

ПРОБЛЕМЫ ДИФФРАКЦИИ
И РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В. А. Ф О К



«Советское радио»
Москва — 1970

В. А. Фок. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., Изд-во «Советское радио», 1970, стр. 520, т. 4600 экз., ц. 2 р. 47 к.

В первой части монографии развивается асимптотическая теория дифракции на основе установленного автором принципа локального поля в области полутени на поверхности хорошо проводящего выпуклого тела. Во второй части рассматриваются проблемы распространения радиоволн в однородной и неоднородной (слоистой) атмосфере при учете дифракции вокруг Земли.

В математическом добавлении развивается теория интегральных уравнений, использованных в тексте, и приводятся таблицы функций Эйри, а также вспомогательных функций, применяемых для вычисления распределения токов.

Книга представляет собрание оригинальных работ автора.

43 рис., 16 табл., библи. 44 изв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ДИФФРАКЦИИ

Предисловие	7
Глава 1. Новые методы в теории диффракции	11
Глава 2. Распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника	19
Глава 3. Теория диффракции на параболоиде вращения	29
Глава 4. Диффракция плоской электромагнитной волны на идеально-проводящем параболоиде вращения	73
Глава 5. Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела	97
Глава 6. Законы отражения Френеля и законы диффракции	119
Глава 7. Диффракция Френеля от выпуклых тел	141
Глава 8. Обобщение отражательных формул на случай отражения произвольной волны от поверхности произвольной формы	155
Глава 9. Поперечная диффузия коротких волн, огибающих выпуклый цилиндр	179

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТРОПОСФЕРНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛИ

Глава 10. Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности	199
Глава 11. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения	221
Глава 12. Поле от вертикального и горизонтального диполя, приподнятого над поверхностью земли	243
Глава 13. Распространение прямой волны вокруг Земли при учете диффракции и рефракции	262
Глава 14. Теория распространения радиоволн в неоднородной атмосфере для приподнятого источника	284
Глава 15. Приближенная формула для дальности горизонта при наличии сверхрефракции	316
Глава 16. О распространении радиоволн вблизи горизонта при сверхрефракции	336
Глава 17. Распространение радиоволн по приземному тропосферному волноводу	359

Глава 18. К теории береговой рефракции электромагнитных волн	383
--	-----

М а т е м а т и ч е с к и е д о б а в л е н и я

Д о б а в л е н и е 1. О некоторых интегральных уравнениях математической физики	401
Д о б а в л е н и е 2. Теория и таблицы функций Эйри	455
Д о б а в л е н и е 3. Таблицы вспомогательных функций, применяемых для вычисления распределения токов	506
Литература	515

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Теория диффракции

ПРЕДИСЛОВИЕ

Новые физические понятия создаются не только в процессе обобщения физических теорий, но и обратным путем: они могут возникнуть в результате применения приближенных методов к более точной физической теории. О принципиальном значении приближенных методов в теоретической физике нам уже приходилось писать в связи с квантовой механикой [44]. Поскольку настоящая книга посвящена электромагнитной теории, мы рассмотрим здесь примеры возникновения новых понятий в теории света (как в электромагнитной теории, так и в предшествовавших ей более простых волновых теориях света).

Так, понятие луча, а равно и вся геометрическая оптика могут быть выведены из волновой теории света как идеализации, пригодные в предельном случае весьма малой длины волны (в области вблизи границы света и тени эти идеализации уже непригодны). При менее полной идеализации учитываются и отклонения от геометрической оптики, иначе говоря, учитывается диффракция, каковая тоже является новым физическим понятием (диффракционные явления наиболее ярко проявляются как раз вблизи границы между светом и тенью).

В первых исследованиях диффракционных явлений специфические свойства материала диффрагирующего тела обычно не учитывались: тело принималось абсолютно черным (поглощающим). Законы отражения, которые учитывают эти свойства, в анализе диффракционных явлений не использовались. В основу теории диффракции полагался принцип Гюйгенса—Френеля; на этой основе световое поле вблизи границы света и тени описывалось посредством интегралов Френеля, а поле вблизи каустики — посредством интегралов Эйри.

С возникновением, около ста лет назад, электромагнитной теории света (применимой также к радиоволнам) стало необходимым заново формулировать теорию диффракции. Надежной теоретической основой для описания диффракционных явлений служат уравнения Максвелла с соответствующими предельными условиями и условиями излучения.

Современную асимптотическую теорию диффракции можно определить как приближение к теории Максвелла, пригодное в предельном случае малых длин волн и больших радиусов кривизны диффрагирующих тел (мы исключаем из рассмотрения случай острых краев).

Асимптотическая теория диффракции внесла свои собственные принципы. Установлен принцип локального поля в области полу-

тени на поверхности выпуклого тела, а также обобщение этого принципа, позволяющее применять его и к области, примыкающей к телу. Далее мы имеем приближенную форму предельных условий на поверхности хорошо проводящего тела (Леонтович); условия Леонтовича являются условиями импедансного типа и вытекают из локального характера поля в поверхностном слое проводящего тела. Эти принципы позволили нам получить явные выражения для поля вблизи и на самой поверхности хорошо проводящего выпуклого тела произвольной формы. (Наши формулы, хотя и вполне общие, были получены путем применения принципа локального поля к случаю диффракции на параболоиде вращения; непосредственный их вывод из установленного нами в главе 2 интегрального уравнения был впоследствии дан Кёлленом [28].)

Дальнейшим принципом является введение разных масштабов для горизонтального и вертикального расстояний над проводящим телом (над поверхностью Земли); это позволяет заменить полное волновое уравнение параболическим уравнением (Леонтович). Последнее имеет вид квантово-механического уравнения Шредингера (или уравнения диффузии с мнимым коэффициентом диффузии), в котором время заменено на горизонтальную координату. Параболическое уравнение позволяет ввести понятие поперечной диффузии (Маложинец).

В первой части настоящей книги строится асимптотическая теория диффракции. Построение теории осуществляется двумя путями: во-первых, исходя из строгих решений уравнений Максвелла (эти решения преобразуются к приближенной форме, допускающей физическое толкование и пригодной для численных расчетов) и, во-вторых, путем непосредственного применения указанных выше принципов, в частности параболического уравнения. В некоторых случаях применяются оба метода; это позволяет сравнить их между собой и дает дополнительное обоснование «асимптотическому» методу. В большинстве случаев поле рассматривается лишь вблизи поверхности диффрагирующего тела, но некоторые формулы последних глав первой части относятся и к большим расстояниям от поверхности. Необходимые таблицы даны в добавлении 3.

Во второй части книги развивается теория распространения радиоволн. В первых главах второй части рассматривается распространение в однородной атмосфере; предмет этих глав относится, таким образом, к диффракции в собственном смысле, и они являются прямым продолжением первой части. В дальнейших главах рассматривается неоднородная (слоистая) атмосфера с показателем преломления, зависящим только от высоты.

Здесь уместно отметить, что случай слоистой атмосферы дает еще ряд примеров новых физических понятий, возникающих в результате применения приближенных методов. Такими понятиями являются: понятие приведенного показателя преломления (сочетающего влияние рефракции с влиянием кривизны земли), понятие атмосферного волновода и, наконец, понятие горизонтов, определяющих дальность распространения в случае сверхрефракции. Заметим, что с понятием атмосферного волновода связаны два различных понятия, а именно: захваченные волны (колебания) и волны (лучи), отраженные от границ волновода. Эти два понятия являются дополнительными, в том смысле, что об отражении в смысле геометрической оптики можно говорить только если возбуждено не одно, а много колебаний.

Последняя глава, посвященная явлению береговой рефракции, является в то же время примером применения к задачам диффракции интегральных уравнений определенного вида (а именно: уравнений с полубесконечными пределами и с ядром, зависящим от абсолютного значения разности аргументов). Так как интегральные уравнения данного вида встречаются и в задаче об излучении волновода с открытым концом, а также в других задачах математической физики, мы даем в добавлении 1 полную математическую теорию таких интегральных уравнений. В добавлении 2 дан обзор свойств и применений функций Эйри, играющих весьма большую роль в асимптотической теории диффракции, а также приведены четырехзначные таблицы этих функций.

Целью настоящей книги является, в первую очередь, изложение общей теории, разработанной в исследованиях автора, и лишь во вторую очередь — анализ численных результатов. Тем не менее, в тех случаях, когда наглядное количественное толкование общих формул затруднительно, мы приводим также численные результаты в виде графиков и таблиц.

Для облегчения пользования книгой мы предпосылаем каждой главе и каждому добавлению краткую аннотацию; это позволит читателю уже при беглом просмотре книги получить представление об ее содержании.

Поскольку настоящая книга представляет сборник оригинальных работ автора в их первоначальном виде (с незначительными изменениями), в ней неизбежны повторения. Мы думаем, однако, что эта книга с достаточной ясностью показывает и логическое развитие идей, составляющих предмет работ автора по теории диффракции и распространения электромагнитных волн.

Некоторые работы, включенные в этот сборник, написаны мною с соавторами, имена которых указаны в соответствующих главах. Мне хотелось бы выразить здесь всем моим соавторам свою глубокую благодарность за сотрудничество.

Первое издание этой книги вышло в 1965 г. на английском языке в качестве первого тома серии монографий по электромагнитным волнам, издаваемой по постановлению Международной редакционной коллегии. (V. A. Fock, *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*, Pergamon Press, London, 1965, vol. I of the International Series of Monographs in Electromagnetic Waves).

Настоящее русское издание отличается от английского включением главы 18, посвященной береговой рефракции, и добавления 1, посвященного теории интегральных уравнений. Оно представляет, таким образом, расширенное (по сравнению с английским) собрание работ автора по данному вопросу. Хотя все, или почти все, эти работы уже были напечатаны по-русски в виде отдельных статей, пользоваться ими иногда затруднительно, так как статьи эти разбросаны по разным журналам, и время их напечатания охватывает почти двадцатилетний период (с 1944 по 1963 г.). Между тем, насколько мы можем судить, наши результаты не перестали быть актуальными. Поэтому мы надеемся, что настоящее издание наших работ по теории дифракции и распространения электромагнитных волн отвечает действительно назревшей потребности.

ГЛАВА I

НОВЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФРАКЦИИ*

Формулируется постановка общей задачи теории дифракции. Указывается на необходимость приближенных методов, использующих наличие малых параметров задачи. Выписываются предельные условия Леонтовича. Формулируется принцип локального поля в области полутени. Устанавливается интегральное уравнение для плотности тока на поверхности выпуклого проводящего тела. Приводятся без вывода явные выражения для плотности тока через универсальные функции (вывод дан в следующих главах).

Общая задача теории дифракции электромагнитных волн заключается в нахождении решения уравнений Максвелла, удовлетворяющего определенным начальным и предельным условиям. Начальные условия могут быть заменены условиями периодичности во времени. Кроме предельных условий, которые должны выполняться на поверхностях раздела различных сред, должны быть заданы особенности (источники поля) и условия на бесконечности.

Решение этой задачи представляет значительные математические трудности, связанные главным образом с необходимостью учитывать геометрическую форму поверхностей раздела и препятствий, на которые падает волна. Задача несколько упрощается, если рассматриваются только монохроматические волны с заданной частотой, но и тогда трудности остаются настолько большими, что решение удается найти только в тех случаях, когда геометрическая форма препятствия особенно проста. Наиболее известными из этих случаев являются: абсолютно отражающая полуплоскость, клин, сфера и круглый цилиндр.

Решение найдено также в случаях эллиптического и параболического цилиндра, а в недавнее время автор этих строк получил также решение задачи дифракции плоской волны от

* Фок, 1947.

абсолютно отражающего параболоида вращения (косвенное падение волны).

В тех немногих случаях, в которых известно строгое решение задачи, это решение имеет весьма сложный вид (бесконечные ряды или интегралы, или же ряды, каждый член которых представляется в виде интеграла).

Всякая физическая теория имеет своей целью получение такой картины явления, которая воспроизводила бы количественным и качественным образом все существенные его черты. Эта цель может считаться достигнутой только в том случае, когда полученное решение имеет достаточно простой вид. Если же аналитическая форма строгого решения отличается сложностью, то его можно рассматривать только как первый шаг в действительном решении задачи; следующий шаг должен состоять в выводе формул, пригодных для численных расчетов.

Этот второй шаг может оказаться столь же трудным, как и первый. В качестве примера можно указать на задачу о диффракции электромагнитных волн вокруг шара, строгое решение которой было найдено около 40 лет назад (Ми). Задача эта включает в себя также и задачу о распространении радиоволн вокруг земной поверхности (при условии, что атмосфера считается однородной). Однако в случае радиоволн ряды, представляющие решение, отличаются столь медленной сходимостью, что не могут быть непосредственно применены к вычислению поля. Поэтому полученное общее решение удалось применить к случаю радиоволн лишь в 1918 г., когда было найдено преобразование первоначального ряда в другой, сходящийся гораздо быстрее (Ватсон). Но в некоторых отношениях преобразованная форма решения была по-прежнему неудовлетворительна, как по своей сложности, так и по тому, что она применима лишь в области геометрической тени (достаточно далеко за линией горизонта). Значительно более удобная форма решения, применимая во всех практически встречающихся случаях, была недавно найдена автором этих строк [10]. Таким образом, путь, который пришлось пройти от строгого решения, имевшего лишь теоретический интерес, к приближенному, практически применимому решению, занял около 40 лет.

Метод, который состоит в том, чтобы сперва найти строгое решение задачи диффракции, а затем преобразовать его к виду, удобному для вычислений, применим, однако, лишь в очень немногих случаях. Его, очевидно, можно применять лишь к тем немногочисленным задачам, для которых известно строгое решение в виде рядов или интегралов.

В других случаях (в частности, в задаче о диффракции от тела произвольной формы) для решения задачи были сделаны попытки привести ее к интегральным уравнениям. В теоретическом отно-

шении попытки эти можно признать удачными, но, за исключением одной работы автора [2], полученные интегральные уравнения к практическому решению задачи не применялись, общая же теория интегральных уравнений оказывается совершенно бесполезной для получения численных результатов в задачах данного типа.

Таким образом, существует настоятельная потребность в таком приближенном методе, который обладая достаточной общностью приводил бы к достаточно простым формулам. В дальнейшем мы изложим основные идеи подобного метода, предложенного и разработанного автором.

Всякий приближенный метод основан на малости тех или иных параметров, встречающихся в задаче. Нам надлежит поэтому выяснить, каковы в нашей задаче те параметры, которые могут считаться малыми.

Мы обычно имеем дело с распространением волн в воздухе, т. е. в среде, свойства которой резко отличаются от свойств тех тел (препятствий), от которых рассеивается волна. Электрические свойства этих тел характеризуются комплексной диэлектрической постоянной

$$\eta = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (1.01)$$

где ε означает обычную диэлектрическую постоянную, σ — электропроводность вещества тела и ω — частоту.

Для нас существенно, что во многих случаях можно считать $|\eta| \gg 1$. Таким образом, в качестве одного из малых параметров задачи мы можем взять обратную величину $|\eta|$ или же величину $1 : \sqrt{|\eta|}$.

Далее, длина волны λ в пустоте обычно весьма мала по сравнению с главными радиусами кривизны R_1 и R_2 поверхности рассеивающих тел. Мы имеем, таким образом, еще один малый параметр — отношение $\lambda : R$, где R — величина порядка R_1 или R_2 . Удобнее брать вместо этого отношения величину

$$\frac{1}{m} = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi R}}. \quad (1.02)$$

Кроме только что введенных двух малых параметров $1 : \sqrt{|\eta|}$ и $1 : m$, в задаче могут встречаться и другие, зависящие от расположения точки, для которой вычисляется поле (точки наблюдения). Так, например, в задаче о распространении радиоволн вокруг земной поверхности можно считать малым угол наклона луча к горизонту.

Какие же следствия влечет за собой тот факт, что параметры $1 : \sqrt{|\eta|}$ и $1 : m$ оказываются малыми? В предельном случае $|\eta| \rightarrow \infty$ (абсолютный проводник) существенное упрощение получается в результате того, что поле внутри проводника можно считать известным наперед (а именно, это поле равно нулю). В силу этого мы можем ограничиться рассмотрением поля вне проводника, а на его поверхности подчинить поле в воздухе определенным предельным условиям (равенство нулю касательных составляющих электрического вектора). Подобно этому обстоит дело и в том случае, когда величина $\sqrt{|\eta|}$ хотя и конечна, но весьма велика. В этом случае поле внутри тела будет исчезающе малым везде, кроме тонкого поверхностного слоя (скин-эффект), влияние же этого слоя может быть учтено при помощи предельных условий для внешнего поля. Эти условия имеют вид

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \sqrt{\eta} (E_x - n_x E_n) = n_y H_z - n_z H_y, \quad (1.03)$$

где (j_x, j_y, j_z) есть вектор поверхностной плотности тока; (n_x, n_y, n_z) — единичный вектор нормали к поверхности; E_n — нормальная составляющая электрического поля; значение остальных символов ясно без пояснений.

Предельные условия (1.03) — в несколько иной форме — были впервые указаны акад. М. А. Леонтовичем ([11] и [21]). Они применимы при выполнении неравенств $|\eta| \gg 1$ и $kR \sqrt{|\eta|} \gg 1$, где $k = 2\pi : \lambda$. Второе неравенство означает требование, чтобы толщина слоя скин-эффекта была мала по сравнению с радиусом кривизны R поверхности рассеивающего тела. Предельные условия (1.03) написаны для случая, когда магнитная проницаемость вещества тела равна единице, но они легко обобщаются на случай произвольной магнитной проницаемости μ .

Таким образом, малость величины $1 : \sqrt{|\eta|}$ позволяет нам ограничиться рассмотрением поля вне тела и на его поверхности, что представляет существенное упрощение задачи.

Переходим к рассмотрению тех следствий, которые вытекают из малости длины волны.

Известно, что в предельном случае малых длин волн вступают в силу законы геометрической оптики. В частности, граница тени на поверхности тела становится вполне резкой. По одну сторону границы (в освещенной области) поле подчиняется с большой точностью законам отражения Френеля, а по другую сторону границы (в области тени) поле быстро убывает до нуля. Приближение, даваемое геометрической оптикой, не является, однако, достаточным для наших целей. Нас прежде всего интересует явление диффракции в узком смысле слова, т. е. огибание

волной препятствия. Геометрическая оптика не в состоянии дать картину этого явления, и для его изучения необходимо иметь более точное решение уравнений поля.

Нам удалось найти это решение при помощи нового принципа, который может быть назван принципом локального поля в области полутени.

Принцип локального поля состоит в следующем. На поверхности тела переход от света к тени происходит в узкой полосе, середина которой проходит по границе геометрической тени. Ширина этой полосы будет порядка

$$d = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi} R_0^2}, \quad (1.04)$$

где R_0 есть радиус кривизны нормального сечения тела плоскостью падения.

Можно показать, что, с точностью до величин порядка $\sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi R_0}}$, поле на этой полосе имеет локальный характер: оно зависит только от значения поля падающей волны в окрестности данной точки, от геометрической формы тела вблизи этой точки и от электрических свойств вещества тела. Поле вблизи данной точки полосы не зависит от его значений в удаленных точках и может быть определено в отдельности.

Чтобы установить принцип локального поля и вывести для этого поля явные выражения, мы применяли два различных метода.

Один из этих методов (см. главу 2) применим к случаю абсолютного проводника и дает значения поля на его поверхности. Мы исходим здесь из интегрального уравнения для поверхностной плотности тока \mathbf{j} . Это уравнение имеет вид

$$\mathbf{j} = 2\mathbf{j}^{ex} + \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{j}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]]}{R^3} \right\}_{\text{surf}} dS', \quad (1.05)$$

где

$$f = (1 - ikR) e^{ikR}. \quad (1.06)$$

Вектор \mathbf{j}^{ex} (внешняя плотность тока) определяется здесь выражением (1.03), в котором величину H надлежит заменить величиной H^{ex} — магнитным вектором внешнего поля; \mathbf{r} есть радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{r}' — радиус-вектор точки, по координатам которой интегрируется; $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ есть длина хорды между \mathbf{r} и \mathbf{r}' ; \mathbf{n} есть единичный вектор нормали в точке \mathbf{r} .

Качественное исследование интегрального уравнения и позволило нам установить принцип локального поля. После того как

этот принцип установлен, достаточно найти решение задачи диффракции для какого-либо выпуклого тела частного вида и вывести приближенные формулы для поля на его поверхности. В силу принципа локального поля эти формулы будут тогда справедливы для всякого другого выпуклого тела с теми же значениями главных радиусов кривизны поверхности в данной точке. (Разумеется, форма тела частного вида должна быть все же достаточно общей, чтобы на нем нашлись точки с любым заданным значением главных радиусов кривизны; вычисления были произведены для случая параболоида вращения.) Таким путем была получена общая формула, которая дает значения на поверхности касательных составляющих магнитного поля, а следовательно, и поверхностную плотность тока. Эта формула имеет вид

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\text{ex}} G(\xi, 0), \quad (1.07)$$

где аргумент ξ в функции G есть величина

$$\xi = l : \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi} R_0^2} = l : d, \quad (1.08)$$

причем l есть расстояние от границы геометрической тени, измеряемое вдоль луча (т. е. вдоль линии пересечения поверхности тела плоскостью падения) и считаемое положительным в сторону тени и отрицательным в противоположную сторону. Функция $G(\xi, 0)$ определяется интегралом

$$G(\xi, 0) = e^{i \frac{\xi^3}{3}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C \frac{e^{i \xi t}}{w'(t)} dt, \quad (1.09)$$

где C есть контур в плоскости комплексной переменной t , который идет от бесконечности к нулю вдоль прямой $\text{arct} t = \frac{2}{3} \pi$ и от нуля к бесконечности вдоль положительной вещественной оси.

Функция $w(t)$ может быть названа комплексной функцией Эйри. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w''(t) = tw(t) \quad (1.10)$$

и допускает для больших отрицательных значений t асимптотическое представление

$$w(t) = e^{i \frac{\pi}{4}} (-t)^{-\frac{1}{4}} \exp \left[i \frac{2}{3} (-t)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (1.11)$$

Условия (1.10) и (1.11) вполне определяют эту функцию.

Для больших отрицательных значений ξ функция $G(\xi, 0)$ стремится к пределу $G = 2$, тогда как для больших положитель-

ных ξ ее модуль убывает по показательному закону. Отсюда можно заключить, что формула (1.07) передает постепенное угасание амплитуды поля при переходе от света к тени.

Те же результаты могут быть получены и по другому способу [5], который, кроме того, позволяет обобщить их в двух направлениях. Во-первых, можно избавиться от предположения, что тело есть абсолютный проводник, и предполагать только, что на его поверхности применимы предельные условия (1.03). Во-вторых, можно получить поле не только на самой поверхности тела, но и вблизи поверхности (на расстояниях от нее, малых по сравнению с радиусами кривизны). Во втором способе прежде всего упрощаются уравнения Максвелла и предельные условия, причем используется малость величин $1 : \sqrt{|\eta|}$ и $1 : m$ и отбрасываются квадраты этих величин. Волнбоевое уравнение для амплитуды заменяется при этом параболическим уравнением с чисто мнимым коэффициентом при первой производной. Упрощенные уравнения справедливы в полусвете, на расстояниях от поверхности тела, малых по сравнению с радиусами кривизны.

Решение этих уравнений может быть получено путем разделения переменных и дает поле во всей рассматриваемой области и, в частности, в полусвете на самой поверхности тела. Если ввести комплексную величину

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta}} = \frac{i}{\sqrt{\eta}} \sqrt[3]{\frac{\pi R_0}{\lambda}}, \quad (1.12)$$

модуль которой $|q|$ есть отношение двух введенных выше малых параметров, мы будем иметь вместо (1.07)

$$j = j^{ex} G(\xi, q), \quad (1.13)$$

где

$$G(\xi, q) = e^{i \frac{\xi^3}{3}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C \frac{e^{t\xi t} dt}{w'(t) - qw(t)}. \quad (1.14)$$

В последнем интеграле контур тот же, что в интеграле (1.09). Эти формулы дают распределение тока в полусвете и являются обобщением наших предыдущих формул (1.07) и (1.09). Формулы для поля вблизи поверхности имеют более сложный вид, и мы их здесь приводить не будем.

Необходимо отметить, что для наружной части полосы, где уже начинается освещенная область, из наших формул могут быть выведены для поля приближенные выражения, которые совпадают с теми, какие получаются, если взять наложение падающей волны и отраженной волны, вычисленной при помощи френелевских коэффициентов отражения. С другой стороны, на противо-

положном крае полосы поле уже практически равно нулю. Таким образом, наши формулы дают то недостающее звено, которое соединяет обе области, где применимы законы геометрической оптики. Совместно с формулами Френеля наши формулы позволяют вычислять поле во всей области, примыкающей к поверхности рассеивающего тела.

В некоторых задачах кроме этого ничего и не требуется. Так например, в задаче о распространении радиоволн вокруг земной поверхности нас обычно интересует поле на высотах, не превышающих десятка километров, — величина весьма малая по сравнению с радиусом Земли (6380 км). Наши формулы, обобщенные на случай, когда источник находится не на бесконечности, а вблизи или на самой поверхности, дают здесь искомое решение.

В других задачах, напротив того, требуется найти поле на больших расстояниях от рассеивающего тела. Хотя наши формулы непосредственно применимы лишь к области вблизи поверхности тела, они дают возможность определить поле также и на больших расстояниях. В самом деле, источником поля рассеянной волны являются токи, возбужденные падающей волной на поверхности тела (в слое скин-эффекта). Но эти токи выражаются нашими формулами. Пользуясь известными выражениями для вектор-потенциала, соответствующего заданному распределению токов, мы можем поэтому, по крайней мере в принципе, находить поле и на больших расстояниях от отражающего тела.

Таким образом, принцип локального поля в области полутени представляет ту основу, на которой можно построить приближенное решение задачи диффракции для выпуклого тела произвольной формы.

ГЛАВА 2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПЛОСКОЙ ВОЛНОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОВОДНИКА*

Рассматривается распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности выпуклого абсолютно проводящего тела произвольной формы с непрерывно меняющейся кривизной, при условии, что длина волны весьма мала по сравнению с размерами тела и радиусами кривизны его поверхности. Показано, что распределение токов вблизи границы геометрической тени выражается через универсальную (одинаковую для всех тел) функцию $G(\xi)$ от аргумента $\xi = l/d$, где l есть расстояние от границы геометрической тени, считаемое в плоскости падения, а d — ширина области полутени, выражающаяся через длину волны и радиус кривизны нормального сечения поверхности плоскостью падения. Для функции $G(\xi)$ выводится аналитическое выражение и даются подробные таблицы.

Пусть имеется абсолютный проводник, на который падает плоская электромагнитная волна. Поверхность проводника будем считать выпуклой (конвексной) и обладающей непрерывно меняющейся кривизной, а в остальном произвольной. Падающая волна возбуждает на проводнике токи, которые, в свою очередь, являются источником рассеянной волны. Если удастся найти распределение токов на проводнике, то поле рассеянной волны получится по известным формулам путем квадратур. Таким образом, существенным этапом решения задачи диффракции плоской волны от абсолютного проводника является нахождение токов, возникающих на его поверхности.

1. Интегральное уравнение для плотности тока

Обозначим через j поверхностную плотность тока на проводнике. Это есть вектор, определенный для каждой точки поверхности и направленный по касательной к ней. Он вполне опреде-

* Фок, 1945.

ляется заданием двух составляющих (касательных к поверхности), так как третья его составляющая (нормальная к поверхности) равна нулю.

Для вектора \mathbf{j} можно вывести следующее интегральное уравнение:

$$\mathbf{j} = 2\mathbf{j}^{ex} + \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{j}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{R^3} f \right\}_{\text{surf}} dS', \quad (1.01)$$

где

$$f = (1 - ikR) e^{ikR}. \quad (1.02)$$

Здесь R есть длина хорды между двумя точками на поверхности: точкой \mathbf{r} (x, y, z), для которой вычисляется интеграл, и точкой \mathbf{r}' (x', y', z'), по координатам которой интегрируется. Величина \mathbf{n} есть единичный вектор нормали к поверхности в точке \mathbf{r} , dS' — элемент поверхности, k есть абсолютное значение волнового вектора.

Величина \mathbf{j}^{ex} есть «внешняя» плотность тока, определяемая формулой

$$\mathbf{j}^{ex} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{ex}], \quad (1.03)$$

где \mathbf{H}^{ex} есть значение на поверхности магнитного поля падающей плоской волны («внешнего» поля).

Если поле падающей волны зависит от координат через посредство множителя

$$e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \quad (1.04)$$

то можно искать плотность тока в виде произведения аналогичного множителя на медленно меняющуюся функцию от координат. Интеграл (1.01) после разделения на (1.04) будет вида

$$I = \int e^{ik[R + \alpha(x' - x) + \beta(y' - y) + \gamma(z' - z)]} \Phi dS', \quad (1.05)$$

где Φ — медленно меняющаяся функция.

Если длина волны достаточно мала по сравнению с размерами тела, то интеграл будет приближенно равен

$$I = \frac{2\pi i}{k} \frac{R}{\cos \theta} \Phi, \quad (1.06)$$

где точка $x'y'z'$ связана с точкой xyz так, как показано на рис. 1 и 2, а θ есть угол падения луча.

Аналитическая связь между точками $x'y'z'$ и xyz выражается следующими формулами. Пусть \mathbf{n}' есть единичный вектор нормали

в точке $x'y'z'$ и пусть

$$\left. \begin{aligned} \alpha + 2n'_x \cos \theta &= \alpha^*, \\ \beta + 2n'_y \cos \theta &= \beta^*, \\ \gamma + 2n'_z \cos \theta &= \gamma^*, \end{aligned} \right\} \quad (1.07)$$

где

$$\cos \theta = -(\alpha n'_x + \beta n'_y + \gamma n'_z). \quad (1.08)$$

Величины α^* , β^* , γ^* суть направляющие косинусы луча, отраженного в точке $x'y'z'$.

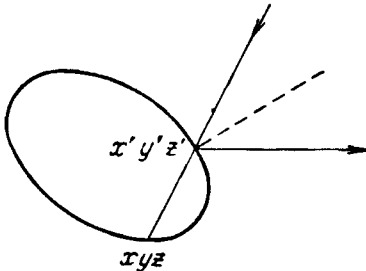


Рис. 1. Положение точки экстремума фазы, если точка наблюдения в освещенной области.

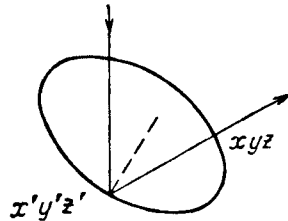


Рис. 2. Положение точки экстремума фазы, если точка наблюдения в теневой области.

При этих обозначениях будет либо

$$\frac{x-x'}{R} = \alpha; \quad \frac{y-y'}{R} = \beta; \quad \frac{z-z'}{R} = \gamma, \quad (1.09)$$

либо

$$\frac{x-x'}{R} = \alpha^*; \quad \frac{y-y'}{R} = \beta^*; \quad \frac{z-z'}{R} = \gamma^*, \quad (1.10)$$

причем формулы (1.09) имеют место, когда точка $x'y'z'$ лежит на освещенной части поверхности тела (рис. 1), а формулы (1.10) имеют место, когда эта точка лежит на теневой части поверхности (рис. 2). В последнем случае «отраженный» луч будет фиктивный.

В том приближении, в котором справедлива формула (1.06), интегральное уравнение (1.01) допускает следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} j &= 2j^{ex} \text{ на освещенной части,} \\ j &= 0 \text{ на теневой части.} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Вблизи границы геометрической тени (где $\cos \theta = 0$) формула (1.06) перестает быть точной и выражение (1.11) не дает постепенного перехода от света к тени.

2. Локальный характер поля в области полутени

Чтобы получить для токов выражение, пригодное и для переходной области, необходимо иметь более точное решение. Получить его непосредственно из интегрального уравнения затруднительно, но его удалось получить косвенным путем на основании следующих соображений.

Прежде всего из рис. 1 и 2 видно, что если точка xuz близка к геометрической границе тени, то и точка $x'y'z'$ близка к ней и к xuz . Таким образом, значение интеграла (1.01) определяется тогда значениями подынтегральной функции в окрестности той точки, для которой вычисляется интеграл. Другими словами, в области полутени (вблизи геометрической границы тени) поле имеет локальный характер. Исследование интегрального уравнения (выполненное в предположении, что хорду можно заменить ее проекцией на касательную плоскость) показывает, что ширина области полутени будет порядка

$$d = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi} R_0^2}, \quad (2.01)$$

где R_0 — радиус кривизны сечения поверхности тела плоскостью падения. Но в области шириной d и в некоторой более широкой области ядро интегрального уравнения существенно зависит только от кривизны поверхности в окрестности данной точки (а не от высших производных от координат).

Отсюда следует, что все тела с плавно меняющейся кривизной имеют в области полутени одно и то же распределение токов, если только кривизна их в данной точке одинакова и если одинакова падающая волна.

Полученные результаты позволяют заключить, что, решив задачу для частного случая, можно получить универсальные формулы для поля на поверхности абсолютного проводника в области полутени, а следовательно, и везде, так как в освещенной и в глубокой теневой области справедливы выражения (1.11).

3. Приближенное решение для параболоида вращения

Вывод этих универсальных формул слишком сложен, чтобы его можно было сколько-нибудь подробно изложить в короткой

статье, и мы ограничимся указанием его основной идеи, а также результата, который может быть сформулирован весьма просто*.

Изложенные выше соображения показывают, что для вывода упомянутых формул можно исходить из точного решения задачи дифракции плоской волны от какого-либо тела с плавно меняющейся кривизной и с произвольными значениями главных радиусов кривизны.

Строгое решение известно в литературе для двух случаев: для шара и для круглого цилиндра (в последнем случае для нормального падения волны). Эти случаи не являются достаточно общими: в первом из них оба радиуса кривизны равны между собой, во втором — один равен бесконечности.

Простейшими из тел с произвольными радиусами кривизны являются эллипсоид и параболоид вращения. Для этих тел известна только общая форма решения скалярного волнового уравнения; полное же решение уравнений Максвелла для данной физической задачи, по видимому, неизвестно.

В нашей работе мы получили это решение (в частности, значения касательных составляющих магнитного поля на поверхности параболоида) и использовали его для вывода приближенных формул.

Пусть уравнение параболоида (рис. 3) имеет вид

$$x^2 + y^2 - 2az - a^2 = 0. \quad (3.01)$$

Мы предположим, что падающая волна имеет определенную поляризацию, а именно такую, что ее магнитное поле направлено вдоль оси y . Пусть составляющие поля падающей волны равны**:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_0 \cos \delta e^{i\Omega}, & H_x &= 0, \\ E_y &= 0, & H_y &= E_0 e^{i\Omega}, \\ E_z &= -E_0 \sin \delta e^{i\Omega}, & H_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.02)$$

где

$$\Omega = k(x \sin \delta + z \cos \delta). \quad (3.03)$$

* Более подробный вывод дан в главах 3 и 4.

** Случай, когда вдоль оси y направлено электрическое поле, приводит к несколько более сложным формулам. Этот случай рассмотрен в параграфе 4 главы 4.

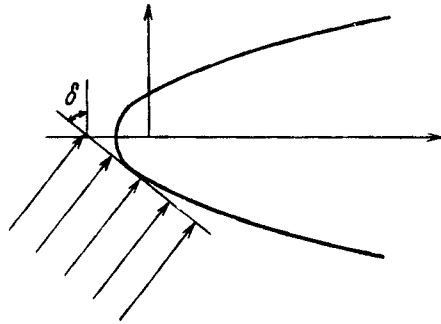


Рис. 3. Падение плоской волны на параболоид вращения.

Если ввести параболические координаты:

$$u = k(r + z); \quad v = k(r - z); \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad (3.04)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.05)$$

то уравнение параболоида напишется

$$v = v_0 = ka. \quad (3.06)$$

Для обобщенных (ковариантных) касательных составляющих внешнего магнитного поля мы имеем выражения:

$$2iuH_u^{ex} + H_\varphi^{ex} = \frac{E_0}{k} \sqrt{uv} e^{i\Omega + i\varphi}, \quad (3.07)$$

$$-2iuH_u^{ex} + H_\varphi^{ex} = \frac{E_0}{k} \sqrt{uv} e^{i\Omega - i\varphi}, \quad (3.08)$$

причем выражение Ω в новых координатах имеет вид

$$\Omega = \frac{1}{2}(u - v) \cos \delta + \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi. \quad (3.09)$$

Для тех же составляющих полного поля получаются ряды Фурье по углу φ , в которых коэффициенты при $\sin s\varphi$ и при $\cos s\varphi$ суть интегралы по параметру t от некоторых сложных функций, зависящих от аргументов u , v , δ , s , t . Эти ряды и интегралы можно привести к двойным интегралам вида

$$2iuH_u + H_\varphi = \frac{E_0 \sqrt{uv}}{2\pi k \sin \delta} \int \int g(s, t) \times \\ \times e^{-is\varphi + it \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} ds dt, \quad (3.10)$$

где функция $g(s, t)$ определяется следующим образом. Пусть $\zeta(v, s, t)$ есть интеграл дифференциального уравнения

$$v \frac{d^2 \zeta}{dv^2} + \frac{d\zeta}{dv} + \left(\frac{v}{4} - \frac{s^2}{4v} + \frac{t}{2} \right) \zeta = 0, \quad (3.11)$$

имеющий при $v \rightarrow \infty$ асимптотическое выражение

$$\zeta(v, s, t) = e^{-\frac{\pi}{4} t - i \frac{s+1}{4} \pi} v^{-\frac{1}{2} + \frac{it}{2}} e^{i \frac{v}{2}} \times \\ \times F_{20} \left(\frac{1-s-it}{2}; \quad \frac{1+s-it}{2}; \quad \frac{-i}{v} \right), \quad (3.12)$$

где F_{20} есть асимптотический ряд вида

$$F_{20} \left(\alpha, \beta, \frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1} \frac{1}{x} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{x^2} + \dots \quad (3.13)$$

Положим

$$N(s, t) = \frac{i}{\pi} e^{\pi t - i \frac{\pi}{2} s} \times \\ \times \frac{\Gamma \left(\frac{s - it}{2} \right) \Gamma \left(\frac{-s - it}{2} \right)}{\zeta^2(v, s, -t - i) + \frac{1}{4} (s^2 + t^2) \zeta^2(v, s, -t + i)}, \quad (3.14)$$

где под v подразумевается величина (3.06); тогда будет

$$g(s, t) = e^{is \frac{\pi}{2}} \zeta(u, s + 1, t) \zeta(v, s - 1, t) (s - it) N(s, t). \quad (3.15)$$

С этим значением $g(s, t)$ выражение (3.10) справедливо при $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. В случаях $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{3\pi}{2} < \varphi < -\frac{\pi}{2}$ нужно брать для $g(s, t)$ несколько другое выражение, которого мы здесь не выписываем. Интегрирование в (3.10) ведется по переменной t по вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$ и по переменной s по мнимой оси от $-i\infty$ до $+i\infty$. Значение выражения $-2iuH_u + H_\varphi$ получится из (3.10) заменой φ на $-\varphi$.

Двойной интеграл можно приближенно вычислить в предположении, что величина $v = ka$ весьма велика.

Положим

$$\xi = \frac{\sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi - v \cos \delta}{[2v(u+v)]^{1/3} (\sin \delta)^{2/3}}. \quad (3.16)$$

Нетрудно проверить, что на геометрической границе тени будет $\xi = 0$; вообще же величина ξ будет большой, порядка $v^{1/3}$. Поэтому при вычислении интегралов мы будем считать v весьма большим, а ξ произвольным (вообще говоря, конечным) числом. При этих предположениях можно показать, что с относительной погрешностью порядка $v^{-1/3}$ будет

$$2iuH_u + H_\varphi = \frac{E_0}{k} \sqrt{uv} e^{i\Omega + i\varphi} G(\xi), \quad (3.17)$$

$$-2iuH_u + H_\varphi = \frac{E_0}{k} \sqrt{uv} e^{i\Omega - i\varphi} G(\xi), \quad (3.18)$$

где

$$G(\xi) = e^{i \frac{\xi^2}{3}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{i \xi \tau} d\tau}{w'(\tau)}. \quad (3.19)$$

Здесь Γ_1 есть контур, идущий по прямой арг $\tau = \frac{2}{3} \pi$ от бесконечности к нулю и по прямой арг $\tau = 0$ (по вещественной оси) от нуля до бесконечности. В формуле (3.19) функция $w(\tau)$ есть интеграл дифференциального уравнения

$$w''(\tau) = \tau w(\tau), \quad (3.20)$$

который может быть представлен в виде

$$w(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_2} e^{\tau z - \frac{1}{3} z^3} dz, \quad (3.21)$$

где Γ_2 есть отражение контура Γ_1 в вещественной оси, т. е. контур, идущий по прямой арг $z = -\frac{2}{3} \pi$ от бесконечности к нулю и по положительной вещественной оси от нуля до бесконечности.

Из формул (3.17) и (3.18) вытекает

$$H_{ig} = H_{ig}^{ex} G(\xi). \quad (3.22)$$

Таким образом, касательные составляющие полного магнитного поля равны касательным составляющим внешнего поля, умноженным на некоторую комплексную функцию от одной переменной ξ .

Таким же соотношением связаны полная и «внешняя» плотность тока

$$j = j^{ex} G(\xi). \quad (3.23)$$

Выясним несколько подробнее геометрический смысл переменной ξ . Рассмотрим сечение поверхности параболоида плоскостью падения луча, проходящей через данную точку (рис. 4). Обозначим буквой l расстояние данной точки от геометрической границы тени, считаемое положительным в сторону тени и отрицательным в сторону света. Расстояние l отсчитывается в плоскости падения. Пусть R_0 есть радиус кривизны сечения поверхности плоскостью падения, а $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — абсолютная величина волнового вектора. Тогда можно проверить, что величина

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{k}{2R_0^2}} l = \frac{l}{d}, \quad (3.24)$$

где d есть введенная ранее ширина области полутени, совпадает для параболоида вращения с величиной (3.16). А так как по доказанному формулы (3.22) и (3.23) имеют универсальный характер, то они применимы для всех тел с данной кривизной, если под ξ разуметь величину (3.24).

Формулы эти дают переход от тени к свету.

Для больших положительных ξ функция $G(\xi)$ приближенно равна

$$G(\xi) = c e^{t \left(\frac{\xi^2}{3} + a\xi \right)} e^{-b\xi}, \quad (3.25)$$

где a , b , c — известные числа, причем

$$\begin{aligned} a &= 0,5094; & b &= 0,8823; \\ c &= 1,8325. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Вследствие множителя $e^{-b\xi}$ функция $G(\xi)$ быстро убывает. Это соответствует уменьшению амплитуды при удалении в область тени.

Для больших отрицательных ξ функция $G(\xi)$ имеет асимптотическое выражение вида

$$G(\xi) = 2 + \frac{i}{2\xi^3} + \dots \quad (3.27)$$

и стремится к пределу, равному 2, что соответствует формуле (1.11) для освещенной области.

Таким образом, в нашем более точном решении прерывная функция (1.11) заменена непрерывной функцией (3.23). Это дает возможность вычислить распределение токов на поверхности проводящего тела с большой точностью.

В добавлении 3 мы приводим таблицы функции G , определяемой формулой (3.19), а также функции g , связанной с G соотношением

$$G(x) = e^{t \frac{x^2}{3}} g(x) \quad (3.28)$$

и выражающейся в виде интеграла

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{t x t}}{\omega'(t)} dt. \quad (3.29)$$

В заключение напомним, что формулы и таблицы этой главы относятся к тому случаю, когда падающая волна имеет вид (3.02).

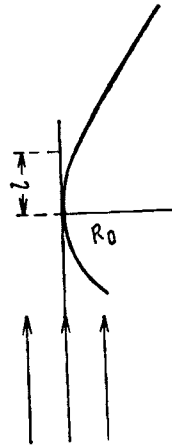


Рис. 4. Касательное падение плоской волны.

В случае же произвольной поляризации падающей волны приближенное решение содержит кроме функции $G(\xi)$, определяемой интегралом (3.19), также и функцию $F(\xi)$, выражаемую аналогичным интегралом, в котором в знаменателе вместо $\omega'(\tau)$ стоит $\omega(\tau)$ (формула (4.16) главы 4). Таблицы функции F и связанной с ней функции f также даны в добавлении 3.

ГЛАВА 3

ТЕОРИЯ ДИФФРАКЦИИ НА ПАРАБОЛОИДЕ ВРАЩЕНИЯ*

Глава состоит из двух частей. Первая часть содержит математический аппарат, необходимый для решения задач дифракции на параболоиде вращения. Здесь дана теория параболических функций и указаны некоторые разложения по этим функциям. Далее дана теория решений уравнений Максвелла в параболических координатах. Введены потенциалы, позволяющие формулировать предельные условия на параболоиде через коэффициенты Фурье, но без помощи уравнений в конечных разностях.

Во второй части исследуется задача об излучении диполя в фокусе абсолютно отражающего параболоида вращения. Первичное поле от диполя, а также поле отраженной волны выражаются через параболические потенциалы, для которых даются представления в виде интегралов и рядов двух типов (с разными областями сходимости). В заключение исследуется поле в волновой зоне и для него приводятся явные выражения, соответствующие приближению геометрической оптики, с поправками к ним.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

1. Параболические координаты

Обозначим через x , y , z прямоугольные координаты и напишем уравнение параболоида вращения в виде

$$x^2 + y^2 - 2az - a^2 = 0. \quad (1.01)$$

Обозначим через k абсолютное значение волнового вектора

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (1.02)$$

(где λ_0 — длина волны), и введем в качестве переменных следующие величины: во-первых, угол φ между плоскостью, проходящей через ось z и через данную точку, и некоторой фиксированной

* Фок, 1957.

плоскостью, проходящей через ту же ось (например, плоскостью xOz); этот угол будет тот же, что и в обычных цилиндрических координатах; во-вторых, параболические координаты u , v , связанные с прямоугольными по формулам

$$u = k(R + z); \quad v = k(R - z), \quad (1.03)$$

$$r = \frac{1}{k} \sqrt{uv}; \quad z = \frac{1}{2k} (u - v); \quad R = \frac{1}{2k} (u + v), \quad (1.04)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.05)$$

Прямоугольные координаты выражаются через параболические по формулам

$$x = \frac{1}{k} \sqrt{uv} \cos \varphi; \quad y = \frac{1}{k} \sqrt{uv} \sin \varphi; \quad z = \frac{1}{2k} (u - v). \quad (1.06)$$

Координатные поверхности $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ представляют систему взаимно-ортогональных параболоидов вращения. Уравнение данного параболоида (1.01) имеет вид

$$v = v_0, \quad \text{где } v_0 = ka, \quad (1.07)$$

как легко проверить прямой подстановкой (1.06) в (1.01). Области, внешней по отношению к данному параболоиду, соответствуют значения $v > v_0$; внутренней области — значения $v < v_0$. Переменная u меняется в пределах $0 \leq u < \infty$.

Квадрат линейного элемента в параболических координатах имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{u+v}{4u} du^2 + \frac{u+v}{4v} dv^2 + uv d\varphi^2 \right). \quad (1.08)$$

Как и всегда при пользовании криволинейными ортогональными координатами удобно различать между проекциями вектора на данное координатное направление и ковариантными составляющими вектора (последние преобразуются как частные производные от некоторой скалярной функции по координатным параметрам). Проекции физического вектора мы будем заключать в скобки [например, (E_u) , (E_v) , (E_φ)], оставляя обозначение E_u , E_v , E_φ для ковариантных составляющих. Тогда будет

$$\left. \begin{aligned} (E_u) &= \frac{k\sqrt{u}}{\sqrt{u+v}} E_u, \\ (E_v) &= \frac{k\sqrt{v}}{\sqrt{u+v}} E_v, \\ (E_\varphi) &= \frac{k}{2\sqrt{uv}} E_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.09)$$

и аналогично для других векторов.

2. Параболические функции с непрерывным параметром

В параболических координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta\psi = \frac{4k^2}{u+v} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial\psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial\psi}{\partial v} \right) + \frac{u+v}{4uv} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \right]. \quad (2.01)$$

Следовательно, уравнение колебаний

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0 \quad (2.02)$$

напишется

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial\psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial\psi}{\partial v} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \\ + \frac{1}{4} (u+v)\psi = 0. \end{aligned} \quad (2.03)$$

Полагая

$$\psi = U(u) V(v) e^{ts\varphi} \quad (2.04)$$

и подставляя это выражение в (2.03), убеждаемся, что в уравнении (2.03) переменные разделяются, и мы получаем для функций U и V уравнения:

$$u \frac{d^2U}{du^2} + \frac{dU}{du} + \left(\frac{u}{4} - \frac{s^2}{4u} + \frac{t}{2} \right) U = 0, \quad (2.05)$$

$$v \frac{d^2V}{dv^2} + \frac{dV}{dv} + \left(\frac{v}{4} - \frac{s^2}{4v} - \frac{t}{2} \right) V = 0, \quad (2.06)$$

где t — параметр, вошедший при разделении переменных.

Для того чтобы решение (2.04) было однозначной функцией точки в пространстве, необходимо, чтобы s было целое число (причем в уравнениях (2.05) и (2.06) можно, очевидно, считать $s \geq 0$). Параметр же t может быть произвольным вещественным или комплексным числом. Впрочем, во многих случаях бывает удобно вводить интегральные представления решений, в которых s играет роль переменной интегрирования. Имея в виду эти случаи, мы будем рассматривать U и V как аналитические функции переменной s .

Для функций U и V получились уравнения одного и того же типа (они отличаются друг от друга только знаком при t). Решения этих уравнений хорошо известны.

Рассмотрим сперва решение уравнения (2.05), конечное при $u = 0$. Таким решением будет функция

$$U = \xi(u, s, t),$$

где

$$\xi(u, s, t) = \frac{u^{\frac{s}{2}} e^{-i \frac{u}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1+it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1-it}{2}\right)} \times \\ \times \int_0^1 e^{iuz} z^{\frac{s-1+it}{2}} (1-z)^{\frac{s-1-it}{2}} dz. \quad (2.07)$$

Разлагая интеграл в степенной ряд, получим также

$$\xi(u, s, t) = e^{-i \frac{u}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{u^{\frac{s}{2}+k}}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1+it}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1+it}{2}\right) \Gamma(s+k-1)} \quad (2.08)$$

или

$$\xi(u, s, t) = e^{-i \frac{u}{2}} u^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\Gamma(s+1)} F\left(\frac{s+1+it}{2}, s+1, iu\right), \quad (2.09)$$

где $F(\alpha, \gamma, x)$ есть ряд, составленный по закону

$$F(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots \quad (2.10)$$

Заменяя в интеграле (2.07) z на $1-z$, легко показать, что при вещественных значениях u, s, t величина $\xi(u, s, t)$ будет вещественной. Из формулы (2.09) видно, что $\xi(u, s, t)$ будет целой трансцендентной функцией от t и от s .

Рассмотрим теперь второе решение уравнения (2.03), а именно то, которое имеет при больших u асимптотическое выражение,

содержащее множитель $e^{i \frac{u}{2}}$. Такое решение получится, если мы в (2.07) произведем интегрирование по z в пределах не от 0 до 1, а от $1+i\infty$ до 1. Постоянный множитель перед интегралом мы можем, разумеется, выбрать иначе, чем в (2.07). Преобразуя интеграл при помощи подстановки

$$1-z = \frac{x}{u} e^{-i \frac{\pi}{2}}$$

и выбирая надлежащим образом постоянный множитель, мы можем взять в качестве второго решения выражение

$$\zeta_1(u, s, t) = e^{-\frac{\pi}{4} t - i \frac{s+1}{4} \pi} u^{-\frac{1}{2} + \frac{it}{2}} e^{i \frac{u}{2}} F_{20}, \quad (2.11)$$

где

$$F_{20} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1-it}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{s-1-it}{2}} \left(1 + i \frac{x}{u}\right)^{\frac{s-1+it}{2}} dx. \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) может быть разложено в асимптотический ряд по степеням $\frac{1}{u}$, применимый при $u \rightarrow \infty$; а именно, если мы положим

$$F_{20}\left(\alpha, \beta, \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1} \frac{1}{x} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{x^2} + \dots, \quad (2.13)$$

то выражение (2.12) будет равно

$$F_{20} = F_{20}\left(\frac{1-s-it}{2}, \frac{1+s-it}{2}, -\frac{i}{u}\right). \quad (2.14)$$

Функция $\zeta_1(u, s, t)$ в отличие от $\xi(u, s, t)$ комплексна также и при вещественных u, s, t . Между тем она удовлетворяет уравнению (2.05) с вещественными коэффициентами. Отсюда следует, что функция

$$\zeta_2(u, s, t) = e^{-\frac{\pi}{4}t + i\frac{s+1}{4}\pi} u^{-\frac{1}{2} - \frac{it}{2}} e^{-i\frac{u}{2}} \times \\ \times F_{20}\left(\frac{1-s+it}{2}, \frac{1+s+it}{2}, \frac{i}{u}\right), \quad (2.15)$$

получаемая из $\zeta_1(u, s, t)$ заменой i на $-i$, также будет решением этого уравнения. При любых u, s, t функции ζ_1 и ζ_2 будут линейно-независимыми интегралами уравнения (2.05). Как функции от параметров s и t , величины ζ_1 и ζ_2 будут, подобно ξ , целыми трансцендентными функциями. При изменении знака s мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1(u, -s, t) &= e^{i\frac{s\pi}{2}} \zeta_1(u, s, t), \\ \zeta_2(u, -s, t) &= e^{-i\frac{s\pi}{2}} \zeta_2(u, s, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Установим связь между функциями ξ, ζ_1, ζ_2 . Мы имеем:

$$\xi(u, s, t) = \frac{\zeta_1(u, s, t)}{\Gamma\left(\frac{s+1+it}{2}\right)} + \frac{\zeta_2(u, s, t)}{\Gamma\left(\frac{s+1-it}{2}\right)}. \quad (2.17)$$

Рассматривая уравнение (2.17) и аналогичное уравнение с обратным знаком при s и пользуясь соотношениями (2.16), можно выразить

$$\zeta_1(u, s, t) \text{ и } \zeta_2(u, s, t)$$

через

$$\xi(u, s, t) \text{ и } \xi(u, -s, t).$$

Тогда будем иметь

$$\zeta_1(u, s, t) = \frac{i\pi}{\sin s\pi} e^{-t \frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{-i \frac{s\pi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{-s+1-it}{2}\right)} \xi(u, s, t) - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1-it}{2}\right)} \xi(u, -s, t) \right]. \quad (2.18)$$

Величина ζ_2 получится отсюда изменением знака при i . Если разуместь здесь под ξ ряд (2.08), то формула (2.18) даст для $\zeta_1(u, s, t)$ разложение по восходящим степеням u . Когда s стремится к целому числу, правая часть (2.18) стремится к конечному пределу; после перехода к пределу ряд для ζ_1 будет содержать логарифмические члены.

Между функциями $\xi(u, s, t)$ с параметрами s , отличающимися на ± 1 , и с параметрами t , отличающимися на $\pm 2i$, существуют различные рекуррентные соотношения, из которых приведем следующие:

$$\begin{aligned} 2u \frac{\partial}{\partial u} \xi(u, s, t) + \xi(u, s, t) &= \\ &= \frac{s+1+it}{2} \xi(u, s, t-2i) + \frac{s+1-it}{2} \xi(u, s, t+2i), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} i(u+t) \xi(u, s, t) &= \\ &= \frac{s+1+it}{2} \xi(u, s, t-2i) - \frac{s+1-it}{2} \xi(u, s, t+2i). \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{s+it}{2} \xi(u, s, t-i) + \frac{s-it}{2} \xi(u, s, t+i) = \sqrt{u} \xi(u, s-1, t), \quad (2.21)$$

$$\xi(u, s, t-1) - \xi(u, s, t+i) = i \sqrt{u} \xi(u, s+1, t). \quad (2.22)$$

Иногда бывает удобно вводить в вычисления вместо $\xi(u, s, t)$ функцию

$$\psi(u, s, t) = \Gamma\left(\frac{s+1+it}{2}\right) \xi(u, s, t), \quad (2.23)$$

которая уже не будет целой трансцендентной функцией от s и от t . Рекуррентные соотношения для $\psi(u, s, t)$ легко получаются из (2.19)—(2.22). Но тем же соотношениям, как $\psi(u, s, t)$, удовлетворяет и функция $\zeta_1(u, s, t)$. Поэтому мы будем иметь

$$\begin{aligned} & 2u \frac{\partial}{\partial u} \zeta_1(u, s, t) + \zeta_1(u, s, t) = \\ & = \zeta_1(u, s, t - 2i) + \frac{1}{4} (s + 1 - it)(s - 1 + it) \zeta_1(u, s, t + 2i), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & i(u + t) \zeta_1(u, s, t) = \\ & = \zeta_1(u, s, t - 2i) - \frac{1}{4} (s + 1 - it)(s - 1 + it) \zeta_1(u, s, t + 2i), \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} & \zeta_1(u, s, t - i) + \frac{1}{2} (s - it) \zeta_1(u, s, t + i) = \\ & = \sqrt{u} \zeta_1(u, s - 1, t), \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} & \zeta_1(u, s, t - i) - \frac{1}{2} (s + it) \zeta_1(u, s, t + i) = \\ & = i \sqrt{u} \zeta_1(u, s + 1, t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Рекуррентные соотношения для функции $\zeta_2(u, s, t)$ получаются из (2.24)—(2.27) заменой i на $-i$.

Для оценки различных интегралов и рядов, содержащих параболические функции, необходимо иметь асимптотические выражения для этих функций, справедливые при больших значениях $|t|$. Для функции $\xi(u, s, t)$ асимптотическое выражение имеет вид

$$\xi(u, s, t) \sim \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{s}{2}} J_s(\sqrt{2ut}), \quad (2.28)$$

где J_s — функция Бесселя.

Это выражение справедливо при конечных и малых u (вплоть до $u = 0$) при условии $|t| \gg 1$. Для функций ζ_1 и ζ_2 мы будем иметь в верхней полуплоскости t

$$\zeta_1(u, s, t) = \frac{\pi e^{-t \frac{\pi}{2} - i \frac{s\pi}{4}}}{\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)} H_s^{(1)}(\sqrt{2ut}), \quad (2.29)$$

$$\zeta_2(u, s, t) = \frac{1}{2} e^{-i \frac{s\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right) \times \\ \times [H_s^{(2)}(\sqrt{2ut}) - e^{is\pi-t\pi} H_s^{(1)}(\sqrt{2ut})] \quad (2.30)$$

и в нижней полуплоскости

$$\zeta_1(u, s, t) = \frac{1}{2} e^{i \frac{s\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{1+it}{2}\right) \times \\ \times [H_s^{(1)}(\sqrt{2ut}) - e^{-is\pi-t\pi} H_s^{(2)}(\sqrt{2ut})], \quad (2.31)$$

$$\zeta_2(u, s, t) = \frac{e^{-t \frac{\pi}{2}} e^{-i \frac{s\pi}{4}}}{\Gamma\left(\frac{1+it}{2}\right)} H_s^{(2)}(\sqrt{2ut}). \quad (2.32)$$

Здесь $H_s^{(1)}$ и $H_s^{(2)}$ — первая и вторая функции Ханкеля.

Значения функций $\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{1+it}{2}\right)$ можно заменить их асимптотическими выражениями.

В задачах с аксиальной симметрией и в тех, которые к ним сводятся, особую роль играют функции с параметром s , равным нулю. Мы будем писать для краткости $\xi(u, t)$ вместо $\xi(u, 0, t)$, а также $\zeta_1(u, t)$ вместо $\zeta_1(u, 0, t)$ и аналогично для других функций.

3. Параболические функции с целым значком

Решение задач диффракции, связанных с параболоидом вращения, для одних целей удобнее представлять в виде интегралов, а для других целей — в виде рядов. В интегралы входят функции ξ , ζ_1 , ζ_2 , исследованные в предыдущем параграфе. Ряды же расположены по функциям с целыми значками, для которых удобно иметь особые обозначения, хотя они и выражаются через предыдущие.

Положим

$$\xi_{ns}(u) = \xi[u, s, -i(2n + s + 1)] = \\ = \frac{\zeta_1[u, s, -i(2n + s + 1)]}{\Gamma(n + s + 1)}, \quad (3.01)$$

$$\eta_{ns}(u) = (-1)^n n! \zeta_2[u, s, -i(2n + s + 1)]. \quad (3.02)$$

Обе функции, ξ_{ns} и η_{ns} , представляют решения дифференциального уравнения

$$u \frac{d^2 \xi_{ns}}{du^2} + \frac{d \xi_{ns}}{du} + \left(\frac{u}{4} - \frac{s^2}{4u}\right) \xi_{ns} = \\ = i \left(n + \frac{s+1}{2}\right) \xi_{ns}, \quad (3.03)$$

причем $\xi_{ns}(u)$ есть регулярное решение, а $\eta_{ns}(u)$ имеет при $u = 0$ особенность. Функции $\xi_{ns}(u)$ и $\eta_{ns}(u)$ удовлетворяют одинаковым рекуррентным соотношениям, которые получаются из (2.19) — (2.22). Имеем:

$$2u \frac{\partial \xi_{ns}}{\partial u} + \xi_{ns} = (n + s + 1) \xi_{n+1, s} - n \xi_{n-1, s}, \quad (3.04)$$

$$(2n + s + 1 + iu) \xi_{ns} = (n + s + 1) \xi_{n+1, s} + n \xi_{n-1, s}. \quad (3.05)$$

Далее

$$\xi_{ns} - \xi_{n-1, s} = i \sqrt{u} \xi_{n-1, s+1}, \quad (3.06)$$

$$(n + s) \xi_{ns} - n \xi_{n-1, s} = \sqrt{u} \xi_{n, s-1}. \quad (3.07)$$

Комбинируя предыдущие соотношения, получаем также

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{i}{2} \right) u^{-\frac{s}{2}} \xi_{ns}(u) = i(n + s + 1) u^{-\frac{s+1}{2}} \xi_{n, s+1}(u), \quad (3.08)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{i}{2} \right) u^{-\frac{s}{2}} \xi_{ns}(u) = i n u^{-\frac{s+1}{2}} \xi_{n-1, s+1}(u). \quad (3.09)$$

Общие выражения для функций $\xi_{ns}(u)$ и $\eta_{ns}(u)$ имеют вид

$$\xi_{ns}(u) = e^{i \frac{u}{2}} \frac{u^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(s+1)} F(-n, s+1, -iu), \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \eta_{ns}(u) = & -e^{i \frac{s\pi}{2}} \frac{n!}{\Gamma(n+s+1)} e^{-i \frac{u}{2}} u^{-\frac{s}{2}} \times \\ & \times \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n+s} (x+iu)^{-n-1} dx, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где F есть ряд (2.10), который в данном случае приводится к полиному степени n .

Когда s есть целое число, функции ξ_{ns} и η_{ns} могут быть выражены при помощи (3.06) через ξ_{n0} и η_{n0} . Последние выражаются через полиномы Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (3.12)$$

и через интегральные синус и косинус.

Полагая для краткости

$$\xi_{n0}(u) = \xi_n(u), \quad \eta_{n0}(u) = \eta_n(u), \quad (3.13)$$

имеем

$$\xi_n(u) = \frac{1}{n!} e^{i \frac{u}{2}} L_n(-iu), \quad (3.14)$$

$$\eta_n(u) = -\frac{1}{n!} e^{-i \frac{u}{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{L_n(x) dx}{x + iu}. \quad (3.15)$$

Формула (3.15) получается из (3.11) путем n -кратного интегрирования по частям и использования соотношения (3.12). Формула для $\eta_n(u)$ может быть написана в виде

$$\begin{aligned} \eta_n(u) = & -\frac{1}{n!} e^{-i \frac{u}{2}} L_n(-iu) \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x + iu} - \\ & - \frac{1}{n!} e^{-i \frac{u}{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{L_n(x) - L_n(-iu)}{x + iu} dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь интеграл в первом члене выражается через интегральные синус и косинус

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x + iu} &= e^{iu} \int_u^{\infty} e^{-iu'} \frac{du'}{u'} = \\ &= e^{iu} \left(-\text{Ci}(u) + i \text{Si}(u) - i \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

интеграл же во втором члене представляет полином от u .

Первые из функций $\xi_n(u)$, $\eta_n(u)$ равны

$$\left. \begin{aligned} \xi_0(u) &= e^{i \frac{u}{2}}, \\ \xi_1(u) &= e^{i \frac{u}{2}} (1 + iu), \\ \xi_2(u) &= e^{i \frac{u}{2}} \left(1 + 2iu - \frac{1}{2} u^2 \right), \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_0(u) &= e^{i \frac{u}{2}} \left[\text{Ci}(u) - i \text{Si}(u) + i \frac{\pi}{2} \right], \\ \eta_1(u) &= (1 + iu) \eta_0(u) + e^{-i \frac{u}{2}}, \\ \eta_2(u) &= \left(1 + 2iu - \frac{1}{2} u^2 \right) \eta_0(u) + e^{-i \frac{u}{2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{iu}{2} \right), \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \right\} (3.19)$$

остальные же выражаются через них при помощи рекуррентных соотношений (3.05), которые в данном случае принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (2n + 1 + iu) \xi_n(u) &= n \xi_{n-1}(u) + (n + 1) \xi_{n+1}(u), \\ (2n + 1 + iu) \eta_n(u) &= n \eta_{n-1}(u) + (n + 1) \eta_{n+1}(u). \end{aligned} \right\} (3.20)$$

Асимптотические выражения для функций $\xi_n(u)$, $\eta_n(u)$ при больших значениях n получаются из общих формул (2.25)—(2.28). Мы имеем:

$$\xi_n(u) = J_0 \left[(1 - i) \sqrt{(2n + 1)u} \right], \quad (3.21)$$

$$\eta_n(u) = i\pi H_0^{(2)} \left[(1 - i) \sqrt{(2n + 1)u} \right]. \quad (3.22)$$

Отсюда видно, что функции $\xi_n(u)$ по модулю возрастают, а функции $\eta_n(u)$ убывают с возрастанием n .

4. Разложение точечной особенности по параболическим функциям

При решении задачи о диполе в фокусе параболоида вращения необходимо уметь разлагать по параболическим функциям выражение

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{kR} = \frac{2}{u + v} e^{i \frac{u+v}{2}}. \quad (4.01)$$

Так как это выражение не зависит от φ , то ясно, что в его разложение войдут только функции с параметром $s = 0$. Далее, имея в виду показательный множитель в (4.01), естественно искать разложение в виде

$$\frac{2}{u + v} e^{i \frac{u+v}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \zeta_1(u, t) \zeta_1(v, -t) dt, \quad (4.02)$$

где $f(t)$ — функция, подлежащая определению.

Рассмотрим следующие представления функций $\zeta_1(u, t)$ и $\zeta_2(v, -t)$ [они вытекают из (2.11) и (2.12)]:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{2}(t+i)} \Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right) e^{-\frac{iu}{2}} \zeta_1(u, t) = \\ = \int_0^{\infty} e^{iup} p^{-\frac{1}{2}-\frac{it}{2}} (1+p)^{-\frac{1}{2}+\frac{it}{2}} dp, \end{aligned} \quad (4.03)$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{2}(-t+i)} \Gamma\left(\frac{1+it}{2}\right) e^{-i\frac{v}{2}} \zeta_1(v, -t) = \\ = \int_0^{\infty} e^{ivq} q^{-\frac{1}{2}+\frac{it}{2}} (1+q)^{-\frac{1}{2}-\frac{it}{2}} dq. \end{aligned} \quad (4.04)$$

Умножим эти выражения друг на друга и проинтегрируем произведение по t от $-\infty$ до $+\infty$. Мы получим интеграл

$$\begin{aligned} I = - \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+it}{2}\right) e^{-t\frac{u+v}{2}} \zeta_1(u, t) \zeta_1(v, -t) dt = \\ = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{i(u\rho+vq)} f(\rho, q) d\rho dq, \end{aligned} \quad (4.05)$$

где

$$f(\rho, q) = \frac{1}{\sqrt{\rho q (1+\rho)(1+q)}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\frac{1+\rho}{1+q} \frac{q}{\rho}\right)^{i\frac{t}{2}}. \quad (4.06)$$

Введем несобственную функцию Дирака

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dt. \quad (4.07)$$

Как известно, для монотонного $\varphi(\rho)$ она обладает свойством

$$\delta[\varphi(\rho) - \varphi(q)] = \frac{1}{\sqrt{|\varphi'(\rho)\varphi'(q)|}} \delta(\rho - q), \quad (4.08)$$

поэтому выражение (4.06) можно истолковать как

$$f(\rho, q) = 4\pi\delta(\rho - q). \quad (4.09)$$

Подставляя это значение $f(p, q)$ в (4.05), получим интеграл, который можно условно понимать как

$$I = 4\pi \int_0^{\infty} e^{i(u+v)p} dp = \frac{4\pi i}{u+v} + 4\pi^2 \delta(u+v), \quad (4.10)$$

причем, так как $u+v > 0$, член $\delta(u+v)$ можно отбросить.

Приравнявая (4.05) и (4.10) и пользуясь равенством

$$\Gamma\left(\frac{1+it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}}, \quad (4.11)$$

мы можем записать наш результат в виде

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \zeta_1(u, t) \zeta_1(v, -t) = \frac{2}{u+v} e^{i \frac{u+v}{2}}. \quad (4.12)$$

Этот результат, выведенный нами нестрогим путем, можно доказать и вполне строго. Для этого можно, например, рассуждать следующим образом. Рассмотрим вытекающее из (2.25) тождество

$$i(u+v) \zeta_1(u, t) \zeta_1(v, -t) = F(t) + F(t+2i), \quad (4.13)$$

где для краткости положено

$$F(t) = \zeta_1(u, t-2i) \zeta_1(v, -t) + \frac{1}{4} (1+it)^2 \zeta_1(u, t) \zeta_1(v, -t+2i). \quad (4.14)$$

Пользуясь тем, что

$$\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2} = -\operatorname{ch} \frac{\pi(t+2i)}{2}, \quad (4.15)$$

можно написать

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i(u+v)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \zeta_1(u, t) \zeta_1(v, -t) dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t+2i)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}(t+2i)} dt = 4F(i), \end{aligned} \quad (4.16)$$

ибо разность интегралов равна вычету в точке $t = i$. Но согласно (3.01) и (3.18) мы имеем:

$$F(i) = \zeta_1(u, -i) \zeta_1(v, -i) = \xi_0(u) \xi_0(v) = e^{i \frac{u+v}{2}}. \quad (4.17)$$

Подставляя это выражение в (4.16), вновь получаем равенство (4.12):

$$\frac{2}{u+v} e^{i \frac{u+v}{2}} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \zeta_1(u, t) \zeta_1(v, -t).$$

В интегральном представлении (4.12) разложение ведется по функциям, которые обращаются в бесконечность на оси параболоида; тем не менее весь интеграл остается там конечным.

От интегрального представления точечной особенности нетрудно перейти к представлению в виде рядов. Для этого достаточно вычислить интеграл как сумму вычетов в точках $t = -(2n+1)i$ или же в точках $t = (2n+1)i$. В первом случае мы получаем ряд

$$\frac{2}{u+v} e^{i \frac{u+v}{2}} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(u) \bar{\eta}_n(v), \quad (4.18)$$

и во втором случае

$$\frac{2}{u+v} e^{i \frac{u+v}{2}} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\eta}_n(u) \xi_n(v). \quad (4.19)$$

Области сходимости этих рядов легко установить при помощи асимптотических выражений (3.21) и (3.22). Ряд (4.18) сходится при $u < v$, а ряд (4.19) — при $u > v$.

5. Разложение плоской волны

Рассмотрим скалярную плоскую волну

$$e^{i\Omega} = e^{ik(x \sin \delta + z \cos \delta)} \quad (5.01)$$

и разложим ее по найденным в параграфе 2 частным решениям волнового уравнения. Выражая прямоугольные координаты по формулам (1.06) через параболические координаты, имеем

$$\Omega = \frac{1}{2}(u-v) \cos \delta + \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi. \quad (5.02)$$

Разлагая выражение (5.01) по косинусам дуг, кратных φ , получим

$$e^{i\Omega} = e^{\frac{i}{2}(u-v) \cos \delta} \left[J_0(\sqrt{uv} \sin \delta) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} i^s J_s(\sqrt{uv} \sin \delta) \cos s\varphi \right], \quad (5.03)$$

где J_s — функции Бесселя. Отдельный член этого выражения мы должны разложить по функциям вида (2.04). Положим

$$C_s = e^{\frac{i}{2}(u-v) \cos \delta} J_s(\sqrt{uv} \sin \delta), \quad (5.04)$$

мы должны иметь равенство вида

$$C_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u, s, t) \psi(v, s, -t) f(t) dt \quad (5.05)$$

(функции ξ сюда не входят, так как выражение (5.04) остается конечным при $u = 0$ и при $v = 0$). Выражения (5.04) и (5.05) должны быть равны при всех v , в том числе при $v \rightarrow 0$. Умножая обе части этих выражений на $\Gamma(s+1) v^{-\frac{s}{2}}$ и переходя к пределу $v \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} \Gamma(s+1) v^{-\frac{s}{2}} C_s &= e^{\frac{i}{2} u \cos \delta} u^{\frac{s}{2}} \left(\frac{\sin \delta}{2} \right)^s = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{s+1-it}{2}\right) \psi(u, s, t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (5.06)$$

Чтобы определить отсюда $f(t)$, можно воспользоваться формулой (2.23) и подставить в (5.06) интегральное выражение (2.07) для $\xi(u, s, t)$. Сокращая на множитель $u^{\frac{s}{2}} e^{-i\frac{u}{2}}$, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin \delta}{2} \right)^s e^{\frac{i}{2} u (1+\cos \delta)} &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_0^1 e^{iuz} z^{\frac{s-1+it}{2}} (1-z)^{\frac{s-1-it}{2}} dz. \end{aligned} \quad (5.07)$$

Этому уравнению мы удовлетворим, если выберем $f(t)$ так, чтобы

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) z^{\frac{s-1+it}{2}} (1-z)^{\frac{s-1-it}{2}} dt &= \\ &= \left(\frac{\sin \delta}{2} \right)^s \delta_1 \left(z - \frac{1+\cos \delta}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.08)$$

где мы обозначили через δ_1 (чтобы избежать смешения с углом δ) несобственную функцию Дирака.

Рассуждая как в параграфе 4, нетрудно убедиться, что уравнение (5.08) будет удовлетворено, если мы положим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \sin \delta} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{it}. \quad (5.09)$$

Подставляя это значение $f(t)$ в (5.06), получим

$$e^{i \frac{u}{2} \cos \delta} u^{\frac{s}{2}} \left(\frac{\sin \delta}{2} \right)^s = \frac{1}{2\pi \sin \delta} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma \left(\frac{s+1-it}{2} \right) \psi(u, s, t) \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{it} dt. \quad (5.10)$$

Подставляя же это выражение в (5.05), получаем более общее равенство

$$e^{\frac{i}{2}(u-v) \cos \delta} J_s(\sqrt{uv} \sin \delta) = \\ = \frac{1}{2\pi \sin \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u, s, t) \psi(v, s, -t) \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{it} dt. \quad (5.11)$$

Приведенный здесь вывод этого равенства был не вполне строгим, так как мы пользовались функцией Дирака. Результат можно, однако, проверить непосредственным вычислением. Для этого достаточно подставить в (5.11) выражение для ψ через ряды (2.08) и интегрировать почленно, применяя формулу

$$\frac{1}{2\pi \sin \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma \left(\frac{s+1+it}{2} + k \right) \Gamma \left(\frac{s+1-it}{2} + l \right) \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{it} dt = \\ = \Gamma(s+1+k+l) \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^{s+2l} \left(\cos \frac{\delta}{2} \right)^{s+2k}. \quad (5.12)$$

Получающийся двойной ряд может быть преобразован к виду, совпадающему с левой частью (5.11).

Заметим, что формула (5.11) верна не только для целых отрицательных s , но и для всех значений s , для которых вещественная часть $s+1$ положительна. Если же $\operatorname{Re}(s+1) < 0$, то формула (5.11) будет по-прежнему верна, если только выбрать в ней такой путь интегрирования, чтобы с ним имела место формула (5.12).

Наш окончательный результат — разложение плоской волны по параболическим функциям — мы можем записать в виде

$$\begin{aligned}
 e^{i\Omega} &= e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta + i\sqrt{uv}\sin\delta\cos\varphi} = \\
 &= \frac{1}{2\pi\sin\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\psi(u, 0, t)\psi(v, 0, -t) + \right. \\
 &\left. + 2 \sum_{s=1}^{\infty} i^s \psi(u, s, t)\psi(v, s, -t) \cos s\varphi \right] \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{it} dt. \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

6. Уравнения Максвелла и потенциалы в параболических координатах

Переходим теперь от скалярного волнового уравнения к уравнениям Максвелла. Зависимость всех составляющих поля от времени предполагаем в виде $e^{-i\omega t}$, где $\omega = ck$, и в дальнейшем этот множитель не выписываем.

Для ковариантных составляющих поля [см. (1.09)] уравнения Максвелла в параболических координатах напишутся:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial E_\varphi}{\partial v} - \frac{\partial E_v}{\partial \varphi} &= iuH_u, \\
 \frac{\partial E_u}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial u} &= ivH_v, \\
 \frac{\partial E_v}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial v} &= i \frac{u+v}{4uv} H_\varphi,
 \end{aligned} \right\} \quad (6.01)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial H_\varphi}{\partial v} - \frac{\partial H_v}{\partial \varphi} &= -iuE_u, \\
 \frac{\partial H_u}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial u} &= -ivE_v, \\
 \frac{\partial H_v}{\partial u} - \frac{\partial H_u}{\partial v} &= -i \frac{u+v}{4uv} E_\varphi.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.02)$$

Простота решения задачи с предельными условиями на поверхности той или иной формы в очень большой мере зависит от удачного выбора потенциалов или вспомогательных функций, через которые выражается поле. Для прямоугольных координат и

плоской поверхности (плоскости xy) удобнее всего выражать поле через связанные с вектором Герца потенциалы Φ и Ψ по формулам

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - ik \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & H_x &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - ik \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ E_y &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} + ik \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & H_y &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + ik \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ E_z &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi, & H_z &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} (6.03)$$

Для сферических координат R, θ, φ наиболее удобными являются потенциалы Дебая U, V , через которые поле выражается по формулам

$$\left. \begin{aligned} E_R &= k^2 R U + \frac{\partial^2 (R U)}{\partial R^2}, \\ E_\theta &= \frac{\partial^2 (R U)}{\partial R \partial \theta} + \frac{k}{\sin \theta} \frac{\partial (R V)}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{\partial^2 (R U)}{\partial R \partial \varphi} - k \sin \theta \frac{\partial (R V)}{\partial \theta}, \\ i H_R &= k^2 R V + \frac{\partial^2 (R V)}{\partial R^2}, \\ i H_\theta &= \frac{\partial^2 (R V)}{\partial R \partial \theta} + \frac{k}{\sin \theta} \frac{\partial (R U)}{\partial \varphi}, \\ i H_\varphi &= \frac{\partial^2 (R V)}{\partial R \partial \varphi} - k \sin \theta \frac{\partial (R U)}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} (6.04)$$

Как потенциалы Φ, Ψ , так и потенциалы U, V должны удовлетворять скалярному уравнению колебаний (2.02).

Что касается параболических координат, то для них удобнее всего ввести потенциалы, связанные не со всем полем, а с его компонентами Фурье по углу φ .

Выразим сперва параболические компоненты поля через потенциалы Дебая. Переходя от сферических компонент поля (6.04) к параболическим, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{1}{4} (u + v) U + \frac{\partial}{\partial u} (M U) - \frac{u + v}{4u} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ E_v &= \frac{1}{4} (u + v) U + \frac{\partial}{\partial v} (M U) + \frac{u + v}{4v} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (M U) + uv \left(\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial v} \right), \end{aligned} \right\} (6.05)$$

где мы положили для краткости

$$M U = u \frac{\partial U}{\partial u} + v \frac{\partial U}{\partial v} + U. \quad (6.06)$$

Величины iH_u , iH_v , iH_Φ получатся из (6.05) перестановкой букв U и V .

Разложим потенциалы Дебая в ряды Фурье вида

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} U^0 + \sum_{s=1}^{\infty} U^{(s)} \cos s\varphi, \\ V &= \sum_{s=1}^{\infty} V^{(s)} \sin s\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.07)$$

Легко видеть, что тогда ряды для E_u , E_v , H_Φ будут расположены по косинусам, а ряды для H_u , H_v , E_Φ — по синусам. Мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{1}{2} E_u^0 + \sum_{s=1}^{\infty} E_u^{(s)} \cos s\varphi; \quad E_v = \dots; \quad H_\Phi = \dots, \\ H_u &= \sum_{s=1}^{\infty} H_u^{(s)} \sin s\varphi; \quad H_v = \dots; \quad E_\Phi = \dots, \end{aligned} \right\} \quad (6.08)$$

где в первой строке многоточия обозначают ряды по косинусам, а во второй строке — ряды по синусам.

Коэффициенты рядов (6.08) выражаются через $U^{(s)}$, $V^{(s)}$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} E_u^{(s)} &= \frac{1}{4} (u + v) U^{(s)} + \frac{\partial}{\partial u} (M U^{(s)}) - \frac{u + v}{4u} s V^{(s)}, \\ E_v^{(s)} &= \frac{1}{4} (u + v) U^{(s)} + \frac{\partial}{\partial v} (M U^{(s)}) + \frac{u + v}{4v} s V^{(s)}, \\ E_\Phi^{(s)} &= -s M U^{(s)} + uv \left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial u} - \frac{\partial V^{(s)}}{\partial v} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.09)$$

$$\left. \begin{aligned} iH_u^{(s)} &= \frac{1}{4} (u + v) V^{(s)} + \frac{\partial}{\partial u} (M V^{(s)}) + \frac{u + v}{4u} s U^{(s)}, \\ iH_v^{(s)} &= \frac{1}{4} (u + v) V^{(s)} + \frac{\partial}{\partial v} (M V^{(s)}) - \frac{u + v}{4v} s U^{(s)}, \\ iH_\Phi^{(s)} &= s M V^{(s)} + uv \left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial u} - \frac{\partial U^{(s)}}{\partial v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Так как функции U , V удовлетворяют скалярному уравнению колебаний, то их компоненты Фурье будут удовлетворять уравнениям вида

$$\left(L_u + L_v - \frac{s^2}{4u} - \frac{s^2}{4v} \right) U^{(s)} = 0, \quad (6.11)$$

где через L_u , L_v обозначены операторы

$$\left. \begin{aligned} L_u &= u \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{4} u, \\ L_v &= v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{4} v. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Введем по формулам

$$U^{(s)} = (V\bar{uv})^s P_s^0; \quad V^{(s)} = (V\bar{uv})^s Q_s^0 \quad (6.13)$$

величины P_s^0 , Q_s^0 . Эти величины должны удовлетворять уравнениям вида

$$\left(L_u + L_v + s \frac{\partial}{\partial u} + s \frac{\partial}{\partial v} \right) P_s^0 = 0. \quad (6.14)$$

Наконец, положим

$$\left. \begin{aligned} P_s^0 &= \frac{1}{u+v} \left(\frac{\partial P_{s-1}}{\partial u} + \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} \right), \\ Q_s^0 &= \frac{1}{u+v} \left(\frac{\partial Q_{s-1}}{\partial u} + \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Нетрудно проверить, что если P_{s-1} , Q_{s-1} удовлетворяют уравнениям вида

$$\left[L_u + L_v + (s-1) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] P_{s-1} = 0, \quad (6.16)$$

то величины P_s^0 , Q_s^0 будут удовлетворять уравнениям (6.14). Другими словами, величины P_s , Q_s удовлетворяют тем же уравнениям, как P_s^0 , Q_s^0 .

Выразив потенциалы Дебая и поле через величины P_{s-1} , Q_{s-1} , имеем:

$$U^{(s)} = \frac{(V\bar{uv})^s}{u+v} \left(\frac{\partial P_{s-1}}{\partial u} + \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} \right), \quad (6.17)$$

$$V^{(s)} = \frac{(V\bar{uv})^s}{u+v} \left(\frac{\partial Q_{s-1}}{\partial u} + \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} \right). \quad (6.18)$$

Вычисляя величину $MU^{(s)}$ и пользуясь (6.16), получаем

$$MU^{(s)} = (V\bar{uv})^s \left(\frac{\partial^2 P_{s-1}}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4} P_{s-1} \right). \quad (6.19)$$

Подставляя эти выражения в (6.09), будем иметь для электрического поля

$$\left. \begin{aligned} 2uE_u^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left[2 \frac{\partial}{\partial v} P_{s-1}^* - s \frac{\partial^2 P_{s-1}}{\partial u \partial v} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s}{4} P_{s-1} - \frac{s}{2} \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial u} - \frac{s}{2} \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} \right], \\ 2vE_v^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left[-2 \frac{\partial}{\partial u} P_{s-1}^* - s \frac{\partial^2 P_{s-1}}{\partial u \partial v} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s}{4} P_{s-1} + \frac{s}{2} \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial u} + \frac{s}{2} \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} \right], \\ E_\Phi^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left[Q_{s-1}^* - \frac{s}{2} \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial u} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s}{2} \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} - s \frac{\partial^2 P_{s-1}}{\partial u \partial v} + \frac{s}{4} P_{s-1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Для магнитного поля получаются аналогичные выражения:

$$\left. \begin{aligned} 2iuH_u^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left[2 \frac{\partial}{\partial v} Q_{s-1}^* - s \frac{\partial^2 Q_{s-1}}{\partial u \partial v} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s}{4} Q_{s-1} + \frac{s}{2} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial u} + \frac{s}{2} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} \right], \\ 2ivH_v^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left[-2 \frac{\partial}{\partial u} Q_{s-1}^* - s \frac{\partial^2 Q_{s-1}}{\partial u \partial v} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s}{4} Q_{s-1} - \frac{s}{2} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial u} - \frac{s}{2} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} \right], \\ iH_\Phi^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left[P_{s-1}^* - \frac{s}{2} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial u} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s}{2} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} + s \frac{\partial^2 Q_{s-1}}{\partial u \partial v} - \frac{s}{4} Q_{s-1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

В этих формулах мы ввели для краткости обозначения P_{s-1}^* , Q_{s-1}^* , где

$$\begin{aligned} P_{s-1}^* &= u \frac{\partial^2 P_{s-1}}{\partial u^2} + s \frac{\partial P_{s-1}}{\partial u} + \frac{1}{4} u P_{s-1} = \\ &= -v \frac{\partial^2 P_{s-1}}{\partial v^2} - s \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} - \frac{1}{4} v P_{s-1}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

а величина Q_{s-1}^* связана с Q_{s-1} так же, как P_{s-1}^* с P_{s-1} . Заметим, что величины P_{s-1}^* , Q_{s-1}^* удовлетворяют тем же уравнениям вида (6.16), как P_{s-1} и Q_{s-1} . Если же P_{s-1} и Q_{s-1} имеют вид произведения функции от u на функцию от v , то P_{s-1}^* будет просто пропорционально P_{s-1} , а Q_{s-1}^* пропорционально Q_{s-1} .

Преобразованные выражения (6.20) и (6.21) имеют перед первоначальными выражениями (6.09), (6.10) то преимущество, что допускают простую формулировку предельных условий на поверхности параболоида $v = \text{const}$.

Действительно, если мы положим

$$2 \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} + Q_{s-1} = A, \quad (6.23)$$

$$4Q_{s-1}^* + 2s \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} + sP_{s-1} = B, \quad (6.24)$$

то касательные составляющие электрического поля и нормальная составляющая магнитного поля будут равны

$$\left. \begin{aligned} 2uE_u^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left(u \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{1}{4} uA + \frac{s}{2} \frac{\partial A}{\partial u} - \frac{1}{4} B \right), \\ E_\varphi^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left(\frac{1}{4} B - \frac{s}{2} \frac{\partial A}{\partial u} \right), \\ 2ivH_v^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left(-\frac{s}{4} A - \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial u} \right). \end{aligned} \right\} (6.25)$$

Эти выражения должны обращаться в нуль на поверхности абсолютно проводящего параболоида. Для этого достаточно потребовать, чтобы при $v = v_0$ и всяком u было $A = 0$, $B = 0$, или, подробнее,

$$2 \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} + Q_{s-1} = 0, \quad (6.26)$$

$$4Q_{s-1}^* + 2s \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} + sP_{s-1} = 0. \quad (6.27)$$

Весьма существенно, что левые части предельных условий (6.26) и (6.27) получаются из функций P_{s-1} , Q_{s-1} путем операций, которые не содержат ни умножений на переменную u , ни дифференцирований по этой переменной*. Поэтому если мы будем разлагать P_{s-1} , Q_{s-1} по каким-нибудь функциям от u , то левые части предельных условий будут представлять разложения по тем же функциям, и чтобы приравнять их нулю, достаточно приравнять нулю коэффициенты разложений.

* Напомним, что согласно (6.22) величина Q_{s-1}^* может быть получена из Q_{s-1} по формуле

$$Q_{s-1}^* = -v \frac{\partial^2 Q_{s-1}}{\partial v^2} - s \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} - \frac{1}{4} v Q_{s-1}.$$

Если бы мы вместо выражений (6.20), (6.21) пользовались выражениями (6.09), (6.10) и искали коэффициенты разложений для функций $U^{(s)}$, $V^{(s)}$, то получили бы для этих коэффициентов разложений не алгебраические линейные уравнения, а линейные уравнения в конечных разностях, что чрезвычайно усложнило бы задачу. Еще большее усложнение задачи получилось бы при пользовании потенциалами Φ , Ψ , входящими в формулы (6.03).

Таким образом, введение потенциалов P_s , Q_s позволяет нам избежать уравнений в конечных разностях и всего сложного аппарата, необходимого для их решения.

7. Преобразование выражений для поля

Некоторое неудобство потенциалов P_s , Q_s состоит в том, что выражения (6.20), (6.21) для поля через эти потенциалы имеют сложный вид. Это неудобство можно устранить, если рассмотреть наряду с потенциалами P_{s-1} , Q_{s-1} четыре вспомогательные функции C_{s-1} , D_{s-1} , F_s , G_s , через которые поле выражается проще. Эти функции обладают простыми свойствами и связаны с потенциалами простыми соотношениями.

Положим

$$C_{s-1} = P_{s-1}^* - \frac{s}{2} Q_{s-1}, \quad (7.01)$$

$$D_{s-1} = Q_{s-1}^* + \frac{s}{2} P_{s-1}, \quad (7.02)$$

$$F_s = \frac{\partial^2 P_{s-1}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4} P_{s-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v}, \quad (7.03)$$

$$G_s = \frac{\partial^2 Q_{s-1}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4} Q_{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v}. \quad (7.04)$$

Выражения (6.20) и (6.21) для поля переписутся теперь следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} 2uE_u^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left(2 \frac{\partial C_{s-1}}{\partial v} - sF_s \right), \\ 2vE_v^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left(-2 \frac{\partial C_{s-1}}{\partial u} - sF_s \right), \\ E_\Phi^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s (D_{s-1} - sF_s), \end{aligned} \right\} \quad (7.05)$$

$$\left. \begin{aligned} 2iuH_u^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left(2 \frac{\partial D_{s-1}}{\partial v} - sG_s \right), \\ 2ivH_v^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s \left(-2 \frac{\partial D_{s-1}}{\partial u} - sG_s \right), \\ iH_\Phi^{(s)} &= (\sqrt{uv})^s (C_{s-1} + sG_s). \end{aligned} \right\} \quad (7.06)$$

Функции C_s, D_s, F_s, G_s удовлетворяют тому же уравнению, как P_s, Q_s , а именно:

$$\begin{aligned} & \left(u \frac{\partial^2}{\partial u^2} + (s+1) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{4} u \right) F_s = \\ & = - \left(v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + (s+1) \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{4} v \right) F_s. \end{aligned} \quad (7.07)$$

Само собой разумеется, что функции C_{s-1}, D_{s-1} удовлетворяют уравнению вида (7.07), в котором s заменено на $s-1$. Соотношения между функциями $C_{s-1}, D_{s-1}, P_{s-1}, Q_{s-1}$ могут быть записаны в виде равенств

$$\begin{aligned} C_{s-1} + iD_{s-1} &= \left(u \frac{\partial}{\partial u} + s - \frac{iu}{2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{i}{2} \right) (P_{s-1} + iQ_{s-1}) = \\ &= - \left(v \frac{\partial}{\partial v} + s + \frac{iv}{2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{i}{2} \right) (P_{s-1} + iQ_{s-1}) \end{aligned} \quad (7.08)$$

и в виде аналогичных равенств, получаемых из (7.08) заменой i на $-i$ (как если бы величины P, Q, C, D были вещественны). С другой стороны, из формул (7.03), (7.04) следует

$$F_s + iG_s = \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{i}{2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{i}{2} \right) (P_{s-1} + iQ_{s-1}) \quad (7.09)$$

и аналогичное равенство, получаемое из (7.09) заменой i на $-i$. Из сравнения (7.08) и (7.09) вытекают два соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + s - \frac{iu}{2} \right) (F_s + iG_s) &= \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{i}{2} \right) (C_{s-1} + iD_{s-1}), \\ \left(v \frac{\partial}{\partial v} + s + \frac{iv}{2} \right) (F_s + iG_s) &= - \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{i}{2} \right) (C_{s-1} + iD_{s-1}) \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

и два других соотношения, получаемых из (7.10) заменой i на $-i$. Разделяя в них (формально) вещественную и мнимую части, получим

$$\left(u \frac{\partial}{\partial u} + s \right) F_s + \frac{u}{2} G_s = \frac{\partial}{\partial v} C_{s-1} + \frac{1}{2} D_{s-1}, \quad (7.11)$$

$$\left(u \frac{\partial}{\partial u} + s \right) G_s - \frac{u}{2} F_s = \frac{\partial}{\partial v} D_{s-1} - \frac{1}{2} C_{s-1}, \quad (7.12)$$

$$\left(v \frac{\partial}{\partial v} + s \right) F_s - \frac{v}{2} G_s = - \frac{\partial}{\partial u} C_{s-1} + \frac{1}{2} D_{s-1}, \quad (7.13)$$

$$\left(v \frac{\partial}{\partial v} + s \right) G_s + \frac{v}{2} F_s = - \frac{\partial}{\partial u} D_{s-1} - \frac{1}{2} C_{s-1}. \quad (7.14)$$

Введенные нами вспомогательные функции позволяют выразить поле через обычные скалярный и векторный потенциалы, а также через соответствующие магнитные потенциалы. В самом деле, поле с параболическими составляющими

$$E_u = E_u^{(s)} \cos s\varphi; \quad E_v = E_v^{(s)} \cos s\varphi; \quad E_\varphi = E_\varphi^{(s)} \sin s\varphi, \quad (7.15)$$

$$H_u = H_u^{(s)} \sin s\varphi; \quad H_v = H_v^{(s)} \sin s\varphi; \quad H_\varphi = H_\varphi^{(s)} \cos s\varphi \quad (7.16)$$

может быть представлено как в виде

$$\mathbf{E} = iK\mathbf{A} - \text{grad } A_0; \quad \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A}, \quad (7.17)$$

где

$$\text{div } \mathbf{A} = ikA_0, \quad (7.18)$$

так и в виде

$$\mathbf{E} = \text{curl } \mathbf{B}; \quad \mathbf{H} = -ik\mathbf{B} + \text{grad } B_0, \quad (7.19)$$

где

$$\text{div } \mathbf{B} = ikB_0, \quad (7.20)$$

причем электрические потенциалы равны

$$\left. \begin{aligned} A_x &= iD_{s-1} (\sqrt{uv})^{s-1} \cos (s-1)\varphi, \\ A_y &= -iD_{s-1} (\sqrt{uv})^{s-1} \sin (s-1)\varphi, \\ A_z &= -iG_s (\sqrt{uv})^s \cos s\varphi, \\ A_0 &= -F_s (\sqrt{uv})^s \cos s\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

а магнитные потенциалы равны

$$\left. \begin{aligned} B_x &= C_{s-1} (\sqrt{uv})^{s-1} \sin (s-1)\varphi, \\ B_y &= C_{s-1} (\sqrt{uv})^{s-1} \cos (s-1)\varphi, \\ B_z &= -F_s (\sqrt{uv})^s \sin s\varphi, \\ B_0 &= -iG_s (\sqrt{uv})^s \sin s\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

8. Ряды для потенциалов и для вспомогательных функций

Если для потенциалов P_{s-1} , Q_{s-1} известны ряды, расположенные по параболическим функциям, то из них можно легко получить аналогичные ряды для величин C_{s-1} , D_{s-1} , F_s , G_s .

Положим для краткости

$$\chi_{ns}(u, v) = \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(n+1)} (uv)^{-\frac{s}{2}} \xi_{ns}(u) \bar{\xi}_{ns}(v). \quad (8.01)$$

Тогда, на основании дифференциального уравнения (3.03), имеем

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + s + 1 - \frac{i u}{2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{i}{2}\right) \chi_{ns} = \\ = i(n + s + 1) \chi_{ns}, \end{aligned} \quad (8.02)$$

$$\left(u \frac{\partial}{\partial u} + s + 1 + \frac{i u}{2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{i}{2}\right) \chi_{ns} = i n \chi_{ns} \quad (8.03)$$

и на основании соотношений (3.08), (3.09):

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{i}{2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{i}{2}\right) \chi_{ns} = (n + s + 1) \chi_{n, s+1}, \quad (8.04)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{i}{2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{i}{2}\right) \chi_{ns} = n \chi_{n-1, s+1}. \quad (8.05)$$

Тем же соотношениям будет удовлетворять функция χ_{ns} , если мы в ней одну или обе функции ξ_{ns} заменим на η_{ns} . В дальнейшем мы будем понимать под χ_{ns} одну из получаемых таким путем четырех функций.

Пусть $s \geq 1$ и пусть ряды для P_{s-1} и Q_{s-1} имеют вид:

$$P_{s-1} = \sum_n p_n \chi_{n, s-1}, \quad (8.06)$$

$$Q_{s-1} = \sum_n q_n \chi_{n, s-1}. \quad (8.07)$$

Применяя выписанные выше формулы, получаем:

$$C_{s-1} + iD_{s-1} = i \sum_n (n + s) (p_n + i q_n) \chi_{n, s-1}, \quad (8.08)$$

$$C_{s-1} - iD_{s-1} = i \sum_n n (p_n - i q_n) \chi_{n, s-1}, \quad (8.09)$$

а также

$$F_s + iG_s = \sum_n (n + s) (p_n + i q_n) \chi_{n, s}, \quad (8.10)$$

$$F_s - iG_s = \sum_n n (p_n - i q_n) \chi_{n-1, s}. \quad (8.11)$$

Заметим, что последняя формула имеет определенный смысл лишь при $p_0 = i q_0$, так как величина $n \chi_{n-1, s}$ определена только при $n \neq 0$.

Аналогичные формулы для вспомогательных функций получаются, если ряды для потенциалов P_s , Q_s расположены по функциям, комплексно-сопряженным с χ_{ns} . Пусть мы имеем:

$$P_{s-1} = \sum_n \rho_n \bar{\chi}_{n, s-1}, \quad (8.12)$$

$$Q_{s-1} = \sum_n q_n \bar{\chi}_{n, s-1}. \quad (8.13)$$

Тогда будет

$$C_{s-1} + iD_{s-1} = -i \sum_n n (\rho_n + iq_n) \bar{\chi}_{n, s-1}, \quad (8.14)$$

$$C_{s-1} - iD_{s-1} = -i \sum_n (n + s) (\rho_n - iq_n) \bar{\chi}_{n, s-1}, \quad (8.15)$$

а также

$$F_s + iG_s = \sum_n n (\rho_n + iq_n) \bar{\chi}_{n-1, s}, \quad (8.16)$$

$$F_s - iG_s = \sum_n (n + s) (\rho_n - iq_n) \bar{\chi}_{ns}. \quad (8.17)$$

В заключение выведем формулы для производных от рядов, расположенных по функциям χ_{ns} . Если r и z — цилиндрические координаты, то мы имеем:

$$\frac{1}{k} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2}{u + v} \left(u \frac{\partial F}{\partial u} - v \frac{\partial F}{\partial v} \right), \quad (8.18)$$

$$\frac{1}{k^2 r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{2}{u + v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right). \quad (8.19)$$

Если F есть ряд

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{ns}(u, v), \quad (8.20)$$

то, вообще говоря, правая часть (8.18) есть ряд того же вида:

$$\frac{2}{u + v} \left(u \frac{\partial F}{\partial u} - v \frac{\partial F}{\partial v} \right) = i \sum_{n=0}^{\infty} b_n \chi_{ns}(u, v), \quad (8.21)$$

а правая часть (8.19) есть ряд, расположенный по функциям $\chi_{n, s+1}$, который мы запишем в виде

$$\frac{2}{u + v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_{n, s+1}(u, v). \quad (8.22)$$

Оговорка «вообще говоря» необходима потому, что наше утверждение справедливо без ограничений только если χ_{ns} имеет вид (8.01), т. е. если эта величина составлена из функций ξ_{ns} . Если же в χ_{ns} входит одна или две функции η_{ns} , то формулы (8.21) и (8.22) справедливы лишь при условии $a_0 = 0$.

Чтобы найти связь между коэффициентами a_n и b_n , составим выражение $2 \left(u \frac{\partial F}{\partial u} - v \frac{\partial F}{\partial v} \right)$, где F есть ряд (8.20), и воспользуемся рекуррентной формулой (3.04); с другой стороны, умножим ряд (8.21) на $u + v$ и воспользуемся формулой (3.05). Приравнявая оба выражения для

$$2 \left(u \frac{\partial F}{\partial u} - v \frac{\partial F}{\partial v} \right),$$

получим

$$a_n + a_{n+1} = b_n - b_{n+1}. \quad (8.23)$$

Аналогично мы получим при помощи рекуррентных формул (3.08) и (3.09)

$$a_{n+1} = c_n - c_{n+1}. \quad (8.24)$$

Отсюда можно заключить, что

$$b_{n+1} = c_n + c_{n+1} + \text{const}. \quad (8.25)$$

Если χ_{ns} содержит только функции ξ_{ns} , то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ должен сходиться, и мы имеем тогда:

$$c_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k; \quad b_n = a_n + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \quad (8.26)$$

Аналогичные преобразования могут быть применены и к интегралам, но на них мы останавливаться не будем

ДИПОЛЬ В ФОКУСЕ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

9. Первичное поле от диполя

Рассмотрим излучающий диполь, расположенный в начале координат и имеющий момент, направленный по оси x (перпендикулярно оси вращения). Магнитное поле от диполя выражается по формулам

$$H_x^0 = 0; \quad H_y^0 = \frac{\partial A_x^0}{\partial z}; \quad H_z^0 = -\frac{\partial A_x^0}{\partial y} \quad (9.01)$$

через вектор-потенциал, имеющий только одну отличную от нуля составляющую

$$A_x^0 = A = \frac{iC}{2kR} e^{ikR} = \frac{iC}{u+v} e^{i \frac{u+v}{2}}, \quad (9.02)$$

где C — некоторая постоянная.

Ковариантные параболические составляющие магнитного поля определяются из формул

$$\left. \begin{aligned} 2uH_u^0 &= -2\sqrt{uv} \frac{\partial A}{\partial v} \sin \varphi, \\ 2vH_v^0 &= 2\sqrt{uv} \frac{\partial A}{\partial u} \sin \varphi, \\ H_\varphi^0 &= 2\sqrt{uv} \frac{1}{u+v} \left(u \frac{\partial A}{\partial u} - v \frac{\partial A}{\partial v} \right) \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (9.03)$$

а составляющие электрического поля получаются из них путем применения уравнений Максвелла (6.02). В дальнейшем нам понадобятся как точные, так и приближенные выражения для первичного поля, а потому мы выпишем их полностью.

Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2uE_u^0 &= C\sqrt{uv} e^{i \frac{u+v}{2}} \cos \varphi \left[\frac{u-v}{(u+v)^2} + 6i \frac{u-v}{(u+v)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4i}{(u+v)^2} - \frac{8}{(u+v)^3} - \frac{12(u-v)}{(u+v)^4} \right], \\ 2vE_v^0 &= C\sqrt{uv} e^{i \frac{u+v}{2}} \cos \varphi \left[-\frac{u-v}{(u+v)^2} - 6i \frac{u-v}{(u+v)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4i}{(u+v)^2} - \frac{8}{(u+v)^3} + \frac{12(u-v)}{(u+v)^4} \right], \\ E_\varphi^0 &= C\sqrt{uv} e^{i \frac{u+v}{2}} \sin \varphi \left[\frac{1}{u+v} + \frac{2i}{(u+v)^2} - \frac{4}{(u+v)^3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (9.04)$$

$$\left. \begin{aligned} 2uH_u^0 &= C\sqrt{uv} e^{i \frac{u+v}{2}} \sin \varphi \left[\frac{1}{u+v} + \frac{2i}{(u+v)^2} \right], \\ 2vH_v^0 &= C\sqrt{uv} e^{i \frac{u+v}{2}} \sin \varphi \left[-\frac{1}{u+v} - \frac{2i}{(u+v)^2} \right], \\ H_\varphi^0 &= C\sqrt{uv} e^{i \frac{u+v}{2}} \cos \varphi \left[-\frac{(u-v)}{(u+v)^2} - \frac{2i(u-v)}{(u+v)^3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.05)$$

Нам нужно выразить первичное поле от диполя (а также полное поле, включающее отраженную волну) через потенциалы P , Q .

Зависимость полного поля от угла φ будет та же, как для первичного поля. Поэтому, полагая в (6.20) и (6.21) $s = 1$ и опуская значки при P и Q , мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 2uE_u &= \sqrt{uv} \left[2 \frac{\partial P^*}{\partial v} - \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4} P - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} \right] \cos \varphi, \\ 2vE_v &= \sqrt{uv} \left[-2 \frac{\partial P^*}{\partial u} - \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4} P + \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} \right] \cos \varphi, \\ E_\varphi &= \sqrt{uv} \left[Q^* - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4} P \right] \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (9.06)$$

$$\left. \begin{aligned} 2iuH_u &= \sqrt{uv} \left[2 \frac{\partial Q^*}{\partial v} - \frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4} Q + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial v} \right] \sin \varphi, \\ 2ivH_v &= \sqrt{uv} \left[-2 \frac{\partial Q^*}{\partial u} - \frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4} Q - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial v} \right] \sin \varphi, \\ iH_\varphi &= \sqrt{uv} \left[P^* - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial v} - \frac{1}{4} Q \right] \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9.07)$$

Здесь P и Q — функции, не зависящие от φ и удовлетворяющие скалярному уравнению колебаний, которое может быть написано в виде

$$(L_u + L_v)P = 0; \quad L_u = u \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{4} u. \quad (9.08)$$

Согласно общим формулам (6.22) функции P^* , Q^* связаны с P , Q соотношениями

$$P^* = L_u P = -L_v P; \quad (9.09)$$

$$Q^* = L_u Q = -L_v Q. \quad (9.10)$$

Эти функции также удовлетворяют скалярному уравнению колебаний.

Формулы для поля упростятся, если мы введем вспомогательные функции (7.01)—(7.04). При этом мы будем писать

$$C_0 = S; \quad D_0 = T \quad (9.11)$$

и сохраним обозначения F_1 и G_1 . Таким образом, мы полагаем

$$S = P^* - \frac{1}{2} Q, \quad (9.12)$$

$$T = Q^* + \frac{1}{2} P, \quad (9.13)$$

$$F_1 = \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4} P + \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial v}, \quad (9.14)$$

$$G_1 = \frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4} Q - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial v}. \quad (9.15)$$

С этими обозначениями мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 2uE_u &= \sqrt{uv} \left(2 \frac{\partial S}{\partial v} - F_1 \right) \cos \varphi, \\ 2vE_v &= \sqrt{uv} \left(-2 \frac{\partial S}{\partial u} - F_1 \right) \cos \varphi, \\ E_\varphi &= \sqrt{uv} (T - F_1) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

$$\left. \begin{aligned} 2iuH_u &= \sqrt{uv} \left(2 \frac{\partial T}{\partial v} - G_1 \right) \sin \varphi, \\ 2ivH_v &= \sqrt{uv} \left(-2 \frac{\partial T}{\partial u} - G_1 \right) \sin \varphi, \\ iH_\varphi &= \sqrt{uv} (S + G_1) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Найдем те значения $P = P^0$, $Q = Q^0$, которые соответствуют полю свободного диполя (без отраженной волны). Из формул (9.05) следует, что

$$RH_R^0 = uH_u^0 + vH_v^0 = 0, \quad (9.18)$$

как и должно быть, ибо магнитное поле от диполя не имеет радиальной составляющей. Таким образом, для первичного поля сумма первых двух выражений (9.07) должна равняться нулю. Этому условию можно удовлетворить, положив $Q^0 = 0$. Что касается величины P^0 , то нетрудно проверить, что формулы (9.07) совпадут с (9.03) или с (9.05), если мы положим

$$P^0 = \frac{2C}{u+v} e^{i \frac{u+v}{2}} = CP, \quad (9.19)$$

где P — точечная особенность, рассмотренная в параграфе 4.

Соответствующие найденным значениям P^0 , Q^0 вспомогательные функции (9.12)—(9.15) равны

$$S^0 = Ce^{i \frac{u+v}{2}} \left(\frac{2(u-v)}{(u+v)^3} - \frac{i(u-v)}{(u+v)^2} \right), \quad (9.20)$$

$$T^0 = \frac{C}{u+v} e^{i \frac{u+v}{2}}, \quad (9.21)$$

$$F_1^0 = C e^{i \frac{u+v}{2}} \left(\frac{4}{(u+v)^3} - \frac{2i}{(u+v)^2} \right), \quad (9.22)$$

$$G_1^0 = 0. \quad (9.23)$$

Обычные электрические потенциалы, вычисленные по формулам (7.21), с учетом обозначений (9.11), оказываются равными

$$A_x^0 = \frac{iC}{u+v} e^{i \frac{u+v}{2}}; \quad A_y^0 = 0; \quad A_z^0 = 0, \quad (9.24)$$

$$A_0^0 = -C e^{i \frac{u+v}{2}} \left(\frac{4}{(u+v)^3} - \frac{2i}{(u+v)^2} \right) \sqrt{uv} \cos \varphi, \quad (9.25)$$

что совпадает с (9.02) и с получаемым из (9.02) по формуле (7.18) значением скалярного потенциала A_0 .

10. Выражения для поля отраженной волны в виде интегралов

Найдем выражения для потенциалов отраженной волны в виде интегралов. Для потенциала P^0 первичной волны мы имеем согласно (4.12) интегральное представление

$$P^0 = \frac{2C}{u+v} e^{i \frac{u+v}{2}} = \frac{iC}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \zeta_1(u, t) \zeta_1(v, -t). \quad (10.01)$$

Полное поле мы напишем в виде

$$\left. \begin{aligned} P &= P^0 + P', \\ Q &= Q', \end{aligned} \right\} \quad (10.02)$$

где P' и Q' соответствуют отраженной волне.

Из соображений геометрической оптики ясно, что отраженная волна должна иметь фазовый множитель

$$e^{ikz} = e^{i \frac{u-v}{2}}, \quad (10.03)$$

Но тот же множитель имеет асимптотическое выражение функции

$$\zeta_1(u, t) \zeta_2(v, -t) = (uv)^{-\frac{1}{2} + \frac{it}{2}} e^{i \frac{u-v}{2}} (1 + \dots). \quad (10.04)$$

Поэтому мы будем искать P' , Q' в виде интегралов

$$P' = \frac{iC}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \zeta_1(u, t) \zeta_2(v, -t) dt, \quad (10.05)$$

$$Q' = \frac{iC}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \zeta_1(u, t) \zeta_2(v, -t) dt, \quad (10.06)$$

где неизвестные функции $p(t)$, $q(t)$ подлежат определению из предельных условий.

Согласно общим формулам (6.26), (6.27) для абсолютно отражающего параболоида предельные условия имеют вид

$$2 \frac{\partial P'}{\partial v} + Q' = -2 \frac{\partial P^0}{\partial v} \quad (\text{при } v = v_0), \quad (10.07)$$

$$4Q'^* + 2 \frac{\partial Q'}{\partial v} + P' = -P^0 \quad (\text{при } v = v_0). \quad (10.08)$$

Здесь величина Q'^* равна

$$Q'^* = L_u Q' = -\frac{iC}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tq(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \zeta_1(u, t) \zeta_2(v, -t) dt. \quad (10.09)$$

Подставляя в предельные условия выражения (10.05), (10.06) и (10.09) для P' , Q' , Q'^* и полагая в них $v = v_0$, получим для $p(t)$ и $q(t)$ уравнения

$$\left. \begin{aligned} p(t) 2\zeta_2' + q(t) \zeta_2 &= -2\zeta_1', \\ p(t) \zeta_2 + q(t) (2\zeta_2' - 2t\zeta_2) &= -\zeta_1, \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

где мы положили для краткости

$$\zeta_1 = \zeta_1(v_0, -t); \quad \zeta_1' = \left(\frac{\partial \zeta_1(v, -t)}{\partial v} \right)_{v=v_0}, \quad (10.11)$$

и аналогично для ζ_2 и ζ_2' .

Решение уравнений (10.10) дает

$$p(t) = \frac{-\zeta_1 \zeta_2 + 4\zeta_1' \zeta_2' - 4t\zeta_1' \zeta_2}{\zeta_2^2 - 4\zeta_2'^2 + 4t\zeta_2' \zeta_2}, \quad (10.12)$$

$$q(t) = \frac{2\zeta_1 \zeta_2' - 2\zeta_2 \zeta_1'}{\zeta_2^2 - 4\zeta_2'^2 + 4t\zeta_2' \zeta_2}. \quad (10.13)$$

Заметим, что числитель дроби для $q(t)$ есть определитель Вронского, который равен

$$2\zeta_1 \zeta_2' - 2\zeta_2 \zeta_1' = -\frac{2i}{v_0} e^{\frac{\pi}{2} t}. \quad (10.14)$$

Подстановка найденных значений $p(t)$, $q(t)$ в формулы (10.05) и (10.06) дает потенциалы отраженной волны и тем самым дает решение нашей задачи.

11. Представление решения в виде рядов

Потенциалы отраженной волны могут быть также представлены в виде рядов. Подобно тому, как это делалось в параграфе 4 для первичного поля, ряды эти могут быть получены либо как сумма вычетов в точках $t = -(2n + 1)i$ нижней полуплоскости, либо как сумма вычетов в точках $t = (2n + 1)i$ верхней полуплоскости. При вычислении нужно иметь в виду, что общий знаменатель функции $p(t)$ и $q(t)$ имеет простой корень в точке $t = -i$, других же корней он не имеет. Таким образом, полюс $t = -i$ оказывается двойным, другие же полюса будут простыми.

Найдем сперва вычет в двойном полюсе $t = -i$.

Из формул (2.11)–(2.15) нетрудно вывести, что вблизи $t = -i$ будет

$$\zeta_1(u, t) = e^{i \frac{u}{2}} \left[1 + \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \lg u \right) (t + i) + \dots \right], \quad (11.01)$$

$$\zeta_2(v, -t) = e^{-i \frac{v}{2}} \left[1 + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \lg v \right) (t + i) + \dots \right], \quad (11.02)$$

откуда

$$\zeta_1(u, t) \zeta_2(v, -t) = e^{i \frac{u-v}{2}} \left[1 + \frac{i}{2} (t + i) \lg(uv) + \dots \right]. \quad (11.03)$$

Общий знаменатель функций $p(t)$ и $q(t)$ может быть написан в виде

$$\begin{aligned} & (\zeta_2 - 2i\zeta_2')^2 + 4(t + i)\zeta_2'\zeta_2 = \\ & = -2ie^{-iv_0}(t + i) \left[1 + (t + i) \left(\frac{\pi}{2} + i \lg v_0 - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{v_0} + \frac{t}{2v_0^2} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (11.04)$$

Значения числителей $p(t)$ и $q(t)$ при $t = -i$ равны соответственно

$$(2\zeta_1' + i\zeta_1)(2\zeta_2' + i\zeta_2) - 2i(\zeta_1\zeta_2' - \zeta_2\zeta_1') = \frac{2i}{v_0}, \quad (11.05)$$

$$2(\zeta_1\zeta_2' - \zeta_2\zeta_1') = -\frac{2}{v_0}. \quad (11.06)$$

Следовательно, вблизи $t = -i$ будет

$$p(t) = -\frac{1}{t+i} \frac{e^{iv_0}}{v_0} + p_{00} + \dots, \quad (11.07)$$

$$q(t) = -\frac{i}{t+i} \frac{e^{iv_0}}{v_0} + q_{00} + \dots, \quad (11.08)$$

где p_{00} и q_{00} — постоянные, значения которых мы определять не будем, так как они выпадают из выражений для поля.

Подставляя (11.03), (11.07) и (11.08) в интегралы (10.05) и (10.06), получаем значения вычетов в точке $t = -i$, а именно:

$$P'_{00} = 2iCp_{00}e^{i\frac{u-v}{2}} + \frac{C}{v_0} e^{iv_0}e^{i\frac{u-v}{2}} \lg(uv), \quad (11.09)$$

$$Q'_{00} = 2iCq_{00}e^{i\frac{u-v}{2}} + \frac{iC}{v_0} e^{iv_0}e^{i\frac{u-v}{2}} \lg(uv). \quad (11.10)$$

Эти выражения содержат логарифмические члены и не остаются конечными на оси параболоида. Однако составленные из них по формулам (9.12)—(9.15) величины S , T , F_1 , G_1 уже логарифмических членов не содержат. Поэтому и поле, соответствующее членам P'_{00} и Q'_{00} в потенциалах, будет конечным. Для электрического поля мы получаем, например,

$$\left. \begin{aligned} 2u(E'_u)_0 &= \frac{C}{v_0} e^{iv_0}e^{i\frac{u-v}{2}} \sqrt{uv} \cos \varphi, \\ 2v(E'_v)_0 &= \frac{C}{v_0} e^{iv_0}e^{i\frac{u-v}{2}} \sqrt{uv} \cos \varphi, \\ (E'_\varphi)_0 &= -\frac{C}{v_0} e^{iv_0}e^{i\frac{u-v}{2}} \sqrt{uv} \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

что соответствует плоской волне, поляризованной по направлению оси x .

Вычисление вычетов в полюсах $t = -(2n+1)i$, где $n = 1, 2, \dots$, никаких затруднений не представляет. Пользуясь формулами (3.01) и (3.02), получаем для потенциалов отраженной волны следующие ряды:

$$P' = P'_{00} + C \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{(1)} \xi_n(u) \bar{\xi}_n(v), \quad (11.12)$$

$$Q' = Q'_{00} + C \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{(1)} \xi_n(u) \bar{\xi}_n(v), \quad (11.13)$$

где

$$p_n^{(1)} = 2i(-1)^n (n!)^2 p [-(2n+1)i], \quad (11.14)$$

$$q_n^{(1)} = 2i(-1)^n (n!)^2 q [-(2n+1)i]. \quad (11.15)$$

Вычисление величин p_n , q_n дает

$$p_n^{(1)} = -2i \frac{\bar{\xi}_n \bar{\eta}_n - 4\bar{\xi}_n' \bar{\eta}_n' - 4i(2n+1) \bar{\xi}_n \bar{\eta}_n'}{\bar{\xi}_n^2 - 4\bar{\xi}_n'^2 - 4i(2n+1) \bar{\xi}_n \bar{\xi}_n'}, \quad (11.16)$$

$$q_n^{(1)} = -\frac{4i}{v_0} \frac{1}{\bar{\xi}_n^2 - 4\bar{\xi}_n'^2 - 4i(2n+1) \bar{\xi}_n \bar{\xi}_n'}, \quad (11.17)$$

где аргументом функций $\bar{\xi}_n$, $\bar{\eta}_n$ является величина v_0 .

Заметим, что знаменатель величин p_n , q_n может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & \bar{\xi}_n^2 - 4\bar{\xi}_n'^2 - 4i(2n+1) \bar{\xi}_n \bar{\xi}_n' = \\ & = \frac{4}{v_0} n(n+1) (n\bar{\xi}_{n-1,1}^2 - (n'+1)\bar{\xi}_{n,1}^2). \end{aligned} \quad (11.18)$$

Вычислим теперь потенциалы P' , Q' как сумму вычетов в точках $t = (2n+1)i$. Так как все полюса в верхней полуплоскости простые, то мы будем иметь

$$P' = C \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(2)\bar{}} \eta_n(u) \eta_n(v), \quad (11.19)$$

$$Q' = C \sum_{n=0}^{\infty} q_n^{(2)\bar{}} \eta_n(u) \eta_n(v), \quad (11.20)$$

где

$$p_n^{(2)} = \frac{2i(-1)^n}{(n!)^2} p [(2n+1)i], \quad (11.21)$$

$$q_n^{(2)} = \frac{2i(-1)^n}{(n!)^2} q [(2n+1)i]. \quad (11.22)$$

Выражая величины $p_n^{(2)}$, $q_n^{(2)}$ через функции $\bar{\xi}_n(v_0)$, $\bar{\eta}_n(v_0)$, получим

$$p_n^{(2)} = -2i \frac{\bar{\xi}_n \bar{\eta}_n - 4\bar{\xi}_n' \bar{\eta}_n' + 4i(2n+1) \bar{\xi}_n' \bar{\eta}_n}{\bar{\eta}_n^2 - 4\bar{\eta}_n'^2 + 4i(2n+1) \bar{\eta}_n' \bar{\eta}_n}, \quad (11.23)$$

$$q_n^{(2)} = \frac{4i}{v_0} \frac{1}{\bar{\eta}_n^2 - 4\bar{\eta}_n'^2 + 4i(2n+1) \bar{\eta}_n' \bar{\eta}_n}. \quad (11.24)$$

В частности, при $n = 0$ будет

$$p_0^{(2)} = v_0 e^{i v_0}; \quad q_0^{(2)} = -i v_0 e^{i v_0}. \quad (11.25)$$

Вычислим поле, соответствующее нулевым членам разложения (11.19) и (11.20), т. е. потенциалам

$$P_0^{(2)} = C v_0 e^{i v_0} \bar{\eta}_0(u) \eta_0(v), \quad (11.26)$$

$$Q_0^{(2)} = -i C v_0 e^{i v_0} \bar{\eta}_0(u) \eta_0(v). \quad (11.27)$$

Мы имеем:

$$S_0^{(2)} = 0; \quad T_0^{(2)} = 0, \quad (11.28)$$

$$F_{10}^{(2)} = \frac{C v_0}{uv} e^{i \left(v_0 + \frac{u-v}{2} \right)}, \quad (11.29)$$

$$G_{10}^{(2)} = -\frac{i C v_0}{uv} e^{i \left(v_0 + \frac{u-v}{2} \right)}. \quad (11.30)$$

Параболические составляющие поля получатся подстановкой величин (11.28)–(11.30) в выражения (9.16), (9.17). Это поле соответствует электрическим потенциалам с составляющими

$$A_x^{(2)} = 0; \quad A_y^{(2)} = 0, \quad (11.31)$$

$$A_z^{(2)} = A_0^{(2)} = -C \frac{ax}{r^2} e^{ik(a+z)}. \quad (11.32)$$

Эти выражения представляют некоторое приближение к истинному полю лишь при условиях $u \gg 1$, $uv \gg v_0^2$; в общем случае нужно учитывать дальнейшие члены ряда.

Ряды для вспомогательных функций S , T , F_1 , G_1 получаются из рядов для P' , Q' по формулам, выведенным в параграфе 8. Положим

$$a_n^{(1)} = (n+1)(p_n^{(1)} + i q_n^{(1)}) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (11.33)$$

$$a_0^{(1)} = 2i(p_{00} + i q_{00}), \quad (11.34)$$

$$b_n^{(1)} = n(p_n^{(1)} - i q_n^{(1)}) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (11.35)$$

$$b_0^{(1)} = \frac{2}{v_0} e^{i v_0}. \quad (11.36)$$

Тогда будет

$$S' + iT' = iC \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \xi_n(u) \bar{\xi}_n(v), \quad (11.37)$$

$$S' - iT' = iC \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \bar{\xi}_n(u) \xi_n(v), \quad (11.38)$$

$$F_1' + iG_1' = \frac{C}{\sqrt{uv}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n^{(1)} \xi_{n1}(u) \bar{\xi}_{n1}(v), \quad (11.39)$$

$$F_1' - iG_1' = \frac{C}{\sqrt{uv}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1}^{(1)} \xi_{n1}(u) \bar{\xi}_{n1}(v). \quad (11.40)$$

Аналогично можно получить ряды, расположенные по функциям $\eta_n(u) \eta_n(v)$. Мы положим

$$a_n^{(2)} = n(p_n^{(2)} + iq_n^{(2)}), \quad a_0^{(2)} = 0, \quad (11.41)$$

$$b_n^{(2)} = (n+1)(p_n^{(2)} - iq_n^{(2)}), \quad b_0^{(2)} = 0 \quad (11.42)$$

и получим тогда

$$S' + iT' = -iC \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \bar{\eta}_n(u) \eta_n(v), \quad (11.43)$$

$$S' - iT' = -iC \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} \bar{\eta}_n(u) \eta_n(v), \quad (11.44)$$

$$F_1' + iG_1' = \frac{2Cv_0}{uv} e^{iv_0} e^{i\frac{u-v}{2}} + \\ + \frac{C}{\sqrt{uv}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1}^{(2)} \bar{\eta}_{n1}(u) \eta_{n1}(v), \quad (11.45)$$

$$F_1' - iG_1' = \frac{C}{\sqrt{uv}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n^{(2)} \bar{\eta}_{n1}(u) \eta_{n1}(v). \quad (11.46)$$

Подстановка этих выражений в (9.16) и (9.17) дает поле отраженной волны.

Нам остается исследовать сходимость полученных рядов. Это нетрудно сделать, если воспользоваться приведенными в параграфе 3 асимптотическими выражениями для функций ξ_n и η_n :

$$\xi_n(u) = J_0[(1-i)\sqrt{(2n+1)u}], \quad (11.47)$$

$$\eta_n(u) = i\pi H_0^{(2)}[(1-i)\sqrt{(2n+1)u}]. \quad (11.48)$$

Пользуясь этими выражениями, мы получим для коэффициентов далеких членов наших рядов приближенные значения

$$p_n^{(1)} = -i4\pi e^{-2w+2i\omega}, \quad (11.49)$$

$$q_n^{(1)} = \frac{4\pi}{2n+1} e^{-2w+2i\omega}, \quad (11.50)$$

$$p_n^{(2)} = -\frac{i}{\pi} e^{2w+2i\omega}, \quad (11.51)$$

$$q_n^{(2)} = -\frac{i}{\pi(2n+1)} e^{2w+2i\omega}, \quad (11.52)$$

где мы положили для краткости

$$\omega = \sqrt{(2n+1)v_0}. \quad (11.53)$$

Отсюда видно, что ряды (11.12), (11.13), а также другие ряды, расположенные по функциям $\bar{\xi}_n(u)$, $\bar{\xi}_n(v)$, сходятся при условии

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} < 2\sqrt{v_0}, \quad (11.54)$$

а ряды (11.19), (11.20) и другие ряды, расположенные по функциям $\bar{\eta}_n(u)$, $\bar{\eta}_n(v)$, сходятся при условии

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} > 2\sqrt{v_0}. \quad (11.55)$$

Граница области сходимости есть поверхность, определяемая уравнением

$$R + r = 2a. \quad (11.56)$$

Это есть поверхность вращения, сечение которой плоскостью симметрии есть парабола с осью, перпендикулярной оси параболоида и с вершиной в точке $z = 0$, $r = a$, т. е. на пересечении фокальной плоскости с параболоидом.

12. Поле в волновой зоне

В том случае, когда все три числа u , v , v_0 велики по сравнению с единицей, можно получить выражения для поля, соответствующие приближению геометрической оптики. Мы будем исходить из представления P' и Q' в виде интегралов (10.05), (10.06). В рассматриваемом случае в этих интегралах важен тот участок интегрирования, который соответствует конечным значениям t . Но при конечных t мы можем пользоваться для функций ξ_1 и ξ_2 асимптотическими выражениями (2.11) и (2.15). Используя их, получим

$$q(t) = -iv_0^{-it} e^{iv_0} \left(\frac{1}{t+i} + \frac{it+1}{2v_0} + \dots \right), \quad (12.01)$$

$$p(t) = q(t)(t + \dots), \quad (12.02)$$

где многоточием обозначены члены порядка $\frac{1}{v_0^2}$.

С той же степенью точности будем иметь

$$\begin{aligned} \xi_1(u, t) \xi_2(v, -t) &= (uv)^{-\frac{1}{2} + \frac{it}{2}} e^{i\frac{u-v}{2}} \times \\ &\times \left[1 - \frac{i}{4}(t+i)^2 \frac{u-v}{uv} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (12.03)$$

Подставляя эти выражения в интеграл

$$Q' = \frac{iC}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \zeta_1(u, t) \zeta_2(v, -t) dt, \quad (12.04)$$

мы можем написать его в виде

$$Q' = \frac{C e^{i \left(v_0 + \frac{u-v}{2} \right)}}{2 \sqrt{uv}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \left(\frac{v_0^2}{uv} \right)^{-\frac{it}{2}} \times \\ \times \left(\frac{1}{t+i} + \frac{1-it}{4} \frac{u-v}{uv} + \frac{1+it}{2v_0} + \dots \right). \quad (12.05)$$

Этот интеграл может быть вычислен без дальнейших пренебрежений при помощи соотношений

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{-it} dt}{(t+i) \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} = -\frac{2i}{z} \lg(1+z^2), \quad (12.06)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-it)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} z^{-it} dt = \frac{8z}{(1+z^2)^2}, \quad (12.07)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+it)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} z^{-it} dt = \frac{8z^3}{(1+z^2)^2}. \quad (12.08)$$

В результате мы приходим к следующему приближенному выражению для Q' :

$$Q' = C e^{i \left(v_0 + \frac{u-v}{2} \right)} \left[-\frac{i}{v_0} \lg \left(1 + \frac{v_0^2}{uv} \right) + \frac{v_0(u-v+2v_0)}{(v_0^2+uv)^2} \right]. \quad (12.09)$$

Аналогично может быть вычислен и интеграл P' , но мы можем обойтись здесь без интегрирования, так как в нашем приближении согласно (12.02) $p(t) = tq(t)$ и, следовательно, $P' = -2Q'^*$, где Q'^* имеет значение (10.09). Вычисляя P' по формуле

$$P' = -2L_u Q', \quad (12.10)$$

мы получим

$$P' = C e^{i \left(v_0 + \frac{u-v}{2} \right)} \left\{ -\frac{1}{v_0} \lg \left(1 + \frac{v_0^2}{uv} \right) + \frac{2v_0}{v_0^2 + uv} + \frac{iv_0}{(v_0^2 + uv)^3} [(u-v)(uv - 3v_0^2) - 2v_0^3 + 6v_0uv] \right\}. \quad (12.11)$$

Вспомогательные функции S' , T' , F'_1 , G'_1 получатся из (12.09) и (12.11) путем дифференцирования. Мы будем иметь

$$S' = C e^{i \left(v_0 + \frac{u-v}{2} \right)} \left[\frac{2iv_0^3}{(v_0^2 + uv)^2} + \frac{4v_0^3(u-v)(v_0^2 - 2uv)}{(v_0^2 + uv)^4} + \frac{8v_0^2uv(uv - 2v_0^2)}{(v_0^2 + uv)^4} \right], \quad (12.12)$$

$$T' = 0, \quad (12.13)$$

$$F'_1 = iG'_1 = C e^{i \left(v_0 + \frac{u-v}{2} \right)} \left[\frac{v_0}{v_0^2 + uv} - \frac{2iv_0^3(u-v)}{(v_0^2 + uv)^3} + \frac{4iv_0^2uv}{(v_0^2 + uv)^3} \right]. \quad (12.14)$$

Разность $F'_1 - iG'_1$ будет более высокого порядка малости, чем F'_1 , а именно:

$$F'_1 - iG'_1 = -C e^{i \left(v_0 + \frac{u-v}{2} \right)} \frac{4v_0^3}{(v_0^2 + uv)^3} \sim 0. \quad (12.15)$$

Подстановка найденных значений вспомогательных функций в формулы (9.16) и (9.17) дает параболические составляющие поля отраженной волны. Складывая их с выражениями (9.04) и (9.05) для первичного поля, получим полное поле. Так как формулы для параболических составляющих поля имеют сложный вид, мы их выписывать не будем, а проверим лишь выполнение предельных условий. Из условий $E_\varphi = 0$; $H_v = 0$ вытекает, что на поверхности параболоида $v = v_0$ должно быть

$$F'_1 = T^0 - F_1^0, \quad (12.16)$$

$$G'_1 = -2 \frac{\partial T^0}{\partial u}, \quad (12.17)$$

где T^0 и F_1^0 относятся к первичному полю [формулы (9.20)–(9.23)].

Здесь мы уже воспользовались тем, что $G_1^0 = 0$ и $T' = 0$. При $v = v_0$ имеем

$$F_1' = iG_1' = C e^{i \frac{u+v_0}{2}} \left(\frac{1}{u+v_0} + \frac{2i}{(u+v_0)^2} \right). \quad (12.18)$$

Сравнивая (12.18) с разностью выражений (9.21) и (9.22) для T' и F_1^0 , мы убедимся, что члены порядка $1/(u+v_0)$ и $1/(u-v_0)^2$ в правой и левой частях (12.16) совпадают. В том же приближении совпадают и обе части (12.17).

В заключение заметим, что полученные выражения для S' , T' , F_1' , G_1' были выведены в предположении, что величины u , v велики, и, следовательно, они доказаны лишь для больших расстояний от оси. Но эти выражения представляют голоморфные функции от координат x , y , z также и вблизи оси. Поэтому ими можно пользоваться во всех тех случаях, когда поправочные члены малы по сравнению с главными, в том числе и на оси параболаида.

13. Прямоугольные составляющие поля отраженной волны

Для вычисления прямоугольных составляющих поля удобнее всего воспользоваться формулами (7.21) и (7.22) для электрического и магнитного потенциалов. Мы выпишем сперва точные формулы, а затем перейдем к приближению, рассмотренному в предыдущем разделе.

Согласно (7.21) прямоугольные составляющие электрических потенциалов равны

$$A_x = iT; \quad A_y = 0; \quad A_z = -ikxG_1; \quad (13.01)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = ikA_0 = -ik^2xF_1. \quad (13.02)$$

С другой стороны, согласно (7.22) магнитные потенциалы равны

$$B_x = 0; \quad B_y = S; \quad B_z = -kyF_1; \quad (13.03)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = ikB_0 = k^2yG_1. \quad (13.04)$$

Поэтому мы можем представить поле в двух видах, а именно:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\partial(kxF_1)}{\partial x} - kT = -\frac{\partial(kyF_1)}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial z}, \\ E_y &= \frac{\partial(kxF_1)}{\partial y} = \frac{\partial(kyF_1)}{\partial x}, \\ E_z &= \frac{\partial(kxF_1)}{\partial z} + k^2xG_1 = \frac{\partial S}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (13.05)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -i \frac{\partial (kxG_1)}{\partial y} = -i \frac{\partial (kyG_1)}{\partial x}, \\ H_y &= i \frac{\partial T}{\partial z} + i \frac{\partial (kxG_1)}{\partial x} = -i \frac{\partial (kyG_1)}{\partial y} - ikS, \\ H_z &= -i \frac{\partial T}{\partial y} = -i \frac{\partial (kyG_1)}{\partial z} + ik^2 y F_1. \end{aligned} \right\} \quad (13.06)$$

Переходя к приближенным формулам для отраженной волны, мы будем иметь $T' = 0$, $F'_1 = iG'_1$. Поэтому поле отраженной волны будет приближенно соответствовать вектор-потенциалу с единственной отличной от нуля составляющей A'_z , которая согласно (13.01) и (12.14) равна

$$A'_z = Ce^{ik(a+z)x} \left[-\frac{a}{a^2 + r^2} - \frac{4ia^2r^2}{k(a^2 + r^2)^3} + \frac{4ia^3z}{k^2(a^2 + r^2)^3} \right]. \quad (13.07)$$

Составляющие поля, перпендикулярные оси параболоида, могут быть представлены в виде

$$E'_x = H'_y = \frac{k}{2r} \frac{\partial (r^2 F_1)}{\partial r} + \cos 2\varphi \frac{k}{2} r \frac{\partial F_1}{\partial r}, \quad (13.08)$$

$$E'_y = -H'_x = \sin 2\varphi \frac{k}{2} r \frac{\partial F_1}{\partial r}, \quad (13.09)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{k}{2r} \frac{\partial (r^2 F_1)}{\partial r} &= Ce^{ik(a+z)} \left\{ \frac{a^3}{(a^2 + r^2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{4ia^3 [r^2(2a^2 - r^2) + az(2r^2 - a^2)]}{k(a^2 + r^2)^4} \right\}; \end{aligned} \quad (13.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{kr}{2} \frac{\partial F_1}{\partial r} &= Ce^{ik(a+z)} \left\{ -\frac{ar^2}{(a^2 + r^2)^2} - \right. \\ &\left. - \frac{4ia^2r^2(2r^2 - a^2 - 3az)}{k(a^2 + r^2)^4} \right\}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Составляющие, параллельные оси, могут быть вычислены при помощи приближенных выражений

$$S' = Ce^{ik(a+z)} \frac{2ia^3}{k(a^2 + r^2)^2}; \quad T' = 0. \quad (13.12)$$

В результате получается

$$E'_z = -Ce^{ik(a+z)} \frac{8ia^3r \cos \varphi}{k(a^2 + r^2)^3}; \quad H'_z = 0. \quad (13.13)$$

Для наглядности мы выпишем явные выражения для поля отраженной волны, причем ограничимся главными членами и выразим все через прямоугольные координаты:

$$\left. \begin{aligned} E'_x &= C \frac{a(a^2 + y^2 - x^2)}{(a^2 + x^2 + y^2)^2} e^{ik(a+z)}, \\ E'_y &= -C \frac{2axy}{(a^2 + x^2 + y^2)^2} e^{ik(a+z)}, \\ E'_z &= -C \frac{8ia^3x}{k(a^2 + x^2 + y^2)^3} e^{ik(a+z)}, \end{aligned} \right\} \quad (13.14)$$

$$\left. \begin{aligned} [H'_x &= C \frac{2axy}{(a^2 + x^2 + y^2)^2} e^{ik(a+z)}, \\ H'_y &= C \frac{a(a^2 + y^2 - x^2)}{(a^2 + x^2 + y^2)^2} e^{ik(a+z)}, \\ H'_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

Написанные выражения строго удовлетворяют уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{E}' = 0$; $\operatorname{div} \mathbf{H}' = 0$ и приближенно удовлетворяют остальным уравнениям Максвелла и (вместе с первичным полем) предельным условиям.

ГЛАВА 4

ДИФФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩЕМ ПАРАБОЛОИДЕ ВРАЩЕНИЯ*

Рассматривается диффракция плоской электромагнитной волны произвольной поляризации, падающей на внешнюю поверхность идеально-проводящего параболоида вращения под произвольным углом. Получено строгое решение задачи, а также асимптотические формулы для распределения тока на поверхности, справедливые при условии, что длина волны мала по сравнению с фокусным расстоянием параболоида.

Решение данной задачи представляет обоснование формул, приведенных в главе 2 без вывода, и обобщение их на случай произвольной поляризации. В связи с установленным в главах 1 и 2 принципом локального поля в области полутени результаты, полученные для параболоида, дают общее решение вопроса о распределении токов на выпуклых проводящих телах.

1. Строгое решение задачи для 1-й поляризации плоской волны

Пусть уравнение параболоида (рис. 1) имеет вид

$$x^2 + y^2 - 2az - a^2 = 0. \quad (1.01)$$

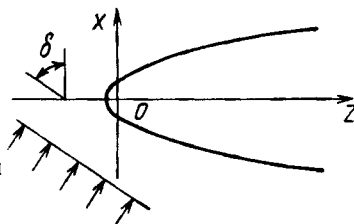


Рис. 1. Падение плоской волны на параболоид вращения.

В качестве плоскости падения выберем плоскость XOZ . Волной 1-й поляризации назовем плоскую волну, магнитное поле которой направлено по оси Y .

* Фок и Федоров, 1958.

Декартовы составляющие электромагнитного поля равны

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_0 \cos \delta e^{i\Omega}, & H_x &= 0, \\ E_y &= 0, & H_y &= E_0 e^{i\Omega}, \\ E_z &= -E_0 \sin \delta e^{i\Omega}, & H_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.02)$$

где $\Omega = k(x \sin \delta + z \cos \delta)$ есть фаза плоской волны; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ есть волновое число в пустоте; зависимость от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$.

Если ввести параболические координаты

$$\left. \begin{aligned} u &= k(R + z); & v &= k(R - z); & \varphi &= \arctg \frac{y}{x}, \\ R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.03)$$

то уравнение параболоида напишется

$$v = v_0 = ka. \quad (1.04)$$

Ковариантные составляющие поля (1.02) в параболических координатах примут вид

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{E_0}{2k} e^{i\Omega} \left(\sqrt{\frac{v}{u}} \cos \delta \cos \varphi - \sin \delta \right), \\ E_v &= \frac{E_0}{2k} e^{i\Omega} \left(\sqrt{\frac{u}{v}} \cos \delta \cos \varphi + \sin \delta \right), \\ E_\varphi &= -\frac{E_0}{k} \sqrt{uv} e^{i\Omega} \cos \delta \sin \varphi, \\ H_u &= \frac{E_0}{2k} \sqrt{\frac{v}{u}} e^{i\Omega} \sin \varphi, \\ H_v &= \frac{E_0}{2k} \sqrt{\frac{u}{v}} e^{i\Omega} \sin \varphi, \\ H_\varphi &= \frac{E_0}{k} \sqrt{uv} e^{i\Omega} \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1.05)$$

где, в новых координатах,

$$\Omega = \frac{1}{2} (u - v) \cos \delta + \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi. \quad (1.06)$$

Замечая, что компоненты E_u , E_v , H_φ суть четные, а H_u , H_v , E_φ — нечетные функции φ , разложим их в ряды Фурье

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{1}{2} E_u^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} E_u^{(s)} \cos s\varphi, & E_v &= \dots, & H_\varphi &= \dots \\ H_u &= \sum_{s=1}^{\infty} H_u^{(s)} \sin s\varphi, & H_v &= \dots, & E_\varphi &= \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.07)$$

где в первой строке многоточия обозначают ряды по косинусам, а во второй строке — ряды по синусам.

Зная разложение в ряд величины $e^{i\Omega}$ [см. (5.03) главы 3]

$$\begin{aligned} e^{i\Omega} &= e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} \left[J_0(\sqrt{uv}\sin\delta) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{s=1}^{\infty} i^s J_s(\sqrt{uv}\sin\delta) \cos s\varphi \right], \end{aligned} \quad (1.08)$$

мы можем коэффициенты Фурье, соответствующие выражениям (1.05), записать в следующем, удобном для дальнейших преобразований, виде:

$$\left. \begin{aligned} E_u^{(s)} &= -\frac{E_0 i^s}{k \sin \delta} \left(1 + 2i \cos \delta \frac{\partial}{\partial u} \right) e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_s(\sqrt{uv}\sin\delta), \\ E_v^{(s)} &= \frac{E_0 i^s}{k \sin \delta} \left(1 - 2i \cos \delta \frac{\partial}{\partial v} \right) e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_s(\sqrt{uv}\sin\delta), \\ E_\varphi^{(s)} &= \frac{2E_0 i^{s+1}}{k} s \operatorname{ctg} \delta e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_s(\sqrt{uv}\sin\delta), \\ H_u^{(s)} &= -\frac{E_0}{ku} \frac{i^{s+1}}{\sin \delta} s e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_s(\sqrt{uv}\sin\delta), \\ H_v^{(s)} &= -\frac{E_0}{kv} \frac{i^{s+1}}{\sin \delta} s e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_s(\sqrt{uv}\sin\delta), \\ H_\varphi^{(s)} &= \frac{2E_0 i^s v}{k \sin \delta} \left[\cos \delta - 2i \frac{\partial}{\partial v} \right] e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_s(\sqrt{uv}\sin\delta). \end{aligned} \right\} \quad (1.09)$$

С другой стороны, можно по формулам (7.05) и (7.06) главы 3 выразить компоненты $E_u^{(s)}$, $E_v^{(s)}$, ..., $H_\varphi^{(s)}$ через вспомогательные функции C_{s-1} , D_{s-1} , F_s , G_s .

Сравнивая наши выражения (1.09) с этими формулами, находим вид вспомогательных функций плоской волны

$$\left. \begin{aligned} C_{s-1}^0 &= \frac{2E_0 i^s}{k} (V\bar{uv})^{-s+1} e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_{s-1}(V\bar{uv}\sin\delta), \\ D_{s-1}^0 &= 0, \\ F_s^0 &= \frac{2E_0 i^{s-1}}{k} (V\bar{uv})^{-s} \operatorname{ctg}\delta e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_s(V\bar{uv}\sin\delta), \\ G_s^0 &= -\frac{2E_0 i^s}{k \sin\delta} (V\bar{uv})^{-s} e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_s(V\bar{uv}\sin\delta). \end{aligned} \right\} (1.10)$$

Зная функции (1.10), мы можем найти параболические потенциалы P_{s-1}^0 и Q_{s-1}^0 плоской волны, введенные в главе 3. Эти потенциалы запишутся в виде интегралов [ср. формулу (5.05) главы 3]

$$\left. \begin{aligned} P_{s-1}^0 &= \frac{E_0 i^s}{\pi k \sin\delta} (V\bar{uv})^{-s+1} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \psi(u, s-1, t) \times \\ &\quad \times \psi(v, s-1, -t) dt, \\ Q_{s-1}^0 &= \frac{E_0 i^s}{\pi k \sin\delta} (V\bar{uv})^{-s+1} \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) \psi(u, s-1, t) \times \\ &\quad \times \psi(v, s-1, -t) dt, \end{aligned} \right\} (1.11)$$

где $p(t)$, $q(t)$ — неизвестные функции, а $\psi(u, s-1, t)$, $\psi(v, s-1, -t)$ — функции, введенные формулой (2.23) главы 3.

Пользуясь соотношением (5.11) главы 3, можно первую формулу (1.10) переписать в виде

$$\begin{aligned} C_{s-1}^0 &= \frac{E_0}{\pi k \sin\delta} (V\bar{uv})^{-s+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u, s-1, t) \times \\ &\quad \times \psi(v, s-1, -t) \left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^{it} dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в формулы (7.01), (7.02) главы 3, которые связывают функции C_{s-1} и D_{s-1} с параболическими потенциалами P_{s-1} и Q_{s-1} , и решая получившиеся уравнения, найдем

$$p(t) = -\frac{2t}{s^2 + t^2} \left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^{it}, \quad q(t) = -\frac{2s}{s^2 + t^2} \left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^{it}. \quad (1.13)$$

Потенциалы вторичной (отраженной) волны P_{s-1}^1 и Q_{s-1}^1 будем искать в виде интегралов

$$\left. \begin{aligned} P_{s-1}^1 &= \frac{2E_0 i^s}{\pi k \sin \delta} (\sqrt{uv})^{-s+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{s^2 + t^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{it} \times \\ &\quad \times p^1(t) \psi(u, s-1, t) \zeta_1(v, s-1, -t) dt, \\ Q_{s-1}^1 &= \frac{2E_0 i^s}{\pi k \sin \delta} (\sqrt{uv})^{-s+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{s^2 + t^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{it} \times \\ &\quad \times q^1(t) \psi(u, s-1, t) \zeta_1(v, s-1, -t) dt. \end{aligned} \right\} (1.14)$$

Функция ζ_1 введена в разложение (1.14) ввиду того, что ее асимптотическое выражение содержит фазовый множитель, имеющий характер расходящейся волны.

Неизвестные функции $p^1(t)$ и $q^1(t)$ могут быть найдены из граничных условий на поверхности параболоида [формулы (6.26), (6.27) главы 3]

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} + Q_{s-1} &= 0, \\ 4Q_{s-1}^* + 2s \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} + sP_{s-1} &= 0 \quad (\text{при } v = v_0), \end{aligned} \right\} (1.15)$$

где

$$P_{s-1} = P_{s-1}^0 + P_{s-1}^1, \quad Q_{s-1} = Q_{s-1}^0 + Q_{s-1}^1 \quad (1.16)$$

суть потенциалы полного поля.

Подставляя в граничные условия (1.15) значения P_{s-1} и Q_{s-1} , выраженные через потенциалы (1.11) и (1.14), получим следующие уравнения для определения функций $p^1(t)$ и $q^1(t)$:

$$\left. \begin{aligned} p^1(t) \left[\frac{1-s}{v} t \zeta_1(v, s-1, -t) + 2t \zeta_1'(v, s-1, -t) \right] + \\ + q^1(t) s \zeta_1(v, s-1, -t) &= \frac{1-s}{v} t \psi(v, s-1, -t) + \\ + 2t \psi'(v, s-1, -t) + s \psi(v, s-1, -t) & \quad (\text{при } v = v_0), \\ p^1(t) t \zeta_1(v, s-1, -t) + q^1(t) \left[\frac{1-s}{v} s \zeta_1(v, s-1, -t) + \right. \\ + 2s \zeta_1'(v, s-1, -t) - 2t \zeta_1(v, s-1, -t) & \left. \right] = \\ = \frac{1-s}{v} s \psi(v, s-1, -t) + 2s \psi'(v, s-1, -t) - \\ - t \psi(v, s-1, -t) & \quad (\text{при } v = v_0). \end{aligned} \right\} (1.17)$$

При решении системы уравнений (1.17) перейдем в них от функций с аргументом $-t$ к функциям с аргументами $-t \pm i$, для чего воспользуемся рекуррентными формулами (2.24)–(2.27) главы 3.

Решение уравнений (1.17) дает

$$\left. \begin{aligned} p^1(t) &= \frac{1}{D} \left\{ \psi(v, s, -t-i) \zeta_1(v, s, -t-i) + \right. \\ &+ \frac{s^2+t^2}{4} \psi(v, s, -t+i) \zeta_1(v, s, -t+i) - \\ &- \frac{i(s^2+t^2)}{2t} [\psi(v, s, -t+i) \zeta_1(v, s, -t-i) - \\ &- \psi(v, s, -t-i) \zeta_1(v, s, -t+i)] \left. \right\}, \\ q^1(t) &= \frac{1}{D} \left\{ \psi(v, s, -t-i) \zeta_1(v, s, -t-i) + \right. \\ &+ \frac{s^2+t^2}{4} \psi(v, s, -t+i) \zeta_1(v, s, -t+i) \left. \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

где

$$D = \zeta_1^2(v, s, -t-i) + \frac{s^2+t^2}{4} \zeta_1^2(v, s, -t+i). \quad (1.19)$$

Получив из формул (1.11), (1.14) и (1.16) потенциалы полного поля P_{s-1} и Q_{s-1} , найдем функции C_{s-1} , D_{s-1} , F_s и G_s , а затем и само поле по формулам (7.01)–(7.06) главы 3.

Не выписывая всех составляющих поля в явном виде, мы ограничимся касательными составляющими магнитного поля на поверхности параболоида, позволяющими вычислить поверхностную плотность тока.

Пользуясь формулами (6.08) и (7.06) главы 3, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} 2iuH_u + H_\varphi &= \frac{1}{2} H_\varphi^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} i^{s-1} (\sqrt{uv})^s \left[2 \frac{\partial D_{s-1}}{\partial v} + C_{s-1} \right] e^{ts\varphi} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} i^{s-1} (\sqrt{uv})^s \left[C_{s-1} + 2sG_s - 2 \frac{\partial D_{s-1}}{\partial v} \right] e^{-ts\varphi}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

На поверхности параболоида (при $v = v_0$) мы получим для коэффициентов Фурье в (1.20) выражения

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial D_{s-1}}{\partial v} + C_{s-1} &= -\frac{2E_0}{\pi k \sin \delta} (Vuv)^{-s+1} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}\right)^{it}}{s^2 + t^2} r(t) t(s+it) \psi(u, s-1, t) \zeta_1(v, s+1, -t) dt, \\ C_{s-1} + 2sG_s - 2 \frac{\partial D_{s-1}}{\partial v} &= \frac{2E_0}{\pi k \sin \delta} (Vuv)^{-s+1} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}\right)^{it}}{s^2 + t^2} r(t) t(s-it) \psi(u, s+1, t) \zeta_1(v, s-1, -t) dt, \end{aligned} \right\} (1.21)$$

где

$$r(t) = p^1(t) - q^1(t) = i \frac{s^2 + t^2}{D} V \quad (1.22)$$

и

$$\begin{aligned} V &= \psi(v, s, -t+i) \zeta_1(v, s, -t-i) - \\ &- \zeta_1(v, s, -t+i) \psi(v, s, -t-i). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Если воспользоваться соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1(v, s, -t-i) &= v \zeta'_1(v, s, -t+i) + \frac{i(v-t)}{2} \zeta_1(v, s, -t+i), \\ \psi(v, s, -t-i) &= v \psi'(v, s, -t+i) + \frac{i(v-t)}{2} \psi(v, s, -t+i), \end{aligned} \right\} (1.24)$$

$$\psi(v, s, -t+i) = \zeta_1(v, s, -t+i) + \frac{\Gamma\left(\frac{s-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2+it}{2}\right)} \zeta_2(v, s, -t+i), \quad (1.25)$$

вытекающими из формул (2.17)–(2.23) главы 3, то функция V примет вид

$$\begin{aligned} V &= -v \frac{\Gamma\left(\frac{s-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2+it}{2}\right)} [\zeta_1(v, s, -t+i) \times \\ &\times \zeta'_2(v, s, -t+i) - \zeta'_1(v, s, -t+i) \zeta_2(v, s, -t+i)]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках выражения (1.26), есть определитель Вронского, равный $-\frac{e^{\frac{\pi t}{2}}}{v}$. Отсюда

$$V = \frac{\Gamma\left(\frac{s-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2+it}{2}\right)} e^{\frac{\pi t}{2}}. \quad (1.27)$$

Учитывая значения (1.22) и (1.27) и одновременно меняя порядок суммирования и интегрирования в формуле (1.20), получим окончательное выражение для касательных (ковариантных) составляющих полного магнитного поля на поверхности параболоида

$$\begin{aligned} 2iuH_u + H_\varphi = & \frac{1}{2} H_\varphi^{(0)} + \frac{E_0 \sqrt{uv}}{2\pi k \sin \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}\right)^{it} \times \\ & \times \left[\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s e^{-i\frac{\pi}{2}s} e^{ts\varphi} (s+it) \frac{V}{D} \psi(u, s-1, t) \zeta_1(v, s+1, -t) - \right. \\ & \left. - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s e^{-i\frac{\pi}{2}s} e^{-ts\varphi} (s-it) \frac{V}{D} \psi(u, s+1, t) \zeta_1(v, s-1, -t) \right] dt. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Чтобы получить величину $-2iuH_u + H_\varphi$, нужно в правой части (1.28) заменить φ на $-\varphi$; из формул для $H_\varphi \pm 2iuH_u$ легко получаются H_u и H_φ в отдельности.

2. Суммирование ряда. Геометрическая оптика

Перепишем выражение (1.20) в виде

$$2iuH_u + H_\varphi = \frac{E_0 \sqrt{uv}}{2\pi k \sin \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it \operatorname{lg} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} S dt, \quad (2.01)$$

где

$$S = f(0) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s f_1(s) e^{ts\varphi} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s f_2(s) e^{-ts\varphi}, \quad (2.02)$$

а

$$f(0) = f_1(0) = f_2(0). \quad (2.03)$$

Функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f_1(s) &= N(s) e^{\frac{\pi t}{2}} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{-s-it}{2}\right)} \xi(u, s-1, t) \zeta_1(v, s+1, -t), \\ f_2(s) &= -N(s) e^{\frac{\pi t}{2}} \frac{s-it}{\Gamma\left(\frac{-s-it}{2}\right)} \xi(u, s+1, t) \zeta_1(v, s-1, -t), \end{aligned} \right\} (2.04)$$

где функция ξ определяется формулой (2.07) главы 3, а величина

$$N(s) = e^{-i\frac{\pi}{2}s} \frac{\Gamma\left(\frac{s-it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-s-it}{2}\right)}{D} \quad (2.05)$$

есть четная функция от s . Мы рассматриваем сумму S при фиксированном значении t , которое для определенности будем считать положительным. При $t < 0$ ход рассуждений принципиально не изменится.

Функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$ голоморфны в четвертой четверти. В первой и третьей четвертях эти функции имеют полюса, которые суть нули знаменателя D . Кроме того, во второй четверти (рис. 2) имеются полюса от множителя $\Gamma\left(\frac{s-it}{2}\right)$, входящего в $N(s)$.

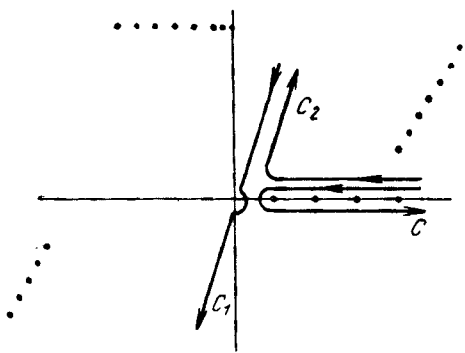


Рис. 2. Контуры C , C_1 и C_2 в плоскости комплексной переменной s .

Сумма S может быть представлена в виде

$$S = f(0) + \frac{1}{2i} \int_C \frac{f_1(s) e^{is\varphi} + f_2(s) e^{-is\varphi}}{\sin s\pi} ds, \quad (2.06)$$

так как интеграл справа сводится к вычетам в точках $s = 1, 2, 3, \dots$. Контур C мы можем заменить контурами C_1 и C_2 (рис. 2) и написать

$$S = S_1 + S_2, \quad (2.07)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= f(0) + \frac{1}{2i} \int_{C_1} \frac{f_1(s) e^{is\varphi} + f_2(s) e^{-is\varphi}}{\sin s\pi} ds, \\ S_2 &= \frac{1}{2i} \int_{C_2} \frac{f_1(s) e^{is\varphi} + f_2(s) e^{-is\varphi}}{\sin s\pi} ds. \end{aligned} \right\} (2.08)$$

Преобразуем интеграл S_1 . Для этого нам понадобится значение разности $f_1(-s) - f_2(s)$. Пользуясь формулами (2.16), (2.18) и (2.29) главы 3, получим

$$f_1(-s) - f_2(s) = i \sin \pi g(s), \quad (2.09)$$

где

$$g(s) = \frac{i}{\pi} \frac{e^{\pi t}(s-it)}{D} \Gamma\left(\frac{(s-it)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-s-it}{2}\right) \times \\ \times \zeta_1(u, s+1, t) \zeta_1(v, s-1, -t). \quad (2.10)$$

Подставляя в первое равенство (2.08) значение $f_2(s)$ из соотношения (2.09), найдем

$$S_1 = f(0) + \frac{1}{2i} \int_{C_1} \frac{f_1(s) e^{is\varphi}}{\sin \pi s} ds + \\ + \frac{1}{2i} \int_{C_1} \frac{f_1(-s) e^{-is\varphi}}{\sin \pi s} ds - \frac{1}{2} \int_{C_1} g(s) e^{-is\varphi} ds. \quad (2.11)$$

Если во втором интеграле выражения (2.11) заменить s на $-s$, то нетрудно убедиться, что сумма первых двух интегралов сведется к вычету в точке $s=0$ и даст величину $-f(0)$. Далее, так как функция $g(s)$ не имеет полюсов на вещественной оси, мы можем контур интегрирования третьего интеграла провести через начало координат, меняя одновременно направление интегрирования вдоль этого контура; в результате получим

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{C_0} g(s) e^{-is\varphi} ds, \quad (2.12)$$

где контур C_0 — прямая, составляющая малый угол с мнимой осью, как показано на рис. 3.

Формула (2.12) справедлива при условии

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Ниже будет показано, что в том приближении, в котором производится решение настоящей задачи, основной вклад дает

интеграл от функции S_1 , а интегралом $\int e^{it \lg \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} S_2 dt$ можно пренебречь. Поэтому в дальнейших выкладках мы удерживаем только S_1 . Физический смысл вклада, даваемого функцией S_2 , по-видимому, тот же, что и в случае сферы («обходящие» волны).

Величину (2.01) мы теперь получаем в виде

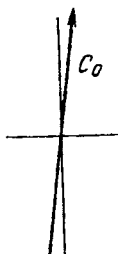


Рис. 3.
Контур C_0
в плоскости
комплексной
переменной s .

$$2iuH_u + H_\varphi = \frac{E_0 V \sqrt{uv}}{4\pi k \sin \delta} \iint g(s) e^{-i s \varphi + i t \lg \frac{\delta}{2}} ds dt \quad (2.13)$$

[пределы интегрирования по t и по s те же, что в формулах (2.01) и (2.12)].

Интеграл (2.13) может быть вычислен приближенно в предположении, что $v = v_0 = ka \gg 1$.

Прежде всего выразим функции ζ_1 через новые функции Z по формулам

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1(u, s, t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{s+1+it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1-it}{2}\right)}} e^{-\frac{\pi t}{4}} Z(u, s, t), \\ \zeta_1(v, s, -t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{s+1-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1+it}{2}\right)}} e^{\frac{\pi t}{4}} Z(v, s, -t). \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Тогда выражение для $g(s)$ несколько упрощается:

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{8e^{-i(s+1)\frac{\pi}{2}}}{e^{-\pi t} - e^{-i\pi s}} \times \\ &\times \frac{Z(u, s+1, t) Z(v, s-1, -t)}{\sqrt{s^2 + t^2} [Z^2(v, s, -t-i) - Z^2(v, s, -t+i)]}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При больших значениях параметра ka мы можем заменить функции Z их асимптотическими выражениями, получающимися по «полуклассическому» методу:

$$\left. \begin{aligned} Z(u, s+1, t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{u^2 + 2ut - s^2}} e^{\frac{i}{2} \left(\chi_1 + \frac{\partial \chi_1}{\partial s} - \frac{\pi}{2} \right)}, \\ Z(v, s-1, -t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{v^2 - 2vt - s^2}} e^{\frac{i}{2} \left(\chi_1^* - \frac{\partial \chi_1^*}{\partial s} - \frac{\pi}{2} \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \int \sqrt{u^2 + 2ut - s^2} \frac{du}{u} = \sqrt{u^2 + 2ut - s^2} - \\ &- s \arccos \frac{s^2 - t}{\sqrt{s^2 + t^2}} + t \operatorname{arch} \frac{u+t}{\sqrt{s^2 + t^2}}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_1^* = \int \sqrt{v^2 - 2vt - s^2} \frac{dv}{v} = \sqrt{v^2 - 2vt - s^2} - \\ - s \arccos \frac{\frac{s^2}{v} + t}{\sqrt{s^2 + t^2}} - t \operatorname{arch} \frac{v-t}{\sqrt{s^2 + t^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

причем $\operatorname{arch} x = \lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Постоянные коэффициенты в выражениях (2.16) определены сравнением этих выражений с формулами (2.11) и (2.13) главы 3, дающими асимптотические представления для функций ζ_1 при $u, v \rightarrow \infty$. Можно показать, далее, что

$$-\frac{8i}{\pi} \frac{1}{\sqrt{s^2 + t^2} [Z^2(v, s, -t-i) - Z^2(v, s, -t+i)]} = e^{-i\chi_1^*}. \quad (2.18)$$

Предполагая, что главный участок интегрирования по переменной t соответствует значениям $t \gg 1$, так что величиной $e^{-\pi t}$ в знаменателе (2.15) можно пренебречь, мы получим для функции $g(s)$ выражение

$$g(s) = 4e^{i\frac{s\pi}{2}} \frac{\exp\left[\frac{i}{2}\chi_1 - \frac{i}{2}\chi_1^* + \frac{i}{2}(\beta - \alpha + \pi)\right]}{\sqrt[4]{u^2 + 2ut - s^2} \sqrt[4]{v^2 - 2vt - s^2}}, \quad (2.19)$$

где введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi_1}{\partial s} = -\arccos \frac{\frac{s^2}{u} - t}{\sqrt{s^2 + t^2}} = -\alpha, \quad \frac{\partial \chi_1^*}{\partial s} = -\arccos \frac{\frac{s^2}{v} + t}{\sqrt{s^2 + t^2}} = -\beta, \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial t} = \operatorname{arch} \frac{u+t}{\sqrt{s^2 + t^2}} = a, \quad \frac{\partial \chi_1^*}{\partial t} = -\operatorname{arch} \frac{v-t}{\sqrt{s^2 + t^2}} = -b. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Обозначив через ω фазу подынтегрального выражения (2.13)

$$\omega = s \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \chi_1 - \frac{1}{2} \chi_1^* - s\varphi + t \lg \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \quad (2.21)$$

найдем стационарные точки из условий

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \lg \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Решая уравнения (2.22) относительно s и t , находим корни

$$\left. \begin{aligned} s^{(0)} &= \sqrt{uv} \sin \delta \sin \varphi, \\ t^{(0)} &= \frac{1}{2} (v - u) \sin^2 \delta + \sqrt{uv} \sin \delta \cos \delta \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Заметим, что для применимости «полуклассического» метода должно выполняться соотношение

$$\sqrt{v^2 - 2vt^{(0)} - s^{(0)2}} = v \cos \delta - \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi \gg 1. \quad (2.24)$$

Так как $v \cos \delta - \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi = 0$ есть уравнение границы тени, то формулы, которые мы получим в результате применения метода стационарной фазы, будут справедливы в освещенной области, достаточно далеко от границы тени.

Учитывая формулы (2.17) и (2.21), можно написать следующее выражение для фазы:

$$\begin{aligned} \omega &= - \left[\frac{1}{2} \sqrt{v^2 - 2vt - s^2} - \frac{1}{2} \sqrt{u^2 + 2ut - s^2} \right] + \\ &+ s \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) + t \left(\lg \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b \right) = \\ &= - \left[\frac{1}{2} \sqrt{v^2 - 2vt - s^2} - \frac{1}{2} \sqrt{u^2 + 2ut - s^2} \right] + \\ &\quad + s \frac{\partial \omega}{\partial s} + t \frac{\partial \omega}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Произведем касательное преобразование (преобразование Лежандра) функции ω от переменных s, t к переменным p и q по формулам

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = p, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = q. \quad (2.26)$$

Обозначая

$$\frac{1}{2} \sqrt{v^2 - 2vt - s^2} - \frac{1}{2} \sqrt{u^2 + 2ut - s^2} = \Omega(p, q), \quad (2.27)$$

будем иметь

$$\omega = sp + tq - \Omega(p, q). \quad (2.28)$$

В силу взаимности преобразования Лежандра имеют место соотношения

$$s = \frac{\partial \Omega}{\partial p}, \quad t = \frac{\partial \Omega}{\partial q}, \quad (2.29)$$

которые можно вывести и непосредственно.

Введем формально величины φ_1 и δ_1 формулами

$$\varphi_1 = \varphi + p, \quad \lg \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} = \lg \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} - q, \quad (2.30)$$

они удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} &= 1, & \frac{\partial \delta_1}{\partial q} &= -\sin \delta_1, \\ \cos \delta_1 &= \frac{\operatorname{sh} q + \operatorname{ch} q \cos \delta}{\operatorname{ch} q + \operatorname{sh} q \cos \delta}, & \sin \delta_1 &= \frac{\sin \delta}{\operatorname{ch} q + \operatorname{sh} q \cos \delta}, \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

с помощью которых s и t могут быть записаны как функции от p и q

$$\left. \begin{aligned} s &= \sqrt{uv} \sin \delta_1 \sin \varphi_1, \\ t &= \frac{1}{2} (v - u) \sin^2 \delta_1 + \sqrt{uv} \sin \delta_1 \cos \delta_1 \cos \varphi_1, \\ \Omega &= \frac{1}{2} (v - u) \cos \delta_1 - \sqrt{uv} \sin \delta_1 \cos \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Очевидно, что при $p = 0$, $q = 0$, когда $\varphi_1 = \varphi$, $\delta_1 = \delta$, формулы (2.32) переходят в (2.23), как и должно быть. Вычисляя из (2.32) значения частных производных от старых координат (s , t) по новым (p , q), найдем якобиан касательного преобразования

$$\begin{aligned} \frac{D(s, t)}{D(p, q)} &= \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial t}{\partial q} - \frac{\partial s}{\partial q} \frac{\partial t}{\partial p} = \\ &= -\sin^2 \delta_1 (u \cos \delta_1 + \sqrt{uv} \sin \delta_1 \cos \varphi_1) (v \cos \delta_1 - \sqrt{uv} \sin \delta_1 \cos \varphi_1). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Преобразуем интеграл (2.13) к новым переменным p и q , учитывая равенство

$$\frac{1}{2} (\beta - \alpha + \pi) = \varphi + p = \varphi_1. \quad (2.34)$$

Мы получим

$$\begin{aligned} 2iuH_u + H_\varphi &= \frac{E_0 \sqrt{uv}}{\pi k \sin \delta} \iint e^{i\omega_1(p, q) + i\varphi_1(p)} \times \\ &\times \sin \delta_1 \sqrt{-\frac{D(s, t)}{D(p, q)}} dp dq. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В ходе преобразования подынтегрального выражения (2.13) мы воспользовались соотношением

$$\frac{1}{\sqrt[4]{v^2 - 2vt - s^2} \sqrt[4]{u^2 + 2ut - s^2}} = \frac{\sin \delta_1}{\sqrt{-\frac{D(s, t)}{D(p, q)}}}. \quad (2.36)$$

Величина ω_1 есть фаза (2.28), рассматриваемая как функция от p и q .

Вычисляем интеграл (2.35) методом стационарной фазы. Условия стационарности запишутся

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial q} = 0. \quad (2.37)$$

Отсюда для определения точки стационарной фазы получается система уравнений

$$p \frac{\partial s}{\partial p} + q \frac{\partial t}{\partial p} = 0, \quad p \frac{\partial s}{\partial q} + q \frac{\partial t}{\partial q} = 0, \quad (2.38)$$

имеющая единственное решение $p = 0, q = 0$, так как определитель (2.33) системы отличен от нуля.

Разложим $\omega_1(p, q)$ в окрестности точки $p = 0, q = 0$ в ряд до членов второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} \omega_1(p, q) = & -\Omega(0, 0) + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial p^2} p^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial p \partial q} pq + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial q^2} q^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $-\Omega(0, 0) = \frac{1}{2} (u - v) \cos \delta + \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi$ есть фаза падающей плоской волны.

Вторые производные от ω_1 по p и q берутся в точке $p = q = 0$, где они равны

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial p^2} = \frac{\partial s}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial p \partial q} = \frac{\partial s}{\partial q} = \frac{\partial t}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial q^2} = \frac{\partial t}{\partial q}. \quad (2.40)$$

Подставив разложение (2.39) в интеграл (2.35) и вычисляя его приближенно обычным методом, найдем

$$2iuH_u + H_\varphi = \frac{E_0 \sqrt{uv}}{\pi k} e^{-i\Omega(0, 0)} \sigma, \quad (2.41)$$

$$\sigma = \sqrt{-\frac{D(s, t)}{D(p, q)}} \iint e^{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial s}{\partial p} p^2 + 2 \frac{\partial s}{\partial q} pq + \frac{\partial t}{\partial q} q^2 \right]} dpdq = 2\pi. \quad (2.42)$$

Таким образом,

$$2iuH_u + H_\varphi = \frac{2E_0 \sqrt{uv}}{k} e^{-i\Omega(0, 0)} e^{i\varphi}. \quad (2.43)$$

В согласии с геометрической оптикой мы получили для полного поля на поверхности величину, равную удвоенному значению поля волны, падающей на параболоид.

3. Асимптотические формулы для поля в области полутени

Перейдем к определению поля в области полутени. При условии

$$v^2 - 2vt - s^2 \lesssim [2(v^2 + s^2)]^{2/3}, \quad (3.01)$$

т. е. когда величина трехчлена $v^2 - 2vt - s^2$ мала по сравнению с каждым из его слагаемых, асимптотические формулы (2.16) и (2.18) для функций от координаты v неприменимы. При условии (3.01) имеет место приближенное равенство

$$\chi_1^* = \frac{2}{3(v^2 + s^2)} (v^2 - 2vt - s^2)^{3/2}, \quad (3.02)$$

и параболические функции могут быть выражены асимптотически через функции Эйри следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Z(v, s - 1, -t) &= -\frac{2i}{\sqrt{\pi}} [2(v^2 + s^2)]^{-1/6} \omega(\tau - s_1), \\ \sqrt{s^2 + t^2} [Z^2(v, s, -t - i) - Z^2(v, s, -t + i)] &= \\ &= -\frac{2i}{\pi} \omega(\tau) \omega'(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (3.03)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tau &= -\left(\frac{3}{4} \chi_1^*\right)^{2/3} = -\frac{1}{[2(v^2 + s^2)]^{2/3}} (v^2 - 2vt - s^2), \\ s_1 &= \frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{2s}{[2(v^2 + s^2)]^{2/3}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.04)$$

Из формулы (3.04) получим далее

$$dt = \frac{1}{v_1} d\tau, \quad (3.05)$$

где

$$v_1 = \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{2v}{[2(v^2 + s^2)]^{2/3}}. \quad (3.06)$$

Асимптотическое представление для функции $Z(u, s + 1, t)$ остается прежним. При этом в силу условия (3.01) имеем приближенно

$$u^2 + 2ut - s^2 \simeq (u + v)^2 \cos^2 \delta_1. \quad (3.07)$$

Поэтому первая формула (2.16) принимает вид

$$Z(u, s + 1, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \sqrt{u + v} \sqrt{\cos \delta_1}} e^{i \frac{\chi_1}{2} - \frac{i}{2} \alpha - i \frac{\pi}{4}}. \quad (3.08)$$

Равенства (3.03) и (3.07) дают для функции $g(s)$ следующее выражение:

$$g(s) = \frac{4 [2(v^2 + s^2)]^{-1/6}}{V u + v \sqrt{\cos \delta_1}} \frac{w(\tau - s_1)}{w(\tau) w'(\tau)} e^{\frac{i}{2} (\chi_1 - \alpha + s\pi + \frac{\pi}{2})} \quad (3.09)$$

Сравнивая (3.09) с (2.19), видим, что новая фаза

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \chi_1 + s \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + t \operatorname{Igtg} \frac{\delta}{2} \quad (3.10)$$

связана со старой фазой (2.21) соотношением

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{1}{2} \chi_1^* \quad (3.11)$$

Разложим $\tilde{\omega}$ в ряд при $\chi_1^* = 0$, ограничившись нулевым и линейным членами разложения

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega} \Big|_{\chi_1^*=0} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \Big|_{\chi_1^*=0} \frac{\partial t}{\partial \tau} \tau. \quad (3.12)$$

Очевидно, что при $\chi_1^* = 0$ и производная $\frac{\partial \chi_1^*}{\partial t}$ обращается в нуль [см. (3.02)]. Поэтому при $\chi_1^* = 0$ справедливы следующие равенства:

$$\tilde{\omega} = \omega, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad (3.13)$$

и, следовательно,

$$\tilde{\omega} = \omega \Big|_{\chi_1^*=0} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_{\chi_1^*=0} \frac{1}{v_1} \tau. \quad (3.14)$$

Введем касательным преобразованием (2.26) переменные p и q :

$$\omega = sp + tq - \Omega(p, q) \quad (3.15)$$

и разложим функцию ω в ряд вблизи точки $p = p_0$, $q = q_0$, где $\chi_1^* = 0$ и

$$d\omega = pds + qdt = 0. \quad (3.16)$$

Из соотношения (3.16) и равенства

$$d\chi_1^* = -\beta ds - bdt = 0 \quad (3.17)$$

мы можем при помощи (3.02) вывести уравнение, связывающее p_0 и q_0 , а именно:

$$p_0 - q_0 \frac{s}{v} = 0. \quad (3.18)$$

Условие $\chi_1^* = 0$ означает, что

$$v \cos \delta_1 - \sqrt{uv} \sin \delta_1 \cos \varphi_1 = 0. \quad (3.19)$$

При p и q , малых по сравнению с единицей, можно получить отсюда, учитывая формулы (2.31), приближенное соотношение

$$v \cos \delta - \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi + sp + vq = 0. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) справедливо, в частности, и при $p = p_0$, $q = q_0$. Решая его совместно с уравнением (3.18), найдем

$$\left. \begin{aligned} (s^2 + v^2) p_0 &= -s(v \cos \delta - \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi), \\ (s^2 + v^2) q_0 &= -v(v \cos \delta - \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Разложим фазу ω в ряд вблизи точки p_0 , q_0 . Обозначив функцию ω в этой точке через ω_0 , будем иметь

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \left[p \frac{\partial s}{\partial p} + q \frac{\partial t}{\partial p} \right]_0 (p - p_0) + \left[p \frac{\partial s}{\partial q} + q \frac{\partial t}{\partial q} \right]_0 (q - q_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[p \frac{\partial^2 s}{\partial p^2} + q \frac{\partial^2 t}{\partial p^2} + \frac{\partial s}{\partial p} \right]_0 (p - p_0)^2 + \\ &+ \left[p \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial q} + q \frac{\partial^2 t}{\partial p \partial q} + \frac{\partial t}{\partial p} \right]_0 (p - p_0)(q - q_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[p \frac{\partial^2 s}{\partial q^2} + q \frac{\partial^2 t}{\partial q^2} + \frac{\partial t}{\partial q} \right]_0 (q - q_0)^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В формуле (3.22) члены разложения, линейные относительно $(p - p_0)$, $(q - q_0)$, обращаются в нуль, поскольку

$$\left. \begin{aligned} p_0 \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_0 + q_0 \left(\frac{\partial t}{\partial p} \right)_0 &= (p_0 v - q_0 s) \cos \delta_1 = 0, \\ p_0 \left(\frac{\partial s}{\partial q} \right)_0 + q_0 \left(\frac{\partial t}{\partial q} \right)_0 &= \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial q} \right)_0}{\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_0} \left[p_0 \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_0 + q_0 \left(\frac{\partial t}{\partial p} \right)_0 \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Квадратичная форма в (3.22) после вычисления входящих в нее частных производных сводится к полному квадрату, и мы получаем

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2v} (\sec \delta_1 - q_0) (s - s_0)^2, \quad (3.24)$$

где s_0 есть значение s при $p = p_0$, $q = q_0$.

Разложим $\Omega(p, q)$ в ряд до членов третьего порядка включительно в окрестности точки p_0, q_0 , и в полученном разложении положим $p = 0, q = 0$:

$$\begin{aligned} \Omega(0, 0) &= \Omega(p_0, q_0) - p_0 s_0 - q_0 t_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_0 p_0^2 + 2 \left(\frac{\partial t}{\partial p} \right)_0 p_0 q_0 + \left(\frac{\partial t}{\partial q} \right)_0 q_0^2 \right] - \\ &- \frac{1}{6} \left[p_0^3 \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial p^3} \right)_0 + 3 p_0^2 q_0 \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial p^2 \partial q} \right)_0 + \right. \\ &\left. + 3 p_0 q_0^2 \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial p \partial q^2} \right)_0 + q_0^3 \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial q^3} \right)_0 \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Так как $\frac{\partial s}{\partial q} = \frac{\partial t}{\partial p}$, то квадратичная форма в (3.25) пропорциональна квадрату величины $p_0 \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_0 + q_0 \left(\frac{\partial s}{\partial q} \right)_0$, которая равна нулю. Поэтому в разложении (3.25), кроме величины

$$\Omega(p_0, q_0) - p_0 s_0 - q_0 t_0 = -\omega_0, \quad (3.26)$$

остается слагаемое третьей степени относительно переменных p_0, q_0 , которое после вычисления входящих в него производных третьего порядка приводится к виду

$$\frac{1}{6} \left[p_0^3 \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial p^3} \right)_0 + \dots \right] = - \frac{(V\bar{uv} \sin \delta \cos \varphi - v \cos \delta)^3}{6v(u+v) \sin^2 \delta_1} = - \frac{\xi^3}{3}, \quad (3.27)$$

где

$$\xi = \frac{V\bar{uv} \sin \delta \cos \varphi - v \cos \delta}{[2v(u+v) \sin^2 \delta_1]^{1/3}}. \quad (3.28)$$

Подставляя в формулу (3.24) значение ω_0 из (3.25) и (3.26) и учитывая соотношение (3.27), найдем

$$\omega = -\Omega(0, 0) + \frac{\xi^3}{3} + \frac{1}{2v} (\sec \delta_1 - q_0) (s - s_0)^2. \quad (3.29)$$

Величина $\tilde{\omega}$ связана с ω формулой (3.14), которая содержит слагаемое

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_{\chi_1^* = 0} \frac{1}{v_1} \tau = \frac{q_0}{v_1} \tau = \frac{V\bar{uv} \sin \delta \cos \varphi - v \cos \delta}{[2(v^2 + s^2)]^{1/3}} \tau. \quad (3.30)$$

В силу приближенного соотношения

$$v^2 + s^2 \simeq v(v+u) \sin^2 \delta_1 \quad (3.31)$$

это слагаемое равно

$$\frac{q_0}{v_1} \tau = \frac{V u \bar{v} \sin \delta \cos \varphi - v \cos \delta}{[2v(u+v) \sin^2 \delta_1]^{1/3}} \tau = \xi \tau. \quad (3.32)$$

В результате будем иметь $\tilde{\omega} = \omega + \xi \tau$, или

$$\tilde{\omega} = -\Omega(0, 0) + \frac{\xi^3}{3} + \frac{1}{2v} (\sec \delta_1 - q_0) (s - s_0)^2 + \xi \tau. \quad (3.33)$$

Приравнявая выражения (3.33) и (3.10) для $\tilde{\omega}$, получим соотношение, которое позволяет выразить фазу в интеграле (2.13) через s и τ . Вычисляя интеграл по s (он сводится к интегралу Френеля), получим

$$2iuH_u + H_\varphi = \frac{E_0 V u \bar{v}}{k} e^{-i\Omega(0, 0)} \sqrt{\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta}} e^{i(\varphi + \rho_0)} \times \\ \times \frac{e^{i \frac{\xi^3}{3}}}{V \pi} \int_\Gamma \frac{\omega(\tau - s_1)}{\omega(\tau) \omega'(\tau)} e^{i \xi \tau} d\tau, \quad (3.34)$$

где Γ — контур, идущий по лучу $\arg \tau = \frac{2\pi}{3}$ из бесконечности до нуля и затем по вещественной оси от нуля до бесконечности.

Если $\frac{\pi}{2} - \varphi$ мало (порядка $v^{-\frac{1}{3}}$ или меньше), то вывод формулы (3.34) должен быть видоизменен, причем берется другое асимптотическое выражение для $Z(u, s + 1, t)$. Однако в новом выводе получается такое выражение, к которому предыдущие формулы приводятся в этом предельном случае.

В области полутени, когда величина ξ порядка единицы, величины ρ_0 , q_0 , как это следует из соотношений (3.21), (3.30), имеют порядок $v^{-\frac{1}{3}}$. Поэтому, не внося большой погрешности, мы можем этими величинами пренебречь. Одновременно пренебрежем малой величиной s_1 , имеющей тот же порядок. Тогда формула (3.34) примет вид

$$2iuH_u + H_\varphi = \frac{E_0 V u \bar{v}}{k} e^{i\varphi - i\Omega(0, 0)} G(\xi), \quad (3.35)$$

где

$$G(\xi) = e^{i \frac{\xi^3}{3}} \frac{1}{V \pi} \int_\Gamma \frac{e^{i \xi \tau}}{\omega'(\tau)} d\tau. \quad (3.36)$$

Эти формулы впервые получены в работе [2] (формулы (3.17)—(3.19) главы 2).

В области больших положительных значений ξ (глубокая тень) сделанные нами пренебрежения не существенны ввиду экспоненциального убывания функции $G(\xi)$. В области больших отрицательных ξ (освещенная область) они оправдываются тем, что формула (3.36) смыкается с формулой геометрической оптики.

Следует отметить, что при вычислении интеграла $\int S_2 e^{it \lg \lg \frac{\delta}{2}} dt$ в том же приближении, в котором был вычислен интеграл (2.13), он в силу расположения контура S_2 обращается в нуль. Это оправдывает пренебрежение величиной S_2 .

4. Строгое решение и асимптотические формулы для 2-й поляризации падающей волны

В параграфе 1 нами было получено строгое решение для плоской волны 1-й поляризации. Чтобы получить асимптотические формулы, пригодные для произвольной поляризации падающей волны, мы должны найти прежде всего строгое решение для 2-й поляризации, когда по оси y (рис. 1) направлен вектор \mathbf{E} внешнего поля.

В этом случае декартовы составляющие поля плоской волны равны:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0, & H_x &= -E_0 \cos \delta e^{i\Omega}, \\ E_y &= E_0 e^{i\Omega}, & H_y &= 0, \\ E_z &= 0, & H_z &= E_0 \sin \delta e^{i\Omega}, \end{aligned} \right\} \quad (4.01)$$

а ковариантные составляющие тангенциального магнитного поля определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} 2iuH_u + H_\varphi &= -i \frac{E_0}{k} \sqrt{uv} \cos \delta e^{i\Omega + i\varphi} + i \frac{E_0}{k} u \sin \delta e^{i\Omega}, \\ -2iuH_u + H_\varphi &= i \frac{E_0}{k} \sqrt{uv} \cos \delta e^{i\Omega - i\varphi} - i \frac{E_0}{k} u \sin \delta e^{i\Omega}. \end{aligned} \right\} \quad (4.02)$$

Сравнивая выражения (4.01) с формулами (1.02), мы видим, что поля плоских волн в рассматриваемых двух случаях связаны соотношениями

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{H}^{(1)}, \quad \mathbf{H}^{(2)} = -\mathbf{E}^{(1)}, \quad (4.03)$$

где индексы «1» и «2» относятся соответственно к 1-й и 2-й поляризациям плоской волны.

Учитывая симметрию уравнений Максвелла в свободном пространстве, мы можем выразить в случае 2-й поляризации полные

поля \mathbf{E} и \mathbf{H} через вспомогательные функции C_{s-1} , D_{s-1} , F_s , G_s при помощи тех же формул, какими для 1-й поляризации выражались соответственно \mathbf{H} и $-\mathbf{E}$. Ввиду этого выражения (7.05), (7.06) главы 3 модифицируются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} 2iuE_u^{(s)} &= (V\bar{uv})^s \left(2 \frac{\partial D_{s-1}}{\partial v} - sG_s \right), \\ 2ivE_v^{(s)} &= (V\bar{uv})^s \left(-2 \frac{\partial D_{s-1}}{\partial u} - sG_s \right), \\ iE_\varphi^{(s)} &= (V\bar{uv})^s (C_{s-1} + sG_s), \\ 2uH_u^{(s)} &= -(V\bar{uv})^s \left(2 \frac{\partial C_{s-1}}{\partial v} - sF_s \right), \\ 2vH_v^{(s)} &= -(V\bar{uv})^s \left(-2 \frac{\partial C_{s-1}}{\partial u} - sF_s \right), \\ H_\varphi^{(s)} &= -(V\bar{uv})^s (D_{s-1} - sF_s). \end{aligned} \right\} \quad (4.04)$$

Значения вспомогательных функций получаются, как нетрудно убедиться, те же, что и в параграфе 1, в частности

$$\left. \begin{aligned} C_{s-1}^0 &= \frac{2E_0}{k} (V\bar{uv})^{-s+1} e^{\frac{i}{2}(u-v)\cos\delta} J_{s-1}(V\bar{uv}\sin\delta), \\ D_{s-1}^0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.05)$$

следовательно, и для потенциалов P_{s-1}^0 и Q_{s-1}^0 остаются верными прежние выражения (1.11).

Граничные условия, разумеется, изменятся и примут вид

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial Q_{s-1}}{\partial v} - P_{s-1} &= 0 \quad (\text{при } v = v_0), \\ 4P_{s-1}^* + 2s \frac{\partial P_{s-1}}{\partial v} - sQ_{s-1} &= 0 \quad (\text{при } v = v_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.06)$$

Сравнивая эти соотношения с формулами (1.15), мы видим, что новые граничные условия могут быть получены из старых путем формальной замены по схеме

$$P \rightarrow Q, \quad Q \rightarrow -P. \quad (4.07)$$

Решение уравнений (4.06) дает для коэффициентов вторичной волны $p^1(t)$ и $q^1(t)$ следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} p^1(t) &= \frac{1}{D} [\zeta_1(v, s, -t-i)\psi(v, s, -t-i) + \\ &+ \frac{i(s^2+t^2)}{2t} V + \frac{s^2+t^2}{4}\psi(v, s, -t+i)\zeta_1(v, s, -t+i)], \end{aligned} \right\}$$

$$q^1(t) = \frac{1}{D} [\psi(v, s, -t-i) \zeta_1(v, s, -t-i) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{s^2+t^2}{4} \psi(v, s, -t+i) \zeta_1(v, s, -t+i) \end{aligned} \right\} (4.08)$$

где величины D и V определяются формулами (1.19) и (1.23).

Дальнейший ход решения принципиально не отличается от уже рассмотренного в параграфах 1—3. Поэтому мы сразу напишем результат в виде двойного интеграла

$$2iuH_u + H_\varphi = -\frac{E_0 \sqrt{uv}}{2\pi k \sin \delta} \iint h(s, t) e^{-ts\varphi + it \lg \frac{\delta}{2}} ds dt. (4.09)$$

Величина $-2iuH_u + H_\varphi$, как можно показать, получается, если в (4.09) изменить знак перед интегралом на обратный и произвести замену φ на $-\varphi$. Функция $h(s, t)$ имеет следующее значение:

$$h(s, t) = \frac{i}{\pi} e^{\pi t} (s-it) \frac{\Gamma\left(\frac{-s-it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-it}{2}\right)}{D} \times \\ \times \zeta_1(u, s+1, t) \left[\zeta_1'(v, s-1, -t) + \frac{1-s}{2v} \zeta_1(v, s-1, -t) \right] (4.10)$$

и отличается, как видно, от функции $g(s, t)$ формулы (2.14) только тем, что в нее вместо $\zeta_1(v, s-1, -t)$ входит более сложная величина

$$\left[\zeta_1'(v, s-1, -t) + \frac{1-s}{2v} \zeta_1(v, s-1, -t) \right].$$

Это обстоятельство дает возможность вычислить значение интеграла (4.09) тем же путем, каким был вычислен интеграл (2.15).

Приводя выражение $h(s, t)$ к функциям Z , найдем

$$h(s, t) = 8e^{i\frac{s+1}{2}\pi} \times \\ \times \frac{Z(u, s+1, t) \left[Z'(v, s-1, -t) + \frac{1-s}{2v} Z(v, s-1, -t) \right]}{\sqrt{s^2+t^2} [Z^2(v, s, -t-i) - Z^2(v, s, -t+i)]}. (4.11)$$

Функция Z' выражается асимптотически через функцию Эйри следующим образом:

$$Z'(v, s-1, -t) = \frac{i}{\sqrt{\pi v}} [2v(u+v) \sin^2 \delta_1]^{1/6} w'(\tau - s_1). (4.12)$$

Пренебрегая единицей по сравнению с s и пользуясь формулой (3.31), мы можем написать

$$\frac{1-s}{2v} \simeq - \frac{\sqrt{v(u \sin^2 \delta_1 - v \cos^2 \delta_1)}}{2v}. \quad (4.13)$$

В силу условия (3.19) соотношение (4.13) может быть записано в виде

$$\frac{1-s}{2v} \simeq - \frac{\sqrt{uv} \sin \delta_1 \sin \varphi_1}{2v}. \quad (4.14)$$

Подставив выражения (4.12) и (4.14) в формулу (4.11) и выполняя преобразования, аналогичные тем, которые были сделаны в параграфе 3, найдем значение двойного интеграла (4.09)

$$2iuH_u + H_\varphi = \frac{E_0 \sqrt{uv}}{k} e^{-i\Omega(0,0)} e^{i\varphi} G(\xi) \frac{\sqrt{uv} \sin \delta \sin \varphi}{v} + \\ + \frac{E_0 \sqrt{uv}}{k} e^{-i\Omega(0,0)} e^{i\varphi} F(\xi) \frac{[2v(u+v) \sin^2 \delta]^{1/3}}{v}, \quad (4.15)$$

где

$$F(\xi) = e^{i \frac{\xi^2}{3}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\xi\tau}}{\omega(\tau)} d\tau, \quad (4.16)$$

а Γ есть тот же контур, что и в формуле (3.36).

В освещенной области, достаточно далеко от границы тени, когда функции $F(\xi)$ и $G(\xi)$ можно заменить их асимптотическими представлениями, справедливыми при больших отрицательных ξ :

$$F(\xi) = 2i\xi, \quad G(\xi) = 2, \quad (4.17)$$

выражения $2iuH_u + H_\varphi$ и $-2iuH_u + H_\varphi$ переходят в известные формулы геометрической оптики, т. е. становятся равными удвоенному значению выражений (4.02).

Формулы (3.35) и (4.15) позволяют найти распределение тока на параболоиде при падении плоской волны произвольной поляризации.

Таблицы функций F и G даны в добавлении 3.

ГЛАВА 5

ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА*

Выводятся приближенные формулы для поля, возникающего вблизи поверхности выпуклого проводящего тела при падении на нее плоской волны. Решение задачи получается по методу параболического уравнения, причем на поверхности тела ставятся общие предельные условия импедансного типа. Результаты являются обобщением тех, которые были получены в главе 2.

В главе 2 получен следующий основной результат. На поверхности абсолютного проводника касательные составляющие полного магнитного поля равны их значениям для поля падающей волны, умноженным на некоторую универсальную функцию $G(\xi)$ от аргумента $\xi = l/d$, где l есть расстояние от геометрической границы тени, считаемое в плоскости падения, а d — ширина области полутени. Величина d равна $d = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi} R_0^2}$, где λ — длина волны, а R_0 — радиус кривизны нормального сечения поверхности плоскостью падения. Поскольку поверхностная плотность тока пропорциональна векторному произведению магнитного поля на вектор нормали, отсюда непосредственно получается и распределение токов на поверхности, знание которого необходимо для нахождения амплитуды рассеянной волны.

В настоящей главе мы имеем в виду обобщить этот результат в двух направлениях.

Во-первых, мы предложим себе найти поле не только на самой поверхности тела, но и вблизи поверхности (на расстояниях, малых по сравнению с радиусами кривизны нормального сечения поверхности). Во-вторых, мы не будем считать тело абсолютным проводником, а будем считать его только хорошим проводником, в том смысле, что на его поверхности для касательных составляющих поля имеют место условия Леонтовича.

* Фок, 1946 (текст переработан).

Метод, которым мы будем пользоваться, также будет иным. В предыдущих главах мы, используя локальный характер поля в области полутени, получили наш результат, исходя из строгого решения задачи для частного случая и произведя приближенное суммирование рядов. Теперь же мы найдем решение задачи непосредственно для общего случая произвольной поверхности, используя метод параболического уравнения, предложенный Леонтовичем и развитый в главе II для случая точечного источника (диполя), находящегося на плоской или сферической поверхности.

1. Геометрическая часть задачи

Представим себе выпуклое тело, на которое падает в направлении оси x плоская волна. Если уравнение поверхности тела есть

$$f(x, y, z) = 0, \quad (1.01)$$

то уравнение кривой, представляющей границу геометрической тени на поверхности, получится из уравнения поверхности и из соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (1.02)$$

Выберем на поверхности точку, лежащую на границе геометрической тени и примем ее за начало координат. Направим ось z по нормали к поверхности (в сторону воздуха). Так как нормаль на границе тени перпендикулярна направлению волны, то наши оси x и z будут взаимно перпендикулярны. Ось y выберем так, чтобы получить правую координатную систему.

В окрестности данной точки уравнение поверхности будет иметь вид

$$z + \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0. \quad (1.03)$$

Так как поверхность выпуклая и ось z направлена в выпуклую сторону, то

$$a > 0, c > 0, ac - b^2 \geq 0. \quad (1.04)$$

Уравнение цилиндрической поверхности, отделяющей область геометрической тени в пространстве, получится исключением координаты x из уравнений (1.01) и (1.02). В нашем случае оно будет иметь вид

$$z + \frac{ac - b^2}{2a} y^2 = 0. \quad (1.05)$$

Радиус кривизны нормального сечения поверхности плоскостью падения будет равен

$$R_0 = \frac{1}{a}. \quad (1.06)$$

Предложим себе найти электромагнитное поле вблизи поверхности, на расстояниях от начала координат, малых по сравнению с радиусом кривизны R_0 .

2. Упрощенные уравнения Максвелла

Мы будем предполагать зависимость составляющих поля от времени в виде множителя $e^{-i\omega t}$ и в дальнейшем этого множителя выписывать не будем. Буквой k мы обозначим абсолютное значение волнового вектора

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}. \quad (2.01)$$

Каждая из составляющих поля будет удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \quad (2.02)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Так как мы имеем дело с полем, порожденным плоской волной, идущей в направлении оси x , мы выделим в Ψ множитель e^{ikx} и положим

$$\Psi = e^{ikx}\Psi^*. \quad (2.03)$$

Тогда Ψ^* будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi^*}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial\Psi^*}{\partial x} = 0. \quad (2.04)$$

Составляющие поля удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = ikH_x \quad \text{и т. д.}, \quad (2.05)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -ikE_x \quad \text{и т. д.} \quad (2.06)$$

Выделим теперь в каждой из составляющих поля множитель e^{ikx} и положим

$$E_x = E_x^*e^{ikx} \quad \text{и т. д.}; \quad H_x = H_x^*e^{ikx} \quad \text{и т. д.} \quad (2.07)$$

Мы получим тогда для величин, снабженных звездочкой, уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z^*}{\partial y} - \frac{\partial E_y^*}{\partial z} &= ikH_x^*, \\ \frac{\partial E_x^*}{\partial z} - \frac{\partial E_z^*}{\partial x} - ikE_z^* &= ikH_y^*, \\ \frac{\partial E_y^*}{\partial x} - \frac{\partial E_x^*}{\partial y} + ikE_y^* &= ikH_z^*, \end{aligned} \right\} \quad (2.08)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z^*}{\partial y} - \frac{\partial H_y^*}{\partial z} &= - ikE_x^*, \\ \frac{\partial H_x^*}{\partial z} - \frac{\partial H_z^*}{\partial x} - ikH_z^* &= - ikE_y^*, \\ \frac{\partial H_y^*}{\partial x} - \frac{\partial H_x^*}{\partial y} + ikH_y^* &= - ikE_z^*. \end{aligned} \right\} \quad (2.09)$$

Мы введем теперь основное для дальнейшего предположение о том, что величины со звездочкой суть медленно меняющиеся функции от координат, в том смысле, что их относительное изменение мало на протяжении одной длины волны. Кроме того, мы предположим, что изменение этих величин в направлении оси z (перпендикулярно к поверхности) происходит быстрее, чем в направлениях x и y (параллельно поверхности).

Эти предположения мы можем записать в виде

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial z} = O\left(\frac{k}{m} \Psi^*\right); \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} = O\left(\frac{k}{m'} \Psi^*\right); \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial y} = O\left(\frac{k}{m'} \Psi^*\right), \quad (2.10)$$

где m и m' — безразмерные параметры, причем

$$m' \gg m \gg 1. \quad (2.11)$$

Эти предположения будут обоснованы тем, что полученное решение (которое заведомо единственно) действительно им удовлетворяет.

Из этих предположений следует, что в уравнении (2.04) вторые производные по x и по y малы по сравнению со второй производной по z , так что это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} = 0. \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что величина m' — порядка m^2 , и мы можем положить

$$m' = m^2, \quad (2.13)$$

после чего соотношения (2.10) напишутся

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} = O\left(\frac{k}{m^2} \Psi^*\right); \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial y} = O\left(\frac{k}{m^2} \Psi^*\right); \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} = O\left(\frac{k}{m} \Psi^*\right). \quad (2.14)$$

Из соотношений (2.14), которые имеют место для всех составляющих поля, вытекает, что в уравнении (2.12) отброшены члены порядка $\frac{1}{m^2}$ относительно выписанных. Такими членами мы будем постоянно пренебрегать в дальнейшем.

Оценим на основе (2.14) порядок величины различных членов в уравнениях (2.08) и (2.09). При этом мы примем H_y^* и H_z^* за основные величины, с которыми будем сравнивать остальные. Что касается относительного порядка величины H_y^* и H_z^* , то мы будем считать, что порядок одной из них отличается от порядка другой самое большее множителем или делителем m .

Прежде всего из первого уравнения (2.09) получаем

$$E_x^* = O\left(\frac{1}{m} H_y^*\right) + O\left(\frac{1}{m^2} H_z^*\right). \quad (2.15)$$

Подставляя эту оценку во второе уравнение (2.08), убеждаемся, что член $\frac{\partial E_x^*}{\partial z}$ весьма мал (порядка $\frac{1}{m^2}$) по сравнению с членом ikH_y^* . С другой стороны, непосредственно из (2.14) видно, что член $\frac{\partial E_z^*}{\partial x}$ будет порядка $\frac{1}{m^2}$ относительно ikE_z^* . Член такого порядка мы должны отбросить, после чего второе уравнение (2.08) дает просто $E_z^* = -H_y^*$. Аналогично третье уравнение (2.08) дает $E_y^* = H_z^*$, а первое уравнение (2.08) показывает, что H_x^* будет порядка

$$H_x^* = O\left(\frac{1}{m^2} H_y^*\right) + O\left(\frac{1}{m} H_z^*\right). \quad (2.16)$$

Эти значения согласуются и с уравнениями (2.09).

Таким образом, после отбрасывания малых членов все составляющие поля могут быть выражены через H_y^* и H_z^* . Так как эти выражения не содержат производных по x , то они имеют тот же

вид и для составляющих поля (2.07), а именно:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{i}{k} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), \\ E_y &= H_z, \\ E_z &= -H_y, \\ H_x &= \frac{i}{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Последнее уравнение можно получить и непосредственно из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$.

К этим уравнениям нужно присоединить уравнение Гельмгольца для каждой из составляющих поля или уравнение вида (2.12) для величин со звездочкой.

3. Упрощенные предельные условия

Как показал Леонтович, если комплексная диэлектрическая постоянная среды

$$\eta = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{ck} \quad (3.01)$$

велика по абсолютной величине по сравнению с единицей, можно не рассматривать поля внутри среды, а учитывать влияние среды на поле в воздухе путем предельных условий, связывающих касательные составляющие этого поля на поверхности раздела.

Условия Леонтовича (точнее, их обобщение на случай, когда магнитная проницаемость среды μ отлична от нуля) могут быть написаны в виде трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} E_x - n_x E_n &= \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} (n_y H_z - n_z H_y), \\ E_y - n_y E_n &= \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} (n_z H_x - n_x H_z), \\ E_z - n_z E_n &= \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} (n_x H_y - n_y H_x), \end{aligned} \right\} \quad (3.02)$$

из которых только два независимы.

В этих уравнениях n_x, n_y, n_z есть единичный вектор нормали к поверхности (направленной в сторону воздуха), а величина E_n имеет значение

$$E_n = n_x E_x + n_y E_y + n_z E_z. \quad (3.03)$$

Можно показать, что условия (3.02) имеют место, если выполнены неравенства

$$|\eta\mu| \gg 1, \quad (3.04)$$

$$kR_0 |\sqrt{\eta\mu}| \gg 1, \quad (3.05)$$

где R_0 есть радиус кривизны нормального сечения поверхности.

Для проводника, в котором ток проводимости преобладает над током смещения, эти неравенства означают следующее. Согласно первому из них, квадрат толщины слоя скин-эффекта должен быть мал по сравнению с квадратом длины волны в воздухе. Согласно второму неравенству толщина этого слоя должна быть мала по сравнению с радиусами кривизны нормального сечения поверхности.

В дальнейшем мы положим магнитную проницаемость среды равной единице и преобразуем условия (3.02), используя выведенные ранее соотношения $E_y = H_z$ и $E_z = -H_y$. Из формул (3.02) мы получим

$$(1 - n_x^2) E_x = \left(n_x + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) (n_y H_z - n_z H_y); \quad (3.06)$$

$$(1 - n_x^2) H_x = (n_x + \sqrt{\eta}) (n_y H_y + n_z H_z). \quad (3.07)$$

Используя оценку (2.16) для H_x и считая, что величина $\sqrt{\eta}$ велика (порядка m или больше), мы убедимся, что левая часть (3.07) мала по сравнению с отдельными членами правой части. Заменяя ее нулем, получим вместо (3.07)

$$n_y H_y + n_z H_z = 0. \quad (3.08)$$

Используя это соотношение, получаем из (3.06)

$$n_z E_x = - \left(n_x + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) H_y. \quad (3.09)$$

Сюда мы можем подставить выражение для E_x из первого уравнения (2.17). Так как величина n_z мало отличается от единицы, мы можем написать

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} + ik \left(n_x + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) H_y = \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (3.10)$$

С той же точностью уравнение (3.08) может быть написано в виде

$$H_z = -n_y H_y. \quad (3.11)$$

Если считать величины n_x , n_y , $\frac{1}{m}$ малыми одного порядка и пренебрегать ими по сравнению с единицей, то предельные усло-

вия упростятся еще больше и примут вид

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} + ik \left(n_x + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) H_y = 0; \quad (3.12)$$

$$H_z = 0. \quad (3.13)$$

В самом деле, поскольку n_y мало, условие (3.11) может быть заменено на (3.13). Далее, стоящая в правой части (3.10) производная от H_z берется по почти касательному направлению (по оси y), и, следовательно, если H_z равно нулю, то эта производная будет мала и в данном приближении ею можно пренебречь.

При использовании предельных условий (3.12) и (3.13) каждая из составляющих H_y и H_z определяется независимо от другой: каждая из них удовлетворяет отдельному дифференциальному уравнению, отдельному предельному условию и отдельному условию на бесконечности. Из этих условий обе величины, H_y и H_z , определяются однозначно.

Таким путем величины H_y и H_z получаются с точностью до малых членов порядка $\frac{1}{m}$. Чтобы найти и эти поправочные члены, можно подставить значения H_y и H_z из первого приближения в правые части уравнений (3.10) и (3.11) и рассматривать эти уравнения как неоднородные предельные условия для поправочных членов. Эти члены должны удовлетворять также условиям на бесконечности; последние состоят в требовании, чтобы на больших расстояниях амплитуда той части поправочных членов, фаза которой соответствует падающей волне, обращалась в нуль. Это требование вытекает из того, что падающая волна полностью учтена уже в главных членах.

Зная H_y и H_z , мы можем, наконец, определить все остальные составляющие поля из уравнений (2.17).

4. Определение составляющих H_y и H_z в первом приближении

Положим

$$H_y = H_y^0 e^{ikx} \Psi^*, \quad (4.01)$$

где H_y^0 — амплитуда падающей волны на бесконечности.

Согласно (2.12) и (3.13) функция Ψ^* должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} = 0 \quad (4.02)$$

и предельному условию

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial z} + ik \left(ax + by + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) \Psi^* = 0 \quad (4.03)$$

на поверхности тела

$$z + \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0. \quad (4.04)$$

В формуле (4.03) мы заменили величину n_x ее приближенным значением из уравнения поверхности.

Предположим, что функция Ψ^* зависит от координат x , y , z только через посредство двух переменных:

$$\xi = m(ax + by), \quad (4.05)$$

$$\zeta = 2am^2 \left[z + \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) \right], \quad (4.06)$$

где m — большой параметр, который будет определен ниже.

Масштабы здесь выбраны так, что уравнение (1.05), определяющее границу тени в пространстве, принимает вид

$$\zeta = \xi^2. \quad (4.07)$$

Переменная ζ принимает только неотрицательные значения, а переменная ξ может быть и положительной, и отрицательной.

При этом в освещенной части пространства будет $\xi < \sqrt{\zeta}$, а в теневой части $\xi > \sqrt{\zeta}$, где корень квадратный взят с положительным знаком.

Вычисляя производные, мы будем иметь

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} = ma \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} + 2\xi \frac{\partial \Psi^*}{\partial \zeta} \right), \quad (4.08)$$

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial z} = 2m^2 a \frac{\partial \Psi^*}{\partial \zeta}, \quad (4.09)$$

и уравнение (4.02) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \zeta^2} + i \frac{k}{2m^2 a} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} + 2\xi \frac{\partial \Psi^*}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (4.10)$$

Мы выбираем параметр m так, чтобы коэффициент в этом уравнении равнялся единице

$$m = \sqrt[3]{\frac{k}{2a}} = \sqrt[3]{\frac{kR_0}{2}}. \quad (4.11)$$

Так как мы считаем, что длина волны весьма мала по сравнению с радиусом кривизны R_0 поверхности, то наш параметр m действительно будет большим. Выражения для производных могут быть теперь написаны в виде

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} = \frac{k}{2m^2} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} + 2\xi \frac{\partial \Psi^*}{\partial \zeta} \right), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial z} = \frac{k}{m} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \zeta}. \quad (4.13)$$

Отсюда видно, что оценки (2.14) будут соблюдаться, если только производные от Ψ^* по ξ и по ζ будут порядка самого Ψ^* . При нашем выборе m уравнение (4.10) напишется

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \zeta^2} + i \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} + 2\xi \frac{\partial \Psi^*}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (4.14)$$

Предельное условие (4.03) принимает вид

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial \zeta} + i\xi \Psi^* + q \Psi^* = 0, \quad (4.15)$$

где мы положили для краткости

$$q = \frac{im}{V\eta} = \frac{i}{V\eta} \sqrt{\frac{k}{2a}}. \quad (4.16)$$

Величина q будет, вообще говоря, конечной, но может быть и малой (для очень хорошего проводника) или большой (для почти плоской поверхности).

Условие на бесконечности для Ψ^* состоит в том, что в освещенной области та часть Ψ^* , которая имеет фазу, равную нулю, должна входить с амплитудой, равной единице.

Чтобы упростить уравнение, положим

$$\Psi^* = e^{-i\xi\zeta + i\frac{\xi^2}{3}} V. \quad (4.17)$$

Тогда уравнение и предельные условия для V будут

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + i \frac{\partial V}{\partial \xi} + \zeta V = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \zeta} + qV = 0 \text{ при } \zeta = 0. \quad (4.19)$$

Условие на бесконечности (большие отрицательные ξ) примет вид

$$V = e^{i\xi\zeta - i\frac{\xi^2}{3}} - V^*, \quad (4.20)$$

где V^* соответствует отраженной волне.

Обозначим через φ фазу первого члена в (4.20)

$$\varphi = \xi\zeta - \frac{\xi^3}{3} \quad (4.21)$$

и через φ^* — фазу V^* . Фазу φ^* можно определить из геометрических соображений, зная фазу φ и разность фаз $\varphi^* - \varphi$ между отраженной и падающей волной.

А именно, можно показать, что φ^* равно экстремальному значению функции

$$\varphi^* = t\xi + \frac{2}{3}(\zeta - t)^{3/2} - \frac{4}{3}(-t)^{3/2}, \quad (4.22)$$

т. е. значению при t , определяемом из $\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = 0$. Аналогично, заданная фаза (4.21) равна экстремальному значению функции

$$\varphi = t\xi - \frac{2}{3}(\zeta - t)^{3/2}. \quad (4.23)$$

На выводе мы не останавливаемся, так как он довольно сложен, а результат может быть получен и чисто аналитически, путем исследования готового решения (см. параграф 6).

Уравнение (4.18) совпадает с тем, которое встречается в задаче о дифракции радиоволн вокруг земной поверхности. Это уравнение (при других условиях на бесконечности) будет исследовано в главе 11.

Уравнение (4.18) допускает частные решения вида

$$V = e^{t\xi t} \omega(t - \zeta), \quad (4.24)$$

где $\omega(t)$ есть интеграл обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\omega''(t) = t\omega(t). \quad (4.25)$$

Нам понадобятся оба интеграла уравнения (4.25). В качестве одного из них возьмем функцию

$$\omega_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_1} e^{zt - \frac{1}{3}z^3} dz, \quad (4.26)$$

где контур Γ_1 идет от бесконечности к нулю по лучу $\arg z = -\frac{2}{3}\pi$ и от нуля до бесконечности по лучу $\arg z = 0$ (по положительной

вещественной оси). Другим (линейно независимым) интегралом будет функция

$$\omega_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_2} e^{zt - \frac{1}{3} z^3} dz, \quad (4.27)$$

где контур Γ_2 есть зеркальное отражение контура Γ_1 в вещественной оси плоскости z . При вещественных t функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ будут комплексными сопряженными. Мы будем иметь

$$\omega_1(t) = u(t) + iv(t); \quad \omega_2(t) = u(t) - iv(t). \quad (4.28)$$

Для вещественных функций $u(t)$, $v(t)$ и их производных нами составлены подробные таблицы (см. добавление 2).

Асимптотическое выражение $\omega_1(t)$, справедливое при больших отрицательных t (а также в некотором секторе плоскости комплексной переменной t), имеет вид

$$\omega_1(t) = (-t)^{-1/4} \exp \left[i \frac{2}{3} (-t)^{3/2} + i \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4.29)$$

Аналогично

$$\omega_2(t) = (-t)^{-1/4} \exp \left[-i \frac{2}{3} (-t)^{3/2} - i \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4.30)$$

Из формул (4.23) и (4.30) видно, что выражение

$$e^{it\zeta} \omega_2(t - \zeta) \quad (4.31)$$

имеет фазу φ , экстремум которой равен фазе падающей волны [первый член в (4.20)]. Поэтому можно ожидать, что, интегрируя выражение (4.31) по контуру, проходящему вблизи точки экстремума фазы, мы получим выражение с фазой, равной фазе (4.21) падающей волны. Действительно, опираясь на соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xp} v(p) dp = e^{\frac{1}{3} x^3} \quad (\operatorname{Re} x \geq 0), \quad (4.32)$$

$$\omega_2 \left(\rho e^{i \frac{2\pi}{3}} \right) = 2e^{-i \frac{\pi}{6}} v(\rho), \quad (4.33)$$

можно доказать равенство

$$e^{it\zeta - i \frac{\zeta^3}{3}} = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_C e^{it\zeta} \omega_2(t - \zeta) dt, \quad (4.34)$$

где контур C идет по лучу $\arg t = \frac{2}{3} \pi$ от бесконечности к нулю и по лучу $\arg t = -\frac{1}{3} \pi$ от нуля до бесконечности.

С другой стороны, если функция $f(t)$ имеет при больших отрицательных t фазу, равную $-\frac{4}{3}(-t)^{3/2}$, то фаза выражения

$$e^{i\xi t} \omega_1(t - \zeta) f(t) \quad (4.35)$$

равна φ^* формулы (4.22). Поэтому, интегрируя выражение (4.35) по контуру, проходящему вблизи точки экстремума фазы φ^* , мы получим выражение с фазой, равной фазе отраженной волны.

Из сказанного следует, что мы можем искать выражение для V в виде

$$V = \frac{i}{2V\pi} \int_{\zeta} e^{i\xi t} [\omega_2(t - \zeta) - f(t) \omega_1(t - \zeta)] dt. \quad (4.36)$$

Это выражение удовлетворяет уравнению (4.18) и условию на бесконечности (4.20). Чтобы удовлетворить также и предельному условию (4.19), мы определим функцию $f(t)$ из равенства

$$\omega_2'(t) - q\omega_2(t) = f(t) [\omega_1'(t) - q\omega_1(t)], \quad (4.37)$$

откуда

$$f(t) = \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)}. \quad (4.38)$$

Из (4.29) и (4.30) нетрудно видеть, что найденное $f(t)$ имеет нужную фазу.

Таким образом, мы имеем окончательно

$$V = \frac{i}{2V\pi} \int_{\zeta} e^{i\xi t} \left[\omega_2(t - \zeta) - \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - \zeta) \right] dt. \quad (4.39)$$

С этим значением V величина

$$H_y = H_y^0 e^{ikh} e^{-i\xi\zeta + i\frac{\xi^2}{3}} V \quad (4.40)$$

дает составляющую магнитного поля по оси y .

Используя соотношение

$$\omega_1'(t) \omega_2(t) - \omega_2'(t) \omega_1(t) = -2i, \quad (4.41)$$

легко проверить, что при $\zeta = 0$ (т. е. на поверхности тела) выражение для V принимает вид

$$V = \frac{1}{V\pi} \int e^{i\xi t} \frac{dt}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)}. \quad (4.42)$$

Подстановка последнего выражения в (4.40) позволяет сделать следующее заключение.

Касательные составляющие H_{tg} магнитного поля на поверхности тела равны их значениям H_{tg}^{ex} для внешнего поля, умноженным на некоторую универсальную функцию от приведенного расстояния ξ от границы тени и от параметра q , зависящего от длины волны и свойств тела. Мы имеем:

$$H_{tg} = H_{tg}^{ex} G(\xi, q), \quad (4.43)$$

где

$$G(\xi, q) = e^{i \frac{\xi^2}{3}} \frac{1}{V\pi} \int_c e^{i\xi t} \frac{dt}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)}. \quad (4.44)$$

Этот результат вполне согласуется с тем, который был получен в главе 2 совершенно другим методом и представляет его обобщение на случай конечной электропроводности тела.

Для абсолютного проводника $q = 0$, и мы имеем:

$$G(\xi, 0) = G(\xi), \quad (4.45)$$

где $G(\xi)$ — функция, табулированная в добавлении 3.

Заметим, что величина V , определяемая формулой (4.42), встречается и в решении задачи о распространении радиоволн вокруг земной поверхности, приведенном в главе 10 [она обозначена там через $V_1(\xi, q)$].

Нам остается определить составляющую магнитного поля H_z из дифференциального уравнения и предельного условия $H_z = 0$ на поверхности тела.

Положим

$$H_z = H_z^0 e^{ikhx} \Phi^*, \quad (4.46)$$

где H_z^0 — амплитуда падающей волны на бесконечности.

Функция Φ^* должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = 0 \quad (4.47)$$

и предельному условию

$$\Phi^* = 0 \quad (4.48)$$

на поверхности тела.

Условие на бесконечности будет то же, как для Ψ^* .

Мы будем считать, что функция Φ^* зависит от тех же переменных ξ, ζ , как Ψ^* , и произведем подстановку

$$\Phi^* = e^{-i\xi\zeta + i\frac{\xi^3}{3}} U. \quad (4.49)$$

Так как уравнение для Φ^* то же, что и для Ψ^* , то уравнение для U совпадет с уравнением (4.18) для V . Мы получаем для определения U уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + i \frac{\partial U}{\partial \xi} + \zeta U = 0, \quad (4.50)$$

предельное условие

$$U = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad (4.51)$$

и условие на бесконечности

$$U = e^{i\xi\zeta - i\frac{\xi^3}{3}} - U^*, \quad (4.52)$$

где U^* соответствует отраженной волне.

Если мы будем искать U в виде (4.36), то функция $f(t)$ определится из условия (4.51), и мы получим

$$U = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_c e^{i\xi t} \left[\omega_2(t - \zeta) - \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \omega_1(t - \zeta) \right] dt. \quad (4.53)$$

Подстановка (4.53) и (4.49) в (4.46) дает значение H_z в первом приближении. Мы видим, что значение нормальной составляющей полного магнитного поля вблизи поверхности тела равно ее значению для внешнего поля, умноженному на некоторую универсальную функцию Φ^* .

5. Определение поля во втором приближении

Во втором приближении предельные условия для H_y и H_z имеют вид (3.10) и (3.11). Чтобы удовлетворить им, положим

$$H_y = H_y^0 e^{ikx} \Psi^* + \frac{1}{m} H_z^0 e^{ikx} Q^*, \quad (5.01)$$

$$H_z = \frac{1}{m} H_y^0 e^{ikx} P^* + H_z^0 e^{ikx} \Phi^*, \quad (5.02)$$

где m есть введенный выше большой параметр, а функции P^* и Q^* имеют тот же порядок величины, как найденные ранее функции Ψ^* и Φ^* .

Все четыре функции P^* , Q^* , Ψ^* , Φ^* удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (4.02) или (4.14), а на поверхности тела функции Ψ^* и Φ^* удовлетворяют предельным условиям

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} + (i\xi + q)\Psi^* = 0; \quad \Phi^* = 0. \quad (5.03)$$

При подстановке H_y и H_z в предельные условия (3.10) и (3.11) мы должны в левой части брать полные выражения (5.01) и (5.02), тогда как в правой части мы можем пренебречь членами, содержащими P^* и Q^* . Учитывая предельные условия (5.03) для Ψ^* и Φ^* , мы получим

$$P^* = -m(bx + cy)\Psi^*, \quad (5.04)$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \xi} + (i\xi + q)Q^* = m(bx + cy)\frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi}. \quad (5.05)$$

Пользуясь равенством

$$bx + cy = \frac{b}{a}(ax + by) + \frac{ac - b^2}{a}y \quad (5.06)$$

или

$$m(bx + cy) = \frac{b}{a}\xi + \frac{ac - b^2}{a}my, \quad (5.07)$$

мы можем писать вместо (5.04) и (5.05)

$$P^* = -\frac{b}{a}\xi\Psi^* - \frac{ac - b^2}{a}my\Psi^*, \quad (5.08)$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \xi} + (i\xi + q)Q^* = \left(\frac{b}{a}\xi + \frac{ac - b^2}{a}my\right)\frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi}. \quad (5.09)$$

Но в силу предельного условия (5.03) для Ψ^* мы имеем на поверхности тела

$$\xi\Psi^* = i\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} + q\Psi^*\right). \quad (5.10)$$

Поэтому уравнение (5.08) может быть написано в виде

$$P^* = -\frac{ib}{a}\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} - \left(\frac{ibq}{a} + \frac{ac - b^2}{a}my\right)\Psi^*. \quad (5.11)$$

Это уравнение должно выполняться на поверхности тела, но его правая часть сохраняет смысл и в некоторой области вблизи поверхности, причем оба члена правой части удовлетворяют тому же параболическому уравнению, как и Ψ^* . В самом деле,

если писать параболическое уравнение для Ψ^* в виде (4.14), то ясно, что вместе с Ψ^* ему удовлетворяет и $\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi}$; если же писать уравнение в виде (4.02), содержащем производные по x и по z , но не по y , то ясно, что вместе с Ψ^* ему удовлетворяет и $y\Psi^*$.

Таким образом, определяемая формулой (5.11) величина P^* удовлетворяет параболическому уравнению. Кроме того, величина P^* должна удовлетворять условию на бесконечности, согласно которому амплитуда члена, соответствующего падающей волне, должна равняться нулю. Этому условию выражение (5.11) не удовлетворяет, но его нетрудно видоизменить (не нарушая предельного условия на поверхности) так, чтобы условие на бесконечности тоже выполнялось. Для этого достаточно добавить к (5.11) член, пропорциональный Φ^* (причем множитель пропорциональности может зависеть и от y). В самом деле, если мы вместо (5.11) напишем

$$P^* = -\frac{ib}{a} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} + \left(\frac{ibq}{a} + \frac{ac - b^2}{a} my \right) (\Phi^* - \Psi^*), \quad (5.12)$$

то это выражение будет уже удовлетворять всем поставленным условиям: параболическому дифференциальному уравнению, предельному условию на поверхности тела и условию на бесконечности. Подстановка величины (5.12) в формулу (5.02) дает искомый поправочный член в выражении для составляющей H_z .

Переходим к определению Q^* . Оставляя пока в стороне условие на бесконечности, мы будем искать выражение для Q^* в виде

$$Q^* = A \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi} + B \Phi^*. \quad (5.13)$$

Здесь A есть постоянная, тогда как B может быть функцией от y .

Используя дифференциальное уравнение для Φ^* , мы получаем для производной $\frac{\partial Q^*}{\partial \xi}$ выражение

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \xi} = -2iA\xi \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi} - iA \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi} + B \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi}, \quad (5.14)$$

а так как на поверхности тела $\Phi^* = 0$ и $\frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi} = 0$, то левая часть (5.09) будет равна

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \xi} + (i\xi + q) Q^* = (-iA\xi + Aq + B) \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi}. \quad (5.15)$$

Сравнивая это равенство с предельным условием (5.09), получим совпадение, если величины A и B имеют значения

$$A = \frac{ib}{a}; \quad B = -\frac{ib}{a} q + \frac{ac - b^2}{a} my. \quad (5.16)$$

Таким образом, выражение

$$Q^* = \frac{ib}{a} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi} + \left(-\frac{ib}{a} q + \frac{ac - b^2}{a} my \right) \Phi^* \quad (5.17)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению и предельному условию на поверхности тела. Чтобы удовлетворить также и условию на бесконечности, заметим, что однородному предельному условию, получаемому из неоднородного условия (5.09) для Q^* заменой правой части нулем, удовлетворяет согласно (5.03) функция Ψ^* . Поэтому, не нарушая предельного условия (5.09), мы можем добавить к величине Q^* член, пропорциональный Ψ^* (причем коэффициент пропорциональности может зависеть от y). Получаемое для Q^* выражение

$$Q^* = \frac{ib}{a} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi} + \left(-\frac{ib}{a} q + \frac{ac - b^2}{a} my \right) (\Phi^* - \Psi^*) \quad (5.18)$$

будет удовлетворять всем поставленным условиям и дает, таким образом, поправочный член в выражении (5.01) для составляющей H_y магнитного поля.

Заметим, что полученные для P^* и Q^* выражения (5.12) и (5.18) обладают определенной симметрией и переходят друг в друга при перестановке

$$\Phi^* \rightarrow -\Psi^*, \quad \Psi^* \rightarrow -\Phi^*, \quad q \rightarrow -q. \quad (5.19)$$

Вводя найденные для P^* и Q^* выражения в формулы (5.01) и (5.02), мы получим составляющие поля H_y и H_z во втором приближении. Остальные составляющие поля получатся из упрощенных уравнений Максвелла (2.17). Мы будем иметь

$$E_y = H_z; \quad E_z = -H_y \quad (5.20)$$

и после пренебрежения малыми величинами

$$E_x = -\frac{i}{m} H_y^0 e^{ikx} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi}; \quad H_x = \frac{i}{m} H_z^0 e^{ikx} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi}. \quad (5.21)$$

Составляющие поля E_x и H_x имеют, таким образом, тот же порядок величины, как поправочные члены в выражении для других составляющих.

Теперь все составляющие поля определены.

6. Поле в освещенной области

Чтобы исследовать поле в освещенной области, мы должны вывести для функций U и V , определяемых формулами (4.53) и (4.39), асимптотические выражения, справедливые при больших отрицательных значениях ξ .

Положим согласно (4.21)

$$\varphi = \xi\zeta - \frac{1}{3}\xi^3. \quad (6.01)$$

Тогда будет

$$U = e^{i\varphi} - U^*, \quad (6.02)$$

$$V = e^{i\varphi} - V^*, \quad (6.03)$$

где

$$U^* = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_C e^{i\xi t} \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \omega_1(t - \zeta) dt, \quad (6.04)$$

$$V^* = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_C e^{i\xi t} \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - \zeta) dt. \quad (6.05)$$

Фаза подынтегральных функций в выражениях U^* и V^* равна рассмотренному ранее (формула (4.22)) выражению:

$$\varphi^* = t\xi + \frac{2}{3}(\xi - t)^{3/2} - \frac{4}{3}(-t)^{3/2}. \quad (6.06)$$

В точке экстремума фазы мы имеем:

$$\overline{-t} = \frac{1}{3}\sigma - \frac{2}{3}\xi, \quad (6.07)$$

$$\overline{\xi - t} = \frac{2}{3}\sigma - \frac{1}{3}\xi, \quad (6.08)$$

где для краткости положено

$$\sigma = \sqrt{\xi^2 + 3\xi}, \quad (6.09)$$

причем корень квадратный берется с положительным знаком.

Экстремальное значение фазы равно

$$\varphi^* = \frac{1}{27}(4\sigma^3 - 3\sigma^2\xi - 2\xi^3). \quad (6.10)$$

В дальнейшем мы будем разумеать под φ^* это экстремальное значение. Применяя метод стационарной фазы, получим для U^* асимптотическое выражение

$$U^* = e^{i\varphi^*} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2\xi}{3\sigma}}. \quad (6.11)$$

Подынтегральная функция в V^* отличается от подынтегральной функции в U^* медленно меняющимся множителем, который при больших отрицательных значениях t приближенно равен

$$\frac{\frac{\omega_2'}{\omega_2} - q}{\frac{\omega_1'}{\omega_1} - q} = \frac{q - i\sqrt{-t}}{q + i\sqrt{-t}}. \quad (6.12)$$

Поэтому асимптотическое значение V^* будет отличаться от асимптотического значения U^* множителем (6.12), взятым в точке экстремума. Следовательно, мы имеем

$$V^* = e^{i\varphi^*} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2\xi}{3\sigma}} \frac{q - \frac{i}{3}(\sigma - 2\xi)}{q + \frac{i}{3}(\sigma - 2\xi)}. \quad (6.13)$$

Выясним геометрический смысл полученных формул.

Определяя координаты x_0, y_0, z_0 точки падения луча, попавшего после отражения в данную точку x, y, z , мы получим следующие приближенные формулы, справедливые для скользящего падения луча:

$$x_0 = x - s; \quad y_0 = y, \quad (6.14)$$

где

$$s = \frac{\sigma + \xi}{3am}. \quad (6.15)$$

Геометрический смысл величины s есть длина пути, пройденного лучом после отражения. Косинус угла падения равен

$$\cos \theta = -(ax_0 + by_0) = \frac{1}{3m}(\sigma - 2\xi). \quad (6.16)$$

Точное значение разности $x_0 - x + s$ равно

$$x_0 - x + s = 2s \cos^2 \theta. \quad (6.17)$$

Разность фаз отраженной и падающей волн пропорциональна этой величине, а именно

$$\varphi^* - \varphi = k(x_0 - x + s) = 2ks \cos^2 \theta. \quad (6.18)$$

Подставляя сюда значение s и $\cos \theta$ из (6.15) и (6.16) и пользуясь (4.11), мы получим

$$\varphi^* - \varphi = \frac{4}{27}(\sigma + \xi)(\sigma - 2\xi)^2. \quad (6.19)$$

Нетрудно проверить, что это выражение равно разности величин (6.10) и (6.01).

Таким образом, разность фаз двух членов выражений (6.02) или (6.03) согласуется с выводами из геометрической оптики.

Рассмотрим теперь амплитуду отраженной волны.

Подставляя (6.11) в (6.02), мы будем иметь

$$U = e^{i\varphi} - e^{i\varphi^*} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2\xi}{3\sigma}}. \quad (6.20)$$

Пользуясь выражением (4.16) для q и значением (6.16) для $\cos \theta$ и подставляя (6.13) в (6.03), получим

$$V = e^{i\varphi} - e^{i\varphi^*} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2\xi}{3\sigma} \frac{1 - \cos \theta \sqrt{\eta}}{1 + \cos \theta \sqrt{\eta}}}. \quad (6.21)$$

Функция U соответствует случаю, когда падающая волна поляризована так, что электрический вектор перпендикулярен к плоскости падения. Функция V соответствует случаю, когда электрический вектор лежит в плоскости падения. Нетрудно видеть, что в обоих случаях наши формулы дают правильные значения коэффициентов Френеля.

7. Заключение

Полученные нами формулы непосредственно дают поле вблизи некоторой точки, лежащей на поверхности проводящего тела на границе геометрической тени. Но эта точка может быть выбрана произвольно. Поэтому наши формулы дают также поле в некоторой кольцевой области, примыкающей к замкнутой линии, которая представляет границу геометрической тени на поверхности.

Рассмотрим теперь поле вне этой кольцевой области на расстояниях от поверхности, малых по сравнению с ее радиусом кривизны. В затененной части пространства мы можем положить амплитуду поля равной нулю. В самом деле, полученное решение убывает с расстоянием от геометрической границы тени по показателю закону, и если величина ξ — $\sqrt{\xi}$ положительна и велика, то оно практически равно нулю. Поэтому мы получаем непрерывный переход к полной тени. Обратимся теперь к освещенной части пространства. В параграфе 6 мы убедились в том, что при переходе к освещенной части наши формулы дают поле, совпадающее с тем, какое получается по формулам Френеля. Поэтому, если в освещенной области мы будем вычислять поле по формулам Френеля, мы получим непрерывный переход от области полутени к освещенной области.

Таким образом, наше решение позволяет определить поле вдоль *в с е й* поверхности тела (в некотором слое, толщина которого мала по сравнению с радиусами кривизны поверхности). В частности, мы получаем возможность найти распределение токов, возбуждаемых падающей плоской волной на поверхности тела. Но, зная токи, мы можем по известным формулам найти векторный потенциал, а значит, и поле рассеянной волны, *в о в с е м* пространстве (в том числе и на больших расстояниях от тела).

Следовательно, наши формулы дают, в конечном счете, полное (хотя и приближенное) решение задачи диффракции плоской волны от выпуклого проводящего тела произвольной формы.

ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ ФРЕНЕЛЯ И ЗАКОНЫ ДИФФРАКЦИИ *

Формулы Френеля, устанавливающие связь между амплитудами падающей и отраженной световой волны, пишутся для составляющих электромагнитного поля, причем оказывается, что они согласуются с предельными условиями Леонтовича. С другой стороны, из формул дифференциальной геометрии на отражающей поверхности выводится выражение для сечения пучка отраженных лучей. Вместе с законами отражения Френеля это выражение приводит к приближенному представлению отраженной электромагнитной волны. С найденным приближенным представлением сравниваются полученные в главе 5 диффракционные формулы, справедливые также и в области полутени и тени. В результате устанавливается, что в той части освещенной области, где угол наклона луча к поверхности мал, диффракционные формулы главы 5 переходят в обобщенные (путем введения поправки на расширение пучка) формулы Френеля.

В 1821 г. французский ученый Френель установил формулы, определяющие интенсивности и направления колебаний в отраженном и преломленном луче света, падающего на плоскую поверхность прозрачного тела.

Френель получил свои формулы на основе упругой теории света, в предположении поперечных колебаний упругой среды (эфира), причем ему пришлось ввести особые гипотезы об упругости и плотности эфира в средах, отличающихся друг от друга показателем преломления. Вывод этот не соответствует современному взглядам на природу света и имеет в настоящее время только исторический интерес. Однако самые формулы блестяще оправдались на опыте и в дальнейшем служили пробным камнем для проверки всякой новой теории света.

В 1865 г. появилась созданная Максвеллом электромагнитная теория света, которая выдержала эту проверку и, кроме того, дала объяснение необычайно широкому кругу явлений, включая те, которые были открыты много лет спустя, как-то: радио-

* Фок, 1948.

волны (Герц, Попов), световое давление (Лебедев) и многие другие.

Законы отражения Френеля вытекают без всяких дополнительных гипотез из уравнений Максвелла и соответствующих граничных условий, причем оказывается, что под рассмотренными Френелем поперечными колебаниями нужно разуметь колебания электрического вектора.

Законы Френеля применимы не только к свету, но и к электромагнитным колебаниям любой частоты, в том числе к радиоволнам. С другой стороны, законы Френеля легко обобщаются на случай, когда волны падают на плоскую поверхность *по отношению* тела. Формулы Френеля сохраняют здесь свой вид, с той только разницей, что показатель преломления n должен быть заменен комплексной величиной, а именно, корнем квадратным из комплексной диэлектрической постоянной среды.

Формулы Френеля непосредственно позволяют выразить амплитуды электромагнитного поля *отраженной* волны через амплитуды поля *падающей* волны, причем под теми и другими амплитудами подразумеваются их значения на отражающей поверхности. Если на поверхность падает плоская волна и если сама отражающая поверхность плоская, то амплитуды поля отраженной волны на некотором расстоянии от поверхности будут те же, как на самой поверхности; от расстояния от поверхности будет зависеть только фаза. Если же отражающая поверхность выпуклая, то падающий параллельный пучок лучей после отражения становится расходящимся. В таком случае при вычислении амплитуды отраженной волны на заданном расстоянии от точки, где произошло отражение, нужно ввести в амплитуду поправочный множитель, учитывающий расширение пучка после отражения. Этот множитель можно найти из чисто геометрических соображений.

Законы отражения электромагнитной волны нашли себе весьма простую и удобную приближенную формулировку в формулах Френеля. Гораздо менее удовлетворительное обстояло дело с приближенной формулировкой законов *диффракции*, т. е. огибания волной препятствий и захождения ее в область геометрической тени. Все известные вплоть до недавнего времени приближенные методы относились к случаю диффракции волны от препятствий с *резкими краями*, например от непрозрачных экранов с отверстиями. Эти методы представляют в основном уточнения принципа Гюйгенса. Главный шаг в этом направлении сделан самим Френелем. Согласно принципу Гюйгенса в формулировке Френеля часть световой волны, прикрытая экраном, не действует совсем, а неприкрытые области действуют так, как если бы экрана совсем не было. Дальнейшее уточнение было сделано в 1882 г. Кирхгофом, предложившим свою формулу для амплитуды световой волны

за экраном. Формула Кирхгофа представляет весьма гибкое и удобное средство для приближенного решения задач диффракции от экрана с резкими краями, но она не учитывает влияния материала экрана и вообще не принимает во внимание предельных условий для поля, вытекающих из теории Максвелла.

Следующий существенный шаг в решении задачи диффракции от экрана с резкими краями связан с нахождением строгих решений уравнений Максвелла для некоторых частных случаев (полуплоскость, клин). Здесь следует упомянуть работы Зоммерфельда, а также работы советских математиков С. Л. Соболева и В. И. Смирнова, подошедших к той же задаче с новой точки зрения (нестационарные процессы). Чрезвычайно интересные задачи о плоском и цилиндрическом волноводах с открытыми концами (где диффрагированная волна может загнаться назад) были решены советским ученым Л. А. Вайнштейном.

В противоположность задаче диффракции от тел с резкими краями (экранов и диафрагм), для решения задачи диффракции от тел с непрерывно меняющейся кривизной никаких сколько-нибудь общих приближенных методов или приближенных формул (подобных формуле Кирхгофа) вплоть до самого последнего времени предложено не было. Для нахождения поля, получаемого в результате диффракции падающей волны, предлагалось для каждого отдельного случая решать уравнения Максвелла с предельными условиями, что представляет весьма сложную математическую задачу.

Формулы отражения Френеля представляют собой интегральный закон в том смысле, что применение их не требует решения дифференциальных уравнений, ибо эти формулы дают явные выражения для амплитуд отраженной волны. Для явления *диффракции* от тела произвольной формы не только не был известен вид соответствующего интегрального закона, но не был установлен и факт существования такого закона; другими словами, не была установлена и самая возможность написать при сколько-нибудь общих предположениях об электрических свойствах вещества тела и о форме его поверхности явные выражения для амплитуд поля огибающей тело волны.

Этот пробел был в известной мере заполнен в наших работах по диффракции плоской волны от поверхности выпуклого проводящего тела произвольной формы (главы 1—5 настоящей книги).

Предположение, что вещество тела является хорошим проводником, является существенным, потому что оно дает возможность пользоваться упрощенными предельными условиями для поля, установленными М. А. Леонтовичем.

Рассматривая поле вблизи поверхности тела (на расстояниях, малых по сравнению с радиусами кривизны поверхности), мы

установили, что в области полутени это поле имеет локальный характер. Это значит, что при заданной длине падающей волны, ее амплитуде и поляризации поле в области полутени зависит лишь от формы и свойств тела вблизи данной точки, причем оно выражается через некоторые универсальные функции, которые могут быть раз навсегда табулированы. Тем самым оказывается возможным формулировать некоторый общий закон диффракции.

Наши формулы для поля можно рассматривать как обобщение формул Френеля — обобщение, включающее в себя как закон отражения, так и закон диффракции.

Будем мысленно двигаться вдоль поверхности тела от освещенной его стороны в тень. На освещенной стороне тела можно различить падающую и отраженную волну, причем последняя будет хорошо описываться формулами Френеля. Ближе к геометрической границе тени, в области скользящего падения луча, обе волны уже неотделимы друг от друга, так что имеет смысл рассматривать лишь результирующее поле. Здесь вступают в силу наши формулы, тогда как формулы Френеля становятся неприменимыми. За границей геометрической тени мы уже не имеем волны с более или менее постоянной амплитудой, а имеем затухающую волну, т. е. волну с амплитудой, убывающей по показательному закону с увеличением расстояния от геометрической границы тени. Здесь имеет место явление диффракции в собственном смысле, причем закон диффракции передается нашими формулами.

Из сказанного ясно, что существует область (а именно область скользящего падения луча), где одновременно справедливы как наши диффракционные формулы, так и формулы Френеля. Очевидно, что в этой области одни формулы должны переходить в другие.

В дальнейшем мы приведем формулы Френеля для электромагнитного поля и укажем их обобщение, позволяющее учитывать расширение пучка после отражения от выпуклого тела. Далее мы выпишем полученные нами диффракционные формулы, рассмотрим их предельные случаи и проследим, как они переходят в формулы Френеля в области скользящего падения луча.

1. Законы отражения Френеля

Обозначим через $E^0 (E_x^0, E_y^0, E_z^0)$ и через $H^0 (H_x^0, H_y^0, H_z^0)$ амплитуды электрического и магнитного векторов падающей волны в данной точке поверхности тела. Соответствующие величины для отраженной волны обозначим через $E^* (E_x^*, E_y^*, E_z^*)$ и $H^* (H_x^*, H_y^*, H_z^*)$. Пусть, далее, $a (a_x, a_y, a_z)$ есть единичный

вектор в направлении падающего луча, \mathbf{a}^* (a_x^* , a_y^* , a_z^*) — единичный вектор в направлении отраженного луча и \mathbf{n} (n_x , n_y , n_z) — единичный вектор нормали к поверхности тела в точке падения. Согласно закону отражения величины \mathbf{a}^* , \mathbf{a} и \mathbf{n} связаны соотношением

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} - 2\mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}), \quad (1.01)$$

причем

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \cos \vartheta, \quad (1.02)$$

где ϑ — угол падения.

Величины \mathbf{a} и \mathbf{a}^* пропорциональны градиенту фазы падающей и отраженной волны. Считая амплитуду величиной, медленно меняющейся по сравнению с фазой, мы получим из уравнений Максвелла для пустоты

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{E}^0] = \mathbf{H}^0; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}^0 = 0, \quad (1.03)$$

откуда

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{H}^0] = -\mathbf{E}^0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{H}^0 = 0, \quad (1.04)$$

и аналогично для отраженной волны

$$[\mathbf{a}^* \times \mathbf{E}^*] = \mathbf{H}^*, \quad \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{E}^* = 0, \quad (1.05)$$

$$[\mathbf{a}^* \times \mathbf{H}^*] = -\mathbf{E}^*, \quad \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{H}^* = 0. \quad (1.06)$$

Обозначим через μ магнитную проницаемость, через

$$\eta = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (1.07)$$

— комплексную диэлектрическую постоянную вещества отражающего тела и введем коэффициенты Френеля

$$N = \frac{\eta \cos \vartheta - \sqrt{\mu\eta - \sin^2 \vartheta}}{\eta \cos \vartheta + \sqrt{\mu\eta - \sin^2 \vartheta}}, \quad (1.08)$$

$$M = \frac{\mu \cos \vartheta - \sqrt{\mu\eta - \sin^2 \vartheta}}{\mu \cos \vartheta + \sqrt{\mu\eta - \sin^2 \vartheta}}. \quad (1.09)$$

Тогда формулы Френеля, устанавливающие связь между амплитудами падающей и отраженной волны, могут быть написаны в виде

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^*) = N(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0), \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^*) = M(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0). \quad (1.11)$$

Амплитуды проходящей волны (проникающей в вещество тела) нас не интересуют, и мы соответствующих формул не выпишем.

Уравнения (1.05), (1.10) и (1.11) могут быть решены относительно векторов \mathbf{E}^* и \mathbf{H}^* . Вводя обозначения

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0 = E_n^0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0 = H_n^0 \quad (1.12)$$

и выражая согласно (1.01) \mathbf{a}^* через \mathbf{a} , мы будем иметь

$$\sin^2 \vartheta \mathbf{E}^* = -NE_n^0 (\mathbf{n} \cos 2\vartheta + \mathbf{a} \cos \vartheta) + MH_n^0 [\mathbf{n} \times \mathbf{a}], \quad (1.13)$$

$$\sin^2 \vartheta \mathbf{H}^* = -MH_n^0 (\mathbf{n} \cos 2\vartheta + \mathbf{a} \cos \vartheta) - NE_n^0 [\mathbf{n} \times \mathbf{a}]. \quad (1.14)$$

Таковы вытекающие из формул Френеля значения амплитуд отраженной волны на поверхности тела.

Из предыдущих формул можно вывести также соотношения для полного поля. Обозначая через \mathbf{E} , \mathbf{H} полное поле на поверхности тела и через E_n и H_n его нормальные составляющие и полагая

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\eta\mu}}, \quad (1.15)$$

будем иметь

$$\sin^2 \vartheta (\mathbf{E} - \mathbf{n}E_n) = \kappa \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} E_n \{\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\} + H_n [\mathbf{n} \times \mathbf{a}], \quad (1.16)$$

$$\sin^2 \vartheta [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = E_n \{\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\} + \kappa \sqrt{\frac{\eta}{\mu}} H_n [\mathbf{n} \times \mathbf{a}]. \quad (1.17)$$

Если $|\eta\mu| \gg 1$, то приближенно $\kappa = 1$ и правые части (1.16) и (1.17) друг другу пропорциональны. В этом случае будет

$$\mathbf{E} - \mathbf{n}E_n = \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]. \quad (1.18)$$

Последнее соотношение уже не содержит вектора \mathbf{a} , т. е. не зависит от направления падающей волны. Как показал М. А. Леонтович, оно имеет место не только в освещенной области, где применимы формулы Френеля, но и на всей поверхности тела.

Из формул (1.16) и (1.17) можно также вывести соотношения

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}) = \left(-\cos \vartheta + \kappa \sqrt{\frac{\mu}{\eta}}\right) E_n, \quad (1.19)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{H}) = \left(-\cos \vartheta + \kappa \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}\right) H_n. \quad (1.20)$$

Если падающая волна плоская (вектор \mathbf{a} имеет определенное значение), то последними соотношениями можно пользоваться вместо условий Леонтовича (1.18). Это удобно делать тогда, когда рассматривается скользящее падение луча, причем в выражении (1.15) для κ можно положить $\sin^2 \vartheta = 1$.

2. Сечение пучка отраженных лучей

Для нахождения амплитуды отраженной волны на некотором расстоянии от поверхности тела необходимо иметь формулы для сечения пучка, опирающегося на площадку dS поверхности тела и прошедшего после отражения заданный путь s . Эти формулы могут быть выведены из известных формул дифференциальной геометрии.

Пусть уравнение отражающей поверхности есть

$$x = x_0(u, v); \quad y = y_0(u, v); \quad z = z_0(u, v), \quad (2.01)$$

где u, v — гауссовы координатные параметры.

Квадрат элемента дуги на поверхности мы будем писать в виде

$$dl^2 = g_{uu} du^2 + 2g_{uv} du dv + g_{vv} dv^2 = \sum_{u, v} g_{uv} du dv, \quad (2.02)$$

где сумма $\sum_{u, v}$ есть сокращенное обозначение для среднего члена этого равенства.

Мы будем пользоваться обозначениями для ковариантных и контравариантных составляющих векторов и тензоров, подни-мая и опускающая значки при помощи «метрического» тензора, входящего в (2.02). Элемент поверхности мы будем писать в виде

$$dS = \sqrt{g} du dv. \quad (2.03)$$

Выпишем формулы для составляющих вектора нормали к поверхности и их производных по u, v . Мы имеем:

$$\sqrt{g} n_x = \frac{\partial y_0}{\partial u} \frac{\partial z_0}{\partial v} - \frac{\partial y_0}{\partial v} \frac{\partial z_0}{\partial u} \text{ и т. д.}, \quad (2.04)$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial u} = - \sum_v G_u^v \frac{\partial x_0}{\partial v} \text{ и т. д.} \quad (2.05)$$

Последняя формула может служить определением величин G_u^v — смешанных компонент второй квадратичной формы поверхности. Если R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны нормального сечения поверхности, то мы будем иметь

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = G_u^u G_v^v - G_v^u G_u^v, \quad (2.06)$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -G = -G_u^u - G_v^v. \quad (2.07)$$

Величина K есть гауссова кривизна поверхности. Нам понадобится формула для радиуса кривизны R_0 нормального сечения

поверхности плоскостью падения луча. Можно показать, что если $k\psi$ есть фаза падающей волны, причем

$$(\text{grad } \psi)^2 = 1, \quad (2.08)$$

то будет

$$\sum_{u, v} g^{uv} \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \frac{\partial \psi_0}{\partial v} = \sin^2 \vartheta, \quad (2.09)$$

где ϑ есть угол падения, а производные берутся от значения $\psi = \psi_0$ фазы на поверхности тела.

Величина R_0 определится тогда из равенства

$$\sum_{u, v} G^{uv} \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \frac{\partial \psi_0}{\partial v} = - \frac{\sin^2 \vartheta}{R_0}. \quad (2.10)$$

Применим выписанные здесь формулы к вычислению нормального сечения пучка лучей, отраженных от элемента поверхности dS .

Рассмотрим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + sa_x^*, \\ y &= y_0 + sa_y^*, \\ z &= z_0 + sa_z^*, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

в которых s есть некоторая заданная величина, а $x_0, y_0, z_0, a_x^*, a_y^*, a_z^*$ — суть функции от u, v , определяемые из уравнения поверхности (2.01) и из соотношений

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} - 2\mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}), \quad (2.12)$$

где \mathbf{n} есть вектор нормали в точке x_0, y_0, z_0 .

Величина s есть, очевидно, путь, пройденный лучом после отражения. При постоянном s уравнения (2.11) представляют уравнения некоторой поверхности, в известном смысле параллельной отражающей поверхности тела. Если мы будем менять u, v в пределах $(u, u + du), (v, v + dv)$, мы получим некоторый участок поверхности (2.11). Этот участок можно рассматривать как сечение поверхностью пучка отраженных лучей, опирающегося на элемент $dS = \sqrt{g} du dv$. Чтобы получить нормальное сечение пучка, мы должны спроектировать этот участок на плоскость, перпендикулярную отраженному лучу. Обозначив площадь нормального сечения через $D(s) dS$, будем иметь

$$D(s) dS = \begin{vmatrix} a_x^* & a_y^* & a_z^* \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du dv, \quad (2.13)$$

откуда

$$D(s) = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} a_x^* & a_y^* & a_z^* \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Вычислим этот определитель в предположении, что падающая волна — плоская и что, следовательно, вектор \mathbf{a} не зависит от u , v .

После довольно сложных выкладок, которые мы здесь опускаем, получается следующий результат:

$$D(s) = \cos \vartheta + 2s \left(-G + G \sum_{u, v} g^{uv} \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \frac{\partial \psi_0}{\partial v} - \sum_{u, v} G^{uv} \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \frac{\partial \psi_0}{\partial v} \right) + 4Ks^2 \cos \vartheta. \quad (2.15)$$

Пользуясь приведенными выше выражениями (2.06) — (2.10), мы можем написать

$$D(s) = \cos \vartheta + 2s \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cos^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{R_0} \right] + \frac{4s^2}{R_1 R_2} \cos \vartheta; \quad (2.16)$$

значения R_0 , R_1 , R_2 взяты в точке, где произошло отражение.

Величина $D(s)/D(0)$ дает, очевидно, расширение пучка, т. е. отношение его сечения на расстоянии s от поверхности (считаемом вдоль луча) к сечению у самой поверхности.

3. Электромагнитное поле отраженной волны

Пусть поле падающей плоской волны равно

$$\mathbf{E}^0 e^{i\varphi}, \quad \mathbf{H}^0 e^{i\varphi}, \quad (3.01)$$

где \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 — постоянные амплитуды и

$$\varphi = k\psi = k(xa_x + ya_y + za_z) \quad (3.02)$$

— фаза волны в данной точке пространства.

Вводя значение

$$\varphi_0 = k\psi_0 = k(x_0 a_x + y_0 a_y + z_0 a_z) \quad (3.03)$$

фазы φ на поверхности тела, мы будем иметь для поля падающей волны на поверхности тела выражения

$$E^0 e^{ik\psi_0}, \quad H^0 e^{ik\psi_0}. \quad (3.04)$$

Поле отраженной волны на поверхности тела будет равно

$$E^* e^{ik\psi_0}, \quad H^* e^{ik\psi_0}, \quad (3.05)$$

где E^* и H^* связаны с E^0 и H^0 формулами Френеля (1.13) и (1.14). (По поводу обозначений заметим, что в формулах (1.13) и (1.14) мы считали фазовый множитель $e^{ik\psi_0}$ включенным в E^0 , H^0 и в E^* , H^* , но так как этот множитель в обеих частях равенств (1.13) и (1.14) одинаков, то безразлично, будем ли мы разуметь в этих равенствах под E^0 , H^0 и E^* , H^* полные выражения (3.04) и (3.05) или их амплитуды.)

В обозначениях этого параграфа E^0 и H^0 суть постоянные, а E^* и H^* — медленно меняющиеся функции от координат точки на поверхности.

Обозначим через F одну из составляющих поля отраженной волны. Значение F на поверхности будет равно

$$F = f(u, v) e^{ik\psi_0(u, v)}, \quad (3.06)$$

где $f(u, v)$ — медленно меняющаяся функция, а k — большой параметр.

Чтобы найти значение F на некотором расстоянии s от поверхности, нам нужно знать решение волнового уравнения

$$\Delta F + k^2 F = 0, \quad (3.07)$$

которое удовлетворяет условию излучения и предельному условию (3.06) на поверхности. Пользуясь тем, что k есть большой параметр, можно указать приближенный вид такого решения в явной форме.

В самом деле, рассмотрим выражение

$$F = f(u, v) \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}} e^{ik(\psi_0 + s)}. \quad (3.08)$$

Величины u , v , s можно толковать как криволинейные координаты точки в пространстве, связанные с прямоугольными координатами x , y , z соотношениями (2.11). Геометрический смысл этих криволинейных координат очевиден: параметры u , v определяют положение той точки на поверхности тела, от которой отразился луч, дошедший до точки x , y , z ; величина же s есть расстояние, пройденное лучом после отражения.

Таким образом, величину F в формуле (3.08) можно толковать как функцию точки в пространстве. Очевидно, что эта функция принимает на поверхности $s = 0$ значение (3.06). Очевидно

также, что она удовлетворяет условию излучения и соответствует рассеянной волне. Но, кроме того, если параметр k велик, функция F приближенно удовлетворяет волновому уравнению. Действительно, можно показать, что из определения ψ_0 и $D(s)$ и из формул (2.11) вытекают равенства

$$\{\text{grad}(\psi_0 + s)\}^2 = 1, \quad (3.09)$$

$$\text{div} \left\{ f^2 \frac{D(0)}{D(s)} \text{grad}(\psi_0 + s) \right\} = 0. \quad (3.10)$$

На основании этих равенств легко проверить, что после подстановки F в уравнение (3.07) в нем сократятся члены второй и первой степени относительно k и останутся только члены нулевой степени.

Независимо от только что изложенных рассуждений, справедливость выражения (3.08) вытекает из соображений геометрической оптики. В самом деле, это выражение должно давать отраженную волну. Но фаза отраженной волны, очевидно, равна $k(\psi_0 + s)$. Что касается амплитуды, то, если идти вдоль тонкого пучка отраженных лучей, амплитуда должна меняться обратно пропорционально корню квадратному из сечения пучка, что и дается формулой (3.08).

Таким образом, эта формула дает поле отраженной волны на расстоянии s от поверхности, когда известно поле на самой поверхности.

Применяя найденную формулу к составляющим электрического и магнитного поля, получим для них выражения

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^*(u, v) \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}} e^{ik(\psi_0 + s)}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^*(u, v) \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}} e^{ik(\psi_0 + s)}, \quad (3.12)$$

где $\mathbf{E}^*(u, v)$ и $\mathbf{H}^*(u, v)$ суть получаемые из формул Френеля амплитуды поля на поверхности тела.

Полученные нами формулы для поля представляют естественную комбинацию законов отражения и геометрической (лучевой) оптики. То и другое в отдельности было известно свыше ста лет назад: Френель нашел свои законы отражения около 1820 г., а Гамильтон — законы лучевой оптики около 1830 г. В частности, Гамильтону было известно, что величина, соответствующая нашему $D(s)$, является многочленом второй степени от s . Однако нам не удалось найти в литературе указаний на применение этих результатов к приближенному представлению отраженной электромагнитной волны.

4. Закон диффракции в области полутени

Мы уже упоминали во введении, что вблизи геометрической границы тени, в области скользящего падения луча, падающая и отраженная волны становятся неотделимыми друг от друга и формулы Френеля становятся неприменимыми. Мы изложим здесь, на основе нашей работы, составляющей предмет главы 5, идею вывода диффракционных формул, которые дают поле в этой области, а также в области полутени и тени.

Представим себе выпуклое тело, на которое падает в направлении оси x плоская волна. Выберем на поверхности тела точку, лежащую на границе геометрической тени, и примем ее за начало координат. Направим ось z по нормали к поверхности (в сторону воздуха). Так как нормаль на границе тени перпендикулярна направлению волны, то наши оси x и z будут взаимно перпендикулярны. Ось y выберем так, чтобы получить правую координатную систему.

В окрестности данной точки уравнение поверхности будет иметь вид

$$z + \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0, \quad (4.01)$$

причем будет

$$a \geq 0, \quad c \geq 0, \quad ac - b^2 \geq 0. \quad (4.02)$$

Радиус кривизны нормального сечения поверхности будет равен

$$R_0 = \frac{1}{a}. \quad (4.03)$$

В дальнейшем мы введем «большой параметр» m по формуле

$$m = \sqrt[3]{\frac{kR_0}{2}} = \sqrt[3]{\frac{k}{2a}} \quad (4.04)$$

и будем решать нашу задачу, пренебрегая величинами порядка $\frac{1}{m^2}$ по сравнению с единицей.

Наша цель состоит в нахождении электромагнитного поля на расстояниях от начала координат, малых по сравнению с радиусом кривизны R_0 .

При наших предположениях каждая составляющая поля будет вида

$$F = e^{ikx} F^*, \quad (4.05)$$

где F^* удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial F^*}{\partial x} = 0. \quad (4.06)$$

Все составляющие поля могут быть выражены через H_y и H_z по формулам:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{i}{k} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), \\ E_y &= H_z, \\ E_z &= -H_y, \\ H_x &= \frac{i}{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.07)$$

которые можно рассматривать как упрощенные уравнения Максвелла.

Приближенные предельные условия для поля в воздухе на границе с хорошо проводящим телом были установлены М. А. Лентовичем. Они справедливы при условиях

$$|\eta\mu| \gg 1; \quad kR_0 |\sqrt{\eta\mu}| \gg 1 \quad (4.08)$$

и имеют вид [см. (1.18)]

$$\mathbf{E} - n\mathbf{E}_n = \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]. \quad (4.09)$$

В дальнейшем мы будем считать $\mu = 1$. Входящие в (4.09) составляющие вектора нормали определяются из уравнения поверхности (4.01). Мы можем приближенно положить

$$n_x = ax + by, \quad n_y = bx + cy, \quad n_z = 1, \quad (4.10)$$

ибо квадратами величин n_x и n_y можно пренебречь по сравнению с единицей. Величины n_x , n_y , $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ мы будем считать малыми одного порядка.

При этих предположениях можно вывести из (4.07) и (4.09) такие предельные условия для поля, которые содержат только H_y и H_z . Они будут иметь вид

$$H_z = -n_y H_y, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} + ik \left(n_x + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) H_y = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (4.12)$$

[формулы (3.10) и (3.11) главы 5]. Правые части этих уравнений представляют поправочные члены. В первом приближении их можно заменить нулем и рассматривать более простые предельные условия:

$$H_z = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} + ik \left(n_x + \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) H_y = 0. \quad (4.14)$$

Во втором приближении можно подставить в правые части (4.11) и (4.12) значения H_y и H_z , получаемые путем решения дифференциальных уравнений с предельными условиями (4.13) и (4.14).

Кроме дифференциальных уравнений и предельных условий на поверхности тела, решение должно удовлетворять условиям на бесконечности. Эти последние состоят в требовании, чтобы та часть решения, которая соответствует плоской волне, имела на бесконечности заданную амплитуду.

Поставленная математическая задача имеет однозначное решение, которое мы здесь приведем, минуя все выкладки и ограничиваясь определениями.

Если не считать множителя e^{ikx} , поле будет зависеть от координат только через посредство величин*

$$\xi = m(ax + by), \quad (4.15)$$

$$\zeta = 2am^2 \left[z + \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cz^2) \right], \quad (4.16)$$

из которых вторая на поверхности обращается в нуль. Постоянные, характеризующие электрические свойства отражающей поверхности, входят в выражения для поля через посредство величины q , где**

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta}}, \quad m = \sqrt[3]{\frac{k}{2a}}. \quad (4.17)$$

Поле выражается в конечном счете через одну универсальную (т. е. не зависящую от формы поверхности) функцию $V_1(\xi, \zeta, q)$ и через ее предельное значение

$$V_2(\xi, \zeta) = V_1(\xi, \zeta, \infty). \quad (4.18)$$

Функция V_1 может быть представлена в виде определенного интеграла, содержащего комплексные функции Эйри $w_1(t)$ и $w_2(t)$. Последние определяются как решения дифференциального уравнения

$$w''(t) = tw(t), \quad (4.19)$$

* Поправочные члены будут, кроме того, содержать линейным образом координату y .

** Если бы мы вместо условий Леонтовича (1.18) пользовались формулами (1.19) и (1.20), мы получили бы для q несколько более точное значение $q = \frac{im}{\eta} \sqrt{\eta - 1}$.

имеющие при больших отрицательных t асимптотические выражения

$$\omega_1(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{-t}} \exp\left(i \frac{2}{3} (-t)^{3/2} + i \frac{\pi}{4}\right), \quad (4.20)$$

$$\omega_2(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{-t}} \exp\left(-i \frac{2}{3} (-t)^{3/2} - i \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.21)$$

Выражение для V_1 имеет вид

$$V_1(\xi, \zeta, q) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_C e^{i\xi t} \left[\omega_2(t - \zeta) - \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - \zeta) \right] dt, \quad (4.22)$$

где контур C идет по лучу $\arg t = \frac{2}{3}\pi$ от бесконечности к нулю и по лучу $\arg t = -\frac{1}{3}\pi$ от нуля до бесконечности*.

При $\zeta = 0$ (на поверхности тела) выражение для V_1 упрощается и принимает вид

$$V_1(\xi, 0, q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C e^{i\xi t} \frac{dt}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)}. \quad (4.23)$$

Эта функция табулирована для ряда значений q ; таблицы для $q = 0$ (абсолютно-проводящее тело) приведены в добавлении 3.

Зная функцию $V_1(\xi, \zeta, q)$, мы можем написать выражения для поля. Для этого введем функции

$$\Psi = e^{-i\varphi} V_1(\xi, \zeta, q), \quad (4.24)$$

$$\Phi = e^{-i\varphi} V_2(\xi, \zeta), \quad (4.25)$$

где

$$\varphi = \xi\zeta - \frac{1}{3}\xi^3, \quad (4.26)$$

и составим при помощи них выражения:

$$P = -i \frac{b}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + \left(i \frac{b}{a} q + \frac{ac - b^2}{a} my \right) (\Phi - \Psi), \quad (4.27)$$

$$Q = i \frac{b}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \left(-i \frac{b}{a} q + \frac{ac - b^2}{a} my \right) (\Phi - \Psi). \quad (4.28)$$

* Таблицы функции (4.22) для $q = 0$ и $q = \infty$ составлены М. Белкиной и П. Азрилянт [27]. (Опубликованы в 1957 г.)

Тогда составляющие H_y и H_z магнитного поля будут равны

$$H_y = H_y^0 e^{ikx} \Psi + \frac{1}{m} H_z^0 e^{ikx} Q, \quad (4.29)$$

$$H_z = \frac{1}{m} H_y^0 e^{ikx} P + H_z^0 e^{ikx} \Phi, \quad (4.30)$$

где H_y^0 и H_z^0 — амплитуды падающей волны. Все четыре функции Φ , Ψ , P , Q удовлетворяют дифференциальному уравнению вида (4.06) и будут одного порядка величины*.

Так как m есть большой параметр, то члены, содержащие Φ и Ψ , будут главными, а члены, содержащие P и Q , — поправочными. Составляющие поля E_x и H_x будут того же порядка как поправочные члены, а именно:

$$E_x = -\frac{i}{m} H_y^0 e^{ikx} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad (4.31)$$

$$H_x = \frac{i}{m} H_z^0 e^{ikx} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}. \quad (4.32)$$

Что касается остальных составляющих электрического поля, то в силу упрощенных уравнений Максвелла (4.07) они будут равны

$$E_y = H_z; \quad E_z = -H_y. \quad (4.33)$$

Таким образом, все составляющие поля нами определены.

5. Исследование выражений для поля в теневой и освещенной областях

Выведенные нами дифракционные формулы дают поле вблизи некоторой точки, лежащей на поверхности проводящего тела на границе геометрической тени. Покажем, что они дают непрерывный переход от поля, соответствующего формулам Френеля (для освещенной области), к полной тени. Начнем с области тени.

Интеграл (4.22) может быть представлен как сумма вычетов, относящихся к корням знаменателя подынтегральной функции. Имеем

$$V_1(\xi, \zeta, q) = i2 \sqrt{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} e^{i\xi t_s} \frac{\omega_1(t_s - \zeta)}{\omega_1^2(t_s)(t_s - q^2)}, \quad (5.01)$$

где t_s есть корень уравнения

$$\omega_1'(t_s) - q\omega_1(t_s) = 0. \quad (5.02)$$

* Величины Φ , Ψ , P , Q обозначены в главе 5 через Φ^* , Ψ^* , P^* , Q^* .

Корни t_s лежат вблизи луча $\arg t = \frac{\pi}{3}$ и возрастают по модулю. При достаточно больших положительных значениях $\xi - \sqrt{\zeta}$ в ряде (5.01) можно ограничиться одним членом. Если, кроме того, воспользоваться асимптотическим выражением (4.20) для ω_1 и считать в нем ζ большим по сравнению с t_1 , получим для V_1 приближенное выражение

$$V_1(\xi, \zeta, q) = \frac{e^{i \frac{3\pi}{4}} 2 \sqrt{\pi}}{\omega_1^2(t_1)(t_1 - q^2)} e^{i \frac{2}{3} \xi^{3/2}} e^{i(\xi - \sqrt{\zeta}) t_1}. \quad (5.03)$$

Величина t_1 имеет при $q = 0$ и $q = \infty$ следующие значения:

$$t_1 = 1,01879 e^{i \frac{\pi}{3}} \quad (q = 0), \quad (5.04)$$

$$t_1 = 2,33811 e^{i \frac{\pi}{3}} \quad (q = \infty). \quad (5.05)$$

Во всех случаях как вещественная, так и мнимая часть t_1 — положительны. Отсюда следует, что при возрастании $\xi - \sqrt{\zeta}$ функции V_1 и V_2 и связанные с ними функции Φ , Ψ , P , Q , а следовательно, и поле будут убывать по показательному закону.

Заметим, что равенство $\xi - \sqrt{\zeta} = 0$ дает геометрическую границу тени. Возрастающие положительные значения величины $\xi - \sqrt{\zeta}$ соответствуют точкам, лежащим все дальше и дальше в области тени.

Там, где величина $\xi - \sqrt{\zeta}$ не велика (она может быть обоих знаков), мы имеем область полутени. На способах вычисления функции V_1 в этой области мы останавливаться не будем; укажем только, что эта функция, а следовательно, и поле меняются там непрерывным образом.

Перейдем теперь к освещенной области, где величина $\xi - \sqrt{\zeta}$ велика и отрицательна. В этом случае рядом (5.01) для V_1 пользоваться нельзя и нужно вернуться к интегралу (4.22). Член, содержащий $\omega_2(t - \zeta)$ в этом интеграле, может быть вычислен точно. Он дает

$$\frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_{\zeta} e^{t\xi} \omega_2(t - \zeta) dt = e^{i\varphi}, \quad (5.06)$$

где φ имеет значение

$$\varphi = \xi\zeta - \frac{1}{3} \xi^3, \quad (5.07)$$

совпадающее с (4.26). Согласно (4.24) и (4.25), этот член дает в функциях Ψ и Φ слагаемое единицу; в выражениях для поля он соответствует падающей волне.

Второй член может быть вычислен по способу стационарной фазы, как показано в главе 5. Экстремум фазы получается при $\sqrt{-i} = p$, где

$$p = \frac{1}{3} (\sqrt{\xi^2 + 3\xi} - 2\xi). \quad (5.08)$$

Для входящего в эту формулу корня квадратного удобно ввести особое обозначение:

$$\sigma = \sqrt{\xi^2 + 3\xi}. \quad (5.09)$$

Заметим, что величина p имеет тот же знак, как $\sqrt{\xi} - \xi$, так что $p > 0$ соответствует освещенной области, $p = 0$ — геометрической границе тени и $p < 0$ — теневой области. Нас интересуют теперь большие положительные значения p . Для этого случая применение способа стационарной фазы дает для всей величины V_1 выражение

$$V_1(\xi, \zeta, q) = e^{i\varphi} - e^{i\varphi^*} \sqrt{\frac{p}{\sigma} \frac{q - ip}{q + ip}}, \quad (5.10)$$

где фаза φ равна (5.07), а фаза φ^* равна

$$\varphi^* = \frac{1}{27} (4\sigma^3 - 3\sigma^2\xi - 2\xi^3). \quad (5.11)$$

Заметим, что разность фаз $\varphi^* - \varphi$ равна

$$\varphi^* - \varphi = \frac{4}{27} (\sigma + \xi) (\sigma - 2\xi)^2 = 2(\sigma - p)p^2. \quad (5.12)$$

При $\zeta = 0$ будет $\sigma = p = -\xi$, так что $\varphi^* - \varphi$ обращается на поверхности тела в нуль.

Величина V_2 получается из (5.10) при $q = \infty$. Связанные с V_1 и V_2 функции Ψ и Φ будут приближенно равны

$$\Psi = 1 - e^{i(\varphi^* - \varphi)} \sqrt{\frac{p}{\sigma} \frac{q - ip}{q + ip}}, \quad (5.13)$$

$$\Phi = 1 - e^{i(\varphi^* - \varphi)} \sqrt{\frac{p}{\sigma}}. \quad (5.14)$$

В выражения для поля входят не только самые функции Ψ и Φ , но и их производные по ζ . При составлении производных можно все множители, кроме фазового, считать постоянными. Вследствие

$$\frac{\partial(\varphi^* - \varphi)}{\partial \zeta} = \frac{2}{3} \sigma - \frac{4}{3} \xi = 2p \quad (5.15)$$

будем иметь

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 2ip (\Psi - 1); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 2ip (\Phi - 1). \quad (5.16)$$

Вычисляя при помощи этих значений величины P и Q , получим

$$P = Q = \frac{2ip}{q + ip} \left(\frac{b}{a} p - \frac{ac - b^2}{a} my \right) \sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{i(\Phi^* - \Phi)}. \quad (5.17)$$

Нам остается подставить найденные выражения в формулы (4.29) — (4.32) для поля. При этом удобно обозначить одной буквой

$$\chi = kx + \Phi^* - \Phi \quad (5.18)$$

фазу отраженной волны. С этим обозначением мы будем иметь

$$H_y = H_y^0 e^{ikx} - H_y^0 \frac{q - ip}{q + ip} \sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{i\chi} + \\ + \frac{1}{m} H_z^0 \frac{2ip}{q + ip} \left(\frac{b}{a} p - \frac{ac - b^2}{a} my \right) \sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{i\chi}, \quad (5.19)$$

$$H_z = H_z^0 e^{ikx} - H_z^0 \sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{i\chi} + \\ + \frac{1}{m} H_y^0 \frac{2ip}{q + ip} \left(\frac{b}{a} p - \frac{ac - b^2}{a} my \right) \sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{i\chi}, \quad (5.20)$$

$$E_x = -\frac{1}{m} H_y^0 2p \frac{q - ip}{q + ip} \sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{i\chi}, \quad (5.21)$$

$$H_x = \frac{1}{m} H_z^0 2p \sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{i\chi} \quad (5.22)$$

и, кроме того, $E_y = H_z$; $E_z = -H_y$.

Первые члены в (5.19) и (5.20), очевидно, дают падающую волну, а остальные члены — отраженную волну. В следующем параграфе мы покажем, что отраженная волна в точности соответствует формулам Френеля с поправкой на расширение пучка.

6. Сравнение диффракционных формул с формулами Френеля для освещенной области

Обратимся теперь к формулам Френеля. Полагая в коэффициентах Френеля $\mu = 1$ и считая $\sqrt{|\eta|}$ величиной большой, а $\cos \theta$ малой (порядка $1/\sqrt{|\eta|}$), получим для N и M выражения

$$N = \frac{\sqrt{\eta} \cos \theta - 1}{\sqrt{\eta} \cos \theta + 1}; \quad M = -1. \quad (6.01)$$

В формулах Френеля (1.13) и (1.14) мы должны положить $a_x = 1$, $a_y = a_z = 0$ и считать n_x и n_y величинами малыми, квадратами которых можно пренебречь. Эти формулы дают тогда: для электрического поля

$$\left. \begin{aligned} E_x^* &= -2Nn_xH_y^0, \\ E_y^* &= -H_z^0 - (N+1)n_yH_y^0, \\ E_z^* &= -NH_y^0 + (N+1)n_yH_z^0 \end{aligned} \right\} \quad (6.02)$$

и для магнитного поля

$$\left. \begin{aligned} H_x^* &= -2n_xH_z^0, \\ H_y^* &= NH_y^0 - (N+1)n_yH_z^0, \\ H_z^* &= -H_z^0 - (N+1)n_yH_y^0. \end{aligned} \right\} \quad (6.03)$$

Чтобы получить поле отраженной волны на некотором расстоянии от поверхности, нужно согласно (3.11) и (3.12) умножить эти выражения на множитель

$$\sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}} e^{ik(x_0+s)}. \quad (6.04)$$

Значения всех величин, кроме s , нужно брать в той точке x_0 , y_0 , z_0 , где произошло отражение луча, попавшего в точку x , y , z . Так как уравнение отражающей поверхности есть

$$z_0 + \frac{1}{2}(ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2) = 0, \quad (6.05)$$

то мы имеем

$$n_x = ax_0 + by_0, \quad n_y = bx_0 + cy_0, \quad n_z = 1. \quad (6.06)$$

При вычислении $D(s)$ по общей формуле (2.16) мы должны пренебречь последним членом, так как нас интересует поле на расстояниях, малых по сравнению с радиусами кривизны. Остальные члены дают

$$D(s) = \cos \vartheta + 2as = 2as - ax_0 - by_0. \quad (6.07)$$

Чтобы произвести сравнение дифракционных формул (5.19) — (5.22) с формулами Френеля (6.02) и (6.03), нам нужно установить связь между величинами x_0 , y_0 , s и координатами x , y , z (или величинами ξ , ζ , y). Эта связь дается формулами (2.11), которые в нашем случае принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + s - 2sn_x^2, \\ y &= y_0 - 2sn_xn_y, \\ z &= z_0 - 2sn_xn_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.08)$$

Решая эти уравнения приближенно относительно x_0, y_0, s , получим

$$\left. \begin{aligned} ax_0 + by_0 &= \frac{2\xi - \sigma}{3m} = -\frac{p}{m}, \\ y_0 &= y, \\ s &= \frac{\sigma + \xi}{3am} = \frac{\sigma - p}{2am}. \end{aligned} \right\} \quad (6.09)$$

Отсюда

$$n_x = -\frac{p}{m}, \quad n_y = -\frac{b}{a} \frac{p}{m} + \frac{ac - b^2}{a} y. \quad (6.10)$$

Далее фаза χ по определению (5.12), (5.18) равна

$$\begin{aligned} \chi &= kx + \varphi^* - \varphi = kx + 2(\sigma - p)p^2 = \\ &= k(x + 2sn_x^2) = k(x_0 + s), \end{aligned} \quad (6.11)$$

т. е. она равна фазе отраженной волны, вычисляемой по геометрической оптике. Вычислим теперь величину $D(s)$. Подставляя в (6.07) величины (6.09), получим

$$D(s) = \frac{\sigma}{m}, \quad (6.12)$$

причем, очевидно,

$$D(0) = \cos \vartheta = \frac{p}{m}. \quad (6.13)$$

Последние три формулы дают

$$\sqrt{\frac{p}{\sigma}} e^{i\chi} = \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}} e^{ik(x_0+s)}. \quad (6.14)$$

Таким образом, множитель (6.14), входящий во все выражения для отраженной волны в дифракционных формулах (5.19) — (5.22), совпадает с множителем, входящим в формулы (3.08) — (3.09), которые представляют обобщение формул Френеля. Величина

$$\sqrt{\frac{p}{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2\xi}{3\sigma}} \quad (6.15)$$

дает при этом поправку на расширение пучка.

Нам остается проверить, что и все другие величины в формулах (5.19) — (5.22) совпадают с френелевскими.

Согласно (4.17) и (6.13) имеем:

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta}}, \quad p = m \cos \vartheta. \quad (6.16)$$

Поэтому

$$\frac{q - ip}{q + ip} = \frac{1 - \sqrt{\eta} \cos \vartheta}{1 + \sqrt{\eta} \cos \vartheta} = -N, \quad (6.17)$$

где N — коэффициент Френеля (6.01)*.

Пользуясь формулами (6.10) и (6.17) как обозначениями, мы можем написать наши выражения (5.19) — (5.22) для поля в виде

$$H_y = H_y^0 e^{ikx} + [NH_y^0 - (N + 1)n_y H_z^0] \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} e^{ix}, \quad (6.18)$$

$$H_z = H_z^0 e^{ikx} + [-H_z^0 - (N + 1)n_y H_y^0] \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} e^{ix}, \quad (6.19)$$

$$E_x = -2Nn_x H_y^0 \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} e^{ix}, \quad (6.20)$$

$$H_x = -2n_x H_z^0 \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} e^{ix}. \quad (6.21)$$

Сравнивая эти выражения с френелевскими формулами (6.02) и (6.03), мы убедимся, что множители при величине (6.14) в точности совпадают с их френелевскими значениями H_y^* , H_z^* , E_x^* , H_x^* . Равенства же $E_y = H_z$; $E_z = -H_y$ выполняются как в случае наших формул, так и в случае формул Френеля.

Таким образом, мы показали, что в той части освещенной области, где угол наклона луча к поверхности тела мал, наши формулы переходят в обобщенные [путем введения множителя (6.14)] формулы Френеля.

В области же полутени и в теневой области наши формулы дают картину диффракции.

* Значение $q = \frac{im}{\eta} \sqrt{\eta - 1}$ приводит к несколько более точному значению N , а именно:

$$N = \frac{\eta \cos \vartheta - \sqrt{\eta - 1}}{\eta \cos \vartheta + \sqrt{\eta - 1}}.$$

ДИФФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ ОТ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ *

На основе выведенных в предыдущих главах дифракционных формул исследовано выражение для электромагнитного поля в области конуса тени. На примере дифракции от шара показано, что и для тел с конечной кривизной главный член в выражении для поля позади тела выражается через интегралы Френеля. Этот член не зависит (как и в случае обычной дифракции Френеля) от материала тела, огибаемого волной. Но к главному члену присоединяется добавочный, составляющий как бы фон, на котором расположены полосы френелевской дифракции, и этот добавочный член (а следовательно, и фон) уже зависит от электрических свойств огибаемого волной тела.

Основанный на принципе Гюйгенса приближенный метод вычисления дифракции позволяет, как известно, находить поле волны, огибающей тонкий непрозрачный экран; поле это выражается через интегралы Френеля.

В случае же, когда огибаемое тело обладает конечной кривизной (радиус кривизны велик по сравнению с длиной волны), вопрос о приближенных формулах для поля в области геометрической границы тени на достаточно большом расстоянии от тела оставался открытым; в частности, не было выяснено, применимы ли в этом случае те выражения для поля через интегралы Френеля, которые можно построить по аналогии со случаем бесконечно тонкого экрана.

В этой главе мы попытаемся выяснить поставленный здесь вопрос.

1. Исходные формулы для множителя ослабления при диффракции от шара

Мы будем исходить из дифракционных формул, выведенных в одной из наших работ по распространению радиоволн (глава 12). Мы должны здесь резюмировать основные результаты этой работы.

* Фок, 1950.

Поле от точечного источника (диполя), расположенного на некотором расстоянии от поверхности шара, выражается через две функции: U и W , представляющие решения уравнения колебаний:

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (1.01)$$

и имеющие в источнике точечную особенность вида

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} + U^0, \quad (1.02)$$

где R есть расстояние от источника, а U^0 остается конечным при $kR \rightarrow 0$.

Уравнения, определяющие U и W , отличаются друг от друга видом предельных условий, которых мы здесь выписывать не будем.

Пусть r , ϑ , φ — сферические координаты с началом в центре шара и с полярной осью, проходящей через диполь. Величина $s = a\vartheta$, где a — радиус шара*, будет расстоянием от источника до точки наблюдения, считаемым по дуге шара. Высоту источника над поверхностью шара обозначим через h_1 , а высоту точки наблюдения через h_2 . Введем параметр

$$m = \sqrt[3]{\frac{ka}{2}}, \quad (1.03)$$

который будем предполагать большим, и положим

$$x = \sqrt[3]{\frac{k}{2a^2}} s = m \frac{s}{a} = m\vartheta, \quad (1.04)$$

$$y_1 = \frac{kh_1}{m}, \quad y_2 = \frac{kh_2}{m}. \quad (1.05)$$

Комплексную диэлектрическую постоянную вещества шара обозначим через η , причем будем считать $|\eta| \gg 1$. Наконец, положим

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta+1}}, \quad q_1 = im\sqrt{\eta-1}. \quad (1.06)$$

В нашей работе показано, что вблизи поверхности шара (на расстояниях, малых по сравнению с его радиусом) функции

* Не смешивать с величиной, обозначенной той же буквой в предыдущей главе. То же замечание относится и к некоторым другим обозначениям.

U и W выражаются через множитель ослабления V по формулам

$$U = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa \sin \frac{s}{a}}} V(x, y_1, y_2, q), \quad (1.07)$$

$$W = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa \sin \frac{s}{a}}} V(x, y_1, y_2, q_1). \quad (1.08)$$

Множитель ослабления V может быть представлен при $y_1 < y_2$ в виде контурного интеграла

$$V(x, y_1, y_2, q) = e^{-i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_C e^{ixt} F(t, y_1, y_2, q) dt, \quad (1.09)$$

где функция F может быть написана в виде

$$F = \omega_1(t - y_2) \left[v(t - y_1) - \frac{v'(t) - qv(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - y_1) \right], \quad (1.10)$$

или же в виде

$$F = \frac{i}{2} \omega_1(t - y_2) \left[\omega_2(t - y_1) - \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - y_1) \right]. \quad (1.11)$$

Здесь $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — комплексные функции Эйри, представляющие решения дифференциального уравнения

$$\omega''(t) = t\omega(t) \quad (1.12)$$

и имеющие при больших отрицательных t асимптотические выражения

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(t) &= e^{i \frac{\pi}{4}} (-t)^{-\frac{1}{4}} e^{i \frac{2}{3} (-t)^{3/2}}, \\ \omega_2(t) &= e^{-i \frac{\pi}{4}} (-t)^{-\frac{1}{4}} e^{-i \frac{2}{3} (-t)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

В формулу (1.10) входит также одна из функций $u(t)$, $v(t)$, определяемых равенствами

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= u(t) + iv(t), \\ \omega_2(t) &= u(t) - iv(t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

При вещественных t обе функции $u(t)$, $v(t)$ вещественны. При всех значениях t мы имеем

$$\omega_1\left(te^{i \frac{2}{3}\pi}\right) = e^{i \frac{\pi}{3}} \omega_2(t); \quad \omega_1\left(te^{i \frac{4}{3}\pi}\right) = 2e^{i \frac{\pi}{6}} v(t). \quad (1.15)$$

Контур C в интеграле (1.09) охватывает в положительном направлении первую четверть плоскости комплексной переменной t (в первой четверти расположены все полюса подынтегральной функции). В качестве контура C мы можем взять, например, ломаную линию, идущую от $\infty e^{i \frac{2}{3}\pi}$ до 0 и от 0 до ∞ .

2. Преобразование множителя ослабления

В наших предыдущих работах (главы 5 и 12) множитель ослабления V был исследован нами, во-первых, в освещенной области, где вступает в силу отражательная формула, соответствующая геометрической оптике, во-вторых, в области тени, где имеет место убывание амплитуды поля по показательному закону, и, наконец, в переходной области вблизи поверхности шара (область полутени). Область конуса тени оставалась, однако, неисследованной, и вывод приближенных формул для этой области составляет цель нашей работы, изложенной в настоящей главе.

Под конусом тени мы разумеем конус, касательный к шару и имеющий вершину в источнике. Уравнение конуса тени может быть написано в виде

$$\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}, \quad (2.01)$$

или после перехода к переменным x , y_1 , y_2 и пренебрежения малыми величинами

$$\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} = x. \quad (2.02)$$

Таким образом, нам надлежит исследовать множитель ослабления V для случая, когда величины x , y_1 , y_2 весьма велики, разность же

$$\xi = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} \quad (2.03)$$

остается конечной. Заметим, что положительным значениям ξ соответствует теньевая, а отрицательным значениям — освещенная область.

В интеграле (1.09) для V мы можем разуместь под F одно из двух выражений (1.10) или (1.11), которые тождественно равны друг другу. Разобьем контур C в интеграле (1.09) на два участка: участок от $\infty e^{i \frac{2\pi}{3}}$ до 0 обозначим через C_1 , а участок от 0 до ∞ — через C_2 . На первом участке мы будем пользоваться для F выражением (1.11), а на втором участке — выражением (1.10). Мы можем тогда написать

$$V = \Phi + \Psi, \quad (2.04)$$

где

$$\Phi = \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{i}{2} \int_{C_1} e^{ixt} \omega_1(t - y_2) \omega_2(t - y_1) dt + \int_{C_2} e^{ixt} \omega_1(t - y_2) v(t - y_1) dt \right\}, \quad (2.05)$$

$$\Psi = -\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \times \\ \times \left\{ \frac{i}{2} \int_{C_1} e^{ixt} \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - y_1) \omega_1(t - y_2) dt + \int_{C_2} e^{ixt} \frac{v'(t) - qv(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - y_1) \omega_1(t - y_2) dt \right\}. \quad (2.06)$$

Интегралы, входящие в Φ , не зависят от параметра q , который входит только в Ψ . Следовательно, Φ не зависит от электрических свойств тела, дающего диффракцию; от них зависит только Ψ . Мы увидим, что Φ соответствует френелевской части диффракции, а Ψ — тому фону, на который налагается френелевская диффракционная картина.

3. Вычисление интеграла Φ

В выражении (2.05) для Φ мы можем заменить интегрирование по C_1 интегрированием от $-\infty$ до 0. Пользуясь соотношением $\omega_2 = \omega_1 - 2iv$, получим

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (3.01)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{i \frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^0 e^{ixt} \omega_1(t - y_2) \omega_2(t - y_1) dt, \quad (3.02)$$

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \omega_1(t - y_2) v(t - y_1) dt. \quad (3.03)$$

Вычислим сперва интеграл Φ_2 . Для этого воспользуемся следующим интегральным представлением для $\omega_1(t - y_2)$:

$$\omega_1(t - y_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{(t-y_2)z - \frac{1}{3}z^3} dz, \quad (3.04)$$

где контур Γ состоит из участков от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞ .

Заметим, что на контуре Γ будет $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. После подстановки (3.04) в (3.03) мы можем выполнить интегрирование по t при помощи формулы

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(z+ix)t} v(t-y_1) dt = \exp \left[y_1(z+ix) + \frac{1}{3}(z+ix)^3 \right], \quad (3.05)$$

справедливой при $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. В результате получим

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{3}x^3 + ix y_1} \int_{\Gamma} e^{ixz^2 - (x^2 + y_2 - y_1)z} dz. \quad (3.06)$$

Последний интеграл легко берется, и мы получаем окончательно

$$\Phi_2 = e^{i\omega(x)}, \quad (3.07)$$

где

$$\omega(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x(y_1 + y_2) + \frac{(y_2 - y_1)^2}{4x}. \quad (3.08)$$

Как будет показано в главе 12, величина ω есть фаза падающей волны, приближенно равная

$$\omega = k(R - s), \quad (3.09)$$

где R и s означают те же величины, что и в параграфе 1.

Таким образом, интеграл Φ_2 соответствует падающей волне.

Переходим к вычислению интеграла Φ_1 . Пользуясь интегральным представлением (3.04) для обоих множителей $\omega_1(t - y_2)$ и $\omega_1(t - y_1)$ и производя интегрирование по t , мы приходим к двойному контурному интегралу, в котором после замены переменных одно интегрирование может быть выполнено. В результате получается

$$\Phi_1 = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \int_C e^{i\omega(z)} \frac{dz}{\sqrt{z(z-x)}}, \quad (3.10)$$

где контур C идет от положительно мнимой бесконечности, пересекает вещественную ось справа от точки $z = x$ и затем идет по лучу $\arg z = -\frac{\pi}{6}$.

Вычет интеграла (3.10) в точке $z = x$ равен согласно (3.07) величине Φ_2 . Поэтому, если мы обозначим через C' контур, идущий аналогично C , но пересекающий вещественную ось *слева* от точки $z = x$, мы получим

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \int_{C'} e^{i\omega(z)} \frac{dz}{\sqrt{z(z-x)}}. \quad (3.11)$$

При помощи этих формул можно приближенно выразить функцию Φ через интегралы Френеля. Для этого применим способ стационарной фазы, учитывая, однако, что дробь $1/(z-x)$ не будет медленно меняющейся функцией.

Приравняв нулю производную от фазы $\omega(z)$, приходим к уравнению

$$z^4 - 2z^2(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)^2 = 0, \quad (3.12)$$

корни которого равны

$$z = \pm \sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2}. \quad (3.13)$$

Из этих четырех корней нас интересует только наибольший положительный корень:

$$z_0 = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}, \quad (3.14)$$

так как он лежит ближе всего к контуру C . Обозначим через C_0 контур, аналогичный C или C' , но пересекающий вещественную ось в точке $z = z_0$. Применяя обозначение (2.03), положим

$$x - z_0 = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} = \xi. \quad (3.15)$$

Если $\xi < 0$, то контур C_0 эквивалентен C и интеграл по нему даст Φ_1 . Если же $\xi > 0$, то контур C_0 эквивалентен C' и интеграл по нему даст Φ .

Вблизи $z = z_0$ мы имеем:

$$\omega(z) = \omega_0 - \mu^2(z - z_0)^2, \quad (3.16)$$

где

$$\omega_0 = \omega(z_0) = \frac{2}{3}y_1^{3/2} + \frac{2}{3}y_2^{3/2}; \quad (3.17)$$

$$\mu^2 = \frac{\sqrt{y_1 y_2}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}. \quad (3.18)$$

Для приближенного вычисления интеграла

$$I = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} \int_{C_0} e^{i\omega(z)} \frac{dz}{\sqrt{z(z-x)}} \quad (3.19)$$

заменяем величину \sqrt{z} постоянным значением $\sqrt{z_0}$, а функцию $\omega(z)$ — выражением (3.16). Положив

$$z = z_0 + \rho e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (3.20)$$

мы можем интегрировать по p от $-\infty$ до $+\infty$. В результате получается

$$I = \sqrt{\frac{x}{z_0}} e^{i\omega_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2 p^2} \frac{dp}{p - \xi e^{i\frac{\pi}{4}}}. \quad (3.21)$$

Последний интеграл выражается через интегралы Френеля, причем он имеет разные аналитические выражения при $\xi > 0$ и при $\xi < 0$, а именно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2 p^2} \frac{dp}{p - \xi e^{i\frac{\pi}{4}}} = \begin{cases} f(\mu\xi) & \text{при } \xi > 0, \\ -f(-\mu\xi) & \text{при } \xi < 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

где

$$f(\alpha) = e^{-i\alpha^2 - i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{i\alpha^2} d\alpha. \quad (3.24)$$

Легко видеть, что

$$f(\alpha) + f(-\alpha) = e^{-i\alpha^2}. \quad (3.25)$$

Вводя обычные интегралы Френеля

$$C + iS = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{i\alpha^2} d\alpha, \quad (3.26)$$

мы можем написать

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha^2 - i\frac{\pi}{4}} \left[\left(\frac{1}{2} - C \right) + i \left(\frac{1}{2} - S \right) \right]. \quad (3.27)$$

Асимптотическое выражение для $f(\alpha)$, справедливое при больших положительных значениях α , имеет вид

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{i}{2\alpha^3} + \dots \right). \quad (3.28)$$

Выражая интеграл I через $f(\alpha)$ и помня, что этот интеграл представляет при $\xi > 0$ функцию Φ , а при $\xi < 0$ — функцию $\Phi_1 = \Phi - \Phi_2$, где Φ_2 определено (3.07), получаем окончательно

$$\Phi = \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \mu f(\mu\xi) \quad (\text{при } \xi > 0), \quad (3.29)$$

$$\Phi = e^{i\omega(x)} - \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \mu f(-\mu\xi) \quad (\text{при } \xi < 0). \quad (3.30)$$

Эти выражения справедливы при условии, что оба числа $\sqrt{y_1}$ и $\sqrt{y_2}$ весьма велики (величина μ^2 будет порядка меньшего из этих чисел). Что касается величины ξ , то она может быть как конечной, так и малой, причем произведение $\mu\xi$ может быть любым (большим, конечным или малым) числом. Если ξ весьма мало (причем оно может быть любого знака), то оба выражения для Φ практически совпадают. Это видно из приближенных равенств:

$$\frac{\mu^2 x}{\sqrt{y_1 y_2}} = 1 + \frac{\xi}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \sim 1, \quad (3.31)$$

$$\omega(x) \sim \omega_0 - \mu^2 \xi^2 \quad (3.32)$$

в соединении с формулой (3.25). При $\xi = 0$ совпадение обоих выражений для Φ будет строгим.

4. Вычисление интеграла Ψ

Обратимся теперь к выводу приближенных формул для интеграла Ψ . Нас интересует значение интеграла для того же случая, для которого мы вычисляли интеграл Φ , а именно для случая, когда величины $\sqrt{y_1}$, $\sqrt{y_2}$ (и, следовательно, μ^2) весьма велики, величина же $\xi = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}$ конечна. При этих условиях главным участком интегрирования будет тот, где переменная t конечна. Но при конечном t и больших y_1 и y_2 стоящее в (2.06) под интегралом произведение функций ω_1 на показательную функцию будет равно

$$\begin{aligned} e^{ixt} \omega_1(t - y_1) \omega_1(t - y_2) &= \\ &= \frac{i}{4\sqrt{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} e^{i\xi t} \left[1 + \frac{it^2}{4\mu^2} + o\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.01)$$

где мы для краткости воспользовались обозначением (3.17). Подставляя это выражение в интеграл Ψ , получим

$$\Psi = -\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \left\{ g(\xi) - \frac{i}{4\mu^2} g''(\xi) + o\left(\frac{1}{\mu^4}\right) \right\}, \quad (4.02)$$

где

$$g(\xi) = \frac{1}{V\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{i}{2} \int_{\infty e^{i\frac{2}{3}\pi}}^0 e^{i\xi t} \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} dt + \int_0^{\infty} e^{i\xi t} \frac{v'(t) - qv(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} dt \right\}. \quad (4.03)$$

Пользуясь свойствами (1.15) функций Эйри, легко проверить, что если

$$t = t' e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad (4.04)$$

то

$$\frac{i}{2} \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} = \frac{v'(t') - qe^{i\frac{2}{3}\pi} v(t')}{\omega_2'(t') - qe^{i\frac{2}{3}\pi} \omega_2(t')}. \quad (4.05)$$

Подстановка (4.04) приводит первый интеграл в (4.03) к интегралу по вещественной положительной оси. Опуская штрих при t , получаем

$$g(\xi) = e^{-i\frac{\pi}{12}} \frac{1}{V\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi t}{2}(\sqrt{3}+i)} \frac{v'(t) - qe^{i\frac{2}{3}\pi} v(t)}{\omega_2'(t) - qe^{i\frac{2}{3}\pi} \omega_2(t)} dt + e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{V\pi} \int_0^{\infty} e^{i\xi t} \frac{v'(t) - qv(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} dt. \quad (4.06)$$

При возрастании t функция $v(t)$ в числителе быстро убывает, тогда как функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ в знаменателе столь же быстро возрастают. Поэтому оба интеграла сходятся весьма быстро и могут быть вычислены по квадратурам. Функция $g(\xi)$ допускает разложение в ряд Тейлора по степеням ξ ; коэффициенты этого ряда также могут быть вычислены по квадратурам. При больших

положительных значениях ξ функция $g(\xi)$ имеет асимптотическое выражение

$$g(\xi) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\xi}, \quad (4.07)$$

которое сводится к одному члену, не зависящему притом от q . Остаток будет порядка $e^{i\xi t_1}$, где t_1 — первый корень уравнения

$$\omega'_1(t) - q\omega_1(t) = 0. \quad (4.08)$$

При больших отрицательных ξ асимптотическое выражение для $g(\xi)$ имеет вид

$$g(\xi) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\xi} + \frac{\sqrt{-\xi}}{2} \frac{q + i\frac{\xi}{2}}{q - i\frac{\xi}{2}} e^{-\frac{i}{12}\xi^2}. \quad (4.09)$$

При подстановке этого выражения в (4.02) нужно иметь в виду, что эта формула для Ψ применима в том случае, когда поправочный член, содержащий в знаменателе μ^2 , будет мал по сравнению с главным. Чтобы оба выражения (4.02) и (4.09) были применимы, необходимо выполнение условия

$$1 \ll \xi^2 \ll \mu^2 \quad (\xi < 0). \quad (4.10)$$

5. Множитель ослабления в области конуса тени

В предыдущих параграфах мы нашли приближенные выражения для интегралов Φ и Ψ , сумма которых дает множитель ослабления $V(x, y_1, y_2, q)$. Составляя сумму, получаем при $\xi \geq 0$:

$$V = \frac{i\sqrt{x}}{\sqrt{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \left[\mu f(\mu\xi) - g(\xi) + \frac{i}{4\mu^2} g''(\xi) \right] \quad (5.01)$$

и при $\xi \leq 0$

$$V = e^{i\omega(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \left[\mu f(-\mu\xi) + g(\xi) + \frac{i}{4\mu^2} g''(\xi) \right]. \quad (5.02)$$

Эти выражения справедливы при условии, что определяемый из равенства

$$\mu^2 = \frac{\sqrt{y_1 y_2}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}} \quad (5.03)$$

параметр μ весьма велик, величина же

$$\xi = x - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} \quad (5.04)$$

конечна или мала.

Напомним геометрический смысл этих величин. Согласно формулам (1.03)—(1.05) мы имеем:

$$\mu^2 = \sqrt[6]{\frac{2k^2}{a} \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}}, \quad (5.05)$$

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{k}{2a^2} (s - \sqrt{2ah_1} - \sqrt{2ah_2})}. \quad (5.06)$$

Таким образом, большие значения μ соответствуют малым длинам волн и относительно большим расстояниям от поверхности тела (последние должны быть все же малы по сравнению с радиусами его кривизны). Величина ξ пропорциональна считаемому вдоль (точнее, параллельно) поверхности тела расстоянию от геометрической границы тени (конуса тени). При $\xi < 0$ величина $\mu^2 \xi^2$ приближенно равна разности фаз отраженной и падающей волн. Значение $\xi = 0$ соответствует границе тени, положительные значения ξ соответствуют области тени, а отрицательные — освещенной области.

Наши формулы дают переход от света к тени на относительно больших расстояниях от поверхности тела. Так как функции f и g и их производные по своим аргументам будут при конечных значениях аргументов порядка единицы, то при больших значениях μ главным членом в (5.01) будет член $\mu f(\mu\xi)$. Этот член пропорционален интегралу Френеля. Он представляет быстро меняющуюся функцию от ξ , так как аргумент в интеграле Френеля есть $\mu\xi$, где μ — большое число. Таким образом, главный член в выражении для V дает диффракцию Френеля. Но на эту диффракционную картину налагается фон, представленный функцией $g(\xi)$, которая по сравнению с главным членом меняется медленно. Этот фон зависит от материала диффрагирующего тела (поскольку $g(\xi)$ зависит от q), тогда как френелевский член от него не зависит.

Полученные здесь формулы для множителя ослабления должны при удалении в ту и в другую сторону от конуса тени переходить в выведенные нами ранее формулы для теневой и для освещенной областей. Проверим это. В области тени мы должны получить убывание амплитуды по показательному закону, а в освещенной области — отражательную формулу. Так как в формуле (5.01) и в асимптотическом выражении (4.07) для $g(\xi)$ члены, убывающие при больших положительных ξ , по показательному закону, вследствие их малости не учитываются, то мы должны в нашем приближении получить в области тени нуль. В самом деле, из асимптотического выражения (3.28) для функции Френеля $f(\alpha)$ следует

$$\mu f(\mu\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{i}{2\mu^2 \xi^3} \right). \quad (5.07)$$

С другой стороны, формула (4.07) дает

$$g(\xi) - \frac{i}{4\mu^2} g''(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{i}{2\mu^2\xi^3} \right), \quad (5.08)$$

т. е. то же самое выражение. Таким образом, при больших положительных ξ выражение (5.01) для V действительно обращается в нашем приближении в нуль.

Рассмотрим теперь большие отрицательные значения ξ . В формуле (5.02) первый член асимптотического выражения (4.09) для $g(\xi)$ сокращается с $\mu f(-\mu\xi)$, а второй член (содержащий показательную функцию) дает

$$V = e^{i\omega(x)} - \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{y_1 y_2}} e^{i\omega_0} \frac{\sqrt{-\xi}}{2} \frac{q + i\frac{\xi}{2}}{q - i\frac{\xi}{2}} e^{-\frac{i}{12}\xi^3}. \quad (5.09)$$

С другой стороны, как будет показано в главе 12, в освещенной области имеет место отражательная формула

$$V = e^{i\omega} \left(1 - \frac{q - ip}{q + ip} \sqrt{\frac{p}{p + \rho_1}} e^{2ip_1 \rho_1} \right) \quad (5.10)$$

[формула (4.31) указанной главы]. Здесь $\omega = \omega(x)$, величина ρ (пропорциональная косинусу угла падения) определяется из уравнения

$$\sqrt{y_1 + \rho^2} + \sqrt{y_2 + \rho^2} = 2\rho + x, \quad (5.11)$$

а величина ρ_1 равна

$$\rho_1 = 2\rho + x - \frac{1}{x}(y_1 + y_2). \quad (5.12)$$

В том приближении, в каком справедлива формула (5.09), будет

$$\rho = -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{16\mu^2} \sim -\frac{\xi}{2}, \quad (5.13)$$

$$\rho_1 = 2\mu^2 + \xi - \frac{2\mu^2\xi}{x} \sim 2\mu^2. \quad (5.14)$$

Пользуясь этими приближенными равенствами, нетрудно проверить, что формула (5.09) представляет приближенный вид отражательной формулы (5.10).

Таким образом, формулы (5.01) и (5.02), выведенные для области, близкой к конусу тени, смыкаются с формулами, справедливыми в областях, примыкающих с обеих сторон к конусу тени, и выведенными в наших предыдущих работах.

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу выведенных здесь формул.

Как исходное выражение для V , так и приближенные формулы допускают, при соответствующем изменении выражения для фазы падающей волны, переход к случаю плоской волны. Этот переход сводится к тому, что мы увеличиваем x и $\sqrt{y_2}$ до бесконечности, оставляя их разность конечной. Но, как показано в главах 5 и 6, в случае плоской волны наши исходные формулы справедливы не только для шара, но и для тела произвольной формы. Поэтому выведенные здесь приближенные формулы, содержащие интегралы Френеля, можно считать доказанными также и для тела произвольной формы. Представляется также весьма вероятным, что полученная здесь картина диффракции (диффракция Френеля, на которую налагается фон) имеет место, по крайней мере качественно, и на больших расстояниях от тела. При этом следует ожидать, что фон становится слабее по мере удаления от тела.

ОБОБЩЕНИЕ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ ФОРМУЛ НА СЛУЧАЙ ОТРАЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ*

На основе формул Френеля и законов лучевой оптики Гамильтона выводятся выражения для электромагнитного поля произвольной волны, отраженной от поверхности произвольной формы. При этом учитывается поправка на расширение пучка лучей после отражения. При выводе используется тензорная форма дифференциальной геометрии отражающей поверхности. Гауссовы параметры поверхности в точке, где произошло отражение, и фаза отраженной волны рассматриваются как криволинейные координаты. Для частного случая отражения сферической волны от шара полученные формулы сравниваются с диффракционными формулами.

В главе 6 была выведена отражательная формула, учитывающая изменение сечения пучка отраженных лучей, для случая отражения плоской волны от поверхности произвольной формы. Эта формула сравнивалась затем с диффракционными формулами, справедливыми в области полутени.

В настоящей главе отражательная формула выводится для случая отражения произвольной (не плоской) волны. Наши вычисления основаны на применении законов отражения Френеля, установленных им около 1820 г., и законов лучевой оптики, установленных Гамильтоном около 1830 г. Поэтому наши результаты не могут быть принципиально новыми. Однако, поскольку формулы Френеля применяются нами к электромагнитному полю и поскольку законы лучевой оптики формулируются нами при помощи дифференциальной геометрии в ее современной тензорной форме (что вносит чрезвычайно большие упрощения), наши результаты могут оказаться полезными для практических применений. Для читателя, незнакомого с тензорной формой дифференциальной геометрии, мы даем в разделе 2 сводку необходимых нам формул.

* Фок, 1950.

1. Формулы Френеля

Пусть поле падающей волны равно

$$\mathbf{E}^0 e^{i\mathbf{k}\psi}, \quad \mathbf{H}^0 e^{i\mathbf{k}\psi}, \quad (1.01)$$

где $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ — амплитуды, а ψ — фаза, выраженная в единицах длины, причем

$$(\text{grad } \psi)^2 = 1. \quad (1.02)$$

Для плоской волны амплитуды $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ постоянны; в общем случае мы будем считать составляющие векторов $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ медленно меняющимися функциями от координат. В дальнейшем мы будем понимать под $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ значения амплитуд поля на поверхности отражающего тела. Соответствующие величины для отраженной волны обозначим через $\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*$.

Пусть, далее, \mathbf{a} (a_x, a_y, a_z) есть единичный вектор в направлении падающего луча, \mathbf{a}^* (a_x^*, a_y^*, a_z^*) — единичный вектор в направлении отраженного луча и \mathbf{n} (n_x, n_y, n_z) — единичный вектор нормали к поверхности тела в точке отражения. Согласно закону отражения, величины \mathbf{a}^*, \mathbf{a} и \mathbf{n} связаны соотношением

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} - 2\mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}), \quad (1.03)$$

причем

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \cos \vartheta, \quad (1.04)$$

где ϑ — угол падения.

Величины \mathbf{a} и \mathbf{a}^* пропорциональны градиенту фазы падающей и отраженной волны. Пренебрегая изменением амплитуды на протяжении одной длины волны, мы получим из уравнений Максвелла для пустоты

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{E}^0] = \mathbf{H}^0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}^0 = 0, \quad (1.05)$$

откуда

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{H}^0] = -\mathbf{E}^0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{H}^0 = 0, \quad (1.06)$$

и аналогично для отраженной волны

$$[\mathbf{a}^* \times \mathbf{E}^*] = \mathbf{H}^*, \quad \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{E}^* = 0, \quad (1.07)$$

$$[\mathbf{a}^* \times \mathbf{H}^*] = -\mathbf{E}^*, \quad \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{H}^* = 0. \quad (1.08)$$

Обозначим через μ магнитную проницаемость, через

$$\eta = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (1.09)$$

комплексную диэлектрическую постоянную вещества отражающего тела и введем коэффициенты Френеля:

$$N = \frac{\eta \cos \vartheta - \sqrt{\mu\eta - \sin^2 \vartheta}}{\eta \cos \vartheta + \sqrt{\mu\eta - \sin^2 \vartheta}}, \quad (1.10)$$

$$M = \frac{\mu \cos \vartheta - \sqrt{\mu\eta - \sin^2 \vartheta}}{\mu \cos \vartheta + \sqrt{\mu\eta - \sin^2 \vartheta}}. \quad (1.11)$$

Тогда формулы Френеля, устанавливающие связь между амплитудами падающей и отраженной волны, могут быть написаны в виде

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^*) = N (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0), \quad (1.12)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^*) = M (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0). \quad (1.13)$$

Амплитуды проходящей волны (проникающей в вещество тела) нас не интересуют, и мы соответствующих формул не выписываем.

Уравнения (1.07), (1.12) и (1.13) могут быть решены относительно векторов \mathbf{E}^* и \mathbf{H}^* . Вводя обозначения

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0 = E_n^0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0 = H_n^0 \quad (1.14)$$

и выражая согласно (1.03) \mathbf{a}^* через \mathbf{a} , мы будем иметь

$$\sin^2 \vartheta \mathbf{E}^* = -NE_n^0 (\mathbf{n} \cos 2\vartheta + \mathbf{a} \cos \vartheta) + MH_n^0 [\mathbf{n} \times \mathbf{a}], \quad (1.15)$$

$$\sin^2 \vartheta \mathbf{H}^* = -MH_n^0 (\mathbf{n} \cos 2\vartheta + \mathbf{a} \cos \vartheta) - NE_n^0 [\mathbf{n} \times \mathbf{a}]. \quad (1.16)$$

Последние формулы можно написать в несколько ином виде, если ввести вместо \mathbf{a} и \mathbf{a}^* касательный к поверхности вектор

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{n} \cos \vartheta = \mathbf{a}^* - \mathbf{n} \cos \vartheta, \quad (1.17)$$

квадрат которого равен

$$\mathbf{b}^2 = \sin^2 \vartheta. \quad (1.18)$$

Мы будем иметь

$$\sin^2 \vartheta \mathbf{E}^* = NE_n^0 (\mathbf{n} \sin^2 \vartheta - \mathbf{b} \cos \vartheta) + MH_n^0 [\mathbf{n} \times \mathbf{b}], \quad (1.19)$$

$$\sin^2 \vartheta \mathbf{H}^* = MH_n^0 (\mathbf{n} \sin^2 \vartheta - \mathbf{b} \cos \vartheta) - NE_n^0 [\mathbf{n} \times \mathbf{b}]. \quad (1.20)$$

Таковы вытекающие из формул Френеля значения амплитуд отраженной волны на поверхности тела.

2. Дифференциальная геометрия отражающей поверхности

Пусть уравнение отражающей поверхности в параметрической форме имеет вид

$$x = x_0(u, v); \quad y = y_0(u, v); \quad z = z_0(u, v), \quad (2.01)$$

где u, v — гауссовы координатные параметры (криволинейные координаты на поверхности).

Полагая

$$g_{uv} = \frac{\partial x_0}{\partial u} \frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial y_0}{\partial u} \frac{\partial y_0}{\partial v} + \frac{\partial z_0}{\partial u} \frac{\partial z_0}{\partial v} \quad (2.02)$$

и определяя аналогично g_{uu} и g_{vv} , можем написать квадрат элемента дуги на поверхности в виде

$$d\sigma^2 = g_{uu} du^2 + 2g_{uv} du dv + g_{vv} dv^2, \quad (2.03)$$

или, короче,

$$d\sigma^2 = \sum_{u, v} g_{uv} du dv. \quad (2.04)$$

Мы будем пользоваться обозначениями для ковариантных и контравариантных составляющих векторов и тензоров, поднимая и опуская значки при помощи «метрического» тензора g_{uv} , входящего в (2.04). Если положить

$$g = g_{uu}g_{vv} - (g_{uv})^2, \quad (2.05)$$

то контравариантные составляющие метрического тензора будут равны

$$g^{uu} = \frac{g_{vv}}{g}, \quad g^{uv} = -\frac{g_{uv}}{g}, \quad g^{vv} = \frac{g_{uu}}{g}. \quad (2.06)$$

Совокупность величин (2.06) называют также тензором, обратным по отношению к тензору g_{uv} . Элемент поверхности напишется в виде

$$dS = \sqrt{g} du dv. \quad (2.07)$$

В дальнейшем нам придется иметь дело с ковариантным дифференцированием на поверхности. Для этого положим

$$\frac{\partial x_0}{\partial w} \frac{\partial^2 x_0}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y_0}{\partial w} \frac{\partial^2 y_0}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z_0}{\partial w} \frac{\partial^2 z_0}{\partial u \partial v} = [uv, w], \quad (2.08)$$

где вместо комбинации u, v можно написать также u, u или v, v , а буква w может принимать значения u, v .

Величины $[uv, w]$, называемые скобками Кристоффеля, могут быть выражены через производные от g_{uv} , а именно:

$$[uv, w] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{uw}}{\partial v} + \frac{\partial g_{vw}}{\partial u} - \frac{\partial g_{uv}}{\partial w} \right). \quad (2.09)$$

В нашем случае имеется шесть скобок Кристоффеля — три величины вида

$$\left. \begin{aligned} [uu, u] &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{uu}}{\partial u}, & [uv, u] &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{uu}}{\partial v}, \\ [uu, v] &= \frac{\partial g_{uv}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{uu}}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

и три другие величины, получаемые из предыдущих заменой u на v , и обратно. При помощи них образуем «тензориальные параметры» (или «скобки Кристоффеля второго рода»), т. е. величины

$$\Gamma_{qr}^p = g^{pu} [qr, u] + g^{pv} [qr, v], \quad (2.11)$$

где каждая из букв p, q, r может принимать значения u, v .

Пусть $f(u, v)$ есть некоторая функция точки на поверхности. Ковариантные составляющие ее градиента на поверхности будут равны

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_v = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (2.12)$$

а контравариантные составляющие будут

$$f^u = g^{uu} f_u + g^{uv} f_v, \quad f^v = g^{uv} f_u + g^{vv} f_v, \quad (2.13)$$

причем квадрат градиента равен

$$f_u f^u + f_v f^v = g^{uu} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + 2g^{uv} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + g^{vv} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2. \quad (2.14)$$

Квадрат градиента есть скаляр, т. е. не зависит от выбора координатных параметров u, v .

Вторая ковариантная производная от функции $f(u, v)$ отличается от обычной второй производной членами, линейными относительно первых производных той же функции. Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} f_{uu} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \Gamma_{uu}^u \frac{\partial f}{\partial u} - \Gamma_{uu}^v \frac{\partial f}{\partial v}, \\ f_{uv} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \Gamma_{uv}^u \frac{\partial f}{\partial u} - \Gamma_{uv}^v \frac{\partial f}{\partial v}, \\ f_{vv} &= \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \Gamma_{vv}^u \frac{\partial f}{\partial u} - \Gamma_{vv}^v \frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Можно доказать, что совокупность величины f_{uu}, f_{uv}, f_{vv} представляет симметричный тензор, и выражение

$$f_{uu} du^2 + 2f_{uv} du dv + f_{vv} dv^2 \quad (2.16)$$

не зависит от выбора координат u, v .

Перейдем теперь к формулам для составляющих вектора нормали к поверхности и их производных по параметрам u, v ; последние связаны с радиусами кривизны нормальных сечений поверхности. Мы имеем:

$$\sqrt{g} n_x = \frac{\partial y_0}{\partial u} \frac{\partial z_0}{\partial v} - \frac{\partial y_0}{\partial v} \frac{\partial z_0}{\partial u} \text{ и т. д.}, \quad (2.17)$$

где буквы «и т. д.» означают два аналогичных выражения, получаемых круговой перестановкой букв (x, y, z).

Очевидно, что

$$n_x \frac{\partial x_0}{\partial u} + n_y \frac{\partial y_0}{\partial u} + n_z \frac{\partial z_0}{\partial u} = 0; \quad n_x \frac{\partial x_0}{\partial v} + n_y \frac{\partial y_0}{\partial v} + n_z \frac{\partial z_0}{\partial v} = 0. \quad (2.18)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} G_{uu} &= n_x \frac{\partial^2 x_0}{\partial u^2} + n_y \frac{\partial^2 y_0}{\partial u^2} + n_z \frac{\partial^2 z_0}{\partial u^2}, \\ G_{uv} &= n_x \frac{\partial^2 x_0}{\partial u \partial v} + n_y \frac{\partial^2 y_0}{\partial u \partial v} + n_z \frac{\partial^2 z_0}{\partial u \partial v}, \\ G_{vv} &= n_x \frac{\partial^2 x_0}{\partial v^2} + n_y \frac{\partial^2 y_0}{\partial v^2} + n_z \frac{\partial^2 z_0}{\partial v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

В силу равенств (2.18) мы можем заменить здесь обыкновенные вторые производные от x_0, y_0, z_0 ковариантными вторыми производными. В самом деле, полагая в (2.15) последовательно $f = x_0, f = y_0, f = z_0$, умножая на n_x, n_y, n_z и складывая, мы получим слева линейную комбинацию ковариантных вторых производных, а справа выражения (2.19), так как в правой части члены с первыми производными сократятся вследствие (2.18). Отсюда следует, что совокупность величин G_{uu}, G_{uv}, G_{vv} представляет собой тензор, который, очевидно, будет симметричным.

В силу тех же равенств (2.18) взятые с обратным знаком величины G_{uv} и т. д. можно написать в виде

$$-G_{uv} = \frac{\partial n_x}{\partial u} \frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial n_y}{\partial u} \frac{\partial y_0}{\partial v} + \frac{\partial n_z}{\partial u} \frac{\partial z_0}{\partial v}. \quad (2.20)$$

Отсюда следует

$$-\sum_{u, v} G_{uv} du dv = dn_x dx_0 + dn_y dy_0 + dn_z dz_0. \quad (2.21)$$

Положив

$$dn_x = \frac{dx_0}{R} + \delta n_x \text{ и т. д.}, \quad (2.22)$$

где бесконечно малый вектор δn перпендикулярен к вектору нормали n и к вектору смещения (dx_0, dy_0, dz_0) , получим

$$-\sum_{u, v} G_{uv} du dv = \frac{d\sigma^2}{R}, \quad (2.23)$$

где $d\sigma^2$ есть квадрат вектора смещения, даваемый выражением (2.03).

Соотношения (2.22) показывают, что R есть радиус кривизны сечения поверхности плоскостью, содержащей вектор нормали

и вектор смещения. Таким образом, формула (2.23) дает выражение для радиуса кривизны R в зависимости от направления плоскости нормального сечения.

Решая уравнения (2.20) относительно производных от n_x , n_y , n_z по u , v , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_x}{\partial u} &= -G_u^u \frac{\partial x_0}{\partial u} - G_u^v \frac{\partial x_0}{\partial v}, \\ \frac{\partial n_x}{\partial v} &= -G_v^u \frac{\partial x_0}{\partial u} - G_v^v \frac{\partial x_0}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

где величины G_v^u получаются из G_{uv} по формулам, аналогичным (2.13).

Обозначив через R_1 и R_2 главные радиусы кривизны нормального сечения поверхности, мы будем иметь

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = G_u^u G_v^v - G_v^u G_u^v, \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -G = -G_u^u - G_v^v. \quad (2.26)$$

Величина K есть гауссова кривизна поверхности.

3. Сечение пучка отраженных лучей

Формулы Френеля дают значения амплитуды отраженной волны на поверхности тела. Для нахождения амплитуды отраженной волны на некотором расстоянии от поверхности необходимо иметь формулы для сечения пучка, опирающегося на площадку dS поверхности тела и прошедшего после отражения заданный путь s . Такие формулы были выведены нами в главе 6 для случая, когда падающая волна — плоская. В настоящей главе мы выведем их для общего случая произвольной падающей волны.

Согласно закону отражения, написанному в форме (1.17), единичные векторы \mathbf{a} и \mathbf{a}^* , характеризующие направления падающего и отраженного луча, выражаются через касательный к поверхности вектор \mathbf{b} по формулам

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{n} \cos \vartheta, \quad (3.01)$$

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{b} + \mathbf{n} \cos \vartheta, \quad (3.02)$$

причем

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0; \quad b^2 = \sin^2 \vartheta. \quad (3.03)$$

Обозначим через $\omega(u, v)$ значение фазы ψ падающей волны в точке (u, v) поверхности тела. Так как вектор \mathbf{a} есть градиент фазы ψ , то касательные к поверхности составляющие вектора \mathbf{a}

(которые в силу (3.01) равны касательным составляющим вектора **b**) могут быть выражены через производные от ω по u и по v . В свою очередь, эти производные выражаются через составляющие вектора **b**. Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial u} &= \omega_u = b_x \frac{\partial x_0}{\partial u} + b_y \frac{\partial y_0}{\partial u} + b_z \frac{\partial z_0}{\partial u}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} &= \omega_v = b_x \frac{\partial x_0}{\partial v} + b_y \frac{\partial y_0}{\partial v} + b_z \frac{\partial z_0}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (3.04)$$

Присоединяя сюда первое уравнение (3.03), мы можем решить эти три уравнения относительно b_x , b_y , b_z . Мы получим

$$b_x = \omega^u \frac{\partial x_0}{\partial u} + \omega^v \frac{\partial x_0}{\partial v} \quad \text{и т. д.}, \quad (3.05)$$

где величины ω^u , ω^v связаны с производными ω_u , ω_v соотношениями, аналогичными (2.13).

Второе равенство (3.03) может быть написано в виде

$$\sum_{u,v} g_{uv} \omega^u \omega^v = \sum_{u,v} g^{uv} \omega_u \omega_v = \omega_u \omega^u + \omega_v \omega^v = \sin^2 \vartheta. \quad (3.06)$$

Таким образом, угол падения ϑ непосредственно выражается через ω_u , ω_v .

Рассмотрим уравнения

$$x = x_0 + s a_x^* \quad \text{и т. д.}, \quad (3.07)$$

которые могут быть написаны в виде

$$x = x_0 + s b_x + s \cos \vartheta n_x \quad \text{и т. д.} \quad (3.08)$$

В правых частях этих уравнений все величины, кроме s , представляют известные функции точки (u, v) на поверхности. Считая (u, v) постоянными и меняя s , получим уравнение луча, отразившегося от точки u, v . Параметр s , есть, очевидно, путь, пройденный лучом после отражения. Так как фаза падающей волны в точке отражения есть $\omega(u, v)$, то фаза χ отраженной волны будет равна

$$\chi = s + \omega(u, v). \quad (3.09)$$

Выражая в (3.07) s через χ , получим

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + (\chi - \omega) a_x^*, \\ y &= y_0 + (\chi - \omega) a_y^*, \\ z &= z_0 + (\chi - \omega) a_z^*. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

При постоянном χ формулы (3.10) представляют параметрические уравнения волновой поверхности отраженной волны.

Если мы в формулах (3.10) будем менять u , v в пределах $(u, u + du)$, $(v, v + dv)$, то получим некоторый участок волновой поверхности. Этот участок можно рассматривать как сечение волновой поверхностью пучка отраженных лучей, опирающегося на площадку $dS = \sqrt{g} du dv$. Так как лучи перпендикулярны к волновой поверхности, то сечение это будет нормальным. Обозначив площадь его через $D(s) dS$, будем иметь

$$D(s) dS = \begin{vmatrix} a_x^* & a_y^* & a_z^* \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du dv, \quad (3.11)$$

откуда

$$D(s) = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} a_x^* & a_y^* & a_z^* \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

В этих формулах величины $\partial x/\partial u$ и т. д. означают производные от выражений (3.10), взятые при постоянном χ . Значение определителя, однако, не изменится, если заменить их производными при постоянном s (как это сделано в главе 6). В самом деле, имеем:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_\chi = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_s - \omega_u a_x^* \quad \text{и т. д.}, \quad (3.13)$$

и в результате такой замены вторая и третья строки определителя изменятся на величины, пропорциональные элементам первой строки. Геометрически это значит, что сечение пучка любой поверхностью (например, поверхностью $s = \text{const}$), будучи спроектировано на плоскость, перпендикулярную отраженному лучу, даст нормальное сечение пучка.

4. Вычисление определителя

Непосредственное вычисление определителя (3.12) приводит к сложным выкладкам. Выкладки эти могут быть, однако, значительно упрощены, если в векторах, входящих в первую, вторую и третью строки определителя, перейти от составляющих по осям x , y , z к составляющим по двум касательным направлениям и по направлению нормали к отражающей поверхности.

Пусть мы имеем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (4.01)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} A_u &= A_x \frac{\partial x_0}{\partial u} + A_y \frac{\partial y_0}{\partial u} + A_z \frac{\partial z_0}{\partial u}, \\ A_v &= A_x \frac{\partial x_0}{\partial v} + A_y \frac{\partial y_0}{\partial v} + A_z \frac{\partial z_0}{\partial v}, \\ A_n &= A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z, \end{aligned} \right\} \quad (4.02)$$

откуда обратно

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A^u \frac{\partial x_0}{\partial u} + A^v \frac{\partial x_0}{\partial v} + A_n n_x, \\ A_y &= A^u \frac{\partial y_0}{\partial u} + A^v \frac{\partial y_0}{\partial v} + A_n n_y, \\ A_z &= A^u \frac{\partial z_0}{\partial u} + A^v \frac{\partial z_0}{\partial v} + A_n n_z. \end{aligned} \right\} \quad (4.03)$$

Здесь A^u и A^v связаны с A_u и A_v по формулам, аналогичным (2.13).

Аналогичное преобразование введем для двух других входящих в определитель векторов B и C .

Мы будем тогда иметь

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} A_u & A_v & A_n \\ B_u & B_v & B_n \\ C_u & C_v & C_n \end{vmatrix}, \quad (4.04)$$

а также

$$\Delta = \sqrt{g} \begin{vmatrix} A^u & A^v & A_n \\ B^u & B^v & B_n \\ C^u & C^v & C_n \end{vmatrix}. \quad (4.05)$$

Чтобы применить эти формулы к вычислению определителя (3.12), мы должны положить

$$\left. \begin{aligned} A_x &= a_x^*, & A_y &= a_y^*, & A_z &= a_z^*; \\ B_x &= \frac{\partial x}{\partial u}, & B_y &= \frac{\partial y}{\partial u}, & B_z &= \frac{\partial z}{\partial u}; \\ C_x &= \frac{\partial x}{\partial v}, & C_y &= \frac{\partial y}{\partial v}, & C_z &= \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (4.06)$$

Согласно (3.02) и (3.03) получим тогда

$$A_u = \omega_u; \quad A_v = \omega_v; \quad A_n = \cos \vartheta. \quad (4.07)$$

Вычисление новых составляющих векторов **B** и **C** значительно сложнее. Мы имеем:

$$B_x = \frac{\partial x_0}{\partial u} - \omega_u a_x^* + s \frac{\partial a_x^*}{\partial u} \quad (4.08)$$

и согласно (1.17)

$$B_x = \frac{\partial x_0}{\partial u} - \omega_u a_x^* + s \left(\frac{\partial b_x}{\partial u} + n_x \frac{\partial (\cos \vartheta)}{\partial u} + \cos \vartheta \frac{\partial n_x}{\partial u} \right). \quad (4.09)$$

По формуле (2.20) имеем:

$$\frac{\partial n_x}{\partial u} \frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial n_y}{\partial u} \frac{\partial y_0}{\partial v} + \frac{\partial n_z}{\partial u} \frac{\partial z_0}{\partial v} = -G_{uv}, \quad (4.10)$$

причем это выражение симметрично относительно u, v .

Вычислим теперь величину

$$b_{uv} = \frac{\partial b_x}{\partial u} \frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial b_y}{\partial u} \frac{\partial y_0}{\partial v} + \frac{\partial b_z}{\partial u} \frac{\partial z_0}{\partial v}. \quad (4.11)$$

Вследствие формул (3.04) эту величину можно написать в виде

$$b_{uv} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} - \left(b_x \frac{\partial^2 x_0}{\partial u \partial v} + b_y \frac{\partial^2 y_0}{\partial u \partial v} + b_z \frac{\partial^2 z_0}{\partial u \partial v} \right), \quad (4.12)$$

откуда видно, что b_{uv} также симметрично относительно u, v . Подставив сюда вместо b_x, b_y, b_z выражения (3.05) и пользуясь (2.08), можно эту величину написать в виде

$$b_{uv} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} - \omega^u [uv, u] - \omega^v [uv, v]. \quad (4.13)$$

Вводя по формулам (2.11) «тензорные параметры» Γ_{qr}^p , мы можем также написать

$$b_{uv} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} - \Gamma_{uv}^u \omega_u - \Gamma_{uv}^v \omega_v. \quad (4.14)$$

Сравнивая это выражение с (2.15), получаем простой результат

$$b_{uv} = \omega_{uv}, \quad (4.15)$$

где ω_{uv} есть вторая ковариантная производная от фазы ω .

Этот результат справедлив не только для значков (u, v) , но и для других комбинаций значков (u, u) и (v, v) .

Полученные формулы позволяют найти значения B_u, B_v, C_u, C_v (мы их выпишем ниже). В выражения для B_n и C_n входят величины

$$\beta_u = n_x \frac{\partial b_x}{\partial u} + n_y \frac{\partial b_y}{\partial u} + n_z \frac{\partial b_z}{\partial u}, \quad (4.16)$$

$$\beta_v = n_x \frac{\partial b_x}{\partial v} + n_y \frac{\partial b_y}{\partial v} + n_z \frac{\partial b_z}{\partial v}. \quad (4.17)$$

Вычислим одну из них. Вследствие $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) = 0$ имеем

$$\beta_u = - \left(b_x \frac{\partial n_x}{\partial u} + b_y \frac{\partial n_y}{\partial u} + b_z \frac{\partial n_z}{\partial u} \right). \quad (4.18)$$

Подставляя сюда вместо b_x, b_y, b_z выражения (3.05) и пользуясь (2.20), получим

$$\beta_u = G_{uu}\omega^u + G_{uv}\omega^v, \quad (4.19)$$

аналогично

$$\beta_v = G_{vu}\omega^u + G_{vv}\omega^v. \quad (4.20)$$

Теперь мы можем выписать новые составляющие всех векторов. Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} B_u &= g_{uu} - \omega_u \omega_u + s (\omega_{uu} - \cos \vartheta G_{uu}), \\ B_v &= g_{vv} - \omega_v \omega_v + s (\omega_{vv} - \cos \vartheta G_{vv}), \\ B_n &= -\omega_n \cos \vartheta + s \left(G_{uu}\omega^u + G_{vv}\omega^v + \frac{\partial (\cos \vartheta)}{\partial u} \right); \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

$$\left. \begin{aligned} C_u &= g_{vu} - \omega_v \omega_u + s (\omega_{vu} - \cos \vartheta G_{vu}), \\ C_v &= g_{uv} - \omega_u \omega_v + s (\omega_{uv} - \cos \vartheta G_{uv}), \\ C_n &= -\omega_n \cos \vartheta + s \left(G_{vu}\omega^u + G_{uv}\omega^v + \frac{\partial (\cos \vartheta)}{\partial v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Кроме того, согласно (4.07)

$$A_u = \omega_u, \quad A_v = \omega_v, \quad A_n = \cos \vartheta.$$

С этими значениями $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ определитель $D(s)$, дающий сечение пучка лучей, будет равен

$$D(s) = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} A_u & A_v & A_n \\ B_u & B_v & B_n \\ C_u & C_v & C_n \end{vmatrix}. \quad (4.23)$$

Это выражение для определителя может быть значительно упрощено при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} A_u \omega^u + A_v \omega^v + A_n \cos \vartheta &= 1, \\ B_u \omega^u + B_v \omega^v + B_n \cos \vartheta &= 0, \\ C_u \omega^u + C_v \omega^v + C_n \cos \vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Соотношения эти легко проверяются. Мы имеем согласно (3.06)

$$\omega_u \omega^u + \omega_v \omega^v = \sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta. \quad (4.25)$$

Беря от этого выражения ковариантную производную по u и по v (она совпадает с обыкновенной производной), получаем по разделении на 2

$$\left. \begin{aligned} \omega_{uu} \omega^u + \omega_{uv} \omega^v &= -\cos \vartheta \frac{\partial (\cos \vartheta)}{\partial u}, \\ \omega_{vu} \omega^u + \omega_{vv} \omega^v &= -\cos \vartheta \frac{\partial (\cos \vartheta)}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Подставляя в (4.24) явные выражения (4.07), (4.21), (4.22) для составляющих векторов A , B , C и используя (4.25) и (4.26), убеждаемся в справедливости соотношений (4.24). Геометрический смысл этих соотношений очевиден. Они выражают тот факт, что A есть единичный вектор нормали к волновой поверхности, а векторы B и C к нему перпендикулярны.

Умножая в (4.23) третий столбец на $\cos \vartheta$ и используя (4.24), получим

$$D(s) \cos \vartheta = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} A_u & A_v & 1 \\ B_u & B_v & 0 \\ C_u & C_v & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} B_u & B_v \\ C_u & C_v \end{vmatrix}. \quad (4.27)$$

Это выражение приобретает более изящный вид, если ввести симметричный тензор

$$T_{uv} = g_{uv} - \omega_u \omega_v + s(\omega_{uv} - \cos \vartheta G_{uv}). \quad (4.28)$$

Согласно (4.21) и (4.22) имеем тогда

$$B_u = T_{uu}, \quad B_v = T_{uv}, \quad (4.29)$$

$$C_u = T_{vu}, \quad C_v = T_{vv}, \quad (4.30)$$

и определитель (4.27) примет вид

$$D(s) \cos \vartheta = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} T_{uu} & T_{uv} \\ T_{vu} & T_{vv} \end{vmatrix}. \quad (4.31)$$

Если ввести смешанные компоненты тензора T_{uv} по формулам

$$T_v^u = \sum_r g^{ur} T_{rv}, \quad (4.32)$$

можно вместо (4.31) написать

$$D(s) \cos \vartheta = \begin{vmatrix} T_u^u & T_v^u \\ T_u^v & T_v^v \end{vmatrix} \quad (4.33)$$

или, раскрывая определитель,

$$D(s) \cos \vartheta = T_u^u T_v^v - T_v^u T_u^v. \quad (4.34)$$

Таким образом, вычисление определителя $D(s)$ сведено к вычислению тензора T_{uv} , которое никаких затруднений не представляет.

5. Дифференциальная геометрия волновой поверхности

Согласно (3.10) уравнения

$$x = x_0 + (\chi - \omega) a_x^* \text{ и т. д.} \quad (5.01)$$

представляют, при постоянном χ , параметрические уравнения поверхности отраженной волны. При этом каждой точке на волновой поверхности сопоставляется определенная точка на отражающей поверхности, а именно та, которая лежит на одном и том же луче. Этим двум точкам соответствуют одни и те же значения параметров u, v . Параметры u, v и фазу χ можно толковать как криволинейные координаты в пространстве.

Квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками будет иметь вид

$$dl^2 = \sum_{u, v} g_{uv}^* du dv + d\chi^2. \quad (5.02)$$

В этом выражении произведения дифференциалов $du d\chi$ и $dv d\chi$ будут отсутствовать, а квадрат дифференциала $d\chi$ будет входить с коэффициентом единица.

Квадратичная форма

$$d\tau^2 = \sum_{u, v} g_{uv}^* du dv \quad (5.03)$$

представляет квадрат элемента дуги на волновой поверхности.

Найдем коэффициенты этой квадратичной формы. Припоминая выражения (4.06) для векторов \mathbf{B} и \mathbf{C} , мы можем аналогично (2.08) написать

$$g_{uu}^* = \mathbf{B}^2, \quad g_{uv}^* = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \quad g_{vv}^* = \mathbf{C}^2. \quad (5.04)$$

При вычислении скалярного произведения и квадратов векторов \mathbf{B} и \mathbf{C} мы можем пользоваться их составляющими (4.21) и (4.22). Мы будем иметь, например,

$$\mathbf{B}^2 = \sum_{u, v} g^{uv} B_u B_v + B_n^2. \quad (5.05)$$

Используя соотношения (4.24) и вводя обозначения

$$\gamma^{uv} = g^{uv} + \frac{\omega^u \omega^v}{\cos^2 \phi}, \quad (5.06)$$

мы можем написать

$$\mathbf{B}^2 = \sum_{u, v} \gamma^{uv} B_u B_v. \quad (5.07)$$

Обозначая значки суммирования буквами p, q и пользуясь (4.29), получим из (5.04)

$$g_{uu}^* = \sum_{p, q} \gamma^{pq} T_{up} T_{uq}. \quad (5.08)$$

Аналогично

$$g_{uv}^* = \sum_{p, q} \gamma^{pq} T_{up} T_{vq}, \quad (5.09)$$

$$g_{vv}^* = \sum_{p, q} \gamma^{pq} T_{vp} T_{vq}. \quad (5.10)$$

Таким образом, коэффициенты квадратичной формы (5.03) непосредственно выражаются через тензор T_{uv} . Обозначив через g^* определитель

$$g^* = g_{uu}^* g_{vv}^* - g_{uv}^* g_{vu}^* \quad (5.11)$$

(дискриминант квадратичной формы), будем иметь на основании (5.08)—(5.10)

$$g^* = \text{Det } \gamma^{pq} (\text{Det } T_{uv})^2, \quad (5.12)$$

откуда

$$g^* = gD(s)^2. \quad (5.13)$$

Элемент dS^* поверхности отраженной волны, соответствующей элементу dS отражающей поверхности, равен

$$dS^* = \sqrt{g^*} du dv = D(s) \sqrt{g} du dv = D(s) dS, \quad (5.14)$$

как и должно быть.

Величины T_{uv} являются линейными, а величины g_{uv}^* — квадратичными функциями от s . При $s = 0$ мы имеем

$$g_{uv}^*(0) = T_{uv}(0) = g_{uv} - \omega_u \omega_v. \quad (5.15)$$

Заметим, что этот тензор является обратным тензору γ^{uv} .

При произвольном s мы можем написать

$$T_{uv}(s) = T_{uv}(0) - sT'_{uv}(0), \quad (5.16)$$

где согласно (4.28)

$$T'_{uv}(0) = \omega_{uv} - \cos \theta G_{uv}, \quad (5.17)$$

а также

$$g_{uv}^*(s) = T_{uv}(0) + 2sT'_{uv}(0) + s^2 \sum_{p, q} \gamma^{pq} T'_{up}(0) T'_{qv}(0). \quad (5.18)$$

Перейдем к вычислению второй квадратичной формы, определяющей радиусы кривизны волновой поверхности. Определение ее аналогично (2.20), только вместо вектора \mathbf{n} нужно подставить вектор \mathbf{a}^* нормали к волновой поверхности, а вместо величин $\partial x_0 / \partial v$ и т. д. — величины $\partial x / \partial v$ и т. д., т. е. составляющие «вектора» \mathbf{C} [формула (4.06)]. Согласно этому определению мы имеем

$$-G_{uv}^*(s) = \frac{\partial a_x^*}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial a_y^*}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial a_z^*}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}. \quad (5.19)$$

Но это выражение уже было найдено нами при вычислении g_{uv}^* . Пользуясь (4.08), мы можем написать

$$-sG_{uv}^*(s) = \left(B_x - \frac{\partial x_0}{\partial u} + \omega_u a_x^* \right) C_x + \dots, \quad (5.20)$$

где многоточием обозначены произведения составляющих по осям y и z . Отсюда

$$-sG_{uv}^*(s) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} - C_u = g_{uv}^*(s) - T_{uv}(s). \quad (5.21)$$

Таким образом, коэффициенты первой и второй квадратичной формы связаны с тензором $T_{uv}(s)$ соотношением

$$g_{uv}^*(s) + sG_{uv}^*(s) = T_{uv}(s). \quad (5.22)$$

Отсюда и из (5.16) и (5.18) можно найти и явное выражение для $G_{uv}^*(s)$, а именно

$$-G_{uv}^*(s) = T'_{uv}(0) + s \sum_{p, q} \gamma^{pq} T'_{up}(0) T'_{qv}(0). \quad (5.23)$$

В частности, при $s = 0$ вследствие (5.17) будет

$$-G_{uv}^*(0) = \omega_{uv} - \cos \vartheta G_{uv}. \quad (5.24)$$

Таким образом, для отраженной волны как первая, так и вторая квадратичная форма нами получена.

Аналогичные вычисления могут быть произведены и для падающей волны. Для этого достаточно заменить в (3.07) и в других формулах a^* на a [формула (3.01)] и считать s отрицательным, так что $(-s)$ есть расстояние, считаемое по лучу, до точки падения на поверхность. Мы ограничимся тем, что приведем формулы для значений коэффициентов $g_{uv}^0(0)$ и $G_{uv}^0(0)$ первой и второй квадратичной формы падающей волны в точке падения луча. Мы будем иметь

$$g_{uv}^0(0) = g_{uv} - \omega_u \omega_v, \quad (5.25)$$

$$-G_{uv}^0(0) = \omega_{uv} + \cos \vartheta G_{uv}. \quad (5.26)$$

Из этих формул видно, что значения g_{uv}^0 и g_{uv}^* на отражающем теле совпадают, а выражения для G_{uv}^0 и G_{uv}^* отличаются знаком в члене, содержащем $\cos \vartheta$. Соотношением (5.26) удобно пользоваться в том случае, когда падающая волна — плоская: тогда $G_{uv}^0 = 0$ и, следовательно,

$$\omega_{uv} = -\cos \vartheta G_{uv}. \quad (5.27)$$

Подставляя это значение в (4.28), получим

$$T_{uv} = g_{uv} - \omega_u \omega_v - 2s \cos \vartheta G_{uv}. \quad (5.28)$$

Вычисляя величину $D(s)$ по формуле (4.34) и пользуясь (4.25), будем иметь по сокращении на $\cos \vartheta$,

$$D(s) = \cos \vartheta - 2s \left(G \cos^2 \vartheta + \sum_{u,v} G_{uv} \omega^u \omega^v \right) + 4s^2 \cos \vartheta K. \quad (5.29)$$

Здесь K и G имеют значения (2.25) и (2.26).

Чтобы выяснить геометрический смысл суммы, входящей во второй член (5.29), заметим, что если du и dv — составляющие смещения на поверхности отражающего тела в плоскости падения луча, а $d\sigma$ — величина этого смещения, то мы имеем

$$\frac{du}{d\sigma} = \frac{\omega^u}{\sin \vartheta}, \quad \frac{dv}{d\sigma} = \frac{\omega^v}{\sin \vartheta}. \quad (5.30)$$

Поэтому, обозначив через R_0 радиус кривизны сечения поверхности плоскостью падения, будем иметь

$$-\frac{1}{R_0} = \sum_{u,v} G_{uv} \frac{du}{d\sigma} \frac{dv}{d\sigma} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \sum_{u,v} G_{uv} \omega^u \omega^v. \quad (5.31)$$

Подставляя это значение суммы в (5.29) и выражая G и K согласно (2.25) и (2.26) через главные радиусы кривизны, получаем для случая падающей плоской волны следующее выражение для $D(s)$:

$$D(s) = \cos \vartheta + 2s \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cos^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{R_0} \right] + \frac{4s^2}{R_1 R_2} \cos \vartheta. \quad (5.32)$$

Эта формула была выведена нами в главе 6.

6. Отражательная формула

Полученные результаты позволяют найти (в приближении геометрической оптики) электромагнитное поле отраженной волны. Поле падающей волны мы писали в виде

$$E^0 e^{ik\psi}, \quad H^0 e^{ik\psi}. \quad (6.01)$$

Так как $\omega(u, v)$ есть значение фазы ψ на поверхности отражающего тела, то на поверхности тела поле падающей волны будет равно

$$E^0(u, v) e^{ik\omega}; \quad H^0(u, v) e^{ik\omega}; \quad (6.02)$$

где $E^0(u, v)$ и $H^0(u, v)$ — значения амплитуд E^0 и H^0 на поверхности тела.

Зная $E^0(u, v)$ и $H^0(u, v)$, можно найти по формулам Френеля, приведенным в параграфе 1, значения $E^*(u, v)$ и $H^*(u, v)$ амплитуд поля отраженной волны на поверхности тела. Поле отраженной волны на этой поверхности будет равно

$$E^*(u, v) e^{ik\omega}; \quad H^*(u, v) e^{ik\omega}. \quad (6.03)$$

Таким образом, величины (6.03) можно считать известными (по крайней мере, на освещенной части поверхности достаточно далеко от границы тени).

Нам нужно найти поле на некотором расстоянии от поверхности. Для каждой из составляющих электромагнитного поля задача эта сводится к следующему. Требуется найти функцию F , удовлетворяющую уравнению колебаний

$$\Delta F + k^2 F = 0 \quad (6.04)$$

и условию излучения и принимающую на поверхности тела заданное значение

$$F = f(u, v) e^{ik\omega(u, v)}. \quad (6.05)$$

В нашем случае k есть большой параметр, а $f(u, v)$ — медленно меняющаяся функция. Последнее утверждение следует понимать

в том смысле, что деленные на k производные от функции по касательным к поверхности направлениям малы по сравнению со значениями самой функции. В этом случае легко указать приближенное решение нашей задачи. Очевидно, что фаза искомой функции получится заменой ω на

$$\chi = \omega + s, \quad (6.06)$$

где s — путь, пройденный лучом после отражения. Амплитуда же ее изменится обратно пропорционально корню квадратному из площади сечения пучка отраженных лучей.

Таким образом, мы приходим к формуле

$$F = f(u, v) \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}} e^{ik\chi}, \quad (6.07)$$

где χ имеет значение (6.06).

Формула (6.07) может быть выведена следующим образом. Будем искать F в виде

$$F = \sqrt{\rho} e^{ik\chi'}, \quad (6.08)$$

где ρ и χ' — некоторые функции от координат, не зависящие от параметра k .

Подставляя (6.08) в уравнение колебаний (6.04), получим

$$\begin{aligned} \Delta F + k^2 F = e^{ik\chi'} \left[k^2 \sqrt{\rho} (1 - (\text{grad } \chi')^2) + \right. \\ \left. + \frac{ik}{\sqrt{\rho}} \text{div}(\rho \text{ grad } \chi') + \Delta(\sqrt{\rho}) \right]. \end{aligned} \quad (6.09)$$

Уравнение колебаний будет приближенно удовлетворяться, если в выражении (6.09) члены порядка k^2 и порядка k обратятся в нуль. Для этого фаза χ' и квадрат амплитуды ρ должны удовлетворять уравнениям

$$(\text{grad } \chi')^2 = 1, \quad (6.10)$$

$$\text{div}(\rho \text{ grad } \chi') = 0. \quad (6.11)$$

Введем теперь криволинейные координаты u, v, χ , связанные с прямоугольными декартовыми координатами x, y, z соотношениями (3.10), и напишем уравнения (6.10) и (6.11) в этих криволинейных координатах. Вводя по формулам, аналогичным (2.06), тензор g^{*uv} , обратный тензору g_{uv} , определяемому формулами (5.08)—(5.10), будем иметь вместо (6.10)

$$\sum_{u, v} g^{*uv} \frac{\partial \chi'}{\partial u} \frac{\partial \chi'}{\partial v} + \left(\frac{\partial \chi'}{\partial \chi} \right)^2 = 1 \quad (6.12)$$

и вместо (6.11)

$$\frac{1}{\sqrt{g^*}} \left[\sum_{u, v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\rho \sqrt{g^*} g^{*uv} \frac{\partial \chi'}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\rho \sqrt{g^*} \frac{\partial \chi'}{\partial \chi} \right) \right] = 0. \quad (6.13)$$

Уравнение (6.12) удовлетворяется, если положить

$$\chi' = \chi. \quad (6.14)$$

Уравнение (6.13) приводится тогда к виду

$$\frac{\partial}{\partial \chi} (\rho \sqrt{g^*}) = 0, \quad (6.15)$$

и, так как согласно (5.13)

$$\sqrt{g^*} = \sqrt{g} D(s), \quad (6.16)$$

где g не зависит от χ , оно будет удовлетворено, если положить

$$\rho D(s) = \varphi(u, v), \quad (6.17)$$

где φ — произвольная функция от u, v .

Чтобы получить совпадение с (6.07), достаточно положить

$$\sqrt{\rho} = f(u, v) \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}}. \quad (6.18)$$

Таким образом, мы доказали, что функция (6.07) приближенно удовлетворяет уравнению колебаний (6.04). Очевидно, она удовлетворяет также условию излучения (фаза ее возрастает с возрастанием s). Наконец, при $s = 0$ она приводится к заданной функции (6.05). Следовательно, она удовлетворяет всем поставленным условиям.

Применяя формулу (6.07) к полю отраженной волны и прибавляя к нему поле падающей волны, мы получим отражательную формулу в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 e^{ik\psi} + \mathbf{E}^*(u, v) \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}} e^{ik\chi}, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 e^{ik\psi} + \mathbf{H}^*(u, v) \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}} e^{ik\chi}. \quad (6.20)$$

В заключение заметим, что если отражающее тело выпуклое, то отражательная формула применима во всем освещенном пространстве достаточно далеко от границ тени (также и на больших расстояниях от тела). Если же тело вогнутое, то при некоторых значениях s возможно обращение знаменателя $D(s)$ в нуль (фокальные поверхности и линии). Вблизи фокальных линий и поверхностей геометрическая оптика и, в частности, отражательная

формула, неприменима, так как там не выполнено условие о том, чтобы амплитуда была медленно меняющейся функцией от координат.

Переход отражательной формулы на границе тени в диффракционные формулы исследован (для плоской падающей волны и для малых расстояний от поверхности тела) в главе 6.

7. Отражение сферической волны от поверхности шара

В качестве примера применения выведенных формул рассмотрим отражение сферической волны от поверхности шара. Пусть r , ϑ , φ — сферические координаты. Уравнение отражающей поверхности имеет вид $r = a$. Роль гауссовых параметров u , v играют углы ϑ , φ , так что в наших общих формулах мы можем положить

$$u = \vartheta, \quad v = \varphi. \quad (7.01)$$

Пусть источник расположен в точке $\vartheta = 0$, $r = b$. Значение фазы падающей волны на поверхности шара будет тогда

$$\omega(\vartheta, \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta}. \quad (7.02)$$

Элемент поверхности шара напишется

$$d\sigma^2 = a^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (7.03)$$

откуда

$$g_{\vartheta\vartheta} = a^2, \quad g_{\vartheta\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \vartheta, \quad (7.04)$$

$$\sqrt{g} = a^2 \sin \vartheta, \quad (7.05)$$

$$g^{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{a^2}, \quad g^{\vartheta\varphi} = 0, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (7.06)$$

По свойству шара вторая дифференциальная форма будет пропорциональна первой, и мы будем иметь

$$G_{\vartheta\vartheta} = -a, \quad G_{\vartheta\varphi} = 0, \quad G_{\varphi\varphi} = -a \sin^2 \vartheta. \quad (7.07)$$

Ковариантные производные от фазы ω будут равны

$$\omega_{\vartheta} = \frac{ab \sin \vartheta}{\omega}, \quad \omega_{\varphi} = 0, \quad (7.08)$$

а контравариантные производные напишутся

$$\omega^{\vartheta} = \frac{b \sin \vartheta}{a\omega}, \quad \omega^{\varphi} = 0. \quad (7.09)$$

Угол падения луча (который мы обозначим теперь через γ , так как буква ϑ у нас занята) определится из равенств

$$\sin \gamma = \frac{b \sin \vartheta}{\omega}, \quad \cos \gamma = \frac{b \cos \vartheta - a}{\omega}, \quad (7.10)$$

вытекающих из (4.25). Чтобы вычислить вторые ковариантные производные от фазы, составим по формулам (2.08)–(2.11) скобки Кристоффеля. Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta} &= 0, & \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\vartheta} &= 0, & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\varphi} &= 0, & \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} &= \operatorname{ctg} \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Подставляя эти значения в общие формулы (2.15), получаем

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\vartheta\vartheta} &= \frac{ab}{\omega^3} (b \cos \vartheta - a) (b - a \cos \vartheta), \\ \omega_{\vartheta\varphi} &= 0, \\ \omega_{\varphi\varphi} &= \frac{ab}{\omega} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Теперь мы можем составить тензор $T_{\mu\nu}$. Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} T_{\vartheta\vartheta} &= \frac{a^2}{\omega^2} (b \cos \vartheta - a)^2 + \\ &\quad + \frac{sa}{\omega^3} (b \cos \vartheta - a) (\omega^2 + b^2 - ab \cos \vartheta), \\ T_{\vartheta\varphi} &= 0, \\ T_{\varphi\varphi} &= a^2 \sin^2 \vartheta + \frac{sa}{\omega} \sin^2 \vartheta (2b \cos \vartheta - a). \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Перейдем теперь к смешанным составляющим $T_{\vartheta}^{\vartheta}$ и т. д. и выразим $b \sin \vartheta$ и $b \cos \vartheta$ при помощи (7.10) через a , ω и γ . Мы получим

$$\left. \begin{aligned} T_{\vartheta}^{\vartheta} &= \frac{\cos \gamma}{\omega} \left((s + \omega) \cos \gamma + \frac{2s\omega}{a} \right), \\ T_{\varphi}^{\varphi} &= \frac{1}{\omega} \left(s + \omega + \frac{2s\omega}{a} \cos \gamma \right), \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

тогда как

$$T_{\vartheta}^{\varphi} = T_{\varphi}^{\vartheta} = 0.$$

Согласно (4.34) величина $D(s) \cos \gamma$ равна произведению величин (7.14). Отсюда

$$\omega^2 D(s) = \left((s + \omega) \cos \gamma + \frac{2s\omega}{a} \right) \left(s + \omega + \frac{2s\omega}{a} \cos \gamma \right). \quad (7.15)$$

Это выражение симметрично относительно s и ω .

Наши результаты позволяют сразу написать отражательную формулу для вертикальной составляющей электрического и магнитного векторов Герца, которая удовлетворяет скалярному уравнению колебаний.

Обозначая буквой R расстояние от источника, равное

$$R = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \vartheta}, \quad (7.16)$$

будем иметь для электрического вектора Герца

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} + N \frac{e^{ik\omega}}{\omega} \sqrt{\frac{D(0)}{D(s)}} e^{iks}, \quad (7.17)$$

где N — коэффициент Френеля (1.10).

Для магнитного вектора Герца получится такая же формула, только вместо N будет стоять другой коэффициент Френеля M .

Вводя для $D(s)$ выражение (7.15) и полагая для краткости

$$\frac{2s\omega}{a(s+\omega)} = c_1, \quad (7.18)$$

мы будем иметь

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{N}{\omega+s} \sqrt{\frac{\cos \gamma}{(\cos \gamma + c_1)(1 + c_1 \cos \gamma)}} e^{ik(\omega+s)}. \quad (7.19)$$

Эта формула может быть сравнена с той, которая получается из дифракционных формул, выведенных в главе 12 для случая скользящего падения луча и для расстояний от поверхности шара, малых по сравнению с его радиусом. Указанная формула приводится к виду

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} \left(1 + \frac{p+iq}{p-iq} \sqrt{\frac{p}{p+p_1}} e^{2i\rho_1\rho^2} \right). \quad (7.20)$$

Здесь

$$p = m \cos \gamma, \quad p_1 = mc_1, \quad q = \frac{im \sqrt{\eta-1}}{\eta}, \quad (7.21)$$

причем

$$m = \sqrt[3]{\frac{ka}{2}}. \quad (7.22)$$

Необходимым условием применимости отражательной формулы (7.20) являются большие положительные значения величины p ; если же p порядка единицы, вступают в силу дифракционные формулы.

Нетрудно видеть, что формула (7.20) в должном приближении совпадает с (7.19). Так как величины c_1 и $\cos \gamma$ малы по сравнению с единицей, то их произведением в (7.19) можно пренебречь. Далее, величину $\omega + s$ в знаменателе можно заменить на R . Для той же величины в показательной функции можно воспользоваться выражением

$$\omega + s - R = \frac{4\omega s \cos^2 \gamma}{\omega + s + R}, \quad (7.23)$$

откуда приближенно

$$k(\omega + s - R) = kac_1 \cos^2 \gamma = 2\rho_1 \rho^2. \quad (7.24)$$

Далее,

$$\frac{\cos \gamma}{\cos \gamma + c_1} = \frac{\rho}{\rho + \rho_1}. \quad (7.25)$$

Наконец, мы имеем для малых $\cos \gamma$ и для $\mu = 1$:

$$N = \frac{\rho + iq}{\rho - iq}. \quad (7.26)$$

Если использовать эти приближенные выражения, то совпадение между (7.19) и (7.20) будет полным.

ПОПЕРЕЧНАЯ ДИФФУЗИЯ КОРОТКИХ ВОЛН, ОГИБАЮЩИХ ВЫПУКЛЫЙ ЦИЛИНДР *

Двухмерная задача диффракции коротких волн на выпуклом цилиндре произвольного сечения с плавно меняющейся кривизной приведена к решению параболического уравнения, выраженного в лучевых координатах. Радиус кривизны цилиндра предполагается большим по сравнению с длиной волны. Рассматриваются предельные условия импедансного типа (причем, однако, импедансный параметр должен изменяться вполне определенным образом в зависимости от кривизны). Наиболее важный случай рассматриваемых условий соответствует абсолютно отражающему цилиндру. При указанных предположениях получено асимптотическое решение диффракционной задачи для любого расположения источника и точки наблюдения. Установлена группа преобразований параболического уравнения, позволяющая сравнивать решения задачи для семейства цилиндров, зависящих от одного параметра.

1. Введение

Как мы видели в предыдущих главах, поле вблизи поверхности проводящего выпуклого тела (с предельными условиями импедансного типа) выражается через некоторые универсальные функции. Первоначально предложенные нами в работе [5] выражения (см. главу 5) относились к области полутени, но исследование диффракции от шара и от круглого и эллиптического цилиндра [30—32], показало, что те же выражения пригодны и для глубокой тени. Это позволяет думать, что можно найти более общие выражения для поля, которые описывали бы диффракцию и от других тел с переменной кривизной и были бы пригодны для любых расстояний от поверхности тела.

Такого рода обобщения могли бы быть основаны, с одной стороны, на понятии диффрагированных лучей [26] и, с другой стороны, — на понятии поперечной диффузии [29]; последнее представляет физическое толкование параболического уравнения Леонтовича.

* Фок и Вайштейн, 1962.

2. Лучевые координаты

Мы рассмотрим здесь двумерную задачу диффракции, а именно диффракцию цилиндрической волны на выпуклом цилиндре произвольного сечения. Мы будем пользоваться «лучевыми координатами», введенными Малюжиным ([31, 32]) и определяемыми

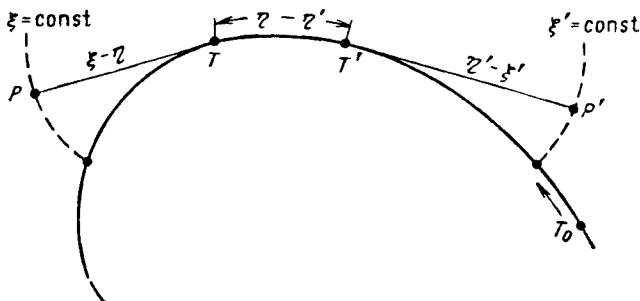


Рис. 1. Лучевые координаты для случая, когда точка наблюдения в теневой области.

согласно рисункам 1 и 2. Пусть ξ , η — лучевые координаты для точки наблюдения P , а ξ' , η' — лучевые координаты для источника P' . (Источник предполагается двумерным, т. е. расположенным

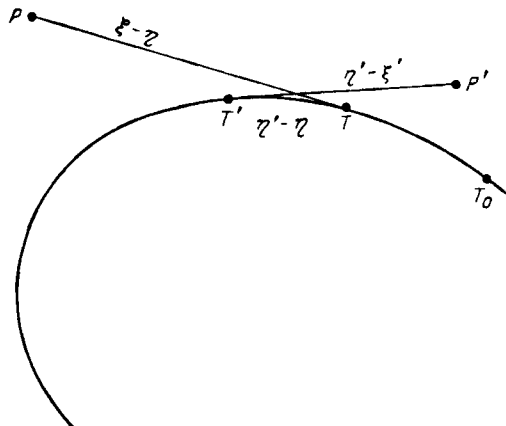


Рис. 2. Лучевые координаты для случая, когда точка наблюдения в освещенной области.

на прямой, параллельной образующим цилиндра; P' есть сечение этой прямой плоскостью чертежа.) Прямые PT и $P'T'$ касательны к цилиндру. Положения точек касания T и T' определяются двумя дугами:

$$\eta = T_0T \text{ и } \eta' = T_0T', \quad (2.01)$$

причем точка T_0 на контуре (начало отсчета дуг) взята произвольно. Положения точек P и P' определяются двумя расстояниями:

$$\xi - \eta = PT \text{ и } \eta' - \xi' = P'T'. \quad (2.02)$$

Положительное направление дуг предполагается таким, что $\xi > \xi'$; тогда, если точка P находится в области тени (как на рис. 1), мы будем иметь $\eta > \eta'$, и полная длина $P'P$ (включающая два прямолинейных участка и криволинейную часть $\eta - \eta'$ на поверхности цилиндра) будет равна

$$(\eta' - \xi') + (\eta - \eta') + (\xi - \eta) = \xi - \xi'. \quad (2.03)$$

Выраженная в лучевых координатах величина квадрата элемента дуги в плоскости нормального сечения цилиндра будет иметь вид

$$ds^2 = d\xi^2 + \frac{(\xi - \eta)^2}{\rho^2(\eta)} d\eta^2, \quad (2.04)$$

где $\rho(\eta)$ есть радиус кривизны цилиндра; величина

$$d\vartheta = \frac{d\eta}{\rho(\eta)} \quad (2.05)$$

представляет приращение угла ϑ между касательной и некоторым фиксированным направлением.

Так как уравнение цилиндра есть $\xi - \eta = 0$, то элемент дуги в касательном направлении есть $ds = d\xi$, а элемент дуги по нормали вблизи поверхности есть

$$dn = (\xi - \eta) d\vartheta = \frac{\xi - \eta}{\rho(\eta)} d\eta. \quad (2.06)$$

Используя введенный выше угол ϑ , мы можем составить выражения

$$\left. \begin{aligned} X &= \xi \cos \vartheta + \int_0^{\vartheta} \eta \sin \vartheta d\vartheta, \\ Y &= \xi \sin \vartheta - \int_0^{\vartheta} \eta \cos \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (2.07)$$

которые могут быть истолкованы как прямоугольные координаты в плоскости сечения цилиндра.

Введенные выше лучевые координаты могут быть также использованы в той части области полутени, где $\eta < \eta'$ (см. рис. 2).

3. Дифференциальные уравнения

Введем функцию Грина Γ в многолистной Римановой плоскости. Это есть функция от двух пар координат: от координат ξ, η точки наблюдения и координат ξ', η' источника. Функция Грина Γ должна удовлетворять уравнению колебаний

$$\Delta \Gamma + k^2 \Gamma = 0 \quad (3.01)$$

с предельным условием

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n} + ik\Gamma = 0 \quad (3.02)$$

на поверхности цилиндра; кроме того, она должна удовлетворять условию излучения на бесконечности.

Падающую цилиндрическую волну мы будем писать в виде

$$\Gamma^0 = i\pi H_0^{(1)}(kr), \quad (3.03)$$

где r — расстояние между точками P и P' .

Тогда особенность функции Грина Γ определится требованием, чтобы разность $\Gamma - \Gamma^0$ и ее производные по координатам оставались везде конечными и непрерывными.

Для цилиндра с бесконечным периметром функция Γ приводится к обыкновенной функции Грина; в общем же случае последняя выражается через Γ .

Из выражения (2.04) для ds^2 следует, что в лучевых координатах уравнение колебаний принимает вид

$$\frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi - \eta) \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right] + \frac{\rho(\eta)}{\xi - \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\rho(\eta)}{\xi - \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right] + k^2 \Gamma = 0. \quad (3.04)$$

При помощи подстановки

$$\Gamma = e^{ik(\xi - \xi')} W \quad (3.05)$$

уравнение (3.04) приводится к виду

$$\left[\frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} + D^2 + ikR \right] W = 0, \quad (3.06)$$

где D и R — операторы

$$D = \frac{\rho(\eta)}{\xi - \eta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad R = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi - \eta}. \quad (3.07)$$

Оператор D (так же, как и вводимые ниже операторы D_1, D_2 и D_3) связан с поперечной диффузией и может быть назван «диффузионным оператором». Оператор R (так же, как и R_γ, R_β и R_α , см. ниже) связан с законом убывания амплитуды цилиндрической волны и может быть назван «лучевым оператором». Что касается

дифференциального оператора второго порядка в первом члене (3.06), то этот оператор связан с продольной диффузией.

Если пренебречь обоими диффузионными операторами, то уравнение (3.06) приводится к виду

$$RW = 0 \quad (3.08)$$

и допускает решение

$$W = \frac{W(\eta)}{\sqrt{\xi - \eta}}, \quad (3.09)$$

выражающее закон убывания амплитуды в области, где диффузия отсутствует (в области GD рис. 3, приведенного в параграфе 6).

Чтобы оценить относительную важность обоих диффузионных операторов, введем безразмерную величину

$$M(\eta) = \left(\frac{k\rho(\eta)}{2} \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

и перейдем от переменных ξ, η к новым независимым переменным

$$z = \frac{k}{2} \int_0^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{M^2(\bar{\eta})}, \quad \gamma = \frac{k(\xi - \eta)}{2M^2(\eta)}. \quad (3.11)$$

Взяв в качестве новой неизвестной функции величину W_1 , определяемую равенством

$$W = \frac{1}{\sqrt{M(\eta)}} W_1(z, \gamma), \quad (3.12)$$

мы получим для W_1 уравнение

$$\left[L^2 + D_1^2 + \left(\chi + \frac{1}{\gamma} \right) D_1 + 2iR_\gamma \right] W_1 = 0, \quad (3.13)$$

где L, D_1 и R_γ суть операторы

$$L = \frac{1}{M(\eta)} \cdot \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial z} - (1 + 2\chi\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\chi}{2}, \quad (3.14)$$

$$R_\gamma = 2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \gamma} + \gamma, \quad (3.15)$$

а величина χ есть функция

$$\chi(z) = \frac{d \lg M(\eta)}{dz} = \frac{2M(\eta)}{k} \frac{dM(\eta)}{d\eta}. \quad (3.16)$$

Преобразование от (3.06) к (3.13) легче всего выполняется при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{k}{4M^2 \gamma^2} L^2, \\ \sqrt{M} D^2 \frac{1}{\sqrt{M}} &= \frac{k^2}{4M^2 \gamma^2} \left[D_1^2 + \left(\chi + \frac{1}{\gamma} \right) D_1 \right], \\ \sqrt{M} k R \frac{1}{\sqrt{M}} &= \frac{k^2}{4M^2 \gamma^2} 2R_\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

которые связывают соответствующие операторы. Оператор L соответствует продольной, а оператор D_1 — поперечной диффузии; R_γ есть новый лучевой оператор.

Если на дуге $T'T$ радиус кривизны $\rho(\eta)$ велик по сравнению с длиной волны, то определяемая формулой (3.10) величина M будет велика. Так как оператор L содержит M в знаменателе, то в выражении (3.13) член с L^2 будет малым порядка $1/M^2$ по сравнению с другими членами. Отбрасывая его (и тем самым пренебрегая продольной диффузией), мы приходим к параболическому уравнению

$$\left[D_1^2 + \left(\chi + \frac{1}{\gamma} \right) D_1 + 2iR_\gamma \right] W_1 = 0, \quad (3.18)$$

которому соответствует уравнение

$$(D^2 + ikR) W = 0 \quad (3.19)$$

в первоначальных переменных ξ, η .

Для некоторых целей, в частности для исследования решения вблизи поверхности цилиндра, полезно применить еще одно преобразование. Положим

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \chi\gamma}} W_2(z, \beta), \quad \beta = \frac{\gamma}{1 + \chi\gamma} \quad (3.20)$$

и введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \beta} + 2\kappa R_\beta, \\ R_\beta &= 2\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} + \beta, \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

где

$$\kappa = \kappa(z) = \frac{1}{4} \left(\chi^2 - \frac{d\chi}{dz} \right) = -\frac{M^3(\eta)}{k^2} \frac{d^2 M(\eta)}{d\eta^2}. \quad (3.22)$$

Мы будем тогда иметь

$$\left. \begin{aligned} (1 + \chi\gamma)^{\frac{1}{2}} D_1 (1 + \chi\gamma)^{-\frac{1}{2}} &= D_2, \\ (1 + \chi\gamma)^{\frac{1}{2}} R_\gamma (1 + \chi\gamma)^{-\frac{1}{2}} &= R_\beta, \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

и уравнение (3.18) принимает вид

$$\left(D_2^2 + \frac{1}{\beta} D_2 + 2iR_\beta \right) W_2 = 0. \quad (3.24)$$

Уравнение контура цилиндра в первоначальных координатах имело вид $\xi = \eta$, а в преобразованных координатах оно принимает вид соответственно $\gamma = 0$ и $\beta = 0$.

Параболическое уравнение принимает наиболее простую форму, если ввести вместо η новую независимую переменную

$$\eta_2 = \int_0^\eta \frac{(\xi - \bar{\eta})}{\rho(\bar{\eta})} d\bar{\eta} \quad (3.25)$$

и произвести соответствующую замену неизвестной функции. В результате получается уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta_2^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0. \quad (3.26)$$

Эта форма уравнения полезна, в частности, при исследовании фазы падающей волны и френелевской диффракции. Но для решения краевых задач данная форма уравнения менее пригодна, так как в переменных ξ , η_2 уравнение контура цилиндра принимает, вообще говоря, сложный вид.

4. Круговой цилиндр

В качестве первого шага рассмотрим решение выписанных выше уравнений для случая кругового цилиндра. В этом случае величина M постоянна, так что будет $\chi = 0$ и $\kappa = 0$. Преобразование (3.20) приводится к тождеству, и мы имеем $\gamma = \beta$. Уравнение (3.18) или (3.24) принимает вид

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + 2iR_\beta \right] W_2 = 0. \quad (4.01)$$

Подстановкой

$$W_2 = e^{-i \frac{2}{3} \beta^3} W_0(x, y), \quad x = z + \beta, \quad y = \beta^2 \quad (4.02)$$

уравнение (4.01) приводится к хорошо известному виду

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + i \frac{\partial W_0}{\partial x} + y W_0 = 0. \quad (4.03)$$

Предельное условие (3.02) напишется

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y} + igM\Gamma = 0 \text{ при } y = 0, \quad (4.04)$$

поскольку мы имеем в силу (2.06)

$$k \, dn = M \, dy. \quad (4.05)$$

Тому же предельному условию (4.04) должна удовлетворять функция W в уравнении (3.05), а также функции W_2 и W_0 . Полагая

$$q = igM, \quad (4.06)$$

перепишем это условие в виде

$$\frac{\partial W}{\partial y} + gW = 0 \text{ при } y = 0. \quad (4.07)$$

Вблизи особенности функции Грина параболическое уравнение утрачивает силу, и условие, согласно которому разность $\Gamma - \Gamma^0$ должна оставаться там конечной, должно быть заменено другим. А именно мы должны потребовать, чтобы на границе геометрической тени (далеко от особенности) падающая волна соответствовала члену Γ^0 (т. е. была та же, как при отсутствии цилиндра).

Решение, удовлетворяющее этим условиям, может быть выражено через множитель ослабления $\Psi(x, y, y', q)$, определяемый (для $x > 0$ и $y' > y$) посредством интеграла

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, y', q) &= \frac{1}{2\pi i} \int e^{itx} \omega(t - y') \times \\ &\times \left[v(t - y) - \frac{v'(t) - qv(t)}{w'(t) - qw(t)} \omega(t - y) \right] dt. \end{aligned} \quad (4.08)$$

Здесь $\omega(t) = \omega_1(t)$ и $v(t)$ — функции Эйри, удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$w''(t) = tw(t) \quad (4.09)$$

(определение их дано, например, в параграфе 1 главы 7). Контур C в интеграле (4.08) охватывает в положительном направлении первую четверть плоскости комплексной переменной t . Заметим, что введенный здесь интеграл Ψ только множителем отличается от интеграла V главы 7 (формула (1.09) гл. 7).

Для дальнейшего полезно иметь асимптотическое выражение для функции $\omega(t - y)$, справедливое при конечном t и при $y \rightarrow \infty$. Оно имеет вид

$$\omega(t - y) = \frac{1}{y^{1/4}} \exp \left[i \left(\frac{2}{3} y^{3/2} - t \sqrt{y} + \frac{t^2}{4 \sqrt{y}} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (4.10)$$

При помощи интеграла Ψ искомое решение задачи для кругового цилиндра может быть записано в виде

$$W = \frac{2\pi i}{M} e^{-i \frac{2}{3} (y'^{3/2} + y'^{3/2})} \Psi(x - x', y, y', q). \quad (4.11)$$

Значения квадратных корней \sqrt{y} и $\sqrt{y'}$ в этой и в следующих формулах следует брать в согласии с формулами (5.04) и (5.05) следующего параграфа.

Согласно результатам главы 7, вблизи геометрической границы тени функция W имеет характер френелевского интеграла, наложенного на медленно меняющуюся функцию, представляющую слабый фон. Полагая в согласии с (3.11) и (4.02)

$$z = x - \sqrt{y}, \quad z' = x' + \sqrt{y'}, \quad z - z' = \zeta \quad (4.12)$$

и вводя положительную величину μ посредством равенства

$$\mu^2 = \frac{\sqrt{yy'}}{\sqrt{y} + \sqrt{y'}}, \quad (4.13)$$

мы получим для члена с френелевским интегралом

$$\Psi = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4 \sqrt{yy'}} e^{i \frac{2}{3} (y'^{3/2} + y'^{3/2})} \mu F(\mu \zeta), \quad (4.14)$$

и, следовательно,

$$W = \frac{1}{M} \frac{1}{4 \sqrt{yy'}} \mu F(\mu \zeta), \quad (4.15)$$

где

$$F(\tau) = e^{-i\tau^2} \int_{\tau}^{\infty} e^{it^2} dt. \quad (4.16)$$

Если μ велико, то отброшенные в (4.14) и (4.15) члены (т. е. фон) будут малыми величинами порядка $1/\mu$ по сравнению с главным членом (см. также [27]).

Выражение для падающей волны вытекает из (4.15) при больших отрицательных значениях $\mu\zeta$. Оно приближенно равно

$$W^0 = \frac{\mu}{M \sqrt[4]{yy'}} \sqrt{\pi} e^{i \frac{\pi}{4}} e^{-i\mu^2 \zeta^2}. \quad (4.17)$$

Легко проверить, что для малых значений ζ величина $\mu^2 \zeta^2$ приближенно равна разности фаз $k(\xi - \xi' - r)$. Таким образом, выражение (4.11) удовлетворяет дифференциальному уравнению, предельному условию и условию на границе тени. Это выражение и дает, следовательно, искомое решение.

5. Цилиндр с переменным радиусом кривизны, для которого $\kappa=0$

Уравнение (4.01) является строгим следствием (3.19) не только в случае $\chi = 0$, но и в случае $\chi \neq 0$, $\kappa = 0$. Вытекающая из постановок (3.12) и (3.20) связь между функциями W и W_2 может быть записана в виде

$$W = \frac{1}{\sqrt{N(\xi, \eta)}} W_2, \quad (5.01)$$

где

$$N(\xi, \eta) = M(\eta) + (\xi - \eta) \frac{dM(\eta)}{d\eta} \quad (5.02)$$

есть линейная функция от ξ . При $\kappa = 0$ будем иметь просто $N(\xi, \eta) = M(\xi)$.

Мы будем пользоваться переменными z и z' , определяемыми формулой (3.11), согласно которой

$$z - z' = \zeta = \frac{k}{2} \int_{\eta'}^{\eta} \frac{d\bar{\eta}}{M^2(\bar{\eta})}. \quad (5.03)$$

Переменные β и β' определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{k(\xi - \eta)}{2M(\eta)N(\xi, \eta)} = \frac{\gamma}{1 + \chi(z)\gamma}, & \gamma &= \frac{k(\xi - \eta)}{2M^2(\eta)}, \\ \beta' &= \frac{k(\xi' - \eta')}{2M(\eta')N(\xi', \eta')} = \frac{\gamma'}{1 + \chi(z')\gamma'}, & \gamma' &= \frac{k(\xi' - \eta')}{2M^2(\eta')}. \end{aligned} \right\} (5.04)$$

Так как мы рассматриваем случай $\xi - \eta > 0$, $\xi' - \eta' < 0$, мы будем иметь $\gamma > 0$, $\gamma' < 0$, и для несlišком больших значений γ и γ' также $\beta > 0$, $\beta' < 0$. Корни квадратные \sqrt{y} и $\sqrt{y'}$ в формуле (4.11) всегда положительны, поэтому мы имеем

$$\sqrt{y} = \beta, \quad \sqrt{y'} = -\beta'. \quad (5.05)$$

Вводя эти значения в (4.11) и полагая для краткости

$$N = N(\xi, \eta), \quad N' = N(\xi', \eta'), \quad (5.06)$$

мы получим, в качестве обобщения решения (4.11) на случай, когда $\kappa = 0$, но $\chi \neq 0$, выражение

$$W = \frac{2\pi i}{\sqrt{NN'}} e^{-i \frac{2}{3}(\beta^3 - \beta'^3)} \Psi(\zeta + \beta - \beta', \beta^2, \beta'^2, q). \quad (5.07)$$

В области, где разность $z - z' = \zeta$ мала, но величины β и $|\beta'| = -\beta'$ велики, функция W приближенно выражается через интегралы Френеля, как и в случае кругового цилиндра. Мы будем иметь

$$W = \frac{1}{\sqrt{NN'}} \frac{1}{\sqrt{yy'}} \mu F(\mu\zeta), \quad (5.08)$$

где μ определяется равенством

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y'}} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'} + \chi(z) - \chi(z'). \quad (5.09)$$

Так как мы рассматриваем малые значения ζ , то можно пренебречь разностью $\chi(z) - \chi(z')$, а также различием между величинами $M^2(\eta)$ и $M^2(\eta')$, входящими в определение (5.04) переменных γ и γ' . Мы получим приближенно

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'} = \frac{2}{k} M(\eta) M(\eta') \frac{\xi - \xi'}{(\xi - \eta)(\eta' - \xi')}. \quad (5.10)$$

Используя это значение μ и определение (5.03) величины ζ , нетрудно показать, что квадрат аргумента в интеграле Френеля будет приближенно равен

$$\mu^2 \zeta^2 = ks = k(\xi - \xi' - r). \quad (5.11)$$

Это дает правильное значение фазы падающей волны. С другой стороны, соотношение

$$NN' \sqrt{yy'} = M(\eta) M(\eta') (-\gamma\gamma') = \frac{k^2}{4} \frac{(\xi - \eta)(\eta' - \xi')}{M(\eta) M(\eta')} \quad (5.12)$$

вместе с формулой (5.10) показывает, что выражение (5.08) для W может быть написано в виде

$$W = \sqrt{\frac{2}{k(\xi - \xi')}} F(\mu\zeta). \quad (5.13)$$

Используя выражение для интеграла Френеля, применимое при больших отрицательных значениях аргумента, мы получим для падающей волны

$$W^0 = \sqrt{\frac{2}{k(\xi - \xi')}} e^{-iks+i\frac{\pi}{4}}, \quad (5.14)$$

как и должно быть. Заметим, что для величины s можно найти в явной форме такое выражение, что подстановка его в (5.14) дает для W^0 строгое решение параболического уравнения (3.19) для общего случая (а не только для случая $\kappa = 0$).

Наше решение (5.07) дает, таким образом, правильное выражение для падающей волны в некоторой области вблизи границы между светом и тенью.

Здесь необходимо сделать следующие замечания.

Во-первых, выражение (5.07) удовлетворяет предельному условию (4.07) при постоянном q . Поскольку q связано с g и M соотношением (4.06), требование постоянства q несколько искусственно. Однако для идеального проводника значение g в исходном предельном условии (3.02) равно либо $g = \infty$, либо $g = 0$, а эти значения дают для q соответственно $q = \infty$ и $q = 0$, так что решение (5.07) будет тогда применимо.

Во-вторых, не исключено, что функция $N(\xi, \eta)$ обратится в нуль при конечных значениях ξ , а тогда величина β обратится в бесконечность на конечных расстояниях от цилиндра. Соответствующую кривую в плоскости ξ, η можно назвать диффракционной каустикой. Однако диффракционная каустика не представляет какой-либо физической особенности решения; используя асимптотическое выражение (4.10) для функции Эйри, легко убедиться, что величина W меняется при переходе через диффракционную каустику плавным образом. По другую сторону каустики функция Эйри $w = w_1 = u + iv$ должна быть заменена на $w_2 = u - iv$.

6. Общий случай выпуклого цилиндра

Полученное в предыдущем параграфе решение параболического уравнения является строгим решением только в случае $\kappa = 0$, но приведенные там формулы написаны так, что они сохраняют смысл и в общем случае, когда $\kappa \neq 0$. Представляется поэтому правдоподобным, что эти формулы дают приближенное решение также и в том случае, когда величина κ хотя и отлична от нуля, но мала.

Прежде чем переходить к анализу этого основного вопроса, рассмотрим физический аспект нашей проблемы [29]. Пусть

плоская или цилиндрическая волна от удаленного источника падает на выпуклый цилиндр (рисунок 3). Тогда в освещенной области GO применимы законы геометрической оптики. Но имеются и две другие области (или зоны), в которых главную роль играет поперечная диффузия. Одна из них (зона 1) примыкает к теневой части поверхности цилиндра, а другая (зона 2) лежит вблизи геометрической границы тени (отделяющей тень от освещенной области), где имеет место диффракция Френеля. Между зонами 1 и 2 расположена область GD , в которой диффракционное поле имеет лучевой характер и описывается функцией вида (3.09). В областях GO и GD роль поперечной диффузии незначительна.

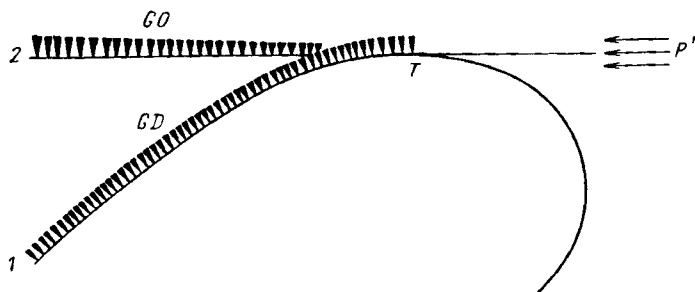


Рис. 3. Различные области в пространстве, окружающем тело: зона 1 (тонкие клинья) — поперечная диффузия у поверхности. Область GD — диффракционные лучи; зона 2 (толстые клинья) — диффракция Френеля. Область GO — геометрическая оптика.

Если мы будем писать решение в форме (5.07), то можно сказать, что в зоне 1 величина β будет мала или конечна. В зоне 2 величина β велика, величина $\zeta = z - z'$ мала, а произведение $\mu\zeta$ мало или конечно.

Предположим теперь, что величина κ весьма мала, и поставим себе вопрос, является ли переход от полного параболического уравнения (3.24) к его упрощенной форме (4.01) законным для зоны 1. Этот переход сводится к пренебрежению членом $2\kappa R_\beta$ в операторе $D_2 = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \beta} + 2\kappa R_\beta$. Если величины κ и β малы, то член $2\kappa R_\beta W_2$, очевидно, мал по сравнению с другими членами в $D_2 W_2$; этим членом можно пренебречь даже в выражении $\frac{1}{\beta} D_2 W_2$ при $\beta \rightarrow 0$. Но в силу малости κ член $2\kappa R_\beta W_2$ остается малым и при конечных значениях β . Таким образом, везде в зоне 1, включая ту ее часть, которая непосредственно примыкает к поверхности цилиндра, уравнение (4.01) является хорошей заменой полного параболического уравнения (3.24). (Заметим, что этого

нельзя сказать об уравнении, получаемом из (3.18) в результате пренебрежения членами, содержащими χ .)

Рассмотрим, далее, область GD , а также зону 2, где β велико. В области GD член $R_\beta W_2$ будет того же порядка, как $\frac{\partial W_2}{\partial z}$; это следует из того факта, что W_2 приблизительно пропорционально $\frac{1}{V\beta}$ (множителю при показательной функции в (4.10)). Таким образом, в области GD член $2\kappa R_\beta$ несуществен и им можно пренебречь.

Напротив того, в зоне 2, где имеет место френелевская диффракция, член $R_\beta W_2$ будет порядка $\mu \frac{\partial W_2}{\partial z}$, так что величиной $2\kappa R_\beta W_2$ можно пренебрегать только, если $4\mu \ll 1$, что выполняется лишь в некоторой части зоны 2. Эта зона должна быть поэтому рассмотрена особо.

Простейший путь состоит в возвращении к уравнению (3.18), в котором можно отбросить члены, содержащие γ . Тогда (3.18) принимает вид уравнения (4.01) с заменой β на γ . Решение может быть написано в виде

$$W = \frac{2\pi i}{V M(\eta) M(\eta')} e^{-i \frac{2}{3} (\gamma^3 - \gamma'^3)} \Psi(\zeta + \gamma - \gamma', \gamma^2, \gamma'^2, q). \quad (6.01)$$

Асимптотическая форма этого решения во френелевской зоне будет согласно (5.08)

$$W = \frac{1}{V M(\eta) M(\eta')} \frac{1}{V - \gamma\gamma'} \mu F(\mu\zeta), \quad (6.02)$$

причем μ выражается через γ и γ' по формуле (5.10). Можно проверить, что для выражения (6.02) члены, содержащие χ в операторе D_1 , будут малы, если χ мало, так что приближенное решение (6.01) является самосогласованным.

Решение в зоне 2 может быть, однако, улучшено путем введения вместо γ другой независимой переменной α , мало от нее отличающейся. Положим

$$\alpha = \gamma \frac{1 + a\eta}{1 + a\xi} = \frac{\gamma}{1 + \chi^0 \gamma}, \quad (6.03)$$

где a — постоянная и величина χ^0 равна

$$\chi^0 = \chi^0(z) = \frac{2M^2(\eta)}{k} \frac{a}{1 + a\eta} = \frac{d}{dz} \lg(1 + a\eta). \quad (6.04)$$

Это преобразование сопровождается введением новой искомой функции W_3 , связанной с W_1 соотношением

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \chi^0 \gamma}} W_3(z, \alpha). \quad (6.05)$$

Преобразованные операторы равны

$$(1 + \chi^0 \gamma)^{1/2} D_1 (1 + \chi^0 \gamma)^{-1/2} = D_3, \quad (6.06)$$

$$(1 + \chi^0 \gamma)^{1/2} R_\gamma (1 + \chi^0 \gamma)^{-1/2} = R_\alpha, \quad (6.07)$$

где

$$D_3 = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \alpha} + (\chi^0 - \chi) \left(2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (6.08)$$

и

$$R_\alpha = 2\alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \alpha. \quad (6.09)$$

Мы видим, что преобразование (6.03) не вводит в оператор D_3 «дальнедействующих» членов типа $2\chi R_\alpha$ и вместе с тем заменяет входящий в D_1 коэффициент $(-\chi)$ на коэффициент $(\chi^0 - \chi)$ в D_3 . Постоянную a в формуле преобразования (6.03) можно выбрать так, чтобы этот последний коэффициент обратился в нуль в заданной точке $\eta = \eta_0$ (лежащей, скажем, между η и η'). Сравнивая выражения (3.16) и (6.04) для χ и для χ^0 , мы видим, что это условие будет выполняться, если

$$\frac{a}{1 + a\eta} = \frac{1}{M(\eta)} \frac{dM(\eta)}{d\eta} \quad (\text{при } \eta = \eta_0). \quad (6.10)$$

Решение примет вид

$$W = 2\pi i \sqrt{\frac{1 + a\eta}{(1 + a\xi) M(\eta)}} \sqrt{\frac{1 + a\eta'}{(1 + a\xi') M(\eta')}} W_3, \quad (6.11)$$

где

$$W_3 = e^{-i \frac{2}{3} (\alpha^3 - \alpha'^3)} \Psi(\xi + \alpha - \alpha', \alpha^2, \alpha'^2, q). \quad (6.12)$$

Заметим, что если $\kappa = 0$, так что $M(\eta)$ есть линейная функция от η , то уравнение (6.10) будет выполняться при всех η , а не только при $\eta = \eta_0$. Преобразование (6.03) приводится тогда к (3.20). Таким образом, в случае $\kappa = 0$ выражения (6.11) и (6.12) дают точное решение.

Если в операторе D_3 пренебречь членами, содержащими $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ и $\chi^0 - \chi$, а в параболическом уравнении отбросить также член вида $\left(\frac{1}{\alpha} + \chi - \chi^0\right) D_3$, то для W_3 получится уравнение

$$\frac{\partial^2 W_3}{\partial z^2} + 2iR_0 W_3 = 0, \quad (6.13)$$

которому удовлетворяет интеграл Френеля.

Сделанные в конце параграфа 5 замечания о возможности бесконечных значений β и о перемене знака β при прохождении через бесконечность (с чем связана замена ω_1 на ω_2) относятся в равной мере и к переменной α .

7. Группа преобразований параболического уравнения

Полученные выше результаты связаны с наличием группы преобразований параболического уравнения. Согласно (3.07) и (3.19) мы имеем

$$(D^2 + ikR) W = 0, \quad (7.01)$$

где

$$D = \frac{\rho(\eta)}{\xi - \eta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad R = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi - \eta}. \quad (7.02)$$

Произведем преобразование от переменных ξ, η, W к новым переменным ξ^*, η^*, W^* , определяемым равенствами

$$\xi^* = \frac{\xi}{1 + a\xi}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{1 + a\eta}, \quad (7.03)$$

$$W(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 + a\xi}} W^*(\xi^*, \eta^*), \quad (7.04)$$

и введем обозначение

$$\rho^*(\eta^*) = \frac{\rho(\eta)}{(1 + a\eta)^3}. \quad (7.05)$$

Тогда уравнение (7.01) примет вид

$$(D^{*2} + ikR^*) W^* = 0, \quad (7.06)$$

где

$$D^* = \frac{\rho^*(\eta^*)}{\xi^* - \eta^*} \frac{\partial}{\partial \eta^*}, \quad R^* = 2 \frac{\partial}{\partial \xi^*} + \frac{1}{\xi^* - \eta^*}. \quad (7.07)$$

Таким образом, преобразованное уравнение имеет тот же вид, как и первоначальное, с тем единственным различием, что функ-

ция $\rho(\eta)$ заменена в нем на $\rho^*(\eta^*)$. Мы имеем, следовательно, семейство цилиндров, зависящих от параметра a и таких, что решение задачи диффракции для одного из них дает решение и для других цилиндров этого семейства. С этой точки зрения становится понятным, почему рассмотренный в параграфе 5 случай $\kappa = 0$ приводится к случаю кругового цилиндра ($\rho = \text{const}$) рассмотренному в параграфе 4.

Переменная z не меняется при преобразовании, так как мы имеем

$$M^*(\eta^*) = \frac{M(\eta)}{1 + a\eta} \quad (7.08)$$

и

$$dz = \frac{k}{2} \frac{d\eta}{M^2(\eta)} = \frac{k}{2} \frac{d\eta^*}{M^{*2}(\eta^*)}. \quad (7.09)$$

Преобразованная переменная ϑ^* , однако, не совпадает с первоначальной переменной ϑ , так как мы имеем

$$\eta^* d\vartheta^* = \eta d\vartheta. \quad (7.10)$$

Заметим, что определяемая формулой (5.10) величина

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{2}{k} M(\eta) M(\eta') \frac{\xi - \xi'}{(\xi - \eta)(\eta' - \xi')} \quad (7.11)$$

(а тем самым и множитель μ в аргументе интеграла Френеля) инвариантна относительно преобразования (7.03). Инвариантной является также величина

$$\varepsilon = \frac{k(\xi - \eta)}{2M(\eta)M(\xi)}, \quad (7.12)$$

которая при $\kappa = 0$ переходит в β .

При надлежащем выборе параметра a преобразование (7.03) может быть использовано и в качестве предварительной стадии решения диффракционной задачи (до введения переменных γ или β). Та переменная a , которая применялась в параграфе 6 с целью улучшить решение во френелевской зоне, есть просто $a = \gamma^*$.

8. Заключение

Исследование диффракции коротких волн на выпуклом цилиндре с медленно меняющейся кривизной привело нас к трем выражениям: (6.01), (5.07) и (6.11)—(6.12), которые мы будем называть выражениями типа γ , типа β и типа α . Выражение типа γ

дает довольно грубое приближение, особенно вблизи поверхности цилиндра, и относительная погрешность его, в той области, где оно применимо, будет порядка χ (или порядка $k^{-1/3}$ при $k \rightarrow \infty$). Выражение типа β применимо в первой зоне (вблизи поверхности), в области GD и в части второй (френелевой) зоны (см. рис. 3). Выражение типа α применимо в области GD и во всей второй зоне. Приближение, даваемое выражением типа β , будет порядка κ или $k^{-2/3}$; при $\kappa = 0$ выражения типа α и типа β совпадают и дают строгое решение параболического уравнения. Для кругового цилиндра совпадают выражения всех трех типов.

Полученные результаты показывают, что параболическое уравнение в лучевых координатах позволяет находить асимптотическое решение проблем диффракции и в таких случаях, когда строгое решение не может быть получено в замкнутой форме. Применение преобразования, указанного в параграфе 7, открывает путь к дальнейшему улучшению решения.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

*Тропосферное
распространение
радиоволн*

земного шара. Пусть в точке $r = b$, $\vartheta = 0$ находится вертикальный электрический диполь ($b > a$). Отбрасывая в компонентах поля зависящий от времени множитель $e^{-i\omega t}$, мы можем выразить их через функцию Герца U , которая будет зависеть только от r и от ϑ . Обозначив через k абсолютную величину волнового вектора, мы будем иметь для поля в воздухе следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right), \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right), \\ H_\varphi &= -ik \frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.01)$$

тогда как остальные компоненты поля будут равны нулю. Аналогичные выражения будут иметь место для поля в земле.

Функция U должна при $r > a$ удовлетворять уравнению

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (1.02)$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial(rU)}{\partial r} - ikrU \right) = 0. \quad (1.03)$$

Если $b > a$, так что источник (диполь) находится над поверхностью Земли, а не на самой Земле, то в точке $r = b$, $\vartheta = 0$ функция U должна иметь особенность вида

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} + U^*, \quad (1.04)$$

где

$$R = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \vartheta} \quad (1.05)$$

есть расстояние от источника, а величина U^* остается конечной при $kR \rightarrow 0$. На земной поверхности функция Герца U должна удовлетворять предельным условиям, обеспечивающим непрерывность компонент E_ϑ и H_φ на поверхности раздела.

Если обозначить функцию Герца внутри Земли через U_2 , то эти предельные условия будут иметь вид

$$k^2 U = k_2^2 U_2, \quad \frac{\partial}{\partial r} (rU) = \frac{\partial}{\partial r} (rU_2) \quad \text{при } r = a. \quad (1.06)$$

Функция U_2 должна при $0 \leq r \leq a$ (внутри Земли) удовлетворять уравнению, аналогичному (1.02), и оставаться конечной.

ДИФФРАКЦИЯ РАДИОВОЛН ВОКРУГ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ*

Дано теоретическое исследование вопроса о распространении радиоволн вокруг однородной земной поверхности, принимаемой за сферическую, при учете диффракции, но без учета влияния ионосферы. Цель исследования — вывод формул для амплитуды волны в зависимости от высоты источника, расстояния от него, длины волны и электрических свойств почвы. Основным результатом состоит в выводе выражения для множителя ослабления в виде интеграла. Это выражение пригодно для всех практически встречающихся значений входящих в него параметров. В предельных случаях получают известные ранее формулы для освещенной и теневой областей. Существенно новым является исследование области полутени (вблизи линии горизонта). Получены формулы, дающие непрерывный переход от освещенной к теневой области. Указаны способы численного вычисления встречающихся рядов и интегралов.

Введение

Вопросу о диффракции радиоволн вокруг земной поверхности посвящена обширная литература. Интерес к этому вопросу оправдывается тем, что на небольших расстояниях, порядка нескольких сот километров, рефракцией радиоволн в ионизированных слоях атмосферы можно пренебречь и решающую роль в распространении радиоволн играет диффракция.

Несмотря на то, что строгое решение задачи диффракции от шара известно уже несколько десятилетий, практически пригодного приближенного решения до недавнего времени получено не было. Этот пробел был заполнен в нашей работе, которая составляет предмет настоящей главы.

1. Постановка задачи и ее решение в виде рядов

Обозначим через r , θ , φ сферические координаты с началом в центре земного шара. Если пренебречь неровностями земной поверхности, то уравнение ее будет иметь вид $r = a$, где a — радиус

* Фок, 1945.

Входящая в (1.06) и в дальнейшие формулы величина k_2 определяется из равенства

$$k_2^2 = \varepsilon k^2 + i \frac{4\pi\sigma}{c} k \quad (1.07)$$

и из условия $\text{Im}(k_2) > 0$. Вместо проводимости земли* σ удобно ввести длину l , характеризующую удельное сопротивление земли, положив

$$l = \frac{c}{4\pi\sigma}. \quad (1.08)$$

Для морской воды величина l колеблется от 0,05 см (сильно соленая вода) до 0,5 см (слабо соленая вода); для суши эта длина в сотни и тысячи раз больше. Если ввести комплексную диэлектрическую постоянную земли

$$\eta = \varepsilon + i \frac{\lambda}{2\pi l}, \quad (1.09)$$

то будет

$$k_2 = k \sqrt{\eta}. \quad (1.10)$$

Решение поставленной задачи в виде рядов хорошо известно; мы выпишем здесь необходимые формулы, не останавливаясь на их выводе.

Положим

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x); \quad \zeta_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), \quad (1.11)$$

где J_ν есть функция Бесселя, а $H_\nu^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля первого рода.

Эти функции связаны соотношением

$$\psi_n(x) \zeta_n'(x) - \psi_n'(x) \zeta_n(x) = i. \quad (1.12)$$

Кроме того, введем особое обозначение для логарифмической производной от $\psi_n(x)$:

$$\chi_n(x) = \frac{\psi_n'(x)}{\psi_n(x)}. \quad (1.13)$$

Как видно из (1.01), поле на поверхности земли выражается через величины

$$U_a = (U)_{r=a}, \quad U'_a = \left(\frac{\partial}{\partial r} (rU) \right)_{r=a}. \quad (1.14)$$

* Здесь и в дальнейшем мы под словом «земля» разумеем верхний слой земной поверхности (сушу или море).

Для этих величин получаются ряды

$$U_a = -\frac{1}{kab} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \zeta_n(kb)}{\zeta'_n(ka) - \frac{k}{k_2} \chi_n(k_2a) \zeta_n(ka)} P_n(\cos \vartheta), \quad (1.15)$$

$$U'_a = -\frac{k}{k_2b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \zeta_n(kb) \chi_n(k_2a)}{\zeta'_n(ka) - \frac{k}{k_2} \chi_n(k_2a) \zeta_n(ka)} P_n(\cos \vartheta), \quad (1.16)$$

расположенные по полиномам Лежандра. Наша задача состоит в приближенном суммировании этих рядов.

2. Формула суммирования

Суммы, которые нам придется вычислять, имеют вид

$$S = \sum_{\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} \nu \varphi(\nu) P_{\nu - \frac{1}{2}}(\cos \vartheta). \quad (2.01)$$

В сумме (1.15) функция $\varphi(\nu)$ с точностью до постоянного множителя равна

$$\varphi(\nu) = \frac{\zeta_{\nu - \frac{1}{2}}(kb)}{\zeta'_{\nu - \frac{1}{2}}(ka) - \frac{k}{k_2} \chi_{\nu - \frac{1}{2}}(k_2a) \zeta_{\nu - \frac{1}{2}}(ka)}. \quad (2.02)$$

В сумме (1.16) она отличается от (2.02) множителем $\chi_{\nu - \frac{1}{2}}(k_2a)$.

Для непосредственного вычисления суммы пришлось бы брать число членов, приблизительно равное $2ka$, т. е. равное удвоенному числу волн, укладываемых на окружности земного шара. Так как это число огромно, то ясно, что непосредственное суммирование невозможно. Для вычисления суммы S необходимо, воспользовавшись тем, что $\varphi(\nu)$ есть аналитическая функция, преобразовать эту сумму в интеграл, который можно было бы вычислить тем или иным приближенным способом. Подобное преобразование было впервые предложено Ватсоном в 1918 г. и применялось затем многими авторами. Однако все авторы стремились привести преобразуемое выражение к сумме вычетов, тогда как наша цель состоит в том, чтобы выделить в нем главный член, легче поддающийся исследованию, и оценить остаток. При этом способ вычисления главного члена не предпринимается.

При выполнении нашего преобразования необходимо иметь в виду следующие общие свойства функции $\phi(\nu)$. Это есть аналитическая функция от ν , мероморфная в правой полуплоскости; она имеет полюса только в первой четверти, а в четвертой четверти голоморфна. На бесконечности $\phi(\nu)$ убывает настолько быстро, что все рассматриваемые интегралы сходятся.

Входящие в (2.01) функции Лежандра могут быть выражены через функцию

$$G_\nu = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \nu + 1, \frac{ie^{-i\theta}}{2 \sin \theta}\right), \quad (2.03)$$

где F есть знак гипергеометрической функции.

Обозначим через G_ν^* и через $P_{\nu - \frac{1}{2}}^*$ результат замены в G_ν и в $P_{\nu - \frac{1}{2}} = P_{\nu - \frac{1}{2}}(\cos \theta)$ величины θ на $\pi - \theta$. Мы будем тогда иметь

$$P_{\nu - \frac{1}{2}}^* = \frac{1}{\pi \sqrt{2 \sin \theta}} \left[e^{i\nu\theta - i\frac{\pi}{4}} G_\nu^* + e^{-i\nu\theta + i\frac{\pi}{4}} G_\nu \right]. \quad (2.04)$$

Как видно из (2.03), если ν лежит вне некоторого сектора, включающего отрицательную вещественную ось, и если $|\nu \sin \theta|$ велико, функция G_ν (а также G_ν^*) приближенно равна

$$G_\nu \sim \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}. \quad (2.05)$$

Подставив (2.05) в (2.04), получим известное асимптотическое выражение для $P_{\nu - \frac{1}{2}}^*$. Если обозначить через $B(\nu)$ первый член в формуле (2.04)

$$B(\nu) = \frac{1}{\pi \sqrt{2 \sin \theta}} e^{i\nu\theta - i\frac{\pi}{4}} G_\nu^*, \quad (2.06)$$

можно доказать равенство

$$P_{\nu - \frac{1}{2}}^* = e^{i\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\pi} P_{\nu - \frac{1}{2}} + 2i \cos \nu\pi B(\nu), \quad (2.07)$$

которым мы воспользуемся в дальнейшем. Заметим, что функция $B(\nu)$ голоморфна в правой полуплоскости.

Рассмотрим в плоскости комплексной переменной ν три контура. Во-первых, петлю C_1 вокруг начала координат, облегающую

положительную вещественную ось и обходимую в положительном направлении (против часовой стрелки). Во-вторых, ломаную линию C_2 , охватывающую первый квадрант и пробегаемую слева направо (в ее горизонтальной части, проходящей несколько выше вещественной оси). В-третьих, прямую C_3 , проходящую через начало координат, лежащую во втором и четвертом квадрантах и наклоненную под небольшим углом к мнимой оси; эта прямая пробегается сверху вниз.

Сумму S мы можем написать в виде

$$S = \frac{i}{2} \int_{C_1} \nu \varphi(\nu) \sec \nu \pi P^*_{\nu - \frac{1}{2}} d\nu, \quad (2.08)$$

ибо интеграл справа сводится к вычетам в точках $\nu = n + \frac{1}{2}$. Так как функция $\varphi(\nu)$ голоморфна в четвертом квадранте, мы можем заменить контур C_1 контурами C_2 и C_3 и написать

$$S = -\frac{i}{2} \int_{C_2} \nu \varphi(\nu) \sec \nu \pi P^*_{\nu - \frac{1}{2}} d\nu + \frac{i}{2} \int_{C_3} \nu \varphi(\nu) \sec \nu \pi P^*_{\nu - \frac{1}{2}} d\nu. \quad (2.09)$$

К этому сводится обычное преобразование суммы: интеграл по C_3 полагается равным нулю в силу малости нечетной части $\varphi(\nu)$ (оценка будет дана ниже), а интеграл по C_2 сводится к сумме вычетов. Но мы сделаем шаг дальше и разобьем интеграл по C_2 на главный член и поправочный. Подставляя в этот интеграл выражение (2.07) для $P^*_{\nu - \frac{1}{2}}$, мы будем иметь

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \quad (2.10)$$

где

$$S_1 = \int_C \nu \varphi(\nu) B(\nu) d\nu, \quad (2.11)$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} \int_{C_2} \nu \varphi(\nu) \sec \nu \pi e^{i\nu \pi} P_{\nu - \frac{1}{2}} d\nu, \quad (2.12)$$

$$S_3 = \frac{i}{2} \int_{C_3} \nu \varphi(\nu) \sec \nu \pi P^*_{\nu - \frac{1}{2}} d\nu. \quad (2.13)$$

В интеграле S_1 подынтегральная функция уже не имеет полюсов на вещественной оси (а также в четвертой четверти), поэтому для него контуры C_2 и C_3 эквивалентны. Мы обозначили через S какой-нибудь контур, эквивалентный C_2 и C_3 .

Представление величины S в виде суммы трех интегралов (2.10) является точным; при выводе его не сделано никаких пренебрежений. Но оценка интегралов S_2 и S_3 показывает, что эти интегралы ничтожно малы по сравнению с S_1 . В самом деле, если мы будем вычислять интеграл как сумму вычетов в полюсах $\varphi(v)$, то мы убедимся, что он будет по отношению к S_1 порядка

$$|e^{2iv_1(\pi-\vartheta)}|, \quad (2.14)$$

где v_1 есть ближайший к вещественной оси полюс $\varphi(v)$.

Мнимая часть v_1 положительна и при больших значениях ka будет

$$\text{Im}(v_1) = c(ka)^{1/3}, \quad (2.15)$$

где c есть число порядка единицы (для абсолютного проводника $c = 0,70$).

Так как ka — весьма большое число, порядка миллиона (для $\lambda = 40$ м будет $ka = 1\,000\,000$), то ясно, что величина (2.15) будет большой (например, равной 70), а величина (2.14) — ничтожно малой (в нашей задаче ϑ не может быть близким к π , так как тогда вследствие необходимости учитывать влияние ионизованных слоев атмосферы наши формулы вообще перестают быть применимыми). Что касается интеграла S_3 , то значение его определяется нечетной частью функции $\varphi(v)$. Но нечетная часть $\varphi(v)$ будет порядка

$$|e^{2ik_2a}|. \quad (2.16)$$

А так как мнимая часть k_2a положительна и весьма велика, то величина (2.16) будет невообразимо малым числом.

Наглядное представление о малости интегралов S_2 и S_3 дает следующая физическая картина. Интеграл S_2 есть амплитуда волны, обошедшей без преломления (в силу одной только диффракции) вокруг земного шара один или несколько раз. Интеграл S_3 есть амплитуда волны, пронизавшей толщу земного шара с тем поглощением, какое имеет место в земле. Ясно, что оба эти интеграла ничтожно малы по сравнению с амплитудой волны, дошедшей от источника через воздух кратчайшим путем.

Таким образом, со всей точностью, допускаемой постановкой физической задачи, сумма S , определяемая формулой (2.01), может быть представлена в виде интеграла S_1 , который после подстановки вместо $B(v)$ выражения (2.06) принимает вид

$$S_1 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi\sqrt{2}\sin\vartheta} \int_C v\varphi(v) e^{iv\vartheta} G_v^* dv. \quad (2.17)$$

3. Вычисление функции Герца для освещенной области

Если мы будем понимать под $\varphi(\nu)$ функцию (2.02), то связь между суммой S и величиной U_a будет

$$U_a = -\frac{2}{kab} S. \quad (3.01)$$

Поэтому наше приближенное выражение для U_a напишется

$$U_a = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\pi kab \sqrt{2} \sin \vartheta} \int_C \nu \varphi(\nu) e^{i\nu\vartheta} G_\nu^* d\nu. \quad (3.02)$$

Положение главного участка интегрирования в интеграле (3.02) зависит от того, для какой точки интеграл вычисляется. Вообще говоря, главный участок будет лежать вблизи $\nu = \nu_0$, где

$$\nu_0 = kh_c = k \frac{ab \sin \vartheta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta}}. \quad (3.03)$$

Величина h_c есть длина перпендикуляра, опущенного из центра земли на луч (т. е. на прямую, соединяющую источник с точкой наблюдения).

Для приближенного вычисления интеграла U необходимо найти для функций G_ν^* и $\varphi(\nu)$ асимптотические выражения, которые были бы применимы на главном участке. Так как величины ν_0 и $\nu_0 \vartheta$ велики по сравнению с единицей, мы можем согласно (2.05) положить

$$G_\nu^* = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}. \quad (3.04)$$

Для входящих в $\varphi(\nu)$ функций Ханкеля можно попытаться применить выражения Дебая

$$\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(\rho) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{\nu^2}{\rho^2}}} e^{i\left(\xi-\frac{\pi}{4}\right)}, \quad (3.05)$$

где

$$\xi = \int_\nu^\rho \sqrt{1-\frac{\nu^2}{\rho^2}} d\rho. \quad (3.06)$$

Эти выражения применимы при условии

$$|\rho^2 - \nu^2| \gg \rho^{4/3}. \quad (3.07)$$

Что касается функции $\chi_{\nu-\frac{1}{2}}(k_2 a)$, то вблизи $\nu = \nu_0$ для нее с достаточной точностью применимо выражение

$$\chi_{\nu-\frac{1}{2}}(k_2 a) = -i \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{k_2^2 a^2}}. \quad (3.08)$$

Чтобы выяснить, в каких случаях выполняется неравенство (3.07), обозначим через γ угол между вертикалью в точке наблюдения и направлением на источник и введем параметр

$$\rho = \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cos \gamma. \quad (3.09)$$

Легко видеть, что для $\nu = \nu_0$, $\rho = ka$ неравенство (3.07) равносильно условию, чтобы ρ было большим положительным числом. Такие значения ρ соответствуют освещенной области. Значения ρ порядка единицы (положительные и отрицательные) соответствуют области полутени, причем $\rho = 0$ дает границу геометрической тени (линию горизонта). Отрицательные и большие по абсолютной величине значения ρ соответствуют теневой области.

В этом параграфе мы рассмотрим случай больших положительных ρ (освещенная область); другие случаи будут рассмотрены в следующих параграфах.

Когда $\rho \gg 1$, к функциям Ханкеля применимы, как мы видели, выражения Дебая. Подставляя их в (3.02) и пользуясь (3.04) и (3.08), получим интеграл

$$U_a = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{kab \sqrt{2\pi \sin \vartheta}} \sqrt{\frac{b}{a}} \int_C \sqrt{\frac{k^2 a^2 - \nu^2}{k^2 b^2 - \nu^2}} \times \\ \times \frac{e^{i\omega} \sqrt{\nu} d\nu}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{k^2 a^2} + \frac{k}{k^2} \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{k_2^2 a^2}}}}, \quad (3.10)$$

где

$$\omega = \int_{ka}^{kb} \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{\rho^2}} d\rho + \nu\vartheta. \quad (3.11)$$

При условии

$$kh \cos \gamma \gg 1, \quad (3.12)$$

где $h = b - a$ есть высота источника над землей, интеграл (3.10) может быть вычислен по способу стационарной фазы, причем получается «отражательная формула»

$$U_a = \frac{e^{ikR}}{R} W, \quad (3.13)$$

где

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta} \quad (3.14)$$

есть расстояние от источника, а W есть «функция ослабления», которая в нашем случае равна

$$W = \frac{2}{1 + \frac{k}{k_2} \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2} \sin^2 \gamma} \sec \gamma}. \quad (3.15)$$

Величина U'_a , определяемая рядом (1.16), отличается, в нашем приближении, только постоянным множителем от U_a , а именно

$$U'_a = -\frac{ik^2 a}{k_2} \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2} \sin^2 \gamma} U_a. \quad (3.16)$$

Последняя формула справедлива не только для освещенной области, но и во всех случаях.

Если условие (3.12) не выполняется, то знаменатель в подынтегральной функции (3.10) не будет медленно меняющейся величиной. Если мы предположим, что выполнены условия

$$1 \ll \frac{R^2}{h^2} \ll (ka)^{2/3}, \quad (3.17)$$

$$1 \ll kR \ll \frac{a}{h} \quad (3.18)$$

(следствием которых является неравенство $p \gg 1$), то интеграл (3.10) может быть приближенно вычислен путем введения новой переменной

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{v^2}{k^2 a^2}}. \quad (3.19)$$

Для функции W и (3.13) получается приближенное выражение

$$W = e^{-i \frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{2kR}{\pi}} \int_{\gamma} e^{-i \frac{kR}{2} (\mu - \mu_0)^2} \frac{\mu d\mu}{\mu + \frac{k}{k_2}}, \quad (3.20)$$

где

$$\mu_0 = \frac{h}{R} \quad (3.21)$$

есть наклон луча к горизонту, а контур Γ есть прямая, проходящая через точку $\mu = \mu_0$ из четвертой во вторую четверть плоскости μ (точнее, $\mu - \mu_0$). Интеграл (3.20) может быть вычислен без дальнейших пренебрежений и дает известную формулу Вейля—ван дер Поля. Если положить

$$\sigma = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{k}{k_2} \sqrt{\frac{kR}{2}}, \quad \tau = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{h}{R} \sqrt{\frac{kR}{2}}, \quad (3.22)$$

то мы будем иметь

$$W = 2 - 4\sigma e^{-(\sigma+\tau)^2} \int_{i\infty}^{\sigma+\tau} e^{\alpha^2} d\alpha. \quad (3.23)$$

Чтобы получить из наших выражений для U_a и U'_a формулы для поля, нужно дифференцировать эти выражения по ϑ . Но производные по ϑ легко вычисляются, так как в формуле (3.13) можно считать все множители, кроме e^{ikR} , постоянными.

4. Асимптотические выражения для функций Ханкеля*

В дальнейшем нам придется исследовать тот случай, когда точка наблюдения находится в области полутени.

Этот случай характеризуется значениями параметра p (положительными или отрицательными) порядка единицы. Так как для этих значений p на главном участке интегрирования перестает выполняться неравенство (3.07), то выражения Дебая (3.05) для функций Ханкеля становятся неприменимыми и должны быть заменены другими. Новые выражения для функций Ханкеля, пригодные для наших целей, могут быть получены из асимптотических выражений, приведенных в нашей прежней работе [20], а также из формул в известной книге Ватсона, но проще вывести их непосредственно.

Искомые выражения дают представление функций Ханкеля через функцию $w(t)$, определяемую интегралом

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{tz - \frac{1}{3}z^3} dz, \quad (4.01)$$

где контур Γ идет от бесконечности до нуля по прямой $\arg z = -2\pi/3$ и от нуля до бесконечности по прямой $\arg z = 0$ (по положительной вещественной оси).

* См. также добавление 2.

Функция $w(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w'(t) = tw(t) \quad (4.02)$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} w(0) &= \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} e^{i\frac{\pi}{6}} = 1,0899290710 + i0,6292708425, \\ w'(0) &= \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{4/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 0,7945704238 - i0,4587454481. \end{aligned} \right\} \quad (4.03)$$

Она представляет целую трансцендентную функцию, которая разлагается в степенной ряд вида

$$\begin{aligned} w(t) = w(0) & \left[1 + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^6}{(2 \cdot 5)(3 \cdot 6)} + \frac{t^9}{(2 \cdot 5 \cdot 8)(3 \cdot 6 \cdot 9)} + \dots \right] + \\ & + w'(0) \left[t + \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{t^7}{(3 \cdot 6)(4 \cdot 7)} + \frac{t^{10}}{(3 \cdot 6 \cdot 9)(4 \cdot 7 \cdot 10)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.04)$$

Если отделить в $w(t)$ вещественную и мнимую части (для вещественных t) и положить

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad (4.05)$$

то $u(t)$ и $v(t)$ будут двумя независимыми интегралами уравнения (4.02), связанными соотношением

$$u'(t)v(t) - u(t)v'(t) = 1. \quad (4.06)$$

Асимптотические выражения для этих функций для больших отрицательных t получатся отделением вещественной и мнимой частей в формулах

$$w(t) = e^{i\frac{\pi}{4}} (-t)^{-1/4} e^{i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}, \quad (4.07)$$

$$w'(t) = e^{-i\frac{\pi}{4}} (-t)^{1/4} e^{i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}. \quad (4.08)$$

Для больших положительных t асимптотические выражения для $u(t)$, $v(t)$ и их производных имеют вид

$$u(t) = t^{-1/4} e^{\frac{2}{3}t^{3/2}}; \quad u'(t) = t^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}t^{3/2}}; \quad (4.09)$$

$$v(t) = \frac{1}{2} t^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}; \quad v'(t) = -\frac{1}{2} t^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}}. \quad (4.10)$$

Из рядов (4.04) нетрудно вывести формулы

$$\omega \left(t e^{i \frac{\pi}{3}} \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{6}} v(-t), \quad (4.11)$$

$$\omega \left(t e^{i \frac{2\pi}{3}} \right) = e^{i \frac{\pi}{3}} [u(t) - i v(t)], \quad (4.12)$$

которые дают представление о поведении $\omega(t)$ в комплексной плоскости.

Заметим, что функция $\omega(t)$ выражается через функцию Ханкеля порядка $1/3$ по формуле

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{i \frac{2\pi}{3}} (-t)^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left(\frac{2}{3} (-t)^{3/2} \right). \quad (4.13)$$

Изучив главнейшие свойства $\omega(t)$, перейдем к выводу асимптотического выражения для функции Ханкеля $H_{\nu}^{(1)}(\rho)$, где ν и ρ велики и близки друг к другу, так что отношение

$$\frac{\nu - \rho}{\sqrt{\rho/2}} = t \quad (4.14)$$

остается ограниченным.

Функция Ханкеля $H_{\nu}^{(1)}(\rho)$ допускает интегральное представление

$$H_{\nu}^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi i} \int_C e^{-\rho \operatorname{sh} v + \nu v} dv, \quad (4.15)$$

где контур C идет по прямой $\operatorname{Im}(v) = -\pi$ от $-\pi i - \infty$ до некоторой точки $v = v_0$ (например, $v_0 = -\pi/\sqrt{3} - i\pi$), затем по прямой от $v = v_0$ до $v = 0$ и, наконец, по вещественной оси от нуля до бесконечности.

Выразим согласно (4.14) ν через t и введем переменную интегрирования

$$z = \sqrt[3]{\frac{\rho}{2}} v. \quad (4.16)$$

Считая t и z конечным, а ρ большим, мы можем разложить подынтегральную функцию в (4.15) по отрицательным (дробным) степеням ρ . Так как на главном участке преобразованный контур C совпадает с контуром Γ , мы можем написать

$$H_{\nu}^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} \int_{\Gamma} e^{tz - \frac{1}{3} z^3} \left[1 - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} z^5 + \dots \right] dz, \quad (4.17)$$

и, вычисляя интегралы при помощи (4.01),

$$H_v^{(1)}(\rho) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \left\{ \omega(t) - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \omega^{(5)}(t) + \dots \right\}. \quad (4.18)$$

В силу дифференциального уравнения (4.02) пятая производная равна

$$\omega^{(5)}(t) = t^2 \omega'(t) + 4t \omega(t). \quad (4.19)$$

Подставляя это выражение в (4.18) и переходя по формуле (1.11) к функции $\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(\rho)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(\rho) &= \\ &= -i \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \left\{ \omega(t) - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} [t^2 \omega'(t) + 4t \omega(t)] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Дифференцируя это выражение по ρ при постоянном ν и принимая во внимание зависимость t от ρ , получим следующую формулу для производной

$$\begin{aligned} \zeta'_{\nu-\frac{1}{2}}(\rho) &= \\ &= i \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\frac{1}{6}} \left\{ \omega'(t) - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} [(t^3 + 9)\omega(t) - 4t\omega'(t)] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Этими выражениями мы и будем пользоваться в дальнейшем.

5. Выражение для функции Герца, применимое в области полутени

Перепишем выражение (3.02) для функции Герца, заменив в нем величину G_ν приближенным значением $\sqrt{\pi/\nu}$ и величину $\sin \Phi$ перед интегралом приближенным значением Φ . Мы получим

$$U_a = \frac{2e^{\frac{i3\pi}{4}}}{kab \sqrt{2\pi\Phi}} \int_C \Phi(\nu) e^{i\nu\Phi} \sqrt{\nu} d\nu. \quad (5.01)$$

Под контуром C мы будем разуметь описанный в параграфе 2 контур C_2 или какой-либо ему эквивалентный. Главный участок

интегрирования будет в нашем случае (т. е. для конечных значений параметра ν) лежать вблизи точки $\nu = ka$. Входящую в выражение (2.02) для $\Phi(\nu)$ функцию $\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(k_2 a)$ мы можем поэтому заменить значением выражения (3.08) при $\nu = ka$, после чего получим

$$\Phi(\nu) = \frac{\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(kb)}{\zeta'_{\nu-\frac{1}{2}}(ka) + i \frac{k}{k_2} \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}} \zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(ka)}. \quad (5.02)$$

Для функции $\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}$ и ее производной мы должны взять выражения, которые были бы справедливы вблизи $\nu = ka$. Такие выражения были получены в предыдущем параграфе. Оставляя в (4.20) и (4.21) главные члены, мы будем иметь

$$\zeta_{\nu-\frac{1}{2}}(ka) = -i \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/6} \omega(t), \quad (5.03)$$

$$\zeta'_{\nu-\frac{1}{2}}(ka) = i \left(\frac{ka}{2}\right)^{-1/6} \omega'(t), \quad (5.04)$$

где t связано с ν соотношением

$$\nu = ka + \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} t. \quad (5.05)$$

Числитель в (5.02) получится из (5.03) заменой a на b и t на t' , где

$$\nu = kb + \left(\frac{kb}{2}\right)^{1/3} t'. \quad (5.06)$$

Приравнявая (5.05) и (5.06), получим связь между t и t' . Но отношение h/a , где $h = b - a$, есть малая величина (ее мы будем считать того же порядка, как $(ka)^{-2/3}$). Пренебрегая этой величиной по сравнению с единицей, мы можем написать

$$t' = t - y, \quad (5.07)$$

где

$$y = \frac{kh}{\left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3}} \quad (5.08)$$

есть величина, пропорциональная высоте источника над землей. Величину y можно назвать приведенной высотой источника.

Таким образом, с точностью до членов порядка h/a или $(ka)^{-2/3}$ будет

$$\zeta_{\nu - \frac{1}{2}}(kb) = -i \left(\frac{ka}{2} \right)^{1/6} \omega(t-y), \quad (5.09)$$

где t определяется из (5.05). (В множителе перед $\omega(t-y)$ мы также заменили b на a .)

Подстановка (5.03), (5.04) и (5.09) в (5.02) дает приближенное выражение для $\Phi(\nu)$.

Если положить для краткости

$$q = i \left(\frac{ka}{2} \right)^{1/3} \frac{k}{k_2} \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}}, \quad (5.10)$$

мы будем иметь

$$\Phi(\nu) = - \left(\frac{ka}{2} \right)^{1/3} \frac{\omega(t-y)}{\omega'(t) - q\omega(t)}. \quad (5.11)$$

Припоминая формулы (1.09) и (1.10), можно написать величину q в виде

$$q = i \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^{1/3} \frac{\sqrt{\varepsilon - 1 + i \frac{\lambda}{2\pi l}}}{\varepsilon + i \frac{\lambda}{2\pi l}} \quad (5.12)$$

или, с той же точностью,

$$q = i \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + 1 + i \frac{\lambda}{2\pi l}}}. \quad (5.13)$$

Последнее выражение несколько удобнее для вычислений.

Нам остается подставить значение $\Phi(\nu)$ из (5.11) в формулу (5.01) и перейти к переменной интегрирования t . Делая эту подстановку, можно заменить величину $\sqrt{\nu}$ под интегралом постоянным значением \sqrt{ka} , а также писать a вместо b в множителе перед интегралом. В результате мы получим формулу, которую можно написать в виде

$$U_a = \frac{e^{ika\vartheta}}{a\vartheta} e^{-i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_c^{\infty} e^{ixt} \frac{\omega(t-y)}{\omega'(t) - q\omega(t)} dt, \quad (5.14)$$

где буквой x обозначена для краткости величина

$$x = \left(\frac{ka}{2} \right)^{1/3} \vartheta, \quad (5.15)$$

которую можно назвать приведенным горизонтальным расстоянием от источника, тогда как y и q имеют значения (5.08) и (5.13). Контур C должен охватывать все полюса подынтегральной функции; как мы увидим, все они расположены в первой четверти плоскости t .

Чтобы нагляднее представить себе отношение горизонтального и вертикального масштабов в переменных x и y , составим выражение для параметра p , определяемого формулой (3.09). Из рассмотрения треугольника с вершинами в центре земного шара, в источнике и в точке наблюдения нетрудно вывести приближенную формулу

$$p = \left(\frac{ka}{2} \right)^{1/3} \cos \gamma = \frac{y - x^2}{2x}. \quad (5.16)$$

Таким образом, уравнение линии горизонта есть $x = \sqrt{y}$. В дальнейшем нам понадобится связь между расстоянием R от источника, считаемым по прямой, и горизонтальным расстоянием $a\vartheta$, считаемым по дуге большого круга. В предположении $a\vartheta \gg h$, т. е. $(ka)^{1/3} x \gg y$, эта связь имеет вид

$$kR = ka\vartheta + \omega_0, \quad (5.17)$$

где

$$\omega_0 = \frac{y^2}{4x} + \frac{xy}{2} - \frac{x^3}{12}. \quad (5.18)$$

6. Исследование выражения для функции Герца

Найденное для функции Герца выражение (5.14) удобно писать в виде

$$U_a = \frac{e^{ika\vartheta}}{a\vartheta} V(x, y, q), \quad (6.01)$$

где

$$V(x, y, q) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_C e^{ixt} \frac{\omega(t-y)}{\omega'(t) - q\omega(t)} dt. \quad (6.02)$$

Величину V , по аналогии с введенной ранее [формула (3.13)] величиной W , можно назвать множителем ослабления. Установим связь между V и W . Так как в знаменателях формул (3.13) и (6.01) мы можем считать величины R и $a\vartheta$ равными друг другу, мы получим вследствие (5.17)

$$W = Ve^{-i\omega_0}. \quad (6.03)$$

Нам надлежит теперь исследовать выражение (6.02) для V .

Начнем исследование с того случая, когда величина p положительна и велика (освещенная область). Этот случай уже был нами исследован другим путем (параграф 3). Однако, так как формула (6.02) была нами выведена для конечного p , представляет интерес убедиться в том, что она верна также и для больших p .

Когда $p \gg 1$, путь интегрирования может быть деформирован так, чтобы он проходил через точку, где $\sqrt{-t} = p$. Главный участок интегрирования будет тогда лежать при больших отрицательных t , где применимы выражения (4.07) и (4.08) для ω и ω' . Используя их и применяя метод стационарной фазы, получим

$$V = e^{i\omega_0} \frac{2p}{p - iq} \quad (6.04)$$

и вследствие (6.03)

$$W = \frac{2p}{p - iq}. \quad (6.05)$$

Последнее выражение практически совпадает с (3.15). Заметим, что если x порядка единицы или велико, то для применимости метода стационарной фазы достаточно условия $p \gg 1$, если же x мало, то нужно, чтобы было, кроме того, $y^2 \gg 2x$. Если последнее условие не выполняется, а выполняется условие

$$x \ll y \ll \frac{1}{x}, \quad (6.06)$$

то интеграл (6.02) может быть вычислен другим способом. В асимптотическом выражении для $\omega(t - y)$ могут быть сделаны дальнейшие упрощения, после чего интеграл (6.02) приводится к виду

$$V = e^{i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_c^{\infty} \frac{e^{ixt + iy\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t} - iq} dt. \quad (6.07)$$

Взяв за переменную интегрирования величину $\sqrt{-t}$, приходим к интегралу вида (3.20) [причем $\sqrt{-t} = \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} \mu$] и вновь получаем формулу Вейля—ван дер Поля со значениями σ и τ , равными

$$\sigma = e^{-i\frac{\pi}{4}} q \sqrt{x}; \quad \tau = e^{i \frac{\pi}{4}} \frac{y}{2\sqrt{x}} \quad (6.08)$$

и практически совпадающими с (3.22).

Переходим к наиболее интересному случаю, когда величина p есть положительное или отрицательное число порядка единицы.

Как мы знаем, это есть область полутени, где явление диффракции играет главную роль.

Если величины x и y порядка единицы, то наиболее удобным средством для вычисления интеграла (6.02) является представление его в виде суммы вычетов, относящихся к полюсам подынтегральной функции.

Если обозначить через $t_s = t_s(q)$ корни уравнения

$$w'(t) - qw(t) = 0, \quad (6.09)$$

то мы будем иметь

$$V(x, y, q) = e^{i\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{ixt_s}}{t_s - q^2} \frac{w(t_s - y)}{w(t_s)}. \quad (6.10)$$

Корни $t_s(q)$ суть функции от комплексного параметра q . При $q = 0$ они обращаются в корни $t'_s = t'_s(0)$ производной $w'(t)$, а при $q = \infty$ они обращаются в корни $t_s^0 = t_s(\infty)$ функции $w(t)$. Величины t'_s и t_s^0 имеют фазу $\pi/3$, так что

$$t'_s = |t'_s| e^{i\frac{\pi}{3}}; \quad t_s^0 = |t_s^0| e^{i\frac{\pi}{3}}. \quad (6.11)$$

Приведем модули первых нескольких корней (см. таблицу).

При больших s будет

$$|t'_s| \cong \left[\frac{3\pi}{2} \left(s - \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3},$$

$$|t_s^0| \cong \left[\frac{3\pi}{2} \left(s - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3}. \quad (6.12)$$

При конечных значениях q можно пользоваться для вычисления корней дифференциальным уравнением

$$\frac{dt_s}{dq} = \frac{1}{t_s - q^2}, \quad (6.13)$$

которое легко выводится из (4.02). Корень t_s можно определить либо как решение уравнения (6.13), которое при $q = 0$ обращается в t'_s , либо как решение, которое при $q = 0$ обращается в t_s^0 ; оба определения совпадают. Исходя из первого определения, легко построить для t_s ряд по восходящим степеням q ; он будет сходиться при $|q| < |\sqrt{t'_s}|$. Исходя из второго определения можно построить ряд по нисходящим (отрицательным) степеням q ; он будет сходиться при $|q| > |\sqrt{t'_s}|$. Рядов этих мы здесь не выписываем. Заметим, что значение t_s , которое при больших $|q|$ близко к q^2 , не есть корень уравнения (6.09).

Таблица

s	$ t'_s $	$ t_s^0 $
1	1,01879	2,33811
2	3,24820	4,08795
3	4,82010	5,52056
4	6,16331	6,78671
5	7,37218	7,94417

При условии $y^2 \ll 2|\sqrt{t_s}|$ мы имеем приближенное равенство

$$\frac{\omega(t_s - y)}{\omega(t_s)} = \text{ch}(y\sqrt{t_s}) - \frac{q}{\sqrt{t_s}} \text{sh}(y\sqrt{t_s}), \quad (6.14)$$

которое позволяет оценить далекие члены ряда (6.10). При больших s , таких, что $|q| \ll |\sqrt{t_s}|$, будет приближенно $t_s = t_s(0) = t'_s$. Отсюда и из (6.14) следует, что ряд (6.10) всегда сходится. Однако если x мало или y велико, то для вычисления суммы ряда может потребоваться большое число членов.

В области тени, когда величина p велика и отрицательна, ряд (6.10) сходится весьма быстро и его сумма приближенно сводится к первому члену.

Наш ряд (6.10) соответствует ряду Ватсона, но представляет то преимущество, что члены нашего ряда имеют простые выражения.

Наша основная формула (6.02) позволяет исследовать не только предельные случаи (большие положительные p — освещенная область, большие отрицательные p — теневая область), но и промежуточные, а именно область полутени. В то время как для предельных случаев наша формула приводит лишь к уточнению известных ранее формул (отражательная формула и формула Вейля—ван дер Поля для освещенной области и ряд Ватсона для теневой области), для области полутени она дает существенно новые результаты.

Особый интерес представляет случай, когда x и y велики, но p конечно (короткие волны, полутень). Этот случай никем до сих пор не исследовался, и известные ранее формулы к нему неприменимы. Мы выведем здесь приближенные формулы, позволяющие удобно его исследовать.

Введем величину

$$z = x - \sqrt{y}, \quad (6.15)$$

которая представляет приведенное расстояние, считаемое не от источника, а от геометрической границы тени. В области геометрической тени $z > 0$, в «видимой» области $z < 0$. Мы имеем

$$p = \frac{y - x^2}{2x} = -z + \frac{z^2}{2x}. \quad (6.16)$$

При наших предположениях x велико, а z конечно; поэтому будет приближенно $p = -z$.

В рассматриваемом случае главный участок интегрирования в интеграле (6.02) будет соответствовать значениям t порядка единицы. Но при больших y и конечных t к функции $\omega(t - y)$ применимо асимптотическое выражение (4.07), которое дает

$$\omega(t - y) = e^{i\frac{\pi}{4}}(y - t)^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{2}{3}(y - t)^{3/2}} \quad (6.17)$$

или приближенно

$$\omega(t-y) = e^{i\frac{\pi}{4}y - \frac{1}{4}e^{i\frac{2}{3}y^{3/2} - i\sqrt{y}t}}. \quad (6.18)$$

Подставляя (6.18) в (6.02) и заменяя в множителе перед интегралом величину $x^{1/2}y^{-1/4}$ единицей, будем иметь

$$V(x, y, q) = e^{i\frac{2}{3}y^{3/2}} V_1(x - \sqrt{y}, q), \quad (6.19)$$

где

$$V_1(z, q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{itz}}{\omega'(t) - q\omega(t)} dt. \quad (6.20)$$

Отброшенные в (6.19) члены будут при конечных z порядка $1/\sqrt{y}$ (или $1/x$).

Таким образом, в нашем случае функция $V(x, y, q)$ от двух аргументов и от параметра q сводится к функции $V_1(z, q)$ от одного аргумента и от того же параметра. Это представляет значительное упрощение.

Выведем формулу, связывающую функцию ослабления W с величиной V . Мы имеем тождество

$$\frac{2}{3}y^{3/2} = \omega_0 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{z^4}{4x}, \quad (6.21)$$

где ω_0 имеет значение (5.18).

Отбрасывая в (6.21) последний член, мы получим из (6.03) и (6.19)

$$W = e^{i\frac{2}{3}z^3} V_1(z, q). \quad (6.22)$$

Таким образом, в нашем приближении функция ослабления W зависит от x и y только через посредство $z = x - \sqrt{y}$.

Функция $V_1(z, q)$ есть целая трансцендентная функция от переменной z . Для положительных z интеграл (6.20) можно вычислять как сумму вычетов, что дает

$$V_1(z, q) = i2\sqrt{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{izt_s}}{(t_s - q^2)\omega(t_s)} \quad (\text{при } z > 0), \quad (6.23)$$

где t_s — исследованные ранее корни уравнения (6.09).

Ряд (6.23) сходится тем быстрее, чем больше z . При больших положительных z сумма его сводится к первому члену. Для конечных отрицательных z (например, для $-2 < z < 0$) инте-

грал (6.20) приходится вычислять квадратурами *. Для больших отрицательных z можно вычислить интеграл по способу стационарной фазы, причем получается

$$V_1(z, q) = \frac{2e^{-\frac{i}{3}z^3}}{1 + \frac{iq}{z}} \quad (6.24)$$

и вследствие (6.22)

$$W = \frac{2}{1 + \frac{iq}{z}}. \quad (6.25)$$

Имея в виду, что приближенно $z = -p$, мы получаем совпадение с формулой (6.05).

В заключение заметим, что наша основная формула (6.02) может быть также получена методом параболического уравнения, предложенным М. А. Леонтовичем и примененным им [21] к выводу формулы Вейля—ван дер Поля. Применение метода Леонтовича (с некоторыми уточнениями) к данной задаче будет нами рассмотрено в следующей главе.

* Для случая $q = 0$ таблицы функций W и V_1 даны в добавлении 3 (где они обозначены через G и g).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ПО МЕТОДУ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*

Задача о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли решается по методу параболического уравнения, предложенному Леонтовичем. В параграфе 1 поверхность земли рассматривается как плоская; в этом случае получается хорошо известная формула Вейля—ван дер Поля. Эта формула оказывается, таким образом, строгим решением параболического уравнения с надлежащими предельными условиями. В параграфе 2 поверхность земли рассматривается как сферическая; в этом случае получается формула, совпадающая с получаемой по методу суммирования бесконечных рядов, представляющих строгое решение задачи (см. главу 10).

В предыдущей главе дано решение задачи о распространении электромагнитных волн от элементарного вертикального диполя, находящегося на заданной высоте над поверхностью сферической земли. В этом решении поле вычисляется для точек на поверхности, но по теореме взаимности то же решение непосредственно дает поле в точке над поверхностью, если диполь расположен на самой поверхности.

В настоящей главе мы покажем, что решение этой задачи может быть получено также и методом сведения ее к решению уравнения параболического типа для «функции ослабления».

Этот метод был впервые предложен Леонтовичем [21] и применялся им к решению той же задачи для плоской земли. Ввиду того, что приведенные в первоначальной работе Леонтовича рассуждения требуют некоторых исправлений, мы вновь вернемся здесь к этой задаче, а затем рассмотрим и случай сферической земли.

* Леонтович и Фок, 1946.

1. Случай плоской Земли

Зависимость всех составляющих поля от времени мы принимаем в виде $e^{-i\omega t}$ и в дальнейшем этого множителя не выписываем.

Обозначим через k абсолютную величину волнового вектора и через η — комплексную диэлектрическую постоянную земли, так что

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \eta = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} = \epsilon + \frac{i}{kl}, \quad (1.01)$$

где

$$l = \frac{c}{4\pi\sigma} \quad (1.02)$$

есть некоторая длина, характеризующая удельное сопротивление земли (эта длина меняется от десятых долей сантиметра для морской воды до десятка метров для сухой почвы). Пусть U есть вертикальная составляющая вектора Герца (функция Герца), удовлетворяющая уравнению

$$\Delta U + k^2 U = 0. \quad (1.03)$$

Функцию Герца U мы будем писать в виде

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} W, \quad (1.04)$$

где R есть расстояние от точки наблюдения до источника, а множитель W есть так называемая «функция ослабления».

Как известно, при $kR \rightarrow 0$ функция Герца обращается в бесконечность так, что W остается конечным. В качестве нормировки функции Герца мы потребуем, чтобы W стремилось к единице, когда обе точки (источник и точка наблюдения), оставаясь выше поверхности земли, неограниченно приближаются друг к другу.

В дальнейшем мы будем считать, что источник находится на самой поверхности земли. Введем цилиндрические координаты r, z с началом координат в диполе и осью z , направленной вертикально вверх. На поверхности земли мы имеем $z = 0$. Расстояние R будет равно $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Основным «большим параметром» нашей задачи является величина $|\eta|$. При больших $|\eta|$ функция ослабления W есть медленно меняющаяся функция от координат. Чтобы характеризовать медленность ее изменения, можно ввести безразмерные координаты

$$\rho = \frac{kr}{2|\eta|}, \quad \zeta = \frac{kz}{\sqrt{|\eta|}} \quad (1.05)$$

и рассматривать W как функцию от ρ и ζ , считая, что производные от W по своим аргументам того же порядка, как сама функция.

Подстановка выражения (1.04) в уравнение (1.03) дает для функции $W(\rho, \zeta)$ уравнение, которое может быть упрощено, если ввести предположение, что угол наклона луча к горизонту мал и что расстояние от источника составляет по крайней мере несколько длин волн. Эти предположения приводят к неравенствам

$$\frac{z}{r} \ll 1, \quad kR \gg 1, \quad (1.06)$$

которые равносильны следующим:

$$\frac{\zeta}{\rho} \ll 2\sqrt{|\eta|}, \quad \rho \gg \frac{1}{2|\eta|}. \quad (1.07)$$

Так как величина $|\eta|$ предполагается большой, то неравенства (1.07) выполняются в широком интервале значений ρ , ζ (и во всяком случае для значений ρ , ζ порядка единицы).

Считая неравенства (1.07) выполненными, мы получаем для $W(\rho, \zeta)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + i \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right) = 0, \quad (1.08)$$

причем отброшенные в (1.08) члены — порядка $\frac{1}{|\eta|}$ по сравнению с теми, которые выписаны.

Предельное условие для W на поверхности земли ($\zeta = 0$) получается из условия для вектора Герца:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{ik}{\sqrt{\eta}} U \quad (\text{при } z = 0), \quad (1.09)$$

которое было указано Леонтовичем. Оно имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} + q_1 W = 0 \quad (\text{при } \zeta = 0), \quad (1.10)$$

где

$$q_1 = i \sqrt{\frac{|\eta|}{\eta}} = e^{i \frac{\pi - \delta}{2}}, \quad (1.11)$$

причем

$$\delta = \arctg \frac{1}{kls}, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2} \quad (1.12)$$

есть так называемый «угол потерь».

После перехода к пределу $|\eta| \rightarrow \infty$ область изменения переменных ρ , ζ есть $\rho > 0$, $\zeta > 0$.

В качестве «условий на бесконечности» мы можем потребовать, чтобы функция W оставалась медленно меняющейся функцией;

тогда вектор Герца U будет удовлетворять условию излучения. Мы можем также потребовать, чтобы при всех положительных значениях ρ и ζ [за исключением, быть может, особенной точки $\rho = 0$ уравнения (1.08)] функция W была ограниченной.

Нам остается формулировать условие при $\rho = 0$. Так как формулировка этого условия представляет некоторые трудности, мы рассмотрим его несколько подробнее.

Прежде всего, в непосредственной близости к источнику, т. е. в области весьма малых значений kR , нарушаются неравенства (1.07). Как дифференциальное уравнение (1.08), так и выражение для W становятся там заведомо непригодными. Область малых kR есть «запретная зона» для искомой функции W . Поэтому-то характер особенности точной функции Герца в источнике и не может служить для установления искомого условия при $\rho = 0$. Мы должны привлечь для установления этого условия свойства функции Герца для больших kR .

Известно, что при больших kR в пространстве над поверхностью земли, где угол наклона луча к горизонту не слишком мал, для функции Герца (нормированной как указано выше) приближенно справедлива так называемая «отражательная формула»

$$U = (1 + f) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (1.13)$$

где

$$f = \frac{\eta \cos \gamma - \sqrt{\eta - \sin^2 \gamma}}{\eta \cos \gamma + \sqrt{\eta - \sin^2 \gamma}} \quad (1.14)$$

есть коэффициент Френеля. (Угол γ есть угол падения, так что в нашем случае $\cos \gamma = \frac{z}{R}$.) Отражательная формула, во всяком случае, справедлива в области, где выполняются неравенства

$$1 \ll \frac{kz^2}{2r} \ll kr. \quad (1.15)$$

Если же $|\eta|$ есть большое число и если

$$\frac{1}{V|\eta|} \ll \frac{z}{r} \ll 1, \quad (1.16)$$

то коэффициент Френеля f мало отличается от единицы, и мы имеем

$$U = 2 \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (1.17)$$

После перехода к безразмерным координатам ρ , ζ неравенства (1.15) и (1.16), при выполнении которых справедлива формула (1.17), принимают вид

$$1 \ll \frac{\zeta^2}{4\rho} \ll 2|\eta|\rho, \quad (1.18)$$

$$1 \ll \frac{\zeta}{\rho} \ll 2\sqrt{|\eta|}. \quad (1.19)$$

Чтобы вывести условие для W при $\rho \rightarrow 0$, мы должны произвести двойной предельный переход: сперва $|\eta| \rightarrow \infty$, а затем уже $\rho \rightarrow 0$. После перехода к пределу $|\eta| \rightarrow \infty$ правые части неравенств отпадают, и мы получаем

$$1 \ll \frac{\zeta}{\rho}, \quad 1 \ll \frac{\zeta^2}{4\rho}. \quad (1.20)$$

При выполнении этих условий функция Герца стремится к значению (1.17), и тогда

$$W \rightarrow 2. \quad (1.21)$$

Условия (1.20) выполняются, в частности, при $\rho \rightarrow 0$, $\zeta > 0$. Следовательно, искомое решение уравнения (1.08) должно удовлетворять требованию

$$|W - 2| \rightarrow 0 \quad (\text{при } \rho \rightarrow 0 \text{ и } \zeta > 0). \quad (1.22)$$

Однако вследствие того, что $\rho = 0$ есть особая точка уравнения для W , условие (1.22) оказывается недостаточным для однозначного определения решения. Мы заменим его поэтому более строгим условием

$$\left| \frac{W - 2}{\sqrt{\rho}} \right| \rightarrow 0 \quad (\text{при } \rho \rightarrow 0 \text{ и } \zeta > 0), \quad (1.23)$$

которое, как мы увидим, уже будет достаточным.

Для определения «функции ослабления» W мы имеем, таким образом, дифференциальное уравнение (1.08), предельные условия (1.10) и (1.23) и требование ограниченности в рассматриваемой области (при $\rho > 0$).

Чтобы упростить дифференциальное уравнение, мы произведем подстановку

$$W = \sqrt{\rho} e^{-i \frac{\zeta^2}{4\rho}} W_1, \quad (1.24)$$

после чего уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial \zeta^2} + i \frac{\partial W_1}{\partial \rho} = 0. \quad (1.25)$$

Предельное условие для W_1 напишется в виде

$$\frac{\partial W_1}{\partial \zeta} + q_1 W_1 = 0 \quad (\text{при } \zeta = 0). \quad (1.26)$$

Условие при $\rho = 0$ будет

$$\left| W_1 - \frac{2}{\sqrt{\rho}} e^{i \frac{\zeta^2}{4\rho}} \right| \rightarrow 0 \quad (\text{при } \rho \rightarrow 0). \quad (1.27)$$

Достаточность этого условия вытекает из того, что $\rho = 0$ не есть особенная точка уравнения для W_1 (в отличие от уравнения для W).

Решая уравнение (1.25) способом разделения переменных, легко находим частное решение, удовлетворяющее предельному условию (1.26), а именно

$$W_1 = e^{-i\nu^2\rho} \left(\cos \nu \zeta - \frac{q_1}{\nu} \sin \nu \zeta \right), \quad (1.28)$$

где ν — параметр разделения.

При вещественных ν это выражение остается ограниченным и удовлетворяет всем условиям, кроме (1.27). При комплексных ν , за исключением случая, когда $\nu = \pm i q_1$, выражение (1.28) обращается в бесконечность при $\zeta \rightarrow \infty$ и, следовательно, поставленным условиям не удовлетворяет. Если же $\nu = \pm i q_1$, оно приводится к виду

$$W_1 = e^{i q_1^2 \rho - q_1 \zeta}. \quad (1.29)$$

Согласно (1.11) и (1.12)

$$\frac{\pi}{4} < \arcsin q_1 < \frac{\pi}{2}, \quad (1.30)$$

откуда

$$\operatorname{Re}(q_1) > 0, \quad \operatorname{Re}(i q_1^2) < 0. \quad (1.31)$$

Следовательно, в формуле (1.29) вещественная часть коэффициентов при ρ и при ζ отрицательна и выражение (1.28) также удовлетворяет всем условиям, кроме (1.27).

Чтобы удовлетворить также и этому последнему условию, составим функцию, представляющую собой наложение решений вида (1.28) и (1.29):

$$W_1 = \int_0^{\infty} e^{-i\nu^2\rho} \left(\cos \nu \zeta - \frac{q_1}{\nu} \sin \nu \zeta \right) f(\nu) d\nu + A e^{i q_1^2 \rho - q_1 \zeta}. \quad (1.32)$$

Нетрудно видеть, что особенность W_1 при $\rho \rightarrow 0$ определяется поведением $f(v)$ при больших v . Особенность эта может быть представлена в виде интеграла

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{i \frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-iv^2\rho} \cos v\zeta \, dv = \frac{2}{\sqrt{\rho}} e^{i \frac{\zeta^2}{4\rho}}. \quad (1.33)$$

Поэтому ясно, что $f(v)$ стремится на бесконечности к постоянному пределу, равному множителю перед интегралом в (1.33). Выделим в (1.32) член

$$W_1^0 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{i \frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-iv^2\rho} \left(\cos v\zeta - \frac{q_1}{v} \sin v\zeta \right) dv, \quad (1.34)$$

соответствующий предельному значению $f(v)$. Он равен

$$W_1^0 = \frac{2}{\sqrt{\rho}} e^{i \frac{\zeta^2}{4\rho}} - q_1 \int_0^{\zeta} \frac{2}{\sqrt{\rho}} e^{i \frac{\xi^2}{4\rho}} d\xi. \quad (1.35)$$

Величина W_1^0 удовлетворяет уравнению (1.25) и предельному условию (1.26). При $\rho \rightarrow 0$ имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(W_1^0 - \frac{2}{\sqrt{\rho}} e^{i \frac{\zeta^2}{4\rho}} \right) = -2\sqrt{\pi} e^{i \frac{\pi}{4}} q_1 \quad (1.36)$$

при всяком $\zeta > 0$. Следовательно, если мы положим

$$W_1 = W_1^0 + W_1', \quad (1.37)$$

то для W_1' уравнение (1.25) и условие (1.26) сохраняются, а условие (1.27) даст

$$W_1' = 2\sqrt{\pi} e^{i \frac{\pi}{4}} q_1 \quad (\text{при } \rho = 0, \zeta > 0). \quad (1.38)$$

Если мы положим в (1.32)

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{i \frac{\pi}{4}} [1 + g(v)], \quad (1.39)$$

то будет

$$W_1' = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{i \frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-iv^2\rho} \left(\cos v\zeta - \frac{q_1}{v} \sin v\zeta \right) g(v) \, dv + A e^{i q_1^2 \rho - q_1 \zeta} \quad (1.40)$$

и условие (1.38) напишется

$$\int_0^{\infty} \left(\cos v\zeta - \frac{q_1}{v} \sin v\zeta \right) g(v) dv + \frac{\sqrt{\pi}}{4} A e^{-i \frac{\pi}{4}} e^{-q_1 \zeta} = \frac{\pi}{2} q_1$$

(при $\zeta > 0$).

(1.41)

Показательная функция в (1.41) допускает (при $\zeta > 0$) интегральное представление

$$e^{-q_1 \zeta} = \frac{2}{\pi} q_1 \int_0^{\infty} \frac{\cos v\zeta}{v^2 + q_1^2} dv. \quad (1.42)$$

Умножая это выражение на $q_1 d\zeta$ и интегрируя по ζ от 0 до ζ , будем иметь

$$1 - e^{-q_1 \zeta} = \frac{2}{\pi} q_1^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin v\zeta}{v(v^2 + q_1^2)} dv. \quad (1.43)$$

Вычитая (1.42) из (1.43) и умножая на $\frac{\pi}{2} q_1$, получим равенство

$$-q_1^2 \int_0^{\infty} \left(\cos v\zeta - \frac{q_1}{v} \sin v\zeta \right) \frac{dv}{v^2 + q_1^2} + \pi q_1 e^{-q_1 \zeta} = \frac{\pi}{2} q_1, \quad (1.44)$$

которое можно сравнить с (1.41). Мы получим совпадение, если положим

$$g(v) = -\frac{q_1^2}{v^2 + q_1^2}, \quad A = 4\sqrt{\pi} e^{i \frac{\pi}{4}} q_1. \quad (1.45)$$

Согласно (1.39) отсюда следует

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{i \frac{\pi}{4}} \frac{v^2}{v^2 + q_1^2}, \quad (1.46)$$

и по формуле (1.32) мы получаем для искомой функции W_1 следующее выражение:

$$W_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{i \frac{\pi}{4}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-i v^2 \rho} (v \cos v\zeta - q_1 \sin v\zeta) \frac{v dv}{v^2 + q_1^2} + \pi q_1 e^{i q_1^2 \rho - q_1 \zeta} \right\}. \quad (1.47)$$

Для исследования этого выражения удобно заменить интеграл по вещественной оси интегралом по прямой $\arg v = -\frac{\pi}{4}$, так как новый интеграл будет быстрее сходиться. В секторе

$$-\frac{\pi}{4} < \arg v < 0 \quad (1.48)$$

имеется, однако, между старым и новым путем интегрирования полюс $v = -iq_1$. Вычет в этом полюсе как раз сокращается с членом вне интеграла в (1.47), и мы получаем

$$W_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{4}v} e^{-iv^2\rho} (v \cos v\zeta - q_1 \sin v\zeta) \frac{v dv}{v^2 + q_1^2}. \quad (1.49)$$

Вместо этого мы можем написать

$$W_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{+i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi}{4}v} e^{-iv^2\rho + iv\zeta} \frac{v dv}{v - iq_1}, \quad (1.50)$$

ибо подынтегральная функция в (1.49) есть четная часть подынтегральной функции в (1.50).

Полагая

$$v = \frac{\zeta}{2\rho} + \frac{p}{\sqrt{\rho}} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (1.51)$$

мы можем (передвинув контур вправо на величину $\frac{\zeta}{2\rho}$) считать новую переменную интегрирования p вещественной и пробегающей значения от $-\infty$ до $+\infty$. Положив для краткости

$$e^{-i\frac{\pi}{4}} q_1 \sqrt{\rho} = \sigma, \quad e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\zeta}{2\sqrt{\rho}} = \tau, \quad (1.52)$$

получим

$$W_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi\rho}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} \frac{p + \tau}{p + \sigma + \tau} dp. \quad (1.53)$$

Теперь удобно перейти по формуле (1.24) от W_1 к первоначальной функции ослабления W . Мы будем иметь

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} \frac{p + \tau}{p + \sigma + \tau} dp. \quad (1.54)$$

Этот интеграл легко вычисляется. В зависимости от знака мнимой части $\sigma + \tau$, он представляет разные аналитические функции. Но из формул (1.30) и (1.52) следует, что

$$\operatorname{Im} \sigma > 0, \quad \operatorname{Im} \tau > 0, \quad (1.55)$$

так что в нашем случае $\operatorname{Im} (\sigma + \tau) > 0$. В этом случае интеграл W равен

$$W = 2 - 4\sigma e^{-(\sigma+\tau)^2} \int_{i\infty}^{\sigma+\tau} e^{\alpha^2} d\alpha. \quad (1.56)$$

Это есть известная формула Вейля—ван дер Поля, которую мы имели в виду вывести.

Как видно из вывода, поставленные условия определяют функцию W вполне однозначно. Если бы мы вместо (1.23) ограничились условием (1.22), мы могли бы добавить к найденному решению W_1 любое выражение вида (1.32) (если только в нем функция $f(v)$ непрерывна и абсолютно интегрируема).

Как уже было указано, необходимость условия (1.23) связана с тем, что уравнение (1.08) для W имеет особенность при $\rho = 0$, тогда как уравнение (1.25) для W_1 ее не имеет.

В рассмотренном случае плоской земли вывод формулы Вейля—ван дер Поля по методу параболического уравнения лишь немногим проще обычного; однако в более сложных случаях упрощение при пользовании этим методом получается гораздо более значительным.

2. Случай сферической Земли

Обозначим через r, ϑ, ϕ сферические координаты с началом в центре земного шара и с полярной осью, проходящей через источник (вертикальный диполь). Электрическое и магнитное поле может быть выражено при помощи функции Герца U следующим образом:

$$E_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right), \quad E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right), \quad (2.01)$$

$$H_\phi = -ik \frac{\partial U}{\partial \phi}. \quad (2.02)$$

Функция U удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (2.03)$$

а также определенным граничным условиям на поверхности шара ($r = a$). Как и в плоском случае, мы будем считать модуль комплексной диэлектрической постоянной земли η большим по сравнению с единицей. Это позволит нам писать граничные условия в при-

ближенной форме, указанной Леонтовичем и уже неоднократно применявшейся при решении аналогичных задач [21]. Для плоского случая эти предельные условия имеют вид (1.09), уже использованный нами выше, а для сферического случая они принимают вид

$$\frac{\partial (rU)}{\partial r} = -\frac{ik}{\sqrt{\eta}} rU \quad (\text{при } r = a). \quad (2.04)$$

Для поля эти условия приводят к соотношению

$$E_{\vartheta} = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} H_{\varphi} \quad (\text{при } r = a). \quad (2.05)$$

Особенность функции Герца в той точке, где находится диполь, та же, что и в плоском случае. А именно, если диполь и точка наблюдения находятся выше поверхности земли и если R есть расстояние между ними, то должно быть

$$\lim RU = 1, \quad U = \frac{e^{ikR}}{R} + U^* \quad (\text{при } kR \rightarrow 0), \quad (2.06)$$

где U^* остается конечным при $kR \rightarrow 0$.

Решение задачи мы будем искать в виде

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} W, \quad (2.07)$$

где W есть функция ослабления.

В дальнейшем мы будем считать диполь расположенным на самой поверхности земли, так что

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta}. \quad (2.08)$$

Выясним, каковы те «большие» и «малые» параметры, которыми характеризуется наша задача. Прежде всего, в интересующем нас случае длина волны чрезвычайно мала по сравнению с радиусом Земли, так что величина ka весьма велика по сравнению с единицей (порядка нескольких миллионов). При решении задачи мы учтем это с самого начала и будем искать предельный вид решения при большом значении величины ka . Как уже было указано, мы считаем еще, что $|\eta|$ велико по сравнению с единицей. Отношение порядков величин этих двух больших параметров мы установим ниже. Кроме того, мы будем искать решение задачи для расстояний от источника, хотя и больших по сравнению с длиной волны, но малых по сравнению с радиусом Земли.

Идея применяемого нами здесь метода состоит в следующем. При больших ka и больших $|\eta|$ функция ослабления W есть медленно меняющаяся функция координат в том смысле, что относи-

тельное изменение ее на протяжении одной длины волны очень мало. [Это видно хотя бы из того, что в весьма обширной области $W = 1 + f$, где f есть коэффициент Френеля (1.14).] Чтобы явно выразить медленность изменения функции W , мы введем большие по сравнению с длиной волны масштабы длин: m_r в направлении радиуса вектора (по высоте) и m_ϕ в направлении дуги меридиана (в горизонтальном направлении). Полагая

$$r = a + m_r y, \quad \phi = \frac{m_\phi}{a} x, \quad (2.09)$$

введем новые безразмерные величины x , y и будем считать, что

$$W = W(x, y), \quad (2.10)$$

причем производные $\frac{\partial W}{\partial x}$ и $\frac{\partial W}{\partial y}$ того же порядка, что и само W . (Этим и выражается тогда медленность изменения W .) Мы покажем, что при надлежащем выборе масштабов m_r и m_ϕ в предельном случае очень больших ka мы можем получить для $W(x, y)$ уравнение и предельные условия, не содержащие больших параметров и дающие решение во всей интересующей нас области.

При наших предположениях уравнение плоскости горизонта

$$r \cos \phi = a \quad (2.11)$$

(«границы прямой видимости») может быть написано в виде

$$r = a + a \frac{\phi^2}{2} \quad (2.12)$$

или

$$m_r y = \frac{m_\phi^2}{2a} x^2. \quad (2.13)$$

Из физических соображений ясно, что граница прямой видимости играет в нашей задаче существенную роль. Поэтому удобно, чтобы уравнение ее не содержало никаких параметров. Этого можно достигнуть, связав m_r и m_ϕ соотношением

$$m_r = \frac{m_\phi^2}{2a}, \quad (2.14)$$

после чего уравнение границы прямой видимости принимает вид

$$y = x^2. \quad (2.15)$$

Как уже было указано, мы ищем решение для области, в которой $\phi \ll \frac{\pi}{2}$. Поэтому мы будем требовать, чтобы малым ϕ соответствовали значения x порядка единицы. Это будет иметь место,

если $m_\phi \ll a$, или, полагая $m_\phi = \frac{a}{A}$, мы должны считать, что A есть большое по сравнению с единицей число. Теперь равенства (2.09) обращаются в такие:

$$r = a \left(1 + \frac{y}{2A^2} \right), \quad \phi = \frac{x}{A}, \quad (2.16)$$

а расстояние от диполя R [формула (2.08)] выразится через x и y так:

$$R = \frac{ax}{A} \left\{ 1 + \frac{1}{4A^2} \left(y + \frac{y^2}{2x^2} - \frac{x^2}{6} \right) \right\}, \quad (2.17)$$

причем в фигурной скобке опущены члены порядка $\frac{1}{A^4}$ и более высокого порядка малости.

Выведем теперь приближенное дифференциальное уравнение для функции ослабления W . Если \mathbf{R} есть радиус-вектор с началом в диполе, то из (2.03) и (2.07) вытекает уравнение

$$\Delta W + 2 \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{(\mathbf{R} \operatorname{grad} W)}{R} = 0, \quad (2.18)$$

которое в полярных координатах принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \phi}{r} \frac{\partial W}{\partial \phi} + \\ + \frac{2}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \left[(r - a \cos \phi) \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{a}{r} \sin \phi \frac{\partial W}{\partial \phi} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Сделав здесь замену переменных r и ϕ на x и y и удерживая в получающемся при этом дифференциальном уравнении только старшие по отношению к большому параметру A члены, получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{ika}{2A^3} \left[\left(x + \frac{y}{x} \right) \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.20)$$

Заметим, что отброшенные нами здесь члены имеют по отношению к написанным порядок $\frac{1}{A^2}$.

Значение большого параметра A осталось еще не фиксированным. Мы можем попытаться распорядиться им так, чтобы при $ka \rightarrow \infty$ уравнение (2.20), во-первых, не содержало параметров и, во-вторых, имело решение, удовлетворяющее нужным предельным условиям. Это возможно только, если A^3 пропорционально ka . Поэтому мы положим

$$A = \left(\frac{ka}{2} \right)^{1/3}, \quad (2.21)$$

после чего уравнение (2.20) примет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + i \left[\left(x + \frac{y}{x} \right) \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.22)$$

Заметим, что это уравнение представляет собой в сущности уравнение для члена $W^{(0)}$ в разложении

$$W = W^{(0)} + \frac{1}{A^2} W^{(1)} + \dots \quad (2.23)$$

Кроме предположения, что A^2 пропорционально ka , имелись еще две другие возможности выбора A . Во-первых, можно было бы положить

$$\frac{A^3}{ka} \rightarrow 0 \quad \text{при } ka \rightarrow \infty, \quad (2.24)$$

и, во-вторых,

$$\frac{A^3}{ka} \rightarrow \infty \quad \text{при } ka \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

В первом случае предельное уравнение имело бы вид

$$\left(x + \frac{y}{x} \right) \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (2.26)$$

и во втором

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0. \quad (2.27)$$

Однако легко убедиться, что решения этих уравнений не могут удовлетворять необходимым предельным условиям. Поэтому единственно возможным остается предположение, сделанное выше.

Обратимся теперь к граничным условиям. Используя (2.17) и (2.21) и сохраняя только старшие по отношению к A члены, получаем из (2.04) и (2.07)

$$\frac{\partial(e^{ikR}W)}{\partial y} = -\frac{iA}{Vn} (e^{ikR}W) \quad (\text{при } y = 0), \quad (2.28)$$

или, в том же приближении,

$$\frac{\partial W}{\partial y} + i \left(\frac{A}{V\eta} + \frac{x}{2} \right) W = 0 \quad (\text{при } y = 0). \quad (2.29)$$

В это граничное условие входит комплексная величина

$$q = \frac{iA}{V\eta} = i \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + i \frac{\lambda}{2\pi l}}}, \quad (2.30)$$

которую можно написать в виде

$$q = |q| q_1, \quad (2.31)$$

где q_1 по модулю равно единице и имеет значение (1.11).

Величина $|q|$ есть отношение двух больших параметров и может принимать как малые, так и большие значения. Если ввести независимую от длины волны длину

$$b = \left(\frac{a}{2}\right)^{2/5} l^{3/5} \quad (2.32)$$

и положить

$$n = \frac{2\pi b}{\lambda}, \quad \alpha = \varepsilon \frac{l}{b} = \varepsilon \left(\frac{2l}{a}\right)^{2/5}, \quad (2.33)$$

то величину q можно представить в виде

$$q = n^{5/6} \frac{i}{\sqrt{i + \alpha n}}. \quad (2.34)$$

Таблица 1

Почва	$\frac{\sigma_0}{\sigma}$	$2\pi l, \text{ м}$	$2\pi b, \text{ м}$	ε	α
Морская вода сильно соленая	$2 \cdot 10^5$	0,0032	26,6	80	0,010
Морская вода слабо соленая	10^6	0,016	69,8	80	0,018
То же	$2 \cdot 10^6$	0,032	105	80	0,024
Болото	10^7	0,16	278	15	0,009
Влажная почва и луга	$2 \cdot 10^8$	1,6	1 110	15	0,022
То же	10^8	3,2	1 680	15	0,028
Пресная вода чистая	10^9	16	4 420	80	0,29
Сухая почва	10^{10}	160	17 500	9	0,08

Примечание. В первом столбце приведено отношение проводимости ртути σ_0 к проводимости данной почвы σ , причем проводимость ртути принята равной $\sigma_0 = 10\,440 \text{ (ом}\cdot\text{см)}^{-1}$.

Как видно из приведенной здесь таблицы, величина α меняется для морской воды и для различных почв в сравнительно узких пределах (примерно от 0,01 до 0,03, а для сухой почвы — до 0,08), тогда как длина $2\pi b$ меняется от десятков до тысяч метров. Поэтому n будет большим (и $|q|$ будет порядка A^2) лишь для очень коротких волн и сухих почв. В общем же случае мы должны считать $|q|$ конечным и оставить величину q в граничном условии, которое будем писать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial y} + \left(q + \frac{ix}{2}\right) W = 0 \text{ (при } y = 0\text{)}. \quad (2.35)$$

Интересно сравнить уравнения и граничные условия для случаев плоской и сферической Земли.

Полагая

$$\rho = |q|^2 x, \quad \zeta = |q| y, \quad (2.36)$$

мы переходим от наших переменных x, y к прежним безразмерным величинам ρ, ζ . Сделав эту замену переменных в уравнениях (2.22) и (2.35), мы приходим к уравнениям

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + i \left[\frac{\partial W}{\partial \rho} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\rho}{|q|^3} \right) \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right] = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} + \left(q_1 + \frac{i\rho}{2|q|^3} \right) W = 0 \quad (\text{при } \zeta = 0), \quad (2.38)$$

в которых члены порядка $\frac{\rho}{|q|^3}$ учитывают кривизну Земли. Отбрасывая эти члены, мы возвращаемся к уравнениям (1.08) и (1.10) для плоской Земли.

Нам остается формулировать условие при $x = 0$. Соответствующее условие для плоской Земли было подробно разобрано в параграфе 1, где мы убедились, что для установления его нельзя непосредственно использовать характер особенности функции Герца в источнике, а нужно рассматривать ту область, где применима «отражательная формула» (1.13) или ее предельный случай (1.17), и сравнивать там с этими формулами искомое решение.

Для сферической Земли это условие ничем по существу не отличается от условия для плоской Земли, и мы можем написать его в виде

$$\left| \frac{W - 2}{Vx} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0 \text{ и } y > 0, \quad (2.39)$$

аналогичном (1.23).

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы определить функцию W из дифференциального уравнения (2.22) и предельных условий (2.35) и (2.39), а также из условия, чтобы W оставалось конечным при всех $y > 0$, и из условия на бесконечности, аналогичного условию в случае плоской Земли.

Решение этой, уже чисто математической, задачи может быть получено следующим образом.

Прежде всего, упростим дифференциальное уравнение (2.22) при помощи подстановки

$$W = e^{-i\omega_0 V}, \quad (2.40)$$

где

$$\omega_0 = \frac{y^2}{4x} + \frac{xy}{2} - \frac{x^3}{12}. \quad (2.41)$$

Геометрический смысл величины ω_0 вытекает из формулы (2.17), которую можно написать в виде

$$kR = ka\vartheta + \omega_0. \quad (2.42)$$

Это есть выраженная в волновых числах разность между расстоянием R , отсчитываемым по прямой, и длиной дуги, отсчитываемой по земной поверхности. Вследствие (2.40) и (2.42) мы имеем

$$e^{ikR}W = e^{ika\vartheta}V, \quad (2.43)$$

так что переход от W к V соответствует выделению фазового множителя $e^{ika\vartheta}$ вместо e^{ikR} .

В силу условия излучения фаза функции V (а также вводимой ниже функции W_1) должна возрасти с возрастанием высоты y .

Подставляя (2.40) в дифференциальное уравнение для W и пользуясь тем, что

$$2 \frac{\partial \omega_0}{\partial y} = x + \frac{y}{x}, \quad \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \omega_0}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} = \frac{1}{2x}, \quad (2.44)$$

получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + i \frac{\partial V}{\partial x} + \left(y - \frac{i}{2x} \right) V = 0. \quad (2.45)$$

Это уравнение, как и исходное, имеет особую точку при $x = 0$, но ее можно устранить подстановкой

$$V = \sqrt{x} W_1, \quad (2.46)$$

после чего получим

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + i \frac{\partial W_1}{\partial x} + y W_1 = 0. \quad (2.47)$$

Предельное условие для W_1 будет то же, что и для V , а именно

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} + q W_1 = 0 \quad (\text{при } y = 0). \quad (2.48)$$

Заметим, что его проще всего получить не из (2.35), а непосредственно из (2.28).

Наконец, условие при $x \rightarrow 0$ напишется в виде

$$W_1 - \frac{2}{\sqrt{x}} e^{i \frac{y^2}{4x}} \rightarrow 0 \quad (\text{при } x \rightarrow 0 \text{ и } y > 0). \quad (2.49)$$

Переход от W к W_1 представляет собой значительное упрощение задачи. Во-первых, уравнение (2.47) не только не имеет особой точки при $x = 0$, но и не содержит x в своих коэффициентах

и допускает разделение переменных. Во-вторых, коэффициент в граничном условии (2.48) также не содержит x . Из того обстоятельства, что $x = 0$ не есть особая точка уравнения (2.47), вытекает также, что условие (2.49) при $x = 0$ вместе с предельными условиями является достаточным для однозначного определения W_1 .

Мы будем решать уравнение (2.09) классическим способом разделения переменных. Рассматривая частное решение вида

$$W_1 = X(x) Y(y), \quad (2.50)$$

получаем для X и Y уравнения

$$\frac{Y''}{Y} + y = -i \frac{X'}{X} = t, \quad (2.51)$$

где t есть параметр разделения.

Отсюда

$$X' = itX, \quad (2.52)$$

$$Y'' + (y - t) Y = 0. \quad (2.53)$$

Решение уравнений (2.52) и (2.53) есть

$$X(x) = e^{itx}, \quad (2.54)$$

$$Y(y) = \omega(t - y), \quad (2.55)$$

где $\omega(t)$ есть интеграл уравнения

$$\omega''(t) = t\omega(t). \quad (2.56)$$

В качестве $\omega(t)$ мы можем взять функцию

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{zt - \frac{1}{3}z^3} dz, \quad (2.57)$$

где контур Γ есть ломаная линия, идущая от бесконечности до нуля по прямой $\arg z = -\frac{2\pi}{3}$ и от нуля до бесконечности по положительной вещественной оси. Функция $\omega(t)$ есть целая трансцендентная функция, которая выражается через функцию Ханкеля первого рода порядка $\frac{1}{3}$ по формуле

$$\omega(t) = e^{i\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\frac{\pi}{3}} (-t)^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (-t)^{3/2} \right]. \quad (2.58)$$

Свойства $\omega(t)$ перечислены в главе 10 (см. также добавление 2). Фаза функции $\omega(t - y)$ возрастает при $y \rightarrow +\infty$. Дру-

гой же интеграл уравнения (2.53), который можно написать в виде

$$Y_2(y) = w_2(t-y) = e^{-i \frac{\pi}{3}} \omega \left[e^{i \frac{2\pi}{3}} (t-y) \right], \quad (2.59)$$

этим свойством не обладает. Выражение (2.50) будет удовлетворять предельному условию (2.48), если выбрать параметр t так, чтобы было

$$w'(t) - qw(t) = 0. \quad (2.60)$$

Как показано в главе 10, все корни t_s этого уравнения лежат в первой четверти плоскости комплексной переменной t , причем отдаленные корни располагаются вблизи прямой $\arg t = \frac{\pi}{3}$.

Отсюда следует, что функция

$$W_1 = e^{ixt_s} w(t_s - y) \quad (2.61)$$

остается конечной при всех положительных значениях x и при конечных y . (Если бы мы в формулах (2.60) и (2.61) взяли другой интеграл (2.59) дифференциального уравнения (2.53), то корни t_s лежали бы в четвертой четверти плоскости t и показательный множитель e^{ixt_s} неограниченно возрастал бы при возрастающих x ; поэтому интеграл (2.59) должен быть отброшен. Тот же вывод следует из рассмотрения фазы функции W_1 , которая должна возрастать с возрастанием y .)

Таким образом, функция (2.61) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.47) и предельному условию (2.48) и остается конечной по отношению к x (а именно стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$). Тем же условиям удовлетворяет при $x > 0$ и интеграл

$$W_1 = \int_C \frac{e^{ixt} w(t-y)}{w'(t) - qw(t)} \psi(t) dt, \quad (2.62)$$

где C есть замкнутый контур в плоскости t , охватывающий корни уравнения (2.60). При этом, если функция $\psi(t)$ голоморфна и ограничена внутри этого контура, то интеграл (2.62) остается ограниченным для всех значений y , тогда как частное решение (2.61) не является ограниченным по y .

Нам остается удовлетворить условию (2.49). Это может быть достигнуто надлежащим выбором контура C и функции $\psi(t)$. Прежде всего ясно, что контур C должен уходить на бесконечность, так как интеграл (2.62), взятый по любому конечному контуру, не может иметь особенности при $x = 0$. Особенность

эта обусловлена отдаленными участками контура. Но для больших t имеют место следующие асимптотические выражения:

$$\frac{\omega(t-y)}{\omega'(t)-q\omega(t)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-y\sqrt{t}} \left(-\frac{2\pi}{3} \leq \arg t < \frac{\pi}{3} \right), \\ -\frac{1}{\sqrt{t}} e^{y\sqrt{t}} \left(\frac{\pi}{3} < \arg t \leq \frac{4\pi}{3} \right), \end{cases} \quad (2.63)$$

где $\arg \sqrt{t} = \frac{1}{2} \arg t$. (На луче $\arg t = \frac{4\pi}{3}$ или $\arg t = -\frac{2\pi}{3}$ оба выражения (2.63) совпадают.)

Так как контур C должен охватывать корни знаменателя под интегралом, а они лежат в первой четверти комплексной плоскости t , то из двух уходящих на бесконечность ветвей контура мы направим одну по мнимой оси (от $i\infty$ до 0), а другую — по вещественной оси (от 0 до $+\infty$); на первой ветви будет справедливо нижнее, а на второй — верхнее выражение (2.63). Особенность интеграла (2.62) при $x \rightarrow 0$ будет та же, что и для интеграла

$$W'_1 = \int_0^{i\infty} e^{ixt+y\sqrt{t}} \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^{\infty} e^{ixt-y\sqrt{t}} \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{t}}. \quad (2.64)$$

Действительно, хотя при малых и конечных t асимптотические выражения (2.63) и неприменимы, но интеграл по соответствующим участкам остается конечным и не дает особенности.

Если будем считать $\psi(t)$ постоянной, равной

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t \frac{\pi}{4}}, \quad (2.65)$$

мы можем преобразовать сумму интегралов в (2.64) к виду

$$W'_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xp^2 + \sqrt{t} \ y p} dp. \quad (2.66)$$

Это выражение равно

$$W'_1 = \frac{2}{\sqrt{x}} e^{t \frac{y^2}{4x}}, \quad (2.67)$$

так что оно дает правильную особенность W_1 .

Если $\psi(t)$ имеет значение (2.65), то полное выражение (2.62) для W_1 равно

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t \frac{\pi}{4}} \int_C \frac{e^{ixt} \omega(t-y)}{\omega'(t)-q\omega(t)} dt. \quad (2.68)$$

Вычисляя интеграл (2.68) по способу стационарной фазы вблизи точки

$$t = - \left(\frac{y - x^2}{2x} \right)^2, \quad (2.69)$$

где производная от фазы обращается в нуль, мы получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} (W_I - W'_I) = 0, \quad (2.70)$$

где W'_I имеет значение (2.67).

Таким образом, при $x \rightarrow 0$ разность $W_I - W'_I$ не только остается конечной, но и обращается в нуль. Это и есть условие (2.49).

Таким образом, выражение (2.68) удовлетворяет всем поставленным условиям, включая (2.49). На строгом доказательстве единственности полученного решения мы останавливаться не будем, однако ясно, что добавка к полученному решению выраженный вида (2.61) уже нарушает условие (2.49).

Переходя по формуле (2.46) к функции V , мы получаем для нее выражение

$$V(x, y, q) = e^{-i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_C \frac{e^{ixt} w(t-y)}{w'(t) - qw(t)} dt. \quad (2.71)$$

Используя (2.43) и заменяя в знаменателе (2.07) величину R на $a\vartheta$, мы приходим к следующему окончательному выражению для функции Герца:

$$U = \frac{e^{ika\vartheta}}{a\vartheta} V(x, y, q). \quad (2.72)$$

Это выражение в точности совпадает с тем, которое было получено в главе 10 по методу суммирования рядов [формула (6.01)]. На исследовании полученного выражения мы здесь не останавливаемся, так как это исследование уже произведено в главе 10.

Сравнивая оба способа вывода выражения (2.71), мы приходим к следующим заключениям. Способ суммирования рядов является более сложным, но и более строгим. Это связано с тем обстоятельством, что при его применении все пренебрежения делаются уже в готовом решении, что облегчает оценку отбрасываемых членов. Кроме того, он позволяет пользоваться непосредственно условием (2.06), не прибегая к «отражательной формуле», которая сама требует обоснования. Для способа же параболического уравнения характерно то, что все пренебрежения делаются уже в самих уравнениях. Проистекающая от этого нестрогость выкупается сравнительной простотой второго способа, которая

и представляет главное его преимущество, так как позволяет находить приближенное решение аналогичных, но более сложных задач, для которых строгое решение неизвестно.

П р и м е ч а н и е. Работа, составляющая предмет настоящей главы, представляет одну из первых попыток формулировать задачу диффракции на основе параболического уравнения. Хотя рассуждения, имеющие целью показать единственность решения, несколько неполны (и, в частности, выбор (2.65) функции $\psi(z)$ в интеграле (2.62), быть может, недостаточно мотивирован), но все результаты данной работы верны. Более простой и убедительный вывод приведенных здесь формул может быть получен при отдельном рассмотрении падающей и отраженной волны (причем для падающей волны нужно брать выражение, удовлетворяющее параболическому уравнению). Такой способ рассуждения и принят в наших последующих работах (см., например, [5]). В тексте настоящей главы сделаны лишь незначительные изменения по сравнению с первоначальным текстом статьи [11].

ПОЛЕ ОТ ВЕРТИКАЛЬНОГО И ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДИПОЛЯ, ПРИПОДНЯТОГО НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ*

Поле от диполя, расположенного над поверхностью Земли, принимаемой за сферическую, выражается в виде бесконечных рядов, для которых нами разработан общий способ суммирования (см. книгу «Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности». Изд. АН СССР, М.—Л., 1946, а также главу 10 настоящей книги). В главе 10 суммирование произведено для случая вертикального диполя на поверхности Земли. В настоящей главе аналогичным методом производится исследование поля от приподнятого вертикального и горизонтального диполя. Ряды представляются в виде интегралов, содержащих функции Эйри. Такое представление позволяет вывести формулы, удобные для вычисления поля как в области тени (ряд вычетов), так и в освещенной области (отражательная формула). В области же полутени для вычисления поля приходится прибегать к квадратурам. В заключение сравнивается характер поляризации поля на разных расстояниях от источника.

В книге «Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности» [22], а также в главе 10 настоящей книги мы разработали общий метод суммирования рядов, представляющих поле от диполя, расположенного над поверхностью Земли, принимаемой за сферическую. Там наш метод был применен к случаю вертикального диполя, расположенного на самой поверхности. Не меньший интерес представляют, однако, случаи *приподнятого* вертикального и горизонтального диполя. Эти случаи мы и предполагаем разобрать в настоящей главе.

1. Вертикальный приподнятый диполь. Решение в виде рядов

Мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в главе 10. Пусть k есть волновой вектор в воздухе, η — комплексная диэлектрическая постоянная земли, $k_2 = k\eta^{1/2}$ — комплексный волно-

* Фок, 1949.

вой вектор для земли. Для простоты мы не будем учитывать здесь рефракции атмосферы и напомним лишь, что учет рефракции может быть приближенно произведен путем замены геометрического радиуса земного шара a эквивалентным радиусом a^* (см. главу 13).

Введем сферические координаты r, ϑ, φ с началом в центре земного шара и с полярной осью, проходящей через диполь. Составляющие поля в воздухе выражаются через функцию Герца U по формулам

$$E_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right), \quad (1.01)$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right), \quad (1.02)$$

$$H_\varphi = -ik \frac{\partial U}{\partial \vartheta}. \quad (1.03)$$

Пусть диполь находится на высоте $h = b - a$ над поверхностью земли (так что b есть расстояние диполя от центра земного шара). Введем функции $\psi_n(x)$ и $\zeta_n(x)$, связанные с функциями Бесселя и Ханкеля соотношениями

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (1.04)$$

$$\zeta_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), \quad (1.05)$$

и обозначим через $\chi_n(x)$ логарифмическую производную

$$\chi_n(x) = \frac{\psi_n'(x)}{\psi_n(x)} \quad (1.06)$$

и через $P_n(\cos \vartheta)$ — полином Лежандра.

При таких обозначениях разложение функции Герца U в области $a \leq r < b$ будет иметь вид

$$U = \frac{i}{kbr} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \zeta_n(kb) [\psi_n(kr) - A_n \zeta_n(kr)] P_n(\cos \vartheta), \quad (1.07)$$

где

$$A_n = \frac{k_2 \psi_n'(ka) - k \psi_n(ka) \chi_n(k_2 a)}{k_2 \zeta_n'(ka) - k \zeta_n(ka) \chi_n(k_2 a)}. \quad (1.08)$$

Эти формулы приведены в [22], а также в главе 10. Дальнейшие вычисления проделаны там, однако, лишь для случая $r = a$. От этого ограничения мы теперь освободимся.

2. Приближенное суммирование ряда для функции Герца

Для приближенного суммирования ряда мы можем применить без всяких изменений метод, изложенный в главе 10. Напишем ряд (1.07) в виде

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(\cos \vartheta), \quad (2.01)$$

где

$$\varphi \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{2i}{kbr} \zeta_n(kb) [\psi_n(kr) - A_n \zeta_n(kr)]. \quad (2.02)$$

Положим $n + 1/2 = \nu$ и будем рассматривать ν как комплексную переменную. Функция $\varphi(\nu)$ будет аналитической функцией от ν , имеющей полюса только в первой четверти. Как показано в параграфе 2 главы 10, при условии $ka \gg 1$ сумма (2.01) может быть с достаточной степенью точности заменена интегралом

$$U = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi \sin \vartheta}} \int_C e^{i\nu\vartheta} \varphi(\nu) \sqrt{\nu} d\nu, \quad (2.03)$$

где контур C идет из бесконечности во второй четверти, охватывает все полюса $\varphi(\nu)$ и удаляется на бесконечность в первой четверти комплексной переменной ν .

Главным участком контура будет тот, где

$$\nu = ka + \left(\frac{ka}{2} \right)^{1/3} t, \quad (2.04)$$

причем $|t|$ ограничено (тогда как ka , по предположению, весьма велико). Величина

$$m = \left(\frac{ka}{2} \right)^{1/3} \quad (2.05)$$

представляет «большой параметр» нашей задачи (мы будем везде отбрасывать члены порядка $1 : m^2$ по сравнению с единицей). Эта величина будет часто встречаться в дальнейших вычислениях; в главе 11 она была обозначена буквой A .

На главном участке интегрирования можно заменить функции ψ_n , ζ_n их асимптотическими выражениями через функции Эйри, подробно исследованные в главе 10 (см. также добавление 2). Мы будем рассматривать четыре функции Эйри: $u(t)$, $v(t)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$. Эти функции представляют решения дифференциального уравнения

$$\omega''(t) = t\omega(t), \quad (2.06)$$

связанные соотношениями

$$\omega_1(t) = u(t) + iv(t), \quad \omega_2(t) = u(t) - iv(t). \quad (2.07)$$

При вещественных t функции $u(t)$, $v(t)$ вещественны. Функция $\omega_1(t)$ выражается через функцию Ханкеля первого рода порядка $1/3$ по формуле

$$\omega_1(t) = e^{\frac{2}{3}\pi i} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} (-t)^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (-t)^{3/2} \right]. \quad (2.08)$$

Иногда мы будем писать вместо $\omega_1(t)$ просто $\omega(t)$.

Асимптотические выражения для функции ζ_n и ее производной имеют вид

$$\zeta_n(ka) = -im^{1/2}\omega_1(t), \quad \zeta_n'(ka) = im^{-1/2}\omega_1'(t). \quad (2.09)$$

Беря отсюда вещественную часть, получим

$$\psi_n(ka) = m^{1/2}v(t), \quad \psi_n'(ka) = -m^{-1/2}v'(t). \quad (2.10)$$

Величину $\chi_n(k_2a)$ можно согласно формуле (3.08) главы 10 заменить выражением

$$\chi_n(k_2a) = -i \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_2^2}} = -i \sqrt{\frac{\eta - 1}{\eta}}. \quad (2.11)$$

Полагая еще

$$q = im \frac{\sqrt{\eta - 1}}{\eta} \sim \frac{im}{\sqrt{\eta + 1}} \quad (2.12)$$

и подставляя найденные выражения в формулу (1.08) для A_n , получим

$$A_n = i \frac{v'(t) - qv(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)}. \quad (2.13)$$

Формула (2.02) для $\varphi(v)$ содержит еще функции $\psi_n(kr)$, $\zeta_n(kr)$ и $\zeta_n(kb)$. Асимптотические выражения для них могут быть легко получены из предыдущих формул. Положим

$$y_1 = \frac{k}{m} (r - a) = \frac{kh_1}{m}, \quad (2.14)$$

$$y_2 = \frac{k}{m} (b - a) = \frac{kh_2}{m}, \quad (2.15)$$

где h_2 есть высота источника; h_1 — высота точки наблюдения, а y_2 и y_1 — соответствующие приведенные высоты. Мы будем тогда иметь

$$\zeta_n(kb) = -im^{1/2}\omega_1(t - y_2), \quad (2.16)$$

$$\zeta_n(kr) = -im^{1/2}\omega_1(t - y_1), \quad (2.17)$$

$$\psi_n(kr) = m^{1/2}v(t - y_1), \quad (2.18)$$

и функция $\varphi(v)$ напишется в виде

$$\varphi(v) = \frac{1}{am^2} F(t, y_1, y_2, q), \quad (2.19)$$

где

$$F = \omega_1(t - y_2) \left[v(t - y_1) - \frac{v'(t) - qv(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - y_1) \right]. \quad (2.20)$$

Выражая здесь функцию v через ω_1 и ω_2 , мы можем также написать

$$F = \frac{i}{2} \omega_1(t - y_2) \left[\omega_2(t - y_1) - \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - y_1) \right] \quad (2.21)$$

[см. формулы (1.10) и (1.11) главы 7].

Нам остается подставить найденное выражение для $\varphi(v)$ в интеграл (2.03) для функции Герца U . Вводя горизонтальное расстояние $s = a\vartheta$, считаемое по дуге земного шара, и приведенное горизонтальное расстояние:

$$x = \left(\frac{k}{2a^2} \right)^{1/3} s = \frac{ms}{a} \quad (2.22)$$

и заменяя в (2.03) переменную величину $v^{1/2}$ постоянной величиной $(ka)^{1/2}$, получим

$$U = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa \sin(s/a)}} V(x, y_1, y_2, q), \quad (2.23)$$

где

$$V = e^{-t} \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int e^{ixt} F(t, y_1, y_2, q) dt. \quad (2.24)$$

Эта формула справедлива при $y_1 < y_2$; если же, напротив, $y_1 > y_2$, то нужно в выражении для F поменять y_1 и y_2 местами. Функцию V можно назвать множителем ослабления.

3. Исследование множителя ослабления

Переходя к исследованию множителя ослабления, рассмотрим сперва некоторые предельные случаи. Положим $y_1 = 0$, что соответствует случаю, когда одна из точек (источник или точка наблюдения) находится на поверхности земли. Мы получим тогда

$$F(t, 0, y_2, q) = \frac{\omega_1(t - y_2)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)}, \quad (3.01)$$

и формула (2.24) для множителя ослабления приведет к формуле (6.02) главы 10.

Рассмотрим теперь другой случай. Будем считать x и y_2 весьма большими, а разность

$$x - \sqrt{y_2} = \xi \quad (3.02)$$

величиной конечной. Заменяя в (2.21) функцию $w_1(t - y_2)$ ее асимптотическим выражением [формула (6.18) главы 10], мы будем иметь

$$V(x, y_1, y_2, q) = \left(\frac{x^2}{y_2}\right)^{1/4} e^{i\frac{2}{3}y_2\frac{3}{2}} \times \\ \times \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int e^{i\xi t} \left[w_2(t - y_1) - \frac{w_2'(t) - qw_2(t)}{w_1'(t) - qw_1(t)} w_1(t - y_1) \right] dt. \quad (3.03)$$

Здесь интеграл во второй строчке совпадает с выражением, полученным в главе 5 [формула (4.39)]. Совпадение это вполне понятно. В самом деле, при больших x и y источник находится далеко от точки наблюдения и от поверхности земли, так что волна, идущая от источника, может уже рассматриваться как плоская.

В общем случае интеграл (2.24) для V может быть вычислен как сумма вычетов. Функцию F , определяемую формулами (2.20) и (2.21), можно написать в виде

$$F = w_1(t - y_2) \frac{f(y_1, t)}{w_1'(t) - qw_1(t)}, \quad (3.04)$$

где

$$f(y_1, t) = [w_1'(t) - qw_1(t)] v(t - y_1) - \\ - [v'(t) - qv(t)] w_1(t - y_1). \quad (3.05)$$

Заметим, что при $y_1 = 0$ функция f и ее производная $\partial f/\partial y_1$ принимают значения

$$f = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = -q \quad (\text{при } y_1 = 0). \quad (3.06)$$

Отсюда нетрудно заключить, что если t есть корень уравнения

$$w_1'(t) - qw_1(t) = 0, \quad t = t_1, t_2, \dots, \quad (3.07)$$

то значение функции f совпадает со значением выражения

$$f(y_1, t_s) = f_s(y_1) = \frac{w_1(t_s - y_1)}{w_1(t_s)}, \quad (3.08)$$

которое можно назвать «высотным множителем».

Вычисляя интеграл (2.24) как сумму вычетов в точках $t = t_s$, мы получим для множителя ослабления V выражение

$$V(x, y_1, y_2, q) = e^{i \frac{\pi}{4}} 2 \sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{ixt_s}}{t_s - q^2} \frac{w_1(t_s - y_1)}{w_1(t_s)} \frac{w_1(t_s - y_2)}{w_1(t_s)}, \quad (3.09)$$

которое отличается от нашего прежнего выражения для V , соответствующего случаю $y_1 = 0$ [см. формулу (6.10) главы 10], только тем, что теперь в него входят два высотных множителя вместо одного. Обе высоты y_1 и y_2 входят в (3.09) совершенно симметричным образом.

Пользуясь соотношением (3.07), можно формулу (3.09) для V переписать в виде

$$V = -e^{i \frac{\pi}{4}} 2 \sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{ixt_s}}{1 - t_s/q^2} \frac{w_1(t_s - y_1)}{w_1'(t_s)} \frac{w_1(t_s - y_2)}{w_1'(t_s)}. \quad (3.10)$$

Эта форма удобна для больших значений q . В частности, при $q = \infty$ имеем

$$V = -e^{i \frac{\pi}{4}} 2 \sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} e^{ixt_s^0} \frac{w_1(t_s^0 - y_1)}{w_1'(t_s^0)} \frac{w_1(t_s^0 - y_2)}{w_1'(t_s^0)}, \quad (3.11)$$

где величины t_s^0 суть корни уравнения

$$w_1(t_s^0) = 0. \quad (3.12)$$

Полученные ряды удобны для вычисления в области геометрической тени. В освещенной области они сходятся весьма медленно, но там можно пользоваться отражательной формулой, которая будет выведена в следующем параграфе. В области же полутени для вычисления V приходится прибегать к квадратурам.

4. Отражательная формула

Рассмотрим теперь поле в освещенной области. Мы должны ожидать, что в этом случае получится отражательная формула, соответствующая отражению шаровой волны от сферической поверхности.

В интеграле (2.24) мы можем взять в качестве F выражение (2.21). Это выражение содержит два члена. Интегралы от каждого из этих членов в отдельности могут быть расходящимися (сходится только их разность), но, применяя метод стационарной фазы,

мы можем ограничиться рассмотрением участков интегрирования, лежащих вблизи экстремума фазы, и тогда можно рассматривать оба интеграла (взятые по соответствующим участкам) отдельно.

Положим

$$V^0 = \frac{1}{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int e^{ixt} \omega_1(t - y_2) \omega_2(t - y_1) dt, \quad (4.01)$$

$$V^* = \frac{1}{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int e^{ixt} \frac{\omega_2'(t) - q\omega_2(t)}{\omega_1'(t) - q\omega_1(t)} \omega_1(t - y_1) \omega_1(t - y_2) dt. \quad (4.02)$$

Тогда множитель ослабления V будет равен разности

$$V = V^0 - V^*. \quad (4.03)$$

Предполагая, что главный участок интегрирования лежит в области больших отрицательных значений t и пересекает отрицательную вещественную ось t слева сверху вниз направо, мы можем заменить функции ω_1 и ω_2 асимптотическими выражениями, пригодными в этой области. Согласно (6.17) главы 10 мы можем положить

$$\omega_1(t - y) = e^{i \frac{\pi}{4}} (y - t)^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} (y - t)^{3/2}}, \quad (4.04)$$

$$\omega_2(t - y) = e^{-i \frac{\pi}{4}} (y - t)^{-1/4} e^{-i \frac{2}{3} (y - t)^{3/2}}. \quad (4.05)$$

Подставляя (4.04) и (4.05) в (4.01), получим

$$V^0 = \frac{1}{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int e^{i\omega(t)} \frac{dt}{[(y_1 - t)(y_2 - t)]^{1/4}}, \quad (4.06)$$

где

$$\omega(t) = xt + \frac{2}{3} (y_2 - t)^{3/2} - \frac{2}{3} (y_1 - t)^{3/2}. \quad (4.07)$$

Определяя t из условия $\omega'(t) = 0$, будем иметь

$$\sqrt{y_1 - t} = \frac{y_2 - y_1 - x^2}{2x}, \quad \sqrt{y_2 - t} = \frac{y_2 - y_1 + x^2}{2x}. \quad (4.08)$$

Заметим, что для применимости выражений (4.04) и (4.05) обе величины (4.08) должны быть велики по сравнению с единицей. Экстремальное значение $\omega(t)$ мы обозначим через ω . Эта величина равна

$$\omega = \frac{(y_1 - y_2)^2}{4x} + \frac{1}{2} x (y_1 + y_2) - \frac{1}{12} x^3. \quad (4.09)$$

Применение метода стационарной фазы к интегралу (4.06) дает

$$V^0 = e^{i\omega}. \quad (4.10)$$

Величина ω имеет простой геометрический смысл, а именно

$$\omega = k(R - s), \quad (4.11)$$

где R есть расстояние между источником и точкой наблюдения, считаемое по прямой, а s есть соответствующее горизонтальное расстояние, считаемое по дуге земного шара.

Отсюда ясно, что величина V^0 соответствует падающей волне.

Рассмотрим теперь интеграл V^* . Подставляя в (4.02) асимптотические выражения (4.04) и (4.05), получим

$$V^* = \frac{1}{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int e^{i\varphi(t)} \frac{q - i\sqrt{-t}}{q + i\sqrt{-t}} \frac{dt}{[(y_1 - t)(y_2 - t)]^{1/4}}, \quad (4.12)$$

где

$$\varphi(t) = xt + \frac{2}{3}(y_1 - t)^{3/2} + \frac{2}{3}(y_2 - t)^{3/2} - \frac{4}{3}(-t)^{3/2}. \quad (4.13)$$

Корень уравнения $\varphi'(t) = 0$ мы обозначим через $t = -p^2$, где $p > 0$. Величина p будет корнем уравнения

$$\sqrt{y_1 + p^2} + \sqrt{y_2 + p^2} = 2p + x, \quad (4.14)$$

которое приводится к кубическому уравнению. Значение фазы $\varphi(t)$ при $t = -p^2$ мы обозначим через φ . Пользуясь соотношением (4.14), мы можем освободиться от всех иррациональностей, кроме p , и написать величину φ в виде

$$\varphi = -3p^2x + 2p(y_1 + y_2 + x^2) + x(y_1 + y_2) - \frac{1}{3}x^3. \quad (4.15)$$

Вычисление интеграла V^* по методу стационарной фазы дает

$$V^* = \frac{q - ip}{q + ip} \sqrt{A} e^{i\varphi}, \quad (4.16)$$

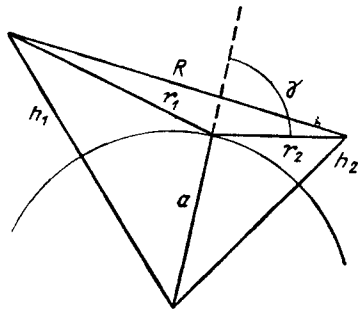
где

$$A = \frac{px}{3px + x^2 - y_1 - y_2}. \quad (4.17)$$

Полученная формула допускает простое геометрическое толкование. Величина p равна

$$p = m \cos \gamma = \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} \cos \gamma, \quad (4.18)$$

где γ — угол падения луча (рис. 1). [Рис. 1. Отражение луча от сферы.



Множитель $\frac{q-ip}{q+ip}$ есть взятый с обратным знаком коэффициент Френеля. Величина \sqrt{A} есть умноженная на $\frac{R}{r_1}$ (где r_1 есть путь, пройденный лучом до отражения) поправка на расширение пучка лучей после отражения. Фаза φ приближенно равна

$$\varphi = k(r_1 + r_2 - s), \quad (4.19)$$

где r_2 есть путь, пройденный лучом после отражения.

Таким образом, полученное по способу стационарной фазы выражение для нашего интеграла V

$$V = e^{i\omega} \frac{q-ip}{q+ip} \sqrt{A} e^{i\varphi}, \quad (4.20)$$

в точности соответствует отражательной формуле. Необходимо подчеркнуть, что это выражение (а следовательно, и отражательная формула) справедливо лишь при условии, что величина p достаточно велика по сравнению с единицей (практически достаточно потребовать, чтобы было $p > 2$, или, лучше, $p > 3$).

Если заданы x , y_1 , y_2 , то величина p определяется из уравнения (4.14). Это уравнение проще всего решить следующим образом. Введем новую неизвестную величину z , положив

$$\sqrt{y_1 + p^2} - p = \frac{1}{2}(x + z), \quad (4.21)$$

$$\sqrt{y_2 + p^2} - p = \frac{1}{2}(x - z). \quad (4.22)$$

Решая (4.21) относительно p , получаем

$$p = \frac{y_1}{x+z} - \frac{1}{4}(x+z), \quad (4.23)$$

тогда как (4.22) дает

$$p = \frac{y_2}{x-z} - \frac{1}{4}(x-z). \quad (4.24)$$

Приравнивая оба выражения для p , мы приходим к кубическому уравнению

$$z^3 - z(x^2 + 2y_1 + 2y_2) + 2x(y_1 - y_2) = 0, \quad (4.25)$$

которое решить уже нетрудно. А именно полагаем

$$\rho^3 = \frac{1}{3}(x^2 + 2y_1 + 2y_2) \quad (\rho > 0), \quad (4.26)$$

$$\sin \alpha = \frac{x(y_1 - y_2)}{\rho^3} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.27)$$

Тогда интересующий нас корень кубического уравнения будет равен

$$z = 2\rho \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right). \quad (4.28)$$

Используя кубическое уравнение, можно написать выражение для ρ через z в виде

$$2\rho x = y_1 + y_2 - \frac{1}{2}(x^2 + z^2). \quad (4.29)$$

Выражение для V упростится, если мы введем, кроме ρ , величину

$$\rho_1 = \frac{x^2 - z^2}{2x} = \frac{2\rho x + x^2 - y_1 - y_2}{x}. \quad (4.30)$$

Мы будем тогда иметь

$$V = e^{i\omega} \left(1 - \frac{q - i\rho}{q + i\rho} \sqrt{\frac{\rho}{\rho + \rho_1}} e^{2i\rho_1\rho^*} \right). \quad (4.31)$$

Заметим, что величины x , z , ρ_1 приближенно равны

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(\frac{k}{2a^2}\right)^{1/3} (r_1 + r_2), & z &= \left(\frac{k}{2a^2}\right)^{1/3} (r_1 - r_2); \\ \rho_1 &= \left(\frac{k}{2a^2}\right)^{1/3} \frac{2r_1 r_2}{(r_1 + r_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Если высота y_1 равна нулю, то

$$z = -x, \quad \rho = \frac{y_2 - x^2}{2x}, \quad \rho_1 = 0. \quad (4.33)$$

Если же высоты равны, то, полагая $y_1 = y_2 = y$, получим

$$z = 0, \quad \rho = \frac{y}{x} - \frac{x}{4}, \quad \rho_1 = \frac{x}{2}. \quad (4.34)$$

Положим теперь, как в (3.02), $x - \sqrt{y_2} = \xi$ и будем увеличивать x и $\sqrt{y_2}$, сохраняя ξ конечным. Это соответствует переходу к падающей плоской волне. Полагая для краткости

$$\sqrt{\xi^2 + 3y_1} = \sigma, \quad (4.35)$$

мы будем иметь

$$z = -x + \frac{2}{3}(\sigma + \xi), \quad \rho = \frac{1}{3}(\sigma - 2\xi), \quad \rho_1 = \frac{2}{3}(\sigma + \xi). \quad (4.36)$$

Подставляя эти значения ρ и ρ_1 в уравнение (4.31), мы получим для интеграла, стоящего в (3.03), выражение, совпадающее с введенным в параграфе 6 главы 5 для случая плоской волны.

5. Горизонтальный электрический диполь. Первичное поле

Поле электрического диполя может быть написано в виде

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \Pi - \Delta \Pi, \quad \mathbf{H} = -ik \text{ curl } \Pi, \quad (5.01)$$

где Π есть вектор Герца, направленный по оси диполя и пропорциональный величине

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (5.02)$$

где

$$R = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \vartheta}. \quad (5.03)$$

Наши сферические координаты связаны с прямоугольными соотношениями

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta. \quad (5.04)$$

Считая, что диполь, находящийся в точке $x = 0, y = 0, z = b$, направлен по оси x , и полагая коэффициент пропорциональности между Π_x и Π_0 равным единице, мы можем написать

$$\Pi_x = \Pi_0, \quad \Pi_y = 0, \quad \Pi_z = 0. \quad (5.05)$$

Составляющие поля получаются после подстановки вектора (5.05) в формулы (5.01). В дальнейшем нам понадобятся только радиальные составляющие первичного поля от диполя или пропорциональные им величины rE_r^0 и rH_r^0 , которые вследствие условий

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (5.06)$$

представляют решения скалярного волнового уравнения. Формулы (5.01) и (5.05) дают для величины rE_r^0 выражение

$$\begin{aligned} rE_r^0 = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \vartheta} \right) - \\ - \cos \varphi \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned} \quad (5.07)$$

Но так как Π_0 зависит от r, ϑ и b только через посредство величины R , то мы имеем

$$\cos \vartheta \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \vartheta} = - \frac{\partial \Pi_0}{\partial b}, \quad (5.08)$$

$$\sin \vartheta \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \vartheta} = \frac{1}{b} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \vartheta}. \quad (5.09)$$

Поэтому мы можем написать вместо (5.07)

$$rE_r^0 = -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial b} + \frac{\Pi_0}{b} \right). \quad (5.10)$$

Величина же rH_r^0 получается из (5.01) непосредственно в виде

$$rH_r^0 = ik \sin \varphi \frac{\partial \Pi_0}{\partial \vartheta}. \quad (5.11)$$

В наших формулах мы приписали при E_r и H_r значок 0, чтобы подчеркнуть, что эти выражения относятся к первичному полю.

С другой стороны, полное поле может быть выражено через две вспомогательные функции u , v по формулам:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{r} \Delta^* u, \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{i\omega}{c \sin \vartheta} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r \partial \varphi} - i \frac{\omega}{c} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}; \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -\frac{1}{r} \Delta^* v, \\ H_\vartheta &= \frac{ick^2}{\omega \sin \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r \partial \vartheta}, \\ H_\varphi &= -i \frac{ck^2}{\omega} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r \partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

где Δ^* есть оператор Лапласа на шаре, так что

$$\Delta^* u = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (5.14)$$

Функции u , v могут быть истолкованы как электрическая и магнитная функции Герца; иногда их называют потенциалами Дебая. Обе эти функции удовлетворяют скалярному волновому уравнению.

Формулы (5.12) дают как поле в воздухе, так и поле в земле. Для воздуха нужно положить $k = \omega/c$, а для земли $k = k_2 = (\omega/c)\sqrt{\eta}$, где ω — частота; в дальнейшем мы будем разуметь под k значение этой величины для воздуха.

Предельные условия для электрической и магнитной функций Герца вытекают из непрерывности касательных составляющих поля на поверхности земли. Обозначая значком (2) величины,

относящиеся к полю в земле, мы можем написать предельные условия в виде

$$k^2 u = k_2^2 u^{(2)}, \quad \frac{\partial (ru)}{\partial r} = \frac{\partial (ru^{(2)})}{\partial r} \quad (\text{при } r = a); \quad (5.15)$$

$$v = v^{(2)}, \quad \frac{\partial (rv)}{\partial r} = \frac{\partial (rv^{(2)})}{\partial r} \quad (\text{при } r = a). \quad (5.16)$$

Нам нужно найти вид функций $u = u^0$ и $v = v^0$, соответствующих первичному полю в воздухе. Приравнявая вытекающие из (5.10) и (5.12) выражения для rE_r^0 , мы получаем

$$\Delta^* u^0 = -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial b} + \frac{\Pi_0}{b} \right) \quad (5.17)$$

и аналогично

$$\Delta^* v^0 = -ik \sin \varphi \frac{\partial \Pi_0}{\partial \vartheta}. \quad (5.18)$$

Из этих соотношений легко определить u^0 и v^0 , если писать Π_0 в виде ряда

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{kbr} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \zeta_n(kb) \psi_n(kr) P_n(\cos \vartheta), \quad (5.19)$$

справедливого при $r < b$. Результаты удобнее писать в виде

$$u^0 = -\cos \varphi \frac{\partial P^0}{\partial \vartheta}; \quad v^0 = -\sin \varphi \frac{\partial Q^0}{\partial \vartheta}, \quad (5.20)$$

где P^0 и Q^0 — новые вспомогательные функции, которые также удовлетворяют скалярному уравнению колебаний, но уже не зависят от угла φ .

Мы будем иметь

$$P^0 = -\frac{i}{br} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n(kb) \psi_n(kr) P_n(\cos \vartheta); \quad (5.21)$$

$$Q^0 = \frac{1}{br} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n(kb) \psi_n(kr) P_n(\cos \vartheta). \quad (5.22)$$

6. Ряды для полного поля

Представим функции u , v , через которые согласно (5.12) и (5.13) выражается полное поле, в виде

$$u = -\cos \varphi \frac{\partial P}{\partial \vartheta}, \quad v = -\sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial \vartheta}, \quad (6.01)$$

где P , Q удовлетворяют скалярному уравнению колебаний и вытекающим из (5.15) и (5.16) предельным условиям

$$k^2 P = k_2^2 P^{(2)}; \quad \frac{\partial (rP)}{\partial r} = \frac{\partial (rP^{(2)})}{\partial r} \quad (\text{при } r = a), \quad (6.02)$$

$$Q = Q^{(2)}; \quad \frac{\partial (rQ)}{\partial r} = \frac{\partial (rQ^{(2)})}{\partial r} \quad (\text{при } r = a). \quad (6.03)$$

и не зависят от угла φ .

Учитывая вид первичного возбуждения (5.21), мы можем написать ряды для функции P в воздухе и в земле так:

$$P = -\frac{i}{br} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta'_n(kb) [\psi_n(kr) - A_n \zeta_n(kr)] P_n(\cos \vartheta) \quad (a < r < b), \quad (6.04)$$

$$P^{(2)} = -\frac{i}{br} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta'_n(kb) A'_n \psi_n(k_2 r) P_n(\cos \vartheta) \quad (0 < r < a). \quad (6.05)$$

Предельные условия (6.02) дают для коэффициентов A_n и A'_n уравнения

$$\left. \begin{aligned} k^2 A_n \zeta_n(ka) + k_2^2 A'_n \psi_n(k_2 a) &= k^2 \psi_n(ka), \\ k A_n \zeta'_n(ka) + k_2 A'_n \psi'_n(k_2 a) &= k \psi'_n(ka), \end{aligned} \right\} \quad (6.06)$$

откуда

$$A_n = \frac{k_2 \psi'_n(ka) \psi_n(k_2 a) - k \psi_n(ka) \psi'_n(k_2 a)}{k_2 \zeta'_n(ka) \psi_n(k_2 a) - k \zeta_n(ka) \psi'_n(k_2 a)}, \quad (6.07)$$

$$A'_n = \frac{ik^2/k_2}{k_2 \zeta'_n(ka) \psi_n(k_2 a) - k \zeta_n(ka) \psi'_n(k_2 a)}. \quad (6.08)$$

Заметим, что коэффициент A_n здесь в точности такой же, как и в ряде (1.07) для функции Герца U вертикального диполя. Сравнение рядов (1.07) и (6.04) для U и для P показывает, что эти функции связаны соотношением

$$\Delta^* P = \frac{\partial U}{\partial b} + \frac{U}{b} - \left(\frac{\partial U}{\partial b} + \frac{U}{b} \right)^0, \quad (6.09)$$

где $\left(\frac{\partial U}{\partial b} + \frac{U}{b} \right)^0$ есть постоянный член в разложении величины в скобках по полиномам Лежандра.

Связь между P и U позволит нам в дальнейшем воспользоваться готовыми результатами суммирования рядов и выразить P через уже исследованный множитель ослабления V .

Аналогично мы можем получить ряды для функции Q в воздухе и в земле. Имея в виду (5.22), мы можем написать

$$Q = \frac{1}{br} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n(kb) [\psi_n(kr) - B_n \zeta_n(kr)] P_n(\cos \theta) \quad (a < r < b), \quad (6.10)$$

$$Q^{(2)} = \frac{1}{br} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n(kb) B'_n \psi_n(k_2 r) P_n(\cos \theta) \quad (0 < r < a). \quad (6.11)$$

Предельные условия (6.03) дают

$$\left. \begin{aligned} B_n \zeta_n(ka) + B'_n \psi_n(k_2 a) &= \psi_n(ka), \\ k B_n \zeta'_n(ka) + k_2 B'_n \psi'_n(k_2 a) &= k \psi'_n(ka), \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

откуда

$$B_n = \frac{k \psi'_n(ka) \psi_n(k_2 a) - k_2 \psi_n(ka) \psi'_n(k_2 a)}{k \zeta'_n(ka) \psi_n(k_2 a) - k_2 \zeta_n(ka) \psi'_n(k_2 a)}, \quad (6.13)$$

$$B'_n = \frac{ik}{k \zeta'_n(ka) \psi_n(k_2 a) - k_2 \zeta_n(ka) \psi'_n(k_2 a)}. \quad (6.14)$$

Таким образом, ряды для функции Q нами определены. Заметим, что функция Q связана с функцией Герца для вертикального магнитного диполя (горизонтальной рамочной антенны). Поле от такого диполя может быть представлено формулами (5.12) и (5.13), в которых нужно положить

$$u = 0; \quad v = (M/b) W, \quad (6.15)$$

где множитель M есть магнитный момент, а функция W имеет ту же особенность, как P_0 , и удовлетворяет тем же предельным условиям (5.16), как v .

Для функции W в воздухе получается разложение вида

$$W = \frac{i}{kbr} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \zeta_n(kb) [\psi_n(kr) - B_n \zeta_n(kr)] P_n(\cos \theta), \quad (6.16)$$

где B_n имеет значение (6.13).

Из сравнения рядов (6.10) и (6.16) для Q и для W получается соотношение

$$\Delta^*Q = ik(W - \bar{W}), \quad (6.17)$$

где \bar{W} есть постоянный член в разложении Лежандра (6.16).

То же соотношение (с тем же значением $k = \omega/c$) получается для значения этих функций в земле.

7. Приближенные выражения для поля

Ряды для наших функций P , Q построены аналогично тому ряду для U , который был приближенно просуммирован в параграфе 2. Кроме того, функция P связана с U соотношением (6.09). Поэтому нет необходимости заново проводить все рассуждения, которые привели нас к суммированию рядов для U , и мы можем воспользоваться готовыми результатами.

Для определения P воспользуемся соотношением

$$\Delta^*P = \frac{\partial U}{\partial b} + \frac{U}{b} - \left(\frac{\partial U}{\partial b} + \frac{U}{b} \right)^0 \quad (7.01)$$

и значением (2.22) для U :

$$U = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa \sin(s/a)}} V(x, y_1, y_2, q). \quad (7.02)$$

Нетрудно видеть, что в том приближении, в каком справедлива формула (7.02), применение оператора Δ^* к функциям типа U или P равносильно умножению на $-k^2a^2$. С другой стороны, в правой части (7.01) мы можем пренебречь членом U/b по сравнению с производной $\partial U/\partial b$ и выразить эту производную согласно (2.15) через производную по y_2 . Постоянный же член в (7.01), очевидно, роли не играет. Поэтому равенство (7.01) дает

$$-k^2a^2P = \frac{k}{m} \frac{\partial U}{\partial y_2}, \quad (7.03)$$

откуда

$$P = -\frac{1}{ka^2m} \frac{\partial U}{\partial y_2}. \quad (7.04)$$

Аналогично можно на основании (6.17) выразить Q через W . Мы получим

$$Q = -\frac{i}{ka^2} W. \quad (7.05)$$

Для функции U нами было уже выведено приближенное выражение (7.02). Остается вывести аналогичное выражение для функции W . Ряд (6.16) для W отличается от ряда (1.07) для U

только тем, что коэффициент A_n , определяемый формулой (1.08), заменен в нем коэффициентом B_n , определяемым формулой (6.13). С той же степенью точности, с какой справедлива формула (2.13), мы можем написать

$$B_n = i \frac{v'(t) - q_1 v(t)}{\omega_1'(t) - q_1 \omega_1(t)}, \quad (7.06)$$

где

$$q_1 = q\eta = im(\eta - 1)^{1/2}. \quad (7.07)$$

Таким образом, и вся функция W отличается от U только заменой q на q_1 , и мы имеем:

$$W = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa \sin(s/a)}} V(x, y_1, y_2, q_1). \quad (7.08)$$

Практически можно во всех случаях полагать $q_1 = \infty$. Тогда ряд для V приобретает вид (3.11).

Нам остается подставить полученные выражения в формулы для поля. Для этого найдем, прежде всего, электрическую и магнитную функции Герца u , v . На основании (6.01) имеем

$$u = \frac{i}{am} \frac{\partial U}{\partial y_2} \cos \varphi, \quad (7.09)$$

$$v = -\frac{1}{a} W \sin \varphi. \quad (7.10)$$

При подстановке этих выражений в формулы (5.12) и (5.13) для поля мы сохраним только главные члены, пренебрегая величинами порядка $1 : m^2$ по сравнению с единицей. Мы получим тогда следующие простые выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -k^2 au = -\frac{ik^2}{m} \frac{\partial U}{\partial y_2} \cos \varphi, \\ E_\phi &= 0, \\ E_\varphi &= k^2 av = -k^2 W \sin \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= k^2 av = -k^2 W \sin \varphi, \\ H_\phi &= \frac{ik^2 a}{m} \frac{\partial v}{\partial y_1} = -\frac{ik^2}{m} \frac{\partial W}{\partial y_1} \sin \varphi, \\ H_\varphi &= k^2 au = \frac{ik^2}{m} \frac{\partial U}{\partial y_2} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Эти выражения дают поле в условных единицах (момент электрического диполя положен в них равным единице). Чтобы полу-

чить обычное поле, нужно умножить написанные выражения на величину электрического момента.

Сравним с этими выражениями те, которые соответствуют вертикальному магнитному диполю с моментом, равным единице. Для этого мы должны согласно (6.15) положить $u = 0$; $bv = W$. Мы получим тогда

$$E_r = 0, \quad E_\theta = 0, \quad E_\varphi = k^2 W, \quad (7.13)$$

$$H_r = k^2 W, \quad H_\theta = \frac{ik^2}{m} \frac{\partial W}{\partial y_1}, \quad H_\varphi = 0. \quad (7.14)$$

Таким образом, в плоскости, перпендикулярной электрическому диполю, поле от него либо совпадает с полем вертикального магнитного диполя ($\varphi = 3\pi/2$), либо отличается от него знаком ($\varphi = \pi/2$).

В заключение сделаем одно замечание о характере поля на различных расстояниях от источника. При конечных значениях приведенного горизонтального расстояния x функции U и W будут одного порядка. Так как формулы (7.11) и (7.12) содержат большой параметр m , то на таких расстояниях разные составляющие поля будут неодинакового порядка: электрическое поле будет почти горизонтальным, а магнитное — почти вертикальным (отношение «малых» составляющих к «большим» будет порядка $1 : m$). Но в области глубокой тени функция W будет убывать быстрее, чем U . В самом деле, убывание этих функций характеризуется множителями $e^{ixt_1^0}$ (для W) и $e^{ixt_1'}$ (для U), где t_1^0 и t_1' — наименьшие по модулю корни уравнений

$$\omega_1'(t_1^0) - q_1 \omega_1(t_1^0) = 0, \quad \omega_1'(t_1') - q \omega_1(t_1') = 0.$$

Для хорошо проводящей почвы можно положить $q = 0$; $q_1 = \infty$, и тогда

$$t_1^0 = 2,338 e^{i \frac{\pi}{3}}; \quad t_1' = 1,019 e^{i \frac{\pi}{3}},$$

так что мнимая часть t_1^0 будет больше мнимой части t_1' . То же соотношение имеет место и в общем случае, ибо всегда $|q_1| \gg |q|$. Поэтому затухание W будет происходить быстрее, чем затухание U , и для достаточно больших x члены, содержащие U , могут, несмотря на малый множитель $1 : m$, стать преобладающим по сравнению с членами, содержащими W . Это означает для электрического поля постепенный переход от горизонтальной поляризации к вертикальной (и обратный переход для магнитного поля).

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРЯМОЙ ВОЛНЫ ВОКРУГ ЗЕМЛИ ПРИ УЧЕТЕ ДИФФРАКЦИИ И РЕФРАКЦИИ*

Выводится приближенное решение уравнений Максвелла для вектора Герца вертикального диполя, учитывающее как диффракцию, так и рефракцию. Решение это годится при весьма общих предположениях о ходе показателя преломления воздуха в зависимости от высоты. В некоторых практически важных случаях решение может быть выражено через функции, введенные для однородной атмосферы. Здесь существенную роль играет понятие эквивалентного радиуса Земли. Это понятие, первоначально введенное на основе соображений о кривизне луча, может быть обособлено и обобщено. Оно оказывается применимым и в области тени и полутени, где геометрическая оптика не применима.

Введение

В предположении однородности земной поверхности распространение радиоволн вокруг Земли обусловлено, в основном, следующими тремя обстоятельствами: диффракцией вокруг выпуклости Земли, рефракцией в нижних слоях атмосферы и отражением от ионосферы. На небольших расстояниях, порядка сотни или нескольких сот километров, отражение от ионосферы роли не играет. На расстояниях же порядка тысячи или нескольких тысяч километров отражение от ионосферы начинает играть существенную роль, так как на прямую (диффракционную) волну, не претерпевшую отражения, начинают накладываться отраженные волны, которые могут иметь значительно большую интенсивность, чем прямая волна.

Однако и на этих больших расстояниях можно, при известных условиях, выделить прямую волну и наблюдать ее отдельно. Изучение ее представляет большой практический интерес для интерференционных методов определения расстояний. Поэтому по-

* Фок, 1948.

строение теории, которая давала бы амплитуду и фазу прямой волны вплоть до самых больших расстояний, представляет весьма важную для практики задачу.

Теория прямой волны должна учитывать как диффракцию, так и рефракцию. Между тем, ввиду сложности задачи в большинстве теоретических исследований атмосферная рефракция либо не учитывалась вовсе, либо учитывалась весьма грубо, методами геометрической оптики. Весьма важное в данном вопросе понятие об эквивалентном радиусе Земли не получило достаточного теоретического обоснования. Оно вводилось на основе соображений о кривизне луча, между тем как в области полутени, а тем более в области тени, понятие луча вообще теряет смысл. В связи с этим не были выяснены и те условия, при выполнении которых замена радиуса Земли эквивалентным радиусом является законной.

В настоящей работе мы дадим приближенное решение уравнений Максвелла для вектора Герца, учитывающее как диффракцию, так и рефракцию. Решение это годится при весьма общих предположениях о ходе показателя преломления воздуха в зависимости от высоты.

В некоторых практически важных случаях решение это может быть выражено через функции, введенные нами в нашем решении задачи о распространении радиоволн в однородной атмосфере. Функции эти отчасти уже табулированы; в тех случаях, когда имеются таблицы, вычисление поля с учетом рефракции не составляет большого труда. Попутно мы дадим обоснование понятия эквивалентного радиуса Земли, покажем, что это понятие применимо и в области тени и полутени (где геометрическая оптика неприменима), и выясним те условия, когда пользование им законно.

1. Дифференциальные уравнения и предельные условия задачи

Обозначим через r , θ , ϕ сферические координаты с началом в центре земного шара и с полярной осью, проходящей через излучающий диполь. Диполь мы предположим расположенным на поверхности земли и будем изучать поле в воздухе. Радиус Земли обозначим через a . Диэлектрическую постоянную воздуха мы будем считать функцией от высоты $h = r - a$ над поверхностью земли

$$\varepsilon = \varepsilon(h), \quad h = r - a. \quad (1.01)$$

Как и в случае однородной атмосферы, составляющие поля в воздухе могут быть выражены через функцию Герца U . Мы имеем:

$$E_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right), \quad (1.02)$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\varepsilon r \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right), \quad (1.03)$$

$$H_\varphi = -ik_0 \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \quad (1.04)$$

тогда как остальные составляющие поля равны нулю. Зависимость составляющих поля от времени мы предполагаем в виде $e^{-i\omega t}$, где

$$\frac{\omega}{c} = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \quad (1.05)$$

Здесь λ_0 — длина волны в пустоте (в нашей задаче ее приходится отличать от длины волны в воздухе).

Значение диэлектрической постоянной воздуха у поверхности земли мы будем обозначать через $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$ и положим

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = k_0 \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (1.06)$$

Поле, выражаемое формулами (1.02)—(1.04), будет удовлетворять уравнениям Максвелла, если функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon r U) \right) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + k_0^2 \varepsilon r U = 0. \quad (1.07)$$

Введем новую функцию

$$U_1 = \varepsilon r \sqrt{\sin \vartheta} U. \quad (1.08)$$

Эта функция должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{\varepsilon \cdot r^2} \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \sin^2 \vartheta} \right) U_1 \right] + k_0^2 U_1 = 0. \quad (1.09)$$

Поле должно удовлетворять у поверхности земли условиям Леонтовича:

$$E_\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} H_\varphi, \quad (1.10)$$

где

$$\eta = \varepsilon_2 + i \frac{4\pi\sigma_2}{\omega} \quad (1.11)$$

есть комплексная диэлектрическая постоянная почвы. Условие Леонтовича будет выполняться, если функция U_1 удовлетворяет условию

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = -\frac{ik_0 \varepsilon_0}{\sqrt{\eta}} U_1 \quad (\text{при } r = a). \quad (1.12)$$

Выделим в функции U_1 быстро меняющийся множитель, положив

$$U_1 = e^{ika\vartheta} U_2 = e^{iks} U_2, \quad (1.13)$$

где k имеет значение (1.06) и $s = a\vartheta$ есть длина дуги земного шара от точки, где находится диполь, до точки, над которой вычисляется поле.

Для функции U_2 получается уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + 2i \frac{k}{a} \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta} + k^2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \frac{a^2}{r^2} \right) U_2 = \\ & = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{\partial U_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 U_2}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \sin^2 \vartheta} \right) U_2 \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) написано так, что в его левой части стоят главные члены, а в правой — поправочные, которые, как мы покажем, можно заменить нулем.

При оценке порядка величины производных мы можем воспользоваться результатами, полученными для случая однородной атмосферы. Если мы введем «большой параметр»

$$m = \sqrt[3]{\frac{ka}{2}}, \quad (1.15)$$

то будет

$$\frac{\partial U_2}{\partial r} = O\left(\frac{k}{m} U_2\right), \quad \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta} = O\left(\frac{ka}{m^2} U_2\right), \quad (1.16)$$

где символ $O(x)$ означает, как принято, «величина порядка x ».

С другой стороны, если исключить из рассмотрения ионосферу (в которой ε может обращаться в нуль), то градиент логарифма ε будет порядка кривизны земной поверхности, так что

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = O\left(\frac{1}{a}\right). \quad (1.17)$$

Отсюда видно, что отдельные члены левой части (1.14) будут по порядку величины не меньше $\frac{k^2}{m^2} U_2$, тогда как в правой части

члены, содержащие производные, будут порядка $\frac{k^2}{m^4} U_2$. Что же касается члена, содержащего $\sin^2 \vartheta$ в знаменателе, то при условии

$$ks \gg m \quad (1.18)$$

он также будет мал. Таким образом, отбрасывая величины порядка $\frac{1}{m^2}$ по сравнению с единицей, мы можем правую часть (1.14) заменить нулем, после чего получим

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + 2i \frac{k}{a} \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta} + k^2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \frac{a^2}{r^2} \right) U_2 = 0. \quad (1.19)$$

Это есть параболическое уравнение нашей задачи, напоминающее по форме уравнение Шредингера квантовой механики.

В полученном уравнении мы можем сделать дальнейшие упрощения, воспользовавшись приближенным равенством

$$1 - \frac{a^2}{r^2} = 2 \frac{h}{a}. \quad (1.20)$$

Введя, кроме того, вместо угла ϑ длину дуги $s = a\vartheta$ и рассматривая s и h как независимые переменные, получим

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial h^2} + 2ik \frac{\partial U_2}{\partial s} + k^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} + \frac{2h}{a} \right) U_2 = 0. \quad (1.21)$$

Предельное условие для U_2 на поверхности земли будет такое же, как для U_1 , а именно

$$\frac{\partial U_2}{\partial h} = -ik \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\eta}} U_2 \quad (\text{при } h = 0). \quad (1.22)$$

Условие на бесконечности ($h \rightarrow \infty$) может быть получено из рассмотрения фазы функции Герца. Положим

$$U = |U| e^{i\Phi} \quad \text{и} \quad U_2 = |U_2| e^{i(\Phi - ks)}. \quad (1.23)$$

Так как мы рассматриваем волну, идущую от источника, то фаза Φ должна *возрастать* с увеличением высоты h . Отсюда получаем условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h} > 0, \quad (1.24)$$

которое должно выполняться по крайней мере при достаточно больших h .

Кроме того, функция Герца U , а также функция U_2 должны оставаться конечными и непрерывными во всем пространстве, за исключением области, примыкающей к источнику.

Для однозначного определения решения уравнения (1.21) нам остается сформулировать условие, эквивалентное тому, которому

должна удовлетворять функция U_2 в области, близкой к источнику. Прежде всего, очевидно, что в непосредственной близости к источнику нарушается неравенство (1.18) и самое уравнение (1.21) становится несправедливым. Поэтому условие в области, близкой к источнику, должно быть заменено эквивалентным условием в «волновой зоне». Мы можем взять, например, область, где применима «отражательная формула», и получить желаемое условие, потребовав, чтобы искомое решение в этой области переходило в нее.

Отражательная формула имеет вид

$$U = \frac{e^{ikhR}}{R} (1 + f), \quad (1.25)$$

где f — коэффициент Френеля.

Так как мы пользуемся предельными условиями Леонтовича (1.10), то мы тем самым предполагаем $|\eta| \gg 1$. Если, кроме того, мы будем считать, что $h \ll s$, т. е. рассматривать малые наклоны луча к земной поверхности, то мы можем положить

$$R = s + \frac{h^2}{2s}, \quad f = \frac{h\sqrt{\eta} - s}{h\sqrt{\eta} + s}. \quad (1.26)$$

Подставляя эти выражения в (1.25), мы приходим к выводу, что в той области, где применима «отражательная формула», функция

$$U_2 = e^{-iks} \epsilon r \sqrt{\sin \vartheta} U \quad (1.27)$$

должна приводиться к виду

$$U_2 = \frac{\epsilon_0 \sqrt{a}}{\sqrt{s}} \frac{2h\sqrt{\eta}}{h\sqrt{\eta} + s} e^{i\frac{kh^2}{2s}}. \quad (1.28)$$

Математически это условие эквивалентно требованию, чтобы при $s \rightarrow 0$ и $h > 0$ функция U_2 имела особенность, характеризуемую формулой

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(u_2 - \frac{2\epsilon_0 \sqrt{a}}{\sqrt{s}} e^{i\frac{kh^2}{2s}} \right) = 0. \quad (1.29)$$

Более подробное обоснование условия (1.29) приведено в главе 11.

Заметим, что вместо условий (1.29) или (1.28) мы могли бы поставить еще более жесткое условие, потребовав, чтобы в той области, где влияние кривизны земной поверхности и неоднород-

ности атмосферы уже не сказывается и где применима формула Вейля—ван дер Поля *, наше решение переходило в решение Вейля—ван дер Поля.

2. Переход к безразмерным величинам

Выведенное нами дифференциальное уравнение для функции U_2 имеет вид

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial h^2} + 2ik \frac{\partial U_2}{\partial s} + k^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} + \frac{2h}{a} \right) U_2 = 0. \quad (2.01)$$

Рассмотрим коэффициент при U_2 в этом уравнении. Обозначив через ε'_0 значение градиента диэлектрической постоянной у поверхности земли, мы можем выделить в выражении для ε линейный член и написать коэффициент при U_2 в виде

$$k^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} + \frac{2h}{a} \right) = k^2 \left[\frac{\varepsilon - \varepsilon_0 - \varepsilon'_0 h}{\varepsilon_0} + \left(\frac{2}{a} + \frac{\varepsilon'_0}{\varepsilon_0} \right) h \right]. \quad (2.02)$$

Положим теперь

$$\frac{1}{a^*} = \frac{1}{a} + \frac{\varepsilon'_0}{2\varepsilon_0}. \quad (2.03)$$

Величина (2.03) есть разность между кривизной земной поверхности и кривизной луча, а величину a^* принято называть эквивалентным радиусом Земли. Приняв обозначение (2.03), мы можем формулу (2.02) написать в виде

$$k^2 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} + \frac{2h}{a} \right) = \frac{2k^2}{a^*} h (1 + g), \quad (2.04)$$

где

$$g = \frac{a^*}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{h} - \varepsilon'_0 \right). \quad (2.05)$$

Как видно из (2.05), величина g есть выраженная в условных (лишенных размерности) единицах разность между средним по высоте значением градиента диэлектрической постоянной воздуха (взятым на участке от поверхности земли до данной высоты) и его значением на земной поверхности. В нормальной атмосфере величина g положительна, в случае же температурной инверсии она может стать отрицательной и, лишь начиная с некоторой высоты, вновь становится положительной. По абсолютному значению величина g обычно не больше двух-трех десятых. При $h \rightarrow \infty$ теоре-

* Область применимости формулы Вейля—ван дер Поля подробно исследована в работе [22] и в главах 10 и 11.

тическое значение g есть $\frac{a^* - a}{a}$, а при $h = 0$ будет $g = 0$. При нормальной атмосфере величина g меняется весьма медленно, а в случае инверсии изменение ее происходит значительно быстрее.

Подставляя выражение (2.04) в дифференциальное уравнение (2.01), мы получим

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial h^2} + 2ik \frac{\partial U_2}{\partial s} + \frac{2k^2}{a^*} h (1 + g) U_2 = 0. \quad (2.06)$$

Для исследования уравнения (2.06) удобно перейти от h и s к безразмерным величинам. С этой целью введем вертикальный и горизонтальный масштабы

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{a^*}{2k^2}}, \quad s_1 = \sqrt[3]{\frac{2a^{*2}}{k}} \quad (2.07)$$

и положим

$$\frac{h}{h_1} = y, \quad \frac{s}{s_1} = x. \quad (2.08)$$

Чтобы упростить условие (1.29), мы перейдем также к новой безразмерной функции W_1 , положив

$$U_2 = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{a}}{\sqrt{s_1}} W_1. \quad (2.09)$$

Кроме того, положим

$$q = ikh_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\eta}} = i \sqrt[3]{\frac{ka^*}{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\eta}}. \quad (2.10)$$

В новых обозначениях дифференциальное уравнение, предельное условие и условие, определяющее особенность, напишутся:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + i \frac{\partial W_1}{\partial x} + y(1 + g) W_1 = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} + q W_1 = 0 \quad (\text{при } y = 0), \quad (2.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(W_1 - \frac{2}{\sqrt{x}} e^{i \frac{y^2}{4x}} \right) = 0 \quad (y > 0). \quad (2.13)$$

Кроме того, остается в силе условие для фазы $\Phi = ks + \arg W_1$, а именно:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} > 0 \quad (\text{при } y \gg 1). \quad (2.14)$$

Входящая в уравнение (2.11) величина g была определена выше [формула (2.05)] как функция от высоты h . Обозначим

через h_0 некоторую высоту, характеризующую быстроту изменения градиента диэлектрической постоянной воздуха, например ту высоту, на протяжении которой градиент меняется в $e = 2,718$. . раз. (Для нормальной атмосферы $h_0 = 7400$ м; в других случаях можно указать лишь порядок величины h_0 , который нам только и нужен.) Величину g мы можем рассматривать как функцию отношения h/h_0 :

$$g = g\left(\frac{h}{h_0}\right), \quad g(0) = 0, \quad (2.15)$$

считая, что производная от этой функции по ее аргументу будет порядка единицы. При переходе к безразмерным величинам (2.08) мы должны будем рассматривать g как функцию от y . Так как $h = h_1 y$, мы будем иметь

$$g = g(\beta y), \quad (2.16)$$

где

$$\beta = \frac{h_1}{h_0} = \frac{1}{h_0} \sqrt[3]{\frac{a^*}{2k^2}}. \quad (2.17)$$

В дальнейшем мы будем считать параметр β малой величиной. Чтобы оценить ее порядок, положим $h_0 = 7400$ м (нормальная атмосфера) и заменим эквивалентный радиус a^* геометрическим радиусом a . Тогда для $\lambda = 1$ м, $\lambda = 10$ м, $\lambda = 100$ м, $\lambda = 1000$ м получится соответственно $\beta = 0,006$, $\beta = 0,027$, $\beta = 0,13$, $\beta = 0,58$. В случае инверсии величина h_0 будет значительно меньше, и параметр β окажется малым лишь для соответственно меньших длин волн.

3. Решение уравнений

Если мы в уравнении

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + i \frac{\partial W_1}{\partial x} + y [1 + g(\beta y)] W_1 = 0 \quad (3.01)$$

будем считать $\beta = 0$, то, так как $g(0) = 0$, функция g тождественно обратится в нуль, и уравнение приведет к тому, какое было рассмотрено и решено [вместе с предельными условиями (2.12) и (2.13)] в предыдущих главах этой книги, посвященных исследованию случая однородной атмосферы. Важно, однако, отметить, что условие $\beta = 0$ соответствует не предположению об однородности атмосферы, а более общему предположению о постоянстве градиента диэлектрической постоянной. В этом более общем случае формулы получаются те же, что и в случае однородной атмосферы, только в выражениях для x , y и q входит вместо радиуса Земли a эквивалентный радиус a^* . Таким образом,

малость величины β характеризует степень точности, с которой можно пользоваться (для конечных значений y) понятием эквивалентного радиуса.

Решение для $\beta = 0$ было получено нами в форме интеграла, содержащего комплексную функцию Эйри. Последняя является тем решением дифференциального уравнения

$$\omega''(t) = t\omega(t), \quad (3.02)$$

которое имеет при больших отрицательных t асимптотическое выражение

$$\omega(t) = e^{i\frac{\pi}{4}}(-t)^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}, \quad (3.03)$$

Решение для $g(\beta y) = 0$ имеет вид

$$W_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C e^{ixt} \frac{\omega(t-y)}{\omega'(t) - q\omega(t)} dt, \quad (3.04)$$

где контур C идет от $t = i\infty$ до $t = 0$ и от $t = 0$ до $t = \infty \cdot e^{i\alpha}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$), охватывая все корни знаменателя подынтегральной функции. (Этот контур можно, разумеется, заменить каким-нибудь другим эквивалентным контуром.) Это решение совпадает с тем, которое было получено ранее в главе 10 и в книге [22].

Попытаемся аналогичным образом найти решение наших уравнений для общего случая $\beta \neq 0$. При этом мы сперва не будем предполагать β малым и лишь затем в целях упрощения готового решения воспользуемся предположением о малости β .

Уравнение (3.01) допускает разделение переменных. Частное решение уравнения (3.01), имеющее вид произведения функции от x на функцию от y и содержащее произвольный параметр t , напишется

$$W_1 = e^{ixt} f(y, t), \quad (3.05)$$

где $f(y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + [y - t + yg(\beta y)] f = 0. \quad (3.06)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что если начальные значения (т. е. значения при $y = 0$) функции f и ее производной по y являются целыми функциями параметра t , то и интеграл уравнения (3.06) будет целой трансцендентной функцией от t . Мы будем понимать под $f(y, t)$ тот интеграл уравнения (3.06), который является целой трансцендентной функцией от t и допу-

скает при больших значениях разности $y - t$ (или ее вещественной части) асимптотическое представление

$$f(y, t) = \frac{C e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{y-t+ug(\beta y)}} \exp \left[i \int_{\tau}^y \sqrt{u-t+ug(\beta u)} du \right]. \quad (3.07)$$

Нижний предел τ в интеграле, стоящем в показателе, может быть взят произвольно. Множитель C может быть функцией от параметра t . Фазовый множитель $e^{i \frac{\pi}{4}}$ добавлен для того, чтобы при $g = 0$ и $\tau = t$ выражение (3.07) переходило в асимптотическое выражение для функции

$$f(y, t) = C w(t - y). \quad (3.08)$$

Выражение (3.07) взято в соответствии с требованием $\frac{\partial \Phi}{\partial y} > 0$, налагаемым на фазу.

Разумая под $f(y, t)$ только что определенный интеграл уравнения (3.06), рассмотрим выражение

$$W_1 = e^{i \frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{ixt} \frac{f(y, t)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} + qf \right)_{y=0}} dt, \quad (3.09)$$

где контур Γ имеет вид, аналогичный контуру C в интеграле (3.04).

Прежде всего заметим, что подынтегральная функция в нем определена наложенными выше условиями однозначно, так как оставшийся неопределенным в (3.07) множитель C в ней сокращается.

Далее, подынтегральная функция в (3.09) представляет мероморфную функцию комплексной переменной t : единственными особыми точками в ней являются корни знаменателя.

Исследование корней знаменателя в (3.09) трудно провести с полной строгостью. Для такого исследования необходимо знать поведение функции $g(\beta y)$ при комплексных значениях y вблизи полупрямой $\arg y = \frac{\pi}{3}$. Однако на основании некоторых не вполне строгих соображений, которых мы здесь не приводим, можно ожидать, что если функция $g(\beta y)$ в указанной комплексной области будет оставаться малой (например, $|g| < \frac{1}{2}$), то корни будут расположены так, как и в случае $g = 0$, т. е. в первом квадранте плоскости t вблизи полупрямой $\arg t = \frac{\pi}{3}$. Во всяком случае это будет так при малых значениях параметра β .

Нам нужно также знать поведение функции $f(y, t)$ при положительных значениях $t - y$ (а также в некотором секторе пло-

скости t , включающем положительную вещественную ось). Искомое асимптотическое выражение получится аналитическим продолжением выражения (3.07) через третий и четвертый квадранты плоскости t , ибо в первом расположены корни $f(y, t)$. Оно будет иметь вид

$$f(y, t) = \frac{C}{\sqrt[4]{t - y - yg(\beta y)}} \exp \left[\int_y^{\tau} \sqrt{t - u - ug(\beta u)} du \right]. \quad (3.10)$$

Если положить здесь $g = 0$ и взять $\tau = t$, то это выражение приведет к (3.07), к асимптотическому выражению для функции (3.08).

Зная расположение корней и поведение подынтегральной функции по обе стороны области, где эти корни расположены, уже можно провести в интеграле (3.09) контур Γ так, чтобы он охватывал все корни знаменателя и уходил обеими ветвями в бесконечность. На начальной ветви контура (идущей из бесконечности) будет справедливо асимптотическое выражение (3.07), а на конечной ветви (уходящей в бесконечность) — выражение (3.10). При этом интеграл, взятый по такому контуру, будет сходящимся.

Пре предыдущие рассуждения имели целью показать, что выражение (3.09) для функции W_1 имеет определенный математический смысл.

Покажем теперь, что оно удовлетворяет всем поставленным условиям.

Прежде всего ясно, что оно удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.01), ибо ему удовлетворяет подынтегральная функция. Далее оно удовлетворяет предельному условию (2.12):

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} + qW_1 = 0 \quad (\text{при } y = 0). \quad (3.11)$$

Действительно, производя в (3.09) дифференцирование под знаком интеграла и полагая затем $y = 0$, мы увидим, что числитель дроби сократится со знаменателем и подынтегральная функция будет голоморфна, вследствие чего интеграл обратится в нуль. Затем, интеграл будет сходящимся и, следовательно, конечным при всех положительных значениях x и y . Нетрудно также проверить, что он будет удовлетворять условию для фазы ($\frac{\partial \Phi}{\partial y} > 0$).

Нам остается проверить, имеет ли выражение (3.09) требуемую условием (2.13) особенность вблизи $x = 0$, или, что равносильно этому, убедиться в том, что на небольших расстояниях от источника оно дает формулу Вейля—ван дер Поля или отражательную формулу.

При помощи асимптотических выражений (3.07) и (3.10) для $f(y, t)$ можно показать, что если x и y малы, а отношение $\frac{y}{x}$ велико, то главный участок интегрирования будет лежать в области больших отрицательных значений t . (Первоначальный контур Γ можно деформировать так, чтобы он проходил через эту область.) Пользуясь выражением (3.07), мы получим для больших отрицательных t :

$$\frac{f(y, t)}{f(0, t)} = \sqrt[4]{\frac{-t}{y-t+yg(\beta y)}} \exp \left[i \int_0^y \sqrt{u-t+ug} du \right]. \quad (3.12)$$

Отсюда

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y} = i \sqrt{y-t+yg(\beta y)} \quad (3.13)$$

и

$$\left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y} + q \right)_{y=0} = i \sqrt{-t} + q. \quad (3.14)$$

Но, когда y мало, члены $yg(\beta y)$ малы по сравнению с y , и мы можем вместо (3.12) написать

$$\frac{f(y, t)}{f(0, t)} = \sqrt[4]{\frac{-t}{y-t}} \exp \left[i \int_0^y \sqrt{u-t} du \right]. \quad (3.15)$$

Заметим теперь, что те же асимптотические выражения получатся для данной области, если вместо $f(y, t)$ подставить

$$f(y, t) = \omega(t-y). \quad (3.16)$$

Но после такой подстановки интеграл (3.09) обратится в (3.04), а этот последний дает для малых x, y формулу Вейля—ван дер Поля, отражательную формулу и предельное условие (2.13).

Мы можем проверить это и непосредственно. Вводя переменную интегрирования $p = \sqrt{-t}$ и пренебрегая величинами y и y^2 по сравнению с p , мы получим

$$\frac{f(y, -p^2)}{f(0, -p^2)} = e^{iy p} \quad (3.17)$$

и

$$\left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y} + q \right)_{y=0} = ip + q. \quad (3.18)$$

Подстановка этих величин в интеграл (3.09) дает

$$W_1 = e^{-i \frac{3\pi}{4}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_3} e^{-ixp^2 + iy p} \frac{p dp}{p - iq}, \quad (3.19)$$

где контур Γ_2 пересекает положительную вещественную ось в плоскости p снизу вверх (вблизи точки $p = \frac{y}{2x}$).

Если мы будем вычислять интеграл (3.19) без пренебрежений, то получится формула Вейля—ван дер Поля. Если мы будем вычислять его по методу стационарной фазы, получится отражательная формула. Если мы пренебрежем величиной $|q|$ по сравнению с $\frac{y}{2x}$, получится выражение, которое обращает в нуль левую часть (2.13) еще до перехода к пределу.

Тем самым доказано, что выражение (3.19) для W_1 представляет искомое решение нашей задачи.

4. Исследование решения для области прямой видимости

Вместо функции W_1 удобнее рассматривать другую функцию, отличающуюся от W_1 множителем \sqrt{x} . Мы положим

$$V(x, y, q) = e^{i \frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_{\Gamma} e^{ixt} \frac{f(y, t)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} + qt\right)_0} dt. \quad (4.01)$$

Припоминая связь между функциями U , U_1 , U_2 , W_1 , даваемую формулами (1.08), (1.13), (2.09), и пренебрегая различием между r и a и между ϵ и ϵ_0 , когда эти величины входят в качестве множителя при U , мы можем написать

$$U = \frac{e^{iks}}{\sqrt{as \sin \frac{s}{a}}} V(x, y, q), \quad (4.02)$$

где s , как и раньше, есть горизонтальное расстояние, считаемое по дуге вдоль земной поверхности, а x , y , q связаны с s , h , η соотношениями

$$x = \frac{s}{s_1}, \quad y = \frac{h}{h_1}, \quad q = i \sqrt[3]{\frac{ka^*}{2}} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\eta}}, \quad (4.03)$$

причем

$$s_1 = \sqrt[3]{\frac{2a^{*2}}{k}}, \quad h_1 = \sqrt[3]{\frac{a^*}{2k^2}}. \quad (4.04)$$

Если s мало по сравнению с радиусом земного шара, то вместо $\sin \frac{s}{a}$ можно писать просто $\frac{s}{a}$ (как обычно и пишут). Однако, так как наши формулы остаются справедливыми вплоть до весьма

больших расстояний, где различие между синусом и дугой становится заметным, мы оставляем в (4.02) под корнем $\sin \frac{s}{a}$.

Функцию $V(x, y, q)$ можно назвать множителем ослабления; в тех случаях, когда можно считать $g = 0$ и пользоваться понятием эквивалентного радиуса, формула (4.01) для V переходит в формулу

$$V(x, y, q) = e^{-i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_{\Gamma} e^{ixt} \frac{\omega(t-y)}{\omega'(t) - q\omega(t)} dt, \quad (4.05)$$

выведенную нами ранее для случая однородной атмосферы [формула (6.02) главы 10].

Функция (4.05) подробно исследована в главе 10 и в нашей работе [22] и отчасти табулирована (для $q = 0$). Исследование будет протекать во многих отношениях параллельно аналогичному исследованию в главе 10.

В настоящем параграфе мы рассмотрим область прямой видимости.

В области прямой видимости, не слишком близко к горизонту, вступает в силу геометрическая оптика. Если мы воспользуемся выражением (3.12) и введем переменную интегрирования p , мы получим для V интеграл вида

$$V = e^{-i \frac{3\pi}{4}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \int e^{i\omega} \sqrt{\frac{p^2}{y + p^2 + yg(\beta y)}} \frac{p dp}{p - iq}, \quad (4.06)$$

где для краткости положено *

$$\omega = -xp^2 + \int_0^y \sqrt{u + p^2 + ug(\beta u)} du. \quad (4.07)$$

Вычисляя интеграл по методу стационарной фазы, находим из уравнения $\frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$ или

$$x = \frac{1}{2} \int_0^y \frac{du}{\sqrt{u + p^2 + ug(\beta u)}} \quad (4.08)$$

экстремум фазы и после некоторых выкладок приходим к выражению

$$V = e^{i\omega} \frac{2p}{p - iq} \sqrt{2x \frac{\partial p}{\partial y}}. \quad (4.09)$$

* Фазу ω не следует смешивать с угловой частотой, обозначенной в параграфе 1 той же буквой.

В этой формуле под p разумеется функция от x и y , определяемая из равенства (4.08). При $g = 0$, а также при малых x и y

$$p = \frac{y - x^2}{2x}, \quad (4.10)$$

и выражение под знаком квадратного корня в (4.09) обратится в единицу. Формула (4.09) справедлива в том случае, когда величина p велика и положительна.

Наши формулы допускают простое толкование с точки зрения геометрической оптики. Действительно, полная фаза

$$\Phi = ks + \omega \quad (4.11)$$

функции U представляет решение уравнения для эйконала

$$\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial h}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 = k^2 \left(1 + \frac{h}{a}\right)^2 \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad (4.12)$$

которое после пренебрежения малыми величинами приводит к следующему уравнению для ω :

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial h}\right)^2 + 2k \frac{\partial\omega}{\partial s} = \frac{2k^2}{a^*} h(1 + g). \quad (4.13)$$

Здесь справа стоит величина (2.04). После перехода к переменным x , y мы получаем из (4.13)

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial\omega}{\partial x} = y + yg(\beta y). \quad (4.14)$$

Соотношение (4.08) есть уравнение траектории луча, проходящего через начало координат, и величина p — параметр этой траектории. Геометрическое значение параметра p есть

$$p = \sqrt[3]{\frac{ka^*}{2}} \cos \gamma, \quad (4.15)$$

где γ — угол между лучом и вертикалью вблизи источника.

Полная фаза Φ есть оптическая длина пути луча, считаемая от источника до точки x , y . Величина $\frac{2p}{p - iq}$ равна

$$\frac{2p}{p - iq} = 1 + f, \quad (4.16)$$

где f — коэффициент Френеля.

Таким образом, в тех случаях, когда применима геометрическая оптика, наши формулы переходят в формулы геометрической оптики.

Формула (4.09) применима для конечных x и y в том случае, когда параметр ρ положителен и велик. Если же x и y малы, необходимо еще условие

$$\frac{y^2}{4x} = \frac{kh^2}{2s} \gg 1. \quad (4.17)$$

При невыполнении условия (4.17), в случае малых x и y и больших ρ , выражение (4.06) остается в силе, но интеграл нужно вычислять иначе, а именно: нужно заменить ω на $-xp^2 + yp$ и корень четвертой степени на единицу, после чего интеграл приведется к виду (3.19) (с множителем \sqrt{x}) и даст формулу Вейля—ван дер Поля.

Заметим, что если x и \sqrt{y} велики, а параметр ρ мал по сравнению с этими величинами, то уравнение траектории (4.08) может быть приближенно решено относительно ρ . Мы будем иметь приближенно

$$\rho = \frac{1}{2} \int_0^y \frac{du}{\sqrt{u + ug(\beta u)}} - x. \quad (4.18)$$

При тех же условиях получается

$$\omega = \omega_0(y) + \frac{1}{3} \rho^3, \quad (4.19)$$

где

$$\omega_0(y) = \int_0^y \sqrt{u + ug(\beta u)} du, \quad (4.20)$$

а символ ρ нужно понимать как сокращенное обозначение для величины (4.18).

Равенство $\rho = 0$ дает геометрическую границу тени. Если правая часть (4.18) становится отрицательной, то уравнение (4.08) не имеет вещественного решения относительно ρ , функция же (4.18) [а также и (4.10)] сохраняет смысл и в этом случае. Это кажущееся разногласие объясняется тем, что правая часть (4.08) не является аналитической функцией от ρ вблизи $\rho = 0$.

Выражения (4.18) и (4.19) встретятся нам в области полутени, где геометрическая оптика уже неприменима.

5. Исследование решения для области полутени (конечные x и y)

Область полутени характеризуется тем, что в ней параметр ρ , определяемый формулой (4.10), есть положительное или отрицательное число порядка единицы.

Если x и y конечны, мы можем составить для V ряд, расположенный по вычетам подинтегральной функции. Будем иметь

$$V(x, y, q) = e^{i \frac{\pi}{4}} 2 \sqrt{\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ixt_n}}{D(t_n)} \frac{f(y, t_n)}{f(0, t_n)}, \quad (5.01)$$

где мы положили

$$D(t) = -\frac{1}{f(0, t)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} + q \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{y=0}, \quad (5.02)$$

причем под t разумеется корень уравнения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} + qf \right)_{y=0} = 0. \quad (5.03)$$

Если β не мало, то вычисление по этим формулам весьма сложно. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаем малых β . При этом, однако, мы не будем считать малым произведение βy , а будем рассматривать также и большие значения y (порядка $1/\beta$ и больше).

Если β мало, то при вычислении первых корней функции (5.03) мы можем заменить $g(\beta y)$ линейной функцией

$$g(\beta y) = g'(0) \beta y = \beta_0 y. \quad (5.04)$$

Физическое значение коэффициента β_0 есть

$$\beta_0 = h_1 \left(\frac{dg}{dh} \right)_0 = \frac{h_1 a'' \varepsilon_0''}{4\varepsilon_0}, \quad (5.05)$$

где h_1 — масштаб высоты, а ε_0'' — значение второй производной от ε по высоте y поверхности земли.

При малых β_0 и конечных y и t в качестве приближенного решения уравнения (3.06) можно взять функцию

$$f(y, t) = w(t - y) - \frac{\beta_0}{15} [(3y + 2t)w(t - y) + (3y^2 + 4yt + 8t^2)w'(t - y)]. \quad (5.06)$$

Подставляя это выражение в (5.03), получим для искомого корня приближенное выражение

$$t_n = t_n^0 + \frac{\beta_0}{15} \left[8(t_n^0)^2 - \frac{3 + 4t_n^0 q}{t_n^0 - q^2} \right], \quad (5.07)$$

где t_n^0 — корень уравнения

$$w'(t_n^0) - qw(t_n^0) = 0, \quad (5.08)$$

подробно исследованного в главе 10 и в работе [22]. Для функции $D(t)$ получается выражение

$$D(t) = (t - q^2) \left(1 - \frac{4}{3} \beta_0 t \right) + \frac{2}{3} \beta_0 q. \quad (5.09)$$

Входящие в формулу (5.01) высотные множители

$$f_n(y) = \frac{f(y, t_n)}{f(0, t_n)} \quad (5.10)$$

можно получить численным интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f_n}{dy^2} + [y - t_n + yg(\beta y)] f_n = 0 \quad (5.11)$$

при начальных условиях

$$f_n(0) = 1 \text{ и } f'_n(0) = -q. \quad (5.12)$$

Пока y конечно (тогда как x может быть и велико), получаемые по такому способу значения $V(x, y, q)$ будут, при малых β , мало отличаться от значений для $\beta = 0$. Более или менее существенное различие может проявиться только в экспоненциальных множителях e^{ixt_n} , дающих затухание и добавочную фазу. Поэтому поправку достаточно вводить в эти экспоненциальные множители.

Если же особой точности не требуется, можно пренебречь и этой поправкой и просто считать, что в рассматриваемом случае выражение для $V(x, y, q)$ совпадает с выведенным для случая однородной атмосферы (при условии замены геометрического радиуса Земли эквивалентным радиусом). Тогда можно пользоваться всеми формулами и таблицами, полученными для этого случая.

6. Исследование решения для области полутени (большие x и y)

Наибольший практический интерес представляет случай, когда x и y весьма велики, величина же

$$\rho = \frac{1}{2} \int_0^y \frac{du}{\sqrt{u + ug(\beta u)}} - x \quad (6.01)$$

конечна. Мы уже указывали, что значение $\rho = 0$ соответствует границе прямой видимости, причем положительные значения ρ соответствуют области прямой видимости, а отрицательные значения ρ — области за горизонтом.

В этом случае при вычислении интеграла (4.01) для $V(x, y, q)$ нужно иметь в виду, что главный участок интегрирования будет соответствовать конечным значениям t , тогда как y будет велико. Поэтому нужно составить для $f(y, t)$ такое аналитическое выражение, которое было бы справедливо как при весьма больших, так и при конечных значениях $y - t$. Это оказывается возможным при условии малости β .

Действительно, введем величину X , определяемую равенством

$$\frac{2}{3}(-X)^{3/2} = \int_{\tau}^y \sqrt{u-t+ug(\beta u)} du \quad (6.02)$$

или

$$\frac{2}{3}X^{3/2} = \int_y^{\tau} \sqrt{t-u-ug(\beta u)} du, \quad (6.03)$$

где τ — корень уравнения

$$\tau - t + \tau g(\beta \tau) = 0. \quad (6.04)$$

При малых β_0 и конечных y и t

$$X = t - y - \frac{\beta_0}{15}(3y^2 + 4ty + 8t^2). \quad (6.05)$$

Тогда функция

$$f(y, t) = \sqrt{-\frac{dy}{dX}} \omega(X) \quad (6.06)$$

будет представлять решение уравнения (3.06) с погрешностью порядка β^2 при конечных y и t и порядка $\beta^{3/2}$ при больших y и конечных t . При помощи выражения (6.05) нетрудно проверить, что в разложении (6.06) по степеням β_0 члены порядка до β_0 включительно совпадают с (5.06). Однако выражение (6.06) справедливо и тогда, когда (при больших y) разложение (5.06) неприменимо. Если величина X весьма велика и отрицательна (что будет при больших y), то выражение (6.06) приводится к следующему:

$$f(y, t) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{y-t+ug(\beta y)}} \exp \left[i \int_{\tau}^y \sqrt{u-t+ug(\beta u)} du \right]. \quad (6.07)$$

Последнее совпадает с (3.07), если там положить $C = 1$ и взять в качестве τ корень уравнения (6.04). Таким образом, при помощи формулы (6.06) мы убедились, что *одно и то же* решение уравнения (3.06) имеет при конечных y выражение (5.06), а при больших y — выражение (6.07).

Мы можем теперь пользоваться при вычислении интеграла

$$V(x, y, q) = e^{i \frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_{\Gamma} e^{ixt} \frac{f(y, t)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} + qf\right)_0} dt \quad (6.08)$$

обоими выражениями (5.06) и (6.07) одновременно, а именно подставлять в числитель выражение (6.07) и в знаменатель — выражение (5.06). При этом можно оба выражения несколько упростить. Отбрасывая малые поправки, мы будем писать вместо (5.06) просто

$$f(y, t) = \omega(t - y). \quad (6.09)$$

В формуле же (6.07) в множителе перед показательной функцией пренебрежем величиной t по сравнению с y , а показатель заменим приближенным выражением

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^y \sqrt{u - t + ug(\beta u)} du = \\ & = \int_0^y \sqrt{u + ug(\beta u)} du - \frac{1}{2} t \int_0^y \frac{du}{\sqrt{u + ug(\beta u)}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Пользуясь обозначениями (4.18) и (4.20), мы можем написать

$$f(y, t) = \sqrt{2 \frac{\partial p}{\partial y}} e^{i \frac{\pi}{4}} e^{i\omega_0 y - it(x+p)}. \quad (6.11)$$

В конечном счете мы заменяем функцию $f(y, t)$ в знаменателе функцией Эйри, а в числителе — показательной функцией.

Подставляя (6.09) и (6.11) в интеграл (6.08), получим

$$V(x, y, q) = e^{i\omega_0(y)} \sqrt{2x \frac{\partial p}{\partial y}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{-ipt} \frac{dt}{\omega'(t) - q\omega(t)}. \quad (6.12)$$

Остающийся интеграл можно считать известной функцией. В главе 10 [формула (6.20)] он обозначен через

$$V_1(-p, q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{-ipt} \frac{dt}{\omega'(t) - q\omega(t)} \quad (6.13)$$

и подробно исследован. Для случаев $q = 0$ и $q = \sqrt{i}$ интеграл V_1 табулирован.*

Формула (6.12) дает множитель ослабления для области, близкой к горизонту. Интересно сравнить эту формулу с форму-

* Таблицы для $q = 0$ приведены в добавлении 3.

лой (4.09), справедливой в области применимости геометрической оптики. Пользуясь (4.19), напишем выражение (4.09) в виде

$$V = e^{i\omega_0(y)} \sqrt{2x \frac{\partial p}{\partial y} \frac{2p}{p - iq}} e^{\frac{i}{3} p^3}. \quad (6.14)$$

Но в главе 10 показано, что функция (6.13) имеет при больших положительных p асимптотическое выражение

$$V_1(-p, q) = \frac{2p}{p - iq} e^{\frac{i}{3} p^3} \quad (6.15)$$

[формула (6.24) главы 10]. Таким образом, наша формула (6.12) переходит в области прямой видимости в формулу геометрической оптики.

При отрицательных p выражение для $V_1(-p, q)$ может быть написано в виде

$$V_1(-p, q) = i2\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-i\rho t_n}}{(t_n - q^2)\omega(t_n)}. \quad (6.16)$$

Когда $|p|$ велико ($p < 0$), этот ряд сводится к первому члену, который дает затухание волны в области тени по показательному закону.

Функция $V_1(-p, q)$ была впервые введена в наших работах, посвященных дифракции от тела произвольной формы (см. главы 1, 2 и 5). В этих работах был установлен принцип локального поля в области полутени и было показано, что в этой области поле выражается через функцию $V_1(-p, q)$, имеющую универсальный характер.

Сравнение формул (6.12) и (6.14) позволяет в известном смысле сказать, что волна доходит до горизонта с амплитудой и фазой, соответствующей законам геометрической оптики, а на горизонте претерпевает дифракцию по закону локального поля в области полутени.

Такая картина находится в полном соответствии с идеями Л. И. Мандельштама о том, что при распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли свойства почвы существенны не вдоль всей траектории луча, а лишь в той области, где расположен находящийся на земле передатчик или приемник («взлетная» или «посадочная» площадка).

Если принять эту картину, то полученное в этом параграфе решение можно применять и к тому случаю, когда свойства земной поверхности на разных участках не одинаковы, при условии, что в функции $V_1(-p, q)$ комплексный параметр q соответствует свойствам почвы в той области, где луч касается земли.

ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ ДЛЯ ПРИПОДНЯТОГО ИСТОЧНИКА*

Развитая в предыдущих главах теория распространения радиоволн обобщается на случай приподнятого диполя в неоднородной (слоистой) атмосфере, причем рассматривается как нормальная рефракция, так и сверхрефракция.

В начале главы выписываются основные уравнения и предельные условия задачи. Затем рассматривается приближенная форма уравнений (параболическое уравнение Леоновича) с соответствующими предельными условиями и условиями, определяющими особенность. Далее проводится аналогия между сформулированной задачей и нестационарной задачей квантовой механики. После перехода к безразмерным величинам изучаются свойства частных решений дифференциального уравнения, из которых строится общее решение в виде контурного интеграла и в виде ряда. Общая теория применяется к случаю сверхрефракции и рассматривается схематический пример. В заключение выводятся приближенные формулы для определения коэффициентов затухания и высотных множителей. Эти формулы аналогичны полуклассическим формулам квантовой механики.

Введение

Теория распространения радиоволн в атмосфере с диэлектрической постоянной, зависящей от высоты, была разработана нами в главе 13 для случая, когда источником является вертикальный электрический диполь, расположенный на поверхности земли. С другой стороны, случай приподнятого источника (горизонтальный и вертикальный, электрический и магнитный диполи) рассматривался нами в главе 12 в предположении однородной атмосферы. В настоящей главе изучается «комбинированный» случай: приподнятый диполь и неоднородная атмосфера.

Формулы, выведенные в главе 13 для общего случая произвольного хода показателя преломления, были там более подробно развиты в предположении нормальной рефракции, когда распро-

* Фок, 1950.

странение радиоволн имеет качественно тот же характер, как и в однородной атмосфере. Случай сверхрефракции, когда нижний слой атмосферы приобретает характер волновода, представляет самостоятельный интерес и заслуживает особого рассмотрения. В настоящей главе мы рассматриваем этот случай подробнее. Для качественной его характеристики весьма полезной оказывается аналогия с нестационарной задачей квантовой механики о расплывании волнового пакета в заданном поле сил: аналогия эта, по-видимому, оставалась до сих пор незамеченной.

1. Основные уравнения и предельные условия

Обозначим через r , ϑ , φ сферические координаты с началом в центре земного шара и с полярной осью, проходящей через излучающий диполь. Радиус Земли обозначим через a . Диполь мы предположим находящимся на высоте $h' = b - a$ над поверхностью земли, так что его координаты будут $r = b$, $\vartheta = 0$. Диэлектрическую постоянную воздуха ϵ мы будем считать функцией от высоты $h = r - a$ над поверхностью земли.

Поле в воздухе может быть выражено по известным формулам через потенциалы Дебая u , v .

Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{r} \Delta^* u, \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{\epsilon r} \frac{\partial^2 (\epsilon r u)}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{i\omega}{c \sin \vartheta} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi &= -\frac{1}{\epsilon r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 (\epsilon r u)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{i\omega}{c} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}; \end{aligned} \right\} \quad (1.01)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -\frac{1}{r} \Delta^* v, \\ H_\vartheta &= \frac{i\omega}{c} \frac{\epsilon}{\sin \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v)}{\partial r \partial \vartheta}, \\ H_\varphi &= -\frac{i\omega}{c} \epsilon \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 (r v)}{\partial r \partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.02)$$

Те же выражения применимы и для поля ниже поверхности земли, если под ϵ разуметь комплексную диэлектрическую постоянную почвы. Зависимость от времени предполагается здесь в форме множителя $e^{-i\omega t}$. Символ Δ^* означает оператор Лапласа на шаре:

$$\Delta^* u = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (1.03)$$

Уравнения Максвелла будут удовлетворяться, если функции u и v удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (\varepsilon u)}{\partial r} \right) + \frac{\Delta^* u}{r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon u = 0 \quad (1.04)$$

и

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2} + \frac{\Delta^* v}{r^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon v = 0. \quad (1.05)$$

Непрерывность касательных составляющих поля будет обеспечена, если будут непрерывны величины

$$\varepsilon u, \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (\varepsilon u)}{\partial r}, \quad rv, \quad \frac{\partial (rv)}{\partial r}. \quad (1.06)$$

Отсюда, путем известных рассуждений, получается приближенная форма предельных условий (условия Леонтовича). Если мы положим $k = \frac{\omega}{c}$, обозначим комплексную диэлектрическую постоянную почвы через η , а обозначение ε сохраним для диэлектрической постоянной воздуха, то мы будем иметь

$$\frac{\partial (\varepsilon u)}{\partial r} = -ik \frac{\varepsilon}{\sqrt{\eta}} (\varepsilon u) \quad (\text{при } r = a) \quad (1.07)$$

и

$$\frac{\partial (rv)}{\partial r} = -ik \sqrt{\eta} (rv) \quad (\text{при } r = a). \quad (1.08)$$

В дальнейшем поле, для которого $u \neq 0$, $v = 0$, мы будем называть вертикально поляризованным, а поле, для которого $u = 0$, $v \neq 0$, — горизонтально поляризованным. Поле вертикального электрического диполя остается, в этом смысле, вертикально поляризованным во всем пространстве. Поле вертикального магнитного диполя (горизонтальной рамки) обладает везде горизонтальной поляризацией. Горизонтальный же электрический диполь возбуждает поля обоого вида: как горизонтально, так и вертикально поляризованное. В случае однородной атмосферы вертикально поляризованное поле убывает с возрастанием расстояния медленнее, чем горизонтально поляризованное (см. главу 12). Поэтому поле от горизонтального электрического диполя на небольших расстояниях от источника будет обладать преимущественно горизонтальной поляризацией, а на больших расстояниях (в области далеко за горизонтом) поляризация будет преимущественно вертикальной.

Вертикально поляризованное поле может быть выражено через функцию U (функция Герца вертикального электрического

диполя), обладающую следующими свойствами: функция U удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (1.04) и тем же предельным условиям (1.07), что и u , и имеет вблизи источника особенность вида

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} + U^*, \quad (1.09)$$

где U^* остается конечным. Величины R и k имеют значения

$$R = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \vartheta}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.10)$$

Аналогично, горизонтально поляризованное поле может быть выражено через функцию W (функция Герца вертикального магнитного диполя), которая удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (1.05) и тем же предельным условиям (1.08), что и v , и имеет вблизи источника особенность вида

$$W = \frac{e^{ikR}}{R} + W^*, \quad (1.11)$$

где W^* остается конечным.

Поля от вертикального и горизонтального электрического и магнитного диполей с моментом M выражаются через определенные выше функции U и W .

Для вертикального электрического диполя мы должны положить

$$u = \frac{M}{b} U, \quad v = 0. \quad (1.12)$$

Для вертикального магнитного диполя (горизонтальной рамки) мы имеем:

$$u = 0, \quad v = \frac{M}{b} W. \quad (1.13)$$

Для горизонтального электрического диполя, направленного по оси x , входящие в формулы (1.01) и (1.02) функции u и v определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta^* u &= -M \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial U}{\partial b} + \frac{U}{b} \right) \cos \varphi \\ \text{и} \quad \Delta^* v &= -ikM \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

где Δ^* — оператор Лапласа на шаре (1.03).

Наконец, для горизонтального магнитного диполя, направленного по оси x , мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta^* u &= -ikM \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \sin \varphi \\ \Delta^* v &= M \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial W}{\partial b} + \frac{W}{b} \right) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Таким образом, во всех четырех случаях изучение поля сводится к изучению функций U и W .

2. Приближенная форма уравнений

Переходя к приближенной форме уравнений, обозначим через ε_1 значение диэлектрической постоянной воздуха вблизи источника (практически можно положить $\varepsilon_1 = 1$) и положим

$$s = a\vartheta, \quad (2.01)$$

так что s — горизонтальное расстояние между источником и точкой наблюдения, считаемое по дуге.

Введем вместо U и W медленно меняющиеся функции U_2 и W_2 , положив

$$U = \frac{\varepsilon_1 e^{iks}}{\varepsilon r \sqrt{\sin \vartheta}} U_2 \quad (2.02)$$

и

$$W = \frac{e^{iks}}{r \sqrt{\sin \vartheta}} W_2. \quad (2.03)$$

Как показано в главе 13, после пренебрежения малыми величинами уравнение для U_2 принимает вид

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial h^2} + 2ik \frac{\partial U_2}{\partial s} + k^2 \left(\varepsilon - 1 + \frac{2h}{a} \right) U_2 = 0. \quad (2.04)$$

За независимые переменные здесь приняты вместо r и ϑ величины h (высота) и s (горизонтальное расстояние). Уравнение для W_2 в нашем приближении будет иметь тот же вид, а именно

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial h^2} + 2ik \frac{\partial W_2}{\partial s} + k^2 \left(\varepsilon - 1 + \frac{2h}{a} \right) W_2 = 0. \quad (2.05)$$

Уравнения (2.04) и (2.05) мы будем называть параболическими уравнениями Леонтовича.

При составлении предельных условий на поверхности земли ($h = 0$) мы можем пренебречь различием между диэлектрической постоянной воздуха и единицей.

С другой стороны, можем несколько уточнить эти условия, пользуясь нашими результатами, полученными по методу сум-

мирования рядов (см. главы 12 и 6). Это уточнение сводится к тому, что в (1.07) мы заменяем η на $\eta + 1$, а в (1.08) заменяем η на $\eta - 1$. В результате мы получим

$$\frac{\partial U_2}{\partial h} = -\frac{ik}{\sqrt{\eta+1}} U_2 \quad (\text{при } h=0) \quad (2.06)$$

и

$$\frac{\partial W_2}{\partial h} = -ik\sqrt{\eta-1} W_2 \quad (\text{при } h=0). \quad (2.07)$$

Далее мы должны сформулировать требование, чтобы в области вблизи источника, где можно пренебречь кривизной земной поверхности и кривизной луча, имела место отражательная формула для плоской земли. Если высота источника над землей есть $h' = b - a$, то это требование означает, что в указанной области должно быть

$$U_2 = \sqrt{\frac{a}{s}} \left\{ e^{i \frac{k(h-h')^2}{2s}} + e^{i \frac{k(h+h')^2}{2s}} \frac{h+h' - \frac{s}{\sqrt{\eta+1}}}{h+h' + \frac{s}{\sqrt{\eta+1}}} \right\} \quad (2.08)$$

и

$$W_2 = \sqrt{\frac{a}{s}} \left\{ e^{i \frac{k(h-h')^2}{2s}} + e^{i \frac{k(h+h')^2}{2s}} \frac{h+h' - s\sqrt{\eta-1}}{h+h' + s\sqrt{\eta-1}} \right\}. \quad (2.09)$$

Множители при второй показательной функции представляют приближенные значения коэффициентов Френеля для вертикальной и для горизонтальной поляризации. Последние две формулы являются обобщением формулы (1.28) главы 13.

Заметим, что выражения (2.08) и (2.09) сами приближенно удовлетворяют предельным условиям (2.06) и (2.07).

В случае поля над абсолютно проводящей поверхностью ($\eta = \infty$) предельные условия (2.06) и (2.07) принимают вид

$$\frac{\partial U_2}{\partial h} = 0 \quad (\text{при } h=0) \quad (2.10)$$

и

$$W_2 = 0 \quad (\text{при } h=0), \quad (2.11)$$

а отражательные формулы напишутся в виде

$$U_2 = \sqrt{\frac{a}{s}} \left\{ e^{i \frac{k(h-h')^2}{2s}} + e^{i \frac{k(h+h')^2}{2s}} \right\} \quad (2.12)$$

и

$$W_2 = \sqrt{\frac{a}{s}} \left\{ e^{i \frac{k(h-h')^2}{2s}} - e^{i \frac{k(h+h')^2}{2s}} \right\}. \quad (2.13)$$

3. Аналогия с нестационарной задачей квантовой механики

Сформулированная в предыдущем параграфе задача о распространении волны в сферическом слое с переменным показателем преломления представляет аналогию с квантово-механической задачей о движении волнового пакета в заданном силовом поле.

Напишем уравнение Шредингера для движения частицы массы m_0 в силовом поле с потенциальной энергией Φ . Обозначая через x координату частицы, через t — время, через \hbar — деленную на 2π постоянную Планка, будем иметь

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2i \frac{m_0}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{2m_0}{\hbar^2} \Phi \psi = 0. \quad (3.01)$$

Сравнивая уравнение Шредингера (3.01) с уравнением Леонтовича (2.04) или (2.05) для U_2 и для W_2 , мы видим, что эти уравнения имеют один и тот же вид, причем координата x пропорциональна высоте h , время t пропорционально горизонтальному расстоянию z и потенциальная энергия Φ пропорциональна взятой с обратным знаком величине $\epsilon - 1 + \frac{2h}{a}$, которая отличается от так называемого приведенного (или модифицированного) показателя преломления

$$M = 10^6 \left(\frac{\epsilon - 1}{2} + \frac{h}{a} \right) = 10^6 \left(n - 1 + \frac{h}{a} \right) \quad (3.02)$$

лишь постоянным множителем.

Таким образом, параболическое уравнение Леонтовича для амплитуды стационарного процесса совпадает по форме с нестационарным уравнением Шредингера.

Сходство между обеими задачами не ограничивается совпадением дифференциальных уравнений, а распространяется и на предельные и «начальные» условия.

Рассматриваемому в квантовой механике случаю самосопряженных дифференциальных уравнений и предельных условий соответствует в электромагнитной задаче случай отсутствия поглощения в воздухе и в земле, т. е. тот случай, когда показатель преломления воздуха веществен, а земля — абсолютный проводник. Этот случай представляет наибольший интерес и для задачи о сверхрефракции. Впрочем, квантово-механические методы могут быть обобщены и на случай наличия поглощения.

Если земля — абсолютный проводник, то предельные условия для U_2 и для W_2 принимают вид (2.10) и (2.11), и им соответствуют в квантово-механической задаче условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{при } x = 0) \quad (3.03)$$

или

$$\psi = 0 \quad (\text{при } x = 0). \quad (3.04)$$

Что же касается начальных условий, то самый общий вид их состоит в задании начального значения волновой функции

$$\psi = \psi_0(x) \quad (\text{при } t = 0, 0 < x < \infty). \quad (3.05)$$

Функцию ψ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению, начальным и предельным условиям, можно искать в виде

$$\psi(x, t) = \int_0^{\infty} F(x, x', t) \psi_0(x') dx'. \quad (3.06)$$

Функция F должна при всяком x' удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2i \frac{m_0}{\hbar} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{2m_0}{\hbar^2} \Phi F = 0 \quad (3.07)$$

и предельному условию вида (3.03) или (3.04) (тому же, как ψ). Для того чтобы выражение (3.06) при $t = 0$ приводилось к $\psi_0(x)$, функция F должна при $t \rightarrow 0$ иметь особенность, характер которой связан с предельным условием. В случае условия

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (\text{при } x = 0) \quad (3.08)$$

особенность F должна быть вида

$$F(x, x', t) = e^{-i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi\hbar t}} \left(e^{i \frac{m_0(x-x')^2}{2\hbar t}} + e^{i \frac{m_0(x+x')^2}{2\hbar t}} \right). \quad (3.09)$$

В случае же условия

$$F = 0 \quad (\text{при } x = 0) \quad (3.10)$$

особенность F должна быть вида

$$F(x, x', t) = e^{-i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi\hbar t}} \left(e^{i \frac{m_0(x-x')^2}{2\hbar t}} - e^{i \frac{m_0(x+x')^2}{2\hbar t}} \right). \quad (3.11)$$

Сравнивая эти формулы с (2.12) и (2.13), мы видим, что для соответственных предельных условий особенность F в точности совпадает с особенностями U_2 и W_2 . Действительно, приравнивая высоту h координате x , мы должны положить

$$h = x; \quad h' = x', \quad \frac{s}{k} = \frac{\hbar t}{m_0}. \quad (3.12)$$

Выражая F через переменные h, h', s , мы будем иметь для предельного условия (3.08)

$$F = F_2(h, h', s), \quad (3.13)$$

где F_2 удовлетворяет тому же уравнению, что и U_2 , предельному условию

$$\frac{\partial F_2}{\partial h} = 0 \quad (\text{при } h = 0) \quad (3.14)$$

и имеет особенность

$$F_2(h, h', s) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi s}} \left(e^{i\frac{k(h-h')^2}{2s}} + e^{i\frac{k(h+h')^2}{2s}} \right). \quad (3.15)$$

Для предельного условия (3.10) мы полагаем

$$F = G_2(h, h', s), \quad (3.16)$$

где G_2 удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и W_2 , предельному условию

$$G_2 = 0 \quad (\text{при } h = 0) \quad (3.17)$$

и имеет особенность

$$G_2(h, h', s) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi s}} \left(e^{i\frac{k(h-h')^2}{2s}} - e^{i\frac{k(h+h')^2}{2s}} \right). \quad (3.18)$$

Мы видим, что F_2 отличается только постоянным множителем от U_2 , а G_2 — от W_2 , а именно мы имеем:

$$U_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi a}} F_2 \quad (3.19)$$

и

$$W_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi a}} G_2. \quad (3.20)$$

Если мы обозначим через $f(h, s)$ функцию, удовлетворяющую тому же уравнению и тем же предельным условиям, что и U_2 , и принимающую при $s = 0$ значение

$$f(h, s) = f_0(h) \quad (\text{при } s = 0), \quad (3.21)$$

то на основании (3.19) мы можем написать

$$f(h, s) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi a}} \int_0^\infty U_2(h, h', s) f_0(h') dh'. \quad (3.22)$$

Аналогично, если $f(h, s)$ удовлетворяет тем же предельным условиям, что и W_2 , будет

$$f(h, s) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi a}} \int_0^\infty W_2(h, h', s) f_0(h') dh'. \quad (3.23)$$

Последние две формулы справедливы не только для предельных условий, соответствующих абсолютно проводящей земле (когда имеется аналогия с квантовой механикой), но и для более общих предельных условий (2.06) и (2.07), причем тогда особенности U_2 и W_2 даются формулами (2.08) и (2.09).

Если функция $f_0(h)$ отлична от нуля только в области точки $h = h'$, причем интеграл от f_0 по этой области есть величина конечная, то $f(h, s)$ будет, при не слишком малых s , пропорциональна U_2 или соответственно W_2 . Таким образом, функции U_2 и W_2 соответствуют точечному источнику, расположенному на высоте h' , как это и должно быть.

На языке квантовой механики можно сказать, что функция ψ , пропорциональная U_2 или W_2 , представляет решение задачи о расплывании волнового пакета, первоначально сосредоточенного в окрестностях одной точки.

Из квантовой механики известно, что быстрота расплывания существенным образом зависит от вида потенциальной энергии. Представим себе, что движение частицы ограничено с одной стороны непроницаемой стенкой. Если потенциальная энергия такова, что сила все время направлена от стенки, то расплывание происходит быстро. Если же сила удерживает частицы в некоторой области, где потенциальная энергия имеет минимум, или вблизи стенки, то расплывание происходит медленно или не происходит вовсе. В этом случае уравнение Шредингера допускает решения, соответствующие стационарным или почти стационарным состояниям.

Волновая функция почти стационарного состояния в начальный момент времени отлична от нуля только в области минимума потенциальной энергии. С течением времени амплитуда волновой функции в этой области убывает и происходит распад начального почти стационарного состояния. Убывание амплитуды происходит по показательному закону, и быстрота распада характеризуется коэффициентом в показателе, который носит название постоянной распада.

Если начальная волновая функция сама не является волновой функцией почти стационарного состояния, то в разложении ее можно выделить член, соответствующий почти стационарному состоянию, и для больших значений времени этот член будет главным.

В нашей электромагнитной задаче горизонтальное расстояние s играет роль времени t квантово-механической задачи. Расплыванию волнового пакета соответствует убывание амплитуды поля с увеличением горизонтального расстояния. Роль стенки играет земная поверхность $h = 0$. Стенка будет непроницаемой, если земля представляет собой абсолютный проводник; при конечной проводимости стенка будет поглощающей и убывание амплитуды

будет происходить не только в результате просачивания волны в верхние слои атмосферы, но и в результате поглощения ее землей. Роль потенциальной энергии играет, как мы видели, взятый с обратным знаком приведенный показатель преломления M . Ход приведенного показателя преломления в зависимости от высоты показан схематически на рис. 1.

Сплошной кривой показан ход M при наличии сверхрефракции. Пунктирное продолжение прямолинейной части кривой соответ-

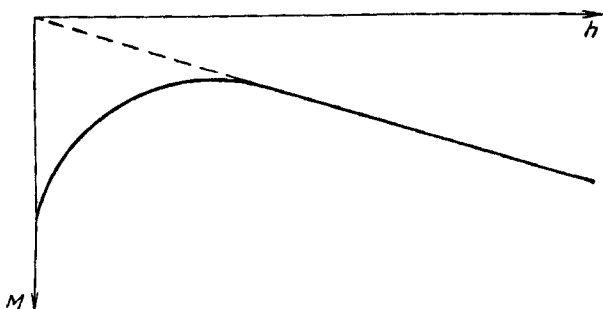


Рис. 1. Приведенный показатель преломления при сверхрефракции.

ствует тому случаю, когда сверхрефракции нет и можно ввести «эквивалентный радиус» Земли, пропорциональный угловому коэффициенту прямой по отношению к оси M .

Если рассматривать кривую рис. 1 как кривую потенциальной энергии, то будет ясно, что характерное для сверхрефракции наличие максимума для $(-M)$ (минимума для M) является необходимым условием существования почти стационарных состояний. Действительно, если обозначить через h_m высоту, соответствующую максимуму потенциальной энергии, то в области $h < h_m$ сила будет как бы прижимать волновой пакет к стенке и не давать ему уходить в область $h > h_m$.

Но в нашей электромагнитной задаче наличие почти стационарного состояния означает такое распространение волны, в котором ее амплитуда убывает с увеличением расстояния аномально медленно, так что коэффициент затухания ее (соответствующий постоянной распаду) аномально мал. Отсюда следует, что условие существования почти стационарных состояний — это условие возможности сверхдальнего распространения радиоволн.

Приведенная здесь аналогия с квантовой механикой позволяет составить качественную картину явления сверхдальнего распространения радиоволн. Эта аналогия полезна и тем, что на ее основе некоторые, применяемые в квантовой механике, математические методы могут быть перенесены в область радиофизики. С другой

стороны, разработанные нами методы решения задачи о распространении радиоволн могут найти применение и в квантовой механике *. Впрочем, эти вопросы выходят из рамок настоящей книги.

4. Переход к безразмерным величинам

Вернемся к решению задачи, сформулированной в параграфе 2. Нам нужно определить функции U_2 и W_2 , удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (2.04) и (2.05), предельным условиям (2.06) и (2.07) и условиям (2.08) и (2.09), характеризующим особенность. Задача эта была решена нами ранее для двух случаев: а) неоднородная атмосфера, источник на земле и б) однородная атмосфера, источник приподнят. Мы теперь покажем, что задачу эту можно решить и для общего случая неоднородной атмосферы и приподнятого источника.

Перейдем в наших уравнениях к безразмерным величинам, использованным в предыдущих главах. Для этого рассмотрим коэффициент при U_2 в уравнении (2.04). Этот коэффициент пропорционален величине

$$\frac{\varepsilon - 1}{2} + \frac{h}{a} = 10^{-6}M(h), \quad (4.01)$$

где $M(h)$ — «модифицированный» показатель преломления.

Мы предположим, что, начиная с некоторой высоты $h = H$, эту величину можно аппроксимировать линейной функцией от h и положить

$$\frac{\varepsilon - 1}{2} + \frac{h}{a} = \alpha + \frac{h}{a^*}, \quad (4.02)$$

где a^* — так называемый эквивалентный радиус Земли и α — некоторая малая постоянная (например, $\alpha < 0,0005$).

В простейшем случае можно считать, что при $h > H$ (где H — некоторая высота) будет $\varepsilon = 1$; тогда нужно положить $\alpha = 0$ и $a^* = a$.

В той области, где справедлива формула (4.02), уравнение для U_2 принимает вид

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial h^2} + 2ik \frac{\partial U_2}{\partial s} + k^2 \left(2\alpha + \frac{2h}{a^*} \right) U_2 = 0. \quad (4.03)$$

* Так, современная теория комплексного момента количества движения непосредственно связана с нашими методами суммирования рядов, основанными на интегрировании в плоскости комплексной переменной v (глава 10). (Примечание, внесенное в настоящее издание.)

Чтобы избавиться от величины α в последнем члене, произведем в нем подстановку

$$U_2 = C e^{i\alpha ks} \Psi, \quad (4.04)$$

где C — постоянная, которой мы распорядимся в дальнейшем.

Тогда уравнение (4.03) приведет к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial h^2} + 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial s} + k^2 \frac{2h}{a^*} \Psi = 0. \quad (4.05)$$

Введем сокращенное обозначение

$$m = \left(\frac{ka^*}{2} \right)^{1/3} \quad (4.06)$$

и положим

$$ks = 2m^2 x, \quad kh = my, \quad kh' = my'. \quad (4.07)$$

Тогда уравнение (4.05) напишется в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \Psi = 0. \quad (4.08)$$

Те же подстановки приводят более точное уравнение (2.04) к виду

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} + [y + r(y)] \Psi = 0, \quad (4.09)$$

где

$$r(y) = m^2 \left(\varepsilon - 1 + \frac{2h}{a} - 2\alpha - \frac{2h}{a^*} \right). \quad (4.10)$$

Величина $r(y)$ характеризует аномальный ход показателя преломления вблизи поверхности земли; начиная с некоторого значения y , величина $r(y)$ может быть положена равной нулю. Если считать, что $\alpha = 0$ и $a^* = a$, то

$$r(y) = m^2 (\varepsilon - 1). \quad (4.11)$$

Нам остается выразить в новых переменных предельные условия и условия, характеризующие особенность. Полагая

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta + 1}}, \quad (4.12)$$

будем иметь

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} + q \Psi = 0 \quad (\text{при } y = 0). \quad (4.13)$$

Постоянную C в уравнении (4.04) мы выберем так, чтобы уравнение, аналогичное (3.22), могло быть написано в виде

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} \Psi(x, y, y') f_0(y') dy'. \quad (4.14)$$

Тогда уравнение, определяющее особенность Ψ , принимает вид

$$\Psi = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi x}} \left\{ e^{i\frac{(y-y')^2}{4x}} + e^{i\frac{(y+y')^2}{4x}} \frac{y+y'+2iqx}{y+y'-2iqx} \right\}. \quad (4.15)$$

Из сравнения (2.08) с (4.15) получаем

$$C = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2\pi ka}}{m}. \quad (4.16)$$

Функция W_2 отличается от U_2 только тем, что в предельных условиях и в уравнении, определяющем особенность, величина $\frac{1}{\sqrt{\eta+1}}$ заменяется на $\sqrt{\eta-1}$. Это соответствует замене величины q на

$$q_1 = im\sqrt{\eta-1}. \quad (4.17)$$

Практически можно во всех случаях полагать $q_1 = \infty$.

Наряду с функцией Ψ мы будем рассматривать функцию

$$V(x, y, y', q) = 2\sqrt{\pi x} e^{i\frac{\pi}{4}} \Psi, \quad (4.18)$$

которую будем называть множителем ослабления. Величины U_2 и U выражаются через V следующим образом:

$$U_2 = e^{i\alpha ks} \sqrt{\frac{a}{s}} V \quad (4.19)$$

и

$$U = \frac{e^{i(1+\alpha)ks}}{\sqrt{sa \sin \frac{s}{a}}} V(x, y, y', q). \quad (4.20)$$

Функция W получается из (4.20) заменой q на q_1 .

5. Свойства частных решений дифференциального уравнения

Для построения функции Ψ , удовлетворяющей поставленным условиям, необходимо исследовать свойства частных решений уравнения (4.09), получаемых разделением переменных. Полагая

$$\Psi = e^{ixt} f(y, t), \quad (5.01)$$

получаем для $f(y, t)$ уравнение

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + [y + r(y) - t] f = 0. \quad (5.02)$$

Обозначим через $f^0(y, t)$ и $f^*(y, t)$ решения уравнения (5.02), удовлетворяющие начальным условиям

$$f^0(0, t) = 1, \quad \left(\frac{\partial f^0}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad (5.03)$$

и

$$f^*(0, t) = 0, \quad \left(\frac{\partial f^*}{\partial y}\right)_{y=0} = 1. \quad (5.04)$$

Общее решение уравнения (5.02) будет иметь вид

$$f(y, t) = A^0 f^0(y, t) + A^* f^*(y, t). \quad (5.05)$$

С другой стороны, если функция $r(y)$ с возрастанием y убывает достаточно быстро, то при вещественных t уравнение (5.02) будет иметь один интеграл (определенный с точностью до множителя, не зависящего от y), который ведет себя при больших y , как $\omega_1(t-y)$, и другой интеграл, который ведет себя, как $\omega_2(t-y)$, где ω_1 и ω_2 — комплексные функции Эйри, представляющие решения уравнения

$$\frac{d^2 \omega}{dy^2} + (y-t)\omega = 0, \quad (5.06)$$

получаемого из (5.02) заменой $r(y)$ нулем. Функции ω_1 и ω_2 имеют асимптотические выражения

$$\omega_1(t-y) = e^{i\frac{\pi}{4}}(y-t)^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{2}{3}(y-t)^{3/2}} \quad (5.07)$$

и

$$\omega_2(t-y) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(y-t)^{-\frac{1}{4}} e^{-i\frac{2}{3}(y-t)^{3/2}}. \quad (5.08)$$

Поэтому поведение общего интеграла уравнения (5.02) при $y \rightarrow \infty$ и вещественных t может характеризоваться постоянными C_1 и C_2 в выражении

$$f(y, t) = C_1 \omega_1(t-y) + C_2 \omega_2(t-y). \quad (5.09)$$

Установим связь между постоянными A^0 , A^* , C_1 и C_2 (которые могут быть функциями от параметра t).

В силу уравнений (5.02) и (5.06) имеем:

$$\frac{d}{dy} \left(\omega \frac{df}{dy} - f \frac{d\omega}{dy} \right) = -r(y) f \omega(t-y). \quad (5.10)$$

В этом равенстве мы можем положить последовательно $\omega = \omega_1$, затем $\omega = \omega_2$ и проинтегрировать его от 0 до ∞ . Вследствие соотношения

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \omega_2 - \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \omega_1 = 2i \quad (5.11)$$

будем иметь

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(w_2 \frac{df}{dy} - f \frac{dw_2}{dy} \right) = 2iC_1 \quad (5.12)$$

и

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(w_1 \frac{df}{dy} - f \frac{dw_1}{dy} \right) = -2iC_2, \quad (5.13)$$

и равенство (5.10) после интегрирования дает

$$2iC_1 = A^0 w_2'(t) + A^* w_2(t) - \int_0^{\infty} r(y) f(y, t) w_2(t-y) dy \quad (5.14)$$

и

$$-2iC_2 = A^0 w_1'(t) + A^* w_1(t) - \int_0^{\infty} r(y) f(y, t) w_1(t-y) dy. \quad (5.15)$$

Если здесь вместо $f(y, t)$ подставить выражение (5.05), мы получим искомую связь между постоянными A^0 , A^* , C_1 , C_2 в виде

$$2iC_1 = A^0 \left\{ w_2'(t) - \int_0^{\infty} r(y) f^0(y, t) w_2(t-y) dy \right\} + \\ + A^* \left\{ w_2(t) - \int_0^{\infty} r(y) f^*(y, t) w_2(t-y) dy \right\} \quad (5.16)$$

и

$$-2iC_2 = A^0 \left\{ w_1'(t) - \int_0^{\infty} r(y) f^0(y, t) w_1(t-y) dy \right\} + \\ + A^* \left\{ w_1(t) - \int_0^{\infty} r(y) f^*(y, t) w_1(t-y) dy \right\}. \quad (5.17)$$

Обратим теперь внимание на то, что коэффициенты при A^0 и A^* в этих уравнениях являются целыми трансцендентными функциями от параметра t . Действительно, функции f^0 , f^* , w_1 , w_2 являются целыми функциями от t , интегрирование же производится фактически в конечных пределах, так как $r(y)$ можно положить равным нулю, начиная с некоторого y . (То же заключение будет справедливо и без этого ограничения для $r(y)$, если только $r(y)$ достаточно быстро убывает на бесконечности.)

Отсюда следует, что если постоянные A^0 и A^* будут целыми трансцендентными функциями от t , то тот же характер будут иметь постоянные C_1 и C_2 . Это позволяет нам применять уравнения (5.16) и (5.17), выведенные для случая вещественных t , также и в случае произвольных комплексных значений t .

Если мы положим

$$A^0 = A_1^0(t) \equiv \omega_1(t) - \int_0^\infty r(y) f^*(y, t) \omega_1(t-y) dy \quad (5.18)$$

и

$$A^* = A_1^*(t) \equiv -\omega_1'(t) + \int_0^\infty r(y) f^0(y, t) \omega_1(t-y) dy, \quad (5.19)$$

то выражение

$$f_1(y, t) = A_1^0(t) f^0(y, t) + A_1^*(t) f^*(y, t) \quad (5.20)$$

будет таким решением уравнения (5.02), которое ведет себя при $y \rightarrow \infty$, как $\omega_1(t-y)$, и представляет в то же время целую трансцендентную функцию от t . Аналогично, если мы положим

$$A^0 = A_2^0(t) \equiv \omega_2(t) - \int_0^\infty r(y) f^*(y, t) \omega_2(t-y) dy \quad (5.21)$$

и

$$A^* = A_2^*(t) \equiv -\omega_2'(t) + \int_0^\infty r(y) f^0(y, t) \omega_2(t-y) dy, \quad (5.22)$$

то выражение

$$f_2(y, t) = A_2^0(t) f^0(y, t) + A_2^*(t) f^*(y, t) \quad (5.23)$$

будет вести себя при $y \rightarrow \infty$, как $\omega_2(t-y)$, и будет целой функцией от t .

Интеграл $f_1(y, t)$ будет иметь асимптотическое выражение

$$f_1(y, t) = \frac{c' e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{y-t+r(y)}} \exp \left[i \int_{\frac{t}{\tau}}^y \sqrt{u-t+r(u)} du \right], \quad (5.24)$$

а интеграл $f_2(y, t)$ будет иметь асимптотическое выражение

$$f_2(y, t) = \frac{c'' e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{y-t+r(y)}} \exp \left[-i \int_{\frac{t}{\tau}}^y \sqrt{u-t+r(u)} du \right], \quad (5.25)$$

где c' , c'' , τ — постоянные.

Если положить $r(y) = 0$, $\tau = t$, $c' = c'' = 1$, то формулы (5.24) и (5.25) перейдут в асимптотические выражения (5.07) и (5.08) для ω_1 и ω_2 .

Интегралом $f_1(y, t)$ мы уже пользовались в главе 13, где, однако, было принято без доказательства, что существует такой интеграл, который допускает асимптотическое представление (5.24) и является вместе с тем целой трансцендентной функцией от t .

Формулы (5.18)—(5.23), выведенные в ходе доказательства этого утверждения, могут быть использованы также для фактического (численного) построения этого интеграла.

Функция $f_1(y, t)$ при комплексных t будет возрастать при возрастании y , а интеграл от квадрата $f_1(y, t)$, взятый по y от 0 до ∞ , будет расходящимся. Однако при некоторых предположениях о поведении $r(y)$ в комплексной плоскости, функция $f_1(y, t)$ будет вести себя при комплексных y , как $w_1(t - y)$, и будет стремиться к нулю на луче $y = re^{i\alpha}$ (где $\alpha = \frac{\pi}{3}$), так что интеграл

$$I = \int_0^{\infty e^{i\alpha}} f_1^2(y, t) dy \quad (5.26)$$

будет уже сходиться. Вычислим значение этого интеграла. Дифференцируя уравнение (5.02) по t , получим

$$\frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) + [y + r(y) - t] \frac{\partial f}{\partial t} = f. \quad (5.27)$$

Отсюда и из (5.02) получаем соотношение

$$\left(f \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_0^y = \int_0^y f^2 dy. \quad (5.28)$$

Полагая здесь $f = f_1(y, t)$ и считая верхний предел интегрирования равным $\infty e^{i\alpha}$, будем иметь

$$\int_0^{\infty e^{i\alpha}} f_1^2(y, t) dy = - \left(f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)_0. \quad (5.29)$$

6. Построение решения в виде контурного интеграла и в виде ряда

В предыдущем параграфе мы установили существование двух интегралов обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + [y + r(y) - t] f = 0, \quad (6.01)$$

которые являются целыми трансцендентными функциями от параметра t и имеют асимптотические выражения (5.24) и (5.25). Интегралы эти, обозначенные нами через $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$, определяются формулами (5.20) и (5.23).

Мы покажем теперь, что при помощи функций f_1 и f_2 можно построить для V и для Ψ контурный интеграл, который является

решением нашей задачи. Рассуждения наши будут аналогичны рассуждениям, изложенным в параграфе 3 главы 13, а окончательные формулы будут представлять аналогию формулам (2.24) и (3.10) главы 12.

Обозначим через $D_{12}(t)$ определитель Вронского:

$$D_{12}(t) = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} \quad (6.02)$$

и положим

$$F(t, y, y', q) = \\ = \frac{1}{D_{12}(t)} f_1(y', t) \left\{ f_2(y, t) - \frac{f_2'(0, t) + qf_2(0, t)}{f_1'(0, t) + qf_1(0, t)} f_1(y, t) \right\}, \quad (6.03)$$

где штрихи при f_1 и f_2 обозначают производные по y .

Будем считать, что $y' > y$, и составим интеграл

$$\Psi = \frac{1}{2\pi i} \int e^{tx} F(t, y, y', q) dt, \quad (6.04)$$

взятый по контуру, охватывающему в положительном направлении все полюса подынтегральной функции.

Из определения функции F следует, что она является мероморфией функции переменной t (т. е. не имеет при конечных t никаких особенностей, кроме полюсов). Функция F вполне определена, даже если входящие в нее функции f_1 и f_2 определены лишь с точностью до множителей, не зависящих от y . Так как интегралы f_1 и f_2 при всех значениях t являются независимыми (это видно из их асимптотических выражений), то определитель Вронского $D_{12}(t)$ корней не имеет, и единственными полюсами F являются корни уравнения

$$f_1'(0, t) + qf_1(0, t) = 0. \quad (6.05)$$

Если в дифференциальном уравнении (6.01) функция $r(y)$ равна нулю, то можно положить

$$f_1(y, t) = w_1(t - y), \quad f_2(y, t) = w_2(t - y). \quad (6.06)$$

Тогда

$$D_{12}(t) = -2i \quad (6.07)$$

и выражение (6.03) для F приведет к рассмотренному в главе 12 [формула (2.21)].

Покажем, что функция Ψ , определяемая контурным интегралом (6.04), удовлетворяет всем поставленным условиям.

Прежде всего очевидно, что функция Ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.09), ибо ему удовлетворяет выра-

жение под интегралом. Далее, функция Ψ удовлетворяет предельному условию (4.13), так как при всех t и y' мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y} + qF = 0 \quad (\text{при } y = 0). \quad (6.08)$$

Нам остается показать, что функция Ψ имеет нужную особенность.

При помощи асимптотических выражений (5.24) и (5.25) можно показать, что если x , y малы, а отношение y/x велико, то главный участок интегрирования в (6.04) будет лежать при больших отрицательных значениях t . Но если t велико и отрицательно, то в дифференциальном уравнении (6.01) главную роль в коэффициенте при f будет играть член $-t$. Поэтому при больших отрицательных t мы будем приближенно иметь

$$f_1(y, t) \sim f_1(0, t) e^{ty\sqrt{-t}} \quad (6.09)$$

и

$$f_2(y, t) \sim f_2(0, t) e^{-iy\sqrt{-t}}. \quad (6.10)$$

Подставив эти выражения в формулу (6.03) для F , получим

$$F = \frac{i}{2\sqrt{-t}} \left\{ e^{t(y'-y)\sqrt{-t}} - \frac{q-i\sqrt{-t}}{q+i\sqrt{-t}} e^{t(y'+y)\sqrt{-t}} \right\}. \quad (6.11)$$

Подстановка этого значения F в интеграл (6.04) дает для Ψ формулу Вейля—ван дер Поля, которая после пренебрежения малыми величинами (во втором члене) приводится к выражению (4.15), характеризующему особенность Ψ .

Таким образом, справедливость выражения (6.04) для Ψ нами установлена.

От контурного интеграла (6.04) нетрудно перейти к ряду, расположенному по вычетам, относящимся к корням уравнения (6.05). Напишем это уравнение несколько подробнее.

Используя выражение (5.20) для $f_1(y, t)$ и начальные значения (5.03) и (5.04) функций f^0 и f^* , получаем

$$f_1(0, t) = A_1^0(t), \quad f_1^*(0, t) = A_1^*(t) \quad (6.12)$$

и уравнение (6.05) принимает вид

$$A_1^*(t) + qA_1^0(t) = 0. \quad (6.13)$$

Подставляя сюда значения (5.18) и (5.19) функций A_1^0 и A_1^* , мы будем иметь

$$\begin{aligned} & \omega_1'(t) - q\omega_1(t) - \\ & - \int_0^\infty r(y) [f^0(y, t) - qf^*(y, t)] \omega_1(t-y) dy = 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Это уравнение мы будем называть характеристическим.

Для нас существенно, что левая часть характеристического уравнения является целой трансцендентной функцией от t и что оно содержит лишь функции $f^0(y, t)$ и $f^*(y, t)$, которые могут быть получены для всех значений t путем численного интегрирования дифференциального уравнения (5.02) с начальными условиями (5.03) и (5.04). В том случае, когда функция $r(y)$, начиная с некоторого $y = y_1$, равна нулю, интегрирование в (6.14) может быть выполнено, и характеристическое уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} & \omega'_1(t-y) [f^0(y, t) - qf^*(y, t)] + \\ & + \omega_1(t-y) \frac{\partial}{\partial y} [f^0(y, t) - qf^*(y, t)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{при } y = y_1). \quad (6.15)$$

Характеристическое уравнение для случая однородной атмосферы имеет вид

$$\omega'_1(t) - q\omega_1(t) = 0. \quad (6.16)$$

Это уравнение получается из предыдущих формул, если в (6.14) положить $r(y) = 0$ или если в (6.15) положить $y = y_1 = 0$.

Корни характеристического уравнения мы обозначим через

$$t_1(q), t_2(q), \dots \quad (6.17)$$

Эти корни будут функциями от параметра q .

Обратимся к вычислению вычетов интеграла (6.04). Из уравнений (6.02) и (6.05) вытекает, что при $y = 0$ и $t = t_s$ будет

$$\frac{f'_2(0, t) + qf_2(0, t)}{D_{12}(t)} = \frac{1}{f_1(0, t)}. \quad (6.18)$$

Далее, производную по t от знаменателя в (6.03) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial t} + q \frac{\partial f_1}{\partial t} = f_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = -f_1(0, t) \frac{dq}{dt}. \quad (6.19)$$

Поэтому вычет функции F в точке $t = t_s$ будет равен

$$\frac{dt_s}{dq} \frac{f_1(y', t_s)}{f_1(0, t_s)} \frac{f_1(y, t_s)}{f_1(0, t_s)}. \quad (6.20)$$

Беря сумму выражений (6.20), умноженных на e^{ixt_s} , мы получим искомое разложение функции Ψ в ряд

$$\Psi = \sum_{s=1}^{\infty} e^{ixt_s} \frac{dt_s}{dq} \frac{f_1(y', t_s)}{f_1(0, t_s)} \frac{f_1(y, t_s)}{f_1(0, t_s)}. \quad (6.21)$$

Величины

$$\frac{f_1(y, t_s)}{f_1(0, t_s)} = f^0(y, t_s) - qf^*(y, t_s) \quad (6.22)$$

можно назвать высотными множителями. Заметим, что высотные множители выражаются согласно (6.22) через функции f^0 и f^* , которые непосредственно вычисляются путем численного интегрирования дифференциального уравнения (5.02).

В том случае, когда величина q весьма велика или равна бесконечности (горизонтальная поляризация, абсолютный проводник), формула (6.21) должна быть преобразована путем почленного умножения на величину

$$\frac{q^2 f_1^2(0, t_s)}{f_1'^2(0, t_s)} = 1. \quad (6.23)$$

Результат можно записать в виде

$$\Psi = \sum_{s=1}^{\infty} e^{ixt_s} \left(q^2 \frac{dt_s}{dq} \right) \frac{f_1(y', t_s)}{f_1'(0, t_s)} \frac{f_1(y, t_s)}{f_1'(0, t_s)}. \quad (6.24)$$

Величина

$$q^2 \frac{dt_s}{dq} = \frac{1}{\frac{d}{dt} \left(\frac{f_1(0, t)}{f_1'(0, t)} \right)} \quad (6.25)$$

будет иметь при $q \rightarrow \infty$ конечное значение. Заметим, что из формул (6.19) и (5.29) вытекает соотношение

$$f_1^2(0, t) \frac{dq}{dt} = \int_0^{\infty} e^{i\alpha y} f_1^2(y, t) dy \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{3} \right). \quad (6.26)$$

Поэтому ряд (6.21) может быть написан в виде

$$\Psi = \sum_{s=1}^{\infty} e^{ixt_s} \frac{f_1(y', t_s) f_1(y, t_s)}{\int_0^{\infty} e^{i\alpha y} f_1^2(y, t_s) dy}. \quad (6.27)$$

В такой форме он напоминает разложение по собственным функциям. В ряде (6.27) «собственные значения» являются, однако, комплексными и стоящий в знаменателе «нормировочный интеграл» сходится лишь при комплексном пути интегрирования.

Чтобы перейти от функции Ψ к множителю ослабления V , достаточно припомнить соотношение (4.18)

$$V(x, y, y', q) = 2 \sqrt{\pi x e} i^{\frac{\pi}{4}} \Psi.$$

В случае однородной атмосферы, когда можно положить $r(y) = 0$ и $f_1(y, t) = \omega_1(t - y)$, вытекающие из наших формул выражения для V приводятся к тем, какие были выведены в главе 12 другим способом.

7. Применение общей теории к случаю сверхрефракции. (Схематический пример)

Рассмотренная в параграфе 3 аналогия с нестационарной задачей квантовой механики позволяет составить себе качественную картину явления сверхрефракции и тех условий, при которых это явление может иметь место. С другой стороны, полученное в параграфе 6 общее выражение для множителя ослабления пригодно и для количественных расчетов, которые, правда, требуют довольно сложных вычислений.

Напишем выражение для связанной с множителем ослабления функции Ψ . Полагая для краткости

$$f(y, t) = f^0(y, t) - qf^*(y, t), \quad (7.01)$$

мы будем иметь на основании (6.21)

$$\Psi = \sum_{s=1}^{\infty} e^{ixt_s} \frac{dt_s}{dq} f(y', t_s) f(y, t_s), \quad (7.02)$$

где величины t_s суть корни трансцендентного уравнения (6.14).

Если $r(y) = 0$ при $y > y_1$, это уравнение может быть согласно (6.15) написано в виде

$$\omega_1'(t - y_1) f(y_1, t) + \omega_1(t - y_1) f'(y_1, t) = 0, \quad (7.03)$$

где ω_1' означает производную по аргументу $(t - y)$, а не производную по y . Параметр q входит в это уравнение через посредство величины (7.01).

Определение условий, при которых возможно сверхдальнее распространение, сводится к исследованию корней характеристического уравнения (6.14) или (7.03). При отсутствии сверхрефракции мнимая часть корней этого уравнения, которая согласно (7.02) дает ослабление волны с увеличением расстояния, будет того же порядка, как и вещественная часть. При наличии же сверхрефракции существует один или несколько корней с аномально малой мнимой частью.

Чтобы составить себе представление о том, при каких условиях может иметь место сверхдальнее распространение, рассмотрим следующий схематический пример.

Пусть функция $r(y)$ имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} r(y) &= (1 + \mu^3)(y_1 - y) && (\text{при } 0 < y < y_1), \\ r(y) &= 0 && (\text{при } y_1 < y). \end{aligned} \right\} \quad (7.04)$$

Это соответствует предположению, что график приведенного показателя преломления представляет ломаную линию, изображенную на рис. 2.

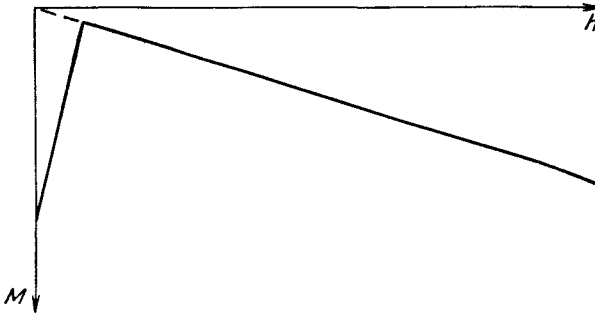


Рис. 2. Схематический ход приведенного показателя преломления.

Если считать, что диэлектрическая постоянная ϵ меняется по закону

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= 1 - g(h - h_1) && (\text{при } h < h_1), \\ \epsilon &= 1 && (\text{при } h > h_1), \end{aligned} \right\} \quad (7.05)$$

то параметры μ^3 и y_1 будут равны

$$\mu^3 = \frac{ag}{2} - 1, \quad y_1 = h_1 \sqrt[3]{\frac{2k^2}{a}}. \quad (7.06)$$

Таким образом, параметр μ от длины волны не зависит, а параметр y_1 (приведенная высота точки перелома) будет пропорционален $\lambda^{-2/3}$.

Уравнение для f напишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2f}{dy^2} + [(1 + \mu^3)y_1 - \mu^3y - t]f &= 0 && (\text{при } y < y_1), \\ \frac{d^2f}{dy^2} + (y - t)f &= 0 && (\text{при } y > y_1). \end{aligned} \right\} \quad (7.07)$$

Введем вместо t новый параметр

$$\xi_0 = \frac{t - (1 + \mu^3)y_1}{\mu^2} \quad (7.08)$$

и вместо y — новую переменную

$$\xi = \xi_0 + \mu y. \quad (7.09)$$

Значению $y = y_1$ будет соответствовать значение $\xi = \xi_1$, где

$$\mu^2 \xi_1 = t - y_1. \quad (7.10)$$

Уравнение (7.05) примет вид

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \xi f \quad (\xi_0 < \xi < \xi_1). \quad (7.11)$$

Независимыми решениями его будут функции Эйри $u(\xi)$ и $v(\xi)$.
Функции f^0 и f^* будут равны

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} f^0(y) &= u'(\xi_0) v(\xi) - v'(\xi_0) u(\xi) \\ f^*(y) &= \frac{1}{\mu} [v(\xi_0) u(\xi) - u(\xi_0) v(\xi)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

В силу соотношения

$$u'(\xi) v(\xi) - v'(\xi) u(\xi) = 1 \quad (7.13)$$

функции f^0 и f^* будут удовлетворять начальным условиям (5.03) и (5.04). Вводя согласно (7.01) функцию

$$\begin{aligned} f(y) &= -\frac{1}{\mu} [qv(\xi_0) + \mu v'(\xi_0)] u(\xi) + \\ &+ \frac{1}{\mu} [qu(\xi_0) + \mu u'(\xi_0)] v(\xi), \end{aligned} \quad (7.14)$$

мы получим характеристическое уравнение, если подставим значения $f(y)$ и $f'(y)$ при $y = y_1$ в формулу (7.03). Это характеристическое уравнение может быть написано в виде

$$\frac{\mu v'(\xi_0) + qv(\xi_0)}{\mu u'(\xi_0) + qu(\xi_0)} = \frac{\mu v'(\xi_1) \omega_1(\mu^2 \xi_1) + v(\xi_1) \omega_1'(\mu^2 \xi_1)}{\mu u'(\xi_1) \omega_1(\mu^2 \xi_1) + u(\xi_1) \omega_1'(\mu^2 \xi_1)}. \quad (7.15)$$

Предположим, что величина y_1 и параметр μ достаточно велики. Это значит, что «потенциальная яма» на рис. 2 достаточно широка и глубока. В таком случае величины ξ_1 и $\mu^2 \xi_1$ [аргументы функций, входящих в правую часть (7.15)] будут велики. В силу асимптотических выражений

$$u(\xi) = \xi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3} \xi^{3/2}}, \quad v(\xi) = \frac{1}{2} \xi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3} \xi^{3/2}} \quad (7.16)$$

правая часть уравнения (7.15) будет весьма мала, и характеристическое уравнение приближенно приводится к следующему:

$$\mu v'(\xi_0) + qv(\xi_0) = 0. \quad (7.17)$$

Этот случай будет иметь место тогда, когда в достаточно большой области высот градиент диэлектрической постоянной воздуха будет отрицательным и большим, чем $2/a$, где a — радиус Земли; тогда

кривизна луча будет больше кривизны Земли и формально вычисляемый «эквивалентный радиус» получается отрицательным.

Затухание волны с увеличением горизонтального расстояния связано с мнимой частью величины t , а значит, и с мнимой частью величины ξ_0 ; если бы ξ_0 было вещественным, затухание отсутствовало бы. Затухание может происходить от двух причин: от поглощения в земле и от просачивания волны в верхние слои атмосферы. Поглощение в земле характеризуется комплексным параметром q . Уравнение (7.17) соответствует тому случаю, когда затухание происходит только из-за поглощения в земле. Если рассматривать землю как абсолютный проводник, нужно положить $q = 0$ для горизонтальной поляризации и $q = \infty$ для вертикальной поляризации. При $q = 0$ уравнение (7.17) приводится к виду

$$v'(\xi_0) = 0 \quad (\text{при } q = 0). \quad (7.18)$$

Корнями его будут вещественные отрицательные числа

$$\xi_0 = -1,019; -3,248; -4,820; \dots \quad (7.19)$$

При $q = \infty$ уравнение (7.17) принимает вид

$$v(\xi_0) = 0 \quad (\text{при } q = \infty) \quad (7.20)$$

и имеет корнями числа

$$\xi_0 = -2,338; -4,088; -5,521; \dots \quad (7.21)$$

Так как в этих случаях величины ξ_0 вещественны, то затухание отсутствует.

Уравнение (7.17) будет представлять хорошее приближение к (7.15), если величина ξ_1 (или ее вещественная часть) положительна и достаточно велика. Так как

$$\xi_1 = \xi_{00} + \mu y_1,$$

то это условие перестанет выполняться начиная с некоторого корня ξ_0 . Поэтому число корней с малой мнимой частью будет конечным.

Можно вывести приближенную формулу для поправки к величине ξ_0 , получаемой путем учета правой части (7.15). Обозначим через ξ_{00} корень уравнения (7.17), который будем рассматривать как неисправленное значение ξ_0 , и через $\Delta\xi_0$ — поправку. Эта поправка получится, если подставить в правую часть (7.15) приближенное значение ξ_1 , равное

$$\xi_1 = \xi_{00} + \mu y_1.$$

Приближенное значение поправки получится тогда из уравнения

$$\Delta\xi_0 = \frac{1}{V - \xi_{00}} \left\{ \frac{1}{16} \frac{\mu^3 + 1}{\mu^3 \xi_1^{3/2}} e^{-\frac{4}{3} \xi_1^{3/2}} + \frac{i}{4} e^{-2s} \right\}, \quad (7.22)$$

где

$$S = \frac{2}{3} (\mu^3 + 1) \xi_1^{3/2}. \quad (7.23)$$

Заметим, что мнимая часть поправки положительна. Это соответствует тому факту, что утечка в верхние слои увеличивает затухание.

Условием применимости этих приближенных формул является достаточно большая величина μy_1 . Напомним, что согласно (7.06) мы имеем

$$\mu y_1 = h_1 \sqrt[3]{k^2 \left(g - \frac{2}{a} \right)}, \quad (7.24)$$

где g — взятый с обратным знаком градиент диэлектрической постоянной; a — радиус Земли и h_1 — высота точки перелома на рис. 2.

Чем больше величина μy_1 , тем больше число почти стационарных состояний с малым затуханием. Ориентировочно можно сказать, что число таких состояний равно числу корней ξ_0 , не превосходящих (по абсолютной величине) параметра μy_1 .

Понятие о луче, отражающемся от верхней границы слоя и от поверхности земли, начинает становиться применимым лишь тогда, когда число почти стационарных состояний [число членов ряда (7.02) с малым затуханием] становится большим. Вообще, необходимым условием применимости понятий геометрической оптики является медленная сходимости ряда (7.02), когда в нем играет роль большое число членов. Если же в нем существенны один-два члена (которые могут соответствовать как почти стационарным, так и затухающим состояниям), то понятие луча не применимо вовсе.

8. Приближенные формулы для членов с малым затуханием

Пользуясь методом, аналогичным тому, какой применяется в квантовой механике, можно вывести приближенные выражения для высотных множителей, соответствующих членам с малым затуханием, а также дать оценку той части коэффициента затухания, которая соответствует утечке в верхние слои.

Положим в уравнении (6.01)

$$y + r(y) = p(y) \quad (8.01)$$

и напишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + [p(y) - 1] f = 0. \quad (8.02)$$

В случае сверхрефракции функция $p(y)$, пропорциональная приведенному показателю преломления, будет иметь минимум, и по обе стороны от него будет возрастать; слева от минимума наибольшим значением $p(y)$ будет $p(0)$, а справа $p(y)$ будет возрастать как величина y . Если параметр t лежит между наименьшим значением $p(y)$ и значением $p(0)$, то коэффициент при f в уравнении (8.02) обратится в нуль при двух значениях y , которые мы обозначим через y_1 и y_2 . В промежутке $y_1 < y < y_2$ величина $p(y) - t$ будет отрицательной, а вне этого промежутка — положительной.

В промежутке $y_1 < y < y_2$ решение уравнения (8.02) может быть приближенно выражено через функции Эйри. Положим

$$\int_{y_1}^y \sqrt{t - p(y)} dy = \frac{2}{3} \xi_1^{3/2} \quad (8.03)$$

и

$$\int_y^{y_2} \sqrt{t - p(y)} dy = \frac{2}{3} \xi_2^{3/2} \quad (8.04)$$

и обозначим через S сумму этих величин, которая не зависит от y :

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{t - p(y)} dy. \quad (8.05)$$

Величину S мы будем считать большой. При таких обозначениях мы будем приближенно иметь

$$f = \sqrt[4]{\frac{\xi_1}{t - p(y)}} [A_1 u(\xi_1) + B_1 v(\xi_1)], \quad (8.06)$$

а также

$$f = \sqrt[4]{\frac{\xi_2}{t - p(y)}} [A_2 u(\xi_2) + B_2 v(\xi_2)], \quad (8.07)$$

причем

$$\frac{2}{3} \xi_1^{3/2} + \frac{2}{3} \xi_2^{3/2} = S \quad (8.08)$$

и постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 связаны соотношениями

$$A_2 = \frac{1}{2} B_1 e^{-S}, \quad B_2 = 2A_1 e^S, \quad (8.09)$$

которые вытекают из сравнения асимптотических выражений для (8.06) и (8.07) при больших значениях ξ_1 и ξ_2 .

При $y > y_2$ мы можем определить величину ξ_2 посредством равенства

$$\int_{y_2}^y \sqrt{p(y) - t} dy = \frac{2}{3} (-\xi_2)^{3/2} \quad (8.10)$$

и пользоваться прежним выражением (8.07) для f .

Аналогично, при $y < y_1$ мы можем вместо (8.03) положить

$$\int_y^{y_1} \sqrt{p(y) - t} dy = \frac{2}{3} (-\xi_1)^{3/2} \quad (8.11)$$

и применять для f выражение (8.06).

Выберем постоянные A , B так, чтобы функция f была пропорциональна $f_1(y, t)$. Мы должны положить

$$A_2 = C_1, \quad B_2 = iC_1 \quad (8.12)$$

и, следовательно,

$$A_1 = \frac{i}{2} C_1 e^{-S}, \quad B_1 = 2C_1 e^S. \quad (8.13)$$

Тогда формулы (8.06) и (8.07) примут вид

$$f_1(y, t) = 2C_1 e^S \sqrt[4]{\frac{\xi_1}{t - p(y)}} \left[v(\xi_1) + \frac{i}{4} e^{-2S} u(\xi_1) \right] \quad (8.14)$$

и

$$f_1(y, t) = C_1 \sqrt[4]{\frac{\xi_2}{t - p(y)}} \omega_1(\xi_2). \quad (8.15)$$

Аналогично получаются следующие приближенные выражения для $f_2(y, t)$:

$$f_2(y, t) = 2C_2 e^S \sqrt[4]{\frac{\xi_1}{t - p(y)}} \left[v(\xi_1) - \frac{i}{4} e^{-2S} u(\xi_1) \right] \quad (8.16)$$

и

$$f_2(y, t) = C_2 \sqrt[4]{\frac{\xi_2}{t - p(y)}} \omega_2(\xi_2). \quad (8.17)$$

В этом приближении определитель Вронского $D_{12}(t)$ оказывается равным

$$D_{12}(t) = -2iC_1C_2. \quad (8.18)$$

При $y < y_1$ функции $v(\xi_1)$ и $u(\xi_1)$ будут одного порядка. Вследствие малости множителя e^{-2S} вторые члены в (8.14) и (8.16) будут представлять малые поправки [вообще говоря, меньшие, чем по-

грешность всего выражения (8.14) или (8.16)]. Поэтому в области $y < y_1$ функции f_1 и f_2 будут почти пропорциональны друг другу.

Отбрасывая малые поправки, можно написать уравнение для определения t в виде

$$\left(\frac{d\xi}{dy}\right)_0 v'(\xi_0) + qv(\xi_0) = 0. \quad (8.19)$$

Мы обозначили здесь через ξ_0 и $\left(\frac{d\xi}{dy}\right)_0$ значения ξ_1 и $\frac{d\xi_1}{dy}$ при $y = 0$.

Это уравнение аналогично уравнению (7.17). Оно дает только ту часть коэффициента затухания волны, которая происходит от поглощения в земле. Так как комплексный параметр q , характеризующий свойства почвы, известен лишь весьма грубо, то и коэффициент $\left(\frac{d\xi}{dy}\right)_0$ достаточно взять в самом грубом приближении и положить согласно (7.06) и (7.09)

$$\left(\frac{d\xi}{dy}\right)_0 = \mu = \sqrt[3]{\frac{ag}{2} - 1}, \quad (8.20)$$

где a — радиус Земли и g — взятый с обратным знаком градиент диэлектрической постоянной.

Тогда уравнение (8.19) приведет к виду (7.17), исследованному в предыдущем параграфе. Корни ξ_0 уравнения (8.19) будут связаны с соответствующими значениями параметра t соотношением

$$k \int_0^{h_1^*} \sqrt{-\frac{t}{m^2} + \epsilon - 1 + \frac{2h}{a}} dh = \frac{2}{3} (-\xi_0)^{3/2}, \quad (8.21)$$

где h_1^* — меньшее из тех двух значений h_1^* и h_2^* высоты h , при которых подкоренное количество обращается в нуль.

Если ξ_0 вещественно, то h_1^* и t получаются вещественными; если ξ_0 комплексно, то вычисление интеграла (8.21) требует аналитического продолжения интерполяционной формулы для ϵ в комплексную область.

Необходимым условием применимости предыдущих формул является малость величины e^{-2S} , где S имеет значение (8.05). В обычных единицах интеграл, выражающий S , напишется в виде

$$S = k \int_{h_1^*}^{h_2^*} \sqrt{\frac{t}{m^2} - \left(\epsilon - 1 + \frac{2h}{a}\right)} dh. \quad (8.22)$$

Определив t из (8.21), необходимо проверить, что интеграл S для этого t достаточно велик.

В случае абсолютного проводника ($q = 0$ и $q = \infty$) приближенные значения ξ_0 и t получаются из (8.19) и (8.21) вещественными. В этом случае можно указать приближенное значение мнимой части поправки к ξ_0 .

Полагая

$$\xi_0 = \xi_0' + i\xi_0'' \quad (8.23)$$

мы будем иметь

$$\sqrt{-\xi_0'} \xi_0'' = \frac{1}{4} e^{-2S}. \quad (8.24)$$

На выводе этой формулы мы останавливаться не будем.

Так как ξ_0'' — малая величина, то приращению $\Delta\xi_0 = i\xi_0''$ будет соответствовать приращение $\Delta t = it'' = \frac{dt}{d\xi_0} \Delta\xi_0$. Но величина (8.24), умноженная на i , представляет приращение интеграла (8.21). Поэтому мы можем определить t'' (мнимую часть t) из уравнения

$$t'' \frac{\partial}{\partial t} \left(k \int_0^{h_1^*} \sqrt{-\frac{t}{m^2} + \varepsilon - 1 + \frac{2h}{a}} dh \right) = -\frac{1}{4} e^{-2S}. \quad (8.25)$$

Так как производная от интеграла отрицательна, то для t'' получается положительное значение, что соответствует затуханию.

Полученные формулы позволяют вывести также приближенное выражение для величины $\frac{dq}{dt}$. Согласно (6.19) мы имеем

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial^2 \lg f_1}{\partial y \partial t}. \quad (8.26)$$

Подставляя сюда значение f_1 из (8.14) и пренебрегая малыми величинами, получим

$$\frac{dq}{dt} = \left(\frac{d\xi}{dy} \right)_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial t} \left(\frac{v'^2(\xi_0)}{v^2(\xi_0)} - \frac{v''(\xi_0)}{v(\xi_0)} \right). \quad (8.27)$$

Здесь мы можем положить в самом грубом приближении

$$\left(\frac{d\xi}{dy} \right)_0 = \mu, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial t} = \frac{1}{\mu^2} \quad (8.28)$$

[см. формулы (7.08) и (7.09)]. Пользуясь дифференциальным уравнением и предельными условиями для v , получим отсюда

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q^2}{\mu^3} - \frac{\xi_0}{\mu}. \quad (8.29)$$

Первые члены ряда (6.21) для Ψ , обладающие малым затуханием, будут, в нашем приближении, равны

$$\sum e^{ixt} \frac{v(\xi_1)v(\xi_1')}{\left(\frac{q^2}{\mu^3} - \frac{\xi_0}{\mu}\right)v^2(\xi_0)} = \sum e^{ixt} \frac{\mu v(\xi_1)v(\xi_1')}{v'^2(\xi_0) - \xi_0 v^2(\xi_0)}, \quad (8.30)$$

где ξ_1' относится к приведенной высоте y' .

Если ξ_0 настолько велико по абсолютной величине, что можно пользоваться для $v(\xi_0)$ и $v'(\xi_0)$ асимптотическими выражениями, то знаменатель в этой формуле будет приближенно равен

$$v'^2(\xi_0) - \xi_0 v^2(\xi_0) = \sqrt{-\xi_0}. \quad (8.31)$$

В заключение необходимо подчеркнуть, что выведенные в этом параграфе формулы основаны на довольно грубых приближениях и предназначены для ориентировочных расчетов. Более точные расчеты должны основываться на строгой теории, изложенной в предыдущих параграфах.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ДАЛЬНОСТИ ГОРИЗОНТА ПРИ НАЛИЧИИ СВЕРХРЕФРАКЦИИ*

Исходя из общих формул, полученных в главе 14, исследуются случаи нормальной рефракции и сверхрефракции. Для функций, стоящих под знаком контурного интеграла в выражении для множителя ослабления, выводятся приближенные выражения путем асимптотического интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений. В случае нормальной рефракции эти функции приближенно выражаются через функции Эйри, а в случае сверхрефракции — через функции параболического цилиндра. Качественное исследование контурного интеграла приводит к приближенным формулам для того расстояния, начиная с которого поле быстро убывает, т. е. для дальности горизонта. При сверхрефракции, когда имеется много отраженных волн, под «дальностью горизонта» понимается дальность для первой отраженной волны. Общие формулы применяются к случаю, когда приведенный показатель преломления зависит от высоты по гиперболическому закону.

1. Введение

В главе 14 была выведена для множителя ослабления общая формула в виде контурного интеграла. Полученное выражение применимо для весьма общего случая произвольного хода показателя преломления в зависимости от высоты. Основная трудность применения нашей общей формулы заключается в решении дифференциального уравнения для высотного множителя. Эта трудность может быть обойдена путем использования асимптотического решения уравнения (такой прием основан на наличии в уравнении большого параметра). Получив приближенные выражения для высотного множителя, можно написать в явной форме подынтегральную функцию в контурном интеграле и затем его исследовать. Качественное исследование подынтегральной функции поз-

* Фок, 1956.

воляет дать оценку тех расстояний, начиная с которых множитель ослабления начинает быстро убывать, другими словами, оценку дальности горизонта.

2. Исходные формулы

Как показано в главе 14, поле от вертикального и горизонтального электрического и магнитного диполя выражается в общем случае через две функции Герца: U и W , которые удовлетворяют одинаковым дифференциальным уравнениям; предельные условия для U и W также одинакового типа, но с разными значениями коэффициентов. Каждая из функций Герца может быть выражена через множитель ослабления V по формуле

$$U = \frac{e^{iks}}{\sqrt{sa \sin \frac{s}{a}}} V, \quad (2.01)$$

где a — радиус земного шара; s — горизонтальное расстояние, считаемое по дуге земного шара, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — абсолютное значение волнового вектора.

Множитель ослабления V удобнее всего выразить через безразмерные величины: приведенное горизонтальное расстояние

$$x = \frac{k}{2m^2} s \quad (2.02)$$

и приведенные высоты корреспондирующих точек (источника и точки наблюдения):

$$y = \frac{k}{m} h, \quad y' = \frac{k}{m} h', \quad (2.03)$$

где h и h' — высоты в единицах длины, а m — параметр

$$m = \sqrt[3]{\frac{ka}{2}}. \quad (2.04)$$

В задачах, связанных со сверхрефракцией, эквивалентный радиус Земли не играет той роли, какую он играет в случае нормальной рефракции; поэтому мы его здесь не вводим. Кроме перечисленных величин, множитель ослабления V зависит от параметра q , входящего в предельные условия. Для функции Герца U (вертикальная поляризация) параметр q равен

$$q = \frac{im}{\sqrt{\eta + 1}}, \quad (2.05)$$

где η — комплексная диэлектрическая постоянная среды.

Для функции Герца W (горизонтальная поляризация) параметр q равен

$$q = im \sqrt{\eta - 1}. \quad (2.06)$$

В последнем случае можно практически полагать $q = \infty$, так как параметры m и η велики.

Таким образом, множитель ослабления V есть функция от безразмерных величин x, y, y', q :

$$V = V(x, y, y', q). \quad (2.07)$$

Наряду с множителем ослабления V удобно рассматривать связанную с ним функцию Ψ , через которую V выражается по формуле

$$V = 2 \sqrt{\pi x} e^{i \frac{\pi}{4}} \Psi. \quad (2.08)$$

Функция Ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} + [y + r(y)] \Psi = 0, \quad (2.09)$$

где

$$r(y) = m^2 (\varepsilon - 1), \quad (2.10)$$

причем $\varepsilon = \varepsilon(h)$ есть диэлектрическая постоянная воздуха как функция от высоты. Уравнение (2.09) получается путем перехода к безразмерным величинам из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial h^2} + 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial s} + k^2 \left(\frac{2h}{a} + \varepsilon - 1 \right) \Psi = 0, \quad (2.11)$$

в котором коэффициент при Ψ пропорционален приведенному показателю преломления

$$M(h) = 10^6 \left(\frac{\varepsilon - 1}{2} + \frac{h}{a} \right). \quad (2.12)$$

Коэффициент при Ψ в уравнении (2.09) удобно обозначать одной буквой и полагать

$$p(y) = y + r(y). \quad (2.13)$$

Имеем

$$p(y) = m^2 \left(\varepsilon - 1 + \frac{2h}{a} \right), \quad (2.14)$$

так что $p(y)$ есть по существу тот же приведенный показатель преломления, только выраженный через безразмерную высоту y .

При использовании обозначения (2.13) уравнение (2.09) пишется

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} + p(y) \Psi = 0. \quad (2.15)$$

Кроме дифференциального уравнения (2.15), функция Ψ удовлетворяет предельному условию

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} + q\Psi = 0 \quad (\text{при } y = 0). \quad (2.16)$$

При $x = 0$ она имеет особенность вида

$$\Psi = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi x}} \left\{ e^{i\frac{(y-y')^2}{4x}} + e^{i\frac{(y+y')^2}{4x}} \frac{y+y'+2iqx}{y+y'-2iqx} \right\}. \quad (2.17)$$

В главе 14 было дано общее выражение для функции Ψ в виде контурного интеграла. Подынтегральная функция в нем выражена через решения уравнения

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + p(y)f = tf, \quad (2.18)$$

где t — комплексный параметр. (Эти решения и были названы выше высотными множителями.)

Для составления подынтегральной функции необходимо знать оба решения уравнения (2.18); обозначим их через $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$.

При больших y эти функции имеют асимптотические выражения

$$f_1(y, t) = \frac{c'e^{i\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{p(y)-t}} \exp \left[i \int_{\tau}^y \sqrt{p(u)-t} du \right], \quad (2.19)$$

$$f_2(y, t) = \frac{c''e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{p(y)-t}} \exp \left[-i \int_{\tau}^y \sqrt{p(u)-t} du \right]. \quad (2.20)$$

Здесь c' , c'' , τ — постоянные, значения которых несущественны, так как они выпадают из выражения для Ψ . В случае однородной атмосферы, когда $p(y) = y$, функции $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$ приводятся к комплексным функциям Эйри $\omega_1(t-y)$ и $\omega_2(t-y)$, причем тогда можно положить $c' = c'' = 1$ и $\tau = t$.

Положим

$$D_{12}(t) = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y}. \quad (2.21)$$

В силу уравнения (2.18), которому удовлетворяют f_1 и f_2 , эта величина не будет зависеть от y .

Обозначим значения $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ при $y = 0$ через $f'_1(0, t)$ и $f'_2(0, t)$ и составим функцию

$$F(t, y, y', q) = \frac{1}{D_{12}(t)} f_1(y', t) \left\{ f_2(y, t) - \frac{f'_2(0, t) + qf_2(0, t)}{f'_1(0, t) + qf_1(0, t)} f_1(y, t) \right\}. \quad (2.22)$$

Функция Ψ определяется при $y' > y$ контурным интегралом

$$\Psi = \frac{1}{2\pi i} \int e^{ixt} F(t, y, y', q) dt. \quad (2.23)$$

взятым по контуру, охватывающему в положительном направлении все полюса подынтегральной функции. Как показано в главе 14, функция Ψ удовлетворяет всем поставленным выше условиям и дает решение нашей задачи.

3. Случай нормальной рефракции

Случай нормальной рефракции характеризуется тем, что приведенный показатель преломления $M(h)$ является монотонно возрастающей функцией от высоты h , и, следовательно, коэффициент $p(y)$ есть монотонно возрастающая функция от y . В этом случае можно приближенно выразить $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$ через комплексные функции Эйри от аргумента ξ , определяемого равенствами

$$\int_b^y \sqrt{p(u) - t} du = \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2}; \quad (3.01)$$

$$\int_y^b \sqrt{t - p(u)} du = \frac{2}{3} \xi^{3/2}, \quad (3.02)$$

где b есть корень уравнения

$$p(b) = t. \quad (3.03)$$

Вблизи $y = b$ разложение величины ξ по степеням $y - b$ будет начинаться с линейных членов, а именно

$$\xi = \sqrt[3]{p'(b)} (b - y) + \dots \quad (3.04)$$

Мы можем приближенно положить

$$f_1 = \sqrt{-\frac{dy}{d\xi}} \omega_1(\xi), \quad f_2 = \sqrt{-\frac{dy}{d\xi}} \omega_2(\xi) \quad (3.05)$$

и с тем же приближением

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\sqrt{-\frac{d\xi}{dy}} \omega'_1(\xi), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -\sqrt{-\frac{d\xi}{dy}} \omega'_2(\xi), \quad (3.06)$$

откуда

$$D_{12} = -2i. \quad (3.07)$$

Заменяя здесь y на y' и ξ на ξ' , получим выражения для $f_1(y', t)$ и $f_2(y', t)$. Значение ξ , соответствующее $y = 0$, мы обозначим через ξ_0 . При этих обозначениях мы получим для функции F , определяемой формулой (2.22), следующее приближенное выражение:

$$F = \frac{i}{2} \sqrt{-\frac{dy'}{d\xi'}} \sqrt{-\frac{dy}{d\xi}} \times \\ \times \omega_1(\xi') \left\{ \omega_2(\xi) - \frac{\omega'_2(\xi_0) + q \left(\frac{dy}{d\xi} \right)_0 \omega_2(\xi_0)}{\omega'_1(\xi_0) + q \left(\frac{dy}{d\xi} \right)_0 \omega_1(\xi_0)} \omega_1(\xi) \right\}. \quad (3.08)$$

Будучи подставлено в формулу (2.23), это выражение может быть использовано для вычисления поля как в области тени, так и в освещенной области. В области тени множитель ослабления (а также функция Ψ) вычисляется по ряду вычетов, соответствующих корням знаменателя

$$\omega'_1(\xi_0) + q \left(\frac{dy}{d\xi} \right)_0 \omega_1(\xi_0) = 0. \quad (3.09)$$

В освещенной области функция Ψ вычисляется непосредственно при помощи контурного интеграла, причем главный участок интегрирования будет лежать вблизи вещественных отрицательных значений t . Но при отрицательных t величины ξ_0 , ξ и ξ' будут также отрицательны. Предполагая, что эти величины достаточно велики, можно заменить функции ω_1 и ω_2 их асимптотическими выражениями

$$\omega_1(\xi) = e^{t \frac{\pi}{4}} (-\xi)^{-\frac{1}{4}} e^{i \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2}}, \quad (3.10)$$

$$\omega_2(\xi) = e^{-t \frac{\pi}{4}} (-\xi)^{-\frac{1}{4}} e^{-t \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2}}. \quad (3.11)$$

Такая замена сводится к тому, что для функций $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$ используются асимптотические выражения (2.19) и (2.20).

В результате для функции F получается [по формуле (2.22)] следующее выражение:

$$F = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{p(y)-t} \sqrt[4]{p(y')-t}} \left\{ \exp \left[i \int_y^{y'} \sqrt{p(u)-t} du \right] - \frac{q - i \sqrt{p(0)-t}}{q + i \sqrt{p(0)-t}} \exp \left[i \int_0^y \sqrt{p(u)-t} du + i \int_0^{y'} \sqrt{p(u)-t} du \right] \right\}. \quad (3.12)$$

Эта формула представляет обобщение формулы (6.11) главы 14. Последняя получается из (3.12) после замены $p(y)$ нулем.

Подстановка величины (3.12) в контурный интеграл дает для множителя ослабления выражение, состоящее из двух членов, из которых первый соответствует падающей волне, а второй — волне, однократно отраженной от поверхности земли с коэффициентом Френеля. Падающая волна представляет наложение волн с фазой

$$\omega(t) = xt + \int_y^{y'} \sqrt{p(u)-t} du, \quad (3.13)$$

а отраженная волна представляет наложение волн с фазой

$$\varphi(t) = xt + \int_0^y \sqrt{p(u)-t} du + \int_0^{y'} \sqrt{p(u)-t} du. \quad (3.14)$$

Эти выражения соответствуют геометрической оптике. Интегралы могут быть вычислены по методу стационарной фазы, причем фаза падающей волны будет равна экстремальному значению $\omega(t)$, а фаза отраженной волны — экстремальному значению $\varphi(t)$. Функция $\omega(t)$ достигает своего экстремального значения при t , определяемом из уравнения

$$\omega'(t) \equiv x - \frac{1}{2} \int_y^{y'} \frac{du}{\sqrt{p(u)-t}} = 0, \quad (3.15)$$

а функция $\varphi(t)$ — при t , определяемом из уравнения

$$\varphi'(t) \equiv x - \frac{1}{2} \int_0^y \frac{du}{\sqrt{p(u)-t}} - \frac{1}{2} \int_0^{y'} \frac{du}{\sqrt{p(u)-t}} = 0. \quad (3.16)$$

С точки зрения геометрической оптики дальность горизонта определяется из условия, чтобы до данной точки могла дойти отраженная волна с вещественной фазой. Крайнее значение t , при

котором это еще имеет место, есть $t = p(0)$. Это значение должно быть в то же время корнем уравнения (3.16).

Следовательно, между x , y и y' должно существовать соотношение

$$x = \frac{1}{2} \int_0^y \frac{du}{\sqrt{p(u) - p(0)}} + \frac{1}{2} \int_0^{y'} \frac{du}{\sqrt{p(u) - p(0)}}, \quad (3.17)$$

которое и дает формулу для дальности горизонта при нормальной рефракции.

Более точное выражение (3.08) для F показывает, что при значении $t = p(0)$ применять формулу (3.12) уже нельзя. В самом деле, при этом значении t величина ξ_0 обращается в нуль, и пользоваться формулами (3.10) и (3.11), разумеется, недопустимо. Тем не менее, можно считать, что значение x , определяемое из (3.17), приблизительно дает границу, определяющую освещенную область, где применима отражательная формула, от теневой области, где применим ряд вычетов. Другими словами, можно считать, что амплитуда поля начинает быстро убывать, когда x , возрастая, проходит через значение (3.17). В этом смысле можно применять термин «дальность горизонта» и в диффракционной теории.

4. Асимптотическое интегрирование дифференциального уравнения с коэффициентом, имеющим минимум

При наличии сверхрефракции приведенный показатель преломления $M(h)$ не будет монотонной функцией от высоты, а будет иметь один или несколько минимумов, соответствующих отдельным волноводным каналам. Мы будем рассматривать случай одного минимума; соответствующую высоту мы будем называть высотой инверсии и обозначать через h_i .

Коэффициент $p(y)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + p(y) f = t f \quad (4.01)$$

пропорционален $M(h)$ и поэтому он также будет иметь один минимум при значении $y = y_i$, соответствующем $h = h_i$.

Мы будем считать $p(y)$ аналитической функцией от y . Уравнение $p(y) = t$ будет иметь в интересующей нас области два корня: $y = b_1$ и $y = b_2$.

При t вещественном и лежащем между $p(0)$ и $p(y_i)$ оба корня будут вещественными; при других значениях t корни могут быть и комплексными,

Нам необходимо иметь такое асимптотическое выражение для функций $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$, которое было бы справедливо равномерно при всех рассматриваемых значениях y и t , включая значение $t = p(y_i)$, при котором корни b_1 и b_2 совпадают.

Использованное в параграфе 2 приближенное выражение для f_1 и f_2 через функции Эйри здесь уже неприменимо. Справедливость его была основана на том, что при помощи подстановки (3.01)—(3.02), определяющей ξ как голоморфную функцию от y , уравнение (4.01) приближенно сводилось к уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \xi w = 0, \quad (4.02)$$

в котором коэффициент при неизвестной функции имел такой же монотонный характер, как и в исходном уравнении. Теперь нам нужно взять в качестве стандартного уравнения уже не уравнение (4.02) для функций Эйри, а уравнение

$$\frac{d^2 g}{d\zeta^2} + \left(\frac{1}{4} \zeta^2 + \nu \right) g = 0 \quad (4.03)$$

для функций параболического цилиндра, так как это есть простейшее уравнение, в котором коэффициент при неизвестной функции имеет тот же характер (с одним минимумом), как и коэффициент $p(y)$. Подстановку, связывающую ζ и y , нужно выбрать так, чтобы величина $p(y) - t$ обращалась в нуль одновременно с величиной $\frac{1}{4} \zeta^2 + \nu$ и чтобы при больших значениях этих величин получались правильные асимптотические выражения. Этим условиям удовлетворяет подстановка

$$\int_{b_1}^y \sqrt{p(y) - t} dy = \frac{1}{2} \int_{-2i\sqrt{\nu}}^{\zeta} \sqrt{\zeta^2 + 4\nu} d\zeta, \quad (4.04)$$

при условии, что параметр ν выбран так, чтобы было

$$\int_{b_1}^{b_2} \sqrt{p(y) - t} dy = \frac{1}{2} \int_{-2i\sqrt{\nu}}^{2i\sqrt{\nu}} \sqrt{\zeta^2 + 4\nu} d\zeta. \quad (4.05)$$

Интеграл в правой части (4.05) равен

$$\frac{1}{2} \int_{-2i\sqrt{\nu}}^{2i\sqrt{\nu}} \sqrt{\zeta^2 + 4\nu} d\zeta = i\pi\nu. \quad (4.06)$$

Поэтому уравнение (4.05) может быть написано в виде

$$i\pi\nu = \int_{b_1}^{b_2} \sqrt{p(y) - t} dy. \quad (4.07)$$

Оно дает v как функцию от t . Эта функция будет голоморфной вблизи $t = p(y_i)$, а именно мы будем иметь

$$v = \frac{p(y_i) - t}{V 2p''(y_i)} + \dots \quad (4.08)$$

Полагая

$$S = \int_0^y \sqrt{p(y) - t} dy, \quad (4.09)$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_0^{b_1} \sqrt{p(y) - t} dy + \frac{1}{2} \int_0^{b_2} \sqrt{p(y) - t} dy, \quad (4.10)$$

мы можем написать подстановку (4.04) в виде

$$S - S_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \sqrt{\zeta^2 + 4v} d\zeta. \quad (4.11)$$

Правая часть этого выражения равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\xi} \sqrt{\zeta^2 + 4v} d\zeta &= \frac{1}{4} \zeta \sqrt{\zeta^2 + 4v} + \\ &+ v \lg(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4v}) - \frac{v}{2} \lg 4v. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Отсюда мы можем заключить, что при $\xi > 0$ величина $S - S_0 + \frac{v}{2} \lg v$ будет голоморфной функцией от v вблизи $v = 0$, а при $\xi < 0$ голоморфными будут величины $S - S_0 - \frac{v}{2} \lg v$ и S . Но так как при $y = 0$ (на поверхности земли) заведомо $\xi < 0$, то мы имеем дело со вторым случаем, а тогда голоморфной функцией от v будет и сумма $S_0 + \frac{v}{2} \lg v$. Это замечание понадобится нам в дальнейшем.

В рассматриваемом асимптотическом приближении решения уравнений (4.01) и (4.03) связаны соотношением

$$f = \sqrt{\frac{dy}{d\zeta}} g. \quad (4.13)$$

Решениями уравнения (4.03) являются функции, которые выражаются через функции параболического цилиндра $D_n(z)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d^2 D_n(z)}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2 \right) D_n(z) = 0. \quad (4.14)$$

Функции $D_n(z)$ хорошо исследованы. Мы не будем перечислять их свойства, а сошлемся на книгу Уиттекера и Ватсона «Курс современного анализа», т. 2, ГИТТЛ, 1934 г., где приведены главнейшие формулы. В качестве определения $D_n(z)$ можно взять ряд

$$D_n(z) = \frac{2^{-\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(-n)} e^{-\frac{z^2}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} 2^{\frac{m}{2}} (-z)^m. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.03) получается из (4.14) заменой z на $\zeta e^{-i\frac{\pi}{4}}$ и $n + \frac{1}{2}$ на iv . Решениями уравнения (4.03) будут функции

$$g_1(\zeta) = D_{iv-\frac{1}{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\zeta\right), \quad (4.16)$$

$$g_2(\zeta) = D_{-iv-\frac{1}{2}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\zeta\right). \quad (4.17)$$

При вещественных v и ζ величины $g_1(\zeta)$ и $g_2(\zeta)$ будут комплексными сопряженными.

Из свойств $D_n(z)$ вытекает

$$g_1(-\zeta) = e^{-v\pi-i\frac{\pi}{2}} g_1(\zeta) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-iv\right)} e^{-\frac{v\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}} g_2(\zeta), \quad (4.18)$$

а также

$$g_2(-\zeta) = e^{-v\pi+i\frac{\pi}{2}} g_2(\zeta) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+iv\right)} e^{-\frac{v\pi}{4}-i\frac{\pi}{4}} g_1(\zeta). \quad (4.19)$$

Для нас существенны асимптотические выражения для $g_1(\zeta)$ и $g_2(\zeta)$. В области, примыкающей к положительной вещественной оси, мы имеем

$$g_1(\zeta) = e^{\frac{v\pi}{4}+i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{\pi}{4}} \zeta^{iv-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iv^2-2v-i\frac{3}{4}}{2\zeta^2} + \dots\right). \quad (4.20)$$

Пользуясь формулой (4.12), мы можем также написать

$$g_1(\zeta) = e^{\frac{v\pi}{4}+i\frac{\pi}{8}} e^{-i\frac{v}{2}+i\frac{v}{2} \lg v} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{\zeta^2+4v}} \exp\left[\frac{i}{2} \int_0^{\zeta} \sqrt{\zeta^2+4v} d\zeta\right]. \quad (4.21)$$

Последнее выражение справедливо также и при больших v . Асимптотическое выражение для $g_2(\xi)$ получается отсюда заменой i на $-i$.

Чтобы получить формулу, справедливую вблизи отрицательной вещественной оси, мы должны применить соотношение (4.18).

Мы будем иметь

$$\begin{aligned}
 g_1(\xi) &= e^{-\frac{3v\pi}{4} - i\frac{3\pi}{8}} e^{-i\frac{v}{2} + \frac{iv}{2} \lg v} \times \\
 &\times \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^2 + 4v}} \exp \left[-\frac{i}{2} \int_0^\xi \sqrt{\zeta^2 + 4v} d\zeta \right] + \\
 &+ \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - iv\right)} e^{-\frac{v\pi}{4} + i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{v}{2} - \frac{iv}{2} \lg v} \times \\
 &\times \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^2 + 4v}} \exp \left[\frac{i}{2} \int_0^\xi \sqrt{\zeta^2 + 4v} d\zeta \right]. \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Теперь мы в состоянии построить решение уравнения (4.01), удовлетворяющее всем поставленным требованиям.

Положим

$$c_1(v) = e^{i\frac{\pi}{8} - \frac{\pi v}{4}} e^{i\left(\frac{v}{2} - \frac{v}{2} \lg v - S_0\right)}. \quad (4.23)$$

В силу отмеченного выше свойства величины S_0 , показатель в (4.23) есть голоморфная функция от v также и вблизи $v = 0$.

Надлежащим решением уравнения для высотного множителя будет функция

$$f_1(y, t) = c_1(v) \sqrt{2 \frac{dy}{d\xi}} g_1(\xi). \quad (4.24)$$

Выше слоя инверсии (при $S - S_0 \gg 1$) эта функция имеет асимптотическое выражение

$$f_1(y, t) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{p(y) - t}} e^{iS - 2iS_0}, \quad (4.25)$$

вытекающее из (4.21).

Ниже слоя инверсии (при $S_0 - S \gg 1$) асимптотическое выражение для $f_1(y, t)$ будет иметь вид

$$f_1(y, t) = \chi_1(v) \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{p(y) - t}} e^{iS - 2iS_0} + e^{-v\pi} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{p(y) - t}} e^{-iS}, \quad (4.26)$$

где мы положили

$$\chi_1(\nu) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\nu\right)} e^{-\frac{\nu\pi}{2}} e^{i(\nu - \nu \lg \nu)}. \quad (4.27)$$

При помощи известного асимптотического выражения для функции $\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\nu\right)$ легко показать, что при больших положительных значениях ν функция $\chi_1(\nu)$ стремится к единице. Поскольку при $\nu \gg 1$ второй член в (4.26) становится мал по сравнению с первым, оба выражения для $f_1(y, t)$ будут тогда по форме совпадать. Существенно, однако, то, что наши выражения для $f_1(y, t)$ справедливы не только при больших, но и при малых значениях ν , вплоть до $\nu = 0$, и что они представляют голоморфные функции от ν вблизи $\nu = 0$.

Соответствующие выражения для $f_2(y, t)$ получатся из предыдущих заменой i на $-i$. Чтобы выписать их явно, положим

$$c_2(\nu) = e^{-i\frac{\pi}{8} - \frac{\pi\nu}{4}} e^{-i\left(\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \lg \nu - S_0\right)}, \quad (4.28)$$

$$\chi_2(\nu) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu\right)} e^{-\frac{\nu\pi}{2}} e^{-i(\nu - \nu \lg \nu)}. \quad (4.29)$$

Тогда будет

$$f_2(y, t) = c_2(\nu) \sqrt{2 \frac{dy}{d\zeta}} g_2(\zeta), \quad (4.30)$$

и асимптотические выражения для $f_2(y, t)$ будут иметь следующий вид:

при $S - S_0 \gg 1$

$$f_2(y, t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4 \sqrt{p(y) - t}} e^{-iS + 2iS_0}, \quad (4.31)$$

при $S_0 - S \gg 1$

$$f_2(y, t) = \chi_2(\nu) \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4 \sqrt{p(y) - t}} e^{-iS + 2iS_0} + e^{-\nu\pi} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4 \sqrt{p(y) - t}} e^{iS}. \quad (4.32)$$

Таким образом, задача асимптотического интегрирования уравнения для высотных множителей нами решена.

5. Исследование множителя ослабления

Нам надлежит теперь подставить найденные для $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$ выражения в формулу (2.22) для F и исследовать множитель ослабления V или связанную с ним функцию Ψ . Для простоты мы ограничимся случаем $q = \infty$, что соответствует горизонтальной поляризации. В этом случае функция F приводится к виду

$$F(t, y, y', \infty) = \frac{1}{D_{12}(t)} f_1(y', t) \left\{ f_2(y, t) - \frac{f_2(0, t)}{f_1(0, t)} f_1(y, t) \right\}. \quad (5.01)$$

Для функций (4.24) и (4.30) определитель Вронского D_{12} равен постоянной величине

$$D_{12} = -2i, \quad (5.02)$$

что легче всего выводится из асимптотических выражений (4.25) и (4.21). Будем предполагать, что $y' > y_i$, так что $S(y') - S_0 \gg 1$, и рассмотрим два случая: когда вторая высота тоже выше и когда она ниже слоя инверсии. В первом случае мы будем считать $S(y) - S_0 \gg 1$, что позволяет пользоваться выражениями (4.25) и (4.31) для f_1 и f_2 . Во втором случае мы будем считать $S_0 - S(y) \gg 1$ и пользоваться выражениями (4.26) и (4.32).

В первом случае мы будем иметь

$$F = \frac{i}{2} \frac{e^{iS(y') - 2iS_0}}{\sqrt[4]{p(y')} - t \sqrt[4]{p(y) - t}} \times \\ \times \left\{ e^{-iS + 2iS_0} + \frac{e^{-\pi v} - i\chi_2 e^{2iS_0}}{e^{-\pi v} + i\chi_1 e^{-2iS_0}} e^{iS - 2iS_0} \right\}. \quad (5.03)$$

Отдельные члены этого выражения допускают толкование на основе геометрической оптики. Очевидно, что волна, идущая сверху вниз, должна иметь фазовый множитель e^{-iS} , а волна, идущая снизу вверх — фазовый множитель e^{iS} . Выражение (5.03) показывает, что имеется только одна волна, идущая сверху вниз, а именно падающая волна с полной фазой

$$\omega(t) = xt + S(y') - S(y) \quad (5.04)$$

[мы добавили сюда член xt из показательного множителя в интеграле (2.23)]. Эта фаза совпадает с фазой (3.13) случая нормальной рефракции, что естественно, так как данная волна еще не дошла до слоя инверсии.

Что касается волн, идущих снизу вверх, то их будет бесчисленное множество; эти волны получатся разложением второго члена (5.03) в ряд по степеням $e^{-\pi v}$. Они будут соответствовать волнам, многократно отраженным от поверхности земли и от слоя инверсии.

Фаза волны, однократно отраженной от поверхности земли, будет равна

$$\varphi(t) = xt + S(y') + S(y) + \operatorname{arctg} \frac{\chi_2}{\chi_1}. \quad (5.05)$$

Это выражение отличается от (3.14) последним членом, который не может быть получен из геометрической оптики. Этот член равен

$$\operatorname{arctg} \frac{\chi_2}{\chi_1} = \operatorname{arctg} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} - i\nu \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} + i\nu \right)} + 2\nu \lg \nu - 2\nu. \quad (5.06)$$

При больших положительных ν он обращается в нуль, но при малых ν он играет важную роль, так как благодаря ему вся фаза $\varphi(t)$ остается голоморфной функцией от ν вблизи $\nu = 0$, иначе говоря, вблизи $t = p(y_i)$.

Рассмотрим теперь случай, когда точка y находится ниже слоя инверсии, причем $S_0 - S \gg 1$.

Пользуясь выражениями (4.26) и (4.32) и используя равенство

$$\chi_1(\nu) \chi_2(\nu) - e^{-2\pi\nu} = 1, \quad (5.07)$$

получаем после некоторых выкладок

$$F = \frac{e^{iS(y') - 2iS_0}}{\sqrt[4]{p(y') - t} \sqrt[4]{p(y) - t}} \frac{\sin S(y)}{\chi_1 e^{-2iS_0} - i e^{-\pi\nu}}. \quad (5.08)$$

В этом случае имеется не одна, а бесчисленное количество волн, идущих сверху вниз, так как к падающей волне присоединяются волны, отраженные от слоя инверсии как от верхней границы. Кроме того, имеется бесконечное количество волн, отраженных от земли и идущих снизу вверх. Все эти волны формально получаются разложением (5.08) в геометрическую прогрессию по степеням $e^{-\pi\nu}$.

Полная фаза волны, не претерпевшей отражения от земли, равна

$$\omega(t) = xt + S(y') - S(y) - \operatorname{arctg} \chi_1 \quad (5.09)$$

или

$$\omega(t) = xt + S(y') - S(y) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\chi_2}{\chi_1}, \quad (5.10)$$

а полная фаза однократно отраженной волны равна

$$\varphi(t) = xt + S(y') + S(y) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\chi_2}{\chi_1}. \quad (5.11)$$

Выражение для $\omega(t)$ не совпадает с (3.13) или (5.04), что естественно, так как падающая волна прошла через слой инверсии. Выражение (5.11) отличается от (5.05) тем, что добавочный член входит с множителем $1/2$.

Мы говорили до сих пор о фазах различных членов подынтегральной функции. Каждому такому члену соответствует в множителе ослабления интеграл по t . Если вычислять эти интегралы по методу стационарной фазы, то каждый из них дает в множителе ослабления член, представляющий волну с фазой, равной экстремальному значению фазы подынтегральной функции.

Разумеется, такой способ вычисления множителя ослабления применим лишь в освещенной области, в области же тени необходимо пользоваться рядом вычетов.

6. Формула для дальности горизонта

При нормальной рефракции (параграф 2) мы определяли дальность горизонта как такое значение горизонтального расстояния x , которое дает границу между областью применимости отражательной формулы и областью применимости ряда вычетов. При этом значении x экстремум фазы отраженной волны приходится на крайнее значение t , при котором сама фаза получается еще вещественной.

При наличии сверхрефракции имеется много отраженных волн. Но мы можем ожидать, что главную роль играет волна, однократно отраженная от поверхности земли. Поскольку «дальность горизонта» не есть строго определенное понятие, мы вправе уточнить его, понимая под ним дальность горизонта для однократно отраженной волны.

Фазы однократно отраженной волны найдены нами в параграфе 5. Согласно (5.05) и (5.11) мы имеем при $y' > y_i$, $y > y_i$

$$\varphi(t) = xt + \int_0^{y'} \sqrt{p(u) - t} du + \int_0^y \sqrt{p(u) - t} du + \arccos \frac{\chi_2}{\chi_1} \quad (6.01)$$

и при $y' > y_i$, $y < y_i$

$$\varphi(t) = xt + \int_0^{y'} \sqrt{p(u) - t} du + \int_0^y \sqrt{p(u) - t} du + \frac{1}{2} \arccos \frac{\chi_2}{\chi_1}. \quad (6.02)$$

Эти формулы можно объединить, положив

$$S^*(y, t) = \int_0^y \sqrt{p(u) - t} du + \frac{1}{2} \arccos \frac{\chi_2}{\chi_1} \quad (y > y_i), \quad (6.03)$$

$$S^*(y, t) = \int_0^y \sqrt{p(u) - t} du \quad (y < y_i). \quad (6.04)$$

Тогда будет как при $y > y_i$, так и при $y < y_i$

$$\varphi(t) = xt + S^*(y', t) + S^*(y, t). \quad (6.05)$$

Заметим, что S^* есть голоморфная функция от t вблизи $t = p(y_i)$.

Рассуждая как в параграфе 2, получим для дальности горизонта выражение

$$x = - \left[\frac{\partial S^*(y', t)}{\partial t} + \frac{\partial S^*(y, t)}{\partial t} \right]_{t=p(y_i)}. \quad (6.06)$$

Напишем это выражение в более явной форме. Согласно (4.08) вблизи $t = p(y_i)$ мы имеем

$$v = \frac{p(y_i) - t}{\sqrt{2p''(y_i)}}. \quad (6.07)$$

С другой стороны, вблизи $v = 0$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arcc} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - iv\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + iv\right)} = (C + 2 \lg 2)v + \dots \quad (6.08)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \operatorname{arcc} \frac{\chi_2}{\chi_1} = v(C - 1 + \lg 4v) + \dots, \quad (6.09)$$

где $C = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера. Поэтому при $y > y_i$

$$- \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^y \frac{du}{\sqrt{p(u) - t}} + \frac{1}{\sqrt{2p''(y_i)}} (C + \lg 4v). \quad (6.10)$$

Это выражение имеет предел при $t \rightarrow p(y_i)$, $v \rightarrow 0$. При $y < y_i$ последний член отсутствует, а в интеграл можно прямо подставить значение $t = p(y_i)$. Поэтому при $y < y_i$ будет

$$- \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^y \frac{du}{\sqrt{p(u) - p(y_i)}}. \quad (6.11)$$

Наличие второго члена в формуле (6.02) обуславливает зависимость дальности горизонта от длины волны. Чтобы выявить эту зависимость, вернемся от приведенных координат x, y к обычным координатам s, h , где s — горизонтальное расстояние и h — высота. Обозначая через $\mu(h)$ приведенный показатель преломления без множителя 10^6 , будем иметь

$$p(y) = 2m^2\mu(h), \quad (6.12)$$

где m есть величина (2.04).

Вместо t введем параметр τ , связанный с t соотношением

$$t = 2m^2\tau. \quad (6.13)$$

Тогда

$$\int_0^y \sqrt{p(u) - t} du = k \int_0^h \sqrt{2\mu(h) - 2\tau} dh, \quad (6.14)$$

$$xt = kst. \quad (6.15)$$

Величина v будет теперь приближенно равна

$$v = \frac{k}{\sqrt{\mu''(h_i)}} [\mu(h_i) - \tau]. \quad (6.16)$$

Формула для дальности горизонта получится из условия

$$\frac{1}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{при } \tau = \mu(h_i)), \quad (6.17)$$

где фаза φ предполагается выраженной через новые величины.

Положим

$$F(h) = \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{2\mu(h) - 2\mu(h_i)}} \quad (\text{при } h < h_i), \quad (6.18)$$

$$F(h) = \lim_{\tau \rightarrow \mu(h_i)} \left\{ \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{2\mu(h) - 2\tau}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\mu''(h_i)}} \left[C + \lg \frac{4k(\mu(h_i) - \tau)}{\sqrt{\mu''(h_i)}} \right] \right\} \quad (\text{при } h > h_i). \quad (6.19)$$

Тогда получаемая из условия (6.17) формула для дальности горизонта напишется

$$s = F(h') + F(h). \quad (6.20)$$

Сравним значения дальности горизонта для одинаковых высот, но для разных длин волн. Длина волны входит в выражение для $F(h)$ только при $h > h_i$ и только в логарифмический член. Пусть при $\lambda = \lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1}$ дальность горизонта равна s_1 , а при $\lambda = \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2}$ она равна s_2 . Составляя разность выражений (6.20), получаем при $h > h_i$

$$s_2 - s_1 = \frac{2}{\sqrt{\mu''(h_i)}} \lg \frac{k_2}{k_1} = \frac{2}{\sqrt{\mu''(h_i)}} \lg \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (6.21)$$

и при $h < h_i$

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu''(h_i)}} \lg \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu''(h_i)}} \lg \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (6.22)$$

Эта разность зависит, кроме отношения длин волн, только от хода приведенного показателя преломления вблизи его минимума.

Применим наши общие формулы к случаю, когда приведенный показатель преломления $\mu(h)$ зависит от высоты по гиперболическому закону

$$\mu(h) = \mu(h_i) + \frac{1}{a} \frac{(h - h_i)^2}{h + l}, \quad (6.23)$$

где a — радиус земного шара; l — параметр.

В этом случае

$$\mu''(h_i) = \frac{2}{a(h_i + l)}. \quad (6.24)$$

Интегралы, входящие в $\varphi(t)$, будут эллиптические, но при $\tau = \mu(h_i)$ они вычисляются элементарно, и мы получаем для $F(h)$ следующие выражения. При $h < h_i$

$$F(h) = -\sqrt{2a(h+l)} + \sqrt{2al} + \\ + \sqrt{\frac{a(h_i+l)}{2}} \left\{ \lg \frac{\sqrt{h_i+l} + \sqrt{h+l}}{\sqrt{h_i+l} - \sqrt{h+l}} - \lg \frac{\sqrt{h_i+l} + \sqrt{l}}{\sqrt{h_i+l} - \sqrt{l}} \right\} \quad (6.25)$$

и при $h > h_i$

$$F(h) = \sqrt{2a(h+l)} + \sqrt{2al} - \\ - \sqrt{\frac{a(h_i+l)}{2}} \left\{ \lg \frac{\sqrt{h+l} + \sqrt{h_i+l}}{\sqrt{h+l} - \sqrt{h_i+l}} + \lg \frac{\sqrt{h_i+l} + \sqrt{l}}{\sqrt{h_i+l} - \sqrt{l}} \right\} + \Delta s, \quad (6.26)$$

где

$$\Delta s = \sqrt{\frac{a(h_i+l)}{2}} \left\{ C_1 + \frac{1}{2} \lg \frac{2k_2^2(h_i+l)^3}{a} \right\}. \quad (6.27)$$

Здесь

$$C_1 = 7 \lg 2 - 4 + C = 1,429. \quad (6.28)$$

Для сравнения заметим, что дальность горизонта при отсутствии рефракции равна, как известно,

$$s' = \sqrt{2ah'} + \sqrt{2ah}. \quad (6.29)$$

Таким образом, увеличение дальности горизонта вследствие рефракции равно

$$s - s' = [F(h') - \sqrt{2ah'}] + [F(h) - \sqrt{2ah}]. \quad (6.30)$$

Во всех предыдущих рассуждениях мы предполагали, что высоты h и h' малы по сравнению с радиусом Земли a . Но предыдущие формулы применимы и к случаю волны, идущей из бесконечности (например, от Солнца). Разность $F(h') - \sqrt{2ah'}$ имеет при $h' \rightarrow \infty$ конечный предел, равный

$$\begin{aligned} & \lim_{h' \rightarrow \infty} [F(h') - \sqrt{2ah'}] = \\ & = \sqrt{2al} - \sqrt{\frac{a(h_i+l)}{2}} \operatorname{lg} \frac{\sqrt{h_i+l} + \sqrt{l}}{\sqrt{h_i+l} - \sqrt{l}} + \Delta s. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Заменяя в (6.30) первые два члена их предельным значением, мы получим для увеличения дальности горизонта следующие выражения:

при $h < h_i$

$$\begin{aligned} s - s' &= 2\sqrt{2al} - \sqrt{2a(h+l)} - \sqrt{2ah} + \Delta s + \\ &+ \sqrt{\frac{a(h_i+l)}{2}} \left\{ \operatorname{lg} \frac{\sqrt{h_i+l} + \sqrt{h+l}}{\sqrt{h_i+l} - \sqrt{h+l}} - 2 \operatorname{lg} \frac{\sqrt{h_i+l} + \sqrt{l}}{\sqrt{h_i+l} - \sqrt{l}} \right\} \end{aligned} \quad (6.32)$$

и при $h > h_i$

$$\begin{aligned} s - s' &= 2\sqrt{2al} + \sqrt{2a(h+l)} - \sqrt{2ah} + 2\Delta s - \\ &- \sqrt{\frac{a(h_i+l)}{2}} \left\{ \operatorname{lg} \frac{\sqrt{h+l} + \sqrt{h_i+l}}{\sqrt{h+l} - \sqrt{h_i+l}} + 2 \operatorname{lg} \frac{\sqrt{h_i+l} + \sqrt{l}}{\sqrt{h_i+l} - \sqrt{l}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Этому увеличению дальности соответствует «угол упреждения»

$$\delta = \frac{s - s'}{a}. \quad (6.34)$$

Так как настоящая теория не учитывает рефракции в высоких слоях атмосферы, то для сравнения с наблюдаемым углом упреждения нужно к величине (6.34) прибавлять значение нормальной рефракции на горизонте.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН ВБЛИЗИ ГОРИЗОНТА ПРИ СВЕРХРЕФРАКЦИИ*

В начале главы уточняется понятие горизонта при наличии приземного тропосферного волновода. Далее исследуются приближенные выражения (типа отражательной формулы) для множителя ослабления. В предположении гиперболического закона изменения показателя преломления с высотой выводятся формулы для дальности горизонтов прямых и отраженных волн. Во второй половине главы приводятся численные результаты для нескольких типичных примеров, причем предполагается, что передающая антенна расположена высоко над слоем инверсии, а приемная — внутри слоя инверсии на небольшой высоте. Полученные результаты дают оценку возможных значений множителя ослабления на горизонтах и показывают его зависимость от расстояния и от длины волны. Проведенное исследование показывает целесообразность введения понятия горизонтов при анализе сверхдальнего распространения.

1. Введение

Теория распространения радиоволн над сферической земной поверхностью при наличии неоднородной атмосферы, показатель преломления которой зависит только от высоты, была развита в главах 14 и 15. В главе 15 дано исследование множителя ослабления в неоднородной атмосфере вблизи горизонта, причем понятие горизонта определено для неоднородной (слоистой) атмосферы любого типа. Введенное там определение горизонта совпадает, в случае неоднородной атмосферы без инверсии, с определением границы тени, вытекающим из законов геометрической оптики. Если же имеется инверсия приведенного показателя преломления, то горизонт приходится находить из более тонких волновых соотношений: его положение в этом случае зависит и от длины волны.

Если принять, что при удалении за горизонт множитель ослабления быстро убывает, то можно условно считать (как это и сделано в главе 15), что дальность горизонта определяет дальность

* Фок, Вайнштейн и Белкина, 1956.

распространения радиоволн. Таким путем получается простая формула для дальности распространения радиоволн при сверхрефракции; в эту формулу входят высоты приемной и передающей антенн, длина волны и параметры, характеризующие ход изменения приведенного показателя преломления с высотой (M — профиль). Особенно простой вид принимает формула дальности для приведенного показателя преломления, зависящего от высоты по гиперболическому закону (параграф 5 главы 15).

Анализ сверхдальнего распространения, произведенный в главе 15 на основе понятия горизонта, нуждается, однако, в некоторых уточнениях. Прежде всего желательно выяснить, какие значения принимает множитель ослабления на горизонте и как зависит множитель ослабления вблизи горизонта от расстояния, длины волны и параметров слоя инверсии (высоты этого слоя, его среднего градиента и т. п.). Для этого, очевидно, необходимо вычислить множитель ослабления в некоторых частных случаях, поскольку в общем виде эта задача решению не поддается. Если мы при этом выясним, как быстро множитель ослабления убывает в теневой области (за горизонтом) и как быстро он возрастает до значений порядка единицы при удалении от горизонта в освещенную область, то мы тем самым проверим, в какой мере горизонт определяет в практических случаях дальность распространения радиоволн.

Ввиду большой трудоемкости расчетов множителя ослабления при сверхрефракции можно провести вычисления лишь для небольшого числа типичных случаев. Никаких исчерпывающих вычислений, как при нормальном распространении радиоволн, здесь выполнить нельзя. Поэтому мы ограничились вычислением множителя ослабления как функции безразмерной координаты ζ в четырех случаях, позволяющих для фиксированной M -кривой и при фиксированных высотах корреспондирующих точек построить зависимость множителя ослабления от горизонтального расстояния между этими точками для четырех длин волн, относящихся как 1 : 3 : 9 : 27 (ср. параграф 7).

Таким путем оказывается возможным уточнить смысл понятий дальности горизонта и дальности распространения и ответить на ряд поставленных выше вопросов, в частности на вопрос о зависимости явления сверхдальнего распространения от длины волны.

Напомним, что анализ аномального распространения, данный в главе 15, применим лишь тогда, когда одна из корреспондирующих точек находится над приземным слоем инверсии, другая же точка может быть как внутри этого слоя, так и над ним. Поэтому при расчетах множителя ослабления мы ограничились случаем, когда одна точка находится высоко над слоем инверсии, а другая — внутри слоя на высоте, равной одной пятой высоты точки инверсии.

2. О понятии горизонта при наличии приземного тропосферного волновода

Рассмотрим более подробно понятие горизонта при наличии приземного волновода (слоя инверсии).

Напомним прежде всего лучевую трактовку нормального и аномального распространения.

Для однородной атмосферы приведенный показатель преломления есть линейная функция высоты. На плоскости s, h (s — расстояние по земле, h — высота) лучи, выходящие из источника Q , имеют вид кривых, обращенных выпуклостью к оси s (рис. 1, а). Горизонт OO' определяется лучом QOO' , касающимся земной поверхности в точке O . Справа от линии горизонта OO' находится область тени, куда поле проникает лишь в результате дифракции, слева — освещенная область.

Для точек наблюдения, находящихся в освещенной области (левее горизонта OO'), приближенно применима отражательная формула, согласно которой поле получается в результате интерференции прямого луча QP с отраженным от земли лучом $QP'P$.

Лучи же от источника Q , расположенного внутри приземного атмосферного волновода высоты h_i (рис. 1, б), имеют внутри волновода выпуклость вверх (от оси s), а выше волновода — выпуклость вниз (как на рис. 1, а). Благодаря этому луч $Q1$ проходит в пространстве над волноводом, а луч $Q2$ оказывается «запертым» внутри волновода.

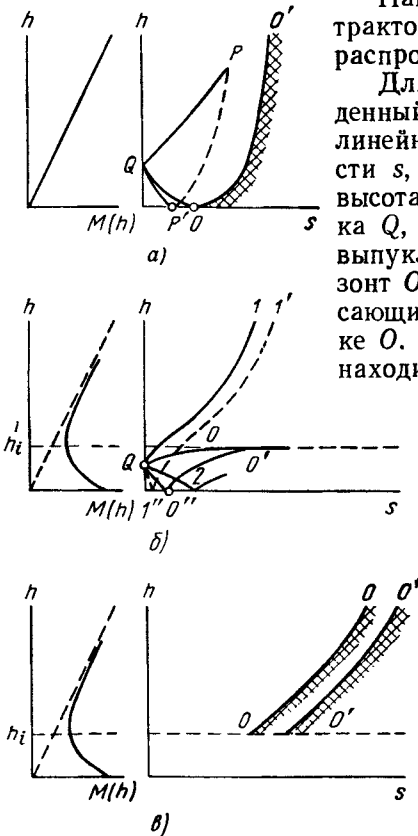


Рис. 1. Иллюстрация к понятию горизонта:

а — при нормальной рефракции; б — при сверхрефракции — по геометрической оптике; в — при сверхрефракции по волновой оптике.

Эти два рода лучей разделяются предельным лучом QO , асимптотически приближающимся при $s \rightarrow \infty$ к высоте $h = h_i$. Помимо прямых лучей в пространство над слоем инверсии падают отраженные от земли лучи, например $Q1''1'$, отделяемые от за-

пертых лучей другим предельным лучом $QO''O'$, асимптотически приближающимся к высоте h_i после однократного отражения от земли. Запертыми оказываются все лучи, выходящие из источника внутри угла OQO'' , образованного обоими предельными лучами.

Законы геометрической оптики в данном примере приводят к заключению об отсутствии горизонта как внутри волновода, так и выше. Действительно, через точки наблюдения, расположенные над волноводом правее лучей 1 и 1', проходят прямые лучи, выходящие из Q внутри угла $1QO$, и отраженные лучи, выходящие внутри угла $1''QO''$. Они пронизывают все пространство над волноводом правее лучей 1 и 1', и поэтому область геометрической тени, а следовательно, и горизонт, отсутствуют.

Легко видеть, однако, что к предельным лучам QO и $QO''O'$ и лучам, близким к предельным, законы геометрической оптики неприменимы. Из предыдущего ясно, что именно эти почти предельные лучи переносили бы (по законам геометрической оптики) электромагнитную энергию на большие расстояния над волноводом. Отсюда следует, что для решения вопроса о горизонте и дальности распространения при свэрхрефракции необходимо привлечь волновые соображения.

Это и было сделано в главе 15, где показано, что в пространстве над волноводом имеется некоторая граница $O'O'$ (рис. 1, в), правее которой отраженный от земли луч проникать не может. Эта граница $O'O'$ и есть горизонт при наличии слоя инверсии, так как правее этой границы, т. е. в теньевую область, поле (как и на рис. 1, а) может проникать только путем диффракции.

Наряду с границей $O'O'$ имеется еще граница OO , правее которой не могут проникать прямые лучи, не испытавшие отражения от земли. Граница $O'O'$ находится правее границы OO , так как при отражении от земли луч оказывается правее параллельного ему прямого луча (ср. лучи $Q1$ и $Q1''1'$ на рис. 1, б). В полосу $OO—O'O'$ прямые лучи не проходят, поэтому полное поле в этой полосе лучевой трактовке не подчиняется. Левее границы OO полное электромагнитное поле получается наложением прямого и отраженного луча.

Ввиду такого значения границы OO — границы применимости отражательной формулы — для нее целесообразно ввести особое название: мы ее будем называть горизонтом прямых волн. В отличие от нее границу $O'O'$ мы назовем горизонтом отраженных волн. В то время как при нормальном распространении эти «горизонты» совпадают, в случае аномального распространения их приходится различать. Горизонты $O'O'$ и OO на рис. 1, в заменяют в волновой картине предельные лучи $QO''O'$ и QO (рис. 1, б), получаемые из геометрической оптики.

Эти общие соображения будут уточнены в параграфе 4.

3. Основные формулы

Множитель ослабления V в неоднородной атмосфере, показатель преломления которой зависит только от высоты, может быть представлен в виде контурного интеграла

$$V(x, y', y) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_C e^{ixt} F(t, y', y) dt. \quad (3.01)$$

При наличии приземного слоя инверсии, если одна из корреспондирующих точек находится над слоем, а другая — внутри него, для подынтегральной функции F можно взять следующее приближенное выражение [см. формулу (5.08) главы 15]:

$$F(t, y', y) = \frac{e^{i[S(y') - 2S_0]}}{\sqrt[4]{p(y') - t} \sqrt[4]{p(y) - t}} \frac{\sin S(y)}{[\chi(v) e^{-2iS_0} - i e^{-\pi v}]}. \quad (3.02)$$

Здесь y' и y — безразмерные высоты источника и точки наблюдения ($y' > y$, причем $y' > y_i$, а $y < y_i$, где y_i — безразмерная высота точки инверсии), x — безразмерное горизонтальное расстояние между источником и точкой наблюдения, а $p(y)$ — функция, связанная с приведенным показателем преломления $M(h)$ формулой

$$p(y) = \frac{2m^2}{10^6} M(h) = 2m^2 \left(n - 1 + \frac{h}{a} \right), \quad m = \left(\frac{ka}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.03)$$

причем n есть показатель преломления воздуха, a — радиус Земли.

Мы предполагаем, что функция $M(h)$ имеет такой же вид, как на рис. 1, б и 1, в. Поэтому при данном t уравнение

$$p(y) - t = 0 \quad (3.04)$$

имеет два корня y_1 и y_2 . При $p(y_i) < t < p(0)$ эти корни вещественны и положительны, при $t < p(y_i)$ они комплексно сопряжены; при $t = p(y_i)$ они сливаются, и тогда $y_1 = y_2 = y_i$. Помимо этих двух корней могут быть, вообще говоря, и другие корни (отрицательные или комплексные), но они значения не имеют.

Величины $S(y)$, $S(y')$ и S_0 даются формулами

$$\left. \begin{aligned} S(y) &= \int_0^y \sqrt{p(y) - t} dy, & S(y') &= \int_0^{y'} \sqrt{p(y) - t} dy, \\ S_0 &= \frac{1}{2} \int_0^{y_1} \sqrt{p(y) - t} dy + \frac{1}{2} \int_0^{y_2} \sqrt{p(y) - t} dy, \end{aligned} \right\} \quad (3.05)$$

причем для $t < p(y_i)$ радикалы $\sqrt{p(y) - t}$ при вещественных положительных y нужно брать в арифметическом смысле. Для вычисления S_0 при $t < p(y_i)$ необходимо аналитически продолжить радикал $\sqrt{p(y) - t}$ в область комплексных y . Мы будем считать, что $p(y)$ есть аналитическая функция [ср. ниже формулу (3.18)], допускающая такое продолжение.

Величина v определяется формулой

$$v = \frac{1}{i\pi} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{p(y) - t} dy. \quad (3.06)$$

Для вещественных значений t величина v также вещественна, причем знак v выбирается из следующих соображений. При $y \approx y_i$ функция $p(y)$ может быть заменена первыми членами ряда Тейлора

$$p(y) = p(y_i) + \frac{1}{2} p''(y_i)(y - y_i)^2, \quad p''(y_i) > 0,$$

после чего интеграл (3.06) можно вычислить, и мы получаем для $t \approx p(y_i)$ приближенную формулу

$$v = \frac{p(y_i) - t}{\sqrt{2p''(y_i)}}, \quad (3.07)$$

в соответствии с которой мы считаем $v > 0$ при $t < p(y_i)$ и $v < 0$ при $t > p(y_i)$; при $p(y_i) < t < p(0)$ формула (3.06) расшифровывается так:

$$v = -\frac{1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{t - p(y)} dy, \quad (3.08)$$

где $\sqrt{t - p(y)} > 0$, а $y_1 < y_2$.

Функция $\chi(v)$ определяется формулой

$$\chi(v) = \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\pi}{2}v + t} (v - v \lg v)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - iv\right)}, \quad (3.09)$$

причем при $v > 0$ ($t < p(y_i)$) для $\lg v$ берется главное значение. При этом

$$\chi(v) \rightarrow 1 \text{ при } v \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

При вычислении множителя ослабления для больших значений y_i нужно учесть, что при $y \rightarrow \infty$ функция $p(y)$ должна удовлетворять соотношению

$$\lim_{y \rightarrow \infty} [p(y) - y] = 0. \quad (3.11)$$

Поэтому, представляя функцию $S(y')$ в форме

$$S(y') = \int_0^{y'} \sqrt{y-t} dy + \int_0^{y'} [V p(y) - t - \sqrt{y-t}] dy,$$

мы видим, что при $y' \rightarrow \infty$ первое слагаемое неограниченно возрастает (бесконечная часть равна $\frac{2}{3} y'^{3/2} - t \sqrt{y'}$), а второе стремится к конечному пределу, если разность $p(y) - y$ стремится к нулю достаточно быстро [например так, как для функции $p(y)$, определяемой формулами (3.18) и (3.19)].

Введем величину ξ_0 как предел

$$\xi_0 = \lim_{y' \rightarrow \infty} \left[S(y') - 2S_0 - \frac{2}{3} y'^{3/2} + t \sqrt{y'} \right]. \quad (3.12)$$

Используя приближенное равенство

$$S(y') - 2S_0 = \frac{2}{3} y'^{3/2} - t \sqrt{y'} + \xi_0,$$

справедливое при больших значениях y' , и заменяя в знаменателе формулы (3.02) величину $\sqrt[4]{p(y') - t}$ на $\sqrt[4]{y'}$, мы получаем множитель ослабления в виде

$$V(x, y', y) = \sqrt[4]{\frac{x^2}{y'}} e^{i \frac{2}{3} y'^{3/2}} V_1(\zeta, y), \quad (3.13)$$

где

$$V_1(\zeta, y) = \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\zeta}^{\infty} e^{i \zeta t} \Psi(t, y) dt \quad (3.14)$$

и

$$\Psi(t, y) = \frac{e^{i \xi_0} \sin S(y)}{\sqrt[4]{p(y) - t} [\chi(v) e^{-2i S_0} - i e^{-\pi v}]}. \quad (3.15)$$

Функция $V_1(\zeta, y)$ связана с множителем ослабления V такой же формулой, как и в теории нормального распространения радиоволн. Как и в этой теории, естественно назвать V_1 множителем ослабления плоской волны. Так как в дальнейшем мы будем вычислять только V_1 , то мы часто будем называть V_1 просто множителем ослабления.

Входящая в V_1 переменная ζ равна

$$\zeta = x - \sqrt{y'}. \quad (3.16)$$

Геометрический смысл величины ζ следует из рис. 2, где через T обозначена точка, в которой падающая плоская волна (или сфе-

рическая волна от удаленного источника) касается земной поверхности. Величина ζ связана с углом $\vartheta = \angle TCP$ (P — точка наблюдения, C — центр Земли) или с соответствующим ему расстоянием по земле $s = a\vartheta$ соотношениями

$$\zeta = m\vartheta = m \frac{s}{a}, \quad m = \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.17)$$

Заметим, что точка касания T соответствует ходу лучей в однородной атмосфере.

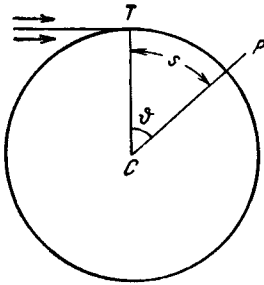


Рис. 2. Геометрический смысл величины $\zeta = m\vartheta$.

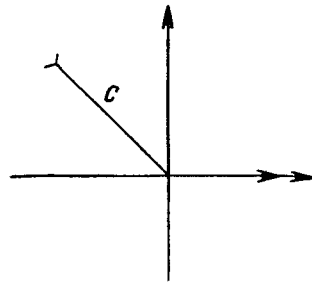


Рис. 3. Контур C в плоскости комплексной переменной $t - p(y_i)$.

Бесконечный контур C в плоскости комплексной переменной t , по которому берутся интегралы для V и V_1 , в значительной степени произволен и должен быть выбран так, чтобы вычисление интеграла на нем можно было производить с наименьшим трудом, в частности, чтобы главный участок интегрирования был по возможности мал. При этом контур C должен охватывать все полюса подынтегральной функции в положительном направлении так, чтобы они находились выше контура C . В качестве контура интегрирования удобнее всего оказалось выбирать контур, изображенный на рис. 3; точка излома этого контура расположена либо при $t = p(y_i)$, либо несколько левее (ср. конец параграфа 6).

В подынтегральную функцию $\Psi(t, y)$ входят, как видно из формул (3.05) и (3.06), интегралы вида $\int \sqrt{p(y) - t} dy$ при различных t и различных пределах интегрирования, в том числе комплексных. Для облегчения вычислений этих интегралов для приведенного показателя преломления $M(h)$ был взят гиперболический закон (6.23) главы 15, откуда функция $p(y)$ получается по формуле (3.03) в виде

$$p(y) = p(y_i) + \frac{(y - y_i)^2}{y + y_i}, \quad (3.18)$$

причем из соотношения (3.11) вытекает, что

$$p(y_i) = y_i + 2y_i. \quad (3.19)$$

В силу (3.19) в формуле (3.18) имеется два параметра y_i и y_i , причем y_i есть безразмерная высота точки инверсии. Целесообразно ввести также особое обозначение

$$Y = y_i + y_i, \quad (3.20)$$

тогда

$$p''(y_i) = \frac{2}{Y}. \quad (3.21)$$

Заметим, что в случае гиперболического закона уравнение (3.04) является квадратным уравнением с двумя корнями y_1 и y_2 , сливающимися при $t = p(y_i)$.

Для гиперболического закона нужные нам интегралы выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода. Однако в рассмотренных нами случаях оказалось более удобным вычислять эти интегралы с помощью разложений по степеням параметра a^2 , где

$$a^2 = \frac{t - p(y_i)}{4Y}. \quad (3.22)$$

В этих разложениях, содержащих также и логарифмические слагаемые, достаточно взять несколько первых членов, так как главный участок интегрирования на контуре C соответствует весьма малым значениям параметра a^2 . Дальнейшие члены разложений существенны (при взятых нами больших значениях параметра Y , см. начало параграфа 5) лишь на таких участках контуров, где вся подынтегральная функция уже мала.

В заключение остановимся на аналитическом продолжении функций $F(t, y', y)$ и $\Psi(t, y)$ на всю плоскость комплексной переменной t . Дело в том, что величины $S(y)$, $S(y')$, S_0 и $\chi(v)$, входящие в эти функции, первоначально определены лишь на вещественной оси при $t < p(y_i)$ ($v > 0$), где для радикалов $\sqrt[4]{p(y') - t}$ и $\sqrt[4]{p(y) - t}$ берутся арифметические значения. Однако знание подынтегральной функции при $t < p(y_i)$ оказывается достаточным только при вычислении по отражательной формуле (параграф 4). Для вычисления контурных интегралов нужно знать подынтегральную функцию при комплексных t , что достигается с помощью аналитического продолжения.

При этом нужно иметь в виду, что в точке $t = p(y_i)$ точные функции $F(t, y', y)$ и $\Psi(t, y)$ особенностей не имеют. Асимптотическое выражение (3.15) для функции $\Psi(t, y)$ имеет, однако, особые точки (точки ветвления) при $t = p(y)$ (для выражений

$\sqrt[4]{p(y) - t}$ и $S(y)$ и при $t = p(0)$ (для выражений $S(y)$ и ξ_0). Эти особые точки получаются вследствие того, что мы пользуемся асимптотическими выражениями. На самом деле точки ветвления отсутствуют, так как точная подынтегральная функция должна быть мероморфной. Поэтому мы обходим «кажущиеся особые точки» снизу, считая, например, при $t > p(y)$, что $\arg [p(y) - t] = \pi$ и $\sqrt[4]{p(y) - t} = i \sqrt[4]{t - p(y)}$, причем $\sqrt[4]{t - p(y)} > 0$. Этот обход по существу условен, так как формула (3.02) при $t > p(y)$ неприменима в силу так называемого явления Стокса. Пренебрегать этим явлением можно лишь в случае, когда участок $t > p(y)$ дает малый вклад в значение контурного интеграла, что в рассмотренных нами случаях имеет место. Проведенные нами контрольные вычисления при помощи функций параболического цилиндра (см. главу 15 параграф 3), дающих более точное асимптотическое представление подынтегральной функции $\Psi(t, y)$, подтвердили не только качественную, но и количественную правильность результатов, полученных с помощью формулы (3.15).

Функция $\Psi(t, y)$ имеет также полюса, соответствующие корням уравнения (6.01). В случае, когда полюса близко подходят к контуру интегрирования, их приходится обходить снизу.

4. Отражательная формула

В освещенной области естественно вычислять множитель ослабления по методу стационарной фазы, так как этот метод дает переход к законам геометрической оптики, применимым достаточно далеко от горизонта. К интегралу (3.14) метод стационарной фазы можно применить следующим образом. Представим подынтегральную функцию Ψ на вещественной оси в виде

$$\Psi = \frac{i}{2} \frac{e^{i\Omega(t)} - e^{i\Phi(t)}}{\sqrt[4]{p(y) - t} |\chi(v)| (1 - \Lambda)}, \quad (4.01)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Omega(t) &= \xi_0 - S(y) + 2S_0 - \arg \chi(v), \\ \Phi(t) &= \xi_0 + S(y) + 2S_0 - \arg \chi(v) = \Omega(t) + 2S(y), \end{aligned} \right\} \quad (4.02)$$

$$- \arg \chi(v) = v \lg v - v + \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} - iv\right) \quad (4.03)$$

и

$$\Lambda = \frac{i}{\chi(v)} e^{-\pi v + 2iS_0}. \quad (4.04)$$

Для всей подынтегральной функции в интеграле (3.14) можно написать при вещественных t выражение

$$e^{i\zeta t}\Psi = \frac{i}{2} \frac{e^{i\omega(t)} - e^{i\varphi(t)}}{\sqrt[4]{\rho(y)-t} |\chi(v)|(1-\Lambda)}, \quad (4.05)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega(t) &= \zeta t + \Omega(t), \\ \varphi(t) &= \zeta t + \Phi(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.06)$$

Так как при этом v также вещественно, то

$$|\chi(v)| = \sqrt{1 + e^{-2\pi v}} \quad (4.07)$$

и если $v > 0$, то

$$|\Lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\pi v}}}. \quad (4.08)$$

Последняя формула показывает, что при $v > 0$ ($t < \rho(y_i)$) абсолютная величина Λ меньше единицы (в частности, $|\Lambda| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ при $v = 0$) и быстро стремится к нулю при увеличении v . Поэтому, если мы ищем точку стационарной фазы при $t < \rho(y_i)$, мы можем пренебрегать фазой знаменателя $1 - \Lambda$. Тогда точки стационарной фазы t_1 и t_2 первого и второго слагаемых в правой части формулы (4.05) получаются из уравнений

$$\omega'(t_1) = 0, \quad \varphi'(t_2) = 0 \quad (4.09)$$

или

$$\zeta = -\Omega'(t_1), \quad \zeta = -\Phi'(t_2), \quad (4.10)$$

причем при заданных ζ и y значения t_1 и t_2 различны.

Вычисления показывают, что функции $-\Omega'(t)$ и $-\Phi'(t)$ имеют максимум. Поэтому мы находим два значения t_1 и два значения t_2 (по крайней мере, если ζ не слишком велико). Следует брать только значения t_1 и t_2 , удовлетворяющие неравенству $t < \rho(y_i)$ ($a^2 < 0$), поскольку лишь для этих значений можно при определении точек стационарной фазы пренебрегать фазой знаменателя $1 - \Lambda$.

Найдя точки t_1 и t_2 , мы можем вычислить интеграл (3.14), применяя метод стационарной фазы к каждому слагаемому формулы (4.05). Таким путем мы и приходим к отражательной формуле для множителя ослабления V_1 :

$$V_1(\zeta, y) = \frac{e^{i\omega(t_1)}}{\sqrt[4]{\rho(y)-t_1}} \frac{A(t_1)}{\sqrt{-2\omega''(t_1)}} - \frac{e^{i\varphi(t_2)}}{\sqrt[4]{\rho(y)-t_2}} \frac{A(t_2)}{\sqrt{-2\varphi''(t_2)}}, \quad (4.11)$$

где

$$A(t) = \frac{1}{|\chi(v)|(1-\Lambda)}. \quad (4.12)$$

Первый член отражательной формулы (4.11) есть прямая волна, второй член — волна, отраженная от земли. Эта формула имеет ту же структуру, что и обычная отражательная формула геометрической оптики, однако в ней отображены поправки, возникающие при строгом рассмотрении прохождения волн через слои, примыкающие к точке инверсии.

Заметим, что при уменьшении ζ величины t_1 и t_2 уменьшаются, и соответствующие им значения ν увеличиваются. При достаточно больших положительных ν можно считать

$$\Lambda = 0; \quad \chi(\nu) = 1, \quad A = 1 \quad (4.13)$$

и использовать поэтому для функций $\Omega(t)$ и $\Phi(t)$ более простые выражения

$$\left. \begin{aligned} \Omega(t) &= \Xi_0 - S(y), \\ \Phi(t) &= \Xi_0 + S(y), \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

где

$$\Xi_0 = \xi_0 + 2S_0 = \lim_{y' \rightarrow \infty} \left[S(y') - \frac{2}{3} y'^{3/2} + t \sqrt{y'} \right]. \quad (4.15)$$

При таких упрощениях отражательная формула (4.11) переходит в обычную отражательную формулу, вытекающую из законов геометрической оптики в неоднородной атмосфере. Последняя, таким образом, применима к лучам, достаточно далеким от предельных лучей QO и QO^*O' на рис. 1, б, точнее, к тем лучам, у которых $\nu(t_1)$ и $\nu(t_2)$ — достаточно большие положительные числа. Для самих предельных лучей, как легко сообразить, имеем $\nu = 0$, и геометрическая оптика к ним неприменима.

Возвращаясь к общей отражательной формуле (4.11), введем для максимальных значений $-\Omega'(t)$ и $-\Phi'(t)$ обозначения

$$\zeta_1 = [-\Omega'(t)]_{\max}, \quad \zeta_2 = [-\Phi'(t)]_{\max}. \quad (4.16)$$

В силу формул (4.02) всегда выполняется неравенство

$$\zeta_1 < \zeta_2. \quad (4.17)$$

Отсюда мы видим, что найти точки стационарной фазы t_1 и t_2 для обоих слагаемых в формуле (4.05) можно только при $\zeta < \zeta_1$. При $\zeta > \zeta_1$ уравнение $\omega'(t) = 0$ не имеет вещественного решения, и прямая волна не выражается первым слагаемым формулы (4.11). Поэтому значение $\zeta = \zeta_1$ определяет горизонт прямых волн (ср. параграф 2). Аналогично значение $\zeta = \zeta_2$ определяет горизонт волн, отраженных от земли.

Физический смысл ζ_2 заключается в том, что в область $\zeta > \zeta_2$ электромагнитные волны просачиваются только путем дифракции; поэтому $\zeta = \zeta_2$ есть граница области тени. Физический смысл ζ_1 состоит в том, что при $\zeta < \zeta_1$ применима отражательная фор-

мула (4.11), вследствие чего $\xi = \xi_1$ есть граница освещенной области. Область $\xi_1 < \xi < \xi_2$ есть промежуточная область, заключенная между обоими горизонтами.

Так как максимальные значения функций $-\Omega'(t)$ и $-\Phi'(t)$ достигаются вблизи точки $t = p(y_i)$, то величины

$$\tilde{\xi}_1 = [-\Omega'(t)]_{t=p(y_i)}, \quad \tilde{\xi}_2 = [-\Phi'(t)]_{t=p(y_i)} \quad (4.18)$$

будут весьма близки к величинам, определенным формулами (4.16); мы покажем это на примерах в параграфе 5. Поэтому положение горизонтов можно приближенно определять по формулам типа (4.18), что гораздо проще, чем строить графики функций $-\Omega'(t)$ и $-\Phi'(t)$, необходимые при пользовании формулами (4.16). Для гиперболического закона (3.18) формулы (4.18) приводят к выражениям

$$\tilde{\xi}_1 = G_0 - G(y); \quad \tilde{\xi}_2 = G_0 + G(y), \quad (4.19)$$

где

$$G_0 = V\bar{y}_l - \frac{V\bar{Y}}{2} \lg \frac{V\bar{Y} + V\bar{y}_l}{V\bar{Y} - V\bar{y}_l} + \frac{V\bar{Y}}{2} \left[C_1 + \frac{1}{2} \lg(Y^3) \right]; \quad (4.20)$$

$$G(y) = -\sqrt{y_l + y} + V\bar{y}_l + \frac{V\bar{Y}}{2} \left[\lg \frac{V\bar{Y} + V\bar{y}_l + y}{V\bar{Y} - V\bar{y}_l + y} - \lg \frac{V\bar{Y} + V\bar{y}_l}{V\bar{Y} - V\bar{y}_l} \right] \quad (4.21)$$

и

$$C_1 = C + 7 \lg 2 - 4 = 1,429 \quad (4.22)$$

(C — постоянная Эйлера).

Вторая формула (4.19) при переходе к обычным (размерным) координатам дает формулу для дальности горизонта отраженных волн [формула (6.32) главы 15]. Первая же формула (4.19) определяет, как мы уже говорили, дальность горизонта прямых волн.

Заметим в заключение, что отражательная формула (4.11) применима для вычисления множителя ослабления V_1 почти до самого горизонта прямых волн Γ_1 .

5. Численные результаты в безразмерных координатах

При вычислении множителя ослабления V_1 для гиперболического закона инверсии мы брали следующие численные значения параметров, входящих в функцию $p(y)$ [формулы (3.18)—(3.20)]:

Таблица 1

№	y_i	y_l	γ	$p(y_i)$	$p(0) - p(y_i)$	y
1	10,40	197,61	208,01	218,41	0,542	2,08
2	5,00	95,00	100,00	105,00	0,260	1,00
3	2,40	45,67	48,07	50,48	0,125	0,48
4	1,16	21,95	23,11	24,27	0,060	0,23

Функции $p(y)$ при выбранных значениях параметров изображены на рис. 4. Сделанный нами выбор позволяет при определенном M -профиле (см. параграф 7) рассчитать распространение четырех длин волн, которые относятся как 1 : 3 : 9 : 27. При этом первая строка табл. 1 соответствует самой короткой, а четвертая — самой длинной волне.

Во всех случаях мы брали

$$y = \frac{y_i}{5}, \text{ т. е. предполагали}$$

высоту одной из соответствующих точек равной одной пятой высоты слоя инверсии. Другую точку мы брали на большей высоте над слоем инверсии — настолько большой, что можно пользоваться множителем ослабления $V_1(\zeta, y)$, связанным с V по формуле (3.13).

Вычисленные нами четыре кривые для множителя ослабления V_1 в зависимости от переменной ζ даны на рис. 5*. Индексы 1, 2, 3 и 4 на кривых показывают, какой строке табл. 1 и какой кривой на рис. 4 соответствует данная кривая для множителя ослабления. На каждой кривой точка Γ_1 отмечает положение горизонта прямых волн, а точка Γ_2 — положение горизонта волн, отраженных от земли. Точки Γ_0 вблизи начала координат, снабженные теми же индексами 1, 2, 3 и 4, определяют горизонт (границу прямой видимости) при однородной атмосфере; соответствующие значения ζ_0 получаются из простой формулы $\zeta_0 = \sqrt{y}$.

Как видно, во всех четырех рассмотренных случаях имеет место сверхдальнее распространение, наиболее сильно выражен-

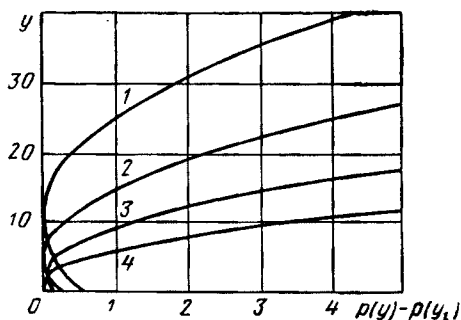


Рис. 4. Графики функции $p(y) - p(y_i)$ для значений параметров табл. 1.

* На всех чертежах, выполненных в логарифмическом масштабе, по логарифмической оси отложены десятичные (а не натуральные) логарифмы,

ное, как это и следовало ожидать, в кривой 1. При переходе к кривым 2, 3 и 4 явление сверхдальнего распространения монотонно ослабевает, однако и по кривой 4 при $\zeta \approx 5$ множитель ослабления $|V|$ оказывается порядка 0,1, в то время как при тех же ζ и y , но в однородной атмосфере, $|V_1|$ принимает значения на четыре порядка ниже ($|V_1| \approx 0,000013$).

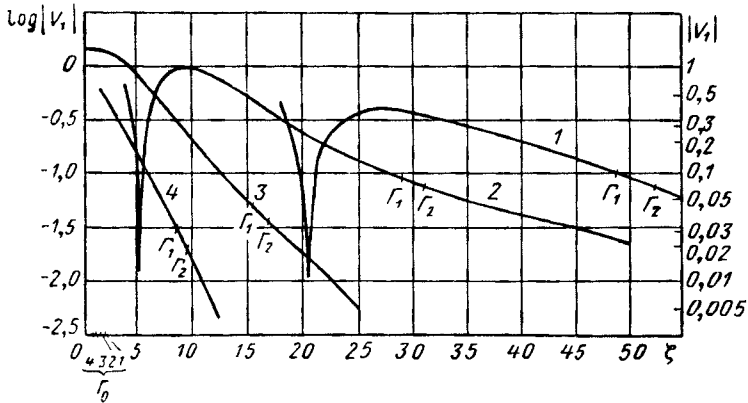


Рис. 5. Зависимость множителя ослабления V_1 от ζ . Номера кривых 1, 2, 3, 4 соответствуют номерам строк табл. 1 и номерам кривых рис. 4.

В табл. 2 приведены значения функции $|V_1|$ на горизонтах Γ_1 и Γ_2 .

Таблица 2

№	Γ_1	Γ_2	Γ_0	y
1	0,096	0,070	0,24	2,08
2	0,095	0,080	0,19	1,00
3	0,047	0,035	0,14	0,48
4	0,031	0,023	0,083	0,23

Из нее видно, что значения множителя ослабления на обоих горизонтах Γ_1 и Γ_2 изменяются в довольно широких пределах — в 3—3,5 раза. Для сравнения в табл. 2 приведены значения $|V_1|$ на горизонте Γ_0 при нормальном распространении и при тех же значениях y . Сопоставление столбцов показывает, что при нормальном распространении значения множителя ослабления на горизонте имеют благодаря зависимости от y примерно такой же разброс, что и при аномальном распространении на горизонтах Γ_1 и Γ_2 .

Можно заметить, что на горизонтах Γ_1 и Γ_2 не происходит внезапного изменения характера распространения. При удалении от источника множитель ослабления начинает монотонно убывать уже в освещенной области, левее обоих горизонтов. Это приводит, в частности, к тому, что множитель ослабления на горизонтах Γ_1 и Γ_2 оказывается по табл. 2 в 2—4 раза меньше, чем при нормальном распространении на горизонте Γ_0 . Такое поведение множителя ослабления объясняется, по-видимому, тем, что не только за горизонтами Γ_1 и Γ_2 , но и левее их имеют значение диффракционные (точнее, волновые) явления, учитываемые отражательной формулой (4.11) и не укладывающиеся в законы геометрической оптики.

Для выяснения применимости простых формул (4.18)—(4.22) для расчета дальности горизонтов Γ_1 и Γ_2 сравним в рассмотренных нами случаях даваемые ими результаты с результатами по формулам (4.16).

Таблица 3

№	ζ_1	$\tilde{\zeta}_1$	ζ_2	$\tilde{\zeta}_2$
1	49,11	49,11	52,26	52,26
2	28,56	28,56	30,74	30,74
3	16,08	15,99	17,52	17,50
4	8,67	8,45	9,52	9,50

Табл. 3 показывает, что обе формулы дают весьма близкие числа. Поэтому для практических расчетов дальности горизонтов можно пользоваться простыми формулами главы 15.

6. Множитель ослабления в глубокой тени. Ряд вычетов

Множитель ослабления в глубокой тени удобно исследовать при помощи ряда вычетов, который получается из интеграла (3.14) обычным способом (ср. главу 14, параграф 6). Чтобы получить ряд вычетов, прежде всего нужно определить точное положение полюсов функции $\Psi(t, y)$, т. е. корней уравнения

$$1 - \Lambda = 0. \quad (6.01)$$

Эти корни находятся вблизи контура C (рис. 3) или внутри него. Если обозначить

$$\Delta t = t - p(y_i), \quad (6.02)$$

то значения Δt для найденных нами корней приведены в табл. 4, первый столбец которой показывает номер строки в табл. 1, а второй — номер корня для данного случая.

Таблица 4

№	m	Δt_m	№	m	Δt_m
1	1	$0,10653 + i 0,00019$	3	2	$-0,1733 + i 0,3293$
	2	$-0,06364 + i 0,05523$		1	$-0,1038 + i 0,2238$
	3	$-0,1633 + i 0,2107$		2	$-0,1883 + i 0,6934$
2	4	$-0,2495 + i 0,3913$	4	1	$-0,0852 + i 0,4661$
	1	$-0,06338 + i 0,06518$		2	$-0,1275 + i 1,1318$

Положение вещественных частей трех первых корней относительно кривой $\rho(y)$ для первого случая изображено на рис. 6. Мы видим, что лишь первый корень соответствует «захваченной» волне в обычном понимании, другие же два корня дают волны, которые с точки зрения геометрической оптики легко выходили

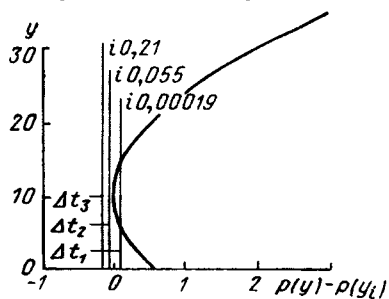


Рис. 6. Корни t_m , соответствующие захваченным и незахваченным волнам для данного $\rho(y) - \rho(y_i)$.

бы за пределы слоя инверсии. Однако эти «просачивающиеся» волны имеют небольшое затухание и активно участвуют в процессе сверхдальнего распространения. Напомним, что при нормальном распространении $t_1 = 1,17 + i2,02$, так что в данном случае третья волна затухает в 10 раз медленнее, чем наименее затухающая волна в нормальных условиях распространения. Для остальных случаев все корни соответствуют «просачивающимся» волнам.

Преобразуем уравнение (6.01) к простому приближенному виду, допускающему сравнение с другими теориями сверхдальнего распространения. Начнем с «захваченных» волн, которые имеют почти вещественные t , лежащие между $\rho(y_i)$ и $\rho(0)$ (как первый корень в табл. 4), и, следовательно, отрицательные значения v . Для $v < 0$ мы положим

$$v = (-v) e^{i\pi}, \quad \lg v = \lg(-v) + i\pi. \quad (6.03)$$

Тогда наряду с (3.10) будем иметь

$$\chi(v) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad v \rightarrow -\infty \quad (6.04)$$

и из формулы (3.05) получаем

$$S_0 = S_1 - \frac{i\pi}{2} \nu, \quad (6.05)$$

где

$$S_1 = \int_0^{y_1} \sqrt{p(y) - t} dy, \quad (6.06)$$

а y_1 означает наименьший положительный корень уравнения (3.04). С учетом этих формул уравнение (6.01) принимает вид

$$ie^{2iS_1} = \chi(\nu). \quad (6.07)$$

Если ν велико и отрицательно (сильно захваченные волны), то в силу соотношения (6.04) мы получаем более простое уравнение

$$S_1 = \left(m - \frac{1}{4}\right) \pi; \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6.08)$$

соответствующее известному характеристическому уравнению захваченных волн.

Представим себе теперь, что ν положительно или комплексно с положительной вещественной частью, т. е. $\operatorname{Re} t < p(y_i)$ или $\operatorname{Re} \Delta t < 0$. В этом случае величину S_1 определить с помощью формулы (6.06) нельзя хотя бы потому, что неизвестно, какой из комплексных корней y_1 и y_2 следует брать. Однако, обращая формулу (6.05), мы можем всегда определить S с помощью соотношения

$$S_1 = S_0 + \frac{i\pi}{2} \nu, \quad (6.09)$$

и тогда из уравнения (6.01) опять получаем уравнение (6.07). При надлежащем [т. е. соответствующем формуле (6.03)] выборе $\arg \nu$ при $|\nu| \rightarrow \infty$ мы всегда имеем $\chi(\nu) \rightarrow 1$ (за исключением случая $\arg \nu = -\frac{\pi}{2}$). Так как, кроме того, $\chi(0) = \sqrt{2}$, то и для «просачивающихся» волн можно считать в первом, самом грубом, приближении $\chi(\nu) = 1$, и мы получаем уравнение (6.08).

Заметим, что упрощенное уравнение (6.08) пригодно также и для нормального распространения, когда в соотношении (6.06) надо полагать $p(y) = y$ и $y_1 = t$. Таким путем из (6.08) мы получаем

$$t_m = \left[\frac{3}{2} \left(m - \frac{1}{4}\right) \pi \right]^{\frac{2}{3}} e^{i \frac{\pi}{3}}, \quad (6.10)$$

что приближенно соответствует корням характеристического уравнения для однородной атмосферы.

Для проверки уравнения (6.08) мы вычислили (табл. 5) для найденных нами корней величину S_1 по формуле (6.09), и в результате получили такие числа:

Таблица 5

№	m	$(m - \frac{1}{4})\pi$	S_1	v
1	1	2,356	2,326 - i 0,001	-0,768 - i 0,0014
	2	5,498	5,537 + i 0,047	0,459 - i 0,398
	3	8,639	8,646 + i 0,009	1,178 - i 1,519
	4	11,781	11,784 + i 0,005	1,800 - i 2,821
2	1	2,356	2,444 + i 0,062	0,317 - i 0,376
	2	5,498	5,501 + i 0,011	0,867 - i 1,646
3	1	2,356	2,315 + i 0,011	0,360 - i 0,776
	2	5,498	5,516 + i 0,014	0,656 - i 2,402
4	1	2,356	2,436 + i 0,079	0,207 - i 1,120
	2	5,498	5,499 + i 0,007	0,319 - i 2,718

Таким образом, вычисляя S_1 для найденного корня, мы с помощью приближенного соотношения (6.08) можем приписать ему номер m .

На рис. 7 представлен множитель ослабления в глубокой тени, вычисленный по ряду вычетов для первого случая. Рис. 7 показывает, что первый член ряда вычетов, соответствующий полюсу t_1 , определяет множитель ослабления лишь при $\zeta > 150$, т. е. для волны $\lambda = 1$ см при $s > 1000$ км. Так как первый член имеет ничтожное затухание, то на таких больших расстояниях абсолютная величина множителя ослабления будет почти постоянной — асимптотой на рис. 7 почти горизонтальна. Заметим, что в глубокой тени на рис. 7

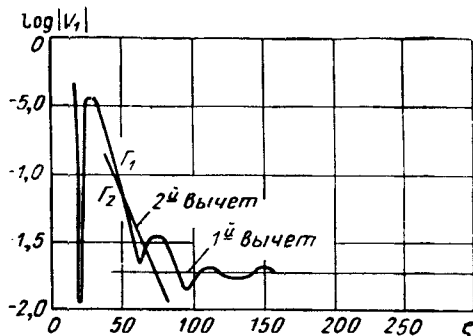


Рис. 7. Зависимость от ζ вычисляемого по ряду вычетов множителя ослабления V_1 в глубокой тени.

множитель ослабления приближается к асимптоте, совершая затухающие колебания. Эти колебания вызваны интерференцией первой и второй «простой волны».

Таким образом, первая простая волна, имеющая наименьшее затухание, весьма слабо возбуждается волной, падающей сверху на тропосферный волновод, благодаря чему эта простая волна

может иметь решающее значение лишь на весьма больших расстояниях. Вблизи горизонтов Γ_1 и Γ_2 основное значение имеет второй и отчасти третий член ряда вычетов. Это явление должно иметь общий характер, так как если простая волна является «захваченной» (см. выше) и почти не просачивается из слоя инверсии (чем и объясняется ее ничтожное затухание), то по соображениям взаимности она почти не возбуждается излучателями, расположенными выше слоя инверсии. Волны, обладающие большим затуханием, в большей степени проникают в пространство над слоем инверсии, поэтому они возбуждаются сильнее и играют основную роль вблизи горизонтов.

Благодаря отмеченному обстоятельству горизонты Γ_1 и Γ_2 действительно определяют (хотя и в довольно приближенном смысле) дальность распространения радиоволн даже при сильно выраженной сверхрефракции (как видно из рис. 7).

Обычно при рассмотрении сверхдальнего распространения базируются на ряде вычетов. При этом предполагают, что лишь захваченные волны ($\text{Re } \Delta t_m > 0$) могут иметь малое затухание. На самом же деле и волны «просачивающиеся» ($\text{Re } \Delta t_m < 0$) в ряде случаев также затухают слабо. Поэтому волны в несколько раз более длинные, чем «критическая» длина волны λ_0 , определяемая по Бреммеру [25], еще способны к сверхдальному распространению в тропосферном волноводе.

Заметим в заключение, что, как показали расчеты, несколько первых членов ряда вычетов уже позволяют вычислить множитель ослабления почти вплоть до смыкания с отражательной формулой и избавляют таким образом от вычислений по квадратурам (ср. параграф 3).

7. Численные результаты для конкретного случая

Для облегчения физического анализа численных результатов, полученных нами в параграфе 5, мы рассмотрим здесь соответствующий им конкретный случай.

В качестве примера мы возьмем M -профиль, изображенный на рис. 8, и построим множитель ослабления V_1 для следующих волн: 1) 3,33 см, 2) 10 см, 3) 30 см, 4) 90 см. График V_1 дан на рис. 9. Номера кривых на рис. 9 указывают на перечисленные здесь длины волн. По оси абсцисс мы откладываем на нижней шкале расстояние s в километрах, а на верхней — углы ψ в градусах (ср. рисунок 2). По оси ординат отложены десятичные логарифмы, а на правой шкале отмечены еще значения $|V_1|$.

Отметим, что в наших расчетах не принимается во внимание дисперсия. Мы предполагаем, что M -кривая имеет один и тот же

вид для всех четырех волн, для которых на рис. 9 дан множитель ослабления V_1 .

M -кривая на рис. 8 построена по гиперболическому закону

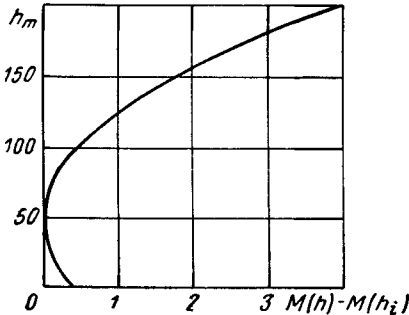


Рис. 8. Зависимость от высоты h приведенного показателя преломления (M -профиль) для значений параметров:

$h_i = 46,5$ м; $l = 884$ м; $H = 930,5$;
 $M(h_i) = 153,5$ и $M(0) - M(h_i) = 0,381$.

причем h_i есть высота точки инверсии или, что то же самое, высота атмосферного волновода. Высота

$$H = h_i + l \left(Y = \frac{kH}{m} \right), \quad (7.04)$$

как легко показать, определяет радиус кривизны M -кривой в точке инверсии.

$$M(h) = M(h_i) + \frac{1}{a} \frac{(h-h_i)^2}{h+l}, \quad (7.01)$$

в котором

$$M(h_i) = \frac{l+2h_i}{a}. \quad (7.02)$$

Гиперболический закон включает в себя два параметра: h_i и l , имеющие размерность высоты и связанные с безразмерными постоянными y_i и y_l в формуле (3.18) соотношениями

$$y_l = \frac{kh_i}{m}, \quad y_i = \frac{kl}{m},$$

$$m = \left(\frac{ka}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (7.03)$$

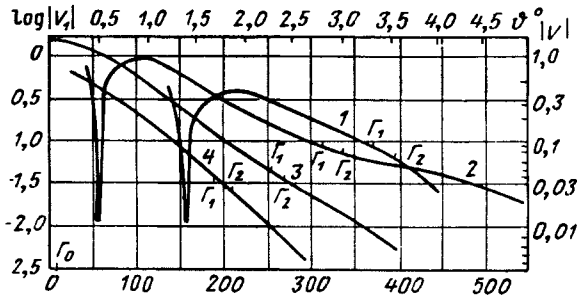


Рис. 9. Зависимость множителя ослабления V_1 от расстояния s (в км) для длин волн:

кривая 1 — 3,333 см; кривая 2 — 10 см; кривая 3 — 30 см;
 кривая 4 — 90 см.

На рис. 9 расстояния выражены в километрах. На оси абсцисс отмечен также горизонт Γ_0 при распространении в однородной атмосфере. Этот горизонт определяется высотой точки наблюде-

ния h и не зависит от длины волны: напомним, что у нас всюду взято $h = \frac{h_1}{5}$. На каждой кривой точка Γ_1 определяет положение горизонта прямых волн, а точка Γ_2 — положение горизонта волн, отраженных от земли (параграфы 2 и 4). Горизонты Γ_1 и Γ_2 меняются при изменении длины волны и поэтому для каждой кривой свои.

Во всех случаях можно констатировать явление сверхдальнего распространения радиоволн, ослабевающее при увеличении длины волны. Учитывая сильное изменение длины волны при переходе от одной кривой к другой (длины волн относятся как 1 : 3 : 9 : 27), следует признать, что вблизи горизонтов зависимость множителя ослабления от длины волны сравнительно слабая.

В формулу для дальности горизонта (ср. главу 15, параграф 6) длина волны входит только под знаком логарифма. Поэтому дальности горизонтов образуют арифметическую прогрессию, если длины волн, как на рис. 9, образуют прогрессию геометрическую. При этом, однако, значения множителя ослабления на обоих горизонтах Γ_1 и Γ_2 зависят от длины волны в той же степени, что и при нормальном распространении радиоволн (ср. табл. 2).

В силу этих обстоятельств отождествлять дальность распространения радиоволн с дальностью горизонта прямых или отраженных волн нужно с некоторой осторожностью. Можно определить дальность распространения иначе, например как такое расстояние, на котором множитель ослабления имеет абсолютное значение 0,1, причем на больших расстояниях значения множителя ослабления еще меньше. При последнем определении «дальность распространения» заключена между дальностями горизонта Γ_1 и Γ_2 для кривой 1 на рис. 9, а для других кривых эта дальность меньше дальности Γ_1 ; в самом грубом приближении и эти четыре дальности образуют арифметическую прогрессию, как видно из рисунка. Заметим, что для оценки дальности распространения по значению 0,1 обычно оказывается достаточным произвести расчеты с помощью отражательной формулы параграфа 4, лишь иногда применяя экстраполяцию полученных таким путем кривых.

Непосредственная цель рассуждений этой главы заключалась, как мы уже говорили в параграфе 1, в проверке формул для дальности распространения радиоволн, выведенных в предыдущей главе. Выше мы показали, что, вводя горизонты прямых и отраженных волн, можно получить простую и наглядную картину сверхдальнего распространения радиоволн при наличии слоя инверсии. Однако дальность распространения лишь в довольно грубом смысле можно отождествлять с дальностью одного из горизонтов. Дело в том, что убывание множителя ослабления

(после окончания осцилляций в освещенной области) начинается раньше, чем мы доходим до первого горизонта. Благодаря этому, как показано в параграфе 5, множитель ослабления V_1 принимает на горизонтах Γ_1 и Γ_2 значения, в 2—4 раза меньшие, чем на обычном горизонте Γ_0 при распространении в однородной атмосфере. Кроме того, вблизи горизонтов Γ_1 и Γ_2 множитель ослабления убывает, разумеется, гораздо медленнее, чем при нормальном распространении.

Все эти причины приводят к тому, что горизонты Γ_1 и Γ_2 при аномальном распространении характеризуют дальность распространения радиоволн более грубо, чем горизонт Γ_0 при нормальном распространении. Однако возможность применения горизонтов Γ_1 и Γ_2 для приближенных оценок дальности распространения не вызывает сомнений, как видно хотя бы из сравнения множителя ослабления вблизи горизонтов и в глубокой тени на рис. 7.

Следует подчеркнуть, что выбранный нами M -профиль имеет довольно слабую инверсию: разность $M(0) - M(h_i)$ не превышает нескольких десятых. Такая инверсия в некоторых случаях может на практике остаться неустановленной. Однако наши вычисления показывают, что даже такой M -профиль сильно изменяет характер распространения радиоволн, приводя к сверхдальному распространению.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН ПО ПРИЗЕМНОМУ ТРОПОСФЕРНОМУ ВОЛНОВОДУ *

Глава посвящена теории распространения радиоволн между корреспондирующими точками, находящимися в приземном слое инверсии (в тропосферном волноводе). К данному случаю применяются общие формулы, выведенные в главе 15, причем используются как функции параболического цилиндра, так и функция Эйри. При помощи этой методики производится для ряда конкретных случаев вычисление распространения радиоволн различной длины. Из полученных результатов следует, что сверхдальнее (волноводное) распространение ослабевает с увеличением длины волны лишь весьма медленно. Так, например, длина волны может превосходить так называемую «критическую» длину волны на порядок, а сверхдальнее распространение будет иметь место. В конце главы уточняется критерий сверхдальнего распространения.

Введение

Настоящая глава посвящена теории распространения радиоволн в приземном тропосферном волноводе (слое инверсии) в предположении, что обе корреспондирующие точки находятся внутри волновода. Такое распространение радиоволн можно назвать внутрислойным или внутриволноводным в отличие от случая (рассмотренного в главе 16), когда одна из корреспондирующих точек находится высоко над слоем инверсии.

Исследованию распространения радиоволн в тропосферном волноводе посвящен ряд теоретических работ (см., например, [23—25]), однако по этому вопросу имеется еще много неясностей. В этой главе мы исследуем внутрислойное распространение, развивая методы, изложенные в главах 15 и 16.

* Фок, Вайнштейн и Белкина, 1958.

1. Основные формулы

В этом параграфе мы сопоставим основные формулы, полученные в главах 14, 15 и 16.

Множитель ослабления V при произвольной зависимости показателя преломления атмосферы от высоты определяется посредством контурного интеграла

$$V(x, y, y', q) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-l \frac{\pi}{4}} \int_C e^{ixt} F(t, y, y', q) dt, \quad (1.01)$$

где контур C охватывает в положительном направлении все полюса подынтегральной функции (глава 14).

Мы ограничиваемся значением $q = \infty$, что соответствует произвольной поляризации на дециметровых и более коротких волнах и горизонтальной поляризации на волнах более длинных. В этом случае функция $F(t, y, y', \infty) = F(t, y, y')$ имеет вид (для $y' > y$):

$$F(t, y, y') = -\frac{1}{2i} f_1(y', t) \left[f_2(y, t) - \frac{f_2(0, t)}{f_1(0, t)} f_1(y, t) \right], \quad (1.02)$$

Здесь y и y' суть безразмерные высоты корреспондирующих точек:

$$y = \frac{kh}{m}, \quad y' = \frac{kh'}{m}; \quad (1.03)$$

величина x в формуле (1.01) есть безразмерное расстояние между этими точками, считаемое вдоль земной поверхности:

$$x = \frac{ks}{2m^2}, \quad (1.04)$$

а параметр m в последней формуле имеет значение

$$m = \left(\frac{ka}{2} \right)^{1/3}, \quad (1.05)$$

где a есть радиус Земли.

Функции f_1 и f_2 — независимые решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + [p(y) - t] f = 0, \quad (1.06)$$

причем их определитель Вронского предполагается равным $-2i$. Функция $p(y)$ связана с приведенным показателем преломления $M(h)$ соотношением

$$p(y) = \frac{2m^2}{10^6} M(h) = 2m^2 \left(n - 1 + \frac{h}{a} \right) \quad (1.07)$$

(n — показатель преломления воздуха) и является его безразмерным аналогом.

В главе 15 уравнение (1.06) проинтегрировано асимптотически в предположении, что $p(y)$ имеет один минимум, т. е. что приведенный показатель преломления атмосферы имеет одну точку инверсии. Такой характер носит, в частности, показатель преломления, зависящий от высоты по гиперболическому закону

$$M(h) = M(h_i) + \frac{1}{a} \frac{(h-h_i)^2}{h+l} 10^6 \quad (1.08)$$

(h_i — высота инверсии; l — параметр), которому соответствует функция

$$p(y) = p(y_i) + \frac{(y-y_i)^2}{y+y_i}. \quad (1.09)$$

Эта функция и принимается во всех вычислениях как в настоящей главе, так и в главе 16.

Множитель ослабления V , таким образом, кроме безразмерных координат x, y, y' , зависит от параметров y_i и y_l (или $Y = y_i + y_l$ и y_i), характеризующих функцию $p(y)$.

Как показано в главе 15, высотные множители f_1 и f_2 выражаются через функции параболического цилиндра D_n следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f_1(y, t) &= c_1(\nu) \sqrt{2 \frac{dy}{d\zeta}} g_1(\zeta), \\ f_2(y, t) &= c_2(\nu) \sqrt{2 \frac{dy}{d\zeta}} g_2(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_1(\zeta) &= D_{i\nu - \frac{1}{2}} \left(e^{-i \frac{\pi}{4} \zeta} \right), \\ g_2(\zeta) &= D_{-i\nu - \frac{1}{2}} \left(e^{i \frac{\pi}{4} \zeta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Выражение для $D_n(z)$ в виде ряда приведено ниже [формула (2.05)].

Величина ν определяется соотношением

$$\nu = -\frac{1}{\pi} \int_{y_i}^{y_2} \sqrt{t - p(y)} dy. \quad (1.12)$$

(y_1 и y_2 суть корни уравнения $p(y) - t = 0$). Вследствие $p'(y_i) > 0$ можно принять, что $\nu > 0$ при $t < p(y_i)$; при $t > p(y_i)$ очевидно $\nu < 0$.

Переменные ζ и y связаны подстановкой

$$S(y) - S_0 = \int_0^{\zeta} \sqrt{\frac{1}{4} \zeta^2 + \nu} d\zeta, \quad (1.13)$$

где

$$S(y) = \int_0^y \sqrt{\rho(y) - t} dy; \quad (1.14)$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_0^{y_1} \sqrt{\rho(y) - t} dy + \frac{1}{2} \int_0^{y_2} \sqrt{\rho(y) - t} dy, \quad (1.15)$$

и, наконец,

$$\left. \begin{aligned} c_1(\nu) &= e^{-\frac{\pi\nu}{4} + i\frac{\pi}{8}i\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\nu \lg \nu - S_0\right)}, \\ c_2(\nu) &= e^{-\frac{\pi\nu}{4} - i\frac{\pi}{8}i\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\nu \lg \nu - S_0\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Для больших положительных ζ , что соответствует высотам y , расположенным выше точки инверсии y_i и достаточно далеко от нее, высотные множители допускают асимптотическое представление

$$\left. \begin{aligned} f_1(y, t) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{\rho(y) - t}} e^{i(S - 2S_0)}, \\ f_2(y, t) &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{\rho(y) - t}} e^{-i(S - 2S_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Ниже точки инверсии и вдали от нее (ζ велико и отрицательно) асимптотическое представление $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} f_1(y, t) &= \chi_1(\nu) \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{\rho(y) - t}} e^{i(S - 2S_0)} + e^{-\pi\nu} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{\rho(y) - t}} e^{-iS}, \\ f_2(y, t) &= \chi_2(\nu) \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{\rho(y) - t}} e^{-i(S - 2S_0)} + e^{-\pi\nu} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{\rho(y) - t}} e^{iS}, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

где положено

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(\nu) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\nu\right)} e^{-\frac{\pi\nu}{2} + i(\nu - \nu \lg \nu)}, \\ \chi_2(\nu) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu\right)} e^{-\frac{\pi\nu}{2} - i(\nu - \nu \lg \nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Подставляя выражения (1.18) в формулу (1.02), получаем функцию $F(t, y, y')$ в интересующем нас случае внутрислойного распространения ($y \leq y' < y_1$):

$$\begin{aligned} F(t, y, y') &= \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{p(y) - t} \sqrt[4]{p(y') - t}} \times \\ &\times \frac{[e^{iS(y')} - \Lambda e^{-iS(y')}] [e^{-iS(y)} - e^{iS(y)}]}{1 - \Lambda}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\Lambda = \frac{i}{\chi_1(\nu)} e^{-\pi\nu - 2iS_0}. \quad (1.21)$$

Множитель ослабления V вычислялся по ряду вычетов

$$V(x, y, y') = 2\sqrt{\pi x} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{m=1}^{\infty} R_m e^{ixt^m}. \quad (1.22)$$

Через R_m обозначен вычет функции $F(t, y, y')$ в m -м полюсе t_m . Если пользоваться приближенной формулой (1.20), то t_m есть m -й корень уравнения

$$1 - \Lambda = 0, \quad (1.23)$$

а вычет R_m имеет вид

$$R_m = 2i \frac{1}{\sqrt[4]{p(y) - t_m} \sqrt[4]{p(y') - t_m}} \frac{\sin S(y) \sin S(y')}{\left[\frac{d}{dt}(1 - \Lambda)\right]_{t=t_m}}. \quad (1.24)$$

Большинство численных результатов в этой работе получено при помощи формул (1.22)–(1.24), причем мы ограничивались тремя или четырьмя членами ряда вычетов.

2. Вычисление множителя ослабления при помощи функций параболического цилиндра

Асимптотические представления (1.18) высотных множителей f_1 и f_2 , на основе которых получены формулы (1.22)–(1.24), справедливы, если ξ велико и отрицательно или расположено

в некотором секторе вокруг отрицательной вещественной полуоси. В последнем случае абсолютная величина ζ должна быть большой. Однако, как видно из табл. 1, в ряде интересующих нас случаев возникает серьезное сомнение в применимости асимптотических формул, так как величина ζ оказывается по модулю порядка единицы или даже меньше.

Таблица 1

$Y = y_i + y_l$	Номер полюса	v	y	ζ	Δt_m по формуле (1.23)	Δt_m по формуле (1.25)
48,07	1	0,360— i 0,776	0	—1,282— i 0,041	—0,104+ i 0,224	—0,113+ i 0,227
23,11	1	0,207— i 1,120	0	—0,729— i 0,095	—0,085+ i 0,466	—0,107+ i 0,443
23,11	2	0,319— i 2,718	0	—0,725— i 0,246	—0,128+ i 1,132	—0,125+ i 1,145
25,24	1	0,373— i 0,658	0	—1,508— i 0,057	—0,148+ i 0,262	—0,158+ i 0,269

Чтобы выяснить этот вопрос, мы вычислили функцию V также при помощи высотных множителей, выраженных непосредственно через функции параболического цилиндра [формулы (1.10), (1.11)], а не через их асимптотические представления. В этом случае полюса t_m подынтегральной функции $F(t, y, y')$ являются корнями уравнения [ср. (1.02) и (1.10)]

$$g_1(\zeta_0) = 0, \quad (2.01)$$

где для краткости через ζ_0 обозначено значение ζ , соответствующее $y = 0$.

Остальные множители, входящие в $f_1(0, t)$, в нуль не обращаются. Вычет R_m вычисляется по формуле

$$R_m = \frac{1}{2i} \frac{f_1(y, t_m) f_1(y', t_m) f_2(0, t_m)}{\left[\frac{d}{dt} f_1(0, t) \right]_{t=t_m}} \quad (2.02)$$

[см. также (1.10)]. Величина ζ находится из трансцендентного уравнения

$$\operatorname{sh} 2u + 2u = \frac{2}{v} [S(y) - S_0], \quad (2.03)$$

которое получается, если вычислить интеграл (1.13) при помощи подстановки

$$\zeta = 2\sqrt{v} \operatorname{sh} u. \quad (2.04)$$

Нужный корень уравнения выбирается из условия, что при вещественном значении $t < p(y_i)$ величина ζ должна быть отрица-

тельным вещественным числом, и из соображений непрерывности. Для вычисления функций (1.11) мы пользовались рядом

$$D_n(z) = -\frac{2^{-\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(-n)} e^{-\frac{1}{4}z^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)}{m!} z^m. \quad (2.05)$$

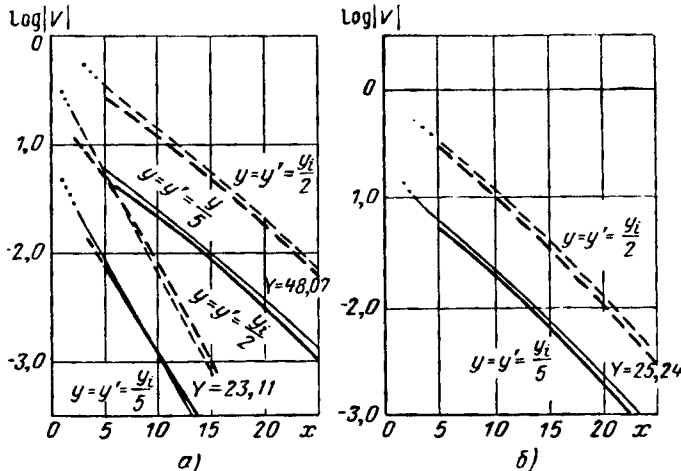


Рис. 1. Множитель ослабления, вычисленный по формулам с функциями параболического цилиндра (толстые линии и толстый пунктир) и по асимптотическим формулам (тонкие линии и тонкий пунктир):

а — I серия, б — II серия, табл. 3.

Прежде всего интересно сравнить корни уравнения (1.23) и более точного уравнения (2.01). Мы приводим в табл. 1 значения

$$\Delta t_m = t_m - p(y_l) \quad (2.06)$$

[см. (4.02)], полученные по формулам (1.23) и (2.01). Заметим, что именно величина Δt_m используется фактически при вычислениях по ряду вычетов и определяет, следовательно, точность результатов. Поэтому мы и приводим во всех таблицах вместо самих полюсов t_m значения Δt_m . (О выборе значений Y см. параграф 4). Совпадение значений Δt_m , вычисленных по формулам (1.23) и (2.01), особенно их мнимых частей, можно считать удовлетворительным.

На рис. 1, а и 1, б даны кривые* для множителя ослабления, вычисленного по асимптотическим формулам (1.23) и (1.24) (тон-

* На всех чертежах, выполненных в логарифмическом масштабе, по логарифмической оси отложены десятичные (а не натуральные) логарифмы.

кие линии) и при помощи функций параболического цилиндра по формулам (2.01) и (2.02) (толстые линии). Из сравнения этих кривых видно, что оба метода дают даже более близкие результаты, чем можно было ожидать на основании табл. 1, особенно для $Y = 23,11$. Поэтому дальнейшее изложение базируется на вычислениях по асимптотическим формулам, как более простым, за исключением одного случая, рассмотренного в параграфе 3.

Аналогичные вычисления мы провели и для случая, исследованного в главе 16, причем оказалось, что асимптотические формулы применимы там примерно с той же точностью, что и при внутрислойном распространении.

3. Вычисление высотных множителей при помощи функций Эйри

В параграфе 8 главы 14 выведены приближенные формулы для высотных множителей слабо затухающих «захваченных» волн, для которых соответствующий им полюс расположен между значениями $p(y_i)$ и $p(0)$; высотные множители выражены через функции Эйри $u(x)$ и $v(x)$. В нашем случае «захваченным» волнам соответствуют первые полюса для кривых с $Y = 208,01$ и $Y = 109,20$ (см. табл. 4 и рис. 5 и 6), и вычеты в них можно вычислять по указанным формулам.

Использование этих формул вызвано тем, что для некоторых значений y , например $y = y_i/2$, величина $p(y) - t_1$ для упомянутых случаев оказывается малой (см. рис. 5 и 6), что делает невозможным использование асимптотических формул параграфа 1. Применение же ряда (2.05) при этом затруднительно, так как в рассматриваемых случаях значения ζ велики и ряд сходится очень медленно.

Приближенные формулы для высотных множителей слабо затухающих волн в интересующем нас случае $y < y_i$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f_1(y, t) &= 2c_1(v) e^{-\pi v} \psi_1(y, t), \\ f_2(y, t) &= 2c_2(v) e^{-\pi v} \psi_2(y, t), \end{aligned} \right\} \quad (3.01)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(y, t) &= \sqrt[4]{\frac{\xi_1}{t - p(y)}} \left[v(\xi_1) + \frac{i}{4} e^{2\pi v} u(\xi_1) \right], \\ \psi_2(y, t) &= \sqrt[4]{\frac{\xi_1}{t - p(y)}} \left[v(\xi_1) - \frac{i}{4} e^{2\pi v} u(\xi_1) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.02)$$

а ξ_1 определяется из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \int_{y_1}^y \sqrt{t - p(y)} dy &= \frac{2}{3} \xi_1^{3/2} & (y > y_1), \\ \int_y^{y_1} \sqrt{p(y) - t} dy &= \frac{2}{3} (-\xi_1)^{3/2} & (y < y_1), \end{aligned} \right\} \quad (3.03)$$

причем через y_1 обозначен меньший из корней уравнения

$$p(y) - t = 0. \quad (3.04)$$

Полюса подынтегральной функции в этом случае суть корни уравнения

$$v(\xi_0) + \frac{i}{4} e^{2\pi v} u(\xi_0) = 0, \quad (3.05)$$

где через ξ_0 обозначено значение ξ , соответствующее $y = 0$.

Наконец, вычет R_1 равен

$$R_1 = - \frac{2ie^{-2\pi v} \psi_1(y, t_1) \psi_1(y', t_1) \psi_2(0, t_1)}{\left[\frac{d}{dt} \psi_1(0, t) \right]_{t=t_1}}. \quad (3.06)$$

Высотные множители можно представлять при помощи функций Эйри при условии, что величина $e^{2\pi v}$ мала. Это условие выполняется, если $\text{Re } v$ отрицательно и не мало ($-\text{Re } v \geq 1$). Последнее имеет место для полюсов t_1 при $Y = 208,01$ и $Y = 109,20$ (табл. 2), следовательно, данный метод для вычисления вычетов в этих полюсах применим.

Можно показать, что если ξ_1 велико и отрицательно, то формула (3.06) для вычета переходит в (1.24). Таким образом, формула (1.24) заведомо применима, если ξ_1 есть большое отрицательное число (или лежит в некотором секторе вокруг отрицательной вещественной полуоси и велико по абсолютной величине). Если же ξ_1 мало или положительно, то асимптотическая формула (1.24) становится непригодной.

Сказанное подтверждается таблицей 2. Как при $Y = 208,01$, так и при $Y = 109,20$ значениям $y = y_i/5$ соответствуют v и ξ_1 , имеющие довольно большие отрицательные вещественные части, и вычеты, полученные по формулам (1.24) и (3.06), оказываются близкими. Значениям $y = y_i/2$ при тех же v соответствуют малые ξ_1 (а при $Y = 109,20$ вещественная часть ξ_1 уже положительна), и вычеты, вычисленные по формулам (1.24) и (3.06), резко отличаются. В этом случае вычеты надо вычислять по формуле (3.06), а формула (1.24) непригодна.

Таким образом, если величина $p(y) - t$ мала (ξ_1 мало), вычислять высотные множители по формулам (1.18) нельзя, а надо

y	v	Δt_1 по формуле (1.23)	Δt_1 по формуле (3.05)
208,01	$-0,768 - i 0,0^22$	$0,106 + i 0,0^32$	$0,101 + i 0,0^32$
109,20	$-1,851 - i 0,000$	$0,354 + i 0,0^64$	$0,347 + i 0,0^65$

пользоваться формулами (3.01)—(3.03). Заметим, что корни уравнений (3.05) и (1.23) практически совпадают.

Применение функций Эйри позволяет также исследовать высоту слоя, в котором распространяется захваченная волна. Как видно из формул (3.03), вещественная часть ξ_1 отрицательна лишь при $y < y_1$, где y_1 есть меньший корень уравнения (3.04). При $y > y_1$ величина $\text{Re } \xi_1$ становится положительной и с увеличением y растет (величина $\text{Im } \xi_1$ всегда остается весьма малой, так как для захваченных волн мнимая часть t_1 ничтожна). Но при больших положительных аргументах функция $v(\xi_1)$ экспоненциально убывает, а функция $u(\xi_1)$ хотя и растет, но не может стать больше чем $e^{-\pi v}$ ($v < 0$) и поэтому гасится множителем $e^{2\pi v}$ (ср. уравнения (3.03) и (1.12) и асимптотические представления функций Эйри в добавлении 2). Следовательно, функция $\psi_1(y, t)$, а значит, и вычет R_1 после перехода через $y = y_1$ быстро убывает.

Безразмерную высоту y_1 можно, в силу сказанного выше, назвать эффективной высотой данной захваченной волны, соответствующей полюсу t_1 , и в первом приближении считать, что поле этой волны занимает слой

$$0 < y < y_1, \quad (3.07)$$

а вне этого слоя ничтожно мало. На самом деле высота $y = y_1$ не является вполне четкой границей слоя, а вблизи этой высоты происходит плавное, но быстрое ослабление высотных множителей (а значит, и поля волны).

Незахваченные волны (y_1 комплексно) указанным свойством не обладают, и их поле распределено во всем слое инверсии и даже выше.

Таблица 2

ν	ξ_1	R_1 по формуле (1.24)	R_1 по формуле (3.06)
$\frac{1}{5} y_i$	$-1,456 + i 0,002$	$0,169 - i 0,001$	$0,166 - i 0,001$
$\frac{1}{2} y_i$	$-0,241 + i 0,002$	$0,342 - i 0,001$	$0,142 - i 0,0^4$
$\frac{1}{5} y_i$	$-1,196 + i 0,0^52$	$0,303 + i 0,0^56$	$0,283 - i 0,0^52$
$\frac{1}{2} y_i$	$0,382 + i 0,0^52$	$-0,102 + i 0,293$	$0,0762 + i 0,0^4$

4. Внутрислойное распространение волн (численные результаты в безразмерных координатах)

Множитель ослабления V зависит от безразмерных координат x, y, y' и, кроме того, от функции $p(y)$, которая, в свою очередь, определяется параметрами y_i и y_l . Удобно вести еще зависимые параметры, характеризующие функцию $p(y)$, а именно:

$$Y = y_i + y_l, \quad (4.01)$$

$$p(y_i) = 2y_i + y_l, \quad (4.02)$$

$$p(0) - p(y_i) = \frac{y_i^2}{y_l}. \quad (4.03)$$

Вычисления производились для двух серий значений параметров функции $p(y)$, приведенных в табл. 3. Кривые $p(y) - p(y_i)$

Таблица 3

Номер кривой	Y	y_i	y_l	$p(y_i)$	$p(0) - p(y_i)$
I серия					
1	208,01	10,40	197,61	218,41	0,542
2	100,00	5,00	95,00	105,00	0,260
3	48,07	2,40	45,67	50,48	0,125
4	23,11	1,16	21,95	24,27	0,060
II серия					
1	109,20	10,40	98,80	119,60	1,095
2	52,50	5,00	47,50	57,50	0,526
3	25,24	2,40	22,84	27,60	0,252

нанесены на рис. 2, а (I серия) и 2, б (II серия), причем кривые помечены номерами, под которыми соответствующие им параметры приведены в таблицах.

Параметры функции $\rho(y)$ выбраны нами так, что при данном M -профиле можно рассчитать множитель ослабления для четырех длин волн, относящихся как 1 : 3 : 9 : 27 (I серия) или трех длин волн, относящихся как 1 : 3 : 9 (II серия).

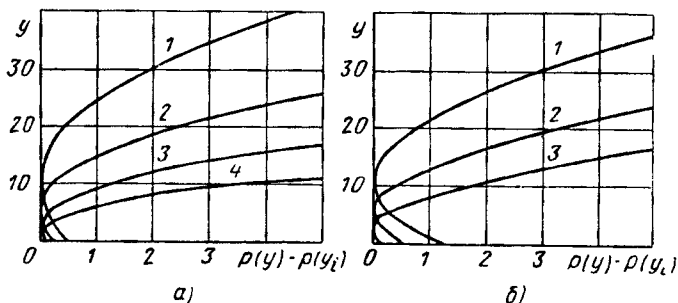


Рис. 2. Графики функции $\rho(y) - \rho(y_i)$:

а — I серия, б — II серия, табл. 3.

Заметим, что I серия параметров была принята также в главе 16, где рассматривался случай, когда одна из корреспондирующих точек находится высоко над слоем инверсии, а другая — внутри волновода. Для последней мы брали $y = y_i/5$, где y_i есть высота точки инверсии.

В настоящей главе множитель ослабления V вычисляется для внутриволноводного распространения, причем высоты передатчика и приемника всюду выбираются равными ($y = y'$). Вычисления произведены для двух случаев:

$$y = y' = \frac{y_i}{5}, \quad (4.04)$$

$$y = y' = \frac{y_i}{2}. \quad (4.05)$$

Множитель ослабления $|V|$ изображен как функция безразмерного расстояния x , причем по оси ординат отложены значения десятичного логарифма $|V|$. На рис. 3 даны кривые I серии, на рис. 4 — кривые II серии. Сплошные кривые относятся к случаю (4.04), пунктирные — к случаю (4.05). Кривые I серии вычислены по четырем, а кривые II серии — по трем членам ряда вычетов.

В табл. 4 приведены значения Δt_m [формула (2.06)], входящие во все вычисления и интересные, кроме того, еще тем, что они характеризуют расположение полюсов t_m относительно кривой $\rho(y)$. При $\text{Re } \Delta t_m > 0$ мы имеем дело с «захваченной», весьма слабо затухающей волной.

Такой полюс имеется в первой кривой каждой серии ($Y = 208,01$ и $Y = 109,20$, см. табл. 4, а также рис. 5 и 6), что и объ-

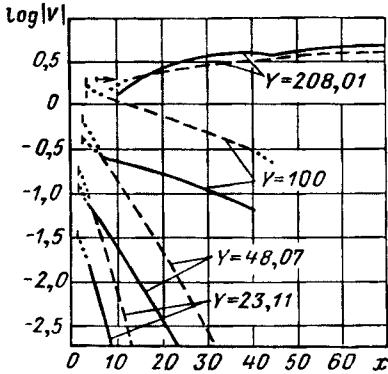


Рис. 3. Зависимость множителя ослабления V от безразмерного расстояния x (I серия).

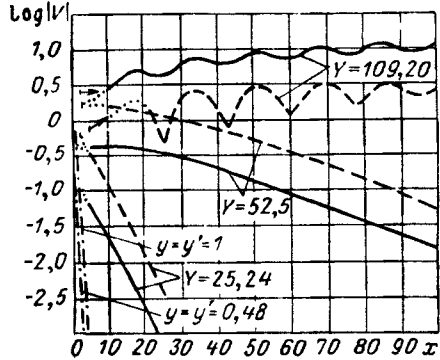


Рис. 4. Зависимость множителя ослабления V от безразмерного расстояния x (II серия).

ясняет бросающуюся в глаза особенность верхних кривых на рис. 3 и 4. Вместо того, чтобы убывать, как это кажется естественным для множителя ослабления, эти кривые растут. В самом деле, как видно из табл. 4, мнимые части первых полюсов в данном случае весьма малы, так что в области применимости одного члена ряда вычетов, где остается только «захваченная» волна, экспоненциальный множитель практически затухания не дает. Рост же функции V происходит благодаря множителю \sqrt{x} [см. (1.22)]. Поле такой волны носит цилиндрический характер, так как пропорционально не $1/x$, а $1/\sqrt{x}$. Более наглядной физически будет здесь не функция V , а функция Ψ , определенная соотношением

$$V = 2 \sqrt{\pi x} e^{i \frac{\pi}{4} \Psi}, \quad (4.06)$$

откуда

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} R_m e^{i x t_m} \quad (4.07)$$

[ср. (1.22)]. Она является множителем ослабления цилиндрической волны, распространяющейся в приземном тропосферном

Таблица 4

Номер кривой	Y	Номер полюса m	Δt_m
I серия			
1	208,01	1	$0,1065 + i 0,0002$
		2	$-0,0636 + i 0,0552$
		3	$-0,1633 + i 0,2107$
		4	$-0,2495 + i 0,3913$
2	100,00	1	$-0,0634 + i 0,0652$
		2	$-0,1733 + i 0,3293$
		3	$-0,2544 + i 0,6323$
		4	$-0,3164 + i 0,9489$
3	48,07	1	$-0,1038 + i 0,2238$
		2	$-0,1883 + i 0,6934$
		3	$-0,2289 + i 1,1712$
		4	$-0,2509 + i 1,6558$
4	23,11	1	$-0,0852 + i 0,4661$
		2	$-0,1275 + i 1,1318$
		3	$-0,1173 + i 1,8499$
		4	$-0,0549 + i 2,5290$
II серия			
1	109,20	1	$0,3541 + i 0,0000004$
		2	$-0,0062 + i 0,0150$
		3	$-0,1618 + i 0,1669$
2	52,50	1	$-0,0497 + i 0,0492$
		2	$-0,2272 + i 0,3689$
		3	$-0,3529 + i 0,7653$
3	25,24	1	$-0,1484 + i 0,2621$
		2	$-0,2635 + i 0,8820$
		3	$-0,3146 + i 1,5143$

волноводе. Здесь как бы имеется отражающий слой (его высота примерно равна y_1), за пределы которого захваченная волна почти не просачивается (ср. конец параграфа 2). Поэтому амплитуда R_m этой волны при $y \geq y_1$ может с ростом y уменьшаться, как это имеет место на рис. 3 при $Y = 208,01$ и на рис. 4 при $Y = 109,20$; во всех других случаях множитель ослабления монотонно растет с увеличением y .

Как видно из табл. 4 (см. также рис. 5 и 6), в случаях $Y = 208,01$ и $Y = 109,20$ вторые полюса тоже имеют малые мнимые части. Таким образом, вторая простая волна для этих случаев затухает хотя и значительно быстрее первой, но все же очень медленно. Поэтому осцилляции множителя ослабления, получающиеся в результате интерференции первой и второй простых волн, долго не исчезают. На рис. 7 и 8 хорошо видны затухающие

колебания функции $|\Psi|$ вокруг почти горизонтальной асимптоты, представляющей собой первый член ряда вычетов (4.07).

Заметим, что в случае, когда одна из корреспондирующих точек находится высоко над слоем инверсии (глава 16), первая

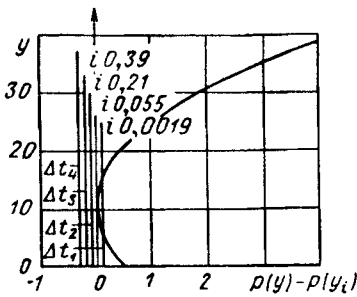


Рис. 5. Расположение корней t_m , соответствующих захваченным и незахваченным волнам, относительно графика $p(y) - p(y_i)$ (I серия).

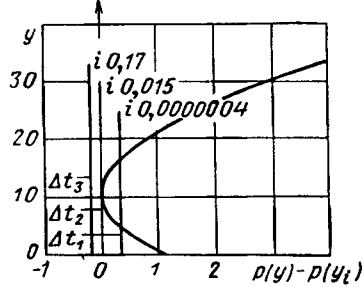


Рис. 6. Расположение корней t_m , соответствующих захваченным и незахваченным волнам, относительно графика $p(y) - p(y_i)$ (II серия).

простая волна, которая медленно затухает и обеспечивает поэтому сверхдальнее распространение, возбуждается весьма слабо. Вследствие этого она определяет поле лишь далеко в тени, когда несколько следующих простых волн, являющихся решающими для поля

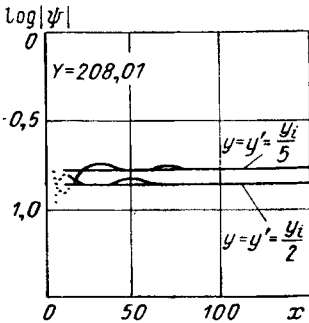


Рис. 7. Зависимость множителя ослабления цилиндрической волны Ψ от безразмерного расстояния x при $Y = 208,01$.

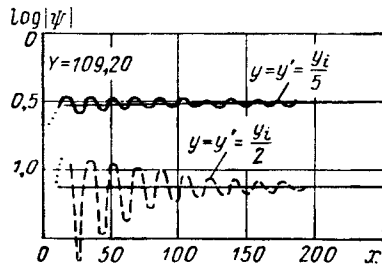


Рис. 8. Зависимость множителя ослабления цилиндрической волны Ψ от безразмерного расстояния x при $Y = 109,20$.

вблизи горизонта, успевают затухнуть. В случае же внутри-слояного распространения первая простая волна ($Y = 208,01$ и $Y = 109,20$) не только очень слабо затухает, но и возбуждается с большой амплитудой.

При остальных значениях параметра Y «захваченных» волн уже нет. Однако и здесь в составе полей имеются довольно слабо заглушающие простые волны, и поле падает значительно медленнее, чем при отсутствии инверсии. Для сравнения мы приводим на рис. 4 штрих-пунктиром поля, полученные в предположении отсутствия рефракции для $y = y' = 1$ и $y = y' = 0,48$. Они идут почти вертикально и резко отличаются от сплошных кривых для $Y = 52,5$ и $Y = 25,24$, которые дают поле при тех же высотах, что и штрих-пунктирные кривые, но при наличии инверсии.

Простым пунктиром на рис. 3 и 4 отмечены те участки кривых, на которых использованные нами члены ряда вычетов дают уже довольно грубые результаты, хотя еще и верные качественно. Эти участки весьма близко подходят к вертикальным черточкам, отмечающим для каждой кривой геометрическую границу света и тени без рефракции.

5. Численные результаты для конкретного случая

На основании безразмерных кривых, рассмотренных в параграфе 4, можно получить численные результаты для конкретных случаев распространения радиоволн различной длины. Для примера мы выбрали M -профиль, полученный из первых безразмерных функций $p(y)$ I и II серий (табл. 3, I серия, строка 1 и табл. 3, II серия, строка 1) по формуле (1.07) (рис. 9). На рис. 10 и 11 приведены соответствующие множители ослабления V для длин волн 3,33 см (кривые 1), 10 см (кривые 2), 30 см (кривые 3) и 90 см (кривая 4 рис. 10). Высота h , одинаковая для точек излучения и приема, указана на рис. 10 и 11 в метрах. Расстояние s дано в километрах.

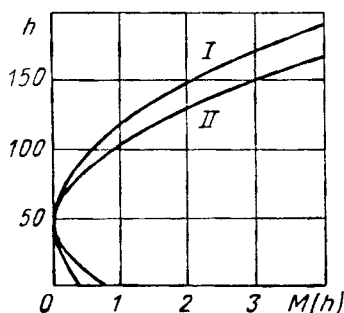


Рис. 9. Зависимость приведенного показателя преломления M от высоты h (M -профиля I и II).

M -профиль I имеет ту же высоту инверсии h_i , что и M -профиль II, но вдвое более сильную инверсию $M(0) - M(h_i)$. Следовательно, мы можем сравнить множители ослабления для этих профилей, поскольку рис. 10 и 11 соответствуют одинаковым высотам корреспондирующих пунктов и одинаковым длинам волн. Тем самым мы получим представление о влиянии инверсии (при тех же значениях h_i и λ) на распространение радиоволн.

Для кривых 1 и 2 дальность распространения оказывается большей в слое с более сильной инверсией, как этого и следовало

ожидать. Однако для кривых 3 имеет место несколько неожиданный эффект: на малых расстояниях кривые почти не отличаются, а начиная с некоторого места поле оказывается сильнее в случае более слабой инверсии. Физический смысл этого результата мы рассмотрим в конце параграфа 6.

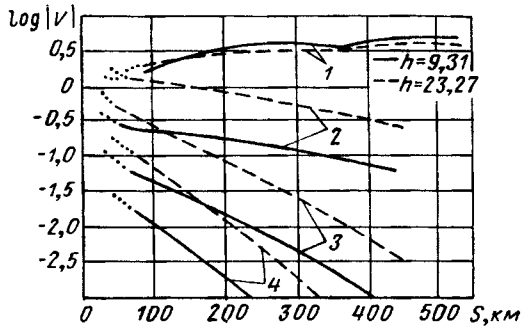


Рис. 10. Зависимость множителя ослабления V от расстояния s (в км) для длин волн:

1 — 3,33 см; 2 — 10,0 см; 3 — 30,0 см; 4 — 90 см. Сплошная кривая — для высоты $h = 9,31$ м. Штрих-пунктир — для высоты $h = 23,27$ м. (М-профиль 1).

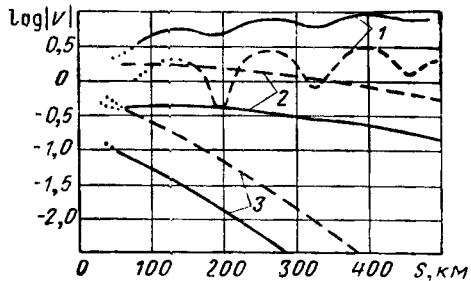


Рис. 11. Зависимость множителя ослабления V от расстояния s для длин волн:

1 — 3,33 см; 2 — 10,0 см; 3 — 30 см для высот $h = 9,31$ м и $h = 23,27$ м (М-профиль 11).

6. Затухание волн в тропосферном волноводе

Как мы видели выше, множитель ослабления V представляется в виде ряда вычетов (1.22). Комплексные числа t_m определяют зависимость отдельных членов ряда вычетов (или «простых» волн) от безразмерного расстояния x . Они являются корнями уравнения (1.23) или более точного уравнения (2.01). Исследуем более подробно зависимость чисел t_m от различных факторов.

Как было показано в параграфе 6 главы 16, уравнение (1.23) приближенно сводится к более простому уравнению

$$S_1 = \left(m - \frac{1}{4}\right) \pi. \quad (6.01)$$

Здесь m есть номер данного корня $t = t_m$, а S_1 — интеграл

$$S_1 = \int_0^{y_1} \sqrt{p(y) - t} dy, \quad (6.02)$$

где через y_1 обозначен меньший корень уравнения

$$p(y) - t = 0. \quad (6.03)$$

Формулы (6.01) и (6.02), как легко показать, остаются применимыми в том случае, когда корни уравнения (6.03) комплексны, если под y_1 понимать корень с положительной мнимой частью. При их помощи можно приближенно находить корни t_m , соответствующие как слабо затухающим, так и сильно затухающим простым волнам в ряде (1.22). Мы воспользуемся этими формулами, чтобы выяснить, от каких параметров зависит затухание простых волн. Это позволит получить представление о том, какие параметры инверсионного M -профиля определяют в первую очередь дальность распространения радиоволн и при каких условиях имеет место сверхдальнее распространение.

С первого взгляда кажется, что основными параметрами являются высота инверсии h_i и полное приращение $M(0) - M(h_i)$ в слое инверсии. Действительно, они определяют так называемую «критическую длину волны» λ_m для m -й простой волны в приземном тропосферном волноводе:

$$\lambda_m = \frac{10^{-3}}{m - \frac{1}{4}} h_i \sqrt{2[M(0) - M(h_i)]} \quad (6.04)$$

(см. книгу Бреммера [25]).

На самом деле предположение об основном значении этих параметров неправильно. Чтобы исследовать этот вопрос, введем вместо y и $p(y)$ новые приведенные переменные:

$$z = \frac{y}{y_i} = \frac{h}{h_i}; \quad q(z) = 4 \frac{p(y) - p(y_i)}{p(0) - p(y_i)} = 4 \frac{M(h) - M(h_i)}{M(0) - M(h_i)}, \quad (6.05)$$

так что функция $q(z)$ всегда удовлетворяет соотношениям

$$q(0) = 4, \quad q(1) = 0. \quad (6.06)$$

Вместо переменной t введем величину

$$\tau = 4 \frac{t - p(y)}{p(0) - p(y_i)}. \quad (6.07)$$

Тогда уравнение (6.01) примет вид

$$\int_0^{z_1} \sqrt{q(z) - \tau} dz = \frac{\left(m - \frac{1}{4}\right) \pi}{\sqrt{G}}, \quad (6.08)$$

где

$$G = \frac{y_i^2}{4} [p(0) - p(y_i)] = \frac{k^2 h_i^2}{2} 10^{-6} [M(0) - M(h_i)], \quad (6.09)$$

а z_1 есть корень уравнения

$$q(z) - \tau = 0, \quad (6.10)$$

соответствующий y_1 .

Для данного M -профиля с инверсией критическая длина волны λ_m определяется из соотношения

$$\int_0^1 \sqrt{q(z)} dz = \frac{\left(m - \frac{1}{4}\right) \pi}{\sqrt{G_m}}, \quad (6.11)$$

где G_m есть значение G при $\lambda = \lambda_m$. Если положить

$$\beta = \int_0^1 \sqrt{q(z)} dz, \quad (6.12)$$

то для большинства M -кривых значение β будет близко к единице вследствие формул (6.06). Так, для рассмотренных выше M -профилей мы имеем $\beta = 0,991$ (I серия) и $\beta = 0,983$ (II серия). Из формул (6.11) получаем

$$\sqrt{G_m} = \frac{\left(m - \frac{1}{4}\right) \pi}{\beta}, \quad (6.13)$$

откуда при помощи соотношения (6.09) находим

$$\lambda_m = \frac{\beta 10^{-3}}{m - \frac{1}{4}} h_i \sqrt{2 [M(0) - M(h_i)]}. \quad (6.14)$$

Это выражение отличается от (6.04) только наличием множителя β .

Название «критическая длина волны» введено в литературе по следующим соображениям. При $G > G_m$, т. е. при $\lambda < \lambda_m$, уравнение (6.08) имеет вещественный корень $\tau = \tau_m$, лежащий в пределах $0 < \tau < 4$. Этому корню в ряде (1.22) соответствует незатухающая простая волна. При $G < G_m$ т. е. при $\lambda > \lambda_m$, уравнение (6.08) имеет комплексный корень, который определяет затухающую простую волну.

Мы будем в дальнейшем употреблять термин «критическая длина волны», понимая его как сокращенное наименование выражения (6.14). Однако при критических длинах волн не происходит какого-либо качественного скачка (см. ниже), так что это наименование является условным.

Уравнение (6.08) может быть написано в следующей форме:

$$\int_0^{z_1} \sqrt{q(z) - \tau} dz = \beta \sqrt{\frac{G_m}{G}} = \beta \frac{\lambda}{\lambda_m}. \quad (6.15)$$

Отсюда видно, что для данного M -профиля [и, следовательно, для фиксированной функции $q(z)$] все корни τ должны зависеть только от отношения λ_m/λ . Вместо этого отношения удобнее пользоваться его десятичным логарифмом

$$l = \log \frac{\lambda_m}{\lambda} = \log \sqrt{\frac{G}{G_m}}. \quad (6.16)$$

Таким образом, если различные M -кривые имеют совпадающие функции $q(z)$, то соответствующие корни τ должны укладываться на одну и ту же кривую

$$\tau = f(l). \quad (6.17)$$

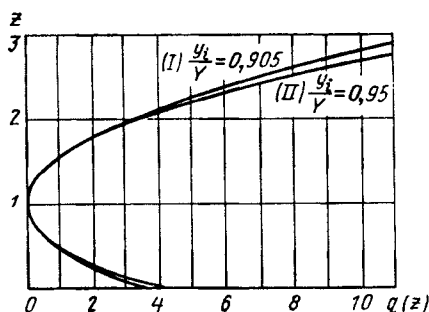


Рис. 12. M -профиль в новых приведенных переменных [функция $q(z)$] для I и II серий.

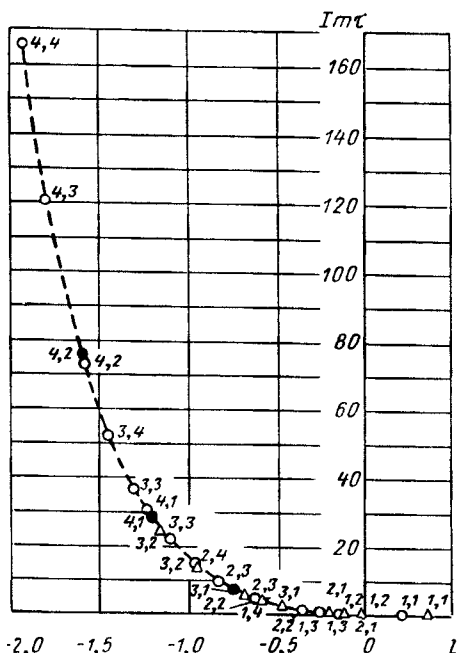


Рис. 13. Мнимые части корней τ уравнения (6.15) в зависимости от переменной l (6.16).

Сделанные выводы используют уравнение (6.01) для корней t_m . Фактически при вычислениях мы этим уравнением не пользовались, так как оно является слишком грубым, однако найденные из более точных уравнений значения τ приближенно подчиняются этим закономерностям. На рис. 12 приведены функции $q(z)$ для двух серий M -кривых, рассмотренных нами выше. Эти функции при $0 < z < 2$ практически совпадают, хотя сами M -кривые заметно отличаются (ср. рис. 9). Поэтому значения τ для всех вычисленных ранее корней t_m (см. табл. 4) ложатся вблизи некоторой общей кривой (6.17). Это видно из рис. 13, где светлыми кружками нанесены значения $\text{Im } \tau$, соответствующие корням t_m в табл. 4 (серия I), а черными кружками — значения $\text{Im } \tau$, соответствующие корням t_m , уточненным по формулам параграфа 2 (см. табл. 1); треугольниками отмечены точки по табл. 4 (серия II). Цифры

около кружков и треугольников означают номер кривой $p(y)$ (первая цифра) и номер корня m (вторая цифра). Так, например, 3,2 означает второй корень для третьей кривой $p(y)$. Напомним, что мнимые части чисел τ_m и t_m определяют затухание простых волн в ряде (1.22).

Мы видим также, что при $l = 0$, т. е. при $\lambda = \lambda_m$, не происходит какого-либо качественного изменения затухания m -й простой волны. Это затухание по строгой теории имеется как при $\lambda < \lambda_m$, так и при $\lambda > \lambda_m$ и довольно медленно растет при увеличении λ . Вследствие этого сверхдальнее распространение может наблюдаться (хотя и в несколько ослабленном виде) при длине волны λ , на порядок превышающий наибольшее «критическое» значение λ_1 . Действительно, уже кривая 2 на рис. 10 соответствует длине волны λ , большей чем λ_1 , хотя сверхдальнее распространение имеет место даже и для более длинных волн (кривые 3 и даже 4).

Если функция $q(z)$ для взятого M -профиля сильно отличается от функций, изображенных на рис. 12, то ход кривых (6.17) качественно будет таким же, но численные соотношения будут совершенно иными. Так, полагая

$$q(z) = 4 \left(1 - \frac{z - \frac{z^n}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \right), \quad (6.18)$$

мы при $n = 1/2$ и $n = 1/5$ приходим к случаям, рассмотренным в работах [23] и [24]. Эти функции $q(z)$ изображены на рис. 14. Они сильно отличаются от функций, нанесенных на рис. 12, и значения τ для них при том же l получаются примерно на порядок меньше, чем на рис. 13. Последнее утверждение следует из рисунков статьи Хартри с соавторами [24], если учесть соотношения между обозначениями Хартри и нашими обозначениями.

Таким образом, рис. 13 не является универсальным, и рассчитывать с его помощью затухание простых волн при любой форме M -профиля нельзя; гипотеза о том, что сверхдальнее распространение определяется только высотой инверсии h_i и приращением $M(0) - M_i(h_i)$, оказывается несостоятельной. Отсюда следует, что существует по крайней мере еще один параметр, характеризующий M -кривую и имеющий первостепенное значение для сверх-

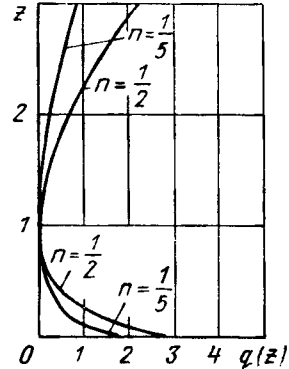


Рис. 14. Функции $q(z)$ из (6.18) при $n = 1/2$ и $n = 1/5$. (M -профили, принятые в [23] и [24]).

дальнего распространения. В качестве этого параметра естественно взять кривизну M -кривой в точке инверсии, т. е. значение $M''(h_i)$, поскольку этот параметр существенно влияет на просачивание электромагнитного поля из слоя инверсии.

Если исходить из предположения, что значение $M''(h_i)$ также является основным параметром, то вместо величин $q(z)$ и τ следует ввести новые приведенные величины

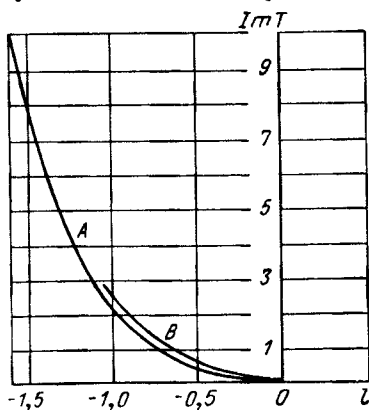


Рис. 15. Сравнение мнимых частей T (6.19) для M -профилей различного типа (A — тип профиля рис. 12; B — тип профиля рис. 14).

что два совершенно различных типа M -профилей (ср. рис. 12 и 14) дают, если пользоваться приведенными величинами (6.19), не слишком отличающиеся значения коэффициентов затухания простых волн в приземном тропосферном волноводе. Поэтому приведенные величины (6.19) более удобны для сопоставления свойств различных слоев инверсии, чем величины (6.05) и (6.07). Этот результат подтверждает сделанную выше гипотезу о том, что $M''(h_i)$ также является основным параметром, определяющим просачивание электромагнитной энергии из слоя инверсии. Заметим, что вещественные части T для двух рассмотренных типов инверсии различаются гораздо сильнее.

Так как согласно ряду (1.22), уменьшение амплитуды m -й простой волны определяется множителем

$$e^{-\text{Im} T_m x} = e^{-\alpha_m z}, \quad (6.22)$$

где z есть горизонтальное расстояние между корреспондирующими точками, то более наглядное представление о затухании волны дает коэффициент

$$\alpha_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} 10^{-6} h_i^2 M''(h_i) \Theta, \quad (6.23)$$

$$Q(z) = \frac{q(z)}{q''(1)}, \quad T = \frac{\tau}{q''(1)}, \quad (6.19)$$

где для гиперболического закона инверсии

$$q''(1) = 8 \frac{y_1}{Y}, \quad (6.20)$$

а для степенного закона (6.18)

$$q''(1) = 4n. \quad (6.21)$$

На рис. 15 кривая A соответствует средним линиям, вблизи которых группируются значения τ , приведенные на рис. 13. Кривая B построена по значениям, взятым из статьи Хартри [24] (для функции (6.18) при $n = 1/5$).

Сравнивая между собой кривые A и B на рис. 15, мы видим,

где величина Θ равна

$$\Theta = \frac{\lambda_m}{\lambda} \operatorname{Im} T. \quad (6.24)$$

Эта величина нанесена на рис. 16 как функция от l , причем кривые A и B построены по кривым A и B рис. 15. Формулу (6.23) можно переписать следующим образом:

$$\kappa_m = 2\pi \left(m - \frac{1}{4} \right) 10^{-3} \frac{h_i M''(h_i)}{\beta \sqrt{2} [M(0) - M(h_i)]} \Theta. \quad (6.25)$$

Так как в формулах (6.23) и (6.25) от длины волны зависит только Θ , то рис. 16 непосредственно указывает на характер зависимости затухания от длины волны. Сначала при увеличении длины волны затухание растет, но затем оно достигает максимума и начинает уменьшаться. Последнее легко понять физически, так как на распространение достаточно длинных волн слой инверсии оказывает малое влияние, и такие радиоволны распространяются тем дальше за горизонт, чем их длина больше, как это имеет место и при нормальной рефракции.

Полученные результаты показывают, что при учете трех параметров M -кривой (h_i , $M(0) - M(h_i)$ и $M''(h_i)$) коэффициенты затухания простых волн для сильно отличающихся типов M -профилей хотя и получаются одного порядка, но отличаются количественно (в некоторых случаях даже в полтора-два раза, см. рис. 16). Это означает, что для точного учета влияния M -профиля на распространение требуется принимать во внимание еще какие-то параметры. Этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании.

Распространение в приземном волноводе можно оценить, сравнивая коэффициент затухания κ_1 с затуханием первой простой волны по теории распространения радиоволн при нормальной рефракции. Такое сопоставление позволяет выяснить, насколько это распространение можно считать «сверхдальним». Критерий сверхдального распространения является несколько неопределенным, однако эта неопределенность вызвана самой природой явления, не претерпевающего скачкообразных изменений при непрерывном изменении длины волны и слоя инверсии.

В рассмотренных выше расчетах во второй серии M -кривых взято вдвое большее значение $M(0) - M(h_i)$ при той же высоте

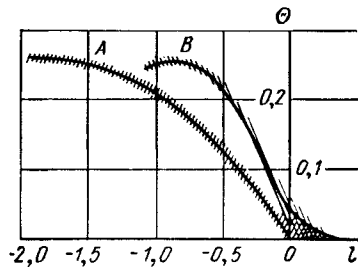


Рис. 16. Зависимость от l коэффициента затухания Θ простой волны (6.24) при распространении по тропосферному волноводу (M -профиля типов A и B).

слоя инверсии, вследствие чего увеличились и критические длины волн (6.14). Вообще говоря, короткие волны лучше распространяются в волноводах с большей критической длиной волны (II серия), чем в волноводах с меньшей критической длиной волны (I серия). Однако во второй серии увеличивается и кривизна M -кривой в точке инверсии, благодаря чему облегчается просачивание электромагнитной энергии более длинных волн из слоя инверсии. В результате для более коротких волн дальнейшее распространение оказывается лучшим в первой серии, тогда как для более длинных волн положение будет обратным (кривая 3 на рис. 11 соответствует несколько худшему распространению на большие расстояния, чем кривая 3 на рис. 10).

При вычислении поля в слое инверсии удобнее всего пользоваться рядом вычетов (1.22). Физически это означает, что дальнейшее и сверхдальнее распространение радиоволн между двумя корреспондирующими точками, находящимися внутри слоя инверсии, можно рассматривать как передачу цилиндрических волн по своеобразной передающей «линии» — слою инверсии. Затухание этих волн обусловлено потерями на излучение, их амплитуды R_m зависят от распределения поля по высоте.

Полученные выше результаты освещают ряд закономерностей, относящихся к передаче радиоволн по приземному тропосферному волноводу.

К ТЕОРИИ БЕРЕГОВОЙ РЕФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН*

Рассматривается задача о распространении электромагнитных волн над бесконечной плоскостью, состоящей из двух или большего числа частей с неоднаковыми электрическими свойствами (море и суша, или море и острова). Для значения вертикальной составляющей электрического поля в воздухе у самой плоскости выводится интегральное уравнение. В дальнейшем рассматривается случай неограниченного прямолинейного берега, и уравнение выписывается в явной форме для этого случая. Это есть интегральное уравнение второго рода с полубесконечными пределами и ядром, зависящим от абсолютного значения разности аргументов. К нему применяется математическая теория, развитая Фоксом в работе 1944 г. (см. добавление 1). В результате получается в явном виде строгое решение интегрального уравнения. Затем исследуется приближенный вид решения, применимый в случае не слишком косо падения волны.

1. Введение

В то время как вопрос о распространении электромагнитных волн от произвольного излучателя при наличии в пространстве двух различных однородных изотропных сред с плоской поверхностью раздела может в настоящее время считаться полностью решенным благодаря работам Зоммерфельда и других авторов, соответствующая более сложная задача, относящаяся к случаю трех или большего числа сред, пока еще мало исследована. Подобное исследование представляло бы, однако, значительный как теоретический, так и практический интерес. В частности, вопрос о береговой рефракции, касающийся набегания электромагнитных волн на берег и их отражения от него, сводится (схематически) к рассмотрению указанного на рис. 1 случая трех различных сред (воздух, море, суша).

При этом, если даже для упрощения задачи рассматривать море как идеальный проводник и считать поверхность OA (рис. 1)

* Гринберг и Фок, 1948. В настоящем издании текст несколько сокращен.

раздела моря и земли плоской и совершенно резкой, то и тогда необходимо учитывать не только свойства почвы в области суши, но и тот угол, который составляет граничная плоскость OA с поверхностью моря.

Ввиду трудности задачи введем в ее постановку такие упрощения, которые, будучи с физической стороны достаточно оправданными, дали бы в то же время возможность довести решение ее до конца.

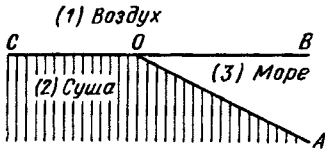


Рис. 1. Вертикальное сечение берега.

В основу такой упрощенной трактовки вопроса можно положить согласно Леонтовичу [21] приближенные граничные условия для E и H (см. главу 11). Именно, Леонтович показал, что на поверхности раздела двух различных сред 1 и 2, из которых вторая обладает много лучшей

проводимостью, чем первая, тангенциальные составляющие электрического и магнитного поля в первой среде приближенно удовлетворяют у самой поверхности раздела соотношениям

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\eta_2}} H_y, \\ E_y &= -\sqrt{\frac{\mu_2}{\eta_2}} H_x, \end{aligned} \right\} \quad (1.01)$$

где μ_2 — магнитная проницаемость второй среды; η_2 — ее комплексная диэлектрическая постоянная, модуль которой считается большим по сравнению с единицей. (Эти соотношения получаются из соотношений (3.02) главы 5 при $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_z = -1$.)

Соотношения (1.01) справедливы не только для плоской поверхности раздела, но и для произвольной поверхности при условии, что наименьший из радиусов кривизны велик по сравнению с толщиной слоя скин-эффекта. Они получаются из того соображения, что при достаточно большой проводимости второй среды характер убывания поля при углублении в нее (экспоненциальное затухание) практически не зависит от характера поля над поверхностью раздела сред. Формулы (1.01) могут рассматриваться как приближенные граничные условия, которым должно удовлетворять поле в первой среде у поверхности раздела сред 1 и 2; они дают возможность отделить решение задачи о поле в первой среде от вопроса о распределении поля во второй.

Такая приближенная трактовка задачи будет, как правило, оправданной в тех случаях, когда толщина скин-слоя во второй среде при рассматриваемой частоте будет мала по сравнению с длиной волны λ в первой среде и когда свойства проводящего

слоя относительно медленно изменяются от одной точки поверхности раздела к другой.

Мы начнем с вывода приближенного граничного условия для нормальной к поверхности раздела составляющей электрического поля в первой среде, что может быть сделано совершенно непосредственно, минуя граничные условия (1.01) для тангенциальных составляющих E и H . Это дает возможность сформулировать интегральное уравнение прямо для нормальной компоненты E_z .

Точные граничные условия для нормальных составляющих $E_z^{(1)}$ и $E_z^{(2)}$ электрического вектора на плоской поверхности раздела сред 1 и 2 могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon_1 \omega + i4\pi\sigma_1) E_z^{(1)} &= \\ = (\epsilon_2 \omega' + i4\pi\sigma_2) E_z^{(2)}, & \\ \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial z} &= \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (1.02)$$

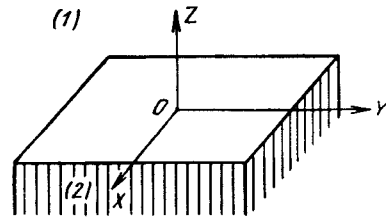


Рис. 2. Расположение координатных осей на поверхности раздела двух сред.

При этом принято, что зависимость полей от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$.

Первое из этих уравнений выражает, как обычно, непрерывность нормальной составляющей полного тока при проходе через поверхность, тогда как второе непосредственно получается из того условия, что в обеих средах $\text{div } E = 0$ и что у самой поверхности раздела $\frac{\partial E_x^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial E_x^{(2)}}{\partial x}$; $\frac{\partial E_y^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial E_y^{(2)}}{\partial y}$ из-за непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля.

Если вторая среда обладает значительно большей проводимостью, чем первая, то можно положить приближенно (рис. 2)

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} &= (E_z^{(2)})_{z=0} e^{-ik_2 z}, \\ k_2^2 &= \frac{(\epsilon_2 \omega + i4\pi\sigma_2) \mu_2 \omega}{c^2} \equiv \frac{\eta_2 \mu_2 \omega^2}{c^2}, \quad \text{Im}(k_2) > 0, \end{aligned} \quad (1.03)$$

причем предполагается, что $\left(\frac{\omega}{c |k_2|}\right)^2 \ll 1$.

При подстановке в уравнения (1.02) это приводит, после исключения неизвестной величины $(E_z^{(2)})_{z=0}$, к соотношению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial z}\right)_{z=0} &= -2\pi\alpha (E_z^{(1)})_{z=0}, \\ \alpha &= \frac{i\mu_2 \omega (\epsilon_1 \omega + i4\pi\sigma_1)}{2\pi k_2 c^2} = \frac{i\mu_2 k_1^2}{2\pi \mu_1 k_2}. \end{aligned} \quad (1.04)$$

Это соотношение в нашем случае выполняется, конечно, лишь приближенно; однако в большинстве интересующих нас случаев оно выполняется с довольно большой точностью (кроме сухих почв). Мы примем его поэтому за граничное условие для E_z на всей поверхности суши, пренебрегая погрешностью, проистекающей от тех участков суши, которые непосредственно примыкают к морю, поскольку ширина соответствующей полосы будет в интересующих нас случаях, вообще говоря, мала по сравнению с длиной падающей на берег волны (см. далее параграф 2).

При помощи этого граничного условия можно сформулировать интегральное уравнение для E_z ; решение его и дает полное решение интересующей нас задачи в том приближении, какое соответствует допущениям, сделанным при его выводе.

2. Постановка задачи и вывод основного интегрального уравнения

Имея в виду рассмотреть вопрос о набегании электромагнитных волн с моря на сушу или обратно, положим в основу рассмотрения следующую идеализацию задачи: требуется изучить распространение электромагнитных волн в верхнем полупространстве (воздух), в котором расположены некоторые заданные излучатели, причем на поверхности $z = 0$ имеется область f (суша*, см. рис. 3), где нормальная к поверхности составляющая электрического поля удовлетворяет условию (1.04), т. е.

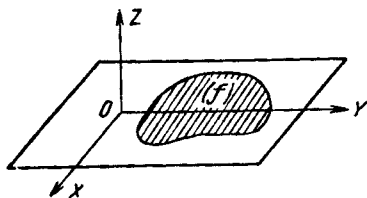


Рис. 3. Участки поверхности раздела с разными предельными условиями.

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{z=0} = -2\pi\alpha(E_z)_{z=0}.$$

На остальной части плоскости $z = 0$ мы считаем выполненным условие $\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$ (море, рассматриваемое как идеальный проводник), получающееся из условия (1.04) при $\sigma_2 = \infty$.

Такая идеализация задачи, очевидно, соответствует случаю, когда поверхность суши будет плоской, горизонтальной и выдается из воды лишь незначительно по сравнению с длиной волны. Небольшая дополнительная погрешность вносится из-за того, что мы допускаем пригодность граничного условия (1.04) на всей поверхности суши, т. е. даже в точках, близких к береговой линии, где они, вообще говоря, перестают быть верными.

* Не обязательно односвязная; например, несколько островов.

Переходим к выводу основного интегрального уравнения задачи, которое мы напишем для нормальной к поверхности компоненты E_z электрического поля.

Мы исходим из того, что E_z удовлетворяет в воздухе уравнению *

$$\Delta E_z + k^2 E_z = -4\pi f_z, \quad (2.01)$$

где

$$k^2 \equiv k_1^2 = \frac{(\epsilon_1 \omega + i4\pi\sigma_1) \mu_1 \omega}{c^2},$$

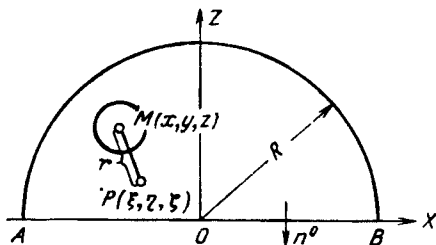


Рис. 4. Область интегрирования в формуле Грина.

а f_z есть некоторая известная функция от координат, целиком определяемая заданием первичных (возбуждающих) токов. Случай отсутствия поглощения в воздухе ($\sigma_1 = 0$) мы будем рассматривать как предельный случай весьма малого поглощения ($\sigma_1 \rightarrow +0$).

Рассмотрим указанную на рис. 4 область, ограниченную плоскостью AB раздела сред 1 и 2, полусферой радиуса $R \rightarrow \infty$ и бесконечно малой сферой радиуса ρ , описанной вокруг произвольной точки M . Применяя к этой области формулу Грина

$$\int_{(V)} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV = \int_{(S)} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS,$$

при $\psi = \frac{e^{ikr}}{r}$, $\varphi = E_z$ и $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ получим следующее соотношение:

$$4\pi\varphi_M = 4\pi E_z(x, y, z) = 4\pi E_z^0(x, y, z) + \int_{(AB)} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial n} \right)_0 \frac{e^{ikr}}{r} - (E_z)_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS. \quad (2.02)$$

* Начиная с этого места, значок «1» в обозначении волнового числа и поля в воздухе будет опускаться.

Здесь $E_z^0 = \int f_z \frac{e^{ikr}}{r} dV$ есть то «первичное» поле, которое создали бы в пространстве первичные токи, если бы отсутствовала поверхность раздела AB , тогда как интегральный член выражает влияние поверхности раздела.

Замечая, что

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial n}\right)_0 = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_0$$

и что $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ равняется нулю на идеально проводящих частях поверхности AB , тогда как на поверхности (f) будет $\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_0 = -2\pi\alpha (E_z)_0$, получим из (2.02).

$$4\pi (E_z)_M = 4\pi (E_z^0)_M + 2\pi\alpha \int_{(f)} (E_z)_0 \frac{e^{ikr}}{r} df - \int_{AB} (E_z)_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) dS_{AB}. \quad (2.03)$$

Применяя это соотношение к точке M , лежащей на самой поверхности (f) , и замечая, что при этом будет

$$-\int (E_z)_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) dS_{AB} = 2\pi (E_z)_M,$$

получаем окончательно, заменяя значок M у E_z значком 0 ,

$$(E_z)_0 = 2 (E_z^0)_0 + \alpha \int_{(f)} (E_z)_0 \frac{e^{ikr}}{r} df. \quad (2.04)$$

Это и есть основное интегральное уравнение нашей задачи.

Заметим, что если бы вся плоскость AB была идеально проводящей, то уравнение (2.04) дало бы просто

$$E_z = 2 (E_z^0)_0, \quad (2.05)$$

т. е. удвоение фактического значения $(E_z)_0$ на поверхности раздела по сравнению со значением $(E_z^0)_0$ «первичного» поля на ней. Это, очевидно, выражает обычный закон отражения для идеально проводящей плоскости.

Найдя из уравнения (2.04) величину $(E_z)_0$ и подставляя ее в правую часть формулы (2.03), мы сможем получить и значение E_z в любой точке M над плоскостью, т. е. мы будем иметь полное решение поставленной задачи.

3. Случай неограниченного прямолинейного берега

Переходим к случаю, когда поверхность f суши — полуплоскость. Выбираем оси координат как показано на рис. 5: ось Y направлена вдоль берега, а ось X — в сторону суши.

Принимая во внимание, что любое внешнее поле $(E_z^0)_0$ может быть разложено в интеграл (ряд) Фурье по оси Y , можно ограничиться случаем чисто синусоидального по оси Y поля, т. е. положить, что

$$(E_z^0)_0 = F^0(x) e^{isy}, \quad (3.01)$$

где s может иметь любое вещественное значение.

Полагая при этом в формуле (2.04)

$$(E_z)_0 = F(x) e^{isy}, \quad (3.02)$$

мы можем записать ее теперь так:

$$F(x) = 2F^0(x) + \alpha \int_0^{\infty} F(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(s\eta + k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} d\eta. \quad (3.03)$$

Нетрудно показать, что входящий сюда интеграл по η имеет значение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(s\eta + k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} d\eta = i\pi H_0^{(1)}\left(\sqrt{k^2 - s^2} |x - \xi|\right), \quad (3.04)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Формула (3.03) дает поэтому, если положить $m = \sqrt{k^2 - s^2}$,

$$F(x) = 2F^0(x) + i\pi\alpha \int_0^{\infty} F(\xi) H_0^{(1)}(m|x - \xi|) d\xi. \quad (3.05)$$

Это и есть то уравнение, к решению которого сводится при сделанных упрощениях решение задачи береговой рефракции в рассматриваемом случае.

4. Общая теорема о решении интегрального уравнения

Интегральное уравнение, к которому приведена поставленная задача, является частным случаем уравнения вида

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} k(|x - \xi|) f(\xi) d\xi. \quad (4.01)$$

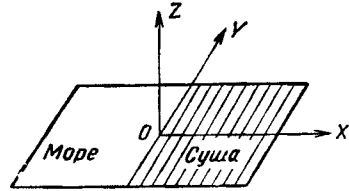


Рис. 5. Расположение координатных осей в случае неограниченного прямолинейного берега.

Общее исследование уравнения (4.01) дано в работе Фока [19] (добавление I этой книги). Мы приведем здесь лишь те результаты этого исследования, которые нужны для решения уравнения (3.05).

Пусть ядро $k(x)$ (которое мы предполагаем четным) таково, что не только оно само, но и функция $k_1(x) = e^{c|x|}k(x)$ будет для некоторого $c > 0$ абсолютно интегрируемой функцией с ограниченной вариацией в бесконечном промежутке.

В случае ядра $H_0^{(1)}(m|x - \xi|)$ это условие будет выполнено, если считать, что имеется некоторая, хотя бы минимальная, проводимость воздуха; при этом можно взять в качестве постоянной c любое число, удовлетворяющее неравенству

$$0 < c < \text{Im}(m).$$

Для решения уравнения (4.01) строим функцию

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} k(x) dx \quad (4.02)$$

и исследуем, обращается ли она в единицу при вещественных значениях ω . Для ядра $H_0^{(1)}(m|x - \xi|)$ она в единицу не обращается, так что мы имеем здесь дело с простейшим из случаев, разобранных в [19]. Далее, составляем интеграл

$$\chi_1(\omega) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-ic-\infty}^{-ic+\infty} \frac{\lg |1 - K(u)|}{u - \omega} du \quad (4.03)$$

и строим функцию

$$\psi_1(\omega) = e^{\chi_1(\omega)}. \quad (4.04)$$

Как доказано в [19], эта функция голоморфна и не имеет нулей в верхней полуплоскости ω (а также в полосе $-c < \text{Im}(\omega) < c$) и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\psi_1(\omega) \psi_1(-\omega) [1 - K(\omega)] = 1. \quad (4.05)$$

Обратимся теперь к свободному члену $g(x)$ предложенного интегрального уравнения. Пусть $g(x)$ есть функция, абсолютно интегрируемая и с ограниченной вариацией в бесконечном промежутке. Мы можем составить тогда функцию

$$G_1(\omega) = \int_0^{\infty} e^{ix\omega} g(x) dx \quad (4.06)$$

и выразить через нее и через $\psi_1(\omega)$ искомое решение интегрального уравнения. А именно, мы будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\omega} F_1(\omega) d\omega, \quad (4.07)$$

где $F_1(\omega)$ определяется из равенства

$$F_1(\omega) = \frac{\psi_1(\omega)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(-u) G_1(u)}{u - \omega} du \quad (4.08)$$

при $\text{Im}(\omega) > 0$ и из равенства

$$F_1(\omega) = \psi_1(\omega) \psi_1(-\omega) G_1(\omega) + \frac{\psi_1(\omega)}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{\psi_1(-u) G_1(u)}{u - \omega} du \quad (4.09)$$

при $\text{Im}(\omega) < c$. В полосе $0 < \text{Im}(\omega) < c$ оба выражения совпадают.

При доказательстве того, что выражение (4.07) действительно удовлетворяет предложенному интегральному уравнению (4.01), используется тот факт, что функция $F_1(\omega)$ голоморфна в верхней полуплоскости, тогда как функция

$$\Phi(\omega) = F_1(\omega) - K(\omega) F_1(\omega) - G_1(\omega)$$

голоморфна в нижней полуплоскости, причем обе функции $F_1(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ обращаются в нуль при $|\omega| \rightarrow \infty$.

Самого доказательства мы здесь не приводим.

Совокупность формул этого параграфа составляет теорему о решении интегрального уравнения вида (4.01).

Формулы эти значительно упрощаются в том частном случае, когда свободный член интегрального уравнения есть показательная функция. Действительно, положим

$$g(x) = e^{i\rho x} \quad (\text{Im}(\rho) > 0). \quad (4.10)$$

Согласно формуле (4.06) мы будем тогда иметь

$$G_1(\omega) = \frac{i}{\omega + \rho}. \quad (4.11)$$

Интеграл (4.08) сводится к вычету в точке $\omega = -\rho$ и дает

$$F_1(\omega) = i \frac{\psi_1(\omega) \psi_1(\rho)}{\omega + \rho} \quad (4.12)$$

— выражение, симметричное относительно ω и ρ . Решение уравнения принимает вид

$$f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\omega} \frac{\psi_1(\omega) \psi_1(\rho)}{\omega + \rho} d\omega. \quad (4.13)$$

Необходимо помнить, что в точке $x = 0$ функция $f(x)$, определяемая интегралом (4.07), имеет разрыв, причем $f(-0) = 0$ и $f(+0) = 2f(0)$.

В случае (4.13) мы имеем

$$f(+0) = \psi_1(\rho). \quad (4.14)$$

5. Решение интегрального уравнения береговой рефракции

Мы можем теперь применить наши общие формулы к решению интегрального уравнения береговой рефракции:

$$F(x) = 2F^0(x) + i\pi\alpha \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(m|x-\xi|) F(\xi) d\xi. \quad (5.01)$$

При этом мы ограничимся случаем набегания на берег плоской волны, в соответствии с чем положим

$$F^0(x) = e^{imx}, \quad (5.02)$$

считая тем самым амплитуду волны на границе суши и моря равной единице. При отсутствии поглощения в воздухе мы можем положить $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны в воздухе. Тогда будет

$$m = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \vartheta; \quad s = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta, \quad (5.03)$$

где ϑ есть угол между фронтом волны и береговой линией.

Мы будем, однако (как и до сих пор), рассматривать случай отсутствия поглощения как предельный случай весьма малого поглощения и до перехода к пределу будем считать мнимую часть m положительной. Определяемая уравнениями (5.01) и (5.02) функция $F(x)$ представляет аналитическую функцию от x , которую можно рассматривать не только для вещественных, но и для комплексных значений x . Если мы положим

$$-imx = x_1, \quad (5.04)$$

то мы можем определить сперва эту функцию для вещественных x_1 (т. е. для комплексных значений координаты x), а затем уже перейти к таким (комплексным) значениям x_1 , которым соответствуют вещественные значения координаты x . Такое рассмотрение удобно, так как позволяет легче выделить интересующие нас ветви неоднозначных функций.

Положим

$$F(x) = 2f(x_1), \quad \frac{2\pi i\alpha}{m} = a \quad (5.05)$$

и составим уравнение для $f(x_1)$ в предположении, что x_1 вещественно и меняется от 0 до $+\infty$. Мы получим

$$f(x_1) = e^{-x_1} + \frac{ia}{2} \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(|x_1 - \xi|) f(\xi) d\xi \quad (5.06)$$

или

$$f(x_1) = e^{-x_1} + \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(|x_1 - \xi|) f(\xi) d\xi, \quad (5.07)$$

если мы выразим функцию Ханкеля $H_0^{(1)}$ через функцию Макдональда K_0 .

Уравнение (5.07) мы будем решать при помощи теоремы, сформулированной в предыдущем параграфе. Преобразуя ядро согласно (4.02) по формуле Фурье, мы получим

$$K(w) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixw} K_0(|x|) dx = \frac{a}{\sqrt{w^2 + 1}}. \quad (5.08)$$

Вычисляем по формуле (4.03) функцию $\chi_1(w)$. Предполагая $\text{Im}(w) > 0$, мы можем написать

$$\chi_1(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \lg\left(1 - \frac{a}{\sqrt{u^2 + 1}}\right) \frac{du}{u - w}. \quad (5.09)$$

Производная от этого интеграла по w выражается в конечном виде. Полагая

$$b = \sqrt{1 - a^2}, \quad \text{Re}(b) > 0, \quad (5.10)$$

мы получим после элементарных выкладок

$$\frac{d\chi_1}{dw} = \frac{1}{2(w+i)} - \frac{1}{2(w+ib)} + \frac{1}{2\pi(w^2+b^2)} \left\{ b \lg \frac{b+ia}{b-ia} - ia \frac{w}{\sqrt{1+w^2}} \lg \frac{w+\sqrt{1+w^2}}{w-\sqrt{1+w^2}} \right\}. \quad (5.11)$$

Это выражение голоморфно в верхней полуплоскости w ; в частности, легко проверить, что точка $w = ib$ не является полюсом для $\chi_1'(w)$.

Чтобы упростить полученное выражение, положим

$$b = \cos \sigma, \quad a = \sin \sigma, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \text{Re}(\sigma) < \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.12)$$

$$w = i \cos \tau, \quad \sqrt{1+w^2} = \sin \tau,$$

причем $\operatorname{Re}(\sin \tau) > 0$, и составим производную от χ_1 по τ . Мы будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_1}{d\tau} = & -\frac{\sin \tau}{2(\cos \tau + 1)} + \frac{\sin \tau}{2(\cos \tau + \cos \sigma)} + \\ & + \frac{\tau + \sigma}{2\pi \sin(\tau + \sigma)} - \frac{\tau - \sigma}{2\pi \sin(\tau - \sigma)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Отсюда

$$\chi_1 = \frac{1}{2} \lg \frac{\cos \tau + 1}{\cos \tau + \cos \sigma} + \frac{1}{2\pi} \int_{\tau - \sigma}^{\tau + \sigma} \frac{u}{\sin u} du, \quad (5.14)$$

так как при $\tau = i\infty$ должно быть $\chi_1 = 0$.

Таким образом, для функции $\psi_1(w) = \psi_1(i \cos \tau)$ получается выражение

$$\psi_1(i \cos \tau) = \sqrt{\frac{\cos \tau + 1}{\cos \tau + \cos \sigma}} \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\tau - \sigma}^{\tau + \sigma} \frac{u}{\sin u} du \right). \quad (5.15)$$

Нетрудно проверить, что

$$\psi_1(i \cos \tau) \psi_1(i \cos(\pi - \tau)) = \frac{\sin \tau}{\sin \tau - \sin \sigma}. \quad (5.16)$$

Так как в переменных σ, τ ядро $K(w)$ имеет вид

$$K(w) = \frac{\sin \sigma}{\sin \tau}, \quad (5.17)$$

то соотношение (5.16) показывает, что функция $\psi_1(w)$ действительно удовлетворяет функциональному уравнению (4.05).

Подставляя (5.15) в (4.13), получим решение нашего интегрального уравнения (5.07). Для исследования решения необходимо, однако, преобразовать полученный интеграл так, чтобы он быстро сходился. Для этого нужно заменить интегрирование по вещественной оси эквивалентным контуром, лежащим в нижней полуплоскости комплексной переменной w . В верхней полуплоскости функция по определению голоморфна и не имеет нулей. Особенности точки $\psi_1(w)$ в нижней полуплоскости легче всего найти при помощи функционального уравнения (4.05), которое дает

$$\psi_1(w) = \frac{\sqrt{1+w^2}}{\psi_1(-w) (\sqrt{1+w^2} - \sin \sigma)}. \quad (5.18)$$

Отсюда видно, что особенными точками будут: точка разветвления $\omega = -i$ и полюс $\omega = -ib = -i \cos \sigma$ (последний только в том случае, когда вещественная часть величины $a = \sin \sigma$ положительна).

Сводя контур к петле вокруг точки $\omega = -i$, облегающей отрицательную мнимую ось, мы получим при $\operatorname{Re}(a) > 0$:

$$f(x_1) = \frac{\psi_1(i)}{\psi_1(i \cos \sigma)} \frac{1 + \cos \sigma}{\cos \sigma} e^{-x_1 \cos \sigma} - \frac{\sin \sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1 \operatorname{ch} t} \frac{\psi_1(i)}{\psi_1(i \operatorname{ch} t)} \frac{\operatorname{ch} t + 1}{\operatorname{ch}^2 t - \cos^2 \sigma} dt \quad (5.19)$$

[при $\operatorname{Re}(\sin \sigma) > 0$],

где первый член представляет вычет в полюсе $\omega = -ib$.

В случае же $\operatorname{Re}(a) < 0$ вычета брать не нужно, и мы будем иметь

$$f(x_1) = - \frac{\sin \sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1 \operatorname{ch} t} \frac{\psi_1(i)}{\psi_1(i \operatorname{ch} t)} \frac{\operatorname{ch} t + 1}{\operatorname{ch}^2 t - \cos^2 \sigma} dt \quad (5.20)$$

[при $\operatorname{Re}(\sin \sigma) < 0$].

Мы нашли строгое решение предложенного интегрального уравнения, притом в форме, справедливой не только для положительных значений x_1 , но и для комплексных значений x_1 с неотрицательной мнимой частью; следовательно, и для $x_1 = -itx$, где x — вещественная координата.

Приближенные формулы для $f(x_1)$ будут выведены в следующем параграфе.

6. Приближенный вид решения интегрального уравнения

При исследовании полученного решения интегрального уравнения необходимо помнить, что это уравнение является лишь приближенным и справедливо только при соблюдении условия

$$\frac{\omega}{\mu_2 \sqrt{\epsilon_2^2 \omega^2 + (4\pi\sigma_2)^2}} \ll 1. \quad (6.01)$$

При помощи введенных выше величин a и ϑ это условие может быть написано в виде

$$|a|^2 \cos^2 \vartheta \ll 1. \quad (6.02)$$

При не слишком малых значениях $\cos \vartheta$ (при не слишком косом падении волны) это условие равносильно требованию

малости самой величины $|a|$, а следовательно, и входящего в наши формулы параметра σ . При малых же значениях $|\sigma|$ наши формулы могут быть упрощены. Но это упрощение необходимо делать так, чтобы формулы оставались справедливыми не только для конечных, но и для сколь угодно больших значений x_1 (для больших расстояний от берега в глубь суши; напомним, что $x_1 = -ikx \cos \vartheta$). Имея это в виду, мы вычислим интеграл, стоящий в формулах (5.19) и (5.20), сперва для больших значений x_1 , не предполагая σ малым, а затем перейдем к случаю малых σ .

Главным участком интегрирования будет окрестность точки $t = = 0$; вблизи этой точки мы можем медленно меняющиеся множители

$$\frac{\psi_1(i)}{\psi_1(i \operatorname{ch} t)} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{ch} t + 1}{\operatorname{ch} t + \cos \sigma}$$

заменить их значениями при $t = 0$. Эти значения равны соответственно единице и величине $\sec^2 \frac{\sigma}{2}$. Сделав эти пренебрежения, мы получим

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= A e^{-x_1 \cos \sigma} - \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} I(x_1, \sigma) \\ & \quad [\text{при } \operatorname{Re}(\sin \sigma) > 0], \\ f(x_1) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} I(x_1, \sigma) \\ & \quad [\text{при } \operatorname{Re}(\sin \sigma) < 0], \end{aligned} \right\} \quad (6.03)$$

где мы положили

$$A = \frac{\psi_1(i)}{\psi_1(i \cos \sigma)} \frac{1 + \cos \sigma}{\cos \sigma}; \quad (6.04)$$

$$I(x_1, \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1 \operatorname{ch} t} \frac{dt}{\operatorname{ch} t - \cos \sigma}. \quad (6.05)$$

Последний интеграл равен

$$I(x_1, \sigma) = 2 \int_0^{\infty} e^{u \cos \sigma} K_0(x_1 + u) du, \quad (6.06)$$

как в этом легко убедиться при помощи дифференциального уравнения

$$\frac{dI}{dx_1} + \cos \sigma I = -2K_0(x_1). \quad (6.07)$$

Так как мы предполагаем x_1 большим, то функцию Макдональда под интегралом мы можем заменить ее асимптотическим выражением, после чего получим

$$I(x_1, \sigma) = \frac{\pi}{\sin \frac{\sigma}{2}} e^{-x_1 \cos \sigma} \left[\pm 1 - \theta \left(\sqrt{2x_1} \sin \frac{\sigma}{2} \right) \right], \quad (6.08)$$

где $\theta(\xi)$ определяется равенством

$$\theta(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi, \quad (6.09)$$

а знак при единице в (6.08) тот же, что и знак вещественной части $\sin \frac{\sigma}{2}$ или $\sin \sigma$. [По условию (5.12) мы имеем $-\frac{\pi}{2} < \text{Re}(\sigma) < \frac{\pi}{2}$, вследствие чего вещественные части величин σ , $\sin \frac{\sigma}{2}$, $\sin \sigma$ имеют один и тот же знак].

Полагая

$$\xi = \sqrt{2x_1} \sin \frac{\sigma}{2} \quad (6.10)$$

и подставляя (6.08) в (6.03), будем иметь при $\text{Re}(\sin \sigma) > 0$

$$f(x_1) = e^{-x_1 \cos \sigma} \left[A - \sec \frac{\sigma}{2} + \sec \frac{\sigma}{2} \theta(\xi) \right] \quad (6.11)$$

и при $\text{Re}(\sin \sigma) < 0$

$$f(x_1) = e^{-x_1 \cos \sigma} \left[\sec \frac{\sigma}{2} + \sec \frac{\sigma}{2} \theta(\xi) \right]. \quad (6.12)$$

Как указано в начале этого параграфа, наиболее интересен случай малых σ . В этом случае оба выражения (6.11) и (6.12) совпадают и могут быть написаны в виде

$$f(x_1) = e^{-x_1 \Phi(\xi)}, \quad (6.13)$$

где

$$\Phi(\xi) = e^{\xi^2} [1 + \theta(\xi)], \quad (6.14)$$

причем величину ξ можно положить равной

$$\xi = \sqrt{\frac{x_1}{2}} \sin \sigma = a \sqrt{\frac{x_1}{2}}. \quad (6.15)$$

Но если σ мало, то формулы (6.13) и (6.14) справедливы при каких угодно (a не только при больших) значениях x_1 . В самом деле, если при малом σ величина x_1 будет конечной (не большой),

то величина ξ будет малой, $\varphi(\xi)$ будет мало отличаться от единицы, а $f(x_1)$ будет приближенно равно e^{-x_1} , т. е. свободному члену в интегральном уравнении (5.07), как и должно быть. Таким образом, если σ мало, то формулы (6.13) и (6.14), выведенные в предположении больших x_1 , годятся также и без этого предположения.

Нам остается перейти от переменной x_1 к координате x и подставить найденное решение в выражение для амплитуды поля. При этом удобно для случая малых σ ввести величину

$$\rho = \frac{ik^3 x}{2k_2^2 \cos \vartheta}, \quad (6.16)$$

аналогичную зоммерфельдовскому численному расстоянию. Если можно пренебречь токами смещения в земле по сравнению с током проводимости, то величина ρ будет вещественной. В таком случае ρ есть расстояние от берега, выраженное в известном масштабе и считаемое вдоль луча (от точки пересечения его с берегом).

Подставляя в (6.15) значения

$$a = -\frac{k}{k_2 \cos \vartheta}, \quad x_1 = -ikx \cos \vartheta, \quad (6.17)$$

получим для нашей прежней переменной ξ выражение

$$\xi = i \sqrt{\rho}. \quad (6.18)$$

С этим значением ξ «множитель ослабления» φ может быть написан в виде

$$\varphi = e^{-\rho} \left[1 + i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\rho}} e^{-t^2} dt \right]. \quad (6.19)$$

В рассмотренном случае набегающая волна согласно (3.01), (5.02) и (5.03) имела вид

$$(E_z^0)_0 = e^{ik(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)}. \quad (6.20)$$

Наши формулы показывают тогда, что полное поле над сушей может быть представлено в виде

$$(E_z)_0 = 2\varphi e^{ik(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)}, \quad (6.21)$$

где φ имеет значение (6.19).

*Математические
добавления*

ДОБАВЛЕНИЕ I

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ*

В добавлении I дается полная математическая теория линейных интегральных уравнений второго рода (т. е. с неизвестной функцией, стоящей как под знаком интеграла, так и вне его) с полубесконечными пределами и ядром, зависящим от абсолютного значения разности аргументов. Такие уравнения встречаются во многих задачах математической физики, например в задаче о береговой рефракции (глава 18), об излучении полубесконечного волновода с открытым концом, о поглощении и рассеянии света в атмосфере и в других задачах.

Формулируются условия, которые должны быть наложены на ядро уравнения и на заданную функцию, чтобы существовало единственное решение с заданными свойствами (ограниченность, стремление к нулю на бесконечности, представимость в виде суммы функции с ограниченной вариацией в бесконечном промежутке и непрерывной функции). При помощи ядра, преобразованного по Фурье, составляется характеристическое уравнение задачи. Существенную роль играет выделение в нем множителей, представляющих функции комплексного переменного с определенными свойствами в верхней и нижней полуплоскости (метод факторизации).

Если характеристическое уравнение не имеет вещественных корней, то для существования решения с указанными свойствами достаточно, чтобы заданная функция была абсолютно интегрируема и имела ограниченную вариацию в бесконечном промежутке. Если имеется $2l$ вещественных корней, то заданная функция должна удовлетворять l условиям ортогональности (и, кроме того, несколько быстрее убывать на бесконечности).

В случае отсутствия вещественных корней соответствующее однородное уравнение не имеет ограниченных (и даже не слишком быстро возрастающих) решений. В случае $2l$ вещественных корней оно имеет ровно l ограниченных решений; эти решения и входят в условия ортогональности.

Исследование ведется с широким использованием свойств интегралов Фурье в комплексной плоскости, и решение получается в виде контурных интегралов, т. е. в явной форме, допускающей численные вычисления.

Введение

В ряде задач математической физики встречаются интегральные уравнения вида

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} k(x-y) f(y) dy \quad (0.1)$$

* Фок, 1944.

с симметричным ядром

$$k(x - y) = k(|x - y|), \quad (0.2)$$

зависящим от абсолютного значения разности двух аргументов.

Решение интегрального уравнения с ядром (0.2) и с переменным верхним пределом x (уравнения Вольтерра) дано в нашей прежней работе (1922 г.) [34]. Оно рассматривается также в книге Doetsch [43], посвященной преобразованию Лапласа.

Уравнение же с бесконечным верхним пределом еще полностью не решено. В литературе имеется лишь исследование соответствующего однородного уравнения (также и в более общем случае, когда условие симметрии (0.2) не выполняется) [35]. Что касается неоднородного уравнения, то оно, по-видимому, не исследовано.

Задача о неоднородном уравнении имеет, однако, самостоятельный интерес. В самом деле, в математической физике важны те случаи, когда решение задачи единственное, а как раз эти случаи при изучении однородной задачи обычно не рассматриваются, так как при выполнении условий, вытекающих из физических требований, последняя не имеет иного решения, кроме нулевого.

Целью настоящей работы является исследование и решение как неоднородного, так и однородного уравнения вида (0.1).

1. Преобразование уравнения

В уравнении

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} k(x - y) f(y) dy \quad (1.01)$$

функция $g(x)$ задана лишь для $x \geq 0$. Искомое решение $f(x)$ также требуется определить лишь для $x \geq 0$. Но мы можем условиться считать, что

$$f(x) = 0 \text{ при } x < 0. \quad (1.02)$$

Чтобы уравнение (1.01) имело место и для $x < 0$, мы подчиним функцию $g(x)$ условию

$$g(x) = - \int_0^{\infty} k(x - y) f(y) dy \text{ при } x < 0. \quad (1.03)$$

Это позволяет нам представить уравнение (1.01) в виде

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x - y) f(y) dy \quad (1.04)$$

и рассматривать входящие в него функции как для положительных, так и для отрицательных значений аргументов.

Решение уравнения (1.04) получается весьма просто при помощи преобразования Фурье. В самом деле, положим, что функции $k(x)$, $g(x)$ и $f(x)$ таковы, что к ним применима формула Фурье*.

Введем обозначения

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} k(x) dx, \quad (1.05)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx, \quad (1.06)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} g(x) dx. \quad (1.07)$$

Умножая (1.04) на $e^{i\omega x} dx$ и интегрируя по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, мы приходим к соотношению

$$F(\omega) = G(\omega) + K(\omega) F(\omega), \quad (1.08)$$

откуда $F(\omega)$ получается алгебраическим путем. Подстановка этого значения $F(\omega)$ в формулу

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} F(\omega) d\omega \quad (1.09)$$

и дает решение уравнения (1.04).

Заметим, что для уравнения с ядром (0.2) и с переменным верхним пределом x функция $F(\omega)$ в (1.09) определяется, как показано в [34], из соотношения

$$F(\omega) = G_1(\omega) + K_1(\omega) F(\omega), \quad (1.10)$$

где $G_1(\omega)$ — интеграл

$$G_1(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega x} g(x) dx, \quad (1.11)$$

* Разумеется, применимость формулы Фурье к $f(x)$ должна быть еще доказана, причем в доказательстве нужно исходить из тех или иных условий, налагаемых на $k(x)$ и на $g(x)$.

а $K_1(w)$ связано с $K(w)$ так же, как $G_1(x)$ с $G(w)$. Соотношение (1.10), так же как и (1.08), чисто алгебраическое.

В случае интегрального уравнения (1.01) дело осложняется тем, что функция $G(w)$ в (1.08) нам неизвестна.

Считая $g(x)$ непосредственно заданным лишь для положительных x , мы можем полагать известным интеграл (1.11), но не интеграл (1.07). Что касается (1.07), то вследствие (1.02) и (1.03)

$$G(w) = G_1(w) - \int_{-\infty}^0 e^{iwx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y) dy. \quad (1.12)$$

Интеграл по y равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} K(u) F(u) du. \quad (1.13)$$

Интеграл по x мы пишем в виде разности интегралов от $-\infty$ до $+\infty$ и от 0 до ∞ ; первый из них вычисляем по формуле Фурье и переносим в левую часть (1.12). Получаем

$$G(w) + K(w) F(w) = G_1(w) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{iwx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} K(u) F(u) du. \quad (1.14)$$

Таким образом, соотношение (1.08) принимает вид

$$F(w) = G_1(w) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{iwx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} K(u) F(u) du. \quad (1.15)$$

Если иметь в виду формулу (1.13), то уравнение (1.15) может быть получено непосредственно из (1.01) или (1.04) после умножения на $e^{iwx} dx$ и интегрирования по x от 0 до ∞ .

Мы предположим, что функция $g(x)$ абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию во всем бесконечном промежутке. Тогда преобразованная функция $G_1(w)$ будет, по определению (1.11), голоморфна в верхней полуплоскости, непрерывна вплоть до вещественной оси, и будет убывать как в верхней полуплоскости, так и на вещественной оси обратно $|w|$.

Относительно ядра $k(x)$ мы предположим, что существует такая положительная постоянная c , что не только само ядро, но и функция

$$k_1(x) = e^{c|x|} k(x) \quad (c > 0) \quad (1.16)$$

абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию в бесконечном промежутке. Отсюда, в частности, следует, что при всех x

$$|k(x)| < Me^{-c|x|}, \quad (1.17)$$

где M — некоторая положительная постоянная.

Далее согласно (0.2) ядро $k(x)$ должно быть четной функцией от x . При этих условиях преобразованное ядро $K(w)$ окажется голоморфным внутри полосы

$$-c < \operatorname{Im}(w) < +c \quad (1.18)$$

и будет в ней убывать обратно $|\omega|$. Кроме того, оно будет четной функцией от ω .

Свойства функции $F(w)$ будут подробно исследованы ниже. Во всяком случае, из условия (1.02) следует, что интеграл (1.06) совпадает с интегралом,

$$F_1(w) = \int_0^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx. \quad (1.19)$$

и что, следовательно, $F(w)$ должна быть функцией, голоморфной в верхней полуплоскости. Мы покажем также, что $F(w)$ будет убывать в верхней полуплоскости обратно $|\omega|$.

Вследствие голоморфности функций $F(w)$ и $G_1(w)$ при $\operatorname{Im}(w) > 0$ мы можем рассматривать уравнение (1.15) для комплексных значений ω с положительной мнимой частью. Для таких ω мы можем сперва выполнить интегрирование по x , после чего получим

$$F(w) = G_1(w) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(u)F(u)}{u-w} du. \quad (1.20)$$

В этом новом интегральном уравнении члены вне интеграла могут быть в свою очередь представлены в виде интегралов

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(u)}{u-w} du, \quad (1.21)$$

$$G_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_1(u)}{u-w} du. \quad (1.22)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно применить формулу Коши к области, ограниченной вещественной осью и дугой полуокружности неограниченно возрастающего радиуса, лежащей в верхней полуплоскости (в этой области обе функции $F(w)$ и $G_1(w)$ голоморфны).

Подставляя (1.21) и (1.22) в (1.20) и перенося все члены в левую часть, получим уравнение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(u) du}{u-w} = 0 \quad \text{при } \text{Im}(w) > 0, \quad (1.23)$$

где мы положили

$$F(u) [1 - K(u)] - G_1(u) = \Phi(u). \quad (1.24)$$

2. Вспомогательные предложения

В дальнейшем нам придется неоднократно пользоваться следующими леммами:

Л е м м а I. Пусть функция $H(w)$ голоморфна внутри полосы

$$a \leq \text{Im}(w) \leq b, \quad (2.01)$$

непрерывна вплоть до ее границы и обращается в нуль при $\text{Re}(w) \rightarrow \pm\infty$ внутри полосы по крайней мере обратно $|w|^\sigma$, где $\sigma > 0$.

Тогда ее можно представить в виде суммы двух функций

$$H(w) = H_1(w) + H_2(w), \quad (2.02)$$

из которых первая голоморфна не только внутри полосы, но и во всей полуплоскости $\text{Im}(w) > a$, а вторая — не только внутри полосы, но и во всей полуплоскости $\text{Im}(w) < b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о основано непосредственно на формуле Коши. Если $a < \text{Im}(w) < b$, то можно положить

$$H_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{H(u) du}{u-w}, \quad (2.03)$$

$$H_2(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} \frac{H(u) du}{u-w}. \quad (2.04)$$

Применяя формулу Коши к области, ограниченной прямыми $\text{Im}(w) = a$ и $\text{Im}(w) = b$, получим для суммы выражений (2.03) и (2.04) величину $H(w)$. С другой стороны, очевидно, что функция (2.03) голоморфна при $\text{Im}(w) > a$, тогда как функция (2.04) голоморфна при $\text{Im}(w) < b$. Таким образом, требуемое разложение доказано.

Оценка функций $H_1(w)$ и $H_2(w)$ на бесконечности дана в леммах II и III.

Л е м м а II. Если для достаточно больших $|u|$ внутри полосы (2.01) имеет место неравенство

$$|H(u)| < \frac{M}{|u|^\sigma} \quad (0 < \sigma \leq 1), \quad (2.05)$$

то для достаточно больших $|w|$ функция $H_1(w)$ удовлетворяет в области $\text{Im}(w) > a$ неравенству

$$|H_1(w)| < \frac{1}{\pi |w|^\sigma} \left\{ M \lg \left| \frac{w}{w^*} \right| + M' \right\} \quad (\sigma < 1) \quad (2.06)$$

или неравенству

$$|H_1(w)| < \frac{1}{\pi |w|} \left\{ M \lg |w| + M \lg \left| \frac{w}{w^*} \right| + M'' \right\} \quad (\sigma = 1), \quad (2.07)$$

где постоянные M' , M'' , так же как и M , не зависят от w .

В этих формулах через w^* обозначена мнимая часть $w - a$:

$$w^* = \text{Im}(w - a). \quad (2.08)$$

Если эта величина меньше половины ширины полосы, т. е. если

$$\text{Im}(w) < \frac{b+a}{2}, \quad (2.09)$$

нужно заменить $|w^*|$ на $\frac{b-a}{2}$.

Аналогичная оценка имеет место для $H_2(w)$ в области $\text{Im}(w) < b$.

З а м е ч а н и е. В формуле (2.06) логарифмический член остается конечным, если точка w удаляется на бесконечность по полупрямой, наклоненной к вещественной оси под конечным углом ($w = |w|e^{i\phi}$; $\varepsilon < \phi < \pi - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$). При этом условии $H_1(w)$ будет порядка $|w|^{-\sigma}$, если $\sigma < 1$. В формуле же (2.07) из двух логарифмических членов достаточно тогда оставить первый, так что если $\sigma = 1$, то функция $H_1(w)$ будет порядка $|w|^{-1} \lg |w|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точка w лежит внутри полосы (2.01), то для доказательства достаточно оценить тот из интегралов $H_1(w)$ и $H_2(w)$, в котором контур интегрирования дальше отстоит от точки w . Для другого интеграла оценка будет вытекать из соотношения $H_1(w) + H_2(w) = H(w)$. Переписав формулу (2.03) в виде

$$H_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(u+ia) du}{u+ia-w} \quad (2.10)$$

и заменяя подинтегральную функцию ее модулем, мы получим неравенство

$$|H_1(w)| < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H(u+ia)| du}{|u+ia-w|}. \quad (2.11)$$

В интеграле (2.11) можно разбить путь интегрирования на три участка: от $-\infty$ до $-A$, от $-A$ до $+A$ и от A до $+\infty$, где A — достаточно большое число, не зависящее от w . Интеграл по среднему участку будет, очевидно, порядка $|w|^{-1}$. В интеграле же по крайним участкам можно воспользоваться оценкой (2.05) для $H(u)$, что и приводит, после элементарных, хотя и несколько сложных вычислений, к формулам леммы II.

Л е м м а III. Если для достаточно больших $|u|$ внутри полосы (2.01) имеет место неравенство

$$|H(u)| < \frac{M}{|u|^{1+\sigma}} \quad (0 < \sigma < 1), \quad (2.12)$$

то для достаточно больших $|w|$ функции $H_1(w)$ и $H_2(w)$ могут быть представлены (первая — в области $\text{Im}(w) > a$, вторая — в области $\text{Im}(w) < b$) в виде

$$H_1(w) = \frac{iC}{w} + \frac{1}{w} H_1^*(w), \quad (2.13)$$

$$H_2(w) = -\frac{iC}{w} + \frac{1}{w} H_2^*(w), \quad (2.14)$$

где C — постоянная, а $H_1^*(w)$ и $H_2^*(w)$ удовлетворяют тем же неравенствам, как $H_1(w)$ и $H_2(w)$ в лемме II.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в формулу (2.03) тождество

$$\frac{1}{u-w} = -\frac{1}{w} + \frac{u}{w(u-w)}. \quad (2.15)$$

Мы получим для $H_1(w)$ выражение (2.13), в котором постоянная C равна

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} H(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} H(u) du, \quad (2.16)$$

а функция $H_1^*(w)$ имеет вид

$$H_1^*(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{uH(u)}{u-w} du. \quad (2.17)$$

Вследствие (2.12) функция $uH(u)$ удовлетворяет здесь такому же неравенству, как $H(u)$ в лемме II, а потому имеют место и указанные неравенства для $H_1^*(w)$ и $H_2^*(w)$.

3. Формальное решение уравнения

Возвратимся к уравнению (1.24), которое напомним в виде

$$F(w) [1 - K(w)] - G_1(w) = \Phi(w). \quad (3.01)$$

В этом выражении функция $\Phi(w)$ во всяком случае голоморфна в той области, где все три функции $F(w)$, $G_1(w)$ и $K(w)$ голоморфны, т. е. внутри полосы

$$0 < \text{Im}(w) \leq c', \quad (3.02)$$

где c' — любое положительное число, меньшее той постоянной c , которая входит в (1.16).

Полагая в формулах леммы I $a = 0$, $b = c'$, $H(w) = \Phi(w)$ и пользуясь равенством (1.23), мы убедимся, что разложение (2.02) сводится ко второму члену. Это значит, что функция $\Phi(w)$ в (3.01) голоморфна не только внутри полосы (2.02), но и во всей нижней полуплоскости.

Таким образом, решение интегрального уравнения свелось к следующей задаче теории функций.

Даны функция $K(w)$, голоморфная в полосе (1.18), и функция $G_1(w)$, голоморфная в верхней полуплоскости. Требуется найти такую функцию $F(w)$, чтобы сама она была голоморфна в верхней полуплоскости, а все выражение (3.01) было голоморфно не только в полосе (3.02), но и в нижней полуплоскости.

Для решения этой задачи существенное значение имеет разложение функции $1 - K(w)$ на множители. Во всякой полосе, более узкой, чем полоса (1.18), функция $K(w)$ голоморфна не только внутри, но и на границе; на бесконечности же $K(w)$ стремится к нулю. Поэтому в этой более узкой полосе функция $1 - K(w)$ может иметь только конечное число корней.

Предположим сначала, что все эти корни комплексны. Случай вещественных корней представляет некоторые особенности и будет рассмотрен отдельно. Вследствие четности ядра $k(x)$ функция $K(w)$ будет четной, и корни функции $1 - K(w)$ будут расположены симметрично относительно начала.

Обозначим через v_0 расстояние от вещественной оси ближайшего к ней комплексного корня (вследствие упомянутой симметрии, таких корней будет четное число). Пусть c^* — некоторое положительное число, меньшее v_0 . Мы можем рассмотреть полосу

$$-c^* \leq \text{Im}(w) \leq c^*, \quad (3.03)$$

более узкую, чем первоначальная полоса (1.18), и обладающую тем свойством, что внутри нее функция $1 - K(w)$ не имеет комплексных корней. В силу нашего предположения об отсутствии вещественных корней, эта функция совсем не будет иметь там корней. Поэтому функция

$$\chi(w) = -\lg |1 - K(w)| \quad (3.04)$$

будет внутри полосы (3.03) голоморфна. Так как на бесконечности $K(w)$ стремится к нулю (обратно $|w|$), то можно взять такую ветвь (главную ветвь логарифма), чтобы при $\operatorname{Re}(w) \rightarrow +\infty$ было и $\chi(w) \rightarrow 0$. Но $\chi(w)$ — четная функция от w ; поэтому $\chi(w) \rightarrow 0$ также и при $\operatorname{Re}(w) \rightarrow -\infty$. При этом $\chi(w)$ будет удовлетворять неравенству

$$|\chi(w)| < \frac{M}{|w|}. \quad (3.05)$$

Таким образом, функция $\chi(w)$ удовлетворяет всем условиям леммы I, и мы можем разложить ее на сумму

$$\chi(w) = \chi_1(w) + \chi_2(w) \quad (3.06)$$

так, чтобы $\chi_1(w)$ было голоморфно в полосе (3.03) и в верхней полуплоскости, а $\chi_2(w)$ — в той же полосе и в нижней полуплоскости. Нетрудно видеть, что вследствие четности $\chi(w)$

$$\chi_2(w) = \chi_1(-w). \quad (3.07)$$

Переходя от логарифмов к числам и полагая

$$e^{\chi_1(w)} = \psi_1(w), \quad e^{\chi_2(w)} = \psi_2(w), \quad (3.08)$$

мы получим следующее разложение функции $1 - K(w)$ (вернее, обратной ее величины) на множители:

$$\frac{1}{1 - K(w)} = \psi_1(w) \psi_2(w). \quad (3.09)$$

Первый множитель $\psi_1(w)$ голоморфен и не имеет нулей в полосе (3.03) и в верхней полуплоскости, а второй множитель $\psi_2(w)$ обладает теми же свойствами в той же полосе и в нижней полуплоскости. Вследствие (3.07)

$$\psi_2(w) = \psi_1(-w). \quad (3.10)$$

На бесконечности функции χ_1 и χ_2 обращаются в нуль, а функции ψ_1 и ψ_2 — в единицу.

Получив разложение $1 - K(w)$ на множители, перепишем уравнение (3.01) в виде

$$\frac{F(w)}{\psi_1(w) \psi_2(w)} - G_1(w) = \Phi(w). \quad (3.11)$$

Умножив обе части (3.11) на $\psi_2(w)$, получим

$$\frac{F(w)}{\psi_1(w)} - \psi_2(w)G_1(w) = \psi_2(w)\Phi(w). \quad (3.12)$$

В полосе

$$0 < \operatorname{Im}(w) < c^* \quad (3.13)$$

[верхней половине полосы (3.03)] функция $\psi_2(w)G_1(w)$ голоморфна и удовлетворяет условиям леммы I. Ее можно разложить на сумму

$$\psi_2(w)G_1(w) = H_1(w) + H_2(w) \quad (3.14)$$

так, чтобы первый член был голоморфен в верхней полуплоскости, а второй член — в полосе (3.13) и в нижней полуплоскости, и чтобы каждый из них обращался на бесконечности в нуль. Подставляя (3.14) в (3.12) и перенося $H_2(w)$ в правую часть, получим

$$\frac{F(w)}{\psi_1(w)} - H_1(w) = \psi_2(w)\Phi(w) + H_2(w). \quad (3.15)$$

Здесь левая часть будет функцией, голоморфной в верхней полуплоскости, правая же голоморфна в полосе (3.13) и в нижней полуплоскости. Следовательно, обе части равенства (3.15) голоморфны во всей плоскости, а значит, они приводятся к постоянной. Но эта постоянная равна нулю, так как на бесконечности обе части (3.15) обращаются в нуль. Поэтому

$$F(w) = \psi_1(w)H_1(w), \quad (3.16)$$

$$\Phi(w) = -\frac{H_2(w)}{\psi_2(w)}. \quad (3.17)$$

Так как в полосе (3.13) и в нижней полуплоскости функция $\psi_2(w)$ не только голоморфна, но и не имеет нулей, то определяемая из (3.17) функция $\Phi(w)$ не будет иметь в этой области полюсов, а будет в ней действительно голоморфной.

Таким образом, обе функции (3.16) и (3.17) удовлетворяют поставленным условиям. Мы получили, следовательно, решение исходного интегрального уравнения в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} F(\omega) d\omega, \quad (3.18)$$

где $F(\omega)$ имеет значение (3.16).

4. Доказательство существования интеграла для $f(x)$

Чтобы сделать наши предыдущие рассуждения вполне строгими, нам нужно доказать, исходя из свойств заданных функций $g(x)$ и $k(x)$, что интеграл (3.18) для $f(x)$ существует и что представляемая им функция $f(x)$ удовлетворяет предложенному интегральному уравнению. Тем самым будет доказано существование решения.

Перечислим те условия, которым должны удовлетворять заданные функции $g(x)$ и $k(x)$.

Ф у н к ц и я $g(x)$. Функция $g(x)$:

1° абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке,

2° имеет в бесконечном промежутке ограниченную вариацию.

Из условия 2° вытекает, что функция $g(x)$ стремится на бесконечности к определенному пределу, а из условия 1° следует, что этот предел равен нулю.

Из условий 1° и 2° вытекает и предположенная в параграфе 1 применимость формулы Фурье. Для применимости формулы Фурье достаточно было бы даже потребовать вместо 2° ограниченности вариации во всяком конечном промежутке. Мы оставим, однако, в силе условие 2°. Во всяком случае оно будет выполнено, если функция $g(x)$ имеет производную $g'(x)$, абсолютно интегрируемую в бесконечном промежутке.

Ф у н к ц и я $k(x)$. Функцию $k(x)$ мы считаем четной. Подчиним ее такому требованию: не только она сама, но и функция

$$k_1(x) = e^{c|x|}k(x) \quad (c > 0) \quad (4.01)$$

с положительной постоянной c должна удовлетворять условиям 1° и 2°.

Если функции $g(x)$ и $k(x)$ комплексны, то будем считать, что указанным условиям удовлетворяют их вещественные и мнимые части порознь.

Наложенные на $g(x)$ и $k(x)$ условия позволяют прежде всего произвести оценку для функций $G_1(w)$ и $K(w)$. Исходя из этой оценки, оценим при помощи лемм II и III последовательно все функции, из которых строится $F(w)$. Получив оценку для $F(w)$, мы убедимся в существовании интеграла (3.18) для $f(x)$, а затем докажем, что этот интеграл удовлетворяет предложенному уравнению.

Обозначим через V полную вариацию функции $g(x)$ в промежутке $(0, \infty)$, если эта функция вещественна, или сумму вариаций ее вещественной и мнимой части, если она комплексна.

Тогда, на основании второй теоремы о среднем

$$\left| \int_0^{\infty} e^{i\omega x} g(x) dx \right| < \max \left| \int_0^{\xi} e^{i\omega x} dx \right| V, \quad (4.02)$$

откуда

$$|G_1(\omega)| < \frac{2}{|\omega|} V. \quad (4.03)$$

Эта оценка будет иметь место как на вещественной оси, так и во всей верхней полуплоскости.

Представив величину $K(\omega)$ в виде

$$K(\omega) = \int_0^{\infty} (e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}) e^{-cx} k_1(x) dx, \quad (4.04)$$

получим аналогичную оценку и для нее. Пусть V_1 будет суммой полных вариаций вещественной и мнимой части функции $k_1(x)$. Тогда

$$|K(\omega)| < \max \left| \int_0^{\xi} (e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}) e^{-cx} dx \right| V_1, \quad (4.05)$$

откуда

$$|K(\omega)| < V_1 U(\omega), \quad (4.06)$$

где

$$U(\omega) = \frac{1}{|\omega + ic|} + \frac{1}{|\omega - ic|} + \frac{2c}{|\omega + ic||\omega - ic|}. \quad (4.07)$$

При достаточно больших $|\omega|$

$$|K(\omega)| < \frac{2V_1'}{|\omega|}, \quad (4.08)$$

где V_1' — любое число, большее V_1 .

Неравенство (4.06) будет справедливо для всей полосы

$$-c \leq \text{Im}(\omega) \leq c, \quad (4.09)$$

включая ее границы, неравенство же (4.08) — лишь в той части полосы (4.09), которая достаточно удалена от мнимой оси.

Определяемая формулой (3.04) функция $\chi(\omega)$ при достаточно больших $|\omega|$ будет удовлетворять аналогичному неравенству

$$|\chi(\omega)| < \frac{M}{|\omega|}, \quad (4.10)$$

в котором можно взять $M = 2V_1'$ с прежним значением V_1' . Это неравенство будет иметь место как внутри полосы (4.09), так и на ее границе.

Оценивая на основании леммы II оба слагаемые в (3.06), получаем

$$|\chi_1(w)| < \frac{M_1}{|w|} \lg |w|, \quad |\chi_2(w)| < \frac{M_1}{|w|} \lg |w|, \quad (4.11)$$

где M_1 — новая постоянная. Отсюда для функции $\psi_1(w)$ получаем неравенство

$$|\psi_1(w) - 1| < \frac{M_1'}{|w|} \lg |w|, \quad (4.12)$$

справедливое для достаточно больших $|w|$ на вещественной оси и в верхней полуплоскости. Такому же неравенству удовлетворяет и функция $\psi_2(w)$.

Переходя к формуле (3.14), мы применим лемму I не к функции $\psi_2(w) G_1(w)$, а к функции $[\psi_2(w) - 1] G_1(w)$. Разложение этой последней будет, очевидно, иметь вид

$$[\psi_2(w) - 1] G_1(w) = [H_1(w) - G_1(w)] + H_2(w), \quad (4.13)$$

так как вычитаемое $G_1(w)$ целиком относится к первому члену правой части.

В силу (4.03) и (4.12) функция в левой части (4.13) будет удовлетворять неравенству

$$|(\psi_2 - 1) G_1| < \frac{2M_1'V}{|w|^2} \lg |w|, \quad (4.14)$$

а значит, и неравенству

$$|(\psi_2 - 1) G_1| < \frac{M_\sigma}{|w|^{1+\sigma}}, \quad (4.15)$$

где σ — любое положительное число, меньшее единицы.

На основании леммы III

$$H_1(w) - G_1(w) = \frac{iC}{w} + \frac{1}{w} H_1^*(w), \quad (4.16)$$

$$H_2(w) = -\frac{iC}{w} + \frac{1}{w} H_2^*(w); \quad (4.17)$$

постоянная C может быть выражена абсолютно сходящимся интегралом

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi_2(w) - 1] G_1(w) dw, \quad (4.18)$$

а функции $H_1^*(w)$ и $H_2^*(w)$ согласно лемме III стремятся к нулю как $|w|^{-\sigma'}$, где σ' — любое положительное число, меньшее единицы.

Получив оценку $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$, мы можем перейти к оценке $F(\omega)$ и $\Phi(\omega)$, которые выражаются через $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$ по формулам (3.16) и (3.17). Первую из этих формул напомним в виде

$$F(\omega) = H_1(\omega) + [\psi_1(\omega) - 1] H_1(\omega). \quad (4.19)$$

Отсюда, пользуясь (4.16), получаем

$$F(\omega) = G_1(\omega) + \frac{iC}{\omega} + F^*(\omega), \quad (4.20)$$

$F^*(\omega)$ при больших $|\omega|$ удовлетворяет неравенству

$$|F^*(\omega)| < \frac{M_\sigma^*}{|\omega|^{1+\sigma}} \quad (0 < \sigma < 1). \quad (4.21)$$

Оценку для $\Phi(\omega)$ можно получить как из (4.17) и (3.17), так и из (4.20) и (3.01). То и другое дает

$$\Phi(\omega) = \frac{iC}{\omega} + \Phi^*(\omega), \quad (4.22)$$

причем при достаточно больших $|\omega|$

$$|\Phi^*(\omega)| < \frac{M_\sigma^*}{|\omega|^{1+\sigma}} \quad (0 < \sigma < 1), \quad (4.23)$$

с теми же значениями σ и M_σ^* , как и в (4.21).

Формулы (4.20) и (4.22) имеют то неудобство, что входящие в них функции F^* и Φ^* обращаются в бесконечность при $\omega = 0$. Это неудобство легко устраним. Введем произвольное число q с положительной мнимой частью (можно взять, например, $q = iv_0$, где v_0 определено как в параграфе 3). Вместо (4.20) и (4.22) мы можем написать

$$F(\omega) = G_1(\omega) + \frac{iC}{\omega + q} + F_q^*(\omega), \quad (4.24)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{iC}{\omega - q} + \Phi_q^*(\omega). \quad (4.25)$$

Здесь F_q^* и Φ_q^* удовлетворяют тем же неравенствам, как F^* и Φ^* , и, кроме того, являются голоморфными функциями: первая — в верхней полуплоскости, а вторая — в полосе (3.03) и в нижней полуплоскости.

Получив $F_q^*(\omega)$, можно построить абсолютно сходящийся интеграл

$$f_q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} F_q^*(\omega) d\omega. \quad (4.26)$$

Этот интеграл будет ограниченной и непрерывной функцией от x , которая по лемме Римана—Лебега будет стремиться к нулю при $x \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$f_q(x) = 0 \text{ при } x \leq 0. \quad (4.27)$$

Функция $g(x)$, по предположению, удовлетворяет формулированным выше условиям 1⁰ и 2⁰, так что к ней применима формула Фурье. Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-ixw} G_1(w) dw = \begin{cases} g(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Кроме того,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-ixw} \frac{idw}{w+q} = \begin{cases} e^{iqx} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

Из сопоставления формул (4.26), (4.28) и (4.29) вытекает, что существует интеграл

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-ixw} F(w) dw, \quad (4.30)$$

определяющий функцию $f(x)$, причем этот интеграл равен

$$f(x) = \begin{cases} g(x) + Ce^{iqx} + f_q(x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Определяемая им функция $f(x)$ представляет собой сумму непрерывной функции и функции с ограниченной вариацией; функция $f(x)$ всюду ограничена и стремится на бесконечности к нулю (напомним, что $\text{Im}(q) > 0$).

Условия, необходимые для того, чтобы к функции $f(x)$ была применима формула Фурье, будут установлены в параграфе 8.

5. Доказательство существования решения

Доказав существование интеграла для $f(x)$, перейдем ко второй части нашей задачи и докажем, что определяемая им функция $f(x)$ удовлетворяет предложенному интегральному уравнению.

Докажем прежде всего формулу (1.13). Для этого нам потребуется одно свойство интеграла

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-ixw} F(w) dw, \quad (5.01)$$

над которым совершается в (4.30) предельный переход, а именно его равномерная ограниченность как относительно N , так и относительно x .

Рассмотрим сперва интеграл

$$g_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-ixw} G_1(w) dw \quad (5.02)$$

и докажем равномерную ограниченность для него. Вследствие абсолютной интегрируемости функции $g(x)$ мы можем в интеграле

$$\int_0^{\infty} e^{i\omega(y-x)} g(y) dy = e^{-i\omega x} G_1(\omega) \quad (5.03)$$

интегрировать под знаком интеграла, после чего получим

$$g_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin N(x-y)}{x-y} g(y) dy. \quad (5.04)$$

Воспользовавшись второй теоремой о среднем, легко оценить интеграл в правой части. Именно

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\eta} \frac{\sin N(x-y)}{x-y} dy \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \quad (5.05)$$

причем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1,17898... < 1,18. \quad (5.06)$$

Равенство (5.05) оказывается справедливым, каковы бы ни были N , x и η . Обозначая через V полную вариацию функции $g(x)$ в промежутке $(0, \infty)$ и замечая, что на бесконечности $g(x) = 0$, мы получим

$$|g_N(x)| < 1,18V, \quad (5.07)$$

что и доказывает равномерную ограниченность интеграла (5.02).

Полагая в предыдущих формулах $g(x) = e^{iqx}$, причем $\text{Im}(q) > 0$, заключаем, что и интеграл, стоящий под знаком предела в формуле (4.29), равномерно ограничен относительно N и x .

Наконец, интеграл

$$f_{qN}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-i\omega x} F_q^*(\omega) d\omega \quad (5.08)$$

может быть оценен по модулю подынтегральной функции, что дает

$$|f_{qN}(x)| < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_q^*(\omega)| d\omega, \quad (5.09)$$

независимо от N и от x .

Сопоставляя найденные оценки для трех слагаемых формулы (4.31), мы заключаем, что и интеграл (5.01) равномерно ограничен, что и требовалось доказать.

Переходим к доказательству формулы (1.13). Вследствие абсолютной интегрируемости функции $k(x-y)$ интеграл

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) e^{-i\omega y} dy \quad (5.10)$$

сходится равномерно относительно ω (которое предполагается здесь вещественным). Поэтому в интеграле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} I(\omega) F(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-i\omega x} K(\omega) F(\omega) d\omega \quad (5.11)$$

можно интегрировать под знаком интеграла, что дает нам

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-i\omega x} K(\omega) F(\omega) d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) dy \int_{-N}^{+N} e^{-i\omega y} F(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь можно перейти к пределу $N \rightarrow \infty$. Предел левой части существует вследствие абсолютной сходимости стоящего там интеграла. Правую часть можно согласно (5.01) записать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f_N(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y) dy + R_N(x), \quad (5.13)$$

где

$$R_N(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) [f_N(y) - f(y)] dy. \quad (5.14)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(x) = 0. \quad (5.15)$$

В самом деле, в интеграле (5.14) путь интегрирования можно разбить на три участка: от $-\infty$ до $x-A$, от $x-A$ до $x+A$

и от $x + A$ до $+\infty$. По доказанному, функция $f_N(y)$, а значит, и разность $f_N(y) - f(y)$ равномерно ограничены. Поэтому и вследствие абсолютной интегрируемости функции $k(x - y)$ можно выбрать A (не зависящее от N) столь большим, чтобы сумма интегралов по крайним участкам была сколь угодно малой. После этого, пользуясь ограниченностью $f_N(y)$, можно выбрать N столь большим, чтобы интеграл по среднему участку был сколь угодно малым (по теореме Лебега). Тогда будет сколь угодно мал и весь интеграл (5.14). Тем самым равенство (5.15) доказано.

Таким образом, мы доказали равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} K(\omega) F(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x - y) f(y) dy, \quad (5.16)$$

т. е. формулу (1.13). Заметим, что в наших рассуждениях мы не пользовались предположением о том, что к $f(x)$ применима формула Фурье (это предположение нами пока и не доказано).

Так как $f(y)$ при отрицательных y равно нулю, то вместо (5.16) можно написать

$$\int_0^{\infty} k(x - y) f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} K(\omega) F(\omega) d\omega. \quad (5.17)$$

Но $F(\omega)$ удовлетворяет функциональному уравнению, согласно которому

$$K(\omega) F(\omega) = [F(\omega) - G_1(\omega)] - \Phi(\omega). \quad (5.18)$$

Понимая интеграл в правой части (5.17) как предел интеграла от $-N$ до $+N$, мы можем представить его в виде разности двух интегралов, существование которых вытекает из оценок (4.24) и (4.25) и которые при $x > 0$ равны

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-i\omega x} [F(\omega) - G_1(\omega)] d\omega = f(x) - g(x), \quad (5.19)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{-i\omega x} \Phi(\omega) d\omega = 0. \quad (5.20)$$

При сопоставлении последних четырех формул получаем

$$\int_0^{\infty} k(x - y) f(y) dy = f(x) - g(x), \quad (5.21)$$

т. е. предложенное интегральное уравнение.

Мы доказали, что при сделанных относительно $g(x)$ и $k(x)$ предположениях существует решение нашего интегрального урав-

нения, представимое в виде интеграла (4.30). Некоторые свойства функции (4.30) были отмечены нами выше: это — сумма из функции с ограниченной вариацией и непрерывной функции. Решение (4.30) остается всюду конечным и на бесконечности стремится к нулю.

В дальнейшем (параграф 10) будет показано, что решение (4.30) будет единственным решением с этими свойствами.

С другой стороны, если наложить на $g(x)$ добавочное требование абсолютной интегрируемости $x g(x)$, то можно утверждать, что к найденному решению применима формула Фурье (это будет показано в параграфе 11). Тогда из самого способа вывода нашего решения ясно, что оно также будет единственным решением, к которому эта формула применима.

Что касается ограничений, наложенных нами на $g(x)$ и $k(x)$, то нетрудно видеть, что они могут быть смягчены. Так, например, сохраняя их полностью для $g(x)$, мы можем допустить обращение $k(x)$ при $x = 0$ в бесконечность порядка $|x|^{\rho-1}$, $\rho > 0$ так, чтобы разность

$$k(x) - A|x|^{\rho-1}e^{-c|x|} = k_2(x) \quad (5.22)$$

оставалась конечной и удовлетворяла всем прежним условиям. Этот случай часто встречается в физических задачах. Тогда для $K(w)$ будет иметь место оценка

$$|K(w)| < \frac{M\rho}{|w|^\rho} \quad \text{при } |w| \rightarrow \infty \quad (5.23)$$

и все заключения этого и предыдущего параграфов останутся в силе. Подобно этому можно также допустить обращение $k(x)$ в логарифмическую бесконечность при $x = 0$. Возможны и другие смягчения условий, налагаемых на заданные функции $k(x)$ и $g(x)$, но на них мы останавливаться не будем.

6. Случай вещественных корней

В предыдущем анализе мы оставили в стороне случай вещественных корней функции $1 - K(w)$. Произведем одно преобразование уравнения (3.01), применимое и в общем случае, но особенно удобное для изучения случая вещественных корней. Предположения о вещественности корней мы пока делать не будем.

Пусть функция $1 - K(w)$ в полосе

$$-c < \text{Im}(w) < +c, \quad (6.01)$$

где она голоморфна, имеет $2n$ корней, из коих n равны:

$$w = \omega_1, \quad w = \omega_2, \dots, \quad w = \omega_n, \quad (6.02)$$

а остальные n отличаются от них знаком. Среди корней (6.02) могут быть одинаковые. Условимся считать, что те из корней (6.02), которые комплексны, имеют положительную мнимую часть и расположены в порядке возрастания их мнимой части.

Введем положительное число $b > c$, где c — половина ширины полосы (6.01), и положим

$$\frac{1}{1 - K(\omega)} = \frac{(\omega^2 + b^2)^n}{(\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)} \psi(\omega). \quad (6.03)$$

Определяемая этим равенством функция $\psi(\omega)$ голоморфна и не имеет нулей внутри полосы (6.01), а на бесконечности обращается в единицу. Ее логарифм $\chi = \lg \psi$ будет внутри полосы голоморфной функцией, которая на бесконечности стремится к нулю обратно $|\omega|$. Эта функция удовлетворяет условиям леммы I, и мы можем применить к ней разложение вида (3.06), что приводит к разложению $\psi(\omega)$ на множители

$$\psi(\omega) = \psi_1(\omega) \psi_2(\omega) \quad (6.04)$$

со свойствами, аналогичными свойствам множителей в формуле (3.09).

Подставляя (6.04) в (6.03), получим

$$\frac{1}{1 - K(\omega)} = \frac{(\omega^2 + b^2)^n \psi_1(\omega) \psi_2(\omega)}{(\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)}. \quad (6.05)$$

Положив

$$\psi_{n1}(\omega) = (\omega + ib)^n \psi_1(\omega), \quad (6.06)$$

$$\psi_{n2}(\omega) = (\omega - ib)^n \psi_2(\omega), \quad (6.07)$$

мы можем также написать

$$\frac{1}{1 - K(\omega)} = \frac{\psi_{n1}(\omega) \psi_{n2}(\omega)}{(\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)}. \quad (6.08)$$

Заметим, что вид функций $\psi_1(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$ зависит от выбора произвольного числа b , тогда как выражения $\psi_{n1}(\omega)$ и $\psi_{n2}(\omega)$ не зависят от b .

Выше мы предположили, что комплексные корни из ряда (6.02) расположены в порядке возрастания их мнимой части. Если бы мы вместо полосы (6.01) рассматривали более узкую полосу

$$-c' < \text{Im}(\omega) < +c' \quad (0 < c' < c), \quad (6.09)$$

то в нее не попали бы некоторые корни, например корни со значениями $n' + 1, n' + 2, \dots, n$ ($n' < n$). Формула (6.05) приняла бы вид

$$\frac{1}{1 - K(\omega)} = \frac{(\omega^2 + b^2)^{n'} \psi_1^*(\omega) \psi_2^*(\omega)}{(\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_{n'}^2)}. \quad (6.10)$$

Легко установить связь между $\psi_1^*(\omega)$ и $\psi_1(\omega)$, а также между $\psi_2^*(\omega)$ и $\psi_2(\omega)$. Именно

$$\psi_1^*(\omega) = \frac{(\omega + ib)^{n-n'} \psi_1(\omega)}{(\omega + \omega_{n'+1}) \dots (\omega + \omega_n)}, \quad (6.11)$$

$$\psi_2^*(\omega) = \frac{(\omega - ib)^{n-n'} \psi_2(\omega)}{(\omega - \omega_{n'+1}) \dots (\omega - \omega_n)}. \quad (6.12)$$

(Напомним, что мнимую часть комплексных корней ω_m мы считаем положительной.)

Подобным сужением полосы мы всегда можем достигнуть того, чтобы в нее попали только вещественные корни. Поэтому не было бы ограничением общности и предположение, что все корни (6.02) вещественны.

Переходим к решению функционального уравнения

$$F(\omega) [1 - K(\omega)] - G_1(\omega) = \Phi(\omega). \quad (6.13)$$

Подставим в него $1 - K(\omega)$ из (6.05) и умножим обе части полученного уравнения на $\psi_2(\omega)$. Тогда

$$\frac{F(\omega) (\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)}{\psi_1(\omega) (\omega^2 + b^2)^n} - \psi_2(\omega) G_1(\omega) = \psi_2(\omega) \Phi(\omega). \quad (6.14)$$

Функцию $\psi_2(\omega) G_1(\omega)$, как и в параграфе 3 [формула (3.14)], можно разложить по формуле

$$\psi_2(\omega) G_1(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega). \quad (6.15)$$

Если мы введем обозначения:

$$\frac{F(\omega)}{\psi_1(\omega)} = F^*(\omega), \quad (6.16)$$

$$H_1(\omega) = G_1^*(\omega), \quad (6.17)$$

$$\psi_2(\omega) \Phi(\omega) + H_2(\omega) = \Phi^*(\omega), \quad (6.18)$$

то уравнение (6.14) примет вид

$$F^*(\omega) \frac{(\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)}{(\omega^2 + b^2)^n} - G_1^*(\omega) = \Phi^*(\omega). \quad (6.19)$$

Введенные только что функции F^* , G_1^* и Φ^* обладают свойствами, вполне аналогичными свойствам функций F , G_1 и Φ . Таким образом, общий случай функционального уравнения (6.13) приведен

к частному случаю, когда преобразованное ядро $K^*(\omega)$ является дробной рациональной функцией от ω вида

$$K^*(\omega) = 1 - \frac{(\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)}{(\omega^2 + b^2)^n}. \quad (6.20)$$

Для ядра же (6.20) задача может быть решена чисто алгебраическим путем.

Произведем подстановку

$$\frac{\omega - ib}{\omega + ib} = z, \quad (6.21)$$

которая преобразует верхнюю полуплоскость ω во внутреннюю часть круга единичного радиуса, а нижнюю полуплоскость ω — в наружную часть того же круга. Бесконечно удаленной точке плоскости ω будет соответствовать точка $z = 1$. Всякая функция от ω , голоморфная в верхней полуплоскости, будет разлагаться в ряд по положительным степеням z , сходящийся при $|z| < 1$. Функция же, голоморфная в нижней полуплоскости, разложится в ряд по отрицательным степеням z , сходящийся при $|z| > 1$.

Очевидно, что, выразив функцию (6.20) через z , мы получим полином от z и от $\frac{1}{z}$ (отрезок ряда Лорана). Мы можем положить

$$1 - K^*(\omega) = L(z), \quad (6.22)$$

где

$$L(z) = \sum_{m=-n}^{+n} c_m z^m \quad (c_{-m} = c_m). \quad (6.23)$$

При этом $L(1) = 1$. Положим, далее,

$$F^*(\omega) = F_3(z), \quad F_3(1) = 0, \quad (6.24)$$

$$G_1^*(\omega) = G_3(z), \quad G_3(1) = 0, \quad (6.25)$$

$$\Phi^*(\omega) = \Phi_3\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Phi_3(1) = 0. \quad (6.26)$$

Функции F_3 , G_3 , Φ_3 будут восходящими рядами от своих аргументов. Подставим эти выражения в уравнение (6.19). Тогда

$$F_3(z) \sum_{m=-n}^{+n} c_m z^m - G_3(z) = \Phi_3\left(\frac{1}{z}\right). \quad (6.27)$$

Но левая часть содержит только конечное число отрицательных степеней z (наинизшая степень — минус n). Поэтому правая часть будет полиномом степени n от $\frac{1}{z}$.

Можно положить

$$\Phi_3\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-n}Q_n(z), \quad (6.28)$$

где $Q_n(z)$ — полином степени n от z .

Решая (6.27) относительно F_3 , получаем

$$F_3(z) = \frac{z^n G_3(z) + Q_n(z)}{z^n L(z)}. \quad (6.29)$$

Особенными точками $F_3(z)$ внутри единичного круга могли бы быть лежащие там корни $L(z)$. Но функция $F_3(z)$ не должна иметь там особых точек. В тех случаях, когда задача имеет решение, это требование позволяет определить неизвестный полином $Q_n(z)$.

Здесь приходится различать два случая: первый случай, когда все корни w_m комплексны, и второй случай, когда некоторые из них вещественны.

С л у ч а й 1. Предположим, что все величины (6.02) имеют положительную мнимую часть. Тогда соответствующие им значения z

$$z = z_1, \quad z = z_2, \dots, \quad z = z_n \quad (6.30)$$

будут все по модулю меньше единицы. Величины (6.30) будут единственными корнями $L(z)$, лежащими внутри единичного круга, а на самом круге эта функция корней иметь не будет. [Остальные n корней $L(z)$ будут равны обратным величинам (6.30) и лежат вне круга.]

Чтобы дробь (6.29) оставалась внутри круга конечной, числитель дроби должен обращаться в нуль для значений (6.30). Это дает для полинома $Q_n(z)$ n условий, которые в случае простых корней имеют вид

$$Q_n(z_m) = -z_m^n G_3(z_m) \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (6.31)$$

При кратных корнях в условия войдут производные от $Q_n(z)$ и $G_3(z)$. Если корень $z = z_m$ кратности s , то соответствующие ему условия будут

$$Q_n^{(r)}(z_m) = -\left\{ \frac{d^r}{dz^r} [z^n G_3(z)] \right\}_{z=z_m} \quad (r = 0, 1, \dots, s-1). \quad (6.32)$$

И в том, и в другом случае общее число условий будет равно n . Эти n условий вместе с условием

$$Q_n(1) = 0 \quad (6.33)$$

определяют полином $Q_n(z)$ однозначным образом.

Мы пришли к результату, уже установленному в предыдущих параграфах иным путем: в случае комплексных корней $1 - K(\omega)$ решение существует для любой функции $g(x)$, удовлетворяющей некоторым общим условиям и для любой соответствующей ей $G_3(x)$.

С л у ч а й 2. Предположим, что функция $1 - K(\omega)$ имеет $2l$ вещественных корней

$$\omega = \omega_1, \omega = \omega_2, \dots, \omega = \omega_l, \quad (6.34)$$

а также

$$\omega = -\omega_1, \omega = -\omega_2, \dots, \omega = -\omega_l. \quad (6.35)$$

Остальные же корни

$$\omega = \omega_{l+1}, \omega = \omega_{l+2}, \dots, \omega = \omega_n \quad (6.36)$$

и величины, отличающиеся от них знаком, пусть будут комплексными*.

В таком случае первые l величин (6.30) будут по модулю равны единице. Число точек, для которых нужно требовать обращения в нуль числителя дроби (6.29), будет (не считая точки $z = 1$) равным $n + l$, ибо к точкам (6.30) придется присоединить точки

$$z = \frac{1}{z_1}, \quad z = \frac{1}{z_2}, \dots, z = \frac{1}{z_l}, \quad (6.37)$$

соответствующие корням (6.35). Число условий, налагаемых на коэффициенты полинома $Q_n(z)$, будет превышать число коэффициентов на l . Для того чтобы эти условия были совместны, необходимо, чтобы заданная функция $G_3(z) = G_1^*(\omega)$ удовлетворяла нескольким соотношениям, которые связывают значения этой функции (а в случае кратных корней — значения ее производных) в различных точках $z = z_m$ и соответственно $\omega = \omega_m$. Число таких соотношений равно l — числу пар вещественных корней.

Для первоначально заданной функции $g(x)$ указанные соотношения приводятся к условиям ортогональности

$$\int_0^{\infty} g(x) \gamma_m(x) dx = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, l), \quad (6.38)$$

где вид функций $\gamma_m(x)$ зависит только от ядра $k(x)$.

Эти функции, представляющие решения однородного интегрального уравнения, будут нами изучены в параграфах 8 и 9.

* Согласно сделанному выше замечанию, мы могли бы считать, что $l = n$, т. е. что комплексные корни (6.36) отсутствуют.

В наших формулах мы можем возвратиться от переменной z к переменной w . Из формул (6.26) и (6.28) получаем

$$\Phi^*(w) = \frac{P_{n-1}(w)}{(w-ib)^n}, \quad (6.39)$$

где $P_{n-1}(w)$ — полином степени $n-1$ от w .

Отсюда

$$F^*(w) = \frac{(\omega^2 + b^2)^n G_1^*(w) + (\omega + ib)^n P_{n-1}(w)}{(\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)}. \quad (6.40)$$

Переходя теперь по формулам (6.16) и (6.17) от $F^*(w)$ и $G_1^*(w)$ к первоначальным функциям $F(w)$ и $H_1(w)$, будем иметь

$$F(w) = \psi_1(w) \frac{(\omega^2 + b^2)^n H_1(w) + (\omega + ib)^n P_{n-1}(w)}{(\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)} \quad (6.41)$$

или, если воспользуемся обозначением (6.06),

$$F(w) = \psi_{n1}(w) \frac{(\omega - ib)^n H_1(w) + P_{n-1}(w)}{(\omega^2 - \omega_1^2) \dots (\omega^2 - \omega_n^2)}. \quad (6.42)$$

Напомним, что функция $\psi_{n1}(w)$ [в отличие от $\psi_1(w)$] не зависит от выбора числа b . Что касается числителя дроби в (6.42), то он также не зависит от b . В самом деле, по формуле (6.15) мы имеем согласно лемме I при $\text{Im}(w) > 0$

$$H_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_2(u) G_1(u)}{u-w} du. \quad (6.43)$$

Чтобы выразить явным образом зависимость H_1 от b , напишем предыдущую формулу в виде

$$H_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_{n2}(u) G_1(u)}{(u-ib)^n (u-w)} du. \quad (6.44)$$

Обозначим через $H_1'(w)$ функцию, которая получается из $H_1(w)$ заменой b на некоторое другое число b' , тогда

$$\begin{aligned} & (\omega - ib)^n H_1(w) - (\omega - ib')^n H_1'(w) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\omega - ib}{u-b} \right)^n - \left(\frac{\omega - ib'}{u-ib'} \right)^n \right] \frac{\psi_{n2}(u) G_1(u)}{u-w} du. \end{aligned} \quad (6.45)$$

А это полином степени $n-1$ от w , который может быть включен в $P_{n-1}(w)$.

Полином $P_{n-1}(\omega)$ определяется из условия, согласно которому числитель дроби (6.42) должен обращаться в нуль в тех точках верхней полуплоскости, в которых знаменатель обращается в нуль.

В случае комплексных корней эти условия имеют вид

$$P_{n-1}(\omega_m) = -(\omega_m - ib)^n H_1(\omega_m), \quad (6.46)$$

если корни простые, и несколько более сложный вид, содержащий производные, если корни кратные. Число таких условий равно n .

В случае l пар вещественных корней к этим n условиям прибавляются l новых условий аналогичного вида, а из них вытекают для значений функции $H_1(\omega)$ и ее производных в точках $\omega = \omega_m$ l соотношений, гарантирующих совместность упомянутых условий для $P_{n-1}(\omega)$. Если эти соотношения выполнены, функция $F(\omega)$ не будет иметь полюсов не только в верхней полуплоскости, но и на вещественной оси.

7. Дополнительные условия для заданной функции в случае вещественных корней

В параграфах 4 и 5 мы доказали существование решения в форме интеграла (3.18) для случая комплексных корней. Теперь нам нужно выяснить, какие дополнительные ограничения (не считая условий ортогональности) должны быть наложены на $g(x)$, чтобы решение того же вида существовало и в случае вещественных корней.

Эти ограничения должны быть таковы, чтобы из них вытекала абсолютная интегрируемость $F(\omega)$ вблизи каждого корня $\omega = \omega_m$.

Для функции $F(\omega)$ мы можем пользоваться выражением (6.42), в котором удобнее заменить $H_1(\omega)$ его значением

$$H_1(\omega) = \psi_2(\omega) G_1(\omega) - H_2(\omega), \quad (7.01)$$

взятым из (3.14). Благодаря этому для $F(\omega)$ получается выражение, которое, конечно, эквивалентно формуле

$$F(\omega) = \frac{G_1(\omega) + \Phi(\omega)}{1 - K(\omega)}, \quad (7.02)$$

вытекающей непосредственно из основного функционального уравнения для $F(\omega)$.

В выражении (7.02) функции $K(\omega)$ и $\Phi(\omega)$, по их определению, голоморфны в полосе, включающей вещественную ось [а $\Phi(\omega)$, кроме того, и в нижней полуплоскости]. Что касается $G_1(\omega)$, то эта функция голоморфна лишь над вещественной осью, а на самой оси она [при сделанных до сих пор предположениях

относительно $g(x)$] только непрерывна и ограничена. Поэтому поведение $F(w)$ на вещественной оси определяется поведением $G_1(w)$. Пусть $w = w_m$ будет корнем знаменателя кратности s . Вблизи $w = w_m$

$$F(w) = A(w)D_s(w) + B(w), \quad (7.03)$$

где

$$D_s(w) = (w - w_m)^{-s} \left[G_1(w) - G_1(w_m) - (w - w_m)G_1'(w_m) - \dots - \frac{(w - w_m)^{s-1}}{(s-1)!} G_1^{(s-1)}(w_m) \right], \quad (7.04)$$

а функции $A(w)$ и $B(w)$ голоморфны вблизи $w = w_m$.

Если бы корень $w = w_m$ был комплексный (с положительной мнимой частью), то вблизи $w = w_m$ функция $G_1(w)$, а значит, и $D_s(w)$, была бы аналитической. Следовательно, голоморфность $F(w)$ вблизи комплексных, хотя бы и кратных, корней знаменателя будет иметь место без всяких добавочных ограничений для $g(x)$.

Если же корень $w = w_m$ вещественный, то требование абсолютной интегрируемости $F(w)$ вблизи $w = w_m$ налагает на $G_1(w)$ и на $g(x)$ некоторые новые ограничения. Требование это будет выполнено, если величина $D_s(w)$ окажется абсолютно интегрируемой.

Положим для определенности $w \geq w_m$ (мы считаем здесь w вещественным) и докажем неравенство

$$\int_{w_m}^w |D_s(w)| dw \leq \frac{1}{(s-1)!} \int_{w_m}^w \left| \frac{G_1^{(s-1)}(u) - G_1^{(s-1)}(w_m)}{u - w_m} \right| du. \quad (7.05)$$

(При $w \leq w_m$ нужно было бы взять здесь w в качестве нижнего и w_m в качестве верхнего предела.)

Формула (7.05), очевидно, справедлива для $s = 1$, ибо в этом случае она обращается в тождество. Чтобы доказать ее для $s \geq 2$, воспользуемся представлением для $D_s(w)$ в виде интеграла

$$D_s(w) = \int_0^1 \left(\frac{G_1^{(s-1)}[wt + w_m(1-t)] - G_1^{(s-1)}(w_m)}{w - w_m} \right) \frac{(1-t)^{(s-2)}}{(s-2)!} dt. \quad (7.06)$$

Положим

$$I(t) = \int_{w_m}^w \left| \frac{G_1^{(s-1)}[wt + w_m(1-t)] - G_1^{(s-1)}(w_m)}{w - w_m} \right| dw. \quad (7.07)$$

Величину $I(t)$ можно представить в виде

$$I(t) = \int_{w_m}^{w'} \left| \frac{G_1^{(s-1)}(u) - G_1^{(s-1)}(w_m)}{u - w_m} \right| du, \quad (7.08)$$

где

$$w' = \omega t + w_m(1-t). \quad (7.09)$$

Заметим, что t входит в выражение (7.08) только через посредство верхнего предела.

Если мы предположим абсолютную интегрируемость функции

$$\Delta(u, v) = \frac{G_1^{(s-1)}(u) - G_1^{(s-1)}(v)}{u - v}, \quad (7.10)$$

то интеграл $I(t)$ будет ограниченной и непрерывной функцией от t , причём

$$I(t) \leq I(1) = \int_{w_m}^{\omega} |\Delta(u, w_m)| du, \quad (7.11)$$

так как, при $t \leq 1$ будет $w' \leq \omega$.

Поэтому мы можем, умножив $I(t)$ на $\frac{(1-t)^{s-2}}{(s-2)!} dt$, интегрировать под знаком интеграла; в результате получим

$$\int_{w_m}^{\omega} d\omega \left\{ \int_0^1 \left| \frac{G_1^{(s-1)}[\omega t + w_m(1-t)] - G_1^{(s-1)}(w_m)}{\omega - w_m} \right| \frac{(1-t)^{s-2}}{(s-2)!} dt \right\} = \\ = \int_0^1 I(t) \frac{(1-t)^{s-2}}{(s-2)!} dt. \quad (7.12)$$

Внутренний интеграл в левой части (7.12) даёт вследствие (7.06) верхний предел для $|D_s(\omega)|$. Вся же левая часть (7.12) даёт верхний предел для левой части (7.05). Поэтому

$$\int_{w_m}^{\omega} |D_s(\omega)| d\omega \leq \int_0^1 I(t) \frac{(1-t)^{s-2}}{(s-2)!} dt. \quad (7.13)$$

Заменяя здесь $I(t)$ его верхним пределом из (7.11) и выполняя интегрирование по t , получим

$$\int_{w_m}^{\omega} |D_s(\omega)| d\omega \leq \frac{1}{(s-1)!} \int_{w_m}^{\omega} |\Delta(u, w_m)| du, \quad (7.14)$$

т. е. формулу (7.05).

Таким образом, для того чтобы функция $F(\omega)$ была абсолютно интегрируема вблизи точки $\omega = \omega_m$, достаточно потребовать абсолютной интегрируемости функции $\Delta(u, \omega_m)$ вблизи этой точки.

Положим в выражении (7.10) для $\Delta(u, v)$ число s равным *наибольшей* кратности вещественных корней. Если для этого значения s величина $\Delta(u, v)$ будет абсолютно интегрируемой функцией от ω при любом значении u , то, очевидно, и $F(\omega)$ будет абсолютно интегрируемым в любом конечном промежутке.

Входящая в выражение для $\Delta(u, \omega)$ производная равна

$$G_1^{(s-1)}(\omega) = i^{s-1} \int_0^{\infty} e^{ix\omega} x^{s-1} g(x) dx. \quad (7.15)$$

Существование этой производной и сходимость интеграла (7.15) нужны уже (как мы увидим в параграфе 8) для формулировки условий ортогональности (6.38), налагаемых на $g(x)$. Мы потребуем, кроме того, чтобы интеграл (7.15) был абсолютно сходящимся, и положим

$$h(x) = \int_x^{\infty} x^{s-1} |g(x)| dx. \quad (7.16)$$

Докажем, что функция $\Delta(u, \omega)$ удовлетворяет неравенству

$$|\Delta(u, \omega)| \leq \int_0^{\xi} h(x) dx, \quad (7.17)$$

где

$$\xi = \frac{2}{|u - \omega|}. \quad (7.18)$$

Имеем

$$G_1^{(s-1)}(\omega) - G_1^{(s-1)}(u) = i^{s-1} \int_0^{\infty} (e^{ix\omega} - e^{ixu}) x^{s-1} g(x) dx. \quad (7.19)$$

К разности показательных функций под интегралом применяем неравенства

$$|e^{ix\omega} - e^{ixu}| = \left| 2 \sin \frac{x(u-\omega)}{2} \right| < x|u - \omega| \text{ при } x < \xi, \quad (7.20)$$

$$|e^{ix\omega} - e^{ixu}| \leq 2 \text{ при } x > \xi. \quad (7.21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |G_1^{(s-1)}(u) - G_1^{(s-1)}(\omega)| &< |u - \omega| \int_0^{\xi} x^s |g(x)| dx + \\ &+ 2 \int_{\xi}^{\infty} x^{s-1} |g(x)| dx. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Это неравенство справедливо при всяком ξ , но при $\xi = \frac{2}{|u-w|}$ значение правой части неравенства будет наименьшим. Деля на $|u-w|$ и пользуясь обозначением (7.18), получаем

$$|\Delta(u, w)| \leq \int_0^{\xi} x^s |g(x)| dx + \xi \int_{\xi}^{\infty} x^{s-1} |g(x)| dx, \quad (7.23)$$

откуда после простого преобразования правой части получается формула (7.17).

Теперь легко найти для $g(x)$ условие, достаточное для абсолютной интегрируемости $\Delta(u, w)$, а следовательно, и $F(w)$.

Интегрируя неравенство (7.17) и предполагая $w > u$, получаем

$$\int_u^w |\Delta(u, v)| dv \leq 2 \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx_1}{x_1^2} \int_0^{x_1} h(x) dx \quad (7.24)$$

или

$$\int_u^w |\Delta(u, v)| dv \leq \frac{2}{\xi} \int_0^{\xi} h(x) dx + 2 \int_{\xi}^{\infty} \frac{h(x)}{x} dx, \quad (7.25)$$

где ξ имеет прежнее значение (7.18).

Так как по предположению интеграл (7.16) сходится, то функция $h(x)$ стремится на бесконечности к нулю. Следовательно, при $\xi \rightarrow \infty$ стремится к нулю и первый член в правой части (7.25). Таким образом, достаточным условием для абсолютной интегрируемости $\Delta(u, v)$ является сходимость интеграла

$$h_1(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{h(x)}{x} dx. \quad (7.26)$$

Для выполнения этого условия еще недостаточно, чтобы интеграл для $h(x)$ сходиллся; нужно, чтобы он стремился к нулю не слишком медленно.

Интеграл $h_1(\xi)$ нетрудно выразить непосредственно через $g(x)$. Подставляя (7.16) в (7.26) и меняя порядок интегрирования по формуле Дирихле, получим

$$h_1(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} (\lg x - \lg \xi) x^{s-1} |g(x)| dx. \quad (7.27)$$

Отсюда видно, что в случае вещественных корней все условия будут выполнены и функция $F(w)$ будет абсолютно интегрируема

в любом конечном промежутке при единственном дополнительном условии для $g(x)$, а именно при условии сходимости интеграла

$$g_s(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} (\lg x) x^{s-1} |g(x)| dx, \quad (7.28)$$

где $s \geq 1$ — наибольшая кратность вещественных корней.

Если интеграл (7.28) сходится, то функция $h(x)$ будет убывать быстрее, чем обратно пропорционально $\lg x$. Если она убывает настолько быстро, что произведение $x^\sigma h(x)$ остается ограниченным, то, как видно из (7.17), функция $G_1^{(s-1)}(w)$ будет удовлетворять условию Липшица

$$|G_1^{(s-1)}(w) - G_1^{(s-1)}(u)| < M |u - w|^\sigma. \quad (7.29)$$

Легко показать также, что тогда будет иметь место неравенство

$$|D_s(w)| < \frac{M}{(s-1)!} |w - w_m|^{\sigma-1} \quad (7.30)$$

с тем же значением M .

Мы выяснили, что при сходимости интеграла (7.28) функция $F(w)$ будет абсолютно интегрируема в любом конечном промежутке. Рассмотрим теперь поведение $F(w)$ на бесконечности.

Для исследования $F(w)$ воспользуемся выражением (6.41). Для функций $\psi_1(w)$ и $H_1(w)$ имеют место те же оценки, как и в отсутствии вещественных корней. Обозначая через p_0 коэффициент при старшей степени w в полиноме $P_{n-1}(w)$, мы будем иметь при $|w| \rightarrow \infty$

$$F(w) = \psi_1(w) \left[H_1(w) + \frac{p_0}{w} \right] + o\left(\frac{1}{|w|^2}\right). \quad (7.31)$$

Отсюда видно, что функция $F(w)$ будет на бесконечности того же характера, как и при отсутствии вещественных корней, и к ней будет применима формула (4.20) (с заменой iC на $iC + p_0$). То же заключение относится и к $\Phi(w)$.

Сопоставляя этот результат с только что доказанной абсолютной интегрируемостью $F(w)$ в любом конечном промежутке, мы приходим к выводу, что рассуждения параграфов 4 и 5 не требуют никаких изменений. Таким образом, и для случая вещественных корней можно считать доказанным, что при сделанных относительно $g(x)$ и $k(x)$ предположениях интеграл, выражающий $f(x)$ через $F(w)$, существует, и что определяемая им функция $f(x)$ удовлетворяет предложенному интегральному уравнению.

8. Вывод условий ортогональности

Мы продолжим здесь начатое в параграфе 6 исследование случая вещественных корней и изучим подробнее те условия ортогональности, которым должна удовлетворять заданная функция $g(x)$.

Предположим, что все выделенные корни $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ вещественны. Как уже было указано в параграфе 7, это всегда может быть достигнуто сужением рассматриваемой полосы в плоскости w . Если v_0 — мнимая часть ближайшего к вещественной оси комплексного корня $1 - K(w)$, или ближайшей особенной точки этой функции, то достаточно взять

$$c' < v_0 \quad (8.01)$$

и рассмотреть полосу

$$-c' \leq \text{Im}(w) \leq c'. \quad (8.02)$$

Обозначим через $S(w)$ полином степени $2n$, составленный из множителей $w^2 - \omega_m^2$:

$$S(w) = (w^2 - \omega_1^2) \dots (w^2 - \omega_n^2). \quad (8.03)$$

Выражение (6.42) для функции $F(w)$ может быть написано в виде

$$F(w) = \frac{\Psi_m(w)}{S(w)} [(w - ib)^n H_1(w) + P_{n-1}(w)]. \quad (8.04)$$

Рассмотрим подробнее соотношения, которым должна удовлетворять функция $H_1(w)$. Проведем в плоскости w замкнутый контур Γ , окружающий все точки $w = \pm \omega_m$ и лежащий внутри полосы (8.02) или на ее границе. [Можно, например, взять прямоугольный контур из двух отрезков прямых, составляющих границу полосы (8.02), и двух отрезков, параллельных мнимой оси]. Положим

$$R(w) = (w - ib)^n H_1(w) \quad (8.05)$$

и обозначим через $R_{an}(w)$ какую-нибудь аналитическую функцию, голоморфную внутри Γ и принимающую в точках $w = \pm \omega_m$ те же значения, что и $R(w)$. Если корень ω_m — кратный, кратности s , то в точке ω_m должны совпадать и производные от $R_{an}(w)$ и от $R(w)$ порядка до $s - 1$ включительно. [В качестве $R_{an}(w)$ можно взять полином достаточно высокой степени, а если сама функция $R(w)$ голоморфна внутри Γ , то можно просто положить $R_{an}(w) = R(w)$.]

В формуле (8.04) полином $P_{n-1}(w)$ должен быть определен из условия

$$R(w) + P_{n-1}(w) = 0 \quad \text{при} \quad w = \pm \omega_m \quad (8.06)$$

или, что то же, из условия

$$R_{an}(\omega) + P_{n-1}(\omega) = 0 \text{ при } \omega = \pm \omega_m, \quad (8.07)$$

причем степень полинома $P_{n-1}(\omega)$ должна быть не выше $n - 1$.

Если такое определение возможно, то все интегралы

$$I_r = \frac{1}{2\pi i} \int_r \omega^r \frac{R_{an}(\omega) + P_{n-1}(\omega)}{S(\omega)} d\omega, \quad (8.08)$$

где r — целое положительное число, должны обращаться в нуль. Но так как степень полинома $P_{n-1}(\omega)$ есть $n - 1$, то для $r = 0, 1, \dots, n - 1$ будет в отдельности

$$\frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\omega^r P_{n-1}(\omega)}{S(\omega)} d\omega = 0, \quad (8.09)$$

ибо здесь под интегралом стоит рациональная дробь, в которой степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы выше степени числителя.

Поэтому условия существования полинома $P_{n-1}(\omega)$ принимают вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\omega^r R_{an}(\omega)}{S(\omega)} d\omega = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n - 1). \quad (8.10)$$

Стоящий здесь интеграл равен сумме вычетов в точках $\omega = \pm \omega_m$. Условившись считать

$$\omega_{-m} = -\omega_m, \quad (8.11)$$

мы можем переписать условия (8.10) в виде

$$\sum_{m=-n}^{+n} {}' \frac{R_{an}(\omega_m)}{S'(\omega_m)} \omega_m^r = 0, \quad (8.12)$$

если корни ω_m простые, и в несколько более сложном виде, если они кратные (штрих у знака суммы означает, что член, для коего $m = 0$, должен быть опущен). Но в точках $\omega = \omega_m$ аналитическая функция $R_{an}(\omega)$ принимает те же значения, что и $R(\omega)$. Подставляя вместо $R(\omega)$ выражение (8.05), будем иметь

$$\sum_{m=-n}^{+n} \frac{(\omega_m - ib)^n}{S'(\omega_m)} \omega_m^r H_1(\omega_m) = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n - 1). \quad (8.13)$$

Мы получили в явной форме те алгебраические соотношения, которым должна удовлетворять (в случае простых корней) функция $H_1(\omega)$. Перейдем от них к соотношениям для $G_2(\omega)$. Согласно определению $H_1(\omega)$

$$\Psi_2(\omega) G_1(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega). \quad (8.14)$$

Поэтому соотношения (8.13) равносильны следующим:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{(w_m - ib)^n}{S'(w_m)} w_m^f \psi_2(w_m) G_1(w_m) &= \\ &= \sum_{m=-n}^{+n} \frac{(w_m - ib)^n}{S'(w_m)} w_m^f H_2(w_m). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Обозначим здесь правую часть через A и преобразуем ее. Пользуясь тем, что функция $H_2(w)$ голоморфна в полосе (8.02), а значит, и внутри контура Γ , мы можем представить A в виде интеграла

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(w - ib)^n w^f H_2(w)}{S(w)} d\omega. \quad (8.16)$$

Контур Γ можно заменить двумя прямыми, параллельными вещественной оси; тогда величину A можно представить в виде разности

$$A = A_1 - A_2 \quad (8.17)$$

двух абсолютно сходящихся интегралов

$$A_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-ic' - \infty}^{-ic' + \infty} \frac{(w - ib)^n w^f H_2(w)}{S(w)} d\omega, \quad (8.18)$$

$$A_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic' - \infty}^{ic' + \infty} \frac{(w - ib)^n w^f H_2(w)}{S(w)} d\omega. \quad (8.19)$$

Первый из этих интегралов равен нулю, так как подынтегральная функция в нем голоморфна в нижней полуплоскости, а на бесконечности стремится к нулю как $|w|^{-n-1}$, т. е. по крайней мере обратно $|w|^2$. Во втором же интеграле мы снова можем выразить при помощи (8.14) $H_2(w)$ через $H_1(w)$ и через $\psi_2(w) G_1(w)$. Легко видеть, что интеграл, получаемый из A_2 заменой $H_2(w)$ на $H_1(w)$, равен нулю. Поэтому

$$A_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic' - \infty}^{ic' + \infty} \frac{(w - ib)^n w^f \psi_2(w) G_1(w)}{S(w)} d\omega, \quad (8.20)$$

тогда как

$$A_1 = 0. \quad (8.21)$$

Так как $A = -A_2$ есть правая часть (8.15), то условие (8.13) может быть сформулировано следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-n}^{+n} \frac{(w_m - ib)^n}{S'(w_m)} \omega_m^r \psi_2(w_m) G_1(w_m) = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ic'-\infty}^{ic'+\infty} \frac{(w - ib)^n}{S(w)} \omega^r \psi_2(w) G_1(w) dw. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Полученную формулу можно написать в несколько более простом виде, если положить согласно (6.07)

$$\psi_{n2}(w) = (w - ib)^n \psi_2(w). \quad (8.23)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-n}^{+n} \frac{\psi_{n2}(w_m)}{S'(w_m)} \omega_m^r G_1(w) = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ic'-\infty}^{ic'+\infty} \frac{\psi_{n2}(w)}{S(w)} \omega^r G_1(w) dw \quad (r = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Напомним, что $\psi_{n2}(w)$, в отличие от $\psi_2(w)$, не зависит от выбора числа b . Согласно оценке, получаемой из (4.12) заменой ψ_1 на ψ_2 , мы имеем в полуплоскости $\text{Im}(w) < c'$ при достаточно больших $|w|$

$$|\psi_{n2}(w) - w^n| < M |w|^{n-1} |g| |w|. \quad (8.25)$$

Отсюда видно, что интеграл в (8.24) будет абсолютно сходящимся.

В формулу (8.24) можно подставить для $G_1(w)$ интегральное выражение

$$G_1(w) = \int_0^{\infty} e^{ixw} g(x) dx. \quad (8.26)$$

Пользуясь (8.25), легко доказать законность изменения в правой части (8.24) порядка интегрирования, так что первое интегрирование можно производить по w . Положив

$$\beta_r(x) = \frac{i^{r-n}}{2\pi} \int_{ic'-\infty}^{ic'+\infty} e^{ixw} \frac{\psi_{n2}(w)}{S(w)} \omega^r dw, \quad (8.27)$$

мы можем правую часть (8.24) писать в виде

$$A = -i^{n-r-1} \int_0^{\infty} g(x) \beta_r(x) dx. \quad (8.28)$$

В аналогичном виде можно представить и левую часть (8.24). Положив

$$\alpha_r(x) = i^{r-n+1} \sum_{m=-n}^{+n} \frac{\psi_{n_2}(\omega_m)}{S'(\omega_m)} \omega_m^r e^{ix\omega_m}, \quad (8.29)$$

получим для левой части (8.24) выражение

$$\sum_{m=-n}^{+n} \frac{\psi_{n_2}(\omega_m)}{S'(\omega_m)} \omega_m^r G_1(\omega_m) = i^{n-r-1} \int_0^{\infty} g(x) \alpha_r(x) dx, \quad (8.30)$$

которое в силу (8.15) должно равняться A . Приравнявая (8.28) и (8.30), получим условия для $g(x)$ в виде

$$\int_0^{\infty} g(x) \gamma_r(x) dx = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1), \quad (8.31)$$

где

$$\gamma_r(x) = \alpha_r(x) + \beta_r(x). \quad (8.32)$$

Таким образом, чисто алгебраическое условие (8.13) для $H_1(\omega)$ оказалось эквивалентным условию ортогональности (8.31) для $g(x)$.

9. Свойства функций, входящих в условия ортогональности

Изучим подробнее функции, входящие в условия ортогональности.

Величину $\alpha_r(x)$ можно представить в виде контурного интеграла

$$\alpha_r(x) = \frac{i^{r-n}}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{ix\omega} \frac{\psi_{n_2}(\omega) \omega^r}{S(\omega)} d\omega. \quad (9.01)$$

Это представление справедливо также и в случае кратных корней.

Заменяя контур Γ двумя параллельными прямыми, мы можем представить интеграл (9.01) в виде разности двух интегралов, — подобно тому, как это сделано в формуле (8.17), где интеграл A дан в виде разности $A_1 - A_2$. Один из них будет как раз равен интегралу (8.27) для $\beta_r(x)$. Составляя сумму (8.32), получим

$$\gamma_r(x) = \frac{i^{r-n}}{2\pi} \int_{-ic'-\infty}^{-ic'+\infty} e^{ix\omega} \frac{\psi_{n_2}(\omega)}{S(\omega)} \omega^r d\omega. \quad (9.02)$$

Функция $\gamma_r(x)$ будет производной r -го порядка от $\gamma_0(x)$:

$$\gamma_r(x) = \frac{d^r}{dx^r} \gamma_0(x). \quad (9.03)$$

Аналогичные соотношения существуют для $\alpha_r(x)$ и для $\beta_r(x)$. Так как множитель при показательной функции под интегралом (9.02) представляет собой функцию, голоморфную в нижней полуплоскости, причем она стремится к нулю на бесконечности по крайней мере обратно $|\omega|$, то при отрицательных значениях x интеграл (9.02) равен нулю:

$$\gamma_r(x) = 0 \quad \text{при } x < 0. \quad (9.04)$$

Все функции $\gamma_r(x)$, кроме $\gamma_{n-1}(x)$, непрерывны. В частности,

$$\gamma_r(0) = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-2). \quad (9.05)$$

Функция же $\gamma_{n-1}(x)$ терпит при $x = 0$ разрыв:

$$\gamma_{n-1}(+0) = 1, \quad \gamma_{n-1}(-0) = 0. \quad (9.06)$$

Рассмотрим поведение $\gamma_r(x)$ при больших положительных x . Легко видеть, что при неограниченном возрастании x функции $\beta_r(x)$ стремятся к нулю по показательному закону. В самом деле, из формулы (8.27) видно, что можно положить

$$\beta_r(x) = e^{-c'x} \beta_r^*(x), \quad (9.07)$$

где $\beta_r^*(x)$ остается ограниченным при бесконечном возрастании x .

Коэффициент c' в показателе удовлетворяет неравенству (8.01), но может быть взят сколь угодно близким к v_0 .

Что касается величины $\alpha_r(x)$, то для нее у нас имеется явное выражение (8.29). Оно непосредственно применимо в случае простых корней. Ни один из множителей $\psi_{n_2}(\omega_m)$ в нем не равен нулю. Величина $\alpha_r(x)$ будет осциллирующей функцией от x , в которой будут представлены все «частоты» ω_m . Эта функция хотя и остается ограниченной, но не стремится на бесконечности ни к какому пределу. Если имеются кратные корни, то выражение для $\alpha_r(x)$ можно получить либо из (8.29), рассматривая кратные корни как предел близких корней, либо непосредственно из интеграла (9.01). Выражение это будет содержать произведения показательных множителей $e^{tx\omega_m}$ на полиномы от x степени $s_m - 1$ (s_m — кратность корня ω_m). Если s — наибольшее из чисел s_m , то отношение $\alpha_r(x) : x^{s-1}$ остается ограниченным и не будет стремиться ни к какому пределу.

Ни одна из функций $\alpha_r(x)$, а также никакая линейная комбинация этих функций не будет на бесконечности стремиться к нулю. Отсюда, в частности, следует, что функции $\alpha_r(x)$ линейно незави-

симы. Формальное доказательство линейной независимости этих функций проще всего вести на основании следующей леммы.

Л е м м а IV. Пусть функция $\varphi(\omega)$ голоморфна внутри замкнутого контура Γ , за исключением, быть может, полюсов, и пусть дано, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{ix\omega} \varphi(\omega) d\omega = 0 \quad (9.08)$$

тождественно относительно x . Тогда $\varphi(\omega)$ не имеет полюсов внутри Γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выделим главную часть в $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \sum_{p, n} \frac{A(p, n)}{(\omega - \rho)^{n+1}} + \Phi_1(\omega), \quad (9.09)$$

где $\Phi_1(\omega)$ голоморфна внутри Γ . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{ix\omega} \varphi(\omega) d\omega = \sum_{p, n} A(p, n) (ix)^n e^{ipx}. \quad (9.10)$$

Это выражение может обращаться тождественно в нуль только в том случае, если все коэффициенты $A(p, n)$ равны нулю, т. е. если $\varphi(\omega)$ приводится к голоморфной функции $\Phi_1(\omega)$, что и требовалось доказать.

Переходя к доказательству линейной независимости $\alpha_r(x)$, предположим обратное, т. е. предположим, что между этими функциями существует соотношение вида

$$A_0\alpha_0(x) + A_1\alpha_1(x) + \dots + A_{n-1}\alpha_{n-1}(x) = 0. \quad (9.11)$$

Подставляя сюда выражения для $\alpha_r(x)$ в виде контурных интегралов (9.01) и обозначая через $P(\omega)$ полином

$$P(\omega) = A_0 + A_1(i\omega) + A_2(i\omega)^2 + \dots + A_{n-1}(i\omega)^{n-1}, \quad (9.12)$$

мы имеем бы

$$\int_{\Gamma} e^{ix\omega} \frac{\Psi_{n_2}(\omega) P(\omega)}{S(\omega)} d\omega = 0 \quad (9.13)$$

при всяком x . Отсюда на основании леммы IV заключаем, что функция

$$\varphi(\omega) = \frac{\Psi_{n_2}(\omega) P(\omega)}{S(\omega)} \quad (9.14)$$

голоморфна внутри Γ , а так как $\Psi_{n_2}(\omega)$ там голоморфна и не имеет нулей, то голоморфной должна быть и функция

$$\frac{\varphi(\omega)}{\Psi_{n_2}(\omega)} = \frac{P(\omega)}{S(\omega)}, \quad (9.15)$$

что невозможно, если только полином (9.12) не равен тождественно нулю [ибо $P(w)$ представляет собой полином степени $n - 1$, а $S(w)$ — полином степени $2n$]. Следовательно, не существует соотношения вида (9.11) с отличными от нуля коэффициентами A_r и функции $\alpha_r(x)$ линейно независимы.

Так как функции $\alpha_r(x)$ не стремятся к нулю на бесконечности, а функции $\beta_r(x)$ убывают там по показательному закону, то поведение функций $\gamma_r(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ определяется поведением функций $\alpha_r(x)$. Отсюда следует, во-первых, что функция $\gamma_r(x)$ линейно независимы и, во-вторых, что ни одна из них и никакая их линейная комбинация не могут на бесконечности стремиться к нулю.

В заключение заметим, что так как отношение $\gamma_r(x) : x^{s-1}$ остается ограниченным, то все интегралы (8.31), выражающие условия ортогональности, будут, при наших предположениях относительно $g(x)$, абсолютно сходящимися [см. формулу (7.28)].

10. Решение однородного уравнения

Докажем, что входящие в условия ортогональности функции $\gamma_r(x)$ представляют решения однородного уравнения

$$\gamma_r(x) = \int_0^{\infty} k(x-y) \gamma_r(y) dy. \quad (10.01)$$

Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) e^{i\omega y} dy = e^{ix\omega} K(\omega), \quad (10.02)$$

который будет абсолютно сходящимся, пока ω лежит в полосе (4.09) и тем более в полосе (8.02). Умножим его на

$$\frac{i^{r-n}}{2\pi} \frac{\psi_{n2}(\omega)}{S(\omega)} \omega^r d\omega$$

и проинтегрируем в пределах от $-ic' - N$ до $-ic' + N$. Вследствие абсолютной сходимости интеграла (10.02) мы можем изменить порядок интегрирования и получим

$$\begin{aligned} & \frac{i^{r-n}}{2\pi} \int_{-ic'-N}^{-ic'+N} e^{ix\omega} K(\omega) \frac{\psi_{n2}(\omega)}{S(\omega)} \omega^r d\omega = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) \gamma_{rN}(y) dy, \end{aligned} \quad (10.03)$$

где положено

$$\gamma_{rN}(y) = \frac{i^{r-n}}{2\pi} \int_{-ic'-N}^{-ic'+N} e^{i\omega y} \frac{\psi_{n2}(\omega)}{S(\omega)} \omega^r d\omega. \quad (10.04)$$

Рассуждая, как в параграфе 5, легко доказать, что

$$|e^{-c'y} \gamma_{rN}(y)| < L, \quad (10.05)$$

где L не зависит ни от N , ни от y .

С другой стороны, функция

$$e^{c'y} k(x-y) \quad (10.06)$$

будет абсолютно интегрируемой. Поэтому в правой части (10.03) можно перейти к пределу под знаком интеграла. В результате получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) \gamma_{rN}(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) \gamma_r(y) dy. \quad (10.07)$$

Предел левой части (10.03) равен

$$\begin{aligned} & \frac{i^{r-n}}{2\pi} \int_{-ic'-\infty}^{-ic'+\infty} e^{ix\omega} K(\omega) \frac{\psi_{n2}(\omega)}{S(\omega)} \omega^r d\omega = \\ & = \gamma_r(x) - \frac{i^{r-n}}{2\pi} \int_{-ic'-\infty}^{-ic'+\infty} e^{ix\omega} [1 - K(\omega)] \frac{\psi_{n2}(\omega)}{S(\omega)} \omega^r d\omega. \end{aligned} \quad (10.08)$$

Пользуясь равенством

$$[1 - K(\omega)] \frac{\psi_{n2}(\omega)}{S(\omega)} = \frac{1}{\psi_{n1}(\omega)}, \quad (10.09)$$

вытекающим из (6.05), легко убеждаемся, что при положительных значениях x интеграл в правой части (10.08) равен нулю.

Приравнивая (10.07) и (10.08), будем иметь при $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) \gamma_r(y) dy = \gamma_r(x) \quad (x > 0), \quad (10.10)$$

и вследствие (9.04)

$$\int_0^{\infty} k(x-y) \gamma_r(y) dy = \gamma_r(x). \quad (10.11)$$

Мы получили результат, который можно было предвидеть: те функции, к которым должен быть ортогонален свободный член $g(x)$

неоднородного уравнения, являются решениями однородного уравнения.

Докажем, что функции $\gamma_r(x)$ будут единственными решениями однородного уравнения, удовлетворяющими неравенству

$$|\gamma_r(x)| < Le^{v'x} \quad (0 < v' < v_0), \quad (10.12)$$

т. е. возрастающими медленнее, чем по показательному закону.

Для доказательства рассмотрим неоднородное интегральное уравнение

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} k(x-y)f(y) dy \quad (10.13)$$

и выберем в нем свободный член $g(x)$ так, чтобы его решение $f(x)$ быстро убывало. Для этого достаточно потребовать, чтобы $g(x)$ удовлетворяло тем же условиям, как и ядро $k(x)$; мы предположим, что не только $g(x)$, но и функция

$$g_1(x) = e^{cx}g(x), \quad (10.14)$$

где c имеет то же значение, как в (4.01) абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию в бесконечном промежутке.

Нетрудно видеть, что функция $G_1(\omega)$ будет тогда голоморфной в той же полосе, что и $K(\omega)$ (и, кроме того, конечно, в верхней полуплоскости). Из выражения (7.02) для $F(\omega)$ видно, что единственными особыми точками $F(\omega)$ внутри полосы (4.09) могут быть корни $1 - K(\omega)$, лежащие на вещественной оси или ниже ее; эти корни будут полюсами $F(\omega)$. Но если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям ортогональности (8.31), то на вещественной оси функция $F(\omega)$ полюсов не имеет, и ближайшая к вещественной оси особенная точка $F(\omega)$ будет иметь мнимую часть $-v_0$. Таким образом, $F(\omega)$ будет голоморфна в полуплоскости

$$\text{Im}(\omega) > -v_0. \quad (10.15)$$

Пусть v — число, удовлетворяющее неравенству

$$0 < v < v_0 \quad (10.16)$$

(v может быть сколь угодно близким к v_0). Напишем интеграл для $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{e^{-vx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} F(u - iv) du. \quad (10.17)$$

Отсюда видно, что можно положить

$$f(x) = e^{-vx} f_1(x). \quad (10.18)$$

где функция $f_1(x)$ остается ограниченной при бесконечном возрастании x :

$$|f_1(x)| < L_1. \quad (10.19)$$

Таким образом, при надлежащем выборе свободного члена существуют решения неоднородного уравнения, быстро убывающие на бесконечности.

Предположим теперь, что, кроме найденных выше функций

$$\gamma_0(x), \gamma_1(x), \dots, \gamma_{n-1}(x), \quad (10.20)$$

существует еще одно решение однородного уравнения

$$\gamma(x) = \int_0^{\infty} k(x-y)\gamma(y)dy, \quad (10.21)$$

которое возрастает медленнее, чем $e^{v'x}$, так что

$$|\gamma(x)| < e^{v'x}L \quad (0 < v' < v_0), \quad (10.22)$$

где L — постоянная.

Подберем в формуле (10.16) величину v таким образом, чтобы было

$$v' < v < v_0. \quad (10.23)$$

Умножим обе части (10.13) на $\gamma(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до ∞ . Двойной интеграл в правой части будет абсолютно сходящимся, так как он будет меньше, чем

$$\begin{aligned} & LL_1 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{v'x-vy} |k(x-y)| dx dy < \\ & < LL_1 \int_0^{\infty} e^{-(v-v')y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{v'(x-y)} |k(x-y)| dx. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Простые интегралы также будут, очевидно, абсолютно сходящимися. Изменив в двойном интеграле порядок интегрирования, получим

$$\int_0^{\infty} f(y) \left\{ \gamma(y) - \int_0^{\infty} k(x-y)\gamma(x)dx \right\} dy = \int_0^{\infty} g(x)\gamma(x)dx. \quad (10.25)$$

Так как $\gamma(x)$ удовлетворяет однородному уравнению, то в качестве необходимого условия получим еще одно условие ортогональности:

$$\int_0^{\infty} g(x)\gamma(x)dx = 0. \quad (10.26)$$

Но нами уже доказано, что прежних условий ортогональности достаточно для существования решения. Поэтому новое условие (10.26) должно быть следствием прежних условий (8.31).

Отсюда вытекает, что $\gamma(x)$ будет линейной комбинацией функций $\gamma_m(x)$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$). В самом деле, возьмем в качестве $g(x)$ функцию *

$$g(x) = e^{-2v_0 x} \{a_0 \bar{\gamma}_0(x) + a_1 \bar{\gamma}_1(x) + \dots + a_{n-1} \bar{\gamma}_{n-1}(x) - \bar{\gamma}(x)\} \quad (10.27)$$

и подберем в ней коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_{n-1} так, чтобы $g(x)$ была ортогональна ко всем функциям (10.20). Это всегда возможно, так как вследствие линейной независимости этих функций определитель системы линейных уравнений для a_0, a_1, \dots, a_{n-1} (определитель Грама) наверное отличен от нуля. Но если $g(x)$ ортогональна к функциям (10.20), то по доказанному она ортогональна и к функции $\gamma(x)$, а следовательно, и к функции

$$\varepsilon(x) = \bar{a}_0 \gamma_0(x) + \dots + \bar{a}_{n-1} \gamma_{n-1}(x) - \gamma(x), \quad (10.28)$$

так что

$$\int_0^{\infty} e^{-2v_0 x} |\varepsilon(x)|^2 dx = 0. \quad (10.29)$$

Это равенство может иметь место только в том случае, если

$$\varepsilon(x) = 0 \quad (10.30)$$

тождественно относительно x , что и доказывает линейную зависимость $\gamma(x)$ от $\gamma_0(x), \dots, \gamma_{n-1}(x)$.

Таким образом, мы доказали, что однородное уравнение имеет ровно n решений (10.20), удовлетворяющих условию (10.22), и никаких других решений, помимо найденных, не существует.

Полученный нами результат позволяет для весьма просто решить вопрос и об единственности полученного нами ранее решения неоднородного уравнения.

В самом деле, если бы существовало два решения неоднородного уравнения, которые оба стремились бы к нулю на бесконечности, то их разность представляла бы такое решение однородного уравнения, которое на бесконечности тоже стремилось бы к нулю. Но такого решения (не равного нулю тождественно) не существует, ибо самое общее решение однородного уравнения представляет собой линейную комбинацию функций (10.20), а никакая линейная комбинация этих функций не обращается на бесконечности в нуль.

В заключение сделаем одно замечание о тех решениях однородного уравнения, которые не удовлетворяют условию (10.22).

* Черта над буквой обозначает комплексно-сопряженную величину.

Такие решения $\gamma(x)$, если они существуют, могут быть представлены в виде интеграла (9.02), если включить в число корней $S(\omega)$ также и комплексные корни. Асимптотический вид этих решений на бесконечности будет даваться выражением (8.29) или, для кратных корней, его предельной формой, где уже среди величин ω_m будут и комплексные с отрицательной мнимой частью.

Если подчинить функцию $g(x)$ тем же условиям, как $k(x)$ [см. (10.14)], то будет иметь смысл интеграла вида

$$I = \int_0^{\infty} g(x) \gamma(x) dx, \quad (10.31)$$

несмотря на возрастание $\gamma(x)$. Пусть c' — некоторое положительное число, меньшее c . Можно потребовать, чтобы интегралы (10.31) равнялись нулю для всех решений $\gamma(x)$ однородного уравнения, возрастающих не быстрее $e^{c'x}$. Тогда функция $F(\omega)$ будет голоморфной во всей полуплоскости $\text{Im}(\omega) > -c'$, а $f(x)$ будет убывать по крайней мере как $e^{-c''x}$ (c'' — любое положительное число, меньшее c').

11. Условия существования решения, к которому применима формула Фурье

В начале нашего исследования мы предположили, что решение $f(x)$ нашего интегрального уравнения таково, что к нему применима формула Фурье. Впоследствии мы освободились от этого предположения и доказали существование и единственность решения независимо от него. Тем не менее интересно найти условия, при которых первоначальное предположение имеет место, ибо решение, к которому применима формула Фурье, будет во всяком случае единственным решением с этим свойством.

Применимость формулы Фурье к $f(x)$ означает то же, что применимость этой формулы к $F(\omega)$ для вещественных ω . Из основного функционального уравнения мы имеем

$$F(\omega) - K(\omega) F(\omega) = G_1(\omega) + \Phi(\omega). \quad (11.01)$$

К функции $G_1(\omega)$ формула Фурье применима по свойству $g(x)$. Функция $\Phi(\omega)$ голоморфна в полосе, включающей вещественную ось; поэтому, чтобы убедиться в применимости к ней формулы Фурье, достаточно вспомнить, что при больших $|\omega|$ справедливо выражение (4.25), и проверить, что производная $\Phi'(\omega)$ абсолютно интегрируема во всем бесконечном промежутке. На этой проверке мы останавливаться не будем.

Таким образом, к правой части (11.01) формула Фурье наверное применима, и применимость этой формулы к $F(\omega)$ будет доказана,

если она будет доказана для $K(\omega)F(\omega)$. Но функция $K(\omega)F(\omega)$ абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке, и нам достаточно показать, что производная от нее абсолютно интегрируема во всяком конечном промежутке.

Имеем

$$K(\omega)F(\omega) = \frac{K(\omega)}{1-K(\omega)} [G_1(\omega) + \Phi(\omega)]. \quad (11.02)$$

Если знаменатель в (11.02) не имеет вещественных корней, то для абсолютной интегрируемости производной от (11.02) достаточно, чтобы производная $G_1'(\omega)$ была ограниченной. Для этого достаточно предположить абсолютную интегрируемость $x \cdot g(x)$ в бесконечном промежутке.

Если знаменатель имеет вещественные корни, то вблизи каждого корня $\omega = \omega_m$ можно воспользоваться представлением $F(\omega)$ в виде (7.03). Рассуждая, как в параграфе 7, и пользуясь выражением

$$-\frac{dD_s}{d\omega} = \int_0^1 \frac{G_1^{(s)}(\omega t + \omega_m(1-t)) - G_1^{(s)}(\omega_m)}{\omega - \omega_m} \frac{d}{dt} \frac{t(1-t)^{s-1}}{(s-1)!} dt, \quad (11.03)$$

а также формулой

$$s \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} t(1-t)^{s-1} \right| dt \leq 1, \quad (11.04)$$

легко установить для $\omega > \omega_m$ неравенство

$$\int_{\omega_m}^{\omega} \left| \frac{dD_s}{d\omega} \right| d\omega \leq \frac{1}{s!} \int_{\omega_m}^{\omega} \left| \frac{G_1^{(s)}(u) - G_1^{(s)}(\omega_m)}{u - \omega_m} \right| du, \quad (11.05)$$

аналогичное неравенству (7.05). Используя результаты параграфа 7, заключаем отсюда, что достаточным условием для абсолютной интегрируемости $D_s'(\omega)$ вблизи каждого корня будет сходимость интеграла

$$g_s(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} (\lg x) x^s |g(x)| dx, \quad (11.06)$$

где s — наибольшая кратность вещественных корней.

Но если $D_s'(\omega)$ абсолютно интегрируемо вблизи каждого корня, то производная $F'(\omega)$ будет абсолютно интегрируема во всяком конечном промежутке и все условия для применимости к функциям $K(\omega)F(\omega)$ и $F(\omega)$ формулы Фурье будут выполнены.

Таким образом, когда s — наибольшая кратность вещественных корней, то условия существования решения $f(x)$, к которому применима формула Фурье, будут в точности такими же, какими были для кратности $s + 1$ условия существования и единственности решения, стремящегося к нулю на бесконечности, а именно:

1° абсолютная интегрируемость и ограниченность вариации $g(x)$ в бесконечном промежутке и

2° абсолютная интегрируемость $(\lg x) x^s g(x)$ в бесконечном промежутке*.

Если вещественные корни отсутствуют, то для существования решения, к которому применима формула Фурье, вместо условия 2° достаточно потребовать абсолютную интегрируемость $xg(x)$ в конечном промежутке.

12. Примеры

Прежде чем перейти к частным примерам, рассмотрим тот часто встречающийся в физических задачах случай, когда свободный член интегрального уравнения представляет собой показательную функцию

$$g(x) = e^{ipx} \quad (\text{Im}(p) > 0). \quad (12.01)$$

Тогда по формуле (1.11)

$$G_1(w) = \frac{i}{w+p}. \quad (12.02)$$

Разложение (3.14) может быть выполнено в явной форме, именно:

$$\Psi_2(w) \frac{i}{w+p} = \frac{i\Psi_1(p)}{w+p} + i \frac{\Psi_2(w) - \Psi_2(-p)}{w+p}. \quad (12.03)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (3.10). Очевидно, что в формуле (12.03) первый член справа есть $H_1(w)$, а второй член есть $H_2(w)$. По формуле (3.16) имеем

$$F(w) = i \frac{\Psi_1(w) \Psi_1(p)}{w+p}, \quad (12.04)$$

так что функция $F(w)$ симметрична относительно аргумента w и параметра p .

Таким образом, решение интегрального уравнения со свободным членом (12.01) имеет вид

$$f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixw} \frac{\Psi_1(w) \Psi_1(p)}{w+p} dw. \quad (12.05)$$

* Условий ортогональности для $g(x)$ мы не упоминаем, так как они всегда предполагаются выполненными.

Если положить здесь $x = 0$, то согласно формуле Фурье получим полусумму

$$f(0) = \frac{1}{2} [f(+0) + f(-0)], \quad (12.06)$$

а так как $f(-0) = 0$, то

$$f(+0) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(\omega) \psi_1(p)}{\omega + p} d\omega. \quad (12.07)$$

Интегрирование по вещественной оси можно заменить в данном случае интегрированием по полуокружности бесконечно возрастающего радиуса, лежащей в верхней полуплоскости. Так как на бесконечности $\psi_1(\omega)$ обращается в единицу, то интеграл легко вычисляется, и мы получаем

$$f(+0) = \psi_1(p). \quad (12.08)$$

С другой стороны, полагая в исходном интегральном уравнении $x = 0$, находим

$$f(+0) = 1 + \int_0^{\infty} k(y) f(y) dy. \quad (12.09)$$

В левую часть можно подставить (12.08), а интеграл в правой части заменить его значением из (5.17), куда нужно, в свою очередь, подставить вместо $F(\omega)$ выражение (12.04). В результате получим

$$\psi_1(p) = 1 + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega) \frac{\psi_1(\omega) \psi_1(p)}{\omega + p} d\omega. \quad (12.10)$$

Это соотношение можно рассматривать как нелинейное функциональное уравнение для $\psi_1(\omega)$. Решение его нам уже известно: оно дается согласно (3.06) и (3.08) применением леммы I к функции (3.04), иначе говоря, разложением $1 - K(\omega)$ на множители по формуле (3.09). Подставив в (12.10) выражение для $K(\omega)$ из (3.09) и пользуясь общими свойствами функции $\psi_1(\omega)$, легко в этом убедиться и непосредственно.

В качестве простейшего примера рассмотрим уравнение

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy, \quad (12.11)$$

в котором для простоты будем считать λ вещественным. Здесь ядро $k(x)$ равно

$$k(x) = \lambda e^{-|x|}. \quad (12.12)$$

Преобразованное ядро вычисляется по общей формуле (1.11) и будет равно

$$K(\omega) = \frac{2\lambda}{1 + \omega^2}. \quad (12.13)$$

В этом простом случае величина $K(\omega)$ уже до преобразования имеет вид (6.20). Корни $1 - K(\omega)$ даются формулой $\omega = \pm \sqrt{2\lambda - 1}$. Они будут комплексны при $2\lambda < 1$ и вещественны при $2\lambda > 1$.

С л у ч а й 1 ($2\lambda < 1$). Положим

$$2\lambda = 1 - \mu^2 \quad (\mu > 0), \quad (12.14)$$

так что

$$K(\omega) = \frac{1 - \mu^2}{1 + \omega^2}, \quad 1 - K(\omega) = \frac{\omega^2 + \mu^2}{\omega^2 + 1}. \quad (12.15)$$

Применяя рассуждения параграфа 3 и разлагая $1 - K(\omega)$ на множители, мы должны в формуле (3.09) положить

$$\psi_1(\omega) = \frac{\omega + i}{\omega + i\mu}, \quad \psi_2(\omega) = \frac{\omega - i}{\omega - i\mu}. \quad (12.16)$$

Разложение (3.14) может быть написано в явной форме

$$\frac{\omega - i}{\omega - i\mu} G_1(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega); \quad (12.17)$$

здесь

$$H_1(\omega) = \frac{(\omega - i) G_1(\omega) - (i\mu - i) G_1(i\mu)}{\omega - i\mu}, \quad (12.18)$$

$$H_2(\omega) = \frac{(i\mu - i) G_1(i\mu)}{\omega - i\mu}. \quad (12.19)$$

Функция $F(\omega)$ будет равна

$$F(\omega) = \frac{(\omega^2 + 1) G_1(\omega) - i(\mu - 1) G_1(i\mu)(\omega + i)}{\omega^2 + \mu^2}, \quad (12.20)$$

а $f(x)$ выразится через $F(\omega)$ по общей формуле (3.18).

Тот же результат мы получили бы и по второму (алгебраическому) способу, изложенному в параграфе 6. В формуле (6.40) мы должны положить

$$F^* = F, \quad G_1^* = H_1 = G_1, \quad \psi_1 = 1, \quad \omega_1 = i\mu, \quad n = 1, \quad b = 1. \quad (12.21)$$

Полином P_0 , который сводится к постоянной, непосредственно определяется из (6.46):

$$P_0 = -(i\mu - i) G_1(i\mu). \quad (12.22)$$

После подстановки значений (12.21) и (12.22) в общую формулу (6.40) или (6.41) она переходит в (12.20).

С л у ч а й 2 ($2\lambda > 1$). Положим

$$2\lambda = 1 + \nu^2 \quad (\nu > 0). \quad (12.23)$$

В этом случае общая формула (6.41) сводится к следующей:

$$F(\omega) = \frac{(\omega^2 + 1) G_1(\omega) + (\omega + i) P_0}{\omega^2 - \nu^2}. \quad (12.24)$$

Числитель нашей формулы должен обращаться в нуль как при $\omega = +\nu$, так и при $\omega = -\nu$. Это приводит к соотношению

$$(\nu - i) G_1(\nu) + (\nu + i) G_1(-\nu) = 0, \quad (12.25)$$

выражающему собой условие ортогональности $g(x)$ к функции

$$\gamma_1(x) = \cos \nu x + \frac{\sin \nu x}{\nu}, \quad (12.26)$$

которая удовлетворяет однородному интегральному уравнению.

Наконец, если $2\lambda = 1$, $\nu = 0$, то функция $1 - K(\omega)$ имеет двойной корень $\omega = 0$ и свободный член интегрального уравнения должен быть ортогонален к функции

$$\gamma_1(x) = 1 + x. \quad (12.27)$$

Некоторые важные задачи математической физики приводят к интегральным уравнениям рассмотренного вида с более сложным ядром. Так, например, задача береговой рефракции электромагнитных волн приводится, как мы видели в гл. 18, к уравнению

$$f(x) = g(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\mu |x - y|) f(y) dy, \quad (12.28)$$

где K_0 — функция Макдональда

$$K_0(\mu |x|) = \int_{\mu}^{\infty} e^{-|x|t} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \mu^2}}. \quad (12.29)$$

В этом случае

$$K(\omega) = \frac{\lambda}{\sqrt{\omega^2 + \mu^2}}. \quad (12.30)$$

Приведем без вывода решение этого уравнения для случая

$$g(x) = e^{-\mu x \cos \alpha}, \quad (12.31)$$

где α — некоторый параметр.

В физической задаче μ представляет собой комплексное число с положительной вещественной частью, а λ — некоторый комплексный параметр. Для простоты положим $\mu = 1$ и введем обозначения

$$\omega = i \cos \tau, \quad \lambda = \sin \sigma. \quad (12.32)$$

Тогда

$$\psi_1(\omega) = \sqrt{\frac{\cos \tau + 1}{\cos \tau + \cos \sigma}} \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\tau-\sigma}^{\tau+\sigma} \frac{u}{\sin u} du \right). \quad (12.33)$$

Эта функция удовлетворяет соотношению

$$\psi_1(i \cos \tau) \psi_1[i \cos(\pi - \tau)] = \frac{\sin \tau}{\sin \tau - \sin \sigma}, \quad (12.34)$$

соответствующему формуле (3.09). Согласно (12.05)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2} - i\infty}^{\frac{\pi}{2} + i\infty} e^{x \cos \tau} \frac{\psi_1(i \cos \tau) \psi_1(i \cos \alpha)}{\cos \tau + \cos \alpha} \sin \tau d\tau. \quad (12.35)$$

Отсюда легко получить различные приближенные формулы, справедливые для больших x или для малых σ . При этом нужно иметь в виду, что в физической задаче самое уравнение (12.28) будет приближенным, так что строгое решение его имеет главным образом математический интерес; оно приведено нами в качестве иллюстрации нашего метода.

Другой пример из математической физики представляет задача поглощения и рассеяния света в атмосфере. Эта задача была предметом многочисленных исследований (Мильн [36], Хопф [37, 38], Амбарцумян [39].) Интегральное уравнение задачи было впервые составлено Хвольсоном. Оно имеет ядро

$$k(x) = \frac{\lambda}{2} \int_{|x|}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (12.36)$$

Преобразованное ядро равно

$$K(\omega) = \lambda \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{w}}{w}. \quad (12.37)$$

В этой задаче λ вещественно, положительно и не больше единицы (случай $\lambda = 1$ соответствует чистому поглощению). Функция $g(x)$ равна

$$g(x) = e^{-tx} \quad (t \geq 1) \quad (12.38)$$

или же представима в виде

$$g(x) = \int_1^{\infty} e^{-tx} \varphi(t) dt. \quad (12.39)$$

Функция $K(\omega) - 1$ имеет в полосе, где она голоморфна, чисто мнимые корни $\omega = \pm i\mu$, где

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\mu} \lg \frac{1+\mu}{1-\mu} \quad (0 < \mu < 1). \quad (12.40)$$

Общая теория непосредственно приложима к данному уравнению. В частности, она позволяет найти приближенное выражение для $f(x)$ при больших x . В случае (12.38) имеем

$$f(x) = C(t) e^{-\mu x} + f_2(x, t), \quad (12.41)$$

где μ определяется из (12.40), а функция $f_2(x, t)$ такова, что произведение

$$e^{(1-\varepsilon)x} f_2(x, t)$$

остается ограниченным для сколь угодно малого ε . Постоянная $C(t)$ равна

$$C(t) = -\lambda \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{1}{t-\mu} \frac{\psi_1(it)}{\psi_1(i\mu)}. \quad (12.42)$$

Функция $\psi_1(it)$ для вещественных t вещественна, и ее логарифм равен

$$\lg \psi_1(it) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lg \left(1 - \lambda \frac{\operatorname{arctg} u}{u} \right) \frac{t du}{u^2 + t^2}. \quad (12.43)$$

В случае (12.39) мы будем иметь

$$f(x) = C e^{-\mu x} + f_2(x), \quad (12.44)$$

где f_2 убывает быстрее, чем выписанный член.

Постоянная C равна

$$C = \int_1^{\infty} C(t) \varphi(t) dt. \quad (12.45)$$

Интенсивность света, выходящего из атмосферы в данном направлении, пропорциональна величине

$$I = \int_0^{\infty} e^{-xt'} f(x) dx = F(it'), \quad (12.46)$$

где t' — секанс угла между данным направлением и нормалью к атмосфере [параметр t в (12.38) есть секанс угла между той же нормалью и направлением падающего света]. Поэтому функция $F(it')$, которая согласно (12.04) равна

$$F(it') = \frac{\psi_1(it) \psi_1(it')}{t + t'}, \quad (12.47)$$

имеет непосредственное физическое значение.

13. Сводка результатов

Основной результат нашего исследования может быть резюмирован следующим образом.

Пусть дано интегральное уравнение

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} k(|x-y|) f(y) dy \quad (13.01)$$

с симметричным ядром, зависящим от абсолютного значения разности двух аргументов.

Относительно ядра $k(x)$ мы предположим, что не только оно само, но и функция

$$k_1(x) = e^{c|x|} k(x) \quad (13.02)$$

будет для некоторого $c > 0$ абсолютно интегрируемой и с ограниченной вариацией в бесконечном промежутке. Вводим в рассмотрение функцию

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} k(x) dx. \quad (13.03)$$

Она будет четной функцией от ω , голоморфной внутри полосы

$$-c < \text{Im}(\omega) < +c, \quad (13.04)$$

ограниченной и непрерывной на границах этой полосы. На бесконечности внутри и на границах полосы функция $K(\omega)$ будет убывать по крайней мере обратно пропорционально $|\omega|$.

Предположим, что уравнение

$$K(\omega) - 1 = 0 \quad (13.05)$$

не имеет вещественных корней. Тогда, если $g(x)$ функция абсолютно интегрируемая и с ограниченной вариацией в бесконечном промежутке, то существует решение $f(x)$ предложенного интегрального уравнения, обладающее следующими свойствами: оно представляет сумму функции с ограниченной вариацией и непрерывной функции, остается всюду ограниченным и стремится на бесконечности к нулю. Это — единственное решение с такими свойствами. Оно может быть представлено в виде интеграла

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\omega} F(\omega) d\omega, \quad (13.06)$$

где $F(\omega)$ определяется формулами (3.16), (3.14), (3.09), (1.11).

Предположим теперь, что уравнение (13.05) имеет $2n$ вещественных корней кратности не выше s . Тогда, если функция $g(x)$

абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию в бесконечном промежутке, а произведение $(\lg x) x^{s-1} g(x)$ абсолютно интегрируемо и если $g(x)$ удовлетворяет n условиям ортогональности вида

$$\int_0^{+\infty} g(x) \gamma_r(x) dx = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1), \quad (13.07)$$

то, как и в предыдущем случае, уравнение (13.01) имеет единственное решение, которое остается ограниченным и стремится на бесконечности к нулю.

Переходим к однородному уравнению

$$f(x) = \int_0^{\infty} k(|x-y|) f(y) dy. \quad (13.08)$$

Если уравнение (13.05) не имеет вещественных корней и если v_0 — мнимая часть ближайшего к вещественной оси комплексного корня или особенной точки функции $K(\omega) - 1$, то однородное уравнение (13.08) не имеет решений, которые удовлетворяли бы неравенству

$$|f(x)| < e^{v_0 x} L \quad (v < v_0). \quad (13.09)$$

Если же уравнение (13.05) имеет $2n$ вещественных корней, то существует ровно n линейно независимых решений

$$f(x) = \gamma_r(x) \quad (r = 0, 1, \dots, n-1) \quad (13.10)$$

однородного уравнения, удовлетворяющих условию (13.09). Эти решения и входят в условия ортогональности. Они даются формулами (9.02).

Результаты настоящей главы впервые опубликованы нами в кратком изложении в работе [40].

ДОБАВЛЕНИЕ 2

ТЕОРИЯ И ТАБЛИЦЫ ФУНКЦИЙ ЭЙРИ

В первой части добавления 2 даются представления функций Эйри в виде рядов и интегралов, а также асимптотические выражения для них. Исследуются свойства функций Эйри в комплексной плоскости и устанавливается связь их с функциями Бесселя; исследуются также их корни. Изучается применение функций Эйри к асимптотическому интегрированию линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для функций Ханкеля, порядок и аргумент которых велики и близки друг к другу, выводятся асимптотические представления через функции Эйри.

Вторая часть добавления 2 содержит подробные (через 0,02) четырехзначные таблицы обеих функций Эйри $u(t)$ и $v(t)$, а также их производных $u'(t)$ и $v'(t)$ в интервале $(-9 < t < +9)$, т. е. начиная с тех значений, где они имеют колебательный характер, и кончая теми, где они имеют экспоненциальный характер. Таблицы настолько подробны, что в большинстве случаев допускают линейную интерполяцию.

Введение

В наших работах по теории диффракции и распространения электромагнитных волн, собранных в этой книге, широко используются функции Эйри. Мы сочли поэтому целесообразным включить в настоящее издание таблицы функций Эйри, предпослав им краткий обзор свойств этих функций и их возможных приложений.

1. Определение и основные свойства функций Эйри

Под функциями Эйри мы будем разуметь функции, связанные с известным интегралом Эйри

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{x^3}{3} + xt\right) dx, \quad (1.01)$$

который впервые рассмотрен в 1838 г. в исследованиях Эйри «Об интенсивности света в окрестностях каустической поверхности» [41].

Интеграл Эйри представляет одно из решений дифференциального уравнения

$$\omega''(t) = t\omega(t) \quad (1.02)$$

(а именно то, которое убывает на положительной бесконечности быстрее всякой конечной степени t). Наряду с этим решением $v(t)$ мы будем рассматривать другое, линейно независимое, решение $u(t)$, которое будет точнее определено ниже. Функции $u(t)$ и $v(t)$ мы и будем называть функциями Эйри.

Рассмотрим интеграл

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{tz - \frac{1}{3}z^3} dz, \quad (1.03)$$

в котором путь интегрирования Γ идет в плоскости комплексной переменной z по лучу $\arg z = -\frac{2\pi}{3}$ из бесконечности к нулю и по лучу $\arg z = 0$ (по вещественной оси) от нуля до бесконечности.

Интеграл (1.03) сходится при всех комплексных значениях t и представляет целую трансцендентную функцию от t . Легко проверить, что определяемая им функция $\omega(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.02). При $t = 0$ функция $\omega(t)$ и ее производная $\omega'(t)$ принимают значения

$$\omega(0) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} e^{i\frac{\pi}{6}} = 1,0899290710 + i0,6292708425, \quad (1.04)$$

$$\omega'(0) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{4/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 0,7945704238 - i0,4587454481. \quad (1.05)$$

Функция $\omega(t)$ как целая трансцендентная функция разлагается в степенной ряд, сходящийся при всех значениях t . Этот ряд имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(t) = \omega(0) & \left\{ 1 + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^6}{(2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 6)} + \frac{t^9}{(2 \cdot 5 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 6 \cdot 9)} + \dots \right\} + \\ + \omega'(0) & \left\{ t + \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{t^7}{(3 \cdot 6) \cdot (4 \cdot 7)} + \frac{t^{10}}{(3 \cdot 6 \cdot 9) \cdot (4 \cdot 7 \cdot 10)} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (1.06)$$

Считая t вещественным, отделим в $\omega(t)$ вещественную и мнимую часть, положив

$$\omega(t) = u(t) + i v(t). \quad (1.07)$$

Функции $u(t)$ и $v(t)$ будут двумя независимыми интегралами уравнения (1.02), связанными соотношением

$$u'(t)v(t) - u(t)v'(t) = 1. \quad (1.08)$$

При этом функция $v(t)$, определяемая как мнимая часть $w(t)$, будет совпадать с интегралом Эйри (1.01). Мы вправе называть поэтому функции $u(t)$ и $v(t)$ функциями Эйри.

Обе функции Эйри, вещественные при вещественных значениях аргумента t , являются целыми трансцендентными функциями, которые определены и для комплексных значений t . При этом имеют место соотношения:

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad (1.09)$$

$$w\left(te^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}v(-t), \quad (1.10)$$

$$w\left(te^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}[u(t) - iv(t)], \quad (1.11)$$

$$w(te^{i\pi}) = u(-t) + iv(-t), \quad (1.12)$$

$$w\left(te^{i\frac{4\pi}{3}}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}v(t), \quad (1.13)$$

$$w\left(te^{i\frac{5\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}[u(-t) - iv(-t)]. \quad (1.14)$$

Эти соотношения выражают значения функции $w(t)$ на шести лучах $\arg t = \frac{n\pi}{3}$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) через вещественные функции Эйри $u(t)$ и $v(t)$.

2. Асимптотические выражения для функций Эйри

Будем считать t большим положительным числом и положим

$$x = \frac{2}{3}t^{3/2}. \quad (2.01)$$

Обозначим символом $F_{20}(\alpha, \beta, z)$ формальный ряд, составленный по закону

$$F_{20}(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2}z^2 + \dots \quad (2.02)$$

Тогда для функций Эйри имеют место следующие асимптотические выражения:

$$u(t) = t^{-\frac{1}{4}}e^x F_{20}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2x}\right), \quad (2.03)$$

$$u'(t) = t^{\frac{1}{4}}e^x F_{20}\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{2x}\right), \quad (2.04)$$

$$v(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{4}}e^{-x} F_{20}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{2x}\right), \quad (2.05)$$

$$v'(t) = -\frac{1}{2}t^{\frac{1}{4}}e^{-x} F_{20}\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, -\frac{1}{2x}\right). \quad (2.06)$$

Для отрицательных значений аргумента асимптотические выражения функций Эйри получатся делением вещественной и мнимой части в формулах

$$\omega(-t) = t^{-\frac{1}{4}} e^{i\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} F_{20}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2ix}\right), \quad (2.07)$$

$$\omega'(-t) = t^{\frac{1}{4}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} F_{20}\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{2ix}\right). \quad (2.08)$$

Приведенные здесь выражения справедливы не только при вещественных положительных значениях t , но и в некотором секторе, включающем положительную вещественную ось. Сектор этот различен для различных функций, но во всяком случае все приведенные выражения справедливы при условии

$$-\frac{\pi}{3} < \arg t < \frac{\pi}{3}.$$

Если положить

$$F_{20}\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2x}\right) = 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots, \quad (2.09)$$

то коэффициенты a_1, a_2, \dots будут равны

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{5}{72}; \quad a_2 = \frac{(5 \cdot 11) \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot (72)^2}; \quad a_3 = \frac{(5 \cdot 11 \cdot 17) \cdot (7 \cdot 13)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (72)^3}; \\ a_n &= \frac{5 \cdot 11 \dots (6n-1) \cdot 7 \cdot 13 \dots (6n-5)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot (72)^n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Аналогично в ряде

$$F_{20}\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{2x}\right) = 1 - \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{x^2} - \frac{b_3}{x^3} - \dots \quad (2.11)$$

коэффициенты b_1, b_2, b_3, \dots равны

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{7}{72}; \quad b_2 = \frac{(7 \cdot 13) \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot (72)^2}; \quad b_3 = \frac{(7 \cdot 13 \cdot 19) \cdot (5 \cdot 11)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (72)^3}; \\ b_n &= \frac{7 \cdot 13 \dots (6n+1) \cdot 5 \cdot 11 \dots (6n-7)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot (72)^n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

В явной форме асимптотические выражения для функций Эйри от положительного аргумента напишутся:

$$u(t) = t^{-\frac{1}{4}} e^x \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots\right), \quad (2.13)$$

$$u'(t) = t^{\frac{1}{4}} e^x \left(1 - \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{x^2} - \dots\right), \quad (2.14)$$

$$v(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} e^{-x} \left(1 - \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} - \frac{a_3}{x^3} + \dots \right), \quad (2.15)$$

$$v'(t) = -\frac{1}{2} t^{\frac{1}{4}} e^{-x} \left(1 + \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} - \dots \right). \quad (2.16)$$

Соответственные выражения для функций Эйри от отрицательного аргумента будут:

$$u(-t) = t^{-\frac{1}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_4}{x^4} - \frac{a_6}{x^6} + \dots \right] + \\ + t^{-\frac{1}{4}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{a_1}{x} - \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_5}{x^5} - \frac{a_7}{x^7} + \dots \right], \quad (2.17)$$

$$u'(-t) = t^{\frac{1}{4}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[1 + \frac{b_2}{x^2} - \frac{b_4}{x^4} + \frac{b_6}{x^6} - \dots \right] + \\ + t^{\frac{1}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{b_1}{x} - \frac{b_3}{x^3} + \frac{b_5}{x^5} - \frac{b_7}{x^7} + \dots \right], \quad (2.18)$$

$$v(-t) = t^{-\frac{1}{4}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_4}{x^4} - \frac{a_6}{x^6} + \dots \right] - \\ - t^{-\frac{1}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{a_1}{x} - \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_5}{x^5} - \frac{a_7}{x^7} + \dots \right], \quad (2.19)$$

$$v'(-t) = -t^{\frac{1}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[1 + \frac{b_2}{x^2} - \frac{b_4}{x^4} + \frac{b_6}{x^6} + \dots \right] + \\ + t^{\frac{1}{4}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{b_1}{x} - \frac{b_3}{x^3} + \frac{b_5}{x^5} - \frac{b_7}{x^7} + \dots \right]. \quad (2.20)$$

3. Связь функций Эйри с функциями Бесселя

Функции Эйри от положительного аргумента выражаются через функции Бесселя первого и второго рода порядка $1/3$ от мнимого аргумента. Функции Эйри от отрицательного аргумента выражаются через функции Бесселя первого и второго рода порядка $1/3$ от вещественного аргумента. Наконец, комплексная функция Эйри w просто выражается через первую функцию Ханкеля порядка $1/3$. Производные от функций Эйри выражаются через соответственные функции Бесселя и Ханкеля порядка $2/3$.

Мы принимаем для функций Бесселя и Ханкеля обозначения Ватсона [33]. Считая $t > 0$ и полагая $x = \frac{2}{3} t^{3/2}$, мы будем тогда иметь:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{3} t} [I_{-1/3}(x) + I_{1/3}(x)] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3} t} \left[2I_{1/3}(x) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{1/3}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.01)$$

$$\begin{aligned} u(-t) &= \sqrt{\frac{\pi}{3} t} [J_{-1/3}(x) - J_{1/3}(x)] = \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{3} t} \left[\frac{1}{2} J_{1/3}(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} Y_{2/3}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.02)$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{3} t} [I_{-2/3}(x) + I_{2/3}(x)] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3} t} \left[2I_{2/3}(x) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{2/3}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.03)$$

$$\begin{aligned} u'(-t) &= \sqrt{\frac{\pi}{3} t} [J_{-2/3}(x) + J_{2/3}(x)] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3} t} \left[\frac{1}{2} J_{2/3}(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} Y_{2/3}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.04)$$

$$v(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\pi t} [I_{-1/3}(x) - I_{1/3}(x)] = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \sqrt{t} K_{1/3}(x), \quad (3.05)$$

$$\begin{aligned} v(-t) &= \frac{1}{3} \sqrt{\pi t} [J_{-1/3}(x) + J_{1/3}(x)] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3} t} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} J_{1/3}(x) - \frac{1}{2} Y_{1/3}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.06)$$

$$v'(t) = -\frac{1}{3} \sqrt{\pi} t [I_{-2/3}(x) - I_{2/3}(x)] = -\frac{1}{\sqrt{3\pi}} t K_{2/3}(x), \quad (3.07)$$

$$\begin{aligned} v'(-t) &= -\frac{1}{3} \sqrt{\pi} t [J_{-2/3}(x) - J_{2/3}(x)] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3} t} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} J_{2/3}(x) + \frac{1}{2} Y_{2/3}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.08)$$

$$\omega(-t) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{i \frac{2\pi}{3}} \sqrt{t} H_{1/3}^{(1)}(x), \quad (3.09)$$

$$\omega'(-t) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{i \frac{\pi}{3}} t H_{2/3}^{(1)}(x). \quad (3.10)$$

Важно отметить, что функции Эйри, рассматриваемые как функции от t , суть целые трансцендентные функции, тогда как правые части предыдущих формул (а также входящие в них функции Бесселя и Ханкеля) не будут целыми функциями от x , а будут иметь при $x = 0$ особую точку. Это различие сказывается при малых значениях аргумента в более плавном ходе таблиц для функций Эйри по сравнению с таблицами для функций Бесселя, что значительно облегчает интерполяцию. Целый трансцендентный характер функций Эйри значительно упрощает также рассуждения в теоретических исследованиях.

4. Корни функций Эйри

В приложениях чаще всего встречаются корни функции $v(t)$ и ее производной $v'(t)$. Так как при отрицательных t функции Эйри имеют колебательный характер, то эти корни вещественны и отрицательны. Обозначим корни $v(t)$ через $-\tau_s^0$ и корни $v'(t)$ — через $-\tau'_s$, где τ_s^0 и τ'_s — положительные величины. Значения первых пяти корней и их десятичных логарифмов приведены в нижеследующей таблице:

s	τ_s^0	$\log \tau_s^0$	τ'_s	$\log \tau'_s$
1	2,33811	0,368864	1,01879	0,008086
2	4,08795	0,611506	3,24820	0,511642
3	5,52056	0,741983	4,82010	0,683056
4	6,78671	0,831659	6,16331	0,789814
5	7,94417	0,900048	7,37218	0,867596

Дальнейшие корни могут быть вычислены путем использования формул для корней функций Бесселя и Неймана и их линейных комбинаций (см. книгу Ватсона [33]). Мы имеем

$$\tau_s^0 = \left(\frac{3}{2} x_s^0\right)^{\frac{2}{3}}; \quad \tau'_s = \left(\frac{3}{2} x'_s\right)^{\frac{2}{3}}, \quad (4.01)$$

где x_s^0 и x'_s удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\sqrt{3}}{2} J_{1/3}(x_s^0) - \frac{1}{2} Y_{1/3}(x_s^0) = 0, \quad (4.02)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} J_{2/3}(x'_s) + \frac{1}{2} Y_{2/3}(x'_s) = 0. \quad (4.03)$$

Для величин x_s^0 и x'_s известны следующие приближенные выражения:

$$x_s^0 = \left(s - \frac{1}{4}\right) \pi + \frac{0,0884194}{4s-1} - \frac{0,08328}{(4s-1)^2} + \frac{0,4065}{(4s-1)^3}; \quad (4.04)$$

$$x'_s = \left(s - \frac{3}{4}\right) \pi - \frac{0,1237872}{4s-3} + \frac{0,07758}{(4s-3)^2} - \frac{0,389}{(4s-3)^3}. \quad (4.05)$$

Эти формулы весьма точны даже для небольших значений s . Используя соотношения (4.01), мы без труда получаем отсюда величины τ_s^0 и τ'_s .

Подобные формулы могут быть применены для нахождения корней $\tau = \tau_s^0(\sigma)$ уравнения

$$v(-\tau) \cos \pi\sigma - u(-\tau) \sin \pi\sigma = 0, \quad (4.06)$$

а также корней $\tau = \tau'_s(\sigma)$ уравнения

$$v'(-\tau) \cos \pi\sigma - u'(-\tau) \sin \pi\sigma = 0. \quad (4.07)$$

При не слишком малых значениях s величины $\tau_s^0(\sigma)$ и $\tau'_s(\sigma)$ получаются из предыдущих формул заменой s на $s + \sigma$, так что можно условно написать

$$\tau_s^0(\sigma) = \tau_{s+\sigma}^0; \quad \tau'_s(\sigma) = \tau'_{s+\sigma}. \quad (4.08)$$

В частности, при $\sigma = \frac{1}{2}$ мы будем иметь корни $u(-\tau)$ и $u'(-\tau)$.

Корни t_s^0 комплексной функции $w(t)$, а также корни t'_s ее производной $w'(t)$ лежат на луче $\arg t = \frac{\pi}{3}$ и выражаются через корни τ_s^0 и τ'_s функций $v(-\tau)$ и $v'(-\tau)$ по формулам

$$t_s^0 = \tau_s^0 e^{i \frac{\pi}{3}}; \quad t'_s = \tau'_s e^{i \frac{\pi}{3}}. \quad (4.09)$$

Таким образом, приведенная выше табличка одновременно дает модули величин t_s^0 и t'_s .

5. Применение функций Эйри к асимптотическому интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка

Функции Эйри имеют многочисленные приложения в математической физике, главным образом в теории дифракции. Математической основой большинства этих приложений является приближенное интегрирование уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = k^2 p(x) y, \quad (5.01)$$

в котором k есть большой параметр. Если в некотором промежутке изменения x функция $p(x)$ не меняет знака (а также удовлетворяет некоторым общим условиям), то интеграл уравнения (5.01) приближенно выражается через показательные или тригонометрические функции.

При $p > 0$ мы имеем

$$y \cong \frac{C_1}{\sqrt[4]{p(x)}} \exp\left(k \int_{x_0}^x \sqrt{p(x)} dx\right) \quad (5.02)$$

или

$$y \cong \frac{C_2}{\sqrt[4]{p(x)}} \exp\left(-k \int_{x_0}^x \sqrt{p(x)} dx\right), \quad (5.03)$$

смотря по тому, ищем ли мы интеграл возрастающий или убывающий при возрастании $x - x_0$. Брать сумму выражений (5.02) и (5.03), вообще говоря, не имеет смысла, так как если постоянные C_1 и C_2 одного порядка, то убывающий интеграл будет мал не только по сравнению со всем значением возрастающего интеграла, но и по сравнению с погрешностью в этом значении, происходящей от пользования асимптотическим выражением.

При $p < 0$ асимптотическое выражение для y имеет вид

$$y = \frac{C'_1}{\sqrt[4]{-p(x)}} \cos\left(k \int_{x_0}^x \sqrt{-p(x)} dx\right) + \\ + \frac{C'_2}{\sqrt[4]{-p(x)}} \sin\left(k \int_{x_0}^x \sqrt{-p(x)} dx\right). \quad (5.04)$$

Выражения (5.02)–(5.04) перестают быть применимыми, если внутри рассматриваемого промежутка функция $p(x)$ обращается в нуль. Если при этом корень функции $p(x)$ — простой, то решение уравнения (5.01) приближенно выражается через функции Эйри.

Произведем в уравнении (5.01) замену переменных, вводя новую независимую переменную ζ и новую функцию z по формулам

$$x = x(\zeta); \quad y(x) = \sqrt{\frac{dx}{d\zeta}} z(\zeta). \quad (5.05)$$

Если y удовлетворяло уравнению (5.01), то уравнение для z будет

$$\frac{d^2 z}{d\zeta^2} = \left[s(\zeta) + k^2 p(x) \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 \right] z, \quad (5.06)$$

где через $s(\zeta)$ обозначено для краткости дифференциальное выражение

$$s(\zeta) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} \left(\lg \frac{dx}{d\zeta} \right) + \frac{1}{4} \left[\frac{d}{d\zeta} \left(\lg \frac{dx}{d\zeta} \right) \right]^2, \quad (5.07)$$

которое принято называть производной Шварца.

Пусть $x = x_0$ есть простой корень функции $p(x)$, так что

$$p(x_0) = 0; \quad p'(x_0) \neq 0.$$

Будем считать для определенности $p'(x_0) > 0$ и произведем подстановку

$$k \int_{x_0}^x \sqrt{p(x)} dx = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \quad (x > x_0, t > 0), \quad (5.08)$$

$$k \int_x^{x_0} \sqrt{-p(x)} dx = \frac{2}{3} (-t)^{\frac{3}{2}} \quad (x < x_0, t < 0). \quad (5.09)$$

Если $p(x)$ имеет непрерывную вторую производную, то вблизи $x = x_0$ обе формулы дают

$$t = k^{\frac{2}{3}} [p'(x_0)]^{\frac{1}{3}} (x - x_0) + \dots, \quad (5.10)$$

где невыписанные члены будут порядка $(x - x_0)^2$ и выше. Отсюда, обратно, с точностью до членов порядка t^2 будет

$$x = x_0 + k^{-\frac{2}{3}} [p'(x_0)]^{-\frac{1}{3}} t + \dots. \quad (5.11)$$

Значениям $x - x_0$ порядка единицы соответствуют значения t порядка $k^{\frac{2}{3}}$.

Из формул (5.08)—(5.09) вытекает

$$k^2 p(x) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = t. \quad (5.12)$$

Поэтому, если в уравнении (5.06) для z положить $\zeta = t$, оно принимает вид

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = (s + t)z. \quad (5.13)$$

Оценка функции $s(t)$ показывает, что она будет, вообще говоря, порядка $k^{-\frac{4}{3}}$, т. е. весьма малой, как при t , близком к нулю, так и при больших значениях $|t|$ (порядка $k^{\frac{2}{3}}$). Функция $s(t)$ может стать большой только если x будет приближаться к следующему

корню * $x = x_1$ функции $p(x)$. Если исключить этот случай, то в уравнении (5.13) можно пренебречь в коэффициенте при z величиной s , после чего получим

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = tz, \quad (5.14)$$

т. е. дифференциальное уравнение функций Эйри.

Напишем общий интеграл уравнения (5.14) в виде

$$z = Au(t) + Bv(t). \quad (5.15)$$

Возвращаясь к первоначальной функции $y(x)$, будем иметь

$$y = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt[4]{\frac{t}{p(x)}} [Au(t) + Bv(t)], \quad (5.16)$$

где t определяется из формул (5.08) и (5.09).

Установим связь между найденным выражением для y и предыдущими выражениями (5.02)—(5.04).

Когда разность $x - x_0$ положительна и конечна, величина t будет положительна и велика. Рассматривая такие значения t , мы должны различать два случая: $A \neq 0$ и $A = 0$. Когда A не равно нулю, мы имеем возрастающий интеграл, асимптотическое выражение которого получится, если отбросить в (5.16) член, содержащий $v(t)$, и заменить $u(t)$ величиной

$$u(t) = t^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right), \quad (5.17)$$

т. е. главным членом асимптотического выражения, рассмотренного в параграфе 2.

Пользуясь формулой (5.08), мы получим

$$y = \frac{A}{\sqrt{k} \sqrt[4]{p(x)}} \exp\left(k \int_{x_0}^x \sqrt{p(x)} dx\right), \quad (5.18)$$

т. е. выражение вида (5.02) со значением постоянной C_1 , равным $C_1 = A/\sqrt{k}$. Постоянная B в это выражение не входит, поэтому разные интегралы могут иметь одно и то же асимптотическое выражение.

Во втором случае, когда постоянная A равна нулю, в выражении (5.16) остается второй член. Заменяя в нем $v(t)$ величиной

$$v(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right), \quad (5.19)$$

* Случай двух корней функции $p(x)$ рассмотрен в параграфе 4 главы 15 этой книги.

получаем

$$y = \frac{B}{2\sqrt{k}\sqrt[4]{p(x)}} \exp\left(-k \int_{x_0}^x \sqrt{p(x)} dx\right); \quad A = 0. \quad (5.20)$$

В этом случае мы имеем дело с убывающим интегралом вида (5.03), причем постоянная C_2 равна $\frac{B}{2\sqrt{k}}$.

Переходя к конечным отрицательным значениям $x - x_0$, которым соответствуют большие отрицательные t , мы можем не различать двух случаев ($A \neq 0$ и $A = 0$), так как обе функции Эйри будут одного порядка. Используя для этих функций их приближенные выражения

$$u(t) = (-t)^{-\frac{1}{4}} \cos\left[\frac{2}{3}(-t)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right], \quad (5.21)$$

$$v(t) = (-t)^{-\frac{1}{4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-t)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right], \quad (5.22)$$

мы получаем вследствие (5.09) следующую формулу для y :

$$y = \frac{A}{\sqrt{k}\sqrt[4]{-p(x)}} \cos\left(k \int_x^{x_0} \sqrt{-p(x)} dx + \frac{\pi}{4}\right) + \\ + \frac{B}{\sqrt{k}\sqrt[4]{-p(x)}} \sin\left(k \int_x^{x_0} \sqrt{-p(x)} dx + \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.23)$$

Это выражение легко приводится к виду (5.04), причем постоянные C'_1 и C'_2 равны

$$C'_1 = \frac{A+B}{\sqrt{2k}}; \quad C'_2 = \frac{A-B}{\sqrt{2k}}. \quad (5.24)$$

Таким образом, полученное нами выражение для интеграла уравнения (5.01) через функции Эйри приводится в предельных случаях к более простым выражениям через показательные и тригонометрические функции.

Существенным преимуществом выражения через функции Эйри является то, что оно применимо равномерно во всем промежутке, включающем корень $x = x_0$ функции $p(x)$, тогда как выражения через элементарные функции применимы лишь достаточно далеко от корня. Что касается пригодности нашего выражения для численных расчетов, то после того, как функции Эйри табулированы, пользование ими несколько не сложнее пользования таблицами для элементарных функций.

Многие функции, встречающиеся в математической физике, либо сами удовлетворяют уравнению вида (5.01), либо приводятся к таким. Поэтому приведенные здесь для них приближенные выражения могут иметь обширные применения. Так, в квантовой механике подобные выражения были предложены Крамерсом и применялись им к обоснованию формул «полуцелого» квантования. В теории функций Бесселя изложенные здесь результаты могут служить для вывода асимптотических формул, пригодных для того случая, когда порядок и аргумент бесселевой функции велики и близки друг к другу. Подобные выражения были даны в нашей прежней работе [20].

6. Применение функций Эйри к приближенному представлению функций Ханкеля

В качестве второго типичного приложения функций Эйри мы приведем вывод асимптотического выражения для функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(\rho)$, где порядок ν и аргумент ρ велики и близки друг к другу, в том смысле, что отношение

$$\frac{\nu - \rho}{\sqrt[3]{\frac{\rho}{2}}} = t \quad (6.01)$$

остается ограниченным.

В этом выводе используется не дифференциальное уравнение для функций Эйри, а представление их в виде определенного интеграла (1.03).

Функция Ханкеля $H_\nu^{(1)}(\rho)$ допускает интегральное представление

$$H_\nu^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi i} \int_C e^{-\rho sh v + \nu v} dv, \quad (6.02)$$

где контур C идет по прямой $\text{Im}(v) = -\pi$ от $-\pi i - \infty$ до некоторой точки $v = v_0$ в третьей четверти плоскости v (например, $v_0 = \frac{-\pi}{\sqrt{3}} - i\pi$), затем по прямой, соединяющей точку $v = v_0$ с началом координат $v = 0$, и, наконец, по вещественной оси от 0 до ∞ . Выразим согласно (6.01) ν через t и введем переменную интегрирования

$$z = v \sqrt[3]{\frac{\rho}{2}}. \quad (6.03)$$

Подынтегральная функция в (6.02) может быть представлена в виде произведения двух множителей: множителя

$$\exp\left[(\nu - \rho)v - \frac{\rho v^3}{6}\right] = \exp\left(tz - \frac{z^3}{3}\right), \quad (6.04)$$

не содержащего явно ρ , и множителя

$$\exp \left[-\rho \operatorname{sh} v + \rho v + \rho \frac{v^3}{6} \right] = 1 - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} z^5 \dots, \quad (6.05)$$

который, при конечном z и большом ρ , может быть разложен по дробным отрицательным степеням ρ (кратным $-\frac{2}{3}$).

Подставляя эти выражения в интеграл (6.02), мы получаем

$$H_{\nu}^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} \int_{\Gamma} e^{tz - \frac{1}{3} z^3} \left[1 - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} z^5 + \dots \right] dz, \quad (6.06)$$

где Γ есть контур в плоскости z , соответствующий контуру C в плоскости v . На главном участке этот контур Γ совпадает с контуром Γ в формуле (1.03). Вычисляя интегралы при помощи (1.03), получаем

$$H_{\nu}^{(1)}(\rho) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} \left[w(t) - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} w^{(5)}(t) + \dots \right]. \quad (6.07)$$

В силу дифференциального уравнения (1.02) пятая производная равна

$$w^{(5)}(t) = t^2 w'(t) + 4t w(t). \quad (6.08)$$

Подставляя это выражение в (6.07), получаем искомое асимптотическое выражение для функции Ханкеля:

$$H_{\nu}^{(1)}(\rho) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} \left\{ w(t) - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} [t^2 w'(t) + 4t w(t)] + \dots \right\}. \quad (6.09)$$

Разделив здесь вещественную и мнимую части, мы приходим к асимптотическим выражениям для функций Бесселя и Неймана через табулированные нами функции Эйри

$$J_{\nu}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} \left\{ v(t) - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} [t^2 v'(t) + 4t v(t)] + \dots \right\}, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}
 Y_v(\rho) = & \\
 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} & \left\{ u(t) - \frac{1}{60} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} [t^2 u'(t) + 4tu(t)] + \dots \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{6.11}$$

Найденные выражения справедливы и при комплексных значениях t и могут служить, в частности, для приближенного нахождения корней функции Ханкеля, рассматриваемой как функция от v , что имеет значение в теории дифракции*.

7. Объяснение таблиц

Мы приводим ниже таблицы функций Эйри $u(t)$, $v(t)$ и их производных $u'(t)$, $v'(t)$. Первоначально таблицы вычислялись с большим числом знаков, но результаты округлены до четырех знаков. Для отрицательных значений t , где функции Эйри имеют осциллирующий характер, даны четыре знака после запятой. Для положительных значений t , где функции Эйри монотонны, даны четыре значащие цифры, если первая цифра есть 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и пять цифр, если первая цифра есть 1. Значения функций даны для значений аргумента t от $-9,00$ до $+9,00$ через $0,02$. Такой малый табличный интервал принят для облегчения интерполяции. В большинстве случаев достаточно линейной интерполяции; в исключительных случаях может понадобиться интерполяция со вторыми разностями. Так как вместе со значениями функций даны и их разности первого порядка, то интерполяция по нашим таблицам весьма проста.

Для положительных значений аргумента функции $u(t)$ и $u'(t)$ быстро возрастают, а функции $v(t)$ и $v'(t)$ быстро убывают. Поэтому в некоторых интервалах даны значения функций $u(t)$ и $u'(t)$, деленные на 10^3 и на 10^6 , и значения функций $v(t)$ и $v'(t)$, умноженные на 10^3 , 10^6 и 10^9 .

Для значений аргумента, меньших чем $-9,00$ или больших чем $+9,00$, функции Эйри и их производные легко вычисляются по асимптотическим выражениям, приведенным в параграфе 2; в этих выражениях достаточно брать два-три члена.

* Таблицы связанной с $v(t)$ функции $Z_{1/3}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} J_{1/3}(x) - \frac{1}{2} Y_{1/3}(x)$ по аргументу x даны в статье Фока и Колпинского [42].

Таблицы функций Эйри

t	u	Δu	u'	$\Delta u'$	v	Δv	v'	$\Delta v'$
-9,00	0,5760	- 31	-0,1017	-1034	-0,0392	-345	-1,7293	101
-8,98	0,5729	- 51	-0,2051	-1023	-0,0737	-343	-1,7192	163
-8,96	0,5678	- 72	-0,3074	-1010	-0,1080	-338	-1,7029	224
-8,94	0,5606	- 92	-0,4084	- 994	-0,1418	-333	-1,6805	283
-8,92	0,5514	-111	-0,5078	- 973	-0,1751	-328	-1,6522	341
-8,90	0,5403	-131	-0,6051	- 949	-0,2079	-319	-1,6181	398
-8,88	0,5272	-149	-0,7000	- 922	-0,2398	-311	-1,5783	454
-8,86	0,5123	-167	-0,7922	- 893	-0,2709	-302	-1,5329	506
-8,84	0,4956	-185	-0,8815	- 859	-0,3011	-291	-1,4823	558
-8,82	0,4771	-202	-0,9674	- 823	-0,3302	-279	-1,4265	606
-8,80	0,4569	-218	-1,0497	- 784	-0,3581	-267	-1,3659	653
-8,78	0,4351	-233	-1,1281	- 743	-0,3848	-253	-1,3006	698
-8,76	0,4118	-247	-1,2024	- 699	-0,4101	-239	-1,2308	739
-8,74	0,3871	-262	-1,2723	- 653	-0,4340	-224	-1,1569	777
-8,72	0,3609	-273	-1,3376	- 606	-0,4564	-208	-1,0792	814
-7,70	0,3336	-285	-1,3982	- 555	-0,4772	-191	-0,9978	846
-8,68	0,3051	-296	-1,4537	- 503	-0,4963	-174	-0,9132	876
-8,66	0,2755	-306	-1,5040	- 451	-0,5137	-156	-0,8256	902
-8,64	0,2449	-314	-1,5491	- 395	-0,5293	-138	-0,7354	926
-8,62	0,2135	-321	-1,5886	- 340	-0,5431	-119	-0,6428	945
-8,60	0,1814	-327	-1,6226	- 284	-0,5550	-100	-0,5483	963
-8,58	0,1487	-333	-1,6510	- 226	-0,5650	- 81	-0,4520	975
-8,56	0,1154	-336	-1,6736	- 169	-0,5731	- 61	-0,3545	986
-8,54	0,0818	-340	-1,6905	- 111	-0,5792	- 41	-0,2559	991
-8,52	0,0478	-341	-1,7016	- 52	-0,5833	- 21	-0,1568	995
-8,50	0,0137	-341	-1,7068	+ 5	-0,5854	- 2	-0,0573	995

t	u	Δu	u'	$\Delta u'$	v	Δv	v'	$\Delta v'$
-8,50	+0,0137	-341	-1,7068	+ 5	-0,5854	- 2	-0,0573	995
-8,48	-0,0204	-341	-1,7063	64	-0,5856	+ 19	+0,0422	990
-8,46	-0,0545	-339	-1,6999	121	-0,5837	38	0,1412	984
-8,44	-0,0884	-335	-1,6878	177	-0,5799	57	0,2396	973
-8,42	-0,1219	-332	-1,6701	233	-0,5742	77	0,3369	960
-8,40	-0,1551	-327	-1,6468	288	-0,5665	96	0,4329	942
-8,38	-0,1878	-320	-1,6180	341	-0,5569	115	0,5271	923
-8,36	-0,2198	-313	-1,5839	393	-0,5454	133	0,6194	900
-8,34	-0,2511	-305	-1,5446	444	-0,5321	151	0,7094	874
-8,32	-0,2816	-295	-1,5002	493	-0,5170	168	0,7968	846
-8,30	-0,3111	-285	-1,4509	539	-0,5002	184	0,8814	814
-8,28	-0,3396	-273	-1,3970	585	-0,4818	200	0,9628	781
-8,26	-0,3669	-262	-1,3385	627	-0,4618	216	1,0409	744
-8,24	-0,3931	-248	-1,2758	667	-0,4402	230	1,1153	706
-8,22	-0,4179	-235	-1,2091	706	-0,4172	244	1,1859	665
-8,20	-0,4414	-220	-1,1385	741	-0,3928	257	1,2524	623
-8,18	-0,4634	-206	-1,0644	775	-0,3671	269	1,3147	578
-8,16	-0,4840	-189	-0,9869	804	-0,3402	280	1,3725	532
-8,14	-0,5029	-173	-0,9065	832	-0,3122	290	1,4257	484
-8,12	-0,5202	-156	-0,8233	857	-0,2832	299	1,4741	435
-8,10	-0,5358	-139	-0,7376	878	-0,2533	307	1,5176	385
-8,08	-0,5497	-121	-0,6498	897	-0,2226	315	1,5561	334
-8,06	-0,5618	-103	-0,5601	914	-0,1911	321	1,5895	282
-8,04	-0,5721	- 84	-0,4687	925	-0,1590	326	1,6177	229
-8,02	-0,5805	- 66	-0,3762	936	-0,1264	330	1,6406	176
-8,00	-0,5871	- 47	-0,2826	942	-0,0934	333	1,6582	123

x	$\operatorname{Re} f$	$\operatorname{Im} f$	$ f $	$\operatorname{arc} f$
1,7	0,0289	0,0348	0,0452	50°15'
1,8	0,0200	0,0313	0,0372	57°24'
1,9	0,01312	0,0275	0,0305	64°32'
2,0	0,00788	0,0237	0,0250	71°37'
2,1	0,00403	0,0201	0,0205	78°40'
2,2	0,00126	0,01669	0,01674	85°41'
2,3	-0,00064	0,01367	0,01369	92°40'
2,4	-0,00186	0,01102	0,01118	99°36'
2,5	-0,00260	0,00875	0,00913	106°31'
2,6	-0,00296	0,00685	0,00746	113°24'
2,7	-0,00307	0,00526	0,00609	120°15'
2,8	-0,00300	0,00397	0,00497	127°05'
2,9	-0,00281	0,00292	0,00405	133°53'
3,0	-0,00256	0,00210	0,00331	140°40'
3,1	-0,00228	0,001453	0,00270	147°27'
3,2	-0,001981	0,000957	0,00220	154°12'
3,3	-0,001699	0,000587	0,001798	160°57'
3,4	-0,001433	0,000312	0,001467	167°42'
3,5	-0,001192	0,000117	0,001198	174°25'
3,6	-0,000977	-0,0000196	0,000977	181°09'
3,7	-0,000790	-0,0001092	0,000798	187°52'
3,8	-0,000630	-0,0001637	0,000651	194°34'
3,9	-0,000495	-0,0001928	0,000531	201°17'
4,0	-0,000383	-0,000204	0,000434	207°59'
4,1	-0,000291	-0,000201	0,000354	214°40'
4,2	-0,000217	-0,0001910	0,000289	221°22'
4,3	-0,0001577	-0,0001756	0,000236	228°04'
4,4	-0,0001112	-0,0001575	0,0001928	234°46'
4,5	-0,0000753	-0,0001385	0,0001576	241°28'

ЛИТЕРАТУРА

Работы, включенные в настоящую книгу

1. В. А. Фок. Новые методы в теории дифракции. «Вестник Ленинградского университета», 1947, № 4, стр. 5. V. A. Fock, New methods in diffraction theory. *Phil. Mag. Ser. 7*, 1948, v. 39, p. 149.
2. В. А. Фок. Распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника. «Журнал экспериментальной и теоретической физики» (ЖЭТФ), 1945, т. 15, № 12, стр. 693. V. A. Fock. The distribution of currents induced by a plane wave on the surface of a conductor, *Journ. of Phys. of the U. S. S. R.*, 1946, v. 10, N 2, p. 130.
3. В. А. Фок. Теория дифракции от параболоида вращения. В сб. «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения». Изд-во «Советское радио», 1957, стр. 5.
4. В. А. Фок и А. А. Федоров. Дифракция плоской электромагнитной волны на идеально-проводящем параболоиде вращения. «Журнал технической физики», 1958, т. 28, № 11, стр. 2548.
5. В. А. Фок. Поле плоской волны вблизи поверхности проводящего тела. «Известия АН СССР» сер. физическая, 1946, т. 10, № 2, стр. 171. V. A. Fock. The field of a plane wave near the surface of a conducting body. *Journ. of Phys. of the U. S. S. R.*, 1946, v. 10, N 5, p. 399.
6. В. А. Фок. Законы отражения Френеля и законы дифракции. «Успехи физических наук», 1948, т. 36, № 3, стр. 308.
7. В. А. Фок. Дифракция Френеля от выпуклых тел. «Успехи физических наук», 1950, т. 43, № 4, стр. 587.
8. В. А. Фок. Обобщение отражательных формул на случай отражения произвольной волны от поверхности произвольной формы. ЖЭТФ, 1950, т. 20, № 11, стр. 961.
9. В. А. Фок и Л. А. Вайнштейн. Поперечная диффузия коротких волн, огибающих выпуклый цилиндр. Труды Копенгагенского Симпозиума 1962 г. по электромагнитной теории и антеннам, стр. 11. Изд. Pergamon, Лондон, 1963 (по-английски); первоначальный русский вариант: «Раднотехника и электроника», 1963, т. 8, стр. 377. V. Fock and L. Wainstein. On the transverse diffusion of short waves diffracted by a convex cylinder. *Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas, Copenhagen, June 25—30, 1962*; Pergamon Press, London, 1963.
10. В. А. Фок. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. ЖЭТФ, 1945, т. 15, № 9, стр. 479. V. A. Fock. Diffraction of radio-waves around the earth's surface, *Journ. of Phys. of the U. S. S. R.*, 1945, v. 9, N 4, p. 255.
11. М. А. Леонтович и В. А. Фок. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения. ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 7, стр. 557; «Исследования по распространению радиоволн». Сб. второй. Изд. АН СССР, 1948, стр. 13. M. A. Leontovich and V. A. Fock. Solution of the problem of propagation of electromagnetic waves along the earth's surface by the method of parabolic equation, *Journ. of Phys. of the U. S. S. R.*, 1946, v. 10, N 1, p. 13.
12. В. А. Фок. Поле от вертикального и горизонтального диполя, приподнятого над поверхностью земли. ЖЭТФ, 1949, т. 19, № 10, стр. 916.

13. В. А. Фок. Распространение прямой волны вокруг Земли при учете дифракции и рефракции. «Известия АН СССР», сер. физическая, 1948, т. 12, № 2, стр. 81.
14. В. А. Фок. Теория распространения радиоволн в неоднородной атмосфере для приподнятого источника. «Известия АН СССР», сер. физическая, 1950, т. 14, № 1, стр. 70.
15. В. А. Фок. Приближенная формула для дальности горизонта при наличии сверхрефракции. «Радиотехника и электроника», 1956, т. 1, № 5, стр. 560.
16. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн и М. Г. Белкина. О распространении радиоволн вблизи горизонта при сверхрефракции. «Радиотехника и электроника», 1956, т. 1, № 5, стр. 576.
17. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн и М. Г. Белкина. Распространение радиоволн по призмному тропосферному волноводу. «Радиотехника и электроника», 1958, т. 3, № 12, стр. 1411.
18. Г. А. Гринберг и В. А. Фок. К теории береговой рефракции электромагнитных волн. «Исследования по распространению радиоволн». Сб. второй. Изд. АН СССР, 1948, стр. 69.
19. В. А. Фок. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Математический сборник, 1944, т. 14 (56), № 1—2, стр. 3.

Работы, не включенные в настоящую книгу

20. В. А. Фок. Новое асимптотическое выражение для бесселевых функций. Доклады АН СССР, 1934, т. 1, № 3, стр. 97.
21. М. А. Леонтович. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли. «Известия АН СССР», сер. физическая, 1944, т. 8, № 1, стр. 16.
22. В. А. Фок. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. Изд. АН СССР, 1946, стр. 1—80.
23. H. Booker and W. Walkinshaw. Meteorological Factors in Radiowave Propagation, 1946, p. 80.
24. D. R. Hartree, J. G. Michel and P. Nicolson. Meteorological Factors in Radiowave Propagation, 1946, p. 127.
25. H. Bremner. Terrestrial radio-waves, N. Y. 1949.
26. J. V. Keller. Diffraction by a convex cylinder. IRE Trans. 1956, AP-4, N 3, p. 312.
27. П. А. Азрилянт и М. Г. Белкина. Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности. Изд-во «Советское радио», 1957.
28. S. A. Cullen. Surface currents induced by short wave-length radiation, Phys. Rev., 1958, v. 109, p. 1863.
29. Г. Д. Малюжинец. Развитие представлений о явлениях дифракции. «Успехи физических наук», 1959, т. 69, № 2, стр. 321.
30. Л. А. Вайнштейн и А. А. Федоров. Рассеяние плоских и цилиндрических волн на эллиптическом цилиндре и концепция дифракционных лучей. «Радиотехника и электроника», 1961, т. 6, № 1, стр. 31.
31. Г. Д. Малюжинец и Л. А. Вайнштейн. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса, ч. 1. Параболическое уравнение в лучевых координатах. «Радиотехника и электроника», 1961, т. 6, № 8, стр. 1247.
32. Л. А. Вайнштейн и Г. Д. Малюжинец. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса, ч. 2. Асимптотические законы дифракции в полярных координатах. «Радиотехника и электроника», 1961, т. 6, № 9, стр. 1489.

33. G. N. Watson. Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, пер. В. С. Бермана. Изд-во иностранной литературы, 1949.
34. V. Fock. Über eine Klasse von Integralgleichungen, *Mathematische Zeitschrift*, 1924, Bd. 21, S. 161; также В. А. Фок. О некоторых интегральных уравнениях Вольтерра. Математический сборник, 1925, т. 32, стр. 519.
35. E. C. Titchmarsh. Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford, 1937. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Пер. Д. А. Райкова. Гостехиздат, 1948.
36. E. A. Milne. Radiative equilibrium in the outer layers of a star, *Monthly Notices of the R. A. S.*, 1931, v. 81, p. 109.
37. E. Hopf. Mathematisches zur Strahlungsgleichgewichtstheorie der Fixsteratmosphären, *Mathematische Zeitschrift*, 1931, Bd. 33, S. 109.
38. E. Hopf. Mathematical problems of radiative equilibrium, *Cambridge Tracts*, 1933, N 31.
39. В. А. Амбарцумян. Рассеяние и поглощение света в планетных атмосферах. Ученые записки ЛГУ, 1941, № 82, стр. 64.
40. В. А. Фок. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Доклады АН СССР, 1942, т. 37, стр. 147.
41. Sir George B. Airy. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic, *Trans. Cambr. Phil. Soc* 1838. VI, p. 379.
42. В. А. Фок и В. А. Колпникский. Диффракция воли от изогнутой решетки. ЖЭТФ. 1940, т. 10, № 2, стр. 211.
43. G. Doetsch. Theorie und Anwendung der Laplace — Transformation, Berlin, 1937.
44. В. А. Фок. Принципиальное значение приближенных методов в теоретической физике. «Успехи физических наук», 1936, т. 16, № 8, стр. 1070.

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ФОК
ПРОБЛЕМЫ ДИФФРАКЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Редактор К. И. Кучумова
Художественный редактор В. Т. Сндоренко
Технический редактор Г. З. Шалимова
Корректоры: Е. П. Озерецкая, М. Ф. Белякова

Сдано в набор 27.III.1969 г.
Подписано в печать 14.V.1970 г. Т-09006
Формат 60×90/16 Бумага типографская № 1
Объем 32,5 усл. п. л. Уч.-изд. л. 31,8
Тираж 4600 экз. Зак. 135
Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, п/я 693.
Цена 2 р. 47 к.

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10