующих стационарным состояниям. Однако строго стационарным будет только основной уровень; если же система находится в возбужденном состоянии, то появится вероятность перехода в основное состояние — перехода, сопровождаемого излучением. Таким образом, понятие о чисто механической системе, независимой от излучения, есть понятие приближенное. Мы получим лучшее приближение к действительности, если будем рассматривать атом или молекулу совместно с излучением, т. е. совместно со световыми квантами, из которых оно составлено. В то время как энергия собственно механической системы может тратиться на излучение или повышаться вследствие поглощения световых квантов, энергия более общей системы, состоящей из материи и света, уже будет оставаться постоянной: эта система будет консервативной.

Таким образом, возникает необходимость в теории, которая рассматривала бы материю и излучение как одну консервативную систему. Теория эта — квантовая электродинамика — создавалась, начиная с 1929 г., совместными усилиями многих физиков, в первую очередь Гейзенберга, Паули и Дирака. В разработке этой теории принимали участие и советские физики, в частности автор этой статьи.

Основная трудность, которую приходится преодолеть при построении этой теории, состоит в том, что число световых квантов может меняться в ходе процесса: они могут поглощаться и испускаться. Следовательно, приходится рассматривать систему с неопределенным числом частиц. Математическая теория, позволяющая рассматривать такого рода системы, носит название теории вторичного квантования; основная идея ее будет изложена ниже.

---

<sup>1</sup> Впервые опубликовано в 1937 г. Уч. зап. ЛГУ, № 17.

Дальнейший этап в построении квантовой электродинамики состоит в объяснении электростатических сил. В самом деле, электромагнитное поле не сводится целиком к излучению в собственном смысле; кроме излучения существуют еще и электростатические силы. Правда, эти последние вводятся в уравнение Шредингера явным образом, а значит уже учитываются. Но, согласно теории относительности, электромагнитное поле представляет собою нечто цельное, и разделение его на электростатические силы и силы излучения не является инвариантным. Поэтому возникает задача вывести и те и другие силы из одних и тех же квантовых представлений. Эта задача также решена квантовой электродинамикой.

Квантовая электродинамика представляет собою законченную физическую теорию, дающую правильный ответ на ряд вопросов, относящихся к взаимодействию материи с излучением. Теория эта может быть расширена на случай переменного числа материальных частиц (рождение и уничтожение пар электронов и позитронов). Однако современная квантовая электродинамика имеет ряд существенных недостатков, которые формально проявляются в том, что строгое решение ее уравнений оказывается в большинстве случаев невозможным вследствие расходимости некоторых интегралов и других затруднений математического характера [...].

## 1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИОНАЛОВ

### а) Функционалы и квантованные операторы

Рассмотрим систему, состоящую из частиц, удовлетворяющих так называемой статистике Бозе. Такими будут, вообще говоря, частицы с целочисленным или нулевым спином, например  $\alpha$ -частицы и световые кванты.

Обозначим совокупность переменных, относящихся к степеням свободы одной частицы, буквой  $k$ . Для светового кванта буква  $k$  будет, следовательно, означать три составляющие волнового вектора  $k_x, k_y, k_z$  и переменную  $j$ , характеризующую состояние поляризации. Как известно из квантовой механики, состояние системы с определенным числом  $n$  таких частиц описывается волновой функцией

$$\psi_n = \psi(k_1, k_2, \dots, k_n). \quad (1.1)$$

Упомянутое выше условие, что частицы подчиняются статистике Бозе, означает, что функция  $\psi_n$  должна быть *симметричной* относительно своих аргументов  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Введем вспомогательную произвольную функцию  $\bar{b}(k)$  и составим выражение

$$\Omega_n = c_n \int \psi_n(k_1, \dots, k_n) \bar{b}(k_1) \dots \bar{b}(k_n) dk_1 \dots dk_n, \quad (1.2)$$

где  $c_n$  есть некоторый численный коэффициент, зависящий только от  $n$ . Очевидно, что коль скоро задана волновая функция  $\psi_n$ , будет известно и значение выражения  $\Omega_n$  для всякого вида вспомогательной функции  $\bar{b}(k)$ . Но и обратно, в силу симметрии функции  $\psi_n$  эта функция будет определена, если для всякого  $\bar{b}(k)$  будет известно значение  $\Omega_n$ .

Выражение  $\Omega_n$  мы будем называть *функционалом* от функции  $\bar{b}(k)$ . Таким образом, для описания состояния системы из  $n$  частиц можно вводить вместо волновой функции  $\psi_n$  соответствующий функционал  $\Omega_n$ . Этот математический прием представляет аналогию с рассмотрением квадратичной формы вместо таблицы ее коэффициентов или с часто применяемым в анализе рассмотрением «производящих функций». В квантовой механике этот прием был впервые применен автором этой статьи (этот сб., стр. 9—24).

Для нашей задачи введение функционалов вида  $\Omega_n$  представляет то преимущество, что их легко обобщить на случай неопределенного числа частиц. Для этого достаточно рассмотреть сумму

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n, \quad (1.3)$$

где  $\Omega_n$  имеет вид (1.2).

Пусть кроме функционала  $\Omega_n$ , составленного при помощи функции  $\psi_n$ , дан другой функционал  $\Omega_n'$ , составленный при помощи функции  $\psi_n'$ . *Скалярным произведением* двух функционалов мы назовем выражение

$$(\Omega_n, \Omega_n') = \int \bar{\psi}_n(k_1, \dots, k_n) \psi_n'(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n. \quad (1.4)$$

Физический смысл этого выражения известен из квантовой механики. Так, например, если  $\psi_n'$  есть результат применения к  $\psi_n$  некоторого оператора  $L^{(n)}$ , имеющего смысл для системы из  $n$  частиц

$$\psi_n' = L^{(n)}\psi_n, \quad (1.5)$$

то выражение (1.4) дает математическое ожидание величины с оператором  $L^{(n)}$ . При этом предполагается, что волновая функция  $\psi_n$  нормирована на единицу, так что

$$(\Omega_n, \Omega_n) = \int \bar{\psi}_n \psi_n dk_1 \dots dk_n = 1. \quad (1.6)$$

Если рассматриваются функционалы более общего вида (1.3), то их скалярное произведение определяется, как сумма скалярных произведений соответствующих членов

$$(\Omega, \Omega') = \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_n, \Omega_n'). \quad (1.7)$$

В частном случае, когда  $\Omega' = \Omega$  и, следовательно, все  $\psi'_n$  равны соответствующим  $\psi_n$ , мы получим условие нормировки, приравняв единице выражение

$$(\Omega, \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_n, \Omega_n) = 1. \quad (1.8)$$

Отдельный член  $(\Omega_n, \Omega_n)$  этого выражения даст вероятность того, что имеется ровно  $n$  частиц. Условие нормировки (1.8) выражает требование, чтобы сумма этих вероятностей равнялась единице.

Рассмотрим оператор  $L$  для некоторой величины, обладающей свойством аддитивности, например для кинетической энергии, количества движения или электрического момента. Мы будем тогда иметь:

$$L^{(n)} = L(k_1) + L(k_2) + \dots + L(k_n). \quad (1.9)$$

Пусть в функционале  $\Omega'$  функции  $\psi_n'$  равны (1,5), где оператор  $L^{(n)}$  имеет значение (1,9). Поставим себе вопрос: путем каких операций функционал  $\Omega'$  может быть получен из  $\Omega$ ?

Для отдельного члена  $\Omega_n'$  мы имеем:

$$\begin{aligned} & \Omega_n' = \\ & = c_n \int \{ [L(k_1) + \dots + L(k_n)] \psi_n \} \bar{b}(k_1) \dots \bar{b}(k_n) dk_1 \dots dk_n. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Это выражение распадается на сумму  $n$  интегралов, которые, однако, все между собой одинаковы, так как функция  $\psi_n(k_1, \dots, k_n)$  симметрична. Поэтому мы имеем:

$$\Omega_n' = nc_n \int [L(k_1) \psi_n(k_1, \dots, k_n)] \bar{b}(k_1) \dots \bar{b}(k_n) dk_1 \dots dk_n \quad (1.11)$$

или короче

$$\Omega_n' = \int \bar{b}(k) L(k) f_n(k) dk, \quad (1.12)$$

где функция

$$f_n(k) = nc_n \int \psi_n(k, k_2, \dots, k_n) \bar{b}(k_2) \dots \bar{b}(k_n) dk_2 \dots dk_n \quad (1.13)$$

не зависит от вида оператора  $L$ . Чтобы выразить  $\Omega_n'$  через  $\Omega_n$ , достаточно выразить  $f_n(k)$  через  $\Omega_n$ . Для этого будем варьировать в  $\Omega_n$  вспомогательную функцию  $b(k)$ . Составляя вариацию, легко убедимся, что

$$\delta \Omega_n = \int f_n(k) \delta \bar{b}(k) dk. \quad (1.14)$$

Таким образом,  $f_n(k)$  есть не что иное, как коэффициент при вариации  $\delta \bar{b}(k)$  под интегралом в выражении для  $\delta \Omega_n$ . Этот коэффициент мы назовем функциональной производной от  $\Omega_n$  по  $\bar{b}(k)$  и будем обозначать через  $\frac{\delta' \Omega_n}{\delta \bar{b}(k)}$ . Для функционала  $\Omega$



общего вида (1.3) функциональная производная определится равенством

$$\delta \Omega_n' = \int \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(k)} \cdot \delta \bar{b}(k) dk. \quad (1.15)$$

Таким образом, формула (1.12) напишется

$$\Omega_n' = \int \bar{b}(k) L(k) \frac{\delta' \Omega_n}{\delta \bar{b}(k)} dk. \quad (1.16)$$

Составляя сумму выражений (1.16) по  $n$ , получим искомое выражение для всего функционала  $\Omega$  в виде

$$\Omega' = \int \bar{b}(k) L(k) \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(k)} dk. \quad (1.17)$$

Если мы обозначим операцию составления функциональной производной символом  $b(k)$

$$b(k) \Omega = \frac{\delta' \Omega}{\delta \bar{b}(k)}, \quad (1.18)$$

а операцию умножения на вспомогательную функцию  $\bar{b}(k)$  — символом  $b^+(k)$

$$b^+(k) \Omega = \bar{b}(k) \Omega, \quad (1.19)$$

то согласно (1.17) функционал  $\Omega'$  может быть получен из  $\Omega$  путем применения оператора

$$L = \int b^+(k) L(k) b(k) dk, \quad (1.20)$$

который называется „квантованным“ оператором, соответствующим неквантованному оператору  $L(k)$ . При помощи квантованного оператора  $L$  формула (1.17) может быть написана в виде

$$\Omega' = L \Omega. \quad (1.21)$$

Математическое ожидание величины, обладающей свойством аддитивности и соответствующей оператору  $L$ , будет равно скалярному произведению  $(\Omega, \Omega')$ , так что

$$m.o.L = (\Omega, L \Omega). \quad (1.22)$$

Эта формула применима независимо от того, будет ли число частиц определенным или нет. Например, она позволяет вычислять энергию светового поля, состоящего из неопределенного числа световых квантов.

Для величин, не обладающих свойством аддитивности, можно вывести аналогичные соотношения. Обозначим, например, через  $U^{(n)}$  энергию взаимодействия системы  $n$  частиц

$$U^{(n)} = \sum_{r>s=1}^n U(k_r, k_s). \quad (1.23)$$

Подобно тому, как оператору  $L^{(n)}$  вида (1.9) мы привели в соответствие квантованный оператор  $L$  вида (1.20), мы можем оператору  $U^{(n)}$  сопоставить квантованный оператор

$$U = \frac{1}{2} \int b^+(k) b^+(k') U(k, k') b(k') b(k) dk dk'. \quad (1.24)$$

Математическое ожидание энергии взаимодействия может быть написано в виде

$$m. o. U = (\Omega, U \Omega), \quad (1.25)$$

причем эта формула также применима и к неопределенному числу частиц.

## б) Сопряженность операторов $b(k)$ и $b^+(k)$ и их свойства

Операторы составления функциональной производной по  $\bar{b}$  и умножения на  $\bar{b}$  обозначены нами символами  $b$  и  $b^+$ . Такое обозначение предполагает, что эти операторы являются сопряженными друг к другу. Покажем, что оставшиеся до сих пор неопределенными коэффициенты  $c_n$  в формуле (1.2) могут быть выбраны так, чтобы это условие действительно было выполнено. Связанные с этим доказательством вычисления будут приведены довольно подробно, так как они могут служить иллюстрацией действий над функционалами.

Условие сопряженности двух операторов  $b$  и  $b^+$  состоит, как известно, в требовании, чтобы для всяких двух функционалов  $\Omega$  и  $\Omega'$  имело место равенство

$$(\Omega, b(k) \Omega') = \overline{(\Omega', b^+(k) \Omega)}. \quad (1.26)$$

Пусть функционал  $\Omega$  составлен по формулам (1.2) и (1.3) при помощи функций  $\psi_n$ , а функционал  $\Omega'$  при помощи  $\psi'_n$ . Найдем те функции  $\psi_n^*$  и  $\psi_n^{**}$ , при помощи которых составлены функционалы  $\Omega^* = b(k) \Omega'$  и  $\Omega^{**} = b^+(k) \Omega$ . Применяя к нашему случаю формулы (1.13) и (1.14), будем иметь:

$$\psi_n^*(k_1, \dots, k_n) = \frac{(n+1)c_{n+1}}{c_n} \psi'_{n+1}(k, k_1, \dots, k_n) \quad (1.27)$$

$$\psi_0^{**} = 0$$

$$\psi_n^{**}(k_1, \dots, k_n) = \frac{c_{n-1}}{c_n} \{\delta(k - k_1) \psi_{n-1}(k_2, k_3, \dots, k_n)\}_{sym}. \quad (1.28)$$

Здесь  $\delta(k - k_1)$  обозначает дираковскую функцию дельта, определяемую условием, чтобы равенство

$$f(k) = \int \delta(k - k_1) f(k_1) dk_1 \quad (1.29)$$

было справедливо для всякой функции  $f(k)$ . Знак *sym* при фигурной скобке обозначает, что выражение в этих скобках нужно симметризовать относительно  $k_1, \dots, k_n$  (всякая функ-

ция типа  $\psi_n$  по условию предполагается у нас симметричной).  
Левая часть равенства (1.26) равна, следовательно,

$$\begin{aligned} (\Omega, b(k)\Omega') &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \bar{\psi}_n \psi_n^* dk_1 \dots dk_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)c_{n+1}}{c_n} \int \bar{\psi}_n(k_1, k_2, \dots, k_n) \times \\ &\quad \times \psi'_{n+1}(k, k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n. \end{aligned} \quad (1.30)$$

С другой стороны, величина, сопряженная с правой частью равенства (1.26), равна

$$\begin{aligned} (\Omega', b^+(k)\Omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \bar{\psi}'_{n+1} \psi_{n+1} dk_1 \dots dk_{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} \int \bar{\psi}'_{n+1}(k_{n+1}, k_1 \dots k_n) \delta(k - k_{n+1}) \times \\ &\quad \times \psi_n(k_1 \dots k_n) dk_1 \dots dk_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Выполняя интегрирование по  $k_{n+1}$ , получаем

$$\begin{aligned} (\Omega', b^+(k)\Omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} \int \bar{\psi}'_{n+1}(k, k_1 \dots k_n) \times \\ &\quad \times \psi_n(k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Интегралы в формулах (1.30) и (1.32) — комплексные сопряженные друг к другу. Все выражение (1.30) должно быть сопряженным с (1.32); для этого нужно, чтобы множители перед интегралами были комплексными сопряженными, что приводит к равенству

$$(n+1)|c_{n+1}|^2 = |c_n|^2. \quad (1.33)$$

Величины  $c_n$  можно считать вещественными и положительными, так как постоянный фазовый множитель можно отнести к волновой функции  $\psi_n$ . Если, кроме того, положить  $c_0 = 1$ , то равенство (1.33) дает

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}. \quad (1.34)$$

Таким образом, общий вид функционала  $\Omega$  будет

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n, \quad (1.35)$$

где

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \psi_n(k_1, \dots, k_n) \bar{b}(k_1) \dots \bar{b}(k_n) dk_1 \dots dk_n. \quad (1.36)$$

Применение оператора  $b(k)$  к функционалу  $\Omega$ , т. е. составление функциональной производной по  $\bar{b}(k)$ , будет равносильно замене  $\psi_n$  на

$$\psi_n^*(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(k, k_1, \dots, k_n), \quad (1.37)$$

а применение сопряженного оператора  $b^+(k)$ , т. е. умножение  $\Omega$  на  $\bar{b}(k)$ , будет означать замену  $\psi_n$  на

$$\psi_n^{**}(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{n} \{\delta(k - k_1) \psi_{n-1}(k_2, \dots, k_n)\}_{sym}, \quad (1.38)$$

причем  $\psi_0^{**} = 0$ .

Формулы (1.37) и (1.38) дают представление операторов  $b(k)$  и  $b^+(k)$  при помощи волновых функций.

Исследуем свойства этих операторов несколько подробнее. Пользуясь представлением (1.18) и (1.19) операторов  $b(k)$  и  $b^+(k)$ , составим выражение

$$b(k) b^+(k') \Omega = \frac{\delta'}{\delta \bar{b}(k)} [\bar{b}(k') \Omega]. \quad (1.39)$$

Но правило составления функциональных производных от произведения то же, как и для обыкновенных производных. Поэтому

$$\frac{\delta'}{\delta \bar{b}(k)} (\bar{b}(k') \Omega) = \frac{\delta' \bar{b}(k')}{\delta \bar{b}(k)} \cdot \Omega + \bar{b}(k') \frac{\delta \Omega}{\delta \bar{b}(k)}. \quad (1.40)$$

Но мы имеем:

$$\bar{b}(k') = \int \bar{b}(k) \delta(k - k') dk, \quad (1.41)$$

откуда

$$\delta \bar{b}(k') = \int \delta \bar{b}(k) \delta(k - k') dk. \quad (1.42)$$

Коэффициент при вариации  $\delta \bar{b}(k)$  под интегралом равен дираковской функции  $\delta(k - k')$ , следовательно,

$$\frac{\delta' \bar{b}(k')}{\delta \bar{b}(k)} = \delta(k - k') \quad (1.43)$$

и правая часть выражения (1.40) равна

$$b(k) b^+(k') \Omega = \delta(k - k') \Omega + b^+(k') b(k) \Omega. \quad (1.44)$$

Отсюда следует, что операторы  $b$  и  $b^+$  удовлетворяют соотношениям

$$b(k) b^+(k') - b^+(k') b(k) = \delta(k - k'). \quad (1.45)$$

Кроме того, очевидно, будет

$$b(k) b(k') - b(k') b(k) = 0, \quad (1.46)$$

$$b^+(k) b^+(k') - b^+(k') b^+(k) = 0. \quad (1.47)$$

равенство (1.47) имеет место потому, что операторы  $b^+(k)$  сводятся в данном представлении к простому умножению на функцию  $\bar{b}(k)$ , а равенство (1.48) получается из него путем перехода к сопряженным операторам.

Операторы  $b(k)$  принято называть квантованными волновыми функциями или квантованными амплитудами, а соотношения (1.45), (1.46) и (1.47) — перестановочными соотношениями.

## 2. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

### а) Основные идеи

В предыдущем параграфе рассматривался вопрос об описании системы с неопределенным числом частиц, удовлетворяющих статистике Бозе, но не делалось никаких предположений о том, какова эта система и по какому закону ее состояние меняется во времени. Мы занимались как бы кинематикой такого рода систем. Теперь следует перейти к динамике. Для этого нам нужно взять определенную физическую систему и рассмотреть закон изменения ее состояния во времени.

Мы будем рассматривать систему, состоящую из света и материи. Сделаем предположение о том, что число материальных частиц остается постоянным. Как известно, это предположение лишь приближенное: на опыте наблюдается появление и исчезновение пар электронов и позитронов. Но во многих явлениях эти эффекты несущественны, и там наше предположение о постоянстве числа частиц будет хорошим приближением к действительности.

Что касается света, то мы будем рассматривать его, как собрание световых квантов, число которых может меняться. Но световое поле есть только частный случай электромагнитного поля: кроме светового поля существуют еще и электростатические силы. В связи с этим основным уравнением квантовой электродинамики можно дать две разные формулировки.

В первой формулировке рассматриваются операторы, соответствующие электромагнитному полю общего вида, а именно операторы для векторного и скалярного потенциалов

$$A_x(\mathbf{r}, t), A_y(\mathbf{r}, t), A_z(\mathbf{r}, t), \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.1)$$

Электростатические силы между заряженными частицами не вводятся. Каждая частица предполагается взаимодействующей лишь с окружающим ее полем, а уж это поле передает взаимодействие другим частицам. Эта формулировка представляет принципиальный интерес в том отношении, что ее можно рассматривать как последовательное проведение идеи близкого действия.

Из этой формулировки уже чисто математическим путем можно получить вторую формулировку, в которой рассматри-

ваются вместо четырех операторов (2.1) три оператора (составляющие векторного потенциала)

$$B_x(\mathbf{r}, t), B_y(\mathbf{r}, t), B_z(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

связанные соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

т. е. фактически два независимых оператора поля, но зато электростатические силы входят явно.

Самая эквивалентность обеих формулировок представляет чрезвычайно интересный факт. В самом деле, здесь впервые электростатические силы выводятся из представления о квантовом характере электромагнитного поля. Мы не будем, однако, приводить здесь доказательства эквивалентности, а будем исходить с самого начала из второй формулировки.

### б) Энергия светового поля

Как известно, все составляющие электромагнитного поля световых волн удовлетворяют уравнению Даламбера

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (2.4)$$

Такому уравнению будут удовлетворять и составляющие векторного потенциала  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Поэтому мы можем писать их в виде интегралов Фурье

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathbf{B}(\mathbf{k}) e^{-ic|\mathbf{k}|t+i\mathbf{k}\mathbf{r}} (d\mathbf{k}) + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathbf{B}^+(\mathbf{k}) e^{ic|\mathbf{k}|t-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (d\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В этой формуле  $\mathbf{k}$  есть волновой вектор с составляющими  $k_x, k_y, k_z$ ;  $(d\mathbf{k})$  написано вместо  $dk_x dk_y dk_z$ . Абсолютная величина вектора обозначена через  $|\mathbf{k}|$ . В силу условия  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  амплитуды  $\mathbf{B}(\mathbf{k})$  связаны соотношением

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0. \quad (2.6)$$

По известным формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \operatorname{curl} \mathbf{B} \quad (2.7)$$

можно выразить через  $\mathbf{B}$  все составляющие электрического и магнитного поля. Обозначим через  $H$  энергию поля. В единицах Хевисайда мы будем иметь:

$$H = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV. \quad (2.8)$$

Здесь энергия поля выражена в виде интеграла по объему. Но мы можем выразить ее также в виде интеграла по волновому вектору. Составляющие электрического и магнитного

поля могут быть написаны в виде интегралов Фурье в виде (2.5) с амплитудами  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{k})$ , причем

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = i|\mathbf{k}| \mathbf{V}(\mathbf{k}); \quad \mathbf{H}(\mathbf{k}) = i[\mathbf{k} \times \mathbf{V}(\mathbf{k})]. \quad (2.9)$$

Подставляя в (2.8) вместо  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  их выражения в виде интегралов Фурье с амплитудами (2.9), применяя теорему замкнутости и пользуясь соотношением (2.6), для энергии поля мы получим выражение

$$H = 2 \int \mathbf{V}^+(\mathbf{k}) \mathbf{V}(\mathbf{k}) \cdot k^2 (d\mathbf{k}). \quad (2.10)$$

В силу соотношения (2.6) три составляющие вектора  $\mathbf{V}(\mathbf{k})$  могут быть выражены через две независимые величины. Обозначим через  $\mathbf{e}(\mathbf{k}, 1)$  и  $\mathbf{e}(\mathbf{k}, 2)$  два единичных вектора, перпендикулярных между собою и к волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Мы можем тогда написать

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}) = B(\mathbf{k}, 1) \mathbf{e}(\mathbf{k}, 1) + B(\mathbf{k}, 2) \mathbf{e}(\mathbf{k}, 2), \quad (2.11)$$

где  $B(\mathbf{k}, 1)$  и  $B(\mathbf{k}, 2)$  — две скалярные величины. Выраженная через эти величины энергия поля примет вид

$$H = 2 \int \left\{ B^+(\mathbf{k}, 1) B(\mathbf{k}, 1) + B^+(\mathbf{k}, 2) B(\mathbf{k}, 2) \right\} k^2 (d\mathbf{k}), \quad (2.12)$$

или короче

$$H = 2 \sum_j \int B^+(\mathbf{k}, j) B(\mathbf{k}, j) k^2 (d\mathbf{k}), \quad (2.13)$$

где значок  $j$  принимает значения 1 и 2. Значок этот можно толковать, как номер состояния поляризации.

### в) Квантование поля

В предыдущем параграфе рассматривались уравнения электромагнитного поля с точки зрения классической теории. Перейдем теперь к квантовой механике.

В квантовой электродинамике составляющим поля сопоставляются некоторые операторы, собственные значения которых дают наблюдаемые значения поля. Операторы эти действуют на функционал, подобный рассмотренному в I разделе этой статьи и описывающий собрание неопределенного числа световых квантов. Нам надлежит вывести основные свойства этих операторов и найти для них математическое представление.

Поле выражается через амплитуды Фурье, поэтому и операторы для поля выражаются через операторы для амплитуд. Мы будем изучать эти последние, так как они обладают более простыми свойствами.

Мы будем рассматривать поле, как собрание световых квантов или, иначе говоря, как набор вибраторов. К этим вибраторам мы применим обычные правила квантовой механики и получим, таким образом, квантовые свойства поля.

Световой квант характеризуется волновым вектором и состоянием поляризации. Поэтому каждому значению (или каждому бесконечно малому интервалу значений) волнового вектора  $\mathbf{k}$  и каждому состоянию поляризации  $j$  сопоставим отдельный вибратор. В качестве комплексной амплитуды вибратора возьмем величину, пропорциональную  $B(\mathbf{k}, j)$ .

Если включить в амплитуду зависимость от времени, т. е. множитель  $e^{-ic|\mathbf{k}|t}$ , то вместо  $B(\mathbf{k}, j)$  необходимо взять произведение  $B(\mathbf{k}, j)e^{-ic|\mathbf{k}|t}$ , так как именно это произведение входит в интегралы Фурье вида (2.5). Эта величина соответствует той комплексной комбинации  $\xi = q + \frac{i}{\omega} \dot{q} = ae^{-i\omega t}$  координаты  $q = a \cos \omega t$  и скорости  $\dot{q} = -a\omega \sin \omega t$  вибратора, которая зависит от времени по закону  $e^{-i\omega t}$ . Согласно квантовой механике, координата  $q$  и скорость  $\dot{q}$  (или „момент“  $p = m\dot{q}$ ) одного и того же вибратора не коммутируют друг с другом, а удовлетворяют соотношению

$$qp - pq = ih, \quad (2.14)$$

где  $h$  есть деленная на  $2\pi$  постоянная Планка. Для разных же вибраторов  $q$  и  $p$  коммутируют. Отсюда для комплексных величин  $\xi = q + \frac{i}{m\omega} p$  и  $\xi^+ = q - \frac{i}{m\omega} p$ , принадлежащих одному и тому же вибратору, вытекают соотношения

$$\xi\xi^+ - \xi^+\xi = \frac{2h}{m\omega}, \quad (2.15)$$

тогда как для разных вибраторов  $\xi$  и  $\xi^+$  коммутируют. Так как у нас роль  $\xi$  играют величины  $B(\mathbf{k}, j, t) = B(\mathbf{k}, j)e^{-ic|\mathbf{k}|t}$ , то они должны удовлетворять соотношениям вида

$$B(\mathbf{k}, j, t)B^+(\mathbf{k}', j', t) - B^+(\mathbf{k}', j', t)B(\mathbf{k}, j, t) = f(\mathbf{k}, j)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{jj'}, \quad (2.16)$$

где  $f(\mathbf{k}, j)$  — неизвестная пока функция,  $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  — определенная в конце § 1 дираковская  $\delta$ -функция, а  $\delta_{jj'} = 1$ , при  $j = j'$  и  $\delta_{jj'} = 0$  при  $j \neq j'$ . В самом деле, если  $k \neq k'$  или  $j \neq j'$ , то правая часть соотношений (2.16) обращается в нуль, как и должно быть для разных вибраторов. Если же  $j = j'$  и  $k = k'$ , то правая часть обращается в бесконечность так, что интеграл от нее по  $\mathbf{k}'$  будет величиной конечной (более строго можно вывести соотношения (2.16) из соотношений (2.15) путем рассмотрения бесконечно малых интервалов для  $\mathbf{k}$ ). Если в соотношения (2.16) вместо  $B(\mathbf{k}, j, t)$  подставить выражение  $B(\mathbf{k}, j)e^{-ic|\mathbf{k}|t}$ , то показательный множитель сокращается, так что и для  $B(\mathbf{k}, j)$  мы будем иметь соотношения

$$B(\mathbf{k}, j)B^+(\mathbf{k}', j') - B^+(\mathbf{k}', j')B(\mathbf{k}, j) = f(\mathbf{k}, j)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{jj'}. \quad (2.17)$$



Кроме того,

$$B(\mathbf{k}, j) B(\mathbf{k}', j') - B(\mathbf{k}', j') B(\mathbf{k}, j) = 0, \quad (2.18)$$

так как при  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$  или  $j \neq j'$  величины  $B(\mathbf{k}, j)$  и  $B(\mathbf{k}', j')$  относятся к разным вибраторам, а при  $\mathbf{k} = \mathbf{k}', j = j'$  равенство (2.18) обращается в тождество.

Чтобы определить вид функции  $f(\mathbf{k}, j)$  в правых частях уравнений (2.16) и (2.17), мы должны обратиться к квантовым уравнениям движения. Оператор энергии для нашего собрания вибраторов есть не что иное, как выражение (2.13) для энергии поля через амплитуды

$$H = 2 \sum_j \int B^+(\mathbf{k}, j) B(\mathbf{k}, j) k^2 (d\mathbf{k}). \quad (2.19)$$

Очевидно, можно также написать

$$H = 2 \sum_j \int B^+(\mathbf{k}, j, t) B(\mathbf{k}, j, t) k^2 (d\mathbf{k}). \quad (2.20)$$

Но мы знаем заранее, что  $B(\mathbf{k}, j, t)$  зависит от времени через посредство множителя  $e^{-ic|\mathbf{k}|t}$ , так что

$$\frac{d}{dt} B(\mathbf{k}, j, t) = -ic|\mathbf{k}| B(\mathbf{k}, j, t). \quad (2.21)$$

С другой стороны, в силу квантовых уравнений движения мы должны иметь

$$\frac{d}{dt} B(\mathbf{k}, j, t) = \frac{i}{\hbar} \{HB(\mathbf{k}, j, t) - B(\mathbf{k}, j, t)H\}. \quad (2.22)$$

Приравнявая правые части уравнений (2.21) и (2.22), получаем

$$HB(\mathbf{k}, j, t) - B(\mathbf{k}, j, t)H = -hc|\mathbf{k}| B(\mathbf{k}, j, t). \quad (2.23)$$

Здесь можно заменить  $B(\mathbf{k}, j, t)$  на  $B(\mathbf{k}, j)$ , так что мы будем иметь:

$$HB(\mathbf{k}, j) - B(\mathbf{k}, j)H = -hc|\mathbf{k}| B(\mathbf{k}, j). \quad (2.24)$$

Вычисляя левую часть на основании определения  $H$  и перестановочных соотношений (2.17) и (2.18) для  $B(\mathbf{k}, j)$ , мы получим

$$HB(\mathbf{k}, j) - B(\mathbf{k}, j)H = -2k^2 f(\mathbf{k}, j) B(\mathbf{k}, j). \quad (2.25)$$

Сравнивая правые части уравнений (2.24) и (2.25), мы получаем для  $f(\mathbf{k}, j)$  выражение

$$f(\mathbf{k}, j) = \frac{hc}{2|\mathbf{k}|}. \quad (2.26)$$

Следовательно, если мы положим

$$b(\mathbf{k}, j) = \sqrt{\frac{2|\mathbf{k}|}{hc}} B(\mathbf{k}, j), \quad (2.27)$$

то новые амплитуды  $b(\mathbf{k}, j)$  будут удовлетворять соотношениям:

$$b(\mathbf{k}, j) b^+(\mathbf{k}', j') - b^+(\mathbf{k}', j') b(\mathbf{k}, j) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{jj'}; \quad (2.28)$$

$$b(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}', j') - b(\mathbf{k}', j') b(\mathbf{k}, j) = 0; \quad (2.29)$$

$$b^+(\mathbf{k}, j) b^+(\mathbf{k}', j') - b^+(\mathbf{k}', j') b^+(\mathbf{k}, j) = 0. \quad (2.30)$$

Эти соотношения совпадают с формулами (1.45), (1.46), (1.47) с той лишь разницей, что в прежних формулах буква  $k$  обозначала совокупность всех переменных, а теперь кроме волнового вектора  $\mathbf{k}$  у нас явно выписана переменная  $j$ . Так как все операторы поля выражаются через  $b(\mathbf{k}, j)$ , то математическое представление этих операторов и общий вид функционалов, на которые они действуют, можно считать известными на основании результатов раздела I.

Выпишем выражения наших операторов через  $b(\mathbf{k}, j)$ . Амплитуда векторного потенциала имеет вид:

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{hc}{2|\mathbf{k}|}} \sum_j b(\mathbf{k}, j) \mathbf{e}(\mathbf{k}, j). \quad (2.31)$$

Подставив это выражение в интеграл Фурье (2.5), получим векторный потенциал в функции координат и времени. Энергия поля напишется теперь

$$H = \sum_j \int hc |\mathbf{k}| b^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j) (d\mathbf{k}). \quad (2.32)$$

Наконец, мы можем ввести оператор  $N$  для полного числа световых квантов]

$$N = \sum_j \int b^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j) (d\mathbf{k}). \quad (2.33)$$

Этот оператор будет иметь собственные значения, равные целому числу  $N' = 0, 1, 2, \dots$ . Из формул (2.28), (2.29), (2.30) для операторов  $b(\mathbf{k}, j)$  вытекают перестановочные соотношения для составляющих электромагнитного поля, полученные впервые Гейзенбергом и Паули ([4], стр. 88). Вытекающие из них соотношения неопределенности для поля подробно разобраны в работе Бора и Розенфельда ([2], стр. 89).

## г) Основное уравнение квантовой электродинамики

Если пренебрегать излучением и рассматривать систему из заряженных материальных частиц во внешнем поле, то оператор энергии такой системы будет иметь вид

$$H^0 = \sum_{q=1}^s (T_q + U_q) + \sum_{p>q=1}^s U_{pq}. \quad (2.34)$$



функция  $\psi$  отлична от нуля, то имеется вероятность того, что, кроме  $s$  материальных частиц, есть  $n$  световых квантов.

Вместо последовательности функций (2.41) можно ввести одну величину, а именно функционал  $\Omega$  того типа, какой был рассмотрен в I разделе этой статьи.

Чтобы получить для этого функционала волновое уравнение, достаточно прибавить в операторе  $H^0$  к векторному потенциалу  $\mathbf{V}^0$  внешнего поля векторный потенциал  $\mathbf{V}$  излучения, т. е. тот оператор, который был изучен в предыдущем параграфе. От этого оператор  $H^0$  заменится на

$$H = H^0 - L, \quad (2.42)$$

где  $L$  есть оператор

$$L = \sum_{q=1}^s \epsilon_q (\alpha_x^{(q)} B_x(\mathbf{r}_q, t) + \alpha_y^{(q)} B_y(\mathbf{r}_q, t) + \alpha_z^{(q)} B_z(\mathbf{r}_q, t)). \quad (2.43)$$

Волновое уравнение для функционала  $\Omega$  будет иметь вид

$$H^0 \Omega - i\hbar \frac{\partial \Omega}{\partial t} = L \Omega. \quad (2.44)$$

Взятый со знаком минус оператор  $L$  можно толковать как энергию взаимодействия материальной системы с излучением. Рассмотрим оператор  $L$  несколько подробнее.

Подставляя в (2.43) выражение для  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в виде интеграла Фурье и обозначая для краткости буквой  $Q_x$  сумму (составляющую вектора  $\mathbf{Q}$ )

$$Q_x = \sum_{g=1}^s \epsilon_g \alpha_x^{(g)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_g}, \quad (2.45)$$

мы можем написать:

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathbf{Q}^+ \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}) e^{ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}^+(\mathbf{k}) e^{ic|\mathbf{k}|t} (d\mathbf{k}). \quad (2.46)$$

Скалярное произведение векторов  $\mathbf{Q}^+$  и  $\mathbf{V}(\mathbf{k})$  можем преобразовать, выразив вектор  $\mathbf{V}(\mathbf{k})$  через величины  $b(\mathbf{k}, j)$  по формуле (2.31). Тогда мы получим

$$\mathbf{Q}^+ \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\hbar c}{2|\mathbf{k}|}} \sum_j b(\mathbf{k}, j) \sum_{q=1}^s \epsilon_q \gamma^{(q)}(\mathbf{k}, j) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_q}, \quad (2.47)$$

где через  $\gamma^{(q)}(\mathbf{k}, j)$  обозначена матрица

$$\gamma^{(q)}(\mathbf{k}, j) = \alpha_x^{(q)} e_x(\mathbf{k}, j) + \alpha_y^{(q)} e_y(\mathbf{k}, j) + \alpha_z^{(q)} e_z(\mathbf{k}, j) \quad (2.48)$$

Эта матрица представляет проекцию матричного вектора  $\alpha^{(q)}$  на направление  $j$ , перпендикулярное к волновому вектору. Матрицы  $\gamma^{(q)}$  обладают свойствами, аналогичными свойствам дираковских матриц  $\alpha^{(q)}$ ; в частности, их квадраты равны единице.

Подставляя выражение (2.47) в уравнение (2.46), получим окончательное выражение для оператора  $L$  в виде

$$L = \sum_j \int \{G^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j) + G(\mathbf{k}, j) b^+(\mathbf{k}, j)\} (d\mathbf{k}), \quad (2.49)$$

где через  $G(\mathbf{k}, j)$  обозначен оператор

$$G(\mathbf{k}, j) = \frac{e^{ic|\mathbf{k}|t}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2|\mathbf{k}|}} \sum_{g=1}^s \varepsilon_g \gamma^{(g)}(\mathbf{k}, j) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_g}, \quad (2.50)$$

пропорциональный проекции вектора  $\mathbf{Q}$  на направление  $j$ .

Таким образом, волновое уравнение может быть написано в виде

$$H^0\Omega - ih \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \sum_j \int \{G^+(\mathbf{k}, j) b(\mathbf{k}, j) + G(\mathbf{k}, j) b^+(\mathbf{k}, j)\} (d\mathbf{k}) \Omega \quad (2.51)$$

или, если мы воспользуемся выражением для операторов  $b$  и  $b^+$ , выведенным в первой части,

$$H^0\Omega - ih \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \sum_j \int \left\{ G^+(\mathbf{k}, j) \frac{\delta \Omega}{\delta \bar{b}(\mathbf{k}, j)} + G(\mathbf{k}, j) \bar{b}(\mathbf{k}, j) \Omega \right\} (d\mathbf{k}). \quad (2.52)$$

Это уравнение представляет собой основное уравнение квантовой электродинамики. Оно резюмирует все, что нам известно о взаимодействии света с атомными и молекулярными системами. В частности, оно дает обоснование основанной на принципе соответствия Шредингеровской теории излучения. Но кроме результатов, получаемых из Шредингеровской теории, оно дает ряд новых результатов, например: естественную ширину спектральных линий, связанную с неполной устойчивостью так называемых стационарных состояний. Оно может быть также применено к задаче рассеяния света свободными электронами (формула Клейна—Нишины), к вычислению поправок к закону Кулона взаимодействия между заряженными частицами и к ряду других вопросов.

Как было упомянуто во введении, решение основного уравнения квантовой электродинамики может быть только приближенным. В нем не учитывается структура материальных частиц и свойства их при весьма больших энергиях, вследствие чего точные его решения едва ли имеют физический смысл. Более точная формулировка свойств материи и излучения должна быть основана на существенно новых идеях и составляет одну из основных задач дальнейшего развития теоретической физики.

# СОБСТВЕННОЕ ВРЕМЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ<sup>1</sup>

В. А. Фок

В I разделе показано, что в гамильтоновом интеграле действия классической механики теории относительности собственное время  $\tau$  можно рассматривать как независимую переменную, если в качестве лагранжевой функции пользоваться выражением (1.6).

Во II разделе собственное время введено в уравнение Дирака и развит основанный на этом метод интеграции уравнения (1.6). С помощью этого метода рассмотрена проблема Коши. II раздел содержит далее обобщение (и упрощение) данного Паули применения метода Вентцеля — Бриллюэна к уравнению Дирака.

В III разделе рассматриваемые в теории позитронов смешанные плотности выражены через фундаментальное решение (*solution élémentaire*) и риманову функцию уравнения Дирака.

## I. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1. Пусть  $L^0$  есть обыкновенная лагранжева функция, из которой выводятся в теории относительности уравнения движения заряженной материальной точки во внешнем поле. Как известно,

$$L^0 = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{e}{c} (x'A_x + y'A_y + z'A_z) + e\Phi, \quad (1)$$

где

$$\beta^2 = \frac{1}{c^2} (x'^2 + y'^2 + z'^2), \quad (2)$$

причем штрихами обозначены производные по времени. Вводя собственное время

$$\tau = \int_{t^0}^t \sqrt{1 - \beta^2} dt, \quad (3)$$

можно написать интеграл действия

$$S = \int_{t^0}^t L^0 dt, \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> Доклад, сделанный 14 марта 1937 г. на сессии группы физики АН СССР. Впервые опубликовано в 1937 г. Изв. АН СССР, ОМЭН, стр. 551 (1937).



3. Легко составить для лагранжевой функции (6) уравнения движения Гамильтона, а также уравнение Гамильтона — Якоби. Это последнее будет иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \text{grad } S + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - e\Phi \right)^2 + m^2 c^2 \right] = 0. \quad (12)$$

В рассматриваемой теории величины  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  играют роль координат, а величина  $\tau$  — роль времени классической нерелятивистской механики. Поэтому мы можем непосредственно воспользоваться известными из механики формулами.

Пусть интеграл действия (7), выраженный через переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ;  $x^0$ ,  $y^0$ ,  $z^0$ ,  $t^0$ ;  $\tau$ , имеет вид

$$S = S(x, y, z, t; x^0, y^0, z^0, t^0; \tau), \quad (13)$$

причем  $\tau$  рассматривается здесь как одна из независимых переменных. Тогда производная  $\frac{\partial S}{\partial \tau}$  в силу уравнений движения будет постоянной. Полагая

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0, \quad (14)$$

мы получим условие, в силу которого  $\tau$  будет собственным временем.

Обобщенные моменты, канонически сопряженные с координатами и с временем, а также их начальные значения выразятся через частные производные от функции  $S$

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x}; \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}; \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z}; \quad p_t = -H = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (15)$$

$$p_x^0 = -\frac{\partial S}{\partial x^0}; \quad p_y^0 = -\frac{\partial S}{\partial y^0}; \quad p_z^0 = -\frac{\partial S}{\partial z^0}; \quad p_t^0 = -H^0 = -\frac{\partial S}{\partial t^0}. \quad (16)$$

Заметим, что, если мы решим уравнение (14) относительно  $\tau$  и подставим найденное значение  $\tau$  в выражение (13) для  $S$ , мы получим обычную функцию действия

$$S = S^*(x, y, z, t; x^0, y^0, z^0, t^0), \quad (17)$$

причем будет очевидно

$$\frac{\partial S^*}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} \quad (18)$$

в силу условия (14).

Однако такое исключение  $\tau$  практически неудобно, и в ряде задач, например в задаче о движении электрона в постоянном электрическом и магнитном поле, функция (13), содержащая  $\tau$ , выражается весьма просто, тогда как функция  $S^*$  в конечном виде выражена быть не может.



## II. СОБСТВЕННОЕ ВРЕМЯ В УРАВНЕНИИ ДИРАКА

4. Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле имеет вид

$$\{(\bar{\alpha} \cdot \mathbf{P}) + mc\alpha_4 - \frac{T}{c}\} \psi = 0, \quad (1)$$

где  $\bar{\alpha}$  — вектор, составленный из матриц  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ,  $\mathbf{P}$  — вектор количества движения, т. е. оператор

$$\mathbf{P} = -i\hbar \text{grad} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (2)$$

а  $T$  — оператор для кинетической энергии

$$T = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\Phi. \quad (3)$$

Решение уравнения Дирака можно представить в виде

$$\psi = \left\{ (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{P}) + mc\alpha_4 + \frac{T}{c} \right\} \Psi, \quad (4)$$

где  $\Psi$  удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\left\{ \mathbf{P}^2 + m^2c^2 - \frac{T^2}{c^2} + \frac{e\hbar}{c} (\bar{\sigma} \cdot \mathbf{H}) - \frac{ie\hbar}{c} (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}) \right\} \Psi = 0. \quad (5)$$

Это уравнение можно написать в виде

$$\hbar^2 \Delta \Psi = 0, \quad (6)$$

где  $\Delta$  — оператор, определяемый равенством

$$\begin{aligned} \Delta \Psi = & -\square \Psi - \frac{2ie}{\hbar c} \left( \mathbf{A} \cdot \text{grad} \Psi + \frac{\Phi}{c} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \\ & + \left\{ -\frac{ie}{\hbar c} \left( \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} (\mathbf{A}^2 - \Phi^2) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right\} \Psi + \\ & + \frac{e}{\hbar c} \{ (\bar{\sigma} \cdot \mathbf{H}) - i (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}) \} \Psi. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение уравнения (5) можно искать в виде определенного интеграла

$$\Psi = \int \frac{F d\tau_3}{c}, \quad (8)$$

взятого по вспомогательной переменной  $\tau$  в некоторых постоянных пределах (или по некоторому контуру в комплексной плоскости  $\tau$ ).

Очевидно, что уравнение (5) будет удовлетворено, если мы подчиним  $F$  уравнению

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta F = i\hbar \frac{\partial F}{\partial \tau} \quad (9)$$



правую часть, то получим уравнение

$$2m \frac{df}{d\tau} + \left\{ \square S + \frac{e}{c} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right\} f + \frac{e}{c} \{ i(\bar{\sigma} \cdot \mathbf{H}) + (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}) \} f = 0, \quad (16)$$

решение которого сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (а не уравнений в частных производных).

В уравнении (16) можно освободиться от члена, содержащего  $\square S$ . В самом деле, обозначим через  $\rho$  абсолютную величину определителя четвертого порядка, составленного из вторых производных от  $S$ , взятых один раз по  $x, y, z, t$  и второй раз по  $x^0, y^0, z^0, t^0$  (или по соответствующим постоянным интегрирования)

$$\rho = \operatorname{Det} \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y^0} \right\|. \quad (17)$$

Величина  $\rho$  удовлетворяет „уравнению неразрывности“

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \dot{y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \dot{z}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{t}) = 0, \quad (18)$$

где  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$  имеют значения (15). Отсюда следует, что величина  $\sqrt{\rho}$  удовлетворяет уравнению

$$2m \frac{d\sqrt{\rho}}{d\tau} + \left\{ \square S + \frac{e}{c} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right\} \sqrt{\rho} = 0. \quad (19)$$

Поэтому если мы положим

$$f = \sqrt{\rho} f^0, \quad (20)$$

то  $f^0$  будет (в данном приближении) удовлетворять уравнению

$$2m \frac{df^0}{d\tau} + \frac{e}{c} \{ i(\bar{\sigma} \cdot \mathbf{H}) + (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}) \} f^0 = 0. \quad (21)$$

В случае постоянного поля можно положить

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} = \frac{\partial f^0}{\partial y} = \frac{\partial f^0}{\partial z} = \frac{\partial f^0}{\partial t} = 0$$

и считать, что  $f^0$  зависит только от  $\tau$ . Тогда уравнение (21) будет иметь постоянные коэффициенты, и его легко можно решить.

Так как в этом случае  $\rho$  тоже будет функцией одного только  $\tau$ , то  $\square f = 0$ , и приближенное уравнение (16) совпадет с точным уравнением (13). Таким образом, в случае постоянного поля, которое будет рассмотрено ниже (п. 8), изложенный метод дает строгое решение.

В общем случае произвольного поля нужно рассматривать в уравнении (21) величины  $E$  и  $H$  как функции от  $\tau$  (выразив в них  $x, y, z, t$  через  $\tau$  при помощи уравнений (1.16) классической траектории). Решив систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, нужно подставить в решение выражения (1.16) для  $p_x^0, p_y^0, p_z^0, p_t^0$ . В результате получится искомое решение уравнений в частных производных.

Если заменить в наших формулах функцию  $S$  на  $S^*$ —формула (1.17)—и считать  $f$  не зависящим явно от  $\tau$ , то эти формулы дадут обобщение и развитие результатов Паули [4], впервые применившего метод Бриллюэна-Вентцеля к решению уравнения Дирака. Формулы Паули являются, однако, значительно более сложными, так как он исходил из уравнений Дирака первого порядка, а не второго.

Заметим, что если мы будем вычислять интеграл (11) по методу стационарной фазы, то нам нужно будет вынести в показателе за знак интеграла значение  $S$  в той точке, где  $\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0$ . Но это будет как раз обыкновенная (не содержащая собственного времени) функция действия  $S^*$ .

6. Полученная нами форма решения уравнения Дирака (в виде интеграла по собственному времени) особенно пригодна для решения задачи Коши, т. е. для определения  $\psi$  по заданным начальным условиям.

Пусть  $\psi$  удовлетворяет уравнению Дирака (1) и начальным условиям

$$\psi = \psi^0 \quad (\text{при } t = t^0). \quad (22)$$

Чтобы найти  $\psi$ , достаточно получить решение  $\Psi$  уравнения второго порядка  $\Delta \Psi = 0$ , удовлетворяющее условиям

$$\Psi = 0; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{ic}{\hbar} \psi^0 = \Psi^0 \quad (\text{при } t = t^0). \quad (23)$$

Функцию  $\Psi$  можно искать в виде интеграла

$$\Psi = \int Q \Psi^0 dV, \quad (24)$$

где

$$dV = dx^0 dy^0 dz^0, \quad (25)$$

$\Psi^0$ —заданная функция от  $x^0, y^0, z^0$ , а  $Q$ —функция от  $x, y, z, t$  и от  $x^0, y^0, z^0, t^0$ .

Положим

$$\xi = c^2(t - t^0)^2 - (x - x^0)^2 - (y - y^0)^2 - (z - z^0)^2 \quad (26)$$

и введем функцию  $\gamma(\xi)$ , определяемую равенствами

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\xi) &= 1 \quad \text{при } \xi > 0 \\ \gamma(\xi) &= \frac{1}{2} \quad \text{при } \xi = 0 \\ \gamma(\xi) &= 0 \quad \text{при } \xi < 0 \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

Производная  $\gamma'(\xi) = \delta(\xi)$  есть дираковская функция дельта.

Функция  $Q$  в интеграле (24) есть несобственная функция вида

$$Q = R\gamma(\xi) + R^*\delta(\xi), \quad (28)$$

где  $R$  и  $R^*$  — непрерывные функции. Функция  $R$  есть не что иное, как функция Римана.

Если подставить выражение для  $Q$  в интеграл (24), то он распадется на сумму двух интегралов

$$\Psi = \int R\dot{\Psi}^0\gamma(\xi) dV + \int R^*\dot{\Psi}^0\delta(\xi) dV, \quad (29)$$

из которых первый есть объемный интеграл, распространенный по объему

$$c^2(t-t^0)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)^2 \geq 0$$

(т. е. по объему  $V$  шара радиуса  $r^* = c|t-t^0|$  с центром в точке  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}$ ), а второй есть интеграл по поверхности

$$c^2(t-t^0)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)^2 = 0$$

(т. е. по поверхности  $S$  этого шара). В самом деле, освободившись от несобственных функций, мы будем иметь:

$$\Psi = \int_V R\dot{\Psi}^0 dV + \frac{1}{2r^*} \int_S R^*\dot{\Psi}^0 dS. \quad (30)$$

Так как при  $t=t^0$  радиус шара  $r^*$  стремится к нулю, то очевидно  $\Psi=0$  при  $t=t^0$ . Кроме того, производная по времени от объемного интеграла также будет равна нулю при  $t=t^0$ . Поверхностный же интеграл при малых  $t-t^0 > 0$  будет

$$\frac{1}{2r^*} \int_S R^*\dot{\Psi}^0 dS = 2\pi r^* (R^*\dot{\Psi}^0)_0 = 2\pi c (t-t^0) (R^*\dot{\Psi}^0)_0. \quad (31)$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_{t=t^0+0} = 2\pi c R_0^*\dot{\Psi}^0, \quad (32)$$

где через  $R_0^*$  обозначено значение  $R^*$  при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0$ ,  $t = t^0$ . Чтобы выполнялось начальное условие (23), необходимо

$$R_0^* = \frac{1}{2\pi c} \quad (33)$$

независимо от координат и времени.

Но, кроме того, функция  $\Psi$  должна удовлетворять уравнению Дирака второго порядка. Для этого ему должна удовлетворять функция  $Q$ . Таким образом, должно быть

$$\Delta Q = \Delta[R\gamma(\xi) + R^*\delta(\xi)] = 0. \quad (34)$$

Если принять во внимание, что

$$\square \gamma(\xi) = -4\delta(\xi); \quad (35)$$

$$\square \delta(\xi) = 0, \quad (36)$$

то выполнение дифференцирований в (34) даст члены, пропорциональные  $\gamma(\xi)$ ,  $\delta(\xi)$ ,  $\delta'(\xi)$ . Если обозначить для краткости буквой  $M$  оператор, определяемый равенством

$$MF = (x - x^0) \frac{\partial F}{\partial x} + (y - y^0) \frac{\partial F}{\partial y} + (z - z^0) \frac{\partial F}{\partial z} + (t - t^0) \frac{\partial F}{\partial t} + \\ + \frac{ie}{\hbar c} \{ (x - x^0) A_x + (y - y^0) A_y + (z - z^0) A_z - c(t - t^0) \Phi \} F, \quad (37)$$

то выражение (34) напишется так

$$\Delta [R\gamma(\xi) + R^*\delta(\xi)] = (\Delta R)\gamma(\xi) + \{ \Delta R^* + 4(M+1)R \} \delta(\xi) + \\ + 4(MR^*)\delta'(\xi). \quad (38)$$

Это выражение обратится в нуль, если мы потребуем, чтобы

$$\Delta R = 0, \quad (39)$$

$$(M+1)R = -\frac{1}{4}\Delta R^*, \quad (40)$$

$$MR^* = 0. \quad (41)$$

При этом достаточно, чтобы уравнение (40) выполнялось при  $\xi = 0$ . Легко указать решение уравнения (41). В самом деле, если положить

$$\chi = \int_{(r^0 t^0)}^{(r t)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz - c\Phi dt), \quad (42)$$

где интеграл взят по прямой, соединяющей точки  $r^0 t^0$  и  $r t$ , то

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \cdot \text{grad}\chi + (t - t^0) \frac{\partial \chi}{\partial t} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \mathbf{A} - c(t - t^0) \Phi. \quad (43)$$

Поэтому, если положить

$$R^* = \frac{1}{2\pi c} e^{-\frac{ie}{\hbar c}\chi}, \quad (44)$$

то уравнение  $MR^* = 0$  будет удовлетворяться. Кроме того, будет, очевидно, удовлетворяться и условие (33).

С этим значением  $R^*$  уравнения (39) и (40) позволят определить функцию  $R$ . Эти уравнения упростятся, если произвести подстановку

$$R = \frac{1}{2\pi c} e^{-\frac{ie}{\hbar c}\chi} R'. \quad (45)$$

Такая подстановка равносильна замене потенциалов  $\mathbf{A}$ ,  $\Phi$  на

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{grad } \chi; \quad \Phi' = \Phi + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (46)$$

Заметим, что если  $\mathbf{A}$  и  $\Phi$  удовлетворяли уравнениям

$$\square \mathbf{A} = 0; \quad \square \Phi = 0; \quad \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (47)$$

то тем же уравнениям будут удовлетворять и  $\mathbf{A}'$ ,  $\Phi'$ . Кроме того, будет выполняться соотношение

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \cdot \mathbf{A}' - c(t - t^0)\Phi' = 0, \quad (48)$$

вытекающее из (43).

Новые потенциалы выражаются однозначно через поле. Если мы обозначим двумя чертами сверху усреднение между точками  $(\mathbf{r}^0, t^0)$  и  $(\mathbf{r}, t)$ , произведенное по формуле

$$\bar{\bar{f}} = 2 \int_0^1 f[\mathbf{r}^0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)u, t^0 + (t - t^0)u] u du, \quad (49)$$

то мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}' &= -\frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \times \bar{\bar{\mathbf{H}}}] - \frac{1}{2} c(t - t^0) \bar{\bar{\mathbf{E}}} \\ \Phi' &= -\frac{1}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \cdot \bar{\bar{\mathbf{E}}}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

После подстановки (45), т. е. после введения новых потенциалов, уравнения (39) и (40) примут вид

$$\Lambda' R' = 0, \quad (51)$$

$$(L + 1) R' = -\frac{1}{4} \Lambda' 1 =$$

$$= -\frac{1}{4} \left[ \frac{m^2 c^2}{h^2} + \frac{e^2}{h^2 c^2} (\mathbf{A}'^2 - \Phi'^2) \right] - \frac{1}{4} \cdot \frac{e}{hc} [(\bar{\alpha} \cdot \mathbf{H}) - i(\bar{\alpha} \cdot \mathbf{E})], \quad (52)$$

где через  $L$  обозначен оператор

$$Lf = (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \cdot \text{grad } f + (t - t^0) \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (53)$$

который можно было бы также обозначить буквой  $M$  (он получается из  $M$  после введения новых потенциалов).

Из уравнения (52) можно определить не только значение  $(L + 1)R'$ , но и значение самой функции  $R'$  при  $\xi = 0$ . В самом деле, если рассматривать некоторую функцию  $f(x, y, z, t)$  как функцию от отношений  $(x - x^0) : (y - y^0) : (z - z^0) : c(t - t^0)$  и от  $\xi$  и если предположить, что при  $\xi \rightarrow 0$  будет и  $\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \rightarrow 0$ , то значение  $(L + 1)f$  при  $\xi = 0$  определяется значением  $f$  при  $\xi = 0$  и обратно.

Рассмотрим уравнение

$$(L + p)f = \varphi(\mathbf{r}, t), \quad (54)$$

где  $p$  — целое положительное число. Легко проверить, что ему удовлетворяет функция

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_0^1 \varphi[\mathbf{r}^0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)u, t^0 + (t - t^0)u] u^{p-1} du. \quad (55)$$

Единственное же решение однородного уравнения  $(L + p)f = 0$ , регулярное вблизи  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0$ ,  $t = t^0$ , есть нуль. Поэтому при положительном  $p$  функция  $f$  однозначно определяется формулой (55). Положив  $\varphi$  равным правой части уравнения (52) и применяя формулу (55), получим выражение для функции Римана на шаре  $\xi = 0$ .

7. Как известно из классических исследований Гадамара [2] по задаче Коши, функция Римана тесно связана с фундаментальным решением (solution élémentaire) данного уравнения (эллиптического или гиперболического типа). Фундаментальное решение, примером которого являются функция  $\frac{1}{r}$  для уравнения Лапласа и функция  $1 : \sqrt{c^2(t-t^0)^2 - (x-x^0)^2 - (y-y^0)^2}$  для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

имеет в данной точке или на проходящем через эту точку характеристическом конусе особенность, зависящую от вида уравнения. В случае нечетного числа независимых переменных фундаментальное решение определяется единственным образом. В случае же четного числа существует бесчисленное множество фундаментальных решений; эти решения имеют тогда логарифмическую особенность, причем коэффициент при логарифме определяется однозначно и представляет не что иное, как функцию Римана. Можно построить также фундаментальное решение и для уравнений параболического типа; оно получается предельным переходом из эллиптического или гиперболического случая. Элементарным примером является функция

$$u = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

представляющая фундаментальное решение для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Перейдем теперь к уравнению Дирака. Функцию Римана для уравнения Дирака второго порядка можно представить



в виде интеграла по собственному времени

$$R = \int F d\tau, \quad (56)$$

причем  $F$  есть фундаментальное решение „уравнения Дирака с собственным временем“, т. е. уравнения

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta F = i\hbar \frac{\partial F}{\partial \tau}. \quad (57)$$

В этом уравнении независимыми переменными являются  $x, y, z, t, \tau$ . Так как число их нечетное, то фундаментальное решение определяется единственным образом.

Выясним характер фундаментального решения вблизи существенно особенной точки  $\tau = 0$ . Для этого положим, как и раньше,

$$F = e^{\frac{i}{\hbar} \cdot S} f \quad (58)$$

и будем искать разложение  $S$  и  $f$  по степеням  $\tau$ . Функция  $S$  удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби с собственным временем (1.12). Подставляя в это уравнение разложение

$$S = \frac{S_{-1}}{\tau} + S_0 + S_1\tau + S_2\tau^2 + \dots, \quad (59)$$

получим

$$(\text{grad } S_{-1})^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S_{-1}}{\partial t} \right)^2 = 2mS_{-1}, \quad (60)$$

так что мы можем положить

$$S_{-1} = \frac{1}{2} m [(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)^2 - c^2 (t - t^0)^2] = -\frac{1}{2} m \xi. \quad (61)$$

С этим значением  $S_{-1}$  уравнение для  $S_0$  будет

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \cdot \text{grad } S_0 + (t - t^0) \frac{\partial S_0}{\partial t} = \\ = -\frac{e}{c} \{ (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \mathbf{A} - c(t - t^0) \Phi \}. \end{aligned} \quad (62)$$

В правой части это уравнение совпадает с уравнением (43) для  $\chi$  с точностью до множителя  $-\frac{e}{c}$ . Поэтому мы можем положить

$$S_0 = -\frac{e}{c} \chi = -\frac{e}{c} \int_{(r^0, t^0)}^{(r, t)} (\mathbf{A} d\mathbf{r} - c\Phi dt). \quad (63)$$

Наконец, уравнение для  $S_1$  будет

$$(L + 1) S_1 = -\frac{1}{2m} \left\{ m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} (\mathbf{A}'^2 - \Phi'^2) \right\}, \quad (64)$$

где  $L$  имеет значение (53). Решение этого уравнения получится по формуле (55). Дальнейшие коэффициенты определяются однозначным образом из уравнений вида

$$(L + p) S_p = \varphi_p \quad (p = 2, 3, \dots), \quad (65)$$

где  $\varphi_p$  известно, коль скоро известны предыдущие приближения. Таким образом, мы будем иметь:

$$S = -\frac{m\xi}{2\tau} - \frac{e}{c}\chi - \frac{1}{2}mc^2\tau - \frac{e^2\tau}{2mc^2} \int_0^1 (A'^2 - \Phi'^2) du + \dots \quad (66)$$

В случае свободной частицы формула (66) дает точное выражение для  $S$ .

Аналогичным путем можно решать уравнение (16) для  $f$ . Мы получим

$$f = \frac{c}{\tau^2} \left\{ 1 - \frac{e\tau}{2mc} \int_0^1 (i\bar{\sigma} \cdot \mathbf{H} + \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}) du + \dots \right\}. \quad (67)$$

Исследуем теперь, какой контур нужно взять в интеграле

$$R = \int e^{\frac{i}{\hbar} S} f d\tau, \quad (68)$$

чтобы получить функцию Римана. Интеграл (68), очевидно, удовлетворяет уравнению Дирака второго порядка. Чтобы он равнялся функции Римана, необходимо еще удовлетворить условию (40) или (52) на шаре (световом конусе)  $\xi = 0$ . Покажем, что это условие будет выполнено, если мы возьмем в качестве контура интегрирования обход вокруг точки  $\tau = 0$  в комплексной плоскости  $\tau$ . Для этого заметим, что при  $\xi = 0$  функция действия  $S$  не имеет полюса, так что вся подинтегральная функция в (68) не имеет тогда существенно особенной точки. Для вычисления интеграла достаточно взять вычет в точке  $\tau = 0$ . Но при  $\xi = 0$  мы имеем:

$$\begin{aligned} R &= e^{-\frac{ie}{\hbar c}\chi} \int \left\{ 1 - \frac{imc^2}{2\hbar}\tau - \frac{ie^2}{2\hbar mc^2}\tau \int_0^1 (A'^2 - \Phi'^2) du - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e\tau}{2mc} \int_0^1 (i\bar{\sigma} \cdot \mathbf{H} + \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}) du + \dots \right\} \frac{C}{\tau^2} d\tau = \\ &= -2\pi i C e^{-\frac{ie}{\hbar c}\chi} \int_0^1 \left\{ \frac{imc^2}{2\hbar} + \frac{ie^2}{2\hbar mc^2} (A'^2 - \Phi'^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{2mc} (i\bar{\sigma} \cdot \mathbf{H} + \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}) \right\} du. \quad (69) \end{aligned}$$

Определяемая по формуле (45) функция  $R'$  равна

$$R' = 2\pi^2 C \frac{\hbar c}{m} \int_0^1 \left\{ \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{c^2}{\hbar^2 c^2} (A'^2 - \Phi'^2) + \frac{e}{\hbar c} (\bar{\sigma} \mathbf{H} - \bar{i} \alpha \cdot \mathbf{E}) \right\} du. \quad (70)$$

Следовательно, если мы положим

$$\frac{2\pi^2 \hbar c}{m} C = -\frac{1}{4}; \quad C = -\frac{m}{8\pi^2 \hbar c}, \quad (71)$$

то функция  $R'$  будет удовлетворять уравнению (52). Таким образом, интеграл (68) есть действительно функция Римана.

Если в этом интеграле выбрать надлежащим образом путь интегрирования, то можно получить из него и фундаментальное решение уравнения Дирака второго порядка.

Фундаментальное решение  $U$  уравнения  $\Delta U = 0$  имеет вид

$$U = \frac{1}{\pi i} \left\{ R \lg |\xi| + \frac{R^*}{\xi} \right\} + U^*, \quad (72)$$

где  $R$  и  $R^*$  имеют прежние значения, а именно:  $R$  есть функция Римана, а  $R^*$  определяется формулой (44). Функция  $U^*$  будет уже регулярной функцией вблизи  $\xi = 0$ . Она подчинена лишь тому условию, чтобы все выражение (72) удовлетворяло уравнению  $\Delta U = 0$ . Этого условия, очевидно, недостаточно для полного ее определения. Поэтому различные фундаментальные решения отличаются друг от друга значениями функции  $U^*$ . Они могут быть получены из интеграла (68) путем различного выбора контура интегрирования. Неоднозначность фундаментального решения соответствует тому, что в уравнении Дирака без собственного времени число независимых переменных — четное.

8. В качестве примера рассмотрим движение электрона в постоянном электрическом и магнитном поле и составим для этого случая функцию Римана. Для простоты выкладок мы ограничимся случаем параллельных полей, которые предположим направленными по оси  $z$ .

Положив потенциалы равными

$$A_x = -\frac{1}{2} H y; \quad A_y = \frac{1}{2} H x; \quad A_z = 0; \quad \Phi = -E z, \quad (73)$$

мы можем легко решить классические уравнения движения, соответствующие лагранжевой функции (1,6). Составляя затем интеграл действия (1,7), мы получим для него выражение

$$S = S_0 - \frac{1}{2} m c^2 \tau + \frac{eE}{4c} [(z - z^0)^2 - c^2 (t - t^0)^2] \operatorname{cth} \frac{eE\tau}{2mc} + \frac{eH}{4c} [(x - x^0)^2 + (y - y^0)^2] \operatorname{ctg} \frac{eH\tau}{2mc}, \quad (74)$$

где через  $S_0$  обозначена величина

$$S_0 = -\frac{e}{c} \chi = -\frac{eE}{2} (z + z^0) (t - t^0) - \frac{eH}{2c} (x^0 y - y^0 x),$$

не зависящая от  $\tau$ .

Обращаясь к уравнению (13) для  $f$ , мы видим, что ему можно удовлетворить функцией, зависящей только от  $\tau$ , и, следовательно, можно положить  $\square f = 0$ . В таком случае оно совпадет с уравнением (16), которое мы уже привели к виду (21). В нашем случае определитель  $\rho$  будет равен

$$\rho = \frac{\text{const}}{\sin^2 \frac{eH\tau}{2mc} \cdot \text{sh}^2 \frac{eE\tau}{2mc}}, \quad (75)$$

а решением уравнения (21) будет

$$f^0 = \exp \left\{ -\frac{ie}{2mc} \sigma_z H \tau - \frac{e}{2mc} \alpha_z E \tau \right\}. \quad (76)$$

Определяя в функции  $f$  постоянный множитель из условия (71), мы получим

$$f = -\frac{m}{8\pi^2 \hbar c} \left( \frac{eH}{2mc} \right) \cdot \left( \frac{eE}{2mc} \right) \frac{f^0}{\sin \frac{eH\tau}{2mc} \text{sh} \frac{eE\tau}{2mc}}. \quad (77)$$

С этим значением  $f$  интеграл

$$R = \int e^{\frac{i}{\hbar} S} f d\tau, \quad (78)$$

взятый по достаточно малому кругу вокруг начала координат, даст нам функцию Римана данной задачи.

В частном случае, при отсутствии поля, будет

$$f = -\frac{m}{8\pi^2 \hbar c} \cdot \frac{1}{\tau^2}; \quad S = -\frac{m\xi}{2\tau} - \frac{1}{2} mc^2 \tau \quad (79)$$

и, следовательно,

$$R = -\frac{m}{8\pi^2 \hbar c} \int e^{-\frac{im\xi}{2\hbar\tau} - \frac{imc^2}{2\hbar}\tau} \cdot \frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{m}{4\pi\hbar \sqrt{\xi}} J_1 \left( \frac{mc}{\hbar} \sqrt{\xi} \right), \quad (80)$$

тогда как величина  $R^*$  имеет постоянное значение  $\frac{1}{2\pi c}$ . Поэтому при отсутствии поля функция  $Q$  общей теории равна

$$Q = -\frac{m}{4\pi\hbar \sqrt{\xi}} J_1 \left( \frac{mc}{\hbar} \sqrt{\xi} \right) \gamma(\xi) + \frac{1}{2\pi c} \delta(\xi). \quad (81)$$

### III. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ПОЗИТРОНОВ

Основу предложенной Дираком [1] формулировки теории позитронов составляет рассмотрение „смешанной плотности“, соот-

ветствующей распределению электронов в состоянии с отрицательной и положительной энергией.

Дирак рассматривает смешанную плотность двух видов, а именно:  $R_1$  и  $R_F$ , где

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}, t, \zeta | R_1 | \mathbf{r}^0, t^0, \zeta^0) = \\ & = \sum_{\text{зан.}} \psi(\mathbf{r}, t, \zeta) \bar{\psi}(\mathbf{r}^0, t^0, \zeta^0) - \sum_{\text{нез.}} \psi(\mathbf{r}, t, \zeta) \bar{\psi}(\mathbf{r}^0, t^0, \zeta^0), \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}, t, \zeta | R_F | \mathbf{r}^0, t^0, \zeta^0) = \\ & = \sum_{\text{зан.}} \psi(\mathbf{r}, t, \zeta) \bar{\psi}(\mathbf{r}^0, t^0, \zeta^0) + \sum_{\text{нез.}} \psi(\mathbf{r}, t, \zeta) \bar{\psi}(\mathbf{r}^0, t^0, \zeta^0). \quad (2) \end{aligned}$$

В этих формулах  $\psi(\mathbf{r}, t, \zeta)$  обозначает волновую функцию одного электрона, зависящую от координат  $\mathbf{r}$ , времени  $t$  и спиновой переменной (номера компонента)  $\zeta$ . Суммирование производится по значку волновой функции (номеру состояния), который для краткости опущен. Первая сумма распространена на все занятые состояния, а вторая — на все незанятые.

Дирак вычисляет, путем непосредственного суммирования, выражения (1) и (2) для электронов без поля и изучает их особенности на световом конусе. Затем он строит аналогичные выражения для электронов при наличии поля и получает их особенности из требования, чтобы они удовлетворяли волновому уравнению и переходили в вычисленные им ранее выражения при стремлении поля к нулю.

Но выражения (1) и (2) тесно связаны с теми функциями, которые встречаются при изучении задачи Коши для уравнения Дирака. Эта связь не была замечена Дираком, и выяснением ее мы сейчас займемся.

Рассмотрим сперва выражение (2). Если считать  $R_F$  матрицей относительно  $\zeta$  и  $\zeta^0$ , то можно писать эту величину в виде

$$(\mathbf{r}, t | R_F | \mathbf{r}^0, t^0) = R_F(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Это выражение удовлетворяет уравнению Дирака и обращается при  $t = t^0$  в ядро единичного оператора

$$\left\{ (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{P}) + mc\alpha_4 - \frac{T}{c} \right\} R_F = 0, \quad (4)$$

$$R_F = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \quad \text{при } t = t^0. \quad (5)$$

Но эти условия однозначно определяют функцию  $R_F$ . Поэтому нет необходимости вычислять эту функцию путем непосредственного суммирования ряда (2), а можно получить ее путем решения задачи Коши.

В самом деле, рассмотренная нами функция  $Q$  (II,26) удовлетворяет уравнению Дирака второго порядка и начальному условию

$$Q = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \quad \text{при } t = t^0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что выражение

$$R_F = -\frac{ic}{\hbar} \left\{ (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{P}) + mc\alpha_4 + \frac{T}{c} \right\} Q, \quad (7)$$

где согласно (II,26)

$$Q = R_\gamma(\xi) + R^*\delta(\xi) \quad (8)$$

удовлетворяет уравнениям (4) и (5). Таким образом, дираковская функция  $R_F$  непосредственно выражается через функцию Римана  $R$ , подробно изученную нами во II разделе.

Что касается функции  $R_1$ , то она выражается через фундаментальное решение  $U$  так же, как  $R_F$  через  $Q$ , а именно:

$$R_1 = -\frac{ic}{\hbar} \left\{ (\bar{\alpha} \cdot \mathbf{P}) + mc\alpha_4 + \frac{T}{c} \right\} U, \quad (9)$$

где согласно (II,72)

$$U = \frac{1}{\pi i} \left\{ R \lg |\xi| + \frac{R^*}{\xi} \right\} + U^*. \quad (10)$$

Само выражение (9) можно назвать фундаментальным решением уравнений Дирака первого порядка.

Однозначное определение функции  $R_1$  возможно только на основании начальных условий. Эти начальные условия должны быть сформулированы на основе физических соображений. Например, можно потребовать, чтобы в начальный момент времени  $t = t^0$  все состояния электронов с отрицательной кинетической энергией были заняты, а все состояния с положительной энергией были свободны. Тогда, как это видно из ее первоначального определения (1), функция  $R_1$  при  $t = t^0$  должна обращаться в ядро оператора для знака кинетической энергии (взятое со знаком минус). Решая уравнение Дирака с этими начальными условиями, мы получим значение смешанной плотности для произвольного времени  $t$ .

В заключение коснемся вопроса о физическом толковании смешанной плотности. Какие члены в ней имеют физический смысл и каким нельзя придавать физического смысла? Дирак, а также Гейзенберг [3] предлагают фиксировать ту часть в выражении для  $R_1$ , которая содержит особенности, и придавать физический смысл разности между полным выражением для  $R_1$  и выделяемой его частью. Нам кажется, однако, что такой прием содержит много произвола. Единственным надежным критерием представляется нам принцип соответствия. Применительно к нашей задаче принцип соответствия означает, что физический смысл могут иметь только те выражения, которые при  $\hbar \rightarrow 0$  остаются конечными везде, в том числе и на световом конусе (другими словами, равномерно относительно  $\xi$ ). Остальные члены необходимо отбрасывать как лишённые физического смысла. Этот критерий подтверждается вычислениями

поляризации вакуума, произведенными разными авторами [5]. Согласно этим вычислениям добавочные члены в функции Лагранжа для электромагнитного поля представляют просто ряд, расположенный по степеням  $\hbar$ . Последнее обстоятельство указывает также на применимость к данной задаче способа Бриллюэна — Вентцеля, который был рассмотрен нами во второй части нашей статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. M. Dirac. Proc. Cambr. Phil. Soc., **30**, 150 (1934).
2. J. Hadamard. Le problème de Cauchy et les equations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Paris 1932.
3. W. Heisenberg. Zs. f. Phys., **90**, 209 (1934).
4. W. Pauli. Helvetica Physica Acta, **5**, 179 (1932).
5. V. Weisskopf. Über die Elektrodynamik des Vakuums auf Grund der Quantentheorie des Elektrons. Kopenhagen (1936).

---

#### РАБОТЫ В. А. ФОКА ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ (1928—1937)

1. V. Fock. Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung. Zs. f. Physik, **49**, 339—357 (1928).
2. V. Fock. Konfigurationsraum und zweite Quantelung. Zs. f. Physik, **75**, 62—647 (1932).
3. V. Fock und B. Podolsky. Zur Diracschen Quantenelektrodynamik. Sow. Phys., **1**, 798—800 (1932).
4. V. Fock and B. Podolsky. On the quantization of electromagnetic waves and the interaction of charges on Dirac's theory. Sow. Phys., **1**, 801—817 (1932).
5. Boris Podolsky and V. A. Fock. Derivation of Möller's formula from Dirac's theory. Sow. Phys., **2**, 275—277 (1932).
6. P. A. M. Dirac, V. A. Fock and Boris Podolsky. On quantum electrodynamics. Sow. Phys., **2**, 468—479 (1932).
7. В. Фок. К теории позитронов. ДАН, нов. сер., № 6, стр. 265—267 (1933).
8. V. Fock. Zur Theorie der Positronen. C. R. acad. sc. URSS (Doklady), nouv. série, № 6, p. 267—271 (1933).
9. V. Fock. Zur Quantenelektrodynamik. Sow. Phys., **6**, 425—469 (1934).
10. В. А. Фок. Метод функционалов в квантовой электродинамике. Уч. Зап. ЛГУ, сер. физ. наук, т. 3, № 17, стр. 109—124 (1937).
11. В. А. Фок. Собственное время в классической и квантовой механике. Изв. АН СССР, ОМЭН, сер. физ., № 4—5, стр. 551—568 (1937).
12. V. Fock. Die Eigenzeit in der klassischen und in der Quantenmechanik. Sow. Phys., **12**, 404—425 (1937).

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Обобщение и решение статистического уравнения Дирака . . . . .	9
Конфигурационное пространство и вторичное квантование . . . . .	25
О квантовой электродинамике Дирака . . . . .	52
О квантовании электромагнитных волн и взаимодействии зарядов по теории Дирака . . . . .	55
О квантовой электродинамике . . . . .	70
К теории позитронов . . . . .	83
О квантовой электродинамике . . . . .	88
Метод функционалов в квантовой электродинамике . . . . .	124
Собственное время в классической и квантовой механике . . . . .	141

---



*Фок Владимир Александрович*  
**Работы по квантовой теории поля**

Редактор *Е. В. Щемелева*  
Техн. ред. *С. Д. Водолагина*  
Корректор *Л. И. Черканова*

---

Подписано к печати 21 III 1957 г. М-13161.  
Тираж 5400 экз. Печ. л. 10. Бум. л. 5.  
Формат бум.  $60 \times 92^{1/16}$ . Уч.-изд. л. 14,11  
Зак. 152.

---

Типография ЛОЛГУ. Ленинград,  
Университетская наб., 7/9.