AUTOMORPHIC FUNCTIONS

by

LESTER R. FORD, Ph. D.

Assistant Professor of Mathematics in the Rice Institute

MCGRAW-HILL BOOK COMPANY

1929

Р. ФОРД

АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Перевод с английского
М. М. Гринблюма и В. С. Рабинович
под редакцией М. М. Гринблюма

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

Т 21-5-4
ТКК № 107

Теория автоморфных функций, созданная в конце XIX в. и в начале XX в. главным образом трудами Пуанкаре и Клейна, представляет в настоящее время обширную отрасль математики.

Из иностранной литературы, посвященной этому предмету, книга Форда содержит одно из наиболее свежих и в то же время наиболее доступных изложений основ теории. Автор широко использует геометрические идеи и факты. Весьма удачным следует признать систематическое использование им понятия „изометрической окружности", позволившее упростить изложение многих пунктов теории.

Значительная часть книги уделена ставшим классическими исследованиям Кёбе по теории конформных отображений и по теории униформизации.

Книга рассчитана на студентов старших курсов университетов, аспирантов и научных работников математиков и механиков.

Редакция *Л. И. Волковыский*. Оформление *Э. М. Бейлиной*. Корректура *М. К. Саталкина*. Сдано в производство 31/VII 1935 г. Подписано в печать 4/XII 1935 г. Листов $21^1/_4$. Тираж 3500. Формат $62\times94^1/_{16}$. Печатн. знаков в листе 42 336. Заказ № 3100. Гл. ред. общетехн. литер. № 98. Уполномоч. Главлита № В 29607.

5-я типография Трансжелдориздата, Москва, Каланчевский тупик, д. 3/5.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

...Автор стремился дать в первых главах основы теории со всей возможной строгостью и простотой. Введение и использование изометрической окружности (название было предложено проф. Уайттекером) позволило изложить теорию линейных групп с простотой, которой она до сих пор не обладала. В сущности изометрические окружности уже применялись при построении фундаментальных областей (Хутчинсоном в 1907 г. и независимо от него Гумбертом в 1919 г.). Но интересные свойства изометрической окружности и польза от ее применения при развитии теории, повидимому, ускользнули от внимания математиков. Значительная часть материала, касающегося изометрической окружности, представляет собой изыскания автора, до этого нигде не печатавшиеся.

В последних главах труд автора сводился главным образом к выбору материала и метода изложения. Здесь также использование изометрической окружности часто приводило к упрощению доказательств.

Материал этих глав определялся, быть может, личными вкусами автора.

Классическим эллиптическим модулярным функциям здесь отведено место как лучшему примеру неэлементарных автоморфных функций. Теория конформных отображений изложена с точки зрения современной теории функций, и довольно подробно, с целью подготовки к следующим за нею теориям униформизации.

Главу о конформном отображении можно читать независимо от остальных частей книги.

В последней главе рассматривается связь между автоморфными функциями и диференциальными уравнениями.

Это исследование, по необходимости краткое, приводит к функциям треугольника.

Связь между группами и неевклидовой геометрией не рассматривается, поскольку с точки зрения того пути, по которому велись исследования автора, эта связь не имеет существенного значения.

Глава об абелевых интегралах, изучаемых в свете теории униформизации, представляла бы интерес, однако этот вопрос еще не разработан в достаточной мере...

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV
Автоморфные функции

Глава V
Тэта-ряд Пуанкаре

Глава VI
Элементарные группы

Глава VII
Эллиптические модулярные функции

Глава VIII
Конформное отображение

Глава I

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Линейное преобразование. Пусть z и z' два комплексных числа, связанных некоторой функциональной зависимостью: $z' = f(z)$. Условимся значения z изображать обычным способом на диаграмме Арганда, или плоскости z, и значения z' на другой диаграмме Арганда, или плоскости z'. Каждой точке z первой плоскости, в которой определена функция, соответствует в силу функциональной зависимости одно или несколько значений z'. Точкам, кривым и областям на плоскости z обычно соответствуют точки, кривые и области на плоскости z'. Мы будем говорить, что фигуры на плоскости z преобразуются через посредство функциональной зависимости в соответствующие фигуры на плоскости z'. Удобней изображать z и z' на одной и той же диаграмме Арганда, чем на двух различных. Таким образом фигуры на плоскости z переходят через посредство функциональной зависимости в другие фигуры на той же плоскости z. В дальнейшем всегда, если не оговорено противоположное, используется одна плоскость.

Вся теория автоморфных функций связана со специальным типом преобразования, определяемым следующим образом:

Определение. *Преобразование*

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{1}$$

где a, b, c, d — постоянные и $ad - bc \neq 0$, называется линейным преобразованием [1]).

Настоящая глава посвящена изучению этого основного преобразования.

Величина $ad - bc$ называется *детерминантом* преобразования. Удобно всегда предполагать

$$ad - bc = 1. \tag{2}$$

В общем случае детерминант может быть сделан равным единице путем разделения числителя и знаменателя дроби

---

[1]) Оно более точно называется „дробно-линейным преобразованием", но мы будем пользоваться более коротким названием. Это преобразование называется также „гомографическим преобразованием".

Если $ad - bc = 0$, то уравнение приводится к $z' = \text{const.}$; но этот случай конечно, не представляет интереса.

на $\pm\sqrt{ad-bc}$. Правая часть (1) есть аналитическая функция z, и поэтому линейное преобразование обладает свойством конформности. Это значит, что при преобразовании фигуры углы сохраняют как величину, так и направление.

Заметим, что в уравнении (1) каждому значению z соответствует одно и только одно значение z'. Это утверждение будет справедливо во всех случаях, если мы введем в рассмотрение и бесконечно удаленную точку. Таким образом, если $c \neq 0$, то $z = -\frac{d}{c}$ преобразуется в $z' = \infty$ и $z = \infty$ в $z' = \frac{a}{c}$; если $c = 0$, то $z = \infty$ преобразуется в $z' = \infty$.

Разрешим уравнение (1) относительно z:

$$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}. \tag{3}$$

Это преобразование, которое, будучи выполнено вслед за преобразованием (1), возвращает каждую фигуру в ее первоначальное положение, называется *обратным* преобразованию (1).

Заметим, что (3) есть линейное преобразование; отсюда:

Теорема 1. *Преобразование, обратное линейному, есть линейное преобразование.*

Заметим, что (3) можно получить из (1), переменив местами a и d и изменив их знаки на обратные. Таким образом детерминант (3) будет тот же, что и (1).

Из (3) видно, что каждому значению z' соответствует одно и только одно значение z. Таким образом получаем следующий результат:

Теорема 2. *Линейное преобразование переводит плоскость одно-однозначно в самое себя.*

Линейное преобразование есть самое общее аналитическое преобразование, обладающее свойством, указанным в теореме 2.

Докажем сначала следующую теорему:

Теорема 3. *Если вся плоскость, за исключением (может быть) конечного числа точек, отображается одно-однозначно и конформно на плоскую область, то отображающая функция линейна.*

Пусть $z' = f(z)$ есть отображающая функция и пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — исключенные точки. Вследствие ковформности отображения $f(z)$ аналитична всюду, кроме изолированных точек $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Точка q_i не может быть существенно особой, иначе существовали бы значения, принимаемые функцией бесконечно много раз в окрестности q_i, что противоречило бы условию. Поэтому $f(z)$ или остается конечной в окрестности q_i и, следовательно, аналитична в q_i, если ее там соответствующим образом определить, или имеет полюс. Таким образом $f(z)$ есть рациональная функция z.

Рациональная функция, не являющаяся константой, принимает каждое значение m раз, где m есть число ее полюсов. Так как $f(z)$ не принимает ни одного значения дважды, то она имеет один

полюс первого порядка. Если полюс q_k не есть бесконечно удаленная точка, то мы можем написать

$$z' = \frac{A_1}{z - q_k} + A_0 = \frac{A_0 z + A_1 - A_0 q_k}{z - q_k}, \qquad A_1 \neq 0. \tag{4}$$

Если полюс есть бесконечно удаленная точка, то

$$z' = A_1 z + A_0, \quad A_1 \neq 0. \tag{4'}$$

В обоих случаях функция линейна.

Следствие 1. *Наиболее общее одно-однозначное и конформное (там, где понятие конформности имеет смысл) преобразование плоскости в самое себя есть линейное преобразование.*

Мы не определили конформности для случая, когда одна из точек бесконечно удаленная. Всюду, за исключением $z = \infty$ и точки плоскости z, которая переходит в $z' = \infty$, преобразование должно быть конформным. Теорема 3 приложима.

Следствие 2. *Наиболее общее одно-однозначное и конформное преобразование конечной плоскости (без бесконечно удаленной точки) в самое себя есть линейное преобразование:*

$$z' = A_1 z + A_0.$$

Теперь мы рассмотрим результаты последовательного применения линейных преобразований. Пусть после применения к плоскости z преобразования (1) сделано второе линейное преобразование:

$$z'' = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}. \tag{5}$$

Представляя z'' как функцию z, получаем:

$$z'' = \frac{\alpha \dfrac{az + b}{cz + d} + \beta}{\gamma \dfrac{az + b}{cz + d} + \delta} = \frac{(\alpha a + \beta c) z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c) z + \gamma b + \delta d}. \tag{6}$$

Два последовательно выполненных преобразования (1) и (5) равносильны одному преобразованию (6). Но (6) есть линейное преобразование. Пользуясь полученным для него выражением, заключаем, что его детерминант равен

$$(ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Важно заметить, что если каждый из детерминантов (1) и (5) равен единице, то детерминант преобразования (6) тоже равен единице.

Выполняя линейное преобразование над z'', заключаем, сочетая это новое преобразование с (6), что три последовательных линейных преобразования равносильны одному линейному преобразованию и т. д.

Таким образом мы приходим к следующему результату:

Теорема 4. *Конечное число последовательно выполненных линейных преобразований равносильно одному линейному преобразованию.*

Следующая теорема выражает хорошо известное свойство линейного преобразования.

Теорема 5. *Линейное преобразование сохраняет инвариантным ангармоническое отношение четырех точек.*

Пусть даны четыре различных точки: z_1, z_2, z_3, z_4 и пусть z_1', z_2', z_3', z_4' — четыре точки, в которые переходят первые посредством преобразования (1). Допустим, что все точки расположены в конечной части плоскости.

Имеем:

$$z_1' - z_2' = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} =$$

$$= \frac{z_1 - z_2}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}; \tag{7}$$

поэтому

$$\frac{(z_1' - z_2')(z_3' - z_4')}{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}. \tag{8}$$

Если одна из точек лежит в бесконечности, то мы получим необходимое изменение соотношения (8), пользуясь предельным переходом.

Так, если $z_2 = \infty$ и $z_1' = \infty$, то (8) принимает вид:

$$\frac{z_3' - z_4'}{z_2' - z_4'} = -\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_3}.$$

§ 2. Символическое обозначение. Для того чтобы достигнуть сокращения письма и удобства в комбинировании преобразований, мы будем пользоваться для обозначения правой части преобразования (1) знаком функциональной операции, употребляя в качестве знаков функциональных операций большие буквы; таким образом

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

так что (1) принимает вид:

$$z' = T(z).$$

Мы будем говорить в дальнейшем о преобразовании T, не упоминая, если только в связи с этим не возникнут недоразумения, об аргументе z. Если два преобразования одинаковы: $T_1(z) \equiv T(z)$, то мы будем это выражать посредством равенства: $T_1 = T$.

Обозначим буквой S преобразование (5), тогда

$$z'' = S(z').$$

Отсюда для (6) получим:

$$z'' = S[T(z)] = ST(z).$$

Таким образом результат двух последовательно выполненных преобразований записывается как произведение, причем опускаются внутренние скобки в обозначении функции. Важно заметить, что ST есть одно линейное преобразование, дающее тот же результат, как если бы сначала было выполнено преобразование T, а за ним преобразование S; порядок выполнения преобразований: справа налево.

Вообще говоря, TS и ST различны.

Непосредственно из значения символов следует, что для умножения имеет место ассоциативный закон:

$$U(ST) = (US)T,$$

и поэтому не может вызвать недоразумений запись UST. В произведении любая группа множителей может быть заменена одним линейным преобразованием. Преобразования, равносильные двукратно, трехкратно и т. д. выполненному преобразованию T, мы будем обозначать через T^2, T^3 и т. д. Таким образом T^2 означает $T[T(z)]$. Преобразование, обратное T, обозначим через T^{-1}. Таким образом из (3):

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

Результат n-кратного выполнения преобразования T^{-1} условимся обозначать через T^{-n}.

Обозначая тождественное преобразование $z' \equiv z$ через 1 так, что $1(z)$ означает z, мы убеждаемся, что положительные и отрицательные целые степени T вместе с 1 сочетаются в соответствии с законом о сложении показателей при умножении степеней.

Теперь мы можем написать преобразование, обратное результату нескольких последовательно выполненных преобразований. Для того чтобы найти преобразование, обратное к ST, применим к плоскости, преобразованной с помощью ST, сначала преобразование S^{-1}, а вслед за ним T^{-1}; мы получим:

$$(T^{-1}S^{-1})(ST) = T^{-1}(S^{-1}S)T = T^{-1}T = 1.$$

Таким образом $T^{-1}S^{-1}$ есть преобразование, которое, будучи применено после ST, возвращает каждую точку плоскости в ее исходное положение; следовательно, $T^{-1}S^{-1}$ есть преобразование, обратное по отношению к ST. Подобно этому для любого числа преобразований получаем:

$$(ST\ldots UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1}\ldots T^{-1}S^{-1}.$$

Легко видеть также, как нужно пользоваться множителями при делении. Пусть

$$UST = V,$$

тогда

$$(UST)T^{-1} = VT^{-1} \quad \text{или} \quad US = VT^{-1};$$

$$U^{-1}(UST) = U^{-1}V \quad \text{или} \quad ST = U^{-1}V.$$

Таким образом в уравнении, связывающем два произведения, первый (последний) множитель левой части может быть перенесен в начало (в конец) правой части с изменением на обратный знаком показателя. Таким образом символическое деление допустимо, если точно соблюдается порядок выполнения операций. Например, W преобразование, обратное $ST \ldots UV$, есть такое преобразование, что

$$WST \ldots UV = 1.$$

Производя деление справа, получим уже известный нам результат.

§ 3. Неподвижные точки преобразования. Неподвижные точки преобразования (1) можно найти, полагая в (1) $z' = z$ и решая уравнение:

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \text{ или } cz^2 + (d - a)\, z - b = 0. \tag{9}$$

Предположим сначала, что $c \neq 0$. Тогда уравнение (9) имеет два корня:

$$\xi_1, \xi_2 = \frac{a - d \pm \sqrt{M}}{2c}, \tag{10}$$

где

$$M = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4. \tag{11}$$

Второе выражение для M получаем, пользуясь равенством: $ad - bc = 1$.

Из (1) следует, что ∞ не переходит сама в себя, так что в этом случае имеется не более двух неподвижных точек. Если $M = 0$, т. е. если $a + d = \pm 2$, то существует только одна неподвижная точка:

$$\xi = \frac{a - d}{2c}. \tag{12}$$

Если $c = 0$, то обязательно $a \neq 0$, $d \neq 0$, так как иначе был бы равен нулю детерминант. Мы видим из (1), что в этом случае ∞ есть неподвижная точка. Если $a \neq d$, то, решая (9), определяем неподвижную точку, лежащую на конечном расстоянии. Неподвижные точки будут:

$$\xi_1 = \frac{b}{d - a}; \quad \xi_2 = \infty. \tag{13}$$

Если $c = 0$ и $d = a$, то (1) имеет вид:

$$z' = z + b$$

и представляет собой перенос с единственной неподвижной точкой $\xi = \infty$. Итак, в случае, когда $c = 0$, попрежнему существуют две неподвижных точки, если $M \neq 0$, и одна неподвижная точка, если $M = 0$.

Преобразование (1) не может иметь более двух неподвижных точек при условии, что (9) не есть тождественный нуль; если (9)

есть тождественный нуль, то $c=0$, $d=a$ и $b=0$. Уравнение (1) в этом случае имеет вид:

$$z'=z.$$

Следовательно:

Теорема 6. *Единственное линейное преобразование, имеющее более двух неподвижных точек, есть тождественное преобразование* $z'=z$.

Пользуясь этим фактом, можно доказать следующее важное предложение:

Теорема 7. *Существует одно и только одно линейное преобразование, переводящее три различных точки* z_1, z_2, z_3 *в три различных точки* z_1', z_2', z_3'.

Во-первых, докажем, что такое преобразование единственно. Предположим, что существуют два различных преобразования T и S, переводящих z_1, z_2, z_3 в z_1', z_2', z_3'. Рассмотрим преобразование $T^{-1}S$. Так как $S(z_1)=z_1'$ и $T^{-1}(z_1')=z$, то

$$T^{-1}S(z_1)=T^{-1}(z_1')=z_1.$$

Отсюда z_1 и точно так же z_2 и z_3 являются неподвижными точками преобразования $T^{-1}S$. Из теоремы (6) вытекает, что

$$T^{-1}S=1.$$

Выполняя преобразование T над обеими частями этого равенства, получим:

$$S=T.$$

Таким образом существует самое большее одно преобразование, удовлетворяющее условию теоремы. Мы докажем, что такое преобразование всегда существует, построив его.

Предположим, что все шесть величин конечны, и рассмотрим преобразование, определенное уравнением:

$$\frac{(z'-z_1')(z_2'-z_3')}{(z'-z_2')(z_1'-z_3')}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_2)(z_1-z_3)}. \tag{14}$$

Мы получим преобразование вида (1), выразив z' через z. Оно переводит z_1, z_2, z_3 в z_1', z_2', z_3', так как обе части (14) обращаются в нуль, когда $z=z_1$ и $z'=z_1'$; они обе обращаются в бесконечность, когда $z=z_2$ и $z'=z_2'$, и они обе равны единице, когда $z=z_3$ и $z'=z_3'$.

Если одна из заданных точек есть бесконечно удаленная, нам достаточно заменить ту часть соотношения (14), в которую входит бесконечность, предельным значением этой части, получающимся, если считать нашу точку подвижной и уходящей в бесконечность. Если $z_1=\infty$ или $z_2=\infty$, или $z_3=\infty$, то мы заменим правую часть (14) соответственно: $-\frac{z_2-z_3}{z-z_2}$, $-\frac{z-z_1}{z_1-z_3}$, $\frac{z-z_1}{z-z_2}$; аналогичные изменения обязательны в левой части, если одна из величин z_1', z_2', z_3' есть бесконечность.

Итак, всегда получаем одно преобразование, обладающее требуемым свойством, и теорема доказана.

Уравнением (14) удобно пользоваться для построения преобразования, переводящего три заданных точки в другие три заданных точки. Теоремой (7) мы будем часто пользоваться в нашем последующем изложении; для доказательства тождественности двух преобразований достаточно доказать, что они одинаково преобразуют три точки.

§ 4. Линейное преобразование и окружность. Так как мы оперируем комплексной величиной z, то представляется удобным выражать уравнения кривых через z. Если x действительная часть z и iy его мнимая часть, то, обозначив через $\bar{z}$ комплексное число, сопряженное z, получим:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \tag{15}$$

отсюда

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z), \quad z\bar{z} = x^2 + y^2. \tag{16}$$

С помощью первых двух уравнений (16) можно легко написать уравнение любой кривой, пользуясь непосредственно z и $\bar{z}$.

Напишем общее уравнение окружности и прямой линии. Уравнение

$$A(x^2 + y^2) + b_1 x + b_2 y + C = 0,$$

в котором коэфициенты суть действительные числа, есть общее уравнение окружности в случае $A \neq 0$ (радиус которой может быть мнимым или равным нулю) и есть уравнение прямой в случае $A = 0$, если только b_1 и b_2 не равны одновременно нулю.

Пользуясь (16), получаем:

$$Az\bar{z} + \frac{1}{2}(b_1 - ib_2)z + \frac{1}{2}(b_1 + ib_2)\bar{z} + C = 0.$$

Полагая

$$B = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2),$$

получаем:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \tag{17}$$

где A и C — действительные числа.

Если $A \neq 0$, то уравнение (17) есть общее уравнение окружности; в случае, если $A = 0$, но $B \neq 0$, — уравнение прямой.

Нетрудно определить центр и радиус окружности. Представляя (17) в виде

$$\left(z + \frac{\bar{B}}{A}\right)\left(\bar{z} + \frac{B}{A}\right) = \frac{B\bar{B} - AC}{A^2},$$

мы замечаем, что здесь левая часть равна квадрату расстояния от z до $-\frac{\overline{B}}{A}$. Следовательно, (17) есть уравнение окружности с центром в $-\frac{\overline{B}}{A}$ и радиусом, равным $\sqrt{\frac{B\overline{B}-AC}{A^2}}$.

Так как нас интересуют только действительные круги, то мы потребуем, чтобы $B\overline{B} > AC$.

Теперь посмотрим, каков будет результат применения к окружности или прямой (17) линейного преобразования (1). Подставляя в (17)

$$z = \frac{-dz'+b}{cz'-a}, \quad \overline{z} = \frac{-\overline{d}\,\overline{z'}+\overline{b}}{\overline{c}\,\overline{z'}-\overline{a}}$$

[из (3)], мы получим:

$$A\frac{(-dz'+b)(-\overline{d}\,\overline{z'}+\overline{b})}{(cz'-a)(\overline{c}\,\overline{z'}-\overline{a})}+B\frac{-dz'+b}{cz'-a}+\overline{B}\frac{-\overline{d}\,\overline{z'}+\overline{b}}{\overline{c}\,\overline{z'}-\overline{a}}+C=0. \quad (18)$$

Избавившись от знаменателей и приведя подобные члены, получим:

$$[Ad\overline{d}-B\overline{c}d-\overline{B}c\overline{d}+Cc\overline{c}]\,z'\overline{z'}+[-Abd+B\overline{a}d+\overline{B}bc-C\overline{a}c]\,z'+$$

$$+[-Ab\overline{d}+\overline{B}b\overline{c}+\overline{B}a\overline{d}-Ca\overline{c}]\,\overline{z'}+Ab\overline{b}-B\overline{a}b-\overline{B}a\overline{b}+Ca\overline{a}=0. \quad (19)$$

В этом уравнении коэфициент при $z'\overline{z'}$ действителен; в самом деле, $d\overline{d}$ и $c\overline{c}$ действительны как произведения комплексного числа на его сопряженное; $Bc\overline{d}+\overline{B}c\overline{d}$ также действительное число как сумма комплексного числа и сопряженного с ним. Аналогичным образом убеждаемся, что свободный член тоже действителен. Кроме этого коэфициент при $\overline{z'}$ сопряжен с коэфициентом при z'. Следовательно, (19) имеет вид (17). Получаем следующий результат:

Теорема 8. *Линейное преобразование переводит окружность и прямую линию в окружность или прямую линию.*

Часто бывает удобно рассматривать прямую как окружность бесконечного радиуса; пользуясь этим, мы можем сказать, что при линейном преобразовании окружность переходит в окружность.

Нетрудно сообразить, в каком случае в результате преобразования получится прямая линия. Прямая линия характеризуется тем, что она проходит через бесконечно удаленную точку. Если точка, переходящая при преобразовании в бесконечность, лежит на исходной окружности или прямой линии, то преобразование приводит к прямой; в противном случае преобразование приводит

к окружности. Это легко показать аналитически. Обращение в нуль коэфициента при $z\bar{z}$, а именно (деля на $c\bar{c}$):

$$A\left(-\frac{d}{c}\right)\left(-\frac{\bar{d}}{\bar{c}}\right)+B\left(-\frac{d}{c}\right)+\bar{B}\left(-\frac{\bar{d}}{\bar{c}}\right)+C=0,$$

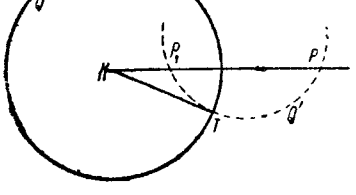
означает, что $-\frac{d}{c}$ лежит на исходной окружности или прямой.

Поскольку три точки определяют окружность, то мы можем построить преобразование, переводящее три различных точки одной окружности в три различных точки другой.

Выбрав три точки, мы располагаем бесконечным множеством путей (∞^3) для выбора других трех точек, в которые первые три должны быть преобразованы, причем каждый выбор определяет одно преобразование. Отсюда

Теорема 9. *Существует бесконечное множество линейных преобразований, переводящих одну из двух заданных окружностей в другую.*

В частности, обе окружности могут совпадать, и поэтому существует ∞^3 линейных преобразований, переводящих окружность в самое себя.



Черт. 1.

§ 5. Инверсия относительно окружности. Как мы сейчас покажем, существует тесная связь между линейным преобразованием комплексного переменного и геометрическим преобразованием, известным под названием „инверсии относительно окружности".

Рассмотрим окружность Q с центром в K и с радиусом r.

Пусть P есть некоторая точка плоскости; построим полупрямую, начинающуюся в K и проходящую через P. Пусть P_1 есть такая точка полупрямой KP, для которой $KP_1 \cdot KP = r^2$; точка P_1 называется „сопряженной с P относительно окружности Q". Свойство сопряженности взаимно: точка P сопряжена с P_1 относительно Q. Мы будем говорить, что P и P_1 — точки, сопряженные относительно окружности Q.

Сопряженные точки обладают тем свойством, что любая окружность, проходящая через точки P и P_1, сопряженные относительно окружности Q, ортогональна Q.

В самом деле, пусть Q' некоторая окружность, проходящая через P и P_1, и KT касательная к Q', проведенная из точки K; T — точка касания.

Мы получаем:

$$\overline{KT}^2 = KP_1 \cdot KP = r^2,$$

т. е. T лежит на Q. Так как KT есть радиус окружности Q, то, следовательно, окружности Q и Q' ортогональны.

Теперь дадим для нашего преобразования аналитическое выражение. Пусть точкам P, P_1 и K соответствуют на диаграмме

Арганда z, z_1 и k (точки комплексной плоскости). Уравнение инверсии напишется так:

$$|(z_1-k)(z-k)|=r^2, \quad \arg(z_1-k)=\arg(z-k).$$

Первое уравнение выражает условие: $KP_1 \cdot KP = r^2$; второе выражает тот факт, что точки K, P и P_1 лежат на одной прямой. Так как $\arg(z-k)=-\arg(\bar{z}-\bar{k})$, то оба уравнения удовлетворяются тогда и только тогда, если

$$(z_1-k)(\bar{z}-\bar{k})=r^2. \tag{20}$$

Это и есть уравнение инверсии, написанное в терминах комплексного переменного.

Пусть дана окружность Q:

$$Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0. \tag{17}$$

Подставляя в уравнение (20) ранее найденные выражения для центра и радиуса этой окружности, получим:

$$\left(z_1+\frac{\bar{B}}{A}\right)\left(\bar{z}+\frac{B}{A}\right)=\frac{B\bar{B}-AC}{A^2},$$

откуда после упрощения:

$$Az_1\bar{z}+Bz_1+\bar{B}\bar{z}+C=0. \tag{21}$$

Таким образом соотношение между z и сопряженным с ним z_1 можно получить из уравнения для Q, заменяя там z через z_1 и оставляя на месте $\bar{z}$.

Мы получим наше преобразование в явном виде, решая (21) относительно z_1:

$$z_1=\frac{-\bar{B}\bar{z}-C}{A\bar{z}+B}. \tag{22}$$

Уравнениями (21) и (22) можно пользоваться как уравнениями инверсии и в том случае, когда $A=0$, т. е. когда (17) — прямая линия. Когда A стремится к нулю, то, как нетрудно показать геометрически, P_1 стремится к такому предельному положению, при котором Q было бы перпендикуляром, делящим пополам отрезок PP_1. Инверсия в этом случае становится зеркальным отражением относительно прямой Q. Покажем это аналитически. Пусть z_2 есть точка на Q; $|z_2-z|$ есть расстояние от z_2 до z.

Пользуясь уравнением преобразования и уравнением для Q (при $A=0$), которому удовлетворяет z_2, можно представить расстояние между z_2 и z_1 следующим образом:

$$|z_2-z_1|=\left|\frac{-\bar{B}\bar{z}_2-C}{B}+\frac{\bar{B}\bar{z}+C}{B}\right|=\left|\frac{\bar{B}}{B}(\bar{z}-\bar{z}_2)\right|=|z_2-z|.$$

Таким образом все точки прямой Q равно удалены от точек P и P_1.

Теперь мы докажем следующее предложение:

Теорема 10. *Линейное преобразование переводит две точки, сопряженные по отношению к данной окружности, в две точки, сопряженные по отношению к преобразованной окружности.*

Пусть z и z_1 сопряжены по отношению к окружности (17), тогда они удовлетворяют (21). Выполним преобразование (1), и пусть при этом z и z_1 перейдут в z' и z_1'. Так как

$$z_1 = \frac{-dz_1' + b}{cz_1' - a}; \qquad \bar{z} = \frac{-\bar{d}\,\bar{z}' + \bar{b}}{\bar{c}\,\bar{z}' - \bar{a}},$$

то, подставляя в (21), получим:

$$A\frac{(-dz_1' + b)(-\bar{d}\,\bar{z}' + \bar{b})}{(cz_1' - a)(\bar{c}\,\bar{z}' - \bar{a})} + B\frac{-dz_1' + b}{cz_1' - a} + \bar{B}\frac{-\bar{d}\,\bar{z}' + \bar{b}}{\bar{c}\,\bar{z}' - \bar{a}} + C = 0.$$

К этому же уравнению можно притти, заменяя в (18) z' на z_1'. Следовательно, упрощая его, мы получим (19), в котором z' заменено на z_1', а $\bar{z}'$ оставлено без изменения. Но это и есть условие сопряженности точек z' и z_1' относительно преобразованной окружности (19).

Возвратимся теперь к изучению инверсий. Из (22) следует, что каждому z соответствует одно и только одно $\bar{z}_1$. Точно так же каждому z_1 соответствует одно и только одно z; следовательно, преобразование одно-однозначно. Геометрически очевидно, что неподвижными точками инверсии являются точки самой окружности Q. Аналитически в этом можно убедиться, подставляя в (21) $z_1 = z$.

Инверсия (22) может быть рассматриваема как совокупность двух последовательно выполненных преобразований:

$$z_2 = \bar{z}, \quad z_1 = \frac{-\bar{B}z_2 - C}{Az_2 + B}.$$

Первое есть зеркальное отражение относительно действительной оси, второе есть линейное преобразование. Первое сохраняет величину углов, но изменяет их направление; второе оставляет углы неизменными. Следовательно, инверсия есть конформное отображение второго рода. Это следует также из того факта, что правая часть (22) есть аналитическая функция $\bar{z}$.

Зеркальное отражение переводит окружность в окружность. Линейное преобразование также. Кроме того, зеркальное отражение переводит окружность и две сопряженных относительно нее точки в окружность и две сопряженных относительно нее точки. То же самое согласно теореме 10 имеет место и при линейном преобразовании.

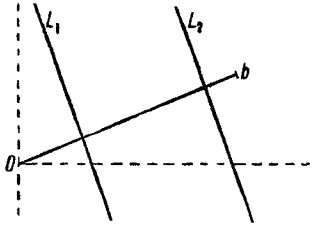
Полученные результаты можно выразить в виде следующей теоремы.

Теорема 11. *Инверсия относительно окружности есть одно-однозначное конформное отображение второго рода, которое переводит любую окружность в окружность и две точки, сопряженные*

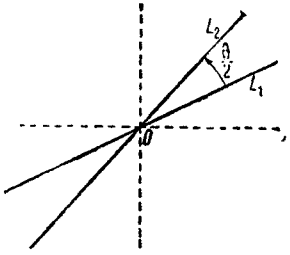
относительно окружности, в две точки, сопряженные относительно преобразованной окружности.

Так как инверсия есть одно-однозначное преобразование плоскости, которое сохраняет величину углов, но меняет их направление, то результат выполнения двух инверсий или любого четного числа инверсий есть одно-однозначное преобразование плоскости, которое сохраняет не только величину углов, но и их направление. Согласно следствию 1 из теоремы 3 такое преобразование есть линейное преобразование. Отсюда имеем теорему:

Теорема 12. *Последовательное выполнение четного числа инверсий равносильно выполнению одного линейного преобразования.*



Черт. 2.



Черт. 3.

Докажем теперь, что справедлива также и обратная теорема. Во-первых, изучим некоторые простейшие линейные преобразования и найдем эквивалентные им пары инверсий.

a) *Перенос*: $z' = z + b$.

При этом преобразовании каждая точка плоскости переносится параллельно линии Ob (черт. 2) на расстояние, равное длине Ob. Пусть L_1 и L_2 две прямые, перпендикулярные прямой Ob, расстояние между которыми равно половине длины Ob. Если прямые расположены, как на чертеже, то очевидно, что последовательное выполнение двух зеркальных отражений относительно L_1 и L_2 равносильно нашему переносу. Достаточно заметить, что какие-нибудь три точки преобразуются таким именно образом (теорема 7). Но мы видим сразу же, что точки прямой L_1, остающиеся неподвижными при первом отражении, переносятся требуемым образом при втором отражении.

b) *Вращение*: $z' = e^{i\theta}z$.

Каждая точка поворачивается около начала на угол θ. Если прямые L_1 и L_2 расположены, как на черт. 3, то очевидно, что в результате двух последовательно выполненных отражений относительно прямых L_1 и L_2 точки прямой L_1 поворачиваются требуемым образом; отсюда следует, что эти два отражения равносильны рассматриваемому вращению.

c) *Подобное преобразование с центром в начале*: $z' = Az$, $A > 0$.

При этом преобразовании аргумент не меняется, в то время как модуль умножается на A. При $A > 1$ точка удаляется от начала (растяжение), а при $A < 1$ приближается к началу (сжатие).

Это преобразование равносильно двум инверсиям: одной относительно окружности Q_1 с центром в начале и радиусом r_1 (черт. 4) и другой относительно окружности Q_2 с центром в начале и радиусом $r_2 = r_1\sqrt{A}$. Если точка z после первой инверсии переходит в z_1, а после второй в z', то

$$z_1\bar{z} = r_1^2, \quad z'\bar{z_1} = r_1^2 A,$$

откуда

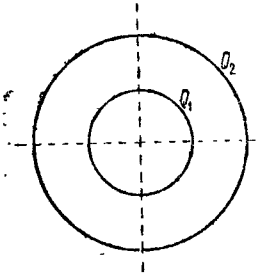
$$z' = \frac{r_1^2 A}{\bar{z_1}} = r_1^2 A \cdot \frac{z}{r_1^2} = Az.$$

d) *Преобразование:* $z' = -\frac{1}{z}$.

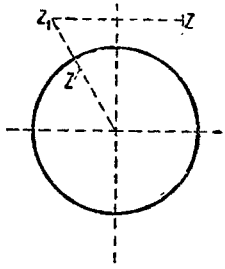
Это преобразование можно представить в виде

$$z_1 = -\bar{z}, \quad z' = \frac{1}{\bar{z_1}},$$

т. е. оно равносильно последовательно выполненным: отражению относительно мнимой оси $z + \bar{z} = 0$ и инверсии относительно



Черт. 4.



Черт. 5.

окружности с центром в начале и радиусом, равным единице, $\bar{z}z = 1$ (черт. 5).

Рассмотрим теперь общее преобразование (1). Если $c \neq 0$, то его можно представить в виде

$$z' - \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = -\frac{1}{c^2\left(z + \frac{d}{c}\right)}, \tag{22'}$$

предполагая, что $ad - bc = 1$. Но (22′) может быть заменено последовательностью преобразований:

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_3 = c^2 z_1, \quad z_4 = -\frac{1}{z_3}, \quad z' = z_4 + \frac{a}{c}.$$

Согласно ранее доказанному каждое из преобразований $z_1 = z + \frac{d}{c}$, $z_4 = -\frac{1}{z_3}$, $z' = z_4 + \frac{a}{c}$ равносильно паре инверсий.

Преобразование $z_3 = c^2 z$ может быть разбито на два, если положим $c^2 = Ae^{i\theta}$, где $A > 0$:

$$z_2 = e^{i\theta} z_1, \qquad z_3 = Az_2,$$

каждое из которых равносильно паре инверсий.

В случае, если $c = 0$, преобразование (1) имеет вид:

$$z' = \alpha z + \beta.$$

Полагая $\alpha = Ae^{i\theta}$, можем это преобразование заменить следующими тремя:

$$z_1 = e^{i\theta} z, \qquad z_2 = Az_1, \qquad z' = z_2 + \beta.$$

Таким образом доказана следующая теорема, обратная теореме 12:

Теорема 13. *Каждое линейное преобразование равносильно четному числу последовательно выполненных инверсий относительно окружностей.*

Линейное преобразование может быть представлено в виде последовательности инверсий бесконечным числом способов. В дальнейшем мы покажем, что каждое линейное преобразование равносильно четырем соответственно выбранным инверсиям и что преобразование одного типа, которое мы впоследствии будем называть „нелоксодромным", равносильно двум инверсиям.

Рассмотрим теперь самое общее, одно-однозначное и второго рода конформное отображение плоскости в самое себя:

$$z' = \overline{V}(z),$$

где $\overline{V}$, конечно, не аналитическая функция z.

Если мы сначала выполним отражение относительно действительной оси $z_1 = \overline{z}$, а затем выполним наше преобразование $z' = \overline{V}(z_1)$, то полученное преобразование будет одно-однозначное и конформное, а следовательно, согласно следствию 1 из теоремы 3 это будет линейное преобразование, т. е.

$$\overline{V}(z_1) = \overline{V}(\overline{z}) = \frac{az + b}{cz + d}$$

и

$$z' = \overline{V}(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}. \tag{23}$$

Очевидно, что инверсия является частным случаем этого преобразования. Преобразование (23) распадается на отражение и линейное преобразование. Теперь можно сформулировать следующий общий результат:

Теорема 14. *Самое общее одно-однозначное и конформное первого или второго рода преобразование плоскости в самое себя равносильно последовательности инверсий относительно окружностей. Преобразование будет конформным первого или второго рода соответственно тому, будет ли число инверсий четным или нечетным.*

§ 6. Множитель K. Выше было отмечено, что линейные преобразования разделяются на два класса. Если оставить в стороне тождественное преобразование $z' = z$, то каждое преобразование имеет либо две неподвижных точки, либо одну. Число неподвижных точек, а также выражение для преобразования, построенное по заданным неподвижным точкам, являются обычной основой классификации линейных преобразований. Рассмотрим сначала более широкий класс — с двумя неподвижными точками.

Предположим, что в преобразовании (1) $c \neq 0$. Точки ξ_1, ξ_2, лежащие на конечном расстоянии [уравнение (10)], и ∞ (бесконечно удаленная точка) переходят соответственно в ξ_1, ξ_2 и $\frac{a}{c}$. Отсюда согласно (14) преобразование может быть написано в виде

$$\frac{(z'-\xi_1)\left(\frac{a}{c}-\xi_2\right)}{(z'-\xi_2)\left(\frac{a}{c}-\xi_1\right)} = \frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}$$

или

$$\frac{z'-\xi_1}{z'-\xi_2} = K\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}, \tag{24}$$

где

$$K = \frac{a-c\xi_1}{a-c\xi_2}. \tag{25}$$

K называется „множителем" преобразования; его значение, как мы увидим, определяет характер преобразования. Для того чтобы выразить K через коэфициенты преобразования, мы построим следующую симметрическую функцию ξ_1 и ξ_2:

$$K + \frac{1}{K} = \frac{a-c\xi_1}{a-c\xi_2} + \frac{a-c\xi_2}{a-c\xi_1} = \frac{2a^2-2ac(\xi_1+\xi_2)+c^2(\xi_1^2+\xi_2^2)}{a^2-ac(\xi_1+\xi_2)+c^2\xi_1\xi_2}.$$

Так как ξ_1 и ξ_2 суть корни уравнения

$$cz^2+(d-a)z-b=0, \tag{9}$$

то

$$\xi_1+\xi_2 = \frac{a-d}{c}, \quad \xi_1\xi_2 = -\frac{b}{c}, \quad \xi_1^2+\xi_2^2 = \frac{(a-d)^2+2bc}{c^2}.$$

Подставляя эти выражения и упрощая, получим:

$$K + \frac{1}{K} = \frac{(a+d)^2-2ad+2bc}{ad-bc};$$

но

$$ad-bc=1,$$

поэтому

$$K + \frac{1}{K} = (a+d)^2-2. \tag{26}$$

Из (26) заключаем, что значение K зависит только от значения $a+d$. Уравнение (26) не изменяется, если в нем на место K поставить $\frac{1}{K}$; отсюда корни (26) обратны друг другу. Выбор корня, использованного в (24), определяется целиком тем, какую точку мы обозначили через ξ_1 и какую через ξ_2.

Другое простое уравнение для K мы получим, перенося 2 и извлекая корень:

$$\sqrt{K}+\frac{1}{\sqrt{K}}=a+d. \tag{27}$$

Сделаем теперь замену переменных:

$$Z=G(z)=\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}, \quad Z'=G(z')=\frac{z'-\xi_1}{z'-\xi_2}; \tag{28}$$

эти преобразования переводят ξ_1 и ξ_2 соответственно в 0 и ∞.

Уравнение (24) примет вид:

$$Z'=KZ. \tag{29}$$

Обозначим это преобразование буквой K, так что

$$K(Z)=KZ.$$

Тогда для исходного преобразования будет:

$$z'=G^{-1}(Z')=G^{-1}K(Z)=G^{-1}KG(z).$$

Обозначая исходное преобразование через $z'=T(z)$, получим:

$$T=G^{-1}KG,$$

откуда

$$K=GTG^{-1}. \tag{30}$$

Пусть F какая-нибудь фигура (точка, окружность, область и т. п.) и пусть K переводит F в F'. Выполняя преобразование T над $G^{-1}(F)$, получаем:

$$TG^{-1}(F)=G^{-1}KGG^{-1}(F)=G^{-1}K(F)=G^{-1}(F'),$$

т. е. T переводит $G^{-1}(F)$ в $G^{-1}(F')$.

Мы используем этот факт следующим образом: исследуя преобразование (29) и найдя как преобразуются им фигуры, мы возвратимся к преобразованию, связывающему z и z', применяя G^{-1}.

В случае, когда $c=0$, преобразование

$$z'=\frac{az+b}{d}, \quad ad=1$$

может быть приведено к виду (29) и исследовано аналогичным образом. Одна неподвижная точка есть ∞, другая $\xi_1=\frac{b}{d-a}$.

Мы легко найдем, что

$$z' - \xi_1 = K(z - \xi_1), \tag{31}$$

где

$$K = \frac{a}{d}. \tag{32}$$

Делая замену с помощью преобразований

$$Z = G(z) = z - \xi_1, \quad z' = G(z') = z' - \xi_1,$$

переводящих ξ_1 и ∞ соответственно в 0 и ∞, мы, как и раньше, придем к (29). Далее получаем:

$$K + \frac{1}{K} = \frac{a}{d} + \frac{d}{a} = \frac{a^2 + d^2}{ad} = \frac{(a+d)^2 - 2ad}{ad} = (a+d)^2 - 2,$$

т. е. и в этом случае K удовлетворяет уравнениям (26) и (27).

Выражение нашего преобразования через посредство K имеет то преимущество, что любая степень этого преобразования может быть легко представлена. При кратном повторении преобразования (1) результирующее линейное преобразование приобретает очень сложный вид, если мы захотим его выразить с помощью коэфициентов a, b, c, d. Напротив, если пользоваться (24) или (31), то очевидно, что мы получим в результате n-го применения преобразования (1):

$$\frac{z' - \xi_1}{z' - \xi_2} = K^n \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2},$$

или

$$z' - \xi_1 = K^n (z - \xi_1), \tag{33}$$

т. е. достаточно заменить множитель K на K^n.

Аналогично этому для обратного преобразования берется множитель K^{-1} и в случае n-кратного применения обратного преобразования — множитель K^{-n}.

Представляя K в виде

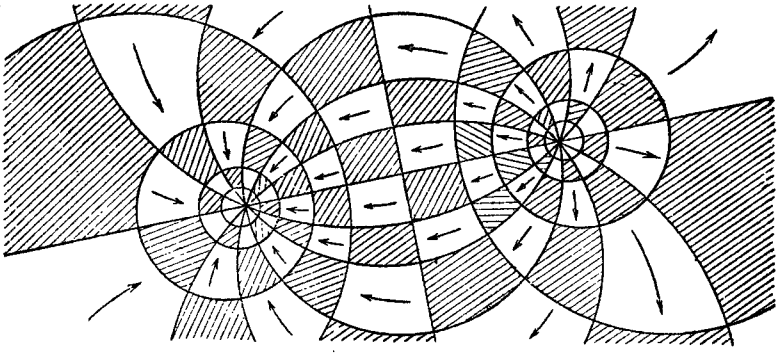
$$K = Ae^{i\theta},$$

мы будем различать три класса преобразований. Они будут изучены в следующих параграфах.

§ 7. Преобразование гиперболического типа $K = A$. Мы будем рассматривать $A \neq 1$, так как из $K = \frac{a - c\xi_1}{a - c\xi_2}$ и $\xi_1 \neq \xi_2$ следует, что $K \neq 1$. Преобразование $Z' = AZ$ есть подобное преобразование с центром в начале, изученное в § 5, с). Отметим следующие его свойства: 1) Прямая, проходящая через начало (т. е. окружность, проходящая через неподвижные точки 0 и ∞), переходит сама в себя; каждая полупрямая, выходящая из начала, также переходит сама в себя. 2) Полуплоскость, расположенная по одну сторону от прямой, проходящей через начало, переходит сама в себя. 3) Каждая окружность с центром в начале (и поэтому ортогональная семейству неподвижных прямых)

переходит в некоторую другую окружность с центром в начале. 4) Неподвижные точки 0 и ∞ сопряжены относительно любой окружности с центром в начале.

Выполним теперь преобразование G^{-1}, которое переводит 0 и ∞ в ξ_1 и ξ_2. Мы получим следующие свойства гиперболического преобразования: 1) Каждая окружность, проходящая через неподвижные точки, переходит сама в себя; каждая из двух частей, на которые окружность разбивается неподвижными точками, переходит сама в себя. 2) Внутренность окружности, проходящей через неподвижные точки, переходит сама в себя. 3) Каждая окружность, ортогональная к окружности, проходя-



Черт. 6.

щей через неподвижные точки, переходит в окружность, обладающую тем же свойством. 4) Неподвижные точки сопряжены относительно любой такой окружности.

На черт. 6 построены два семейства рассмотренных здесь окружиостей. На чертеже показано, каким образом преобразуются области; каждая заштрихованная область переходит в следующую в направлении, указанном стрелкой.

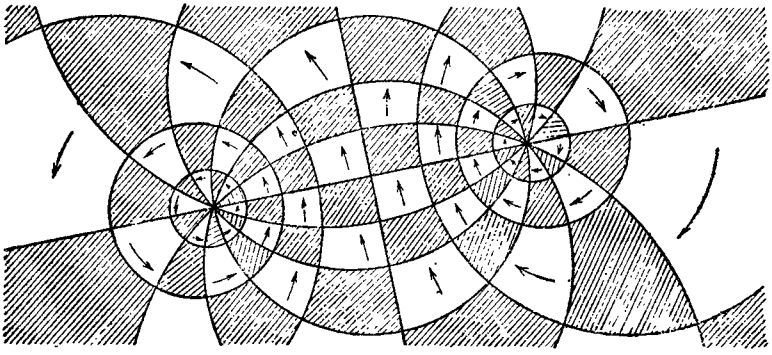
Из (26) мы получим условие, которому удовлетворяет $a+d$ в случае гиперболического преобразования. Величина $K+\frac{1}{K}$ имеет в случае действительных и положительных K минимум, равный двум, который достигается при $K=1$; если $K \neq 1$, то $K+\frac{1}{K}>2$. Поэтому из (26) следует, что $(a+d)^2>4$. Следовательно, *для того чтобы преобразование было гиперболическим, необходимо, чтобы $a+d$ было действительно и чтобы $|a+d|>2$.* Вскоре мы докажем, что это условие также и достаточно.

§ 8. Преобразован е эллиптического типа $K=e^{i\theta}$. Здесь $\theta \neq 2n\pi$. Преобразование $Z'=e^{i\theta}Z$ есть вращение около начала, рассмотренное в § 5, b).

Прямые линии и окружности § 7 меняются ролями. Окружность с центром в начале переходит сама в себя, внутренность

такой окружности также переходит сама в себя. Точки 0 и ∞ сопряжены относительно каждой неподвижной окружности. Прямая, проходящая через начало, преобразуется в прямую, проходящую через начало и образующую с первой прямой угол θ.

Применяя преобразование G^{-1}, которое переводит 0 и ∞ соответственно в ξ_1 и ξ_2, мы приходим к следующим выводам: 1) Дуга окружности, соединяющая неподвижные точки, переходит в дугу окружности, соединяющую неподвижные точки и образующую угол θ с первой дугой. 2) Каждая окружность, ортогональная окружностям, проходящим через неподвижные



Черт. 7.

точки, переходит сама в себя. 3) Внутренность каждой такой окружности переходит сама в себя. 4) Неподвижные точки сопряжены по отношению к каждой из таких окружностей.

На черт. 7 показано рассматриваемое преобразование при $\theta = \frac{\pi}{3}$. Заштрихованные области переходят в заштрихованные в направлении, указанном стрелкой.

Из (26) получаем для преобразования эллиптического типа:

$$(a+d)^2 = 2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 + 2\cos\theta. \tag{34}$$

Правая часть положительна или нуль и всегда меньше чем 4. Отсюда $a+d$ действительно и

$$|a+d| < 2.$$

Из (27) получаем:

$$a+d = \pm\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = \pm 2\cos\frac{\theta}{2}. \tag{35}$$

Если θ соизмеримо с π, то существует такое целое n, что $n\theta = 2m\pi$; тогда $K^n = e^{2m\pi i} = 1$. В результате n-кратного выполнения такого преобразования каждая точка вернется в исходное положение. Мы будем говорить, что такое преобразование имеет период n. Мы увидим, что всякое линейное преобразова-

ние, обладающее свойством периодичности, есть преобразование эллиптического типа.

Для иллюстрации приведем три часто встречающихся случая:

1) Пусть $\theta = \pi$; преобразование имеет период, равный 2, $K = e^{\pi i} = -1$ и $a + d = \pm 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

2) $\theta = \frac{2\pi}{3}$; преобразование имеет период, равный 3, $K = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$ и $a + d = \pm 2\cos\frac{\pi}{2} = \pm 1$.

3) $\theta = \frac{\pi}{2}$; преобразование имеет период, равный 4, $K = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ и $a + d = \pm 2\cos\frac{\pi}{4} = \pm\sqrt{2}$.

§ 9. Преобразование локсодромического типа $K = Ae^{i\theta}$. Здесь A положительно и не равно единице, а $\theta \neq 2n\pi$.

Это преобразование может быть заменено последовательностью двух преобразований:

$$Z_1 = AZ, \quad Z' = e^{i\theta} Z_1,$$

из которых одно гиперболического типа, а другое—эллиптического. Таким образом наше преобразование равносильно подобному преобразованию с центром в начале, с последующим вращением около начала. Каждая окружность с центром в начале переходит в другую окружность с центром в начале; каждая полупрямая, выходящая из начала, переходит в полупрямую, образующую с первой угол θ.

Сочетая движения, указанные на черт. 6 и 7, получаем геометрическую интерпретацию нашего преобразования.

Каждая дуга окружности, соединяющей неподвижные точки, переходит в дугу окружности, соединяющей неподвижные точки и образующей с первой угол θ. Каждая окружность, ортогональная окружностям, проходящим через неподвижные точки, переходит в другую окружность, обладающую тем же свойством.

Вообще говоря, преобразование локсодромического типа не имеет неподвижных окружностей. Исключение представляет случай: $\theta = \pi$. Тогда каждая дуга окружности, соединяющая неподвижные точки, переходит в дугу окружности, соединяющую неподвижные точки и образующую с первой угол π; очевидно, что обе эти дуги образуют целую окружность, и поэтому каждая окружность, проходящая через неподвижные точки, переходит сама в себя. Однако здесь в отличие от предшествующих случаев *внутренность неподвижной окружности переходит во внешность.*

Из (26) для преобразований локсодромического типа получаем:

$$(a + d)^2 = 2 + Ae^{i\theta} + \frac{1}{A}e^{-i\theta} =$$
$$= 2 + \left(A + \frac{1}{A}\right)\cos\theta + i\left(A - \frac{1}{A}\right)\sin\theta. \qquad (36)$$

Вообще правая часть не действительна. Однако, если $\theta = \pi$, она имеет действительное значение, равное

$$2 - \left(A + \frac{1}{A}\right).$$

Но так как

$$A + \frac{1}{A} > 2, \qquad A \neq 1,$$

то правая часть отрицательна. Таким образом в преобразовании локсодромического типа $a + d$ всегда без исключений комплексное (недействительное число). Если локсодромическое преобразование имеет неподвижные окружности, то $a + d$ чисто мнимое число.

§ 10. Преобразование параболического типа. Остается рассмотреть преобразования с одной неподвижной точкой, которые называются преобразованиями параболического типа. Для того чтобы преобразование имело одну неподвижную точку, необходимо и достаточно (§ 3), чтобы $a + d = \pm 2$. Поэтому множитель K, определяемый из уравнения (26), равен единице.

Если $c \neq 0$, то неподвижная точка есть $\xi = \frac{a-d}{2c}$. Преобразование переводит ∞, ξ и $-\frac{d}{c}$ соответственно в $\frac{a}{c}$, ξ и ∞. Следовательно, пользуясь формулой (14), мы можем написать:

$$\frac{z' - \frac{a}{c}}{z' - \xi} = -\frac{\xi + \frac{d}{c}}{z - \xi}.$$

Вычитая из обеих частей по единице, получаем:

$$\frac{\xi - \frac{a}{c}}{z' - \xi} = -\frac{\xi + \frac{d}{c}}{z - \xi} - 1.$$

Далее:

$$\xi - \frac{a}{c} = \frac{a-d}{2c} - \frac{a}{c} = -\frac{a+d}{2c} = \mp\frac{1}{c},$$

$$\xi + \frac{d}{c} = \frac{a-d}{2c} + \frac{d}{c} = \frac{a+d}{2c} = \pm\frac{1}{c}.$$

Следовательно, преобразование может быть написано в виде

$$\frac{1}{z' - \xi} = \frac{1}{z - \xi} \pm c. \tag{37}$$

В (37) нужно брать $+c$, если $a + d = 2$, и $-c$, если $a + d = -2$.

Сделав замену переменных с помощью преобразований

$$Z = G(z) = \frac{1}{z-\xi}, \quad Z' = G(z') = \frac{1}{z'-\xi}, \tag{38}$$

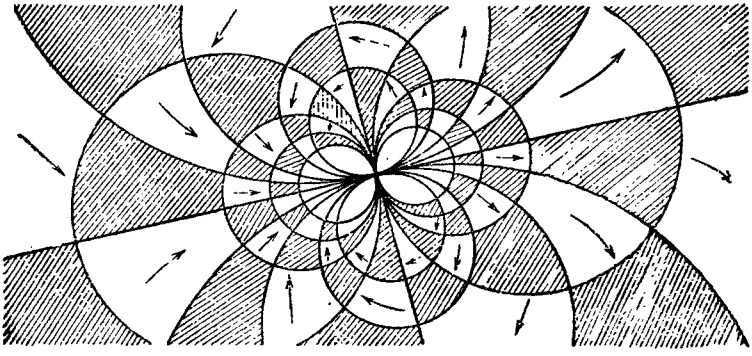
переводящих точку ξ в ∞, мы получим:

$$Z' = Z \pm c. \tag{39}$$

Если $c = 0$, то неподвижной точкой параболического преобразования служит ∞ и, как нами уже было показано в § 3, преобразование имеет вид (39). В самом деле, в этом случае $a = d = \pm 1$ и поэтому

$$z' = z \pm b. \tag{39}$$

Преобразование (39) есть перенос, рассмотренный в § 5, а). Плоскость переносится параллельно прямой, соединяющей нач ло с точкой $\pm c$. Каждая прямая, параллельная этой прямой, переходит сама в себя. Полуплоскость по одну сторону неподвиж-



Черт. 8.

ной прямой переходит сама в себя. Всякая другая прямая переходит в параллельную ей прямую.

Выполним преобразование G^{-1}; оно переводит ∞ в ξ. Так как параллельные прямые пересекаются только в ∞, то они переходят в окружности, имеющие единственную общую точку ξ и, следовательно, касающиеся друг друга в ξ. Таким образом при преобразовании параболического типа: 1) Каждая окружность, проходящая через неподвижную точку, переходит в окружность, касающуюся первой в неподвижной точке. 2) Имеется зависящее от одного параметра семейство окружностей, касающихся друг друга в неподвижной точке, каждая из которых переходит сама в себя. 3) Внутренность каждой неподвижной окружности переходит сама в себя.

На черт. 8 показано, как преобразуется плоскость. Каждая заштрихованная область переходит в следующую в направлении, указанном стрелкой.

Из черт. 6, 7 и 8 и из соответствующих рассуждений следует, что в случае гиперболического, эллиптического и параболиче-

ского типов линейного преобразования через каждую точку плоскости (за исключением неподвижных точек) проходит одна неподвижная окружность и притом только одна. В частности, в каждом из этих трех случаев имеется одна неподвижная окружность, проходящая через ∞, т. е. одна неподвижная прямая (если ∞ не есть неподвижная точка). Эту прямую легко построить, так как она проходит через точку $-\frac{d}{c}$, которая преобразуется в ∞, и через точку $\frac{a}{c}$, в которую преобразуется ∞.

Для удобства объединим некоторые из результатов, полученных в предшествующих параграфах, в виде следующей теоремы. Тождественное преобразование $z' \equiv z$ мы оставляем в стороне.

Теорема 15. *Необходимыми и достаточными условиями принадлежности линейного преобразования к данному типу являются:*

для гиперболического типа: $a+d$ *действительно и* $|a+d|>2$;

для эллиптического типа: $a+d$ *действительно и* $|a+d|<2$;

для параболического типа: $a+d=\pm 2$;

для локсодромического типа: $a+d$ *комплексное недействительное число.*

Нами доказано, что эти условия необходимы. Их достаточность доказывается простым рассуждением, основанным на том факте, что эти условия исключают друг друга. Так, если $a+d$ действительно и $|a+d|>2$, то преобразование не может быть ни эллиптического, ни параболического, ни локсодромического типов, так что оно должно быть гиперболического типа и т. д.

§ 11. Изометрическая окружность. Всякое аналитическое преобразование $z'=f(z)$ переводит линейный элемент $dz=z_2-z_1$, соединяющий две точки, бесконечно близкие к точке z, в линейный элемент dz' в окружности z'. Имеет место соотношение $dz'=f'(z)\,dz$, т. е. длина элемента dz умножается на $|f'(z)|$ и, кроме того, элемент поворачивается на угол, равный $\arg f'(z)$.

Для линейного преобразования

$$z'=T(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc=1, \tag{1}$$

получаем следующую теорему:

Теорема 16. *В результате линейного преобразования* (1) *бесконечно малые длины в окрестности точки* z *умножаются на* $|cz+d|^{-2}$; *бесконечно малые площади в окрестности* z *умножаются на* $|cz+d|^{-4}$.

Действительно,

$$\frac{dz'}{dz}=T'(z)=\frac{1}{(cz+d)^2}, \tag{40}$$

откуда следует, что длины умножаются на $|cz+d|^{-2}$. Бесконечно малая область переходит в подобную область, причем соответствующие длины умножаются на $|T'(z)|$, следовательно, площадь умножается на $|T'(z)|^2$, т. е. на $|cz+d|^{-4}$.

Построим теперь выражения для $T'(z)$, пользуясь (24) или (37). Рассмотрим (24): диференцируя его и упрощая, мы получим первое из двух нижеписанных выражений для $T'(z)$; меняя местами ξ_1 и ξ_2 и диференцируя, получаем второе:

$$\frac{dz'}{dz} = T'(z) = K\left(\frac{z'-\xi_2}{z-\xi_2}\right)^2 = \frac{1}{K}\left(\frac{z'-\xi_1}{z-\xi_1}\right)^2. \tag{41}$$

Для параболического преобразования из (37) получим:

$$T'(z) = \left(\frac{z'-\xi}{z-\xi}\right)^2. \tag{42}$$

Заметим, что при $K=1$ (41) имеет вид (42).

Из ~~(42)~~ (41) следует:

$$T'(\xi_1) = K \quad \text{и} \quad T'(\xi_2) = \frac{1}{K}. \tag{43}$$

В неподвижной точке ξ_1: $dz' = K\,dz$. Для преобразования гиперболического типа $K = A$. Следовательно, бесконечно малая окрестность ξ_1 подвергается преобразованию подобия с центром в ξ_1. Для эллиптического преобразования $K = e^{i\theta}$; следовательно, получаем вращение около ξ_1 на угол θ. Для локсодромического преобразования $K = Ae^{i\theta}$ бесконечно малая окрестность ξ_1 подвергнется преобразованию подобия и вращению. Аналогичные замечания можно высказать относительно окрестности ξ_2. Так как $\frac{1}{K} = \frac{1}{A}e^{-i\theta}$, то преобразование подобия и вращение будут происходить в обратном направлении.

Для параболического преобразования мы найдем, подставляя $\xi = \frac{a-d}{2c}$ в (40), что $T'(\xi) = 1$. Таким образом бесконечно малая окрестность ξ остается неизменной.

Для того чтобы длины и площади оставались неизменными, необходимо и достаточно, чтобы $|cz+d| = 1$. Если $c \neq 0$, то это геометрическое место есть окружность. Переписав уравнение этой окружности в виде $\left|z + \frac{d}{c}\right| = \frac{1}{|c|}$, мы заключаем, что она имеет центр в $-\frac{d}{c}$ и радиус $\frac{1}{|c|}$.

Определение. *Окружность I*

$$I\ |cz+d| = 1, \qquad c \neq 0, \tag{44}$$

представляющая собой геометрическое место всех точек, в окрестности которых длины и площади остаются неизменными при преобразовании (1), *называется изометрической окружностью преобразования.*

Изометрическая окружность будет играть основную роль во многих из наших дальнейших исследований. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые свойства этой окружности.

Во-первых, заметим, что в случае $c = 0$, т. е. когда ∞ есть неподвижная точка, нельзя говорить о единственной окружности,

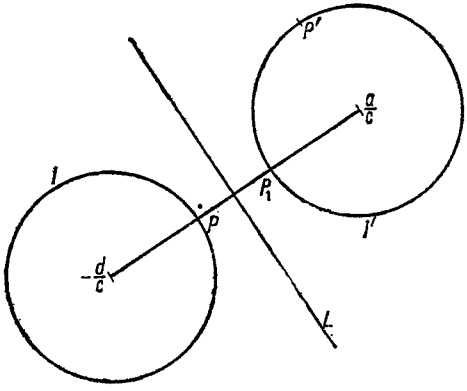
обладающей свойствами изометрической окружности. В самом деле, $T'(z)$ постоянна и равна K [уравнения (31) и (39)]; тогда или $|K| \neq 1$ и, следовательно, все длины изменяются или $|K| = 1$ и все длины остаются неизменными. В последнем случае имеем движение жесткой системы — вращение (31) и перенос (39).

Теорема 17. *При линейном преобразовании длины и площади внутри изометрической окружности увеличиваются, в то время как длины и площади вне изометрической окружности уменьшаются.*

Действительно, если z лежит внутри окружности I, то

$$\left|z + \frac{d}{c}\right| < \frac{1}{c} \text{ или } |cz + d| < 1 \text{ и } |T'(z)| > 1.$$

Поэтому длины и площади внутри I увеличиваются. Аналогично этому, если z лежит вне окружности I, то $|T'(z)| < 1$, а поэтому длины и площади уменьшаются.



Черт. 9.

Теорема 18. *Линейное преобразование переводит свою изометрическую окружность в изометрическую окружность обратного преобразования.*

Изометрическая окружность I' обратного преобразования $z' = \frac{-dz + b}{cz - a}$ имеет уравнение:

$$|cz - a| = 1, \qquad (45)$$

центр ее находится в $\frac{a}{c}$ и радиус равен $\frac{1}{|c|}$.

T переводит I в некоторую окружность I_0, не изменяя длин в окрестности каждой точки. Следовательно, T^{-1} переводит I_0, обратно в I, также не изменяя длин. Но геометрическое место всех точек, в окрестности которых T^{-1} не изменяет длин, есть I', поэтому I_0 совпадает с I'.

а) *Геометрическая интерпретация преобразования.* Преобразование T переводит I в I' (черт. 9), не изменяя длин дуг. Пусть точка P переходит в P'. Тогда, если I будет наложено на I' так, чтобы точка P совпала с P' и направление на I совпало с направлением на I', то совпадут все точки, соответствующие друг другу при преобразовании.

Заметим, что последовательность четного числа инверсий, преобразующая I таким же образом, как T, равносильна преобразованию T (теоремы 7 и 12).

Предположим теперь, что когда некоторая точка движется от положения P в направлении против часовой стрелки по окружности I, то соответствующая ей точка движется по окружности I' от положения P' также против часовой стрелки. Тогда очевидно,

что, пользуясь только вращением и переносом, мы могли бы перевести I в I' так, чтобы совпали точки, соответствующие друг другу при преобразовании T. Но так как при вращении и переносе ∞ есть неподвижная точка, то $c=0$, что противоречиво. Следовательно, если некоторая точка движется вдоль I против часовой стрелки, то соответствующая ей точка движется по I' по часовой стрелке. Таким образом для достижения выше рассмотренного совмещения I и I' окружность I должна быть перевернута.

Инверсия относительно I, оставляющая неподвижными точки I с последующим отражением около прямой L, которая перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, и проходит через его середину, осуществляет отображение I на I' с требуемым изменением направления. При этом точка P перейдет в точку P_1. Вращение около точки $\frac{a}{c}$ переведет P_1 в P'. Следовательно, две инверсии и вращение равносильны T.

Так как вращение равносильно двум отражениям [§ 5, b)], то, пользуясь не более чем четырьмя инверсиями, можно построить любое линейное преобразование. Если P' совпадает с P_1, то достаточно двух инверсий.

Геометрически ясно, что возможны различные пути построения преобразования. Так, вместо того чтобы произвести инверсию относительно I, а затем отразить относительно L, можно было сначала отразить относительно L, а затем инвертировать относительно I'. Или мы могли бы сначала повернуть около $-\frac{d}{c}$ и т. п.

Предшествующее построение оказывается невозможным, когда I и I' совпадают, так как прямая L тогда неопределенна. В этом случае $a=-d$ или $a+d=0$; следовательно, T есть эллиптическое преобразование с периодом два (§ 8). P' лежит на I. Инверсия относительно I с последующим отражением относительно прямой L, которая соединяет точку $-\frac{d}{c}$ с серединой дуги PP', равносильны преобразованию T.

b) *Типы преобразований.* Расстояние между центрами окружностей I и I' равно $\left|\frac{a}{c}+\frac{d}{c}\right|$; сумма радиусов равна $\frac{2}{|c|}$. Окружности будут пересекаться, касаться или вовсе не будут иметь общих точек в зависимости от того, будет ли $|a+d|$ меньше, равен или больше двух. Пользуясь теоремой 15, заключаем, что если T — гиперболическое преобразование, то изометрические окружности преобразований T и T^{-1} не имеют общих точек; если T — эллиптическое, то они пересекаются; если T — параболическое, они касаются. Если T — локсодромическое преобразование, $a+d$ может принять любое значение, исключая нуль, поэтому возможны все взаимные положения изометрических окружностей за исключением совпадения.

Разница между локсодромическим и тремя нелоксодромическими преобразованиями станет ясной при более близком знаком-

стве с геометрическими свойствами преобразований. Пусть точки P, P_1, P' (расположенные, как на черт. 9) имеют координаты z, z_1, z'. Так как z, $-\frac{d}{c}$ и $\frac{a}{c}$ лежат на одной прямой, то $z+\frac{d}{c}$ и $\frac{a}{c}+\frac{d}{c}$ имеют один и тот же аргумент и модули, равные соответственно $\frac{1}{|c|}$ и $\frac{|a+d|}{|c|}$; отсюда

$$z+\frac{d}{c}=\frac{a+d}{|a+d|c}.$$

Подобно этому

$$z_1-\frac{a}{c}=-\frac{a+d}{|a+d|c}.$$

Пользуясь выражением (22′) для преобразования T, получаем:

$$z'-\frac{a}{c}=-\frac{1}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)}=-\frac{|a+d|}{(a+d)c}=-\frac{\bar{a}+\bar{d}}{|a+d|c}.$$

Из этих уравнений мы заключаем, что z' совпадает с z_1 тогда и только тогда, когда $\bar{a}+\bar{d}=a+d$, т. е. когда $a+d$ действительно и, следовательно, преобразование нелоксодромического типа.

Обозначая в случае локсодромического преобразования

$$a+d=re^{i\varphi}, \qquad \varphi \neq n\pi,$$

получим:

$$z'-\frac{a}{c}=\frac{\bar{a}+\bar{d}}{a+d}\left(z_1-\frac{a}{c}\right)=e^{-2i\varphi}\left(z_1-\frac{a}{c}\right).$$

Точка z_1 переходит в z' посредством поворота около $\frac{a}{c}$ на угол -2φ. Мы получаем следующий результат:

Теорема 19. *Всякое преобразование гиперболического, эллиптического и параболического типов равносильно последовательно выполненным инверсии относительно окружности I и отражению относительно прямой L. В случае локсодромического преобразования к указанным инверсиям прибавляется вращение около центра окружности I' на угол, равный* $-2\arg(a+d)$.

Рассмотрим теперь неподвижные точки. Так как $T'(\xi_1)=K$, $T'(\xi_2)=\frac{1}{K}$ [уравнение (43)], то в случае, когда $|K|\neq 1$, в одной из неподвижных точек длины увеличиваются, а в другой — уменьшаются; если $|K|=1$, никаких изменений длин не будет. Отсюда следует, что в случае гиперболического и локсодромического преобразований одна из неподвижных точек находится внутри I другая — вне ее; для эллиптического преобразования обе неподвижных точки, а для параболического единственная неподвижная точка, лежат на окружности I. Те же утверждения справедливы относительно окружности I'.

В случае эллиптического преобразования окружности I и I' пересекаются и L служит общей хордой. Так как точки пере-

сечения остаются неподвижными при инверсии относительно I и при отражении относительно L, то они являются неподвижными точками преобразования. Ранее было показано, что линейный элемент, выходящий из неподвижной точки, поворачивается на угол θ, где $K = e^{i\theta}$. Так как дуга окружности I, выходящая из неподвижной точки, преобразуется в дугу окружности I', выходящую из той же точки, то окружности I и I' пересекаются под углом θ.

Если $a + d = 0$, то I и I' совпадают. Неподвижные точки лежат на прямой L, и, следовательно, в этом случае неподвижными точками служат концы диаметра, совпадающего с L.

В случае параболического преобразования прямая L служит общей касательной к окружностям I и I' в точке их касания. Таким образом точка касания есть неподвижная точка.

c) *Неподвижные окружности.* Рассмотрим теперь нелоксодромические преобразования. Каждому такому преобразованию соответствует семейство неподвижных окружностей, зависящее от одного параметра; как мы видели в § 10, прямая, соединяющая центры I и I', принадлежит этому семейству. Это семейство неподвижных окружностей легко может быть построено. Оно состоит из окружностей ортогональных I, центры которых лежат на прямой L. Каждая окружность семейства, будучи ортогональна I, переходит сама в себя при инверсии относительно I; при отражении относительно L, т. е. диаметра, она также переходит сама в себя. Вследствие симметрии каждая неподвижная окружность ортогональна также и к I'.

Теорема 20. *В случае нелоксодромического преобразования изометрическая окружность ортогональна неподвижным окружностям.*

Докажем теперь теорему, которая в дальнейшем нам понадобится.

Теорема 21. *Пусть Q есть неподвижная окружность некоторого нелоксодромического преобразования и пусть I его изометрическая окружность. Пусть далее h есть расстояние от некоторой точки z до центра q окружности Q и h' расстояние от преобразованной точки z' до q; тогда*

$h' = h$, *если z лежит на I или Q;*

$h' < h$, *если z лежит одновременно внутри I и Q или вне их обеих;*

$h' > h$, *если z лежит внутри одной из окружностей I или Q и вне другой.*

Инверсия относительно I переводит z в точку z_1, которая в свою очередь переводится в z' отражением относительно L (черт. 10).

Очевидно, что в результате отражения расстояния от q не меняются. Таким образом для доказательства теоремы остается рассмотреть, что происходит, когда z подвергается инверсии относительно I. Расстояния от точки z и сопряженной с нею точки z_1 до центра окружности ортогональной окружности, относительно которой производится инверсия, очевидно не зависят

от расположения координатных осей и относительные величины этих расстояний не зависят от выбора единицы масштаба. Поэтому, не нарушая общности, мы можем взять в качестве I единичную окружность $z\bar{z}=1$ и в качестве q точку на действительной оси. Для Q получаем уравнение: $(z-q)(\bar{z}-q)=r^2$, где вследствие ортогональности $r^2+1=q^2$, откуда

$$z\bar{z}-q(z+\bar{z})+1=0.$$

Левая часть этого уравнения положительна для точек, лежащих вне Q, и отрицательна для точек, лежащих внутри Q. Далее:

$$h^2=(z-q)(\bar{z}-q)=z\bar{z}-q(z+\bar{z})+1+r^2,$$

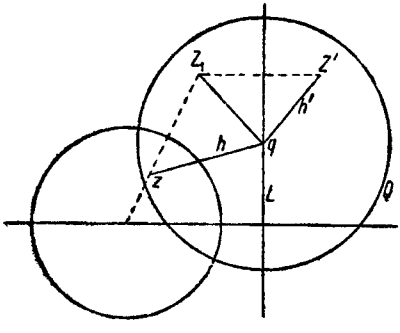
и так как $z_1=\frac{1}{\bar{z}}$, то

$$h'^2=z_1\bar{z}_1-q(z_1+\bar{z}_1)+1+r^2=\frac{1-q(\bar{z}+z)+z\bar{z}}{z\bar{z}}+r^2,$$

откуда

$$h^2-h'^2=\frac{[z\bar{z}-1][z\bar{z}-q(z+\bar{z})+1]}{z\bar{z}}.$$

Из этого уравнения непосредственно следует справедливость теоремы. Если z находится одновременно внутри обеих окружностей или вне их обеих, то множители в числителе правой части соответственно оба отрицательны или оба положительны и, следовательно, $h'<h$; если z находится внутри одной окружности, но вне другой, то множители имеют различные знаки и, следовательно, $h'>h$; если z расположена на одной из окружностей, то один из множителей равен нулю и поэтому $h'=h$.



Черт. 10.

Относительно неподвижной прямой, как легко видеть, справедлива следующая теорема:

Теорема 22. *Пусть в случае нелоксодромического преобразования через k и k' обозначены расстояния соответственно от z и z' до неподвижной прямой M. Тогда $k=k'$, если z лежит на I или на M.*

Если же z не лежит ни на I, ни на M, то $k'>k$, если z лежит внутри I, и $k'<k$, если z лежит вне I.

§ 12. Единичная окружность. В последующем мы очень часто будем иметь дело с множествами линейных преобразований, имеющих общую неподвижную окружность. Обычно представляется удобным в качестве неподвижной окружности выбирать

некоторую простую окружность, как, например, действительную ось или единичную окружность с центром в начале. Настоящий параграф будет посвящен изучению единичной окружности с центром в начале, которую мы условимся раз навсегда обозначать через Q_0.

Найдем условия, которым должны удовлетворять коэфициенты преобразования (1), для того чтобы Q_0 была неподвижной окружностью. Уравнение Q_0 имеет вид:

$$z\bar{z} - 1 = 0. \tag{46}$$

Преобразование (1) переводит Q_0 в окружность, уравнение которой согласно (19) имеет вид:

$$(d\bar{d} - c\bar{c})\, z'\bar{z}' + (-\bar{b}d + \bar{a}c)\, z' + (-b\bar{d} + a\bar{c})\,\bar{z}' + b\bar{b} - a\bar{a} = 0.$$

Эта окружность совпадает с Q_0 тогда и только тогда, если

$$-\bar{b}d + \bar{a}c = 0, \quad -b\bar{d} + a\bar{c} = 0, \tag{a}$$

$$d\bar{d} - c\bar{c} = a\bar{a} - b\bar{b} \neq 0. \tag{b}$$

Каждое из уравнений (a) есть следствие другого.

Из второго следует:

$$\frac{b}{\bar{c}} = \frac{a}{\bar{d}} = \lambda;$$

отсюда

$$b = \lambda\bar{c}, \quad a = \lambda\bar{d}.$$

Подставляя в (b), получим:

$$d\bar{d} - c\bar{c} = \lambda\bar{\lambda}\,(d\bar{d} - c\bar{c}) \neq 0,$$

откуда $\lambda\bar{\lambda} = 1$.

Так как $ad - bc = 1$, то мы получаем:

$$\lambda\,(d\bar{d} - c\bar{c}) = 1,$$

откуда следует, что λ действительно. И поэтому $\lambda = \pm 1$. Знак λ зависит от знака $d\bar{d} - c\bar{c}$. Если при преобразовании Q_0 самой в себя внутренность переходит во внутренность, то точка $-\frac{d}{c}$, переходящая в бесконечность, должна лежать вне Q_0. И следовательно, $\left|-\frac{d}{c}\right| > 1$; отсюда $d\bar{d} - c\bar{c} > 0$ и $\lambda = 1$. Мы имеем таким образом

$$b = \bar{c}; \quad a = \bar{d}; \quad d = \bar{a}$$

Такие коэфициенты удовлетворяют, очевидно, условиям (a) и (b).

Мы получаем следующий результат:

Теорема 23. *Наиболее общее линейное преобразование, переводящее Q_0 в самое себя и внутренность Q_0 во внутренность Q_0, имеет вид:*

$$z' = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad \bar{a}a - \bar{c}c = 1. \tag{47}$$

Аналогичным образом найдем наиболее общее линейное преобразование, которое переводит Q_0 в самое себя, а внутренность Q_0 во внешность. В этом случае $-\frac{d}{c}$ лежит внутри Q_0 и $d\bar{d} - c\bar{c} < 0$; таким образом $\lambda = -1$. Искомое наиболее общее преобразование будет следующее:

$$z' = \frac{az - \bar{c}}{cz - \bar{a}}, \quad c\bar{c} - a\bar{a} = 1; \tag{48}$$

это преобразование локсодромического типа.

Преобразование (47) переводит внутренность Q_0 одно-однозначно и конформно в самое себя. Замечательно то, что это преобразование есть самое общее из всех преобразований такого же рода. Прежде чем доказать это, докажем следующее предложение:

Наиболее общее преобразование, которое переводит одно-однозначно и конформно внутренность Q_0 в самое себя и при котором начало остается неподвижным, есть вращение около начала.

Пусть $z' = f(z)$ есть преобразование, обладающее указанными свойствами. Вследствие конформности $f(z)$ есть аналитическая функция в круге Q_0. Далее $|f(z)| < 1$, когда $|z| < 1$, так как внутренняя точка переходит во внутреннюю точку. Так как $z' = 0$, когда $z = 0$, то $f(z)$ имеет нуль в начале координат; следовательно, $\frac{f(z)}{z}$ есть аналитическая функция в круге Q_0.

Рассмотрим теперь $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ в круге Q' с центром в начале и радиусом $r < 1$. Так как абсолютная величина функции аналитической внутри и на контуре области принимает максимальное значение на контуре этой области, то мы получим, что $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r}$, если z лежит на окружности Q', т. е. $|z| = r$, или внутри круга Q'.

Так как r может быть выбрано как угодно близко к единице, то мы имеем:

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1 \text{ внутри } Q_0.$$

Рассматривая обратную функцию, мы из тех же соображений заключаем, что $\left|\frac{z}{z'}\right| \leqslant 1$ внутри круга Q_0. Следовательно $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$ внутри Q_0 и поэтому $\frac{z'}{z} = e^{i\alpha}$. Но если модуль аналитиче-

ской функции постоянная величина, то и аргумент ее постоянная величина и поэтому α есть постоянная величина. Таким образом мы получаем:

$$z' = e^{i\alpha} z,$$

т. е. вращение около начала.

Теперь мы откажемся от того ограничения, что начало неподвижно. Пусть $z' = f(z)$ переводит внутренность Q_0 одно-однозначно и конформно в самое себя; пусть $f(0) = z_0$; пусть далее $z' = S(z)$ линейное преобразование вида (47) такое, что $S(0) = z_0$.

[Нетрудно определить коэфициенты (47) таким образом, чтобы $\frac{\bar{c}}{\bar{a}} = z_0 < 1$.] Но если мы последовательно выполним преобразования f и S^{-1}, то внутренность Q_0 перейдет в самое себя и начало останется неподвижным; следовательно, $S^{-1}f = U$ есть вращение и $f = SU$. Таким образом f есть линейное преобразование. Так как оно переводит внутренность Q_0 в самое себя, то оно есть преобразование вида (47).

Теорема 24. *Наиболее общее преобразование, переводящее внутренность Q_0 одно-однозначно и конформно в самое себя, есть линейное преобразование* (47).

Теперь легко доказать следующую более общую теорему:

Теорема 25. *Самое общее преобразование, переводящее одно-однозначно и конформно внутренность или внешность одного круга во внутренность или внешность другого, есть линейное преобразование.*

Пусть $z' = f(z)$ переводит указанным образом внутренность или внешность Q_1 во внутренность или внешность Q_2. Отобразим теперь посредством линейных преобразований S_1 и S_2 области, ограниченные окружностями Q_1 и Q_2 и соответствующие друг другу при преобразовании $z' = f(z)$ на внутренность круга Q_0. Совокупность последовательно выполненных преобразований S_1^{-1}, f, S_2 переводит внутренность Q_0 в самое себя и, следовательно, эквивалентна линейному преобразованию вида (47):

$$S_2 f S_1^{-1} = T$$

или

$$f = S_2^{-1} T S_1.$$

Таким образом $z' = f(z)$ есть линейное преобразование.

Глава II

ГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 13. Определение группы. Примеры. По определению автоморфной функции каждая такая функция связана с множеством линейных преобразований, называемым „группой". В настоящей главе мы займемся изучением групп линейных преобразований; после этого мы сможем перейти к определению автоморфной функции и изучению ее свойств.

Определение. *Конечное или бесконечное множество преобразований называется группой, если:*

a) *Вместе с каждым преобразованием множеству принадлежит и обратное преобразование.*

b) *Произведение любых двух преобразований, принадлежащих множеству, есть преобразование, принадлежащее множеству.*

Под это определение подходят множества различных типов. Мы, однако, ограничимся изучением множеств линейных преобразований.

Пользуясь символическими обозначениями, можно следующим образом выразить указанные в определении свойства группы:

a) Если преобразование T принадлежит множеству, то преобразование T^{-1} также принадлежит множеству.

b) Если S есть преобразование, принадлежащее множеству (которое, в частности, может совпадать с T), то ST тоже принадлежит множеству.

Из повторного применения b) следует, что преобразование, равносильное совокупности последовательно выполненных преобразований, принадлежащих множеству, также принадлежит множеству. В частности, любая положительная или отрицательная целая степень принадлежащего группе преобразования T также принадлежит группе. Преобразование $T^{-1}T\,(=1)$ также принадлежит группе; *таким образом каждая группа содержит тождественное преобразование* $z' = z$.

Мы можем определить, образует ли данное множество линейных преобразований группу или нет, проверяя, выполняются ли для преобразований, составляющих это множество, свойства a) и b).

Встречаются, однако, случаи, когда выполнение свойств a) и b) очевидно. Например, если множество состоит из *всех* линейных преобразований, оставляющих неизменной некоторую фигуру F плоскости z, то это множество есть группа. Для пояснения заметим, что преобразование, обратное любому преобразованию, и сово-

купность последовательно выполненных преобразований оставляют F неизменной и, будучи линейными преобразованиями, принадлежат рассматриваемому множеству. Таким образом, в частности, множество всех линейных преобразований, оставляющих неподвижной одну и ту же точку, есть группа.

Все линейные преобразования вида (47) § 12, оставляющие Q_0 и ее внутренность неизменными, образуют группу. Множество всех линейных преобразований, переводящих некоторый правильный многоугольник в самого себя, есть группа. Эта группа, очевидно, состоит из вращений около центра многоугольника. Аналогично все линейные преобразования, оставляющие неизменной некоторую функцию переменного z, образуют группу. Например, множество линейных преобразований $z' = T(z)$ таких, что $\sin(z') = \sin(z)$, представляет собой группу. Преобразования $z' = z + 2\pi$, $z' = z + 4\pi$, $z' = \pi - z$ и т. д. принадлежат этой группе. Впоследствии мы увидим, что благодаря этому свойству $\sin(z)$ носит название „автоморфной функции".

Если дано множество линейных преобразований: $T_1, T_2, \ldots, T_n$, то группу, содержащую эти преобразования, можно построить следующим образом. Образуем множество, содержащее данные преобразования, обратные к ним и построенные всеми возможными способами произведения данных и обратных им преобразований. Нетрудно видеть, что преобразование, обратное любому преобразованию построенного множества, или произведение двух преобразований являются некоторыми комбинациями данных первоначально преобразований и обратных им и, следовательно, принадлежат множеству. Поэтому построенное нами множество есть группа. Будем говорить, что группа „порождена" преобразованиями $T_1, T_2, \ldots, T_n$; сами преобразования назовем „порождающими" преобразованиями группы.

Примеры. Рассмотрим несколько достаточно хорошо известных групп; некоторыми из них мы будем пользоваться в дальнейшем.

1. *Группа вращений около начала.* m преобразований $z' = z$, $e^{\frac{2\pi i}{m}} z$, $e^{\frac{4\pi i}{m}} z, \ldots, e^{\frac{2(m-1)}{m}\pi i} z$ образуют группу. Каждое из них представляет собой вращение около начала на угол, кратный $\frac{2\pi i}{m}$. Группа порождена преобразованием $z' = e^{\frac{2\pi i}{m}} z$.

2. *Группа ангармонических отношений.* Шесть преобразований $z' = z$, $\frac{1}{z}$, $1 - z$, $\frac{1}{1-z}$, $\frac{z-1}{z}$, $\frac{z}{z-1}$ образуют группу. Строя обратные этим преобразованиям и производя все возможные комбинации, мы убеждаемся в том, что оба условия, определяющие группу, выполняются. Если z есть одно из ангармонических отношений четырех точек на прямой, все шесть ангармонических отношений даются преобразованиями нашей группы.

3. *Группа преобразований для функции с одним периодом.* Множество преобразований $z' = z + m\omega$, где ω есть постоянное отличие от нуля и m любое

положительное или отрицательное целое число или нуль, представляет собой группу. Группа порождена преобразованием

$$z' = z + \omega.$$

4. *Группа преобразований для двояко-периодической функции.* Множество преобразований $z' = z + m\omega + m'\omega'$, где ω и ω' постоянные неравные 0 и такие, что дробь $\frac{\omega'}{\omega}$ недействительна, и где m и m' могут принять любое положительное или отрицательное целое значение или 0, представляет собой группу.

Эта группа порождена преобразованиями $z' = z + \omega$ и $z' = z + \omega'$.

Ограничение, наложенное на ω и ω', не является необходимым для доказательства того, что множество есть группа.

5. *Модулярная группа.* Бесконечное множество преобразований $\frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d действительные целые числа, для которых $ad - bc = 1$, представляет собой группу. Обращаясь к уравнениям (3) и (6) § 1, мы убеждаемся, что преобразование, обратное какому-либо из наших преобразований, а также произведение двух каких-нибудь из них есть преобразование с целыми коэфициентами и с детерминантом, равным единице. Так как коэфициенты действительны, то каждое из этих преобразований переводит действительную ось самое в себя.

6. *Группа Пикара.* Множество преобразований $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b; c, d действительные или комплексные целые числа (т. е. имеют вид $m + ni$, где m и n действительные целые числа, для которых $ad - bc = 1$ представляет собой группу. Доказательство такое же, как в предшествующем примере.

7. *Группа, связанная с Q_0.* Аналогичным образом множество преобразований $z' = \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}$, где a и c действительные или комплексные целые числа, для которых $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$, образует группу. Преобразования этой группы (теорема 23, § 12) оставляют неподвижной окружность Q_0 и переводят внутреннюю часть этой окружности в самое себя.

§ 14. Собственно разрывные группы. Если мы сравним группу преобразований $z' = z + m\omega$ для однопериодической функции с группой преобразований переноса $z' = z + b$, где b какое угодно постоянное число, то мы увидим следующую разницу: в первом случае на расстоянии, меньшем чем $|\omega|$ от точки z, нет ни одной из точек, в которые переводится z преобразованиями группы; во втором случае, выбирая преобразования с достаточно малым $|b|$, мы убеждаемся, что в любой близости z имеются точки, в которые переводится z преобразованиями группы. Обнаруженное между этими группами отличие имеет принципиальное значение.

Определение. *Группа называется собственно разрывной в плоскости z, если существуют точка z_0 и область S, заключающая эту точку, такие, что все преобразования группы за исключением тождественного переводят z_0 в точку, внешнюю по отношению к S.*

Теория автоморфных функций основана на свойствах собственно разрывных групп. Мы в этом убедимся в дальнейших наших исследованиях.

Группы преобразований, зависящих от непрерывно изменяющихся параметров, были предметом многочисленных и глубоких исследований; мы, однако, в дальнейшем не будем их рассматри-

вать, так как они не имеют отношения к теории, которой посвящена эта книга.

Говорят, что группа содержит бесконечно малое преобразование, если для некоторой области A и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти принадлежащее группе преобразование $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, которое преобразует все точки z области A так, что $|z' - z| < \varepsilon$.

Без труда может быть доказано, что для того, чтобы группа содержала бесконечно малое преобразование, необходимо и достаточно, чтобы она содержала преобразования, для которых c, $d - a$, b произвольно малы (они, конечно, не должны быть одновременно нулями, так как в этом случае преобразование было бы тождественным).

Не все группы, однако, не содержащие бесконечно малых преобразований, являются собственно разрывными. Так, например, группа Пикара не содержит бесконечно малых преобразований, так как c, $d - a$, b целые комплексные числа и не могут быть произвольно малыми, за исключением случая, когда они все равны нулю. Однако можно сказать, что точки, в которые переходит посредством преобразований группы любая точка плоскости, образуют множество, всюду плотное на плоскости z. Группа, которая не содержит бесконечно малого преобразования и не является в то же время собственно разрывной, называется „несобственно разрывной" группой на плоскости z.

§ 15. Преобразование группы. Делая линейное преобразование плоскости, в которой мы изображаем z и z', можно произвести из данной группы бесконечно много других групп.

Пусть T есть некоторое преобразование рассматриваемой группы и пусть T переводит z в z'. Пусть затем выполнено преобразование G, которое переводит z и z' соответственно в z_1 и z_1'. Тогда z_1 переходит в z_1' посредством преобразования S, имеющего вид:

$$S = GTG^{-1}, \tag{1}$$

так как

$$GTG^{-1}(z_1) = GT(z) = G(z') = z_1'.$$

Заменим каждое преобразование T исходной группы преобразованием S, которое ему соответствует на основании (1). Мы докажем, что новое множество преобразований представляет собой группу.

Так, $S^{-1} = (GTG^{-1})^{-1} = GT^{-1}G^{-1}$ принадлежит множеству, так как T^{-1} принадлежит исходной группе. Если $S_1 = GT_1G^{-1}$ есть другое преобразование, входящее в множество, то

$$SS_1 = GTG^{-1}GT_1G^{-1} = GTT_1G^{-1}$$

и SS_1 принадлежит множеству, так как TT_1 принадлежит исходной группе. Таким образом выполняются оба условия, характеризующие группу.

Две группы, преобразования которых могут быть поставлены во взаимнооднозначное соответствие, подобно тому, как это соответствие установлено для групп S и T, т. е. так, что произведению произвольного числа преобразований первой группы отвечает произведение соответствующих преобразований второй называются „изоморфными" группами.

Часто с помощью такого рода преобразования можно упростить исследование группы. Например, какая-нибудь играющая существенную роль точка может быть переведена в ∞ или какая-нибудь важная окружность может быть переведена в действительную ось или в единичную окружность. Найдя, каким образом фигуры преобразуются с помощью новой группы, а затем применяя преобразование G^{-1}, мы выразим полученные результаты в терминах старой группы. В самом деле, из уравнения (1) вытекает, что если S преобразует F в фигуру F', то T преобразует фигуру $G^{-1}(F)$ в $G^{-1}(F')$. Необходимо отметить, что независимо от выбора G преобразования S и T [уравнение (1)] принадлежит одному и тому же типу. Пусть

$$T = \frac{az+b}{cz+d}, \quad G = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \quad \begin{matrix} ad-bc=1, \\ \alpha\delta-\beta\gamma=1. \end{matrix}$$

Пользуясь уравнениями (3) и (6) § 1, построим выражения для S из (1):

$$S = \frac{(-\alpha\delta a+\alpha\gamma b-\beta\delta c+\beta\gamma d)\,z+\alpha\beta a-\alpha^2 b+\beta^2 c-\alpha\beta d}{(-\gamma\delta a+\gamma^2 b-\delta^2 c+\gamma\delta d)\,z+\beta\gamma a-\alpha\gamma b+\beta\delta c-\alpha\delta d}; \tag{2}$$

детерминант S равняется единице. Здесь

$$(-\alpha\delta a+\alpha\gamma b-\beta\delta c+\beta\gamma d)+(\beta\gamma a-\alpha\gamma b+\beta\delta c-\alpha\delta d)=-(a+d)$$

и, следовательно, K имеет одно и то же значение для S и T [уравнение (26) § 6].

§ 16. Фундаментальная область. Прежде чем приступить к изучению свойств собственно разрывных групп, целесообразно ввести весьма важное понятие фундаментальной области.

Определение. *Две фигуры (точки, кривые, области и т. д) называются конгруэнтными по отношению к данной группе, если среди преобразований этой группы, не считая тождественного преобразования, имеется преобразование, переводящее одну фигуру в другую.*

Определение. *Область (связная или несвязная) называется фундаментальной областью данной группы, если она обладает следующими двумя свойствами;*

область не содержит ни одной пары точек, конгруэнтных друг другу относительно данной группы;

в окрестности каждой граничной точки области имеются точки, конгруэнтные точкам области.

На приложенных ниже чертежах изображены фундаментальные области некоторых простых групп. Читатель, вероятно, знаком уже с некоторыми из них.

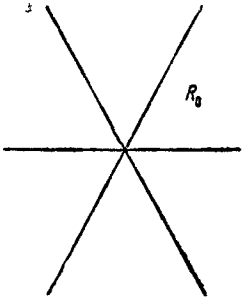
Пусть мы имеем группу вращений около некоторой точки на угол, кратный θ, где $\theta = \frac{2\pi}{k}$ (k—целое); через неподвижную точку проведем две полупрямых, образующих угол θ; тогда внутренность R_0 построенного нами угла есть фундаментальная область.

На черт. 11 R_0 есть фундаментальная область группы $z' = e^{\frac{2n\pi i}{6}} z$; окрестность любой точки на контуре R_0 содержит точки, которые переходят во внутренние точки R_0 посредством вращения на угол, равный $\pm\frac{2\pi}{6}$.

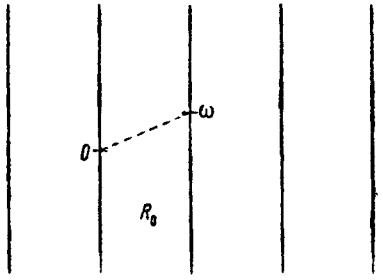
На черт. 12 R_0, строение которой видно из чертежа, есть фундаментальная область (полоса периода) группы преобразований $z' = z + m\omega$ функции с одним периодом.

На черт. 13 R_0 есть фундаментальная область (параллелограм периодов) группы преобразований двоякопериодической функции $z' = z + m\omega + m'\omega'$.

На черт. 14 R_0, ограниченная окружностями с центром в начале координат и радиусами *1* и *A*, есть фундаментальная область



Черт. 11.



Черт. 12.

группы преобразований подобия с центром подобия в начале $z' = A^n z$.

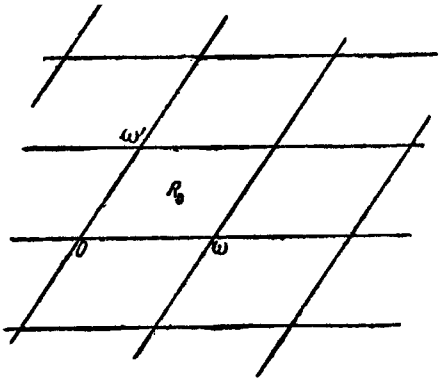
Нужно обратить внимание на некоторые свойства, которыми обладают все четыре области, построенные на чертежах, и которые, как мы увидим в дальнейшем, в большей или меньшей степени свойственны фундаментальным областям менее простых групп.

Во-первых, отметим, что границы R_0 в каждом случае состоят из конгруэнтных кривых. На черт. 11, 12 и 14 каждая из двух частей границы может быть переведена в другую посредством принадлежащего группе преобразования. На черт. 13 нижняя часть границы может быть переведена в верхнюю часть посредством переноса $z' = z + \omega'$ и левая часть в правую посредством переноса $z' = z + \omega$.

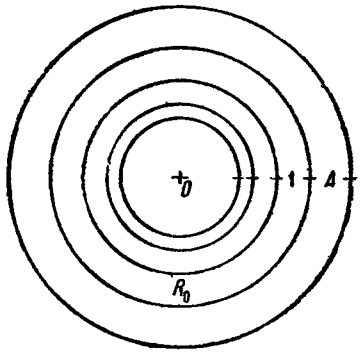
Далее преобразования, связывающие конгруэнтные части границы, являются порождающими преобразованиями группы. Два только что упомянутых переноса порождают группу преобразований двоякопериодической функции. Все преобразования, интерпретированные на черт. 11, образованы последовательным применением вращения $z' = e^{\frac{2\pi i}{6}} z$, которое переводит одну часть границы в другую. То же справедливо для других примеров. Заметим, что в открытой области R_0 можно прибавить

одну, но никак не обе из двух конгруэнтных частей границы, без того чтобы в полученной таким образом области оказались две конгруэнтных друг другу точки. Таким образом R_0 должна быть частично открытой областью.

Область R_0 и области, конгруэнтные ей (некоторые из них показаны на чертежах), образуют множество смежных неперекрывающихся областей, в сущности покрывающих всю плоскость. Однако начало координат на черт. 14 не лежит ни в одной из областей, конгруэнтных R_0. Угол при вершине R_0 на черт. 11 есть угол типа $\frac{2\pi}{k}$ $(k = 6)$. Сумма углов при четырех конгруэнтных вершинах R_0 на черт. 13 равна 2π. Подобного рода факты будут часто встречаться в дальнейшем и будут соответствующим образом обобщены. Ясно, что фундаментальная область никоим



Черт. 13.



Черт. 14.

образом не единственна. Каждая область, конгруэнтная R_0, является фундаментальной областью. Более того, заменяя любую часть R_0 конгруэнтной ей частью, мы снова получим фундаментальную область.

Таким же образом мы можем отбросить кусок принадлежащей области части границы, заменив его конгруэнтным куском другой части границы. Применяя этот способ, мы можем значительно изменять характер кривой, ограничивающей область.

Теорема 1. *Если область не содержит ни одной пары конгруэнтных точек, то области, в которые она переводится двумя различными преобразованиями группы, не перекрываются.*

Пусть A область, не содержащая ни одой пары конгруэнтных точек. Допустим, что два преобразования группы S и T переводят A в две перекрывающихся области. Каждая точка z_0 общей части соответствует точке z_1 области A посредством преобразования S и точек z_2 области A посредством преобразования T. Если бы z_1 и z_2 были различны для какой-нибудь точки z_0, то тогда z_1 и z_2 были бы конгруэнтными точками, лежащими в области A, что невозможно. Если бы для любой точки z_0 общей части z_1 и z_2 совпадали, то преобразования S и T были бы одинаковы

[теорема 7 § 3]. Так как фундаментальная область не содержит ни одной пары конгруэнтных точек, то можно высказать следующее полезное следствие.

Следствие. *Области, в которые фундаментальная область переводится двумя различными преобразованиями группы, не перекрываются.*

§ 17. Изометрические окружности группы. Мы займемся теперь исследованием наиболее общих свойств собственно разрывных групп. Для такой группы согласно определению существует по крайней мере одна точка z_0 такая, что ни одна из точек, в которые z_0 переводится преобразованиями группы, не может попасть в некоторую достаточно малую область около z_0. Пусть G переводит z_0 в ∞, и пусть группа преобразована посредством G так, как указано в § 15. Эту преобразованную группу мы изучим. Очевидно, что где бы ни был расположен центр круга Q_ϱ, его радиус может быть выбран настолько большим, чтобы ни вне Q_ϱ, ни на его периферии не было точек, конгруэнтных ∞. В частности, ∞ не может быть неподвижной точкой ни для одного из преобразований группы. Следовательно, для каждого преобразования $T=\frac{az+b}{cz+d}$ за исключением тождественного мы будем иметь $c \neq 0$. Но центр изометрической окружности конгруэнтен ∞ $\left(T \text{ переводит } -\frac{d}{c} \text{ в } \infty\right)$, отсюда следует, что центры всех изометрических окружностей лежат внутри Q_ϱ [1]).

а) *Изометрическая окружность произведения двух преобразований.* Некоторые соотношения между изометрическими окружностями двух преобразований и изометрической окружностью их произведения понадобятся нам сейчас и в дальнейшем. Рассмотрим какие-нибудь два преобразования:

$$T=\frac{az+b}{cz+d}, \quad S=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \quad \begin{matrix} ad-bc=1, & c \neq 0, \\ \alpha\delta-\beta\gamma=1, & \gamma \neq 0, \end{matrix}$$

откуда

$$ST=\frac{(\alpha a+\beta c)z+\alpha b+\beta d}{(\gamma a+\delta c)z+\gamma b+\delta d}. \tag{3}$$

---

[1]) Для дальнейшего полезно иметь в виду, что в случае, когда некоторая точка z_0 плоскости не является неподвижной ни для одного из преобразований группы (за исключением тождественного), то изометрические окружности двух различных преобразований группы различны. В самом деле, полагая для простоты $z_0=\infty$, допустим, что два преобразования группы: $T=\frac{az+b}{cz+d}$ и $S=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ ($c \neq 0$ и $\gamma \neq 0$) имеют общую изометрическую окружность. Тогда должно быть: $\frac{\gamma}{c}=\frac{\delta}{d}=e^{i\theta}$ и, как показывает простой подсчет: $ST^{-1}=e^{-2i\theta}\cdot z+e^{-i\theta}\cdot(a\beta-\alpha b)$, т. е. бесконечно удаленная точка, вопреки предположению, является неподвижной для преобразования ST^{-1} группы. В частности, доказанное свойство справедливо для всех собственно разрывных групп.

Мы, конечно, полагаем, что $S \neq T^{-1}$, т. е. что ST не есть тождественное преобразование; уравнение изометрической окружности для ST будет:

$$|(\gamma a + \delta c) z + \gamma b + \delta d| = 1. \tag{4}$$

Обозначим через I_s, I_s', I_t, I_t', I_{st} соответственно изометрические окружности преобразований S, S^{-1}, T, T^{-1}, ST; их центры соответственно через g_s, g_s', g_t, g_t', g_{st} и, наконец, радиусы через r_s, r_t, r_{st}. Тогда

$$g_s = -\frac{\delta}{\gamma}, \quad g_s' = \frac{a}{\gamma}, \quad g_t = -\frac{d}{c}, \quad g_t' = \frac{a}{c}, \quad g_{st} = -\frac{\gamma b + \delta d}{\gamma a + \delta c},$$

$$r_s = \frac{1}{|\gamma|}, \quad r_t = \frac{1}{|c|}, \quad r_{st} = \frac{1}{|\gamma a + \delta c|}. \tag{5}$$

Отсюда мы получим следующие соотношения:

$$r_{st} = \frac{1}{|\gamma a + \delta c|} = \frac{1}{|\gamma c| \left| \frac{a}{c} + \frac{\delta}{\gamma} \right|} = \frac{r_s r_t}{|g_t' - g_s|} \tag{6}$$

и

$$g_{st} - g_t = -\frac{\gamma b + \delta d}{\gamma a + \delta c} + \frac{d}{c} = \frac{\gamma}{c(\gamma a + \delta c)}, \tag{7}$$

откуда

$$|g_{st} - g_t| = \frac{r_{st} r_t}{r_s} = \frac{r_t^2}{|g_t' - g_s|}. \tag{8}$$

b) *Расположение изометрических окружностей.* Пользуясь предшествующими уравнениями, мы можем вывести некоторые простые факты относительно изометрических окружностей группы.

Радиусы изометрических окружностей ограничены. Пусть $T\,(\neq 1)$ некоторое преобразование, принадлежащее группе, и $S\,(\neq 1)$ другое, принадлежащее той же группе преобразование, отличное от T^{-1}. Из (8) получаем:

$$r_t^2 = |g_{st} - g_t|\,|g_t' - g_s|.$$

Но каждый из множителей в правой части, являясь расстоянием между двумя внутренними точками круга Q_ϱ, меньше 2ϱ. Поэтому

$$r_t^2 < 4\varrho^2, \quad r_t < 2\varrho. \tag{9}$$

Множество изометрических окружностей, радиусы которых превосходят некоторое наперед заданное положительное число, конечно.

Пусть I_s и I_t две различные изометрические окружности с радиусами, превосходящими некоторое положительное число k. Так как ST нетождественное преобразование, то мы получаем из (6):

$$|g_t' - g_s| = \frac{r_s r_t}{r_{st}} > \frac{k^2}{2\varrho}. \tag{10}$$

Таким образом расстояние между центрами всех возможных пар изометрических окружностей с радиусами, превосходящими k,

имеют положительную нижнюю границу. Так как центры всех таких окружностей расположены внутри круга Q_ϱ, то число их конечно. Из последнего предложения вытекает, что множество всех преобразований, принадлежащих группе, счетно.

Другое следствие может быть высказано следующим образом: *Для всякой бесконечной последовательности различных изометрических окружностей $I_1, I_2, I_3, \ldots$ преобразований группы, радиусы которых соответственно $r_1, r_2, r_3, \ldots$, имеет место* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

§ 18. Предельные точки группы. В этом и в остальных параграфах настоящей главы мы будем предполагать, что ни одно из принадлежащих группе преобразований не имеет неподвижной точки в бесконечности, так что изометрические окружности существуют для всех преобразований за исключением тождественного; и кроме того, что в окрестности бесконечно удаленной точки нет точек, конгруэнтных бесконечности. Сделанное здесь предположение не нарушает общности результатов, так как мы уже показали ранее, что каждая собственно разрывная группа может быть преобразована в группу с требуемыми свойствами.

Рассмотрим центры изометрических окружностей. Если группа содержит бесконечное множество преобразований, то центры образуют бесконечное множество, которое имеет одну или несколько точек сгущения. Введем следующее определение.

Определение. *Точка сгущения центров изометрических окружностей преобразований группы называется предельной точкой группы.*

Всякая точка, не являющаяся предельной, называется обыкновенной точкой.

Очевидно, что все предельные точки расположены внутри или на периферии круга Q_ϱ из § 17, так как центры всех изометрических окружностей лежат внутри этого круга. Если группа содержит только конечное число преобразований, то предельных точек, конечно, не существует.

Теорема 2. *В окрестности предельной точки P существует бесконечно много различных точек, конгруэнтных каждой точке плоскости, за исключением, может быть, самой точки P и еще одной точки.*

Так как не существует бесконечного множества изометрических окружностей с радиусами, превосходящими некоторую заданную положительную величину, то в окрестности точки P имеются изометрические окружности со сколь угодно малыми радиусами. Пусть Q небольшой кружок с центром в P и пусть I_1', $I_2', \ldots$ бесконечная последовательность изометрических окружностей, содержащихся в Q, центры которых g_n' приближаются к P, когда n стремится к ∞.

Обозначим через $I_1, I_2, \ldots, I_n$ изометрические окружности, образами которых, посредством преобразований $S_1, S_2, \ldots, S_n$, являются окружности $I_1', I_2', \ldots$

Центры g_n окружностей I_n имеют по крайней мере одну точку сгущения. Допустим сначала, что это некоторая точка P', отличная от P. Тогда достаточно доказать, что, какова бы ни

была точка P_1, отличная от P и P', в круге Q имеются конгруэнтные ей точки, отличные от P; заставляя затем радиус Q стремиться к 0, мы придем к заключению, что имеется бесконечное множество точек, конгруэнтных P_1. Пусть окружность I_n настолько близка к P' и настолько малого радиуса, что точки P и P_1 лежат вне ее. Тогда, так как точка P_1 находится вне I_n, то точка $S_n(P_1)$ находится внутри I_n' и, следовательно, внутри Q. Если точка $S_n(P_1)$ отлична от P, то предложение доказано. Если же $S_n(P_1)$ совпадает с P, то, так как вследствие этого P не может быть неподвижной точкой преобразования S_n, точка $S_n^2(P_1)$ или, что то же, $S_n(P)$ лежит в Q и не совпадает с P.

Теперь осталось рассмотреть случай, когда центры I_n имеют единственную предельную точку и притом совпадающую с P. Пусть A и A' две точки, отличные друг от друга и от точки P. A и A' лежат вне бесконечного множества окружностей I_n. Выполняя преобразования S_n, соответствующие окружностям этого множества, получим, что $A_n = S_n(A)$ и $A_n' = S_n(A')$ лежат в I_n', а следовательно, в Q. По крайней мере одна из точек A_n и A_n' отличается от P. Отсюда следует, что одна из точек A и A' имеет в Q бесконечное множество конгруэнтных ей точек, отличных от P. Таким образом может существовать не более чем одна точка, отличная от P и не имеющая в Q бесконечного множества конгруэнтных точек, отличных от P. Этим самым теорема доказана.

Теорема 3. *Любое преобразование, принадлежащее группе, переводит множество предельных точек этой группы само в себя.*

Множество центров изометрических окружностей есть множество всех точек, конгруэнтных бесконечности. Центр одной изометрической окружности переходит в центр другой или в ∞.

Пусть P точка сгущения множества центров $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ Тогда преобразование S, переводящее P в P', переводит $g_1, g_2, \ldots$ в $g_1', g_2', \ldots$ с точкой сгущения P'. Точки этого множества (с единственным возможным исключением, когда в множество входит бесконечно удаленная точка) являются центрами изометрических окружностей. Следовательно, P есть предельная точка.

Наконец ни одна точка, не являющаяся предельной, не может быть переведена посредством S в предельную точку, так как в противном случае преобразование S^{-1} переводило бы предельную точку в обыкновенную.

Теорема 4. *Если множество предельных точек содержит больше чем две точки, то оно есть совершенное множество.*

По определению множество называется совершенным, если оно обладает следующими двумя свойствами: 1) каждая точка сгущения множества принадлежит множеству, так что множество замкнуто; 2) всякая точка множества есть точка сгущения для точек этого множества, так что оно плотно на самом себе.

То, что множество предельных точек группы замкнуто, видно сразу. В самом деле, в окрестности точки сгущения для предельных точек также имеется бесконечно много центров изометри-

ческих окружностей; следовательно, точка сгущения предельных точек есть предельная точка.

Для доказательства того, что второе свойство тоже выполняется, мы должны показать, что в окрестности предельной точки P находится бесконечное множество предельных точек. Если P_1 и P_2 две других предельных точки, то по крайней мере одна из них имеет бесконечно много ей конгруэнтных точек в окрестности P (теорема 2). Так как точка, конгруэнтная предельной, есть также предельная, то наличие второго свойства совершенного множества установлено.

Существуют группы преобразований — конечные группы — без предельных точек. Группы, имеющие только одну или только две предельных точки, тоже существуют. Всякая группа, отличная от этих трех простых типов групп, имеет бесконечное множество предельных точек. Наконец на основании хорошо известного свойства совершенных множеств множество предельных точек несчетно.

Теорема 5. *Если некоторое замкнутое множество Σ, состоящее более чем из одной точки, переводится само в себя всеми преобразованиями группы, то Σ содержит все предельные точки группы.*

Предположим обратное, т. е. что существует предельная точка P, не входящая в Σ. Тогда вследствие замкнутости Σ в достаточно малой окрестности P не будет точек Σ. Пусть P_1 и P_2 две точки, принадлежащие Σ, по крайней мере одна из них (теорема 2) имеет в любой окрестности P бесконечно много конгруэнтных точек. Это противоречит предположению, что Σ переходит сама в себя.

Как пример применения последней теоремы рассмотрим группу, все преобразования которой действительны. Преобразования этой группы переводят действительную ось самое в себя. Отсюда следует, что все предельные точки лежат на действительной оси.

§ 19. Определение области R. Область R состоит из всех частей плоскости, внешних по отношению к изометрическим окружностям всех преобразований группы. Более точно: точка z принадлежит R, если около нее как центра можно построить круг, не содержащий ни одной точки, лежащей внутри какой-либо изометрической окружности. Этим самым мы отбросили также и такие предельные точки (если таковые имеются), в любой окрестности которых лежат дуги изометрических окружностей, хотя сами эти точки являются внешними по отношению к каждой изометрической окружности.

Позднее мы присоединим к R часть ее границы, но пока будем считать, что она состоит только из внутренних точек. Область R может быть связной, но она может также состоять из двух или нескольких отдельных частей. Из (9) следует, что часть плоскости, лежащая вне круга, концентрического с Q_ϱ с радиусом, равным 3ϱ, содержится в R.

Нетрудно видеть, что в R не содержится ни одной пары конгруэнтных точек. Преобразование T переводит все точки, лежащие вне I_t, во внутренние точки I_t'. Любое преобразование группы за исключением тождественного переводит точку области R внутрь некоторой изометрической окружности, т. е. в точку, внешнюю по отношению к R. Таким образом ни одна из точек R не может быть конгруэнтна другой точке R.

§ 20. Области, конгруэнтные R. Выполняя над областью R всевозможные преобразования, принадлежащие группе, мы получим множество конгруэнтных областей, которые попарно не перекрываются (теорема 1). Относительно расположения этих областей имеет место следующая важная теорема.

Теорема 6. *В окрестности любой точки плоскости имеются точки области R или областей, конгруэнтных R.*

Предположим обратное, т. е. что существуют точка z_0 и круг Q с центром в точке z_0, радиус которого r может быть выбран настолько малым, что ни точки R, ни точки, конгруэнтные точкам R, не попадут в Q. Тогда круги, в которые переходит Q посредством преобразований группы, не содержат ни точек R, ни точек, конгруэнтных точкам R. В частности, ни один из центров изометрических окружностей не может лежать ни в Q, ни в кругах, в которые переходит Q, так как каждый из этих центров конгруэнтен ∞, которая является точкой R. Все точки Q и точки, конгруэнтные им, суть обыкновенные точки, т. е. не являются предельными точками группы. Так как точка z_0 не принадлежит R, то на лежит или внутри какой-нибудь изометрической окружности или на ней. Аналогично центр любого круга, конгруэнтного Q, лежит внутрн векоторой изометрической окружности или на ней.

Мы сейчас покажем, что существует круг произвольно большого радиуса, конгруэнтный Q, что, очевидно, противоречиво, и следовательно, этим самым теорема будет доказана. Пусть точка z_0 расположена внутри или на границе изометрической окружности I_s преобразования S. Центр I_s лежит вне Q. Рассмотрим круг Q_1, в который переходит Q посредством S. Преобразование S равносильно последовательно выполненным: инверсии около I_s, отражению около некоторой прямой и возможно еще вращению. Величина Q_1 определяется инверсией.

Приемами элементарной алгебры можно показать, что если центр Q находится на окружности I_s, то радиус Q_1 есть

$$r_1 = \frac{r}{1 - \frac{r^2}{r_s^2}},$$

где r_s есть радиус окружности I_s.

Если центр лежит внутри окружности I_s, то r_1 превосходит эту величину. Так как $r_s < 2\varrho$ [уравнение (9)] и $r < r_s < 2\varrho$, то мы получаем:

$$r_1 > kr, \quad k = \frac{1}{1 - \frac{r_1^2}{4\varrho^2}} > 1.$$

Рассуждая, как раньше, заключаем, что центр круга Q_1 лежит внутри или на некоторой изометрической окружности. Выполняя над Q_1 преобразование, соответствующее этой изометрической окружности, мы переведем круг Q_1 в круг Q_2 с радиусом r_2; так как $r_1 > r$, то

$$r_2 > \frac{r_1}{1 - \frac{r_1^2}{4\varrho^2}} > kr_1 > k^2 r.$$

Продолжая таким образом, мы докажем существование круга Q_n конгруэнтного Q и радиус которого превосходит $k^n r$. Для до, статочно большого n Q_n должен заключать точки, внешние по отношению к конечной области, внутри которой лежат изометрические окружности, т. е. точки R. Так как эти точки оказываются конгруэнтными точками Q, то мы приходим к противоречию, и теорема доказана.

Теперь мы докажем следующую теорему:

Теорема 7. *R есть фундаментальная область группы.*

Мы уже раньше доказали, что в R нет ни одной пары конгруэнтных точек. Мы должны теперь доказать, что в любом кружке Q с центром в граничной точке P области R существуют точки, конгруэнтные точкам области R. Пусть z_0 точка Q, лежащая на изометрической окружности I. Тогда в области, лежащей одновременно внутри Q и I, не будет точек R, а поэтому вследствие теоремы 6 имеются точки, конгруэнтные точкам R. Таким образом теорема доказана.

Теорема 8. *Любая замкнутая область, не содержащая предельных точек группы, может быть покрыта конечным числом областей, конгруэнтных R* (в частности, в числе покрывающих областей может находиться R). *Эти области примыкают друг к другу вплотную.*

Пусть A замкнутая область, например область, ограниченная простой замкнутой кривой; пусть далее эта область не содержит предельных точек группы нн внутри, ни на границе. Тогда имеется только конечное множество изометрических окружностей, содержащих точки A. Так как если бы их было бесконечное множество, то в это множество входили бы окружности произвольно малого радиуса и центры этих окружностей имели бы точку сгущения в A, что противоречит предположению.

Преобразование S переводит R в область R_s, лежащую внутри I_s' изометрической окружности преобразования S^{-1}. Если I_s' содержит точки A, то R_s может содержать точки A. Если A лежит вне I_s', то R_s не содержит точек A. Таким образом число областей, конгруэнтных области R, которые целиком или частично покрывают A, не превосходит числа изометрических окружностей, внутри которых имеются точки A. Это число конечно. Так как в окрестности любой точки A имеются точки, конгруэнтные точкам области R, то, следовательно, покрывающие области примыкают друг к другу плотно. Таким образом A

покрыто целиком, за исключением, конечно, точек, лежащих на границах покрывающих областей.

Теорема 9. *Внутри каждой области, содержащей предельную точку группы, лежит бесконечно много областей, конгруэнтных полной области R.*

Эта теорема следует сразу из того факта, что в любой области, заключающей предельную точку, лежит бесконечно много изометрических окружностей. Каждая из этих окружностей содержит область, конгруэнтную полной области R, и, с другой стороны, все эти области отличны друг от друга.

Последняя теорема создает наглядное представление о том, как располагаются на плоскости области, конгруэнтные R. R и области, конгруэнтные R, полностью покрывают каждую часть плоскости, состоящую из обыкновенных точек, и бесконечное множество их накопляется около предельных точек группы.

§ 21. Граница области R. Граничная точка P области R есть точка, не принадлежащая R, но такая, что любой круг с центром в P содержит точки R. P может быть или обыкновенной точкой или предельной точкой. Очевидно, что P не может лежать внутри изометрической окружности.

Если P обыкновенная точка, то она лежит на одной или нескольких изометрических окружностях. Так как в окрестности обыкновенной точки лежит лишь конечное число дуг изометрических окружностей, то около P как центра можно построить такой круг Q, который будет внешним по отношению ко всем изометрическим окружностям, за исключением проходящих через P.

В наиболее общем случае граничная точка P принадлежит к одной из следующих категорий:

α) P предельная точка группы;

β) P обыкновенная точка, лежащая на одной единственной изометрической окружности;

γ) P обыкновенная точка, лежащая одновременно на двух или более изометрических окружностях; в этом случае P называется „вершиной“.

Представляется целесообразным отнести к категории γ) следующий специальный случай: когда P есть неподвижная точка эллиптического преобразования с периодом 2, тогда, несмотря на то, что P лежит на единственной изометрической окружности, она разделяет две конгруэнтных дуги этой окружности. В этом случае мы будем относить P к категории γ), а не β). Преимущества этой классификации выяснятся в дальнейшем.

Относительно граничных точек категории α) мы не прибавим ничего нового к уже доказанным в § 18 теоремам о предельных точках. В дальнейшем мы увидим (§ 25), что существуют группы, для которых граница R состоит исключительно из предельных точек.

Однако границы областей R для групп, представляющих интерес в нашей теории, содержат и обыкновенные точки.

а) *Стороны.* Рассмотрим граничную точку категории β). Пусть P лежит на окружности I_t и пусть P переходит посредством пре-

образования T в точку P', лежащую на окружности I_t'. Покажем, что P' есть также граничная точка категории β).

Оставим в стороне случай $P'=P$, который имеет место только если I_t и I_t' совпадают и точка P есть неподвижная точка эллиптического преобразования с периодом 2; этот случай был отнесен к категории γ).

Во-первых, P' не может лежать внутри какой-либо изометрической окружности. В самом деле допустим, что P' лежит внутри I_s; тогда преобразование S увеличивает длины в окрестности P', но так как T переводит P в P', не изменяя длин, то преобразование ST увеличивает длины в окрестности точки P. Но в таком случае P должна лежать внутри изометрической окружности I_{st}, что невозможно, так как P — граничная точка.

Во-вторых, P' не может лежать на изометрической окружности, отличной от I_t'. В самом деле, если P' лежит на I_s, то преобразование ST не изменяет длин в точке P. Но тогда точка P лежит на окружности I_{st}, что противоречит предположению, что P лежит на единственной изометрической окружности. Таким образом доказано, что P' — граничная точка категории β).

В окрестности точки P нет ни одной изометрической окружности помимо I_t. Очевидно, что точки I_t, лежащие в окрестности P, являются граничными точками категории β) и что, следовательно, конгруэнтные им точки, расположенные на I_t', также принадлежат категории β). Мы таким образом имеем в качестве части границы дугу окружности I_t и конгруэнтную ей дугу окружности I_t'. Эти дуги или являются полными окружностями, или оканчиваются в точках категории α) или γ). Так как эти дуги принадлежат изометрическим окружностям, то они имеют одинаковые длины. Таким образом получаем следующую теорему:

Теорема 10. *Граничные точки области R, принадлежащие категории β), образуют множество попарно конгруэнтных круговых дуг или сторон. Каждые две конгруэнтные стороны имеют одинаковые длины.*

b) *Вершины.* Теперь остается рассмотреть граничные точки категории γ). Через точку P этой категории проходит конечное число изометрических окружностей. Построим около P кружок Q настолько малый, чтобы все изометрические окружности, отличные от проходящих через точку P, оказались вне Q и чтобы вне Q оказались также все точки пересечения окружностей, проходящих через P, отличные от P.

Изометрические окружности, проходящие через P, делят круг Q на конечное число частей. Вследствие того, что P есть граничная точка, одна из этих частей A принадлежит R. Две дуги, пусть на I_t и I_s, ограничивающие A, составляют часть границы R.

Точки этих дуг, отличные от P, принадлежат категории β). Таким образом в вершине встречаются две стороны R.

Выполним теперь преобразование T; точка P перейдет в точку P' на I_t'. Рассуждая почти так же, как в предшествующем случае, мы установим, что P' есть вершина. В самом деле, мы можем

показать, что через P и P' проходит одно и то же число изометрических окружностей. Пусть через точку P проходят изометрические окружности преобразований T, S, U,... Тогда через точку P' проходят изометрические окружности преобразований T^{-1}, ST^{-1}, UT^{-1},..., в чем можно убедиться, рассматривая, как изменяются длины в окрестности P', под влиянием этих преобразований. Эти преобразования различны, так как если бы $ST^{-1} = UT^{-1}$, то тогда было бы $S = U$.

Поэтому различны также их изометрические окружности. Следовательно, через P' проходит не меньше изометрических окружностей, чем через P. Меняя ролями P и P', мы заключаем, что через P проходит не меньше изометрических окружностей, чем через P'.

c) *Расширение* R. Для дальнейшего представляется удобным присоединить к области R некоторые точки ее границы. Из двух конгруэнтных сторон можно, исключая концы, присоединить к R одну, что не приведет к присоединению точек, конгруэнтных точкам R. Вершина, в которой пересекаются ограничивающие область дуги, может быть конгруэнтна нескольким другим вершинам. К области R можно прибавить одну из них. Полученная таким образом область также является фундаментальной областью.

В качестве иллюстрации к полученным результатам рассмотрим следующий пример конечной группы:

§ 22. Пример. Конечная группа. Преобразования

$$T_0 = z, \qquad T_1 = \frac{2z-1}{3z-2}, \quad T_2 = \frac{z}{5z-1},$$

$$T_3 = \frac{3z-1}{7z-2}, \quad T_4 = \frac{2z-1}{7z-3}, \quad T_5 = \frac{3z-1}{8z-3}$$

образуют группу. В самом деле, эта группа может быть получена из группы ангармонических отношений [(2), § 13] посредством преобразования

$$G = \frac{1}{z+2}.$$

Ни одно из этих преобразований не имеет неподвижной точки в ∞. Напишем уравнения изометрических окружностей наших преобразований:

$$I_1: \left|z - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}; \qquad I_2: \left|z - \frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}; \qquad I_3: \left|z - \frac{2}{7}\right| = \frac{1}{7};$$

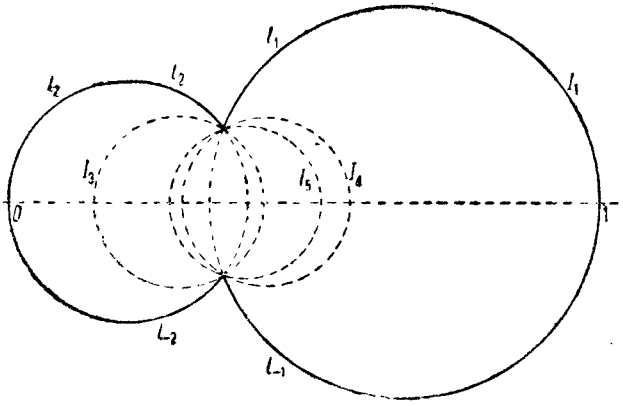
$$I_4: \left|z - \frac{3}{7}\right| = \frac{1}{7}; \qquad I_5 = \left|z - \frac{3}{8}\right| = \frac{1}{8}.$$

Они изображены на черт. 15.

Фундаментальная область ограничена дугами окружностей I_1, I_2.

T_1 эллиптическое преобразование с периодом 2 $(a + d = 0)$; одна из его неподвижных точек 1. T_1 переводит верхнюю часть l_1, входящей в границу дуги I_1, в ее нижнюю часть l_{-1}. Аналогично T_2 имеет период 2, и верхняя и нижняя стороны l_2 и l_{-2} конгруэнтны. Таким образом имеем две пары равных конгруэнтных сторон. Далее замечаем, что вершины $\frac{5}{14} \pm i\sqrt{\frac{3}{14}}$ конгруэнтны; через них проходят все пять изометрических окружностей нашей группы.

Точки 0 и 1 тоже являются вершинами. R и пять конгруэнтных ей областей покрывают всю плоскость, не перекрываясь. Конгруэнтные R области не пред-



Черт. 15.

ставлены на чертеже, но нетрудно видеть, что R и конгруэнтные ей области совпадают с шестью областями, на которые изометрические окружности I_1, I_2, I_5 разбивают плоскость.

§ 23. Порождающие преобразования. В § 13 уже говорилось о группе, получаемой путем комбинирования всеми возможными способами конечного или бесконечного множества линейных преобразований. Мы хотим теперь исследовать, в какой мере знание фундаментальной области R дает возможность судить о множестве порождающих преобразований группы.

Пусть l_1, l_{-1}, l_2, l_{-2}, ... пары конгруэнтных сторон области R. Пусть T_1 переводит l_1 в l_{-1}, T_2 переводит l_2 в l_{-2} и т. д. Мы покажем, что при некоторых обстоятельствах T_1, T_2 и т. д. образуют множество порождающих преобразований группы.

Рассмотрим группу, состоящую из всех возможных комбинаций T_1, T_2, ... и обратных к ним; очевидно, что каждое преобразование этой группы содержится также в исходной группе. Таким образом группа, порожденная преобразованиями T_1, T_2, ..., которую мы будем обозначать Γ_t, является *подгруппой* исходной группы. Нас интересует вопрос, содержит ли группа Γ_t все преобразования исходной группы или только часть их.

Рассмотрим, каким образом R отображается посредством преобразований группы Γ_t. Для удобства будем обозначать впредь T_n^{-1} через T_{-n}. T_1 переводит R в некоторую область R_1, примыкающую к R вдоль стороны l_{-1}; T_{-1} $(=T_1^{-1})$ переводит R в область R_{-1}, примыкающую к R вдоль l_1; вообще T_n переводит R в область R_n, примыкающую к R вдоль стороны l_{-n}. Таким образом преобразования T_1, T_2, ... и им обратные переводят R в области, примыкающие к R вдоль всех ее сторон.

Пусть S преобразование, принадлежащее исходной группе, и пусть оно переводит R в R_s. R_s ограничена круговыми дугами, которые конгруэнтны сторонам l_n области R. Области R_n, при-

мыкающие к R вдоль ее сторон, перейдут посредством S в области, примыкающие к R_s вдоль всех ее сторон. Таким образом $[R_s = S(R)]$ окружена примыкающими к ней вдоль всех ее сторон областями $ST_n(R)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Предположим, что S принадлежит группе Γ_t. Тогда ST_n принадлежит Γ_t и области, которыми окружена R_s, являются отображениями R посредством преобразований группы Γ_t. Каждая из областей, в которые переходит R посредством преобразований группы Γ_t, окружена со всех сторон другими областями того же рода. Эти области плотно примыкают друг к другу и не имеют свободных сторон; они образуют одну или несколько сетей. Если эти сетки покрывают всю плоскость, то Γ_t совпадает с исходной группой; в противном случае Γ_t не совпадает с исходной группой.

Пусть A замкнутая область, не содержащая предельных точек группы и имеющая общие точки с областью R. Тогда области R и конечное число областей, в которые переходит R посредством преобразований группы Γ_t, полностью покрывают A. В самом деле, мы можем присоединить к R области из нашей сети, примыкающие к области R вдоль сторон, лежащих в A. Затем мы можем присоединить области, примыкающие к ранее присоединенным областям вдоль сторон, лежащих в A, и т. д. Этот процесс можно продолжить, если имеется хотя бы одна свободная сторона, лежащая в A. Но A может быть целиком покрыта конечным числом областей, конгруэнтных R (теорема 8); следовательно, указанный процесс присоединения закончится после конечного числа шагов.

Аналогично этому, если область A имеет общие точки с областью R_t, конгруэнтной R относительно некоторого преобразования группы Γ_t, то A может быть покрыто конечным числом областей, конгруэнтных R относительно преобразований группы Γ_t.

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 11. *Если некоторая точка R может быть соединена со всеми конгруэнтными ей точками посредством кривых, не проходящих через предельные точки, то преобразования $T_1, T_2, \ldots$, относительно которых конгруэнтны друг другу стороны R, составляют множество порождающих преобразований группы.*

Пусть S произвольное преобразование исходной группы. Пусть z_0 есть точка R, которая может быть соединена с любой конгруэнтной ей точкой посредством кривой, не проходящей через предельные точки. Пусть C кривая, соединяющая z_0 с точкой $z_0' = S(z_0)$. C может быть заключена в замкнутую область A, состоящую целиком из обыкновенных точек.

A может быть покрыта областью R и конечным числом областей, конгруэнтных R относительно преобразований группы Γ_t. В частности в Γ_t найдется преобразование T, переводящее R в область, покрывающую окрестность точки z_0'. Области, конгруэнтные R относительно преобразований S и T, перекрываются, а поэтому $S = T$. Каждое преобразование исходной группы входит в Γ_t, что и требовалось доказать.

Существуют несколько случаев, когда можно сразу установить, что T_1, T_2,... служат порождающими преобразованиями. Первый случай, когда группа конечна. Так как в этом случае нет предельных точек, то условия теоремы выполняются. Например, для группы, данной в § 22, порождающими преобразованиями служат T_1, T_2. Читателю предоставляется проверить, что путем их комбинирования можно получить остальные преобразования.

Далее распределение предельных точек может быть таково, что каждые две точки, не являющиеся предельными, могут быть соединены посредством кривой, не проходящей через предельные точки. Тогда, очевидно, условия теоремы выполнены. Простейшими примерами служат группы с конечным числом (одной или двумя) предельных точек.

§ 24. Циклические группы. Определение. *Группа, порожденная одним преобразованием, называется циклической.*

Пусть T порождающее преобразование; тогда группа состоит из преобразований: $\ldots T^{-2}, T^{-1}, 1, T, T^2, \ldots$ Группы, фундаментальные области которых изображены на черт. 11, 12 и 14, являются циклическими. В этих примерах для всех преобразований бесконечность является неподвижной точкой. В настоящем параграфе будут подвергнуты исследованию циклические группы, происходящие от преобразований различных типов, при этом мы предположим, что неподвижные точки преобразования T лежат на конечном расстоянии. Знание циклических групп очень важно потому, что каждая группа содержит циклические подгруппы. В самом деле, группа, порождаемая одним преобразованием исходной группы, принадлежит этой группе.

Если имеются две неподвижных точки ξ_1 и ξ_2, то T может быть написано в виде [§ 6, уравнение (24)]:

$$\frac{z'-\xi_1}{z'-\xi_2} = K\,\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}, \qquad K \neq 1. \tag{11}$$

Общее преобразование группы T^n представляется так:

$$\frac{z'-\xi_1}{z'-\xi_2} = K^n\,\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}. \tag{12}$$

Решая относительно z', получим:

$$z' = T^n(z) = \frac{(K^n\xi_2-\xi_1)\,z+(1-K^n)\,\xi_1\xi_2}{(K^n-1)\,z+\xi_2-K^n\xi_1}.$$

Так как детермичант этого преобразования равен $K^n(\xi_1-\xi_2)^2$, то для получения детерминанта, равного единице, необходимо разделить числитель и знаменатель на $K^{\frac{n}{2}}(\xi_1-\xi_2)$. Уравнение изометрической окружности I_n преобразования T^n имеет вид:

$$\left|z+\frac{\xi_2-K^n\xi_1}{K^n-1}\right| = \left|\frac{K^{\frac{n}{2}}(\xi_1-\xi_2)}{K^n-1}\right| = \left|\frac{\xi_1-\xi_2}{K^{\frac{n}{2}}-K^{-\frac{n}{2}}}\right|. \tag{13}$$

a) *Гиперболические и локсодромические циклические группы.* Если T гиперболическое преобразование, то K действительно и $|K| \neq 1$; тогда множитель K^n преобразования T^n при $n \neq 0$ тоже действителен и по абсолютной величине не равен единице. Следовательно, все преобразования группы гиперболические. Если K недействительное число и $|K| \neq 1$, то $|K^n| \neq 1$, если $n \neq 0$; однако для некоторых значений n K^n может быть действительно. Отсюда заключаем, что если T локсодромическое преобразование, то все преобразования группы будут локсодромическими или гиперболическими.

В § 11, b) мы установили, что неподвижная точка не может лежать на какой-либо из изометрических окружностей I_n и I_n' преобразования T^n и обратного ему, в случае если T^n принадлежит к гиперболическому или локсодромическому типу. Очевидно, что неподвижная точка не может лежать и вне обеих окружностей I_n, I_n', так как преобразование T^n изменяет положение таких точек. Каждая I_n содержит неподвижную точку. Когда n неограниченно растет, радиус I_n стремится к нулю; следовательно, неподвижная точка есть предельная точка группы.

Так как две неподвижных точки группы образуют множество Σ, удовлетворяющее условиям теоремы 5, то, применяя эту теорему, приходим к заключению, что помимо ξ_1 и ξ_2 не существует других предельных точек.

В дальнейшем, изучая расположение изометрических окружностей, мы будем пользоваться следующей теоремой:

Теорема 12. *Пусть I_t, I_s, I_s', I_u соответственно изометрические окружности преобразований T, S, S^{-1}, $U = TS$. Если I_t и I_s' расположены одна вне другой, то I_u содержится в I_s. Если I_t и I_s' касаются внешним образом, то I_u лежит в I_s и касается ее изнутри.*

Доказательство просто. Предположим, что окружности не касаются; пусть z некоторая точка, лежащая вне окружности I_s (или на ней). Тогда S переводит z в точку z', лежащую внутри I'_s (или на ней), при этом длины в окрестности z уменьшаются (или остаются неизменными).

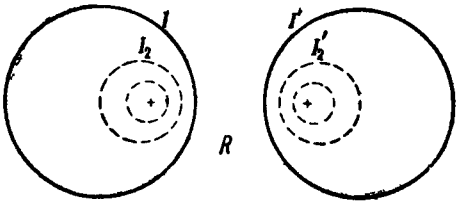
В силу условий теоремы z' лежит вне I_t; поэтому при преобразовании точки z' посредством T длины в окрестности z' уменьшаются.

Тогда при преобразовании точки z посредством U длины в окрестности z уменьшаются; следовательно, точка z лежит вне I_u.

Так как каждая точка, внешняя по отношению к I_s или лежащая на I_s, является внешней по отношению к I_u, то последняя окружность содержится в первой.

Если I_s и I_t касаются внешним образом в точке a, то предшествующие рассуждения остаются справедливыми для всех точек, за исключением точки a_0 на I_s, переходящей в a посредством S. Преобразование TS не изменяет длин в точке a_0 и поэтому a_0 лежит на I_u.

Если в циклической группе преобразование T принадлежит гиперболическому или локсодромическому типу с дополнительным условием $|a+d| \geqslant 2$, то изометрические окружности I и I' преобразований T и T^{-1} лежат одна вне другой (возможно касание). Мы теперь покажем, что I содержит I_2; I_2 содержит I_3, и т. д; и аналогично I' содержит I_2'; I_2' содержит I_3' и т. д.

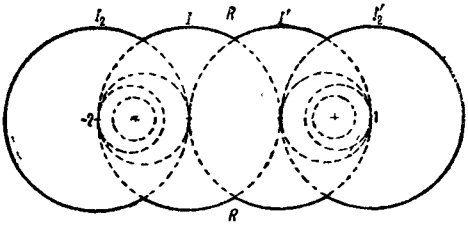


Черт. 16.

Из теоремы 12 мы сразу заключаем, полагая $S=T$, что I_2 содержится в I. Подобно этому, для произведения $T^{-1}\,T^{-1}$, I_2' лежит в I'.

Общее соотношение мы выведем с помощью индукции. Предположим, что высказанное предложение справедливо для всех изометрических окружностей до I_n и I_n' включительно, и рассмотрим I_{n+1}. Мы можем написать $T^{n+1}=TT^n$. По предположению I_n' изометрическая окружность преобразования T^{-n} лежит в I' и поэтому вне I. Из теоремы 12 следует, что I_{n+1} лежит внутри I_n. На тех же основаниях I'_{n+1} содержится в I_n'.

Из предыдущего следует, что I и I' содержат все остальные изометрические окружности, поэтому фундаментальной областью является область вне этих двух окружностей.



Черт. 17.

На черт. 16 изображены изометрические окружности группы, порожденной гиперболическим преобразованием, для которого $K=4$.

Картина будет несколько другая для случая локсодромического преобразования, для которого $|a+d|<2$. На черт. 17 изображены изометрические окружности группы, порожденной преобразованием $T=\dfrac{1}{z+1}$. Здесь $a+d=i$ [1]); следовательно, T локсодромического типа. Конгруэнтные части границы R связаны посредством преобразований T и T^2.

Согласно теореме 11 они являются порождающими преобразованиями группы. Этот пример показывает, что порождающие преобразования, получаемые путем применения теоремы 11, не являются наилучшими из возможных, так как некоторые из пре-

[1]) Если написать T в виде:

$$T=\frac{i}{iz+i},$$

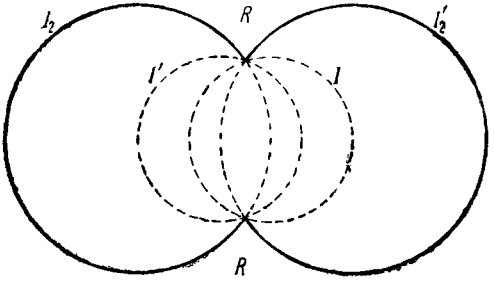
то

$$a=0,\quad b=i,\quad c=i,\quad d=i \quad \text{и} \quad ad-bc=1.$$

образований, полученных таким образом, могут быть комбинациями других.

Для этого случая более простая фундаментальная область, хотя бы и не ограниченная изометрическими окружностями, может быть получена следующим образом. Локсодромическое преобразование может быть представлено в виде $T = UV$, где V и U соответственно гиперболическое и эллиптическое преобразования с теми же неподвижными точками, что и T. Пусть I и I' изометрические окружности преобразований V и V^{-1}. Тогда нетрудно доказать, что часть плоскости, внешняя по отношению к окружностям I и I', есть фундаментальная область для группы, порождаемой преобразованием T.

b) *Циклические группы эллиптического типа.* Если T эллиптическое преобразование, то все изометрические окружности проходят через неподвижные точки. Здесь $K = e^{i\theta}$, и следовательно, группа будет непрерывна всегда за исключением случая, когда θ соизмеримо с π. На черт. 18 изображены изометрические окружности для случая $K = e^{\frac{6\pi i}{5}}$. Из чертежа видно, что группа порождается преобразованием T^2, которое имеет в качестве множителя $e^{\frac{2\pi i}{5}}$.



Черт. 18.

c) *Циклические группы параболического типа.* Если T параболическое преобразование, то оно может быть представлено в виде [§ 10, уравнение (37)]:

$$\frac{1}{z'-\xi} = \frac{1}{z-\xi} + c, \qquad c \neq 0. \tag{14}$$

Тогда T^n можно представить в виде:

$$\frac{1}{z'-\xi} = \frac{1}{z-\xi} + nc, \tag{15}$$

или

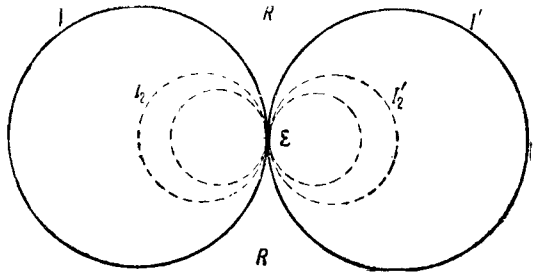
$$z' = \frac{(nc\,\xi + 1)\,z - nc\,\xi^2}{ncz + 1 - nc\,\xi}. \tag{16}$$

Детерминант в (16) равен единице, а изометрическая окружность имеет уравнение:

$$\left| z - \left(\xi - \frac{1}{nc}\right) \right| = \frac{1}{|nc|}. \tag{17}$$

Из (17) заключаем, что точка ξ лежит на окружности I_n и что центр I_n, т. е. точка $\xi - \frac{1}{nc}$, лежит на прямой, проходящей через точку ξ параллельно радиусу-вектору точки $\frac{1}{c}$. Отсюда следует, что все изометрические окружности группы имеют общую каса-

тельную в точке ξ. Центры I_n для положительных n лежат по одну сторону ξ и для отрицательных по другую. Когда абсолютная величина n неограниченно растет или убывает, то радиусы изометрических окружностей неограниченно уменьшаются. На основании этих фактов заключаем, что расположение изометрических окружностей будет таким, как изображено на черт. 19. Тот же результат можно получить из теоремы 12. Неподвижная точка является единственной предельной точкой группы.



Черт. 19.

§ 25. Построение группы путем комбинирования. Мы здесь покажем метод построения собственно разрывных групп, пользуясь которым можно образовать очень много групп с самыми разнообразными свойствами. Читатель получит некоторое представление о том, каким сложным строением могут обладать группы, входящие в широкий класс собственно разрывных групп.

Рассмотрим конечное или бесконечное множество собственно разрывных групп: Γ_1, Γ_2, ... Сочетая всевозможными способами преобразования, принадлежащие всем этим группам, мы получим группу, которую обозначим через Γ. В нее входят преобразования двух типов: a) принадлежащие исходным группам и b) смешанные произведения, получающиеся в результате перемножения преобразований, из которых по крайней мере два не принадлежат одной и той же группе.

Построенная таким образом группа может быть непрерывной и разрывной. Однако в некоторых случаях оказывается возможным утверждать, что группа собственно разрывна, и определить ее фундаментальную область R.

Теорема 13. *Пусть все фундаментальные области R_1, R_2,... групп Γ_1, Γ_2, ... содержат некоторую окрестность бесконечно удаленной точки и пусть изометрические окружности всех преобразований каждой из этих групп лежат вне (допускается касание внешним образом) изометрических окружностей всех преобразований остальных групп. Тогда группа Γ, полученная путем комбинирования заданных групп, есть собственно разрывная группа. Область, состоящая из общих точек областей R_1, R_2, ..., есть фундаментальная область R группы Γ. При этом точка считается принадлежащей R только в том случае, если существует определенная область, содержащая эту точку внутри и принадлежащая всем областям R_1, R_2, ...*

R есть область, лежащая вне изометрических окружностей тех преобразований группы Γ, которые принадлежат категории a). При этом, очевидно, не были приняты в расчет преобразования типа b).

Теперь мы покажем, что точка, принадлежащая R, не может лежать внутри какой-либо изометрической окружности преобразования типа b).

Преобразование типа b) может быть написано следующим образом:

$$U = S_n S_{n-1} \ldots S_2 S_1 .$$

Мы предположим, что каждые два соседних преобразования S_i и S_{i+1} не принадлежат одной и той же из исходных групп Γ_1, $\Gamma_2, \ldots$; мы вправе это сделать, так как все рядом стоящие множители, принадлежащие одной группе, можно заменить одним преобразованием, принадлежащим той же группе. Применим теперь преобразование U к некоторой точке z_0 области R. Обозначим изометрические окружности преобразований S_i и S_i^{-1} через I_i и I_i'. Так как z_0 лежит вне I_1, то S_1 переводит точку z_0 в точку z_1, лежащую внутри I_1'. Так как I_1' лежит вне I_2, то z_1 находится вне I_2 и, следовательно, S_2 переводит z_1 в точку z_2, лежащую внутри I_2', и т. д. Каждое из этих преобразований уменьшает длины в окрестности соответствующей точки. Таким образом преобразование U уменьшает длины в окрестности z_0; следовательно, z_0 лежит вне изометрической окружности преобразования U. Отсюда заключаем, что рассматриваемая в теореме область R расположена вне всех изометрических окружностей, принадлежащих группе. Из существования R следует, что Γ собственно разрывная группа.

Пользуясь теоремой 12 и рассуждая подобно тому, как в § 24, мы заключаем что изометрические окружности преобразований S_1, S_2S_1, $S_3S_2S_1$, ... U образуют последовательность, в которой каждая окружность содержит внутри все окружности, следующие за ней. Таким образом изометрическая окружность каждого смешанного произведения лежит внутри какой-нибудь изометрической окружности, принадлежащей одной из исходных групп, и следовательно, не влияет на строение области R.

Несколько примеров, в которых мы воспользуемся методом комбинирования для построения групп, дадут несколько более ясное представление о разнообразных формах, которыми могут обладать области R.

Пусть даны две окружности с одинаковыми радиусами; можно построить бесконечно много преобразований T таких, чтобы заданные окружности были изометрическими окружностями для T и T^{-1}. Нетрудно видеть, что линейным преобразованием наиболее общего вида, для которого I_t и I_t' соответственно определены уравнениями:

$$|z-q| = r, \quad |z-q'| = r,$$

является преобразование

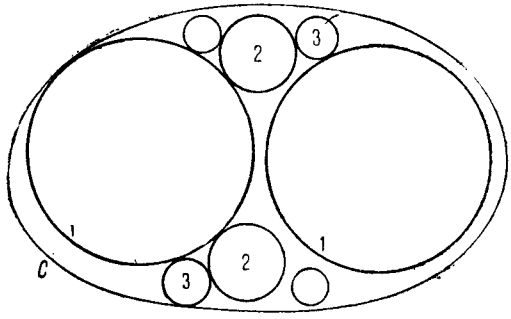
$$T = \frac{q'z - (qq' + r^2 e^{i\vartheta})}{z-q}, \tag{18}$$

где ϑ—любое действительное число.

Если I_t и I_t' расположены одна вне другой, то область, внешняя по отношению к I_t и I_t', есть область R циклической группы,

порожденной преобразованием T. Мы используем такого рода группы в приложениях теоремы 13.

a) Пусть даны $2n$ окружностей $I_1, I_1', \ldots, I_n, I_n'$, имеющие попарно равные радиусы и расположенные вне друг друга (возможно касание внешним образом). Возьмем преобразование T_i такое, чтобы T_i и T_i^{-1} имели в качестве изометрических окружностей I_i и I_i'. Тогда фундаментальной областью группы, порожденной преобразованиями $T_1, T_2, \ldots, T_n$, является часть плоскости, внешняя по отношению к этим $2n$ окружностям. Если среди этих окружностей нет касающихся, то R связная область, однако не односвязная. Ее граница состоит целиком из сторон; область R не имеет граничных точек категорий α) и γ) (§ 21).



Черт. 20.

Допуская, что окружности, входящие в нашу систему $2n$ окружностей, могут касаться, мы придем к заключению, что область, внешняя по отношению к этим окружностям, может оказаться разделенной на несколько отдельных частей. Таким образом R может состоять из нескольких частей.

b) Аналогично мы можем взять бесконечное множество окружностей с попарно равными радиусами и построить группу. Так как мы установили, что изометрические окружности группы лежат все в конечной области, то среди выбранных нами окружностей должны быть окружности произвольно малого радиуса. Эти окружности можно расположить таким образом, чтобы R состояла из бесконечного множества отдельных частей.

c) Следующий пример показывает, что может существовать область R, все граничные точки которой являются предельными точками группы.

Пусть C замкнутая кривая (черт. 20). Не вдаваясь в детали, заметим, что пары окружностей, отправляясь от которых мы строим группу (методом комбинирования), могут быть выбраны внутри C таким образом, чтобы в окрестности любой точки внутри или на C, которая не лежит внутри какой-нибудь окружности, находилось бесконечно много окружностей нашей системы.

R представляет собой внешность C, граница R, т. е. C, состоит исключительно из предельных точек. Мы предоставляем читателю построение других более сложных областей R.

Обобщение. Группы Шоттки. Результаты, аналогичные теореме 13, могут быть получены для иного рода фундаментальных областей. Пусть даны группы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ с фундаментальными обла-

стями $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Пусть F_i содержит внутри все точки плоскости, которые не лежат внутри какой-либо области F_j (для $j \neq i$). Пусть далее из данных групп методом комбинирования построена группа Γ. Покажем, что область F, состоящая из всех общих точек областей $F_1, F_2, \ldots, F_m$, есть фундаментальная область группы Γ.

Граница области F состоит из границ областей $F_1, \ldots, F_m$. Если P граничная точка области F_i, то в ее окрестности имеются точки, не принадлежащие F_i и конгруэнтные точкам F_i. Эти точки могут быть выбраны так, чтобы конгруэнтные им точки в F_i лежали настолько близко к границе F_i, чтобы они содержались в F. Таким образом второе свойство фундаментальной области имеет место.

Очевидно, что в F нет ни одной пары точек, конгруэнтных относительно преобразований, принадлежащих исходным группам. Рассмотрим теперь результат преобразования точки z_0 области F посредством смешанного произведения. Пусть $U = S_n, \ldots, S_1$, где S_i ($\neq 1$) принадлежит группе Γ_{n_i}, причем Γ_{n_i} и $\Gamma_{n_{i+1}}$ различные группы. S_1 переводит z_0 в точку z_1, внешнюю F_{n_1} и, следовательно, содержащуюся в F_{n_2}; S_2 переводит точку z_1 в точку z_2, внешнюю по отношению к F_{n_2}, лежащую в F_{n_3}, и т. д. Наконец, S_n переводит z_{n-1} в точку z_n, внешнюю по отношению к F_{n_n}; таким образом U переводит z_0 в точку, внешнюю по отношению к F. И первое свойство фундаментальной области также выполнено.

Группа Шоттки[1]) строится следующим образом. Пусть Q_1, $Q_1', \ldots, Q_m$, Q_m' $2m$ окружностей, расположенных вне друг друга. Пусть далее T_i линейное преобразование (локсодромическое или гиперболическое), переводящее Q_i в Q_i' и притом так, что внешность Q_i переходит во внутренность Q_i'. T_i порождает циклическую группу Γ_i, для которой вся часть плоскости F_i, расположенная вне Q_i и Q_i', есть фундаментальная область.

Здесь F_i содержит всю часть плоскости, не входящую в F_j ($j \neq i$). Группа Шоттки получается путем комбинирования $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Она имеет в качестве фундаментальной области всю часть плоскости, внешнюю по отношению к $2m$ окружностям. Группа Γ порождена преобразованиями $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

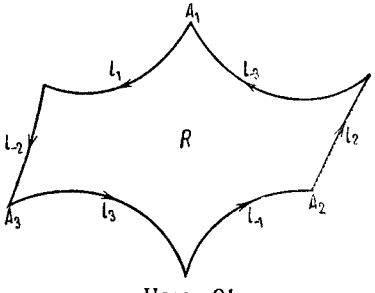
В одной из следующих глав (глава X) нам встретится группа, порожденная так же, как и группа Шоттки, с той лишь разницей, что $Q_1, \ldots, Q_m$ будут замкнутые кривые—необязательно окружности.

Комбинированная таким образом группа называется „*группой типа Шоттки*“.

§ 26. Простые циклы. Возвратимся теперь к фундаментальной области R общей собственно разрывной группы и займемся изучением ее вершин. Пусть A_1 вершина; когда одна из сторон, проходящих через A_1, переходит в конгруэнтную сторону, то A_1 переводится в вершину на одном из концов последней дуги. Эти конгруэнтные вершины могут быть переведены в другие, так что A_1

[1]) Crelle's, Journal, т. 101, стр. 227—272, 1887.

может оказаться конгруэнтной многим вершинам R. Пользуясь следующим способом, можно определить вершины, конгруэнтные A_1: допустим, что граница R обходится в положительном направлении, т. е. так, что область лежит слева. При прохождении через вершину мы сначала двигались вдоль одной стороны к вершине, а затем вдоль другой стороны от вершины. Вершину мы будем рассматривать как конец первой стороны и начало второй. Когда сторона переходит в конгруэнтную ей сторону, то начало и конец первой стороны переходят соответственно в конец и начало второй. Это следует из противоположности направлений на конгруэнтных изометрических окружностях [§ 11, а)]. Пусть l_1 сторона, начинающаяся в A_1 (черт. 21). Эта сторона переходит посредством преобразования T_1 в конгруэнтную ей сторону l_{-1}, при этом A_1 переходит в A_2, лежащую в конце l_{-1}. Пусть сторона, начинающаяся в вершине A_2, обозначена через l_2. Дуга l_2 переходит посредством преобразования T_2 в конгруэнтную ей дугу l_{-2}. При этом A_2 переходит в A_3, расположенную на конце l_{-2}. Мы можем продолжать таким образом, получая все новые конгруэнтные вершины, пока не вернемся к вершине A_1 и к стороне l_1. Мы вернемся к A_1 после конечного числа шагов. В самом деле, допустим противное, т. е. что существует бесконечно много вершин $A_2, A_3, \ldots$, конгруэнтных A_1. Изометрическая окружность преобразования S_n, переводящего A_1 в A_n, проходит через A_1, так как если бы A_1 лежало вне изометрической окружности преобразования S_n, то A_n лежало бы внутри изометрической окружности S_n^{-1}, что невозможно. Следовательно, через вершину A_1 проходит бесконечно много изометрических окружностей преобразований $S_2, S_3, \ldots$, но это противоречит предположению, что A_1 обыкновенная точка.



Черт. 21.

Таким образом, применяя указанный процесс, мы встречаем конечное число вершин $A_2, A_3, \ldots, A_m$ и затем возвращаемся в A_1[1]).

Определение. *Совокупность всех конгруэнтных друг другу вершин фундаментальной области называется простым циклом.*

Мы докажем теперь, что не существует вершин области R, конгруэнтных A_1, кроме найденных ранее; следовательно, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ образуют цикл. Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_m$ преобразования, посредством которых в предшествующих рассуждениях A_1 переходит в A_2; A_2 в A_3; ...; A_m в A_1. Нужно заметить, что хотя некоторые из этих преобразований могут быть друг другу обратными, они всегда связывают пару граничных дуг.

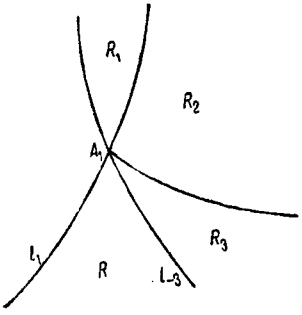
---

[1]) Мы этот процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к вершине A_1 с *выходящей из нее* стороной l_1. До окончания процесса можно попасть в точку A_1 лишь в специальном случае, когда стороны касаются в A_1 (черт. 24).

Преобразование $S = T_m \ldots T_2 T_1$ переводит точку A_1 самое в себя. Может случиться, что S есть тождественное преобразование. Если это не так, то S эллиптическое преобразование.

В самом деле, A_1 неподвижная точка преобразования S, но неподвижные точки гиперболического и локсодромического преобразований лежат внутри изометрических окружностей, а неподвижная точка параболического преобразования является предельной точкой группы (черт. 19).

Рассмотрим теперь, каким образом области, конгруэнтные R, примыкают друг к другу около точки A_1. Преобразования T_m, $T_m T_{m-1}, \ldots, T_m \ldots T_2$, $T_m \ldots T_1$ $(= S)$ переводят соответственно $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_2, A_1$ в точку A_1. Далее области $R_m, R_{m-1}, \ldots, R_2, R_1$, в которые переходит область R посредством этих преобразований, примыкают друг к другу около A_1 (черт. 22):



Черт. 22.

Таким образом T_m переводит A_m в A_1, причем R_m примыкает к R вдоль дуги l_{-m}, оканчивающейся в точке A_1. Вообще T_i переводит A_i в A_{i+1} и переводит область R в область, примыкающую к R вдоль стороны, оканчивающейся в точке A_{i+1}; следовательно, преобразование $T_m, \ldots, T_{i+1}$ переводит эти две области в области R_i и R_{i+1}, примыкающие друг к другу вдоль дуги, начинающейся в точке A_1. Отправляясь от R и двигаясь против часовой стрелки вокруг A_1, мы встретим примыкающие друг к другу области в таком порядке: R_m, $R_{m-1}, \ldots, R_2, R_1$. Принадлежащий области R криволинейный угол с вершиной в A_n перейдет в равный ему угол, лежащий в области R_n с вершиной в A_1.

Так как конгруэнтные области не перекрываются, то имеются две возможности: во-первых, R_1 может совпадать с R, и тогда области $R, R_m, \ldots, R_2$ целиком заполняют окрестность A_1,— в этом случае S тождественное преобразование; сумма углов с вершинами в $A_1, A_2, \ldots, A_m$ равна 2π. Если R_1 не совпадает с R, то S эллиптическое преобразование. Но в окрестности неподвижной точки эллиптическое преобразование с множителем $K = e^{i\theta}$ сводится к повороту около этой точки на угол $\theta \neq 0$. Переводя R в R_1, убеждаемся (черт. 22), что θ равна сумме углов у рассматриваемых вершин. Посредством преобразования S области $R, R_m, \ldots, R_2$ переходят в примыкающие друг к другу (в направлении против часовой стрелки) области, заполняющие часть окрестности A_1. Применяя конечное число раз (k раз) преобразование S, мы полностью покроем окрестность A_1, и $S_k(R)$ совпадет с R.

Теперь ясно, что не существует вершин области R, конгруэнтных A_1, отличных от $A_2, \ldots, A_m$. В самом деле, преобразование

переводящее какую-нибудь вершину A в A_1, перевело бы R в область, перекрывающуюся с областями, заполняющими окрестность A_1, что невозможно.

Мы сформулируем полученные результаты следующим образом:

Теорема 14. *Сумма углов, вершины которых образуют простой цикл, равна* $\frac{2\pi}{k}$, *где* k *целое число. Если* $k > 1$, *то каждая вершина входящая в цикл, есть неподвижная точка эллиптического преобразования с периодом, равным* k.

Теорема 15. *Каждому простому циклу соответствует соотношение вида* $(T_m T_{m-1}, \ldots, T_2 T_1)^k = 1$, *которому удовлетворяют преобразования, связывающие конгруэнтные стороны* R.

В качестве иллюстрации к предшествующим результатам рассмотрим группу из § 22, фундаментальная область которой построена на черт. 15. Рассмотрим верхнюю вершину на этом чертеже. Сторона l_1, начинающаяся в этой вершине, переходит посредством преобразования T_1 в сторону l_{-1}, оканчивающуюся в нижней вершине. Сторона l_{-2}, начинающаяся в нижней вершине, переходит посредством преобразования T_2^{-1} в l_2, которая оканчивается в верхней вершине. Таким образом верхняя и нижняя вершины образуют цикл.

Преобразование $S = T_2^{-1} T_1$ не является тождественным преобразованием и, следовательно, сумма углов у рассматриваемых двух вершин меньше 2π. Поэтому S эллиптическое преобразование, для которого верхняя вершина есть неподвижная точка. Непосредственно находим, что $S = T_4$ и что $S^3 = 1$. Сумма углов при этих двух вершинах равна $\frac{2\pi}{3}$.

С другой стороны, начало координат тоже вершина. Дуга l_2, начинающаяся в начале, переходит посредством T_2 в дугу l_{-2}, оканчивающуюся в начале. Таким образом начало координат само образует цикл. Здесь угол равен π и, следовательно, $T_2^2 = 1$.

Аналогично вершина в точке 1 тоже образует цикл. Итак, всего имеется три цикла.

§ 27. Параболические циклы. Если какая-нибудь сторона области R оканчивается в предельной точке P_1, то возможны различного рода ситуации. Может случиться, что не существует другой стороны, оканчивающейся в P_1. Допустим, что в P_1 встречаются две стороны, и применим метод § 26 для получения точек, конгруэнтных P_1.

Пусть l_1 — сторона, начинающаяся в P_1, тогда посредством преобразования T_1 l_1 переходит в сторону l_{-1}, оканчивающуюся в предельной точке P_2. Пусть l_2 — сторона, начинающаяся в P_2, если таковая имеется, и пусть T_2 переводит l_2 в сторону l_{-2}, оканчивающуюся в P_3, и т. д. Три случая могут представиться при применении этого процесса:

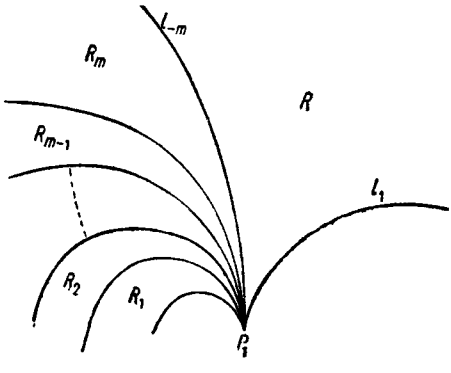
1) процесс оканчивается тем, что, сделав конечное число шагов, мы приходим в точку, в которой не начинается ни одна сторона;

2) процесс продолжается до бесконечности без возвращения в P_1;

3) пройдя конечное число конгруэнтных точек $P_2, P_3, \ldots, P_m$, мы возвратимся к точке P_1 и к стороне l_1. Пользуясь методом комбинирования, нетрудно построить группы в которых реализуются эти

возможности. Если имеет место третий случай, то мы будем говорить, что точки $P_1, P_2, \ldots, P_m$ образуют *параболический цикл*, и каждую точку цикла будем называть *параболической точкой*.

В большинстве групп, которые мы будем изучать в дальнейшем, R имеет конечное число сторон и на границе ее находятся только лишь такие предельные точки, в которых встречаются две стороны. Ввиду этих условий случаи первый и второй остаются в стороне. И, следовательно, предельные точки, расположенные на границе, являются параболическими точками и делятся на циклы. Преобразование $S = T_m T_{m-1} \ldots T_2 T_1$ переводит P_1 самое в себя, поэтому S эллиптическое или параболическое преобразование. Повторяя дословно рассуждения § 26, мы докажем, что $T_m, T T_{m-1}, \ldots, T_m \ldots T_2, T_m \ldots T_1$ переводят соответственно $P_m, P_{m-1}, \ldots, P_2, P_1$ в точку P_1 и область R в области $R_m, R_{m-1}, \ldots, R_2, R_1$, примыкающие друг к другу вдоль дуг, выходящих из P_1 так, как показано на черт. 23. Угол между сторонами R_i, пересекающимися в P_1, равен углу между сторонами R, пересекающимися в P_i.



Черт. 23.

S переводит R в R_1, причем сторона l_1 переходит в сторону l', которая отделяет R_1 от R_2. Если S эллиптическое преобразование, то l_1 и l' пересекаются под углом, отличным от нуля. Но в этом случае, повторяя конечное число раз преобразование S, мы покрыли бы окрестность точки S конечным числом областей, что противоречит теореме 9. Таким образом S параболическое преобразование. Но если S параболическое преобразование, то l_1 и l' касаются в неподвижной точке P_1. Тогда очевидно, что дуги, ограничивающие промежуточные области, также касаются l_1. Угол между сторонами, пересекающимися в точке, входящей в цикл, равен нулю. Применяя неограниченно много раз преобразование S к областям, изображенным на черт. 23, мы получим бесконечно много других областей; каждая из полученных областей имеет две стороны, встречающиеся в P_1 и касающиеся там l_1.

Теорема 16. *Стороны R, встречающиеся в параболической точке, касаются в ней. Существует бесконечное множество областей, конгруэнтных R, таких, что каждая из этих областей имеет две стороны, проходящие через параболическую точку и касающиеся в ней сторон области R.*

Если стороны R встречаются только в вершинах и параболических точках, то область R имеет особенно простое строение.

Теорема 17. *Если граница области R состоит исключительно из обыкновенных точек или если кроме параболических точек граница не содержит никаких иных предельных точек, то R имеет конечное число сторон.*

Предположим, что R имеет бесконечно много сторон. Пусть z_1, $z_2, \ldots$ бесконечная последовательность точек, лежащих на сторонах R, и пусть при этом никакие две из этих точек не лежат на одной и той же стороне. Эти точки имеют по крайней мере одну точку сгущения P, которая также принадлежит границе. В окрестности P имеется бесконечно много сторон R. Но это невозможно ни в обыкновенной точке, ни в параболической точке; следовательно, теорема доказана.

§ 28. Функциональные группы. Обыкновенные точки собственно разрывной группы образуют или одну связную область, т. е. двумерный континуум Σ, или разделяются предельными точками на два или более двумерных континуумов: Σ_1, Σ_2, ...

Определение. *Собственно разрывная группа называется функциональной группой, если одна из связных областей Σ, на которые плоскость разделяется предельными точками, переводится сама в себя всеми преобразованиями группы.*

В случае конечной группы или группы с одной или двумя предельными точками обыкновенные точки образуют связную область, которую все преобразования группы переводят самое в себя. Следовательно, такие группы являются функциональными группами.

Группа, фундаментальная область которой изображена на черт. 20, не является функциональной группой.

В дальнейшей нашей теории будут встречаться исключительно функциональные группы.

Теорема 18. *В области Σ функциональной группы содержится часть области R, представляющая собой фундаментальную область. Эту фундаментальную область обозначим R_0.*

Вся область R не может лежать вне Σ, так как иначе все точки, конгруэнтные точкам R, лежали бы вне Σ, что противоречит теореме 6. Пусть P граничная точка области R_0. Если P предельная точка, то на основании теоремы 2 в ее окрестности имеются точки, конгруэнтные точкам R_0. Если P обыкновенная точка границы R_0, то она лежит внутри Σ и в ее окрестности имеются точки, конгруэнтные точкам R. Но эти точки конгруэнтны точкам области R_0, так как точки, конгруэнтные иным точкам области R, расположены вне Σ. Так как, кроме того, очевидно, что в области R_0 нет ни одной пары конгруэнтных точек, то, следовательно, R_0 фундаментальная область группы.

Теорема 19. *Стороны области R_0 попарно конгруэнтны; и преобразования, связывающие конгруэнтные стороны R_0, образуют множество порождающих преобразований функциональной группы.*

Во-первых, очевидно, что часть границы R_0 состоит из сторон, так как в противном случае граница R_0 состояла бы исключи-

тельно из предельных точек (в случае отсутствия предельных точек R_0 совпадала бы со всей плоскостью) и область R_0 совпала бы с Σ. Но тогда в области Σ не было бы ни одной пары конгруэнтных точек, что невозможно. (Мы здесь предполагаем, что функциональная группа не является группой, состоящей из одного только тождественного преобразования.) Каждая сторона R_0 конгруэнтна некоторой стороне R. Но конгруэнтная сторона должна лежать в Σ и поэтому служит стороной R_0.

Так как согласно предположению Σ связная область, то каждая внутренняя точка R_0 может быть соединена с любой конгруэнтной ей точкой посредством кривой, не проходящей через предельные точки группы.

Таким образом последняя часть нашей теоремы вытекает из теоремы 11.

Теорема 20. *Пусть функциональная группа имеет фундаментальную область F, которая вместе с ее границей состоит из внутренних точек Σ; пусть, кроме того, точки, конгруэнтные точкам F, заполняют окрестность каждой граничной точки F. Тогда граница R_0 состоит из внутренних точек Σ и R_0 имеет конечное число сторон.*

Область F вместе с границей может быть покрыта конечным числом областей, конгруэнтных R_0. Переведем часть области F, расположенную в R_i, внутрь R_0 посредством преобразования, переводящего R_i в R_0. Полученные в R_0 для различных i области, конгруэнтные частям F, не перекрываются, так как в F нет ни одной пары конгруэнтных точек.

Кроме того, эти области покрывают R_0 полностью, не оставляя пустых мест. Предположим противное, т. е. что некоторая точка z_0 области R_0 лежит вне всех областей, конгруэнтных частям области F. Пусть z_1 ближайшая к z_0 точка из лежащих в R_0 областей, конгруэнтных частям F. Тогда в любой окрестности z_1 имеются непокрытые точки, которые вследствие этого не имеют конгруэнтных точек в F. Переведем теперь часть R_0, которой принадлежит точка z, обратно в соответствующую ей часть F; z_1 при этом перейдет в граничную точку области F, в окрестности которой имеются точки, не конгруэнтные точкам F. Это невозможно.

Если граница R_0 содержит предельную точку, то ее содержит одна из областей, покрывающих R_0, и поэтому конгруэнтная ей предельная точка лежит на границе F, что противоречит условию.

Отсюда следует, что область R_0 можно заключить в замкнутую область A, состоящую только из обыкновенных точек. В области A находится лишь конечное число дуг различных изометрических окружностей. Так как дуги изометрических окружностей, расположенных вне A, не могут быть частями границы R_0, то мы заключаем, что R_0 ограничена конечным числом сторон. Таким образом рассматриваемая группа порождается конечным числом преобразований.

Классификация функциональных групп

Мы разобьем функциональные группы на три важных класса:

1. *Элементарные группы.* Этот класс состоит из конечных групп и групп, имеющих одну или две предельных точки.

2. *Фуксовы группы.* Группа называется „фуксовой группой", если принадлежащие ей преобразования имеют общую неподвижную окружность и если каждое преобразование переводит внутренность этой неподвижной окружности самое в себя.

3. *Клейновы группы.* Функциональная группа называется „группой Клейна", если она не принадлежит ни одному из предшествующих классов. Примерами элементарных групп служат группы, рассмотренные в § 22, и циклические группы — в § 24.

Классы 1 и 2 перекрываются. Некоторые элементарные группы имеют неподвижные окружности, например нелоксодромические циклические группы. Группы, построенные методом комбинирования, в большинстве случаев клейновы.

Глава III

ФУКСОВЫ ГРУППЫ

§ 29. Преобразования. Согласно определению, сделанному в § 28, фуксова группа есть собственно разрывная группа, все преобразования которой переводят самое в себя некоторую окружность и переводят самих в себя части, на которые эта окружность делит плоскость. Эта общая неподвижная окружность называется „главной“ окружностью. Всякая точка, внутренняя по отношению к главной окружности, переходит во внутреннюю, внешняя точка переходит во внешнюю. Если главная окружность прямая линия, то точки, расположенные по одну сторону этой прямой, переходят в точки, расположенные по ту же сторону.

Рассмотрим теперь типы преобразований, могущих принадлежать фуксовой группе. Мы видели в § 9, что те локсодромические преобразования, которые имеют неподвижные окружности, переводят внутренность неподвижных окружностей в их внешность.

Таким образом локсодромическое преобразование не может принадлежать фуксовой группе. Обращаясь к § 7, 8, 10, где были исследованы неподвижные окружности нелоксодромических преобразований, а также к соответствующим чертежам, мы видим, что преобразование, принадлежащее фуксовой группе, отличное от тождественного преобразования, должно быть одного из следующих типов:

a) гиперболическое преобразование с неподвижными точками на главной окружности;

b) эллиптическое преобразование с неподвижными точками, сопряженными относительно главной окружности;

c) параболическое преобразование с неподвижной точкой, лежащей на главной окружности, и с неподвижной прямой, касающейся главной окружности.

И, обратно, преобразование, принадлежащее одному из этих типов, переводит окружность в самое себя.

Применяя теорему 20 § 11, c), мы получим следующий результат:

Теорема 1. *Изометрические окружности преобразований фуксовой группы ортогональны главной окружности.*

§ 30. Предельные точки. Так как главная окружность переходит сама в себя, то она представляет собой множество точек, к которому приложима теорема 5 § 18. Получаем следующую теорему:

Теорема 2. *Предельные точки фуксовой группы лежат на главной окружности.*

Эту теорему можно доказать непосредственно, пользуясь теоремой 1.

В самом деле, требования, чтобы в окрестности предельной точки находились изометрические окружности произвольно малого радиуса и чтобы эти окружности были ортогональны главной окружности, не противоречат друг другу только в том случае, если предельная точка лежит на главной окружности.

Теорема 3. *Если предельных точек больше чем две, то одно из двух: или 1) все точки главной окружности предельные точки или 2) множество предельных точек есть совершенное множество, нигде не плотное на главной окружности.*

Мы в свое время доказали (§ 18, теорема 4), что если существует больше, чем две предельных точки, то предельные точки образуют совершенное множество. Теперь мы должны доказать, что в случае, когда не все точки главной окружности являются предельными, предельные точки не заполнят ни одной дуги главной окружности.

Пусть z_0 какая-нибудь обыкновенная точка (не предельная), лежащая на главной окружности. Тогда точки, лежащие в достаточно малой окрестности z_0, тоже обыкновенные точки. В частности, обыкновенными точками будут точки достаточно малой дуги h главной окружности, проходящей через точку z_0.

Пусть P предельная точка, тогда на основании теоремы 2 § 18 в окрестности точки P имеются точки, конгруэнтные точкам h. Эти точки являются обыкновенными точками и лежат на главной окружности. Так как в окрестности любой предельной точки имеются обыкновенные точки, принадлежащие главной окружности, то множество предельных точек нигде не плотно на главной окружности.

Из теории совершенных множеств следует, что множество предельных точек для случая 2) может быть построено путем удаления из главной окружности бесконечного множества открытых дуг $h_1, h_2, \ldots$ Эти дуги не перекрываются и не имеют общих концов.

Наконец, между каждыми двумя из этих дуг лежит бесконечно много других. Совершенное множество состоит из точек, которые останутся после удаления дуг.

На основе предшествующей теоремы мы произведем следующую классификацию фуксовых групп:

a) *Фуксовы группы первого рода* или такие группы, для которых каждая точка главной окружности является предельной точкой.

b) *Фуксовы группы второго рода* или группы, предельные точки которых образуют множество, нигде не плотное на главной окружности.

К классу b) принадлежат группы, предельные точки которых образуют совершенное, нигде не плотное множество, а также фуксовы группы с конечным числом предельных точек.

В случае групп класса a) предельные точки делят плоскость на две области, каждая из которых переходит сама в себя посредством преобразований группы.

В случае групп класса b) обыкновенные точки образуют связное множество.

Мы покажем, что группы обоих классов существуют и что группы этих двух классов обладают существенно различными свойствами.

§ 31. Область R и область R_0. Когда мы совершаем инверсию относительно некоторой окружности, всякая ортогональная ей окружность переходит сама в себя, при этом внутренность этой ортогональной окружности переходит во внутренность. Поэтому, пользуясь теоремой 1, мы заключаем, что при инверсии относительно главной окружности каждая изометрическая окружность переходит сама в себя, причем внутренность и внешность переходит соответственно во внутренность и внешность. Точка области R, будучи расположена вне всех изометрических окружностей, переходит в точку области R. Поэтому мы можем высказать следующее предложение:

Теорема 4. *При инверсии относительно главной окружности область R переходит сама в себя.*

При этой инверсии бесконечность переходит в центр главной окружности, если только, что мы и предположим, главная окружность не является прямой линией. Так как окрестность бесконечно удаленной точки лежит в R, то окрестность центра главной окружности также лежит в R. Главная окружность делит R на две части, которые могут оказаться связанными друг с другом или отделенными друг от друга главной окружностью.

Условимся обозначать через R_0 часть области R, лежащую внутри главной окружности, и через R_0' часть R, расположенную вне главной окружности.

Очевидно, что области R_0' и R_0 переходят друг в друга при инверсии относительно главной окружности. При этом стороны и вершины этих областей переходят друг в друга. Сторона R_0 и сопряженная ей сторона R_0' лежат обе на одной и той же изометрической окружности. Конгруэнтные стороны R_0 и сопряженные им стороны R_0' связаны одним и тем же преобразованием группы.

Пусть выполнено некоторое преобразование, принадлежащее группе. R_0 переходит в область, лежащую внутри главной окружности, а область R_0' в область, — лежащую вне главной окружности. Из теоремы 10 § 5 следует, что две полученных в результате преобразования области сопряжены относительно главной окружности.

Из сделанных выше замечаний мы заключаем, что для изучения фундаментальной области, ее сторон, вершин, конгруэнтных ей областей и т. п. достаточно изучить область R_0 внутри главной окружности. Делая инверсию относительно главной окружности, мы получим соответствующие результаты для области R_0'. В силу этих обстоятельств мы ограничимся изучением области R_0.

Теорема 5. *Область R_0 односвязна.*

Во-первых, очевидно, что R_0 связная область. Отрезок прямой, соединяющий центр главной окружности с какой-нибудь точкой R_0, целиком лежит внутри R_0. Таким образом любые две точки R_0 могут быть соединены посредством кривой, лежащей в R_0, например, сочетая отрезки, соединяющие эти точки с центром. Область R_0 односвязна, если любая замкнутая кривая, лежащая внутри R_0, может быть непрерывным образом стянута во внутреннюю точку, не задевая при этом стягивании ни одной граничной точки. Но этого можно достигнуть простым способом, непрерывно передвигая точки кривой вдоль радиусов к центру.

Основные факты, относящиеся к сторонам R_0, объединены в следующей теореме:

Теорема 6. *Сторонами R_0 служат дуги окружностей, ортогональных главной окружности; эти дуги попарно конгруэнтны. Длины двух конгруэнтных сторон равны и конгруэнтные точки на них равно удалены от центра главной окружности.*

То, что стороны ортогональны главной окружности, следует из теоремы первой. Стороны R_0 попарно конгруэнтны и равны по длине, так как это свойство имеет место для сторон R (§ 21, теорема 10). Каждая сторона области R_0 служит стороной или частью стороны области R и по длине равна конгруэнтной ей дуге. Эта конгруэнтная ей дуга лежит также внутри главной окружности и служит стороной R_0. То, что конгруэнтные точки двух конгруэнтных сторон области R_0 равно удалены от центра главной окружности, следует из теоремы 21 § 11. Важно заметить, что дуга главной окружности, вдоль которой R_0 примыкает к R_0', не рассматривается как сторона R_0. Термин „сторона“ здесь применяется исключительно к дугам изометрических окружностей.

Теорема 7. *Всякая замкнутая область, лежащая целиком внутри главной окружности, покрывается конечным числом областей, конгруэнтных R_0. Эти области плотно примыкают друг к другу.*

Теорема следует из того, что подобного рода область покрывается конечным числом плотно примыкающих друг к другу областей, конгруэнтных R, и что, кроме того, область R_0 содержит все точки R, имеющие конгруэнтные им точки внутри главной окружности.

Теорема 8. *Области, конгруэнтные R_0, покрывают всю внутренность главной окружности. Около каждой предельной точки группы сосредоточивается бесконечно много таких областей.*

Первая часть этой теоремы следует из теоремы 7. Рассмотрим окружность Q, концентрическую с главной окружностью, радиус которой меньше радиуса главной окружности. Тогда, очевидно, внутренность Q вместе с самой окружностью Q покрывается областью R_0 и конечным числом областей, конгруэнтных R_0. Выбирая соответствующим образом радиус Q, мы можем любую точку, лежащую внутри главной окружности, включить в Q. Отсюда следует, что внутренность главной окружности покрывается полностью. Вторая часть теоремы следует из теоремы 9 § 20.

Теорема 9. *Внутренняя точка области R_0 расположена ближе к центру главной окружности, чем любая конгруэнтная ей точка.*

Каждая точка R_0 расположена вне изометрической окружности преобразования, переводящего эту точку в точку, конгруэнтную ей. Поэтому наша теорема непосредственно следует из теоремы 21 § 11.

§ 32. Порождающие преобразования. Теорема 10. *Преобразования, связывающие конгруэнтные стороны R_0, образуют множество порождающих преобразований группы.*

Для фуксовой группы первого рода эта теорема следует из теоремы 19 § 28; в самом деле, R_0 есть часть R, лежащая внутри главного круга, который может рассматриваться как область Σ § 28. Для группы второго рода Σ состоит из всех обыкновенных точек плоскости, и фундаментальная область, о которой говорилось в теореме 19 § 28, есть сама область R. Но пары конгруэнтных сторон области R, лежащие вне главной окружности, связаны теми же самыми преобразованиями, которыми связаны пары сопряженных им сторон области R_0. Таким образом теорема доказана.

Пусть Q круг, центр которого совпадает с центром главной окружности; рассмотрим сеть областей, покрывающих Q. Мы докажем следующую теорему:

Теорема 11. *Любой круг Q, центр которого совпадает с центром главной окружности и радиус которого меньше радиуса главной окружности, может быть целиком покрыт областью R_0 и областями, конгруэнтными R_0 относительно преобразований, представляющих собой комбинации только тех порождающих преобразований группы, которые связывают стороны R_0, лежащие целиком или частично в Q.*

Сеть областей, покрывающих Q, можно построить, присоединяя сначала к R_0 конгруэнтные R_0 области, примыкающие к ней вдоль сторон, лежащих в Q, затем, присоединяя области, примыкающие к уже присоединенным областям вдоль сторон, лежащих в Q (§ 23).

При этом пользуемся только теми порождающими преобразованиями, которые связывают стороны R_0 или лежащие в Q или конгруэнтные сторонам, лежащим в Q.

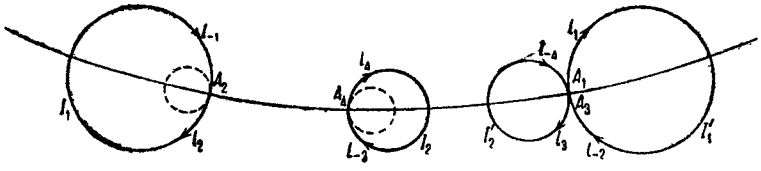
Например, если одна из таких областей $T(R_0)$ имеет сторону l, лежащую в Q и конгруэнтную l_k из R_0, то $T\,T_k(R_0)$ есть область, примыкающая к $T(R_0)$ вдоль l. Таким образом каждый раз мы пользуемся только теми из порождающих преобразований, о которых говорится в условии теоремы. Далее переход R_0 в конгруэнтную область сопровождается удалением внутренних точек R_0 от центра главной окружности (теорема 9). Следовательно, расстояния граничных точек от центра не уменьшаются. Поэтому стороны, конгруэнтные сторонам R_0, лежащим вне Q, также будут лежать вне Q и преобразования, связывающие такие стороны, не используются при построении сети.

Теорема 12. *Пусть S преобразование, принадлежащее группе. Пусть P ближайшая к центру главной окружности точка изометрическая окружности преобразования S. Пусть далее Q окружность, проходящая через P, концентрическая с главной окружностью. Тогда S может быть представлено в виде комбинации порождающих преобразований, связывающих такие стороны R_0, которые имеют внутри окружности Q или на ней по крайней мере одну внутреннюю точку или конец.*

Согласно формулировке теоремы нужно рассматривать не только стороны, целиком или частью лежащие в Q, но также и те стороны, которые касаются Q или имеют конец, лежащий на Q. Так как в окрестности окружности Q лежит лишь конечное число сторон R_0, то можно построить окружность Q', концентрическую с Q с радиусом бо́льшим, чем радиус Q, но

таким, чтобы в окружность Q' не попали новые стороны R_0. Если точка P, лежащая на l_s, лежит внутри Q', то конгруэнтная ей точка P' на l_s' также лежит внутри Q', так как P' и P равно удалены от центра главной окружности. Из предшествующей теоремы следует, что Q' полностью покрывается областью R_0 и областями, конгруэнтными R_0 относительно тех преобразований, о которых идеть речь в настоящей теореме. Эти области покрывают окрестности P и P'. S переводит внутренние точки области $T(R_0)$, лежащие в окрестности P, во внутренние точки некоторой области $\overline{T}(R_0)$, лежащие в окрестности P'. T и $\overline{T}$ представляют собой комбинаций таких порождающих преобразований, которые удовлетворяют условиям теоремы. Но области $ST(R_0)$ и $\overline{T}(R_0)$ перекрываются, а следовательно (теорема 1 § 16), $ST=\overline{T}$ и $S=\overline{T}^{-1}$. Это есть комбинация преобразований, удовлетворяющих условиям теоремы. Таким образом теорема доказана.

§ 33. Циклы. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ вершины области R, образующие простой цикл и расположенные в таком порядке, как в § 26. Тогда A_k и A_{k+1} конгруэнтные точки, лежащие на концах конгруэнтных сторон l_k и l_{-k} области R. Мы должны рассматривать только вершины R_0, так как вершины R_0' получаются путем инверсии. Из теоремы 6 следует, что A_k и A_{k+1} равно удалены от центра главной окружности.



Черт. 24.

Конгруэнтные точки, входящие в параболический цикл, являются предельными точками и лежат на главной окружности Получаем следующую теорему:

Теорема 13. *Конгруэнтные вершины, образующие простой цикл, расположены на окружности, концентрической с главной окружностью. Вершины, образующие параболический цикл, расположены на главной окружности.*

Возникает вопрос, существует ли простой цикл, вершины которого расположены на главной окружности? Для некоторых групп такие циклы существуют. Две изометрических окружности, имеющие общую точку на главной окружности, касаются в этой точке друг друга, так как они обе ортогональны главной окружности. Угол при такой вершине равен нулю или π На черт. 24 изображена область R для группы, комбинированной из двух гиперболических циклических групп. Две из окружностей касаются. Обозначения сделаны в соответствии с порядком следования сторон и вершин по схеме § 26. Конгруэнтные вершины по порядку следования обозначены: A_1, A_2, A_3 $(=A_1)$, A_4.

Такое положение вещей возможно лишь в том случае, если сумма углов при вершинах, входящих в цикл, равна 2π. Иначе преобразование $T_m \ldots T_1$, которое переводит точку A_1 самое

в себя, было бы эллиптическим преобразованием и [§ 29, b)] неподвижная точка A_1 не могла бы лежать на главной окружности. На чертеже каждый из углов при вершинах A_2 и A_4 равен π, а при вершинах A_1 и A_3 равен нулю.

В рассматриваемом примере цикл ие является существенным и может быть устраиен. Как известно, если часть области R заменить конгруэнтной ей частью, то вновь получаемая область тоже будет фундаментальной областью. Произведем небольшую деформацию сторон l_{-1} и l_2 в окрестности вершины A_2, с тем чтобы A_2 стала внешней точкой. Удаленная при этом в окрестности A_2 часть области R может быть заменена конгруэнтной ей частью, лежащей внутри l_1' в окрестности A. В результате этого стороны l_1 и l_{-2} будут смещены вправо и прикосновения не будет.

Нетрудно видеть, что таким же образом можно поступить и в самом общем случае. В самом деле, в каждом цикле рассматриваемого рода при двух вершинах (подобных A_2 и A_4) углы равны π и при остальных вершинах (число которых конечно) углы равны нулю.

Деформируя стороны у одной из первых двух вершин, мы избавимся от одной точки касания. Деформируя стороны, встречающиеся в точке, в которой только что было устранено касание, мы избавимся от другой точки касания. Продолжая последовательно применять этот процесс, мы избавимся от всех оставшихся точек касания.

§ 34. Фуксовы группы первого и второго рода. Как показывает следующая теорема, зная характер области R, можно заключить, будет ли фуксова группа первого или второго рода (§ 30).

Теорема 14. *Если внутри области R лежит точка главной окружности, то группа второго рода; в противном случае — группа первого рода.*

Первая часть теоремы очевидна. В самом деле, если некоторая точка главной окружности лежит внутри R, то это есть обыкновенная точка; следовательно, не все точки на главной окружности предельные, и поэтому имеем группу второго рода.

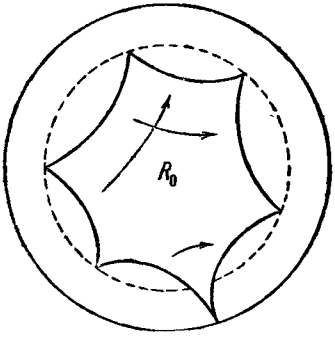
Теперь нам осталось показать, что если группа второго рода, то внутри области R содержится точка главной окружности. Пусть z_0 обыкновенная точка, лежащая на главной окружности. Тогда можно построить круг Q с центром z_0 такого радиуса, чтобы круг Q вместе с его окружностью покрывался конечным числом областей, конгруэнтных R (теорема 8 § 20), скажем, областями $R_1, \ldots, R_n$.

Каждая из этих областей имеет конечное число сторон, лежащих в Q. Так как, если бы сторон было бесконечно много, то в круге Q или на его окружности имелась бы точка, в сколь угодно малой окрестности которой лежало бы бесконечно много сторон. Но эта точка была бы конгруэнтна некоторой точке R, в окрестности которой скоплялось бы бесконечно много изометрических окружностей, и поэтому сама была бы предельной точкой группы, что невозможно. Далее, так как стороны этих областей конгруэнтны сторонам R, то они ортогональны главной окружности. Пусть h дуга главной окружности, лежащая в Q. Тогда, исключая конечное число точек, в которых стороны областей $R_1, R_2, \ldots, R_n$ пересекают главную окружность, каждая точка h является внутренней точкой одной из областей.

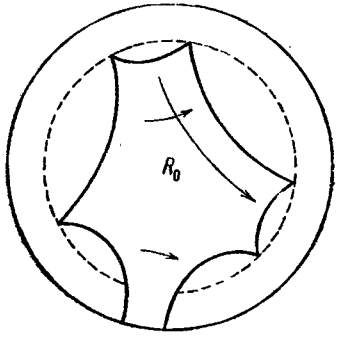
Пусть z_1 точка дуги h, лежащая внутри R_h. Посредством преобразования, переводящего R_k в R, z_1 переводится во внутреннюю точку области R, лежащую на главной окружности. Установив существование такой точки, мы тем самым доказали теорему.

Если точка главной окружности содержится внутри R, то внутри R содержится некоторая дуга главной окружности, проходящая через эту точку. Поэтому, если группа второго рода, то область R содержит внутри одну или несколько дуг главной окружности. Области R_0 и R_0' примыкают друг к другу вдоль этих дуг.

Области R_0, изображенные на приложенных здесь чертежах, являются характерными для групп первого и второго рода. В случае группы первого рода (черт. 25) R_0 или целиком вместе с границей лежит внутри главной окружности, или, если на главной окружности лежат граничные точки R_0, эти точки являются пре-



Черт. 25.



Черт. 26.

дельными точками группы, в окрестности которых лежат стороны R_0. В случае группы второго рода (черт. 26) R_0 примыкает к главной окружности вдоль одной или нескольких дуг, причем область R содержит эти дуги.

Теорема 15. *Для фуксовой группы первого рода область R_0 есть фундаментальная область.*

Эта теорема есть следствие теоремы 18 § 2.

Теорема 16. *Если граница области R_0 лежит внутри главной окружности или если все граничные точки R_0, лежащие на главной окружности, параболические точки, то область R_0 имеет конечное число сторон. В этом случае группа порождается конечным числом преобразований.*

Если все граничные точки области R_0, лежащие на главной окружности, параболические точки, то то же самое справедливо относительно граничных точек R_0'. Поэтому первая часть теоремы следует из теоремы 17 § 27. Вторая часть есть следствие теоремы 10.

В дальнейших главах этой книги, в частности при изучении вопросов униформизации, мы придем к фуксовым группам первого рода, фундаментальные области которых будут построены совсем иным способом, чем тот, который здесь показан.

Докажем теперь несколько теорем относительно других фундаментальных областей.

Теорема 17. *Пусть фуксова группа имеет фундаментальную область F, лежащую внутри окружности Q, концентрической с главной окружностью и радиусом, меньшим радиуса главной окружности. Пусть, далее, окрестность каждой граничной точки F покрывается областями, конгруэнтными F. При этих условиях область R_0 лежит внутри Q.*

Область F полностью покрывается конечным числом областей, конгруэнтных R_0. Переведем каждую часть F, лежащую в области R_i, внутрь области R_0 посредством преобразования, переводящего R_i в R_0. Тогда, как было показано при доказательстве теоремы 20 § 28, полученные области, конгруэнтные частям F, полностью покроют R_0. Поэтому R_0 лежит в Q. В самом деле, при преобразовании частей F в конгруэнтные им части, лежащие в R_0, расстояния от центра главной окружности (теорема 9) не могли увеличиться ни для одной из преобразуемых точек.

Теорема 18. *Области, конгруэнтные F, заполняют всю внутренность главной окружности, не перекрываясь и плотно примыкая друг к другу.*

Области, конгруэнтные F, полностью покрывают R_0, а следовательно, области, конгруэнтные F, покрывают все области, конгруэнтные R_0. Но области, конгруэнтные R_0, покрывают внутренность главной окружности. Наконец, области, конгруэнтные R_0, не перекрываются, так как в R_0 нет ни одной пары конгруэнтных точек.

Теорема 19. *Из всех фундаментальных областей, лежащих внутри главной окружности, R_0 имеет наибольшую площадь.*

Фундаментальная область, отличная от R_0, образуется путем замены частей R_0 конгруэнтными им частями. Так как R_0 лежит вне всех изометрических окружностей, то переход от любой части R_0 к конгруэнтной части сопровождается уменьшением площади.

§ 35. Неподвижная точка в бесконечности. Развитие метода. Если преобразование имеет неподвижную точку в бесконечности, то оно или не имеет совсем изометрической окружности или все окружности для него являются изометрическими. До сих пор при изучении группы мы предполагали, что группа преобразована таким образом, что ни одно из принадлежащих ей преобразований не имеет неподвижной точки в бесконечности. Это конечно не ограничивает общности, однако иногда приводит к заметному усложнению определения группы. В настоящем параграфе мы рассмотрим кратко строение фундаментальной области собственно разрывной группы, некоторые преобразования которой имеют неподвижную точку в бесконечности.

Теорема 20. *Все преобразования данной группы, сохраняющие неизменной некоторую фигуру, образуют подгруппу данной группы.*

В самом деле, произведение двух преобразований, сохраняющих неизменной фигуру, и преобразование, обратное преобразованию, сохраняющему фигуру, также оставляют эту фигуру неизменной и кроме того принадлежат данной группе.

Рассматривая бесконечно удаленную точку в качестве упомянутой в теореме фигуры, получим:

Следствие. *Все преобразования данной группы, оставляющие неподвижной бесконечно удаленную точку, образуют подгруппу данной группы.*

Мы обозначим через $U_0 (= 1), U_1, U_2, \ldots$, преобразования, имеющие неподвижную точку в бесконечности, и обозначим образуемую ими подгруппу через Γ_u.

Каждое преобразование, не принадлежащее Γ_u, имеет изометрическую окружность. Однако теперь уже вообще неверно, что радиусы этих окружностей ограничены, что их центры лежат в конечной области и что центры отличны друг от друга. Относительно этих изометрических окружностей мы докажем следующую теорему:

Теорема 21. *Преобразование группы Γ_u переводит изометрическую окружность в изометрическую окружность.*

Пусть I_t изометрическая окружность преобразования T, пусть далее выполнено преобразование U. Мы покажем, что $U(I_t)$ есть изометрическая окружность преобразования $S = UTU^{-1}$. U имеет вид:

$$z' = U(z) = Kz + b,$$

где K—множитель, определенный нами ранее в § 6 и 10, уравнения (31) и (39'). Так как $U'(z) = K$, то преобразование U увеличивает длины в $|K|$ раз; преобразование U^{-1} увеличивает длины в $\frac{1}{|K|}$ раз.

Пусть P точка, лежащая на окружности $U(I_t)$. Преобразуем P посредством S. Преобразование U^{-1} переводит P в точку P', лежащую на I_t, причем длины в окрестности P умножаются на $\frac{1}{|K|}$. T переводит P' в P'', не изменяя длин. При преобразовании U длины в окрестности P'' умножаются на $|K|$. В результате преобразование UTU^{-1} не изменяет длин в окрестности точки P, значит P лежит на изометрической окружности I_s преобразования S.

Построим теперь фундаментальную область F для подгруппы Γ_u. Существование F следует (после предварительного преобразования группы Γ_u) из общей теории предшествующей главы: стороны попарно конгруэнтны, обыкновенные вершины разделяются на циклы и т. д. Однако во многих случаях (черт. 11, 12, 13, 14) можно получить фундаментальную область непосредственно, не прибегая к общей теории. Теперь мы докажем основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 22. *Пусть F фундаментальная область подгруппы Γ_u, причем стороны F попарно конгруэнтны, а области, конгруэнтные F, покрывают любую конечную часть плоскости*[1]; *пусть, далее, R состоит из всех частей области F, расположенных вне всех изометрических окружностей группы. Тогда R есть фундаментальная область группы.*

Преобразование, принадлежащее Γ_u, переводит точку области R в точку, лежащую в области, конгруэнтной F, и следовательно, вне R. Преобразование группы, не принадлежащее Γ_u, переводит точку R в точку, лежащую внутри некоторой изометрической окружности, и следовательно, вне R. Таким образом область R не содержит ни одной пары конгруэнтных точек. Из утверждения, что стороны F попарно конгруэнтны, следует, что стороны R также попарно конгруэнтны. Часть стороны области F, лежащая вне всех изометрических окружностей и, следовательно, являющаяся стороной R, конгруэнтна на основании теоремы 21 стороне, лежащей вне всех изометрических окружностей. Обыкновенная граничная точка P области R, лежащая на изометрической окружности I_t, переводится преобразованием T в точку P' на I_t'. Мы докажем обычным способом, что P' не лежит внутри какой-либо изометрической окружности. Если P' лежит в F, то она есть граничная точка области R; если P' не лежит в F, то, следовательно, она лежит в области, конгруэнтной F; пусть эта область будет $U(F)$; тогда $P''=U^{-1}(P')$ лежит в F и является граничной точкой области R. Отсюда следует, что стороны R, лежащие на изометрических окружностях, попарно конгруэнтны.

Окрестность граничной точки области R, лежащей на стороне l_1, содержит точки, конгруэнтные точкам области R, лежащим в окрестности стороны l_{-1}; окрестность предельной точки содержит точки, конгруэнтные точкам области R, на основании теоремы 2 § 18. Таким образом R фундаментальная область.

Другие свойства R, как, например, распределение вершин по циклам, теоремы о порождающих преобразованиях и т. д. доказываются так же, как в предшествующих параграфах, и мы не будем повторять этих доказательств.

§ 36. Примеры. Группа ангармонических отношений. Эта группа [§ 13, пример 2] содержит помимо тождественного преобразования еще следующие преобразования:

$$U=1-z,\quad T_1=\frac{1}{z},\quad T_2=\frac{1}{1-z},\quad T_3=\frac{z-1}{z},\quad T_4=\frac{z}{z-1}.$$

Здесь U есть вращение на угол π около точки $\frac{1}{2}$. Фундаментальной областью для подгруппы Γ_u служит полуплоскость, ограниченная прямой, проходящей через $\frac{1}{2}$; для определенности, — верхняя полуплоскость. Преобразования T_1 и T_3 имеют общую

[1]) Фундаментальные области на черт. 11, 12, 13, 14 обладают этим свойством. В главе VI будет доказано, что в самом общем случае области, конгруэнтные фундаментальной области подгруппы Γ_u, покрывают любую конечную часть плоскости.

изометрическую окружность, уравнение которой $|z| = 1$, преобразования T_2 и T_4 имеют изометрическую окружность $|z-1| = 1$. Фундаментальной областью R для нашей группы является та часть верхней полуплоскости, которая лежит вне этих изометрических окружностей (черт. 27).

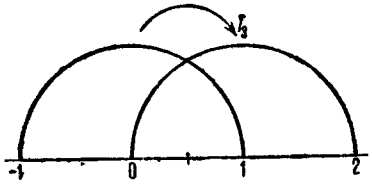
Прямолинейные стороны R конгруэнтны относительно преобразования U, круговые относительно преобразования T_3. Таким образом U и T_3 являются порождающими преобразованиями. Для двух циклов вершин с углами $\frac{2\pi}{3}$ и π получаем соотношения:

$$T_3^3 = 1 \text{ и } (UT_3)^2 = 1.$$

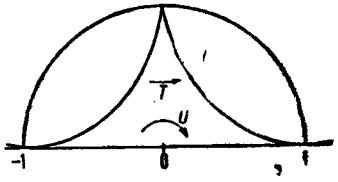
Группа, для которой Q_0 есть главная окружность. В качестве примера такого рода рассмотрим уже упомянутую [§ 13, пример 7] группу:

$$z' = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad a\bar{a} - c\bar{c} = 1,$$

где a и c — целые комплексные числа. Эта фуксова группа, для которой окружность Q_0 является главной окружностью.



Черт. 27.



Черт. 28.

Когда $c = 0$, то $a\bar{a} = 1$, откуда $a = \pm 1$ или $\pm i$.

Для Γ_u получаем два преобразования:

$$z' = z \quad \text{и} \quad z' = U(z) = \frac{iz}{-i} = -z.$$

Преобразование U есть вращение на угол π около начала координат. Фундаментальной областью для Γ_u является полуплоскость над действительной осью.

Из остальных преобразований рассмотрим сначала преобразования с самыми большими изометрическими окружностями. Абсолютная величина коэфициента c имеет наименьшее значение, когда c равно ± 1 или $\pm i$. Тогда $a\bar{a} = 1 + c\bar{c} = 2$ и $a = \pm 1 \pm i$. Таким образом радиусы изометрических окружностей равны единице, а для их центров получаем следующие возможные положения: $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$. Только две из этих окружностей с центрами в $1 + i$ и $-1 + i$ лежат в верхней полуплоскости. Это изометрические окружности преобразований

$$T = \frac{(1+i)z + 1}{z + 1 - i}$$

и обратного ему. Эти окружности изображены на черт. 28.

Мы покажем теперь, что всякая другая изометрическая окружность, лежащая в верхней полуплоскости, содержится внутри одной из этих окружностей. Каждая такая окружность ортогональна Q_0 и имеет радиус, меньший единицы. Если мы предположим, что такая окружность не лежит внутри и не касается внутренним образом ни одной из двух уже нарисованных окружностей, то она содержит внутри одну из трех точек ± 1 и i. Уравнение этой изометрической окружности:

$$|cz+\bar{a}|=1, \quad |c|>1.$$

Если одна из трех точек лежит внутри этой окружности, то мы получим:

$$|\pm c+\bar{a}|<1 \quad \text{или} \quad |ic+\bar{a}|<1.$$

Так как числа, абсолютные величины которых входят в левые части, целые, то их абсолютные величины могут быть меньше единицы, только если эти числа равны нулю. Отсюда $|c|=|a|$ и $a\bar{a}-c\bar{c}=0$, что невозможно.

Таким образом R есть та часть верхней полуплоскости, которая лежит вне двух изометрических окружностей, изображенных на черт. 28. R не содержит точек окружности Q_0, так что наша группа есть группа первого рода. Все точки окружности Q_0 предельные точки. R состоит из двух частей: R_0 внутри Q_0 и R_0' вне Q_0. R_0 и R_0' сопряжены относительно окружности Q_0. Области, конгруэнтные R_0, покрывают полностью внутренность Q_0. U и T являются порождающими преобразованиями. Здесь имеется три цикла. Начало координат образует простой цикл с углом при вершине, равным π, так как $U^2=1$. Точка i образует параболический цикл. Точки 1 и -1 образуют второй параболический цикл.

§ 37. Модулярная группа. Эта группа [§ 13, пример 5] состоит из преобразований

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1,$$

где a, b, c, d действительные целые числа. Действительная ось является неподвижной окружностью. Переходит ли верхняя плоскость сама в себя или в нижнюю полуплоскость, можно определить, рассмотрев преобразование одной какой-нибудь точки. Полагая $z=i$, мы находим $z'=\frac{ac+bd+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$; мнимая часть этого выражения положительна, поэтому z' лежит в верхней полуплоскости. Таким образом наша группа есть фуксова группа.

Когда $c=0$, то $ad=1$ и $a=d=\pm 1$, а b может быть любым целым числом. Отсюда получаем, что группа Γ_u состоит из следующих преобразований:

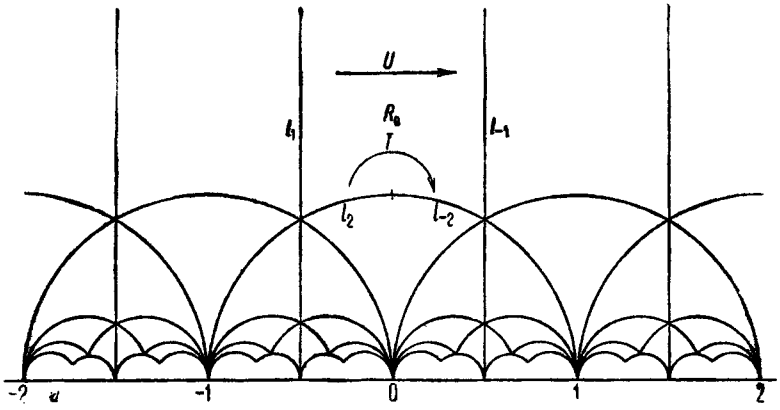
$$z'=z+n,$$

где n любое целое число. Это группа переносов, фундаментальная область которой изображена на черт. 12, где ω нужно считать

равным единице. Мы выберем в качестве фундаментальной области полосу, заключенную между двумя прямыми линиями, перпендикулярными действительной оси в точках $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. Эта подгруппа порождается преобразованием:

$$z' = U(z) = z + 1.$$

Рассмотрим самые большие изометрические окружности. Если $c = \pm 1$, то $ad \mp b = 1$; для каждой пары целых значений a и d мы можем из этого уравнения определить целое значение для b. Отсюда следует, что центром $\mp d$ изометрической окружности



Черт. 29.

$|\pm z + d| = 1$ может быть точка, аффикс которой любое целое число. Эти окружности суть единичные окружности (они изображены на черт. 29).

Всякая точка плоскости, расстояние которой от действительной оси меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$, лежит внутри одной или двух из этих окружностей. Для всякого иного преобразования $|c| \geqslant 2$ и его изометрическая окружность имеет радиус, не превосходящий $\frac{1}{2}$. Так как центр этой окружности лежит на действительной оси, такая окружность лежит внутри части плоскости, ограниченной единичными изометрическими окружностями. Таким образом дуги этих меньших изометрических окружностей не могут входить в границу R.

Область R, лежащая в ранее выбранной полосе и внешняя по отношению к изометрическим окружностям, ограничена единичной окружностью с центром в начале.

Она состоит из области R_0, изображенной на чертеже, и области, представляющей собой отражение R_0 около действительной

оси. Часть границы R_0, лежащая на окружности, состоит из двух сторон l_2 и l_{-2}, которые конгруэнтны относительно преобразования

$$z' = T(z) = -\frac{1}{z},$$

T эллиптическое преобразование с неподвижными точками $\pm i$. U и T порождающие преобразования группы.

Эта группа имеет три цикла. Бесконечно удаленная точка является параболической точкой и образует цикл. Точка i образует цикл с углом π при вершине, так как $T^2 = 1$. Две остальных вершины, а именно $\pm\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, образуют цикл с углом при вершине $\frac{2\pi}{3}$.

Пользуясь последним циклом, можно, поступая, как в § 26, получить соотношения, связывающие преобразования U и T. Отправляясь от правой вершины и начинающейся в ней стороны, выполним преобразование U^{-1}, а затем преобразование T. Тогда

$$S = TU^{-1} = -\frac{1}{z-1}$$

есть преобразование с периодом 3, которое переводит правую вершину самое в себя. Искомое соотношение, очевидно, будет:

$$S^3 = 1 \quad \text{или} \quad TU^{-1}TU^{-1}TU^{-1} = 1;$$

то же самое соотношение можно переписать иначе, принимая во внимание, что $T^{-1} = T$, а именно:

$$UTUTUT = 1.$$

Области, конгруэнтные R_0, покрывают всю верхнюю полуплоскость. Несколько областей, конгруэнтых R_0, изображены на чертеже. Эти области скопляются в бесконечном числе около каждой точки действительной оси.

§ 38. Некоторые подгруппы модулярной группы. Как дальнейший пример метода построения фундаментальной области мы рассмотрим некоторые из большого множества подгрупп, содержащихся в модулярной группе. Пусть n целое число, большее единицы; рассмотрим множество всех преобразований модулярной группы, в которых b и c делятся на n, т. е. преобразования вида

$$T = \frac{az + nb'}{nc'z + d}, \quad ad - n^2b'c' = 1,$$

где a, b', c', d действительные целые числа.

Сначала докажем, что эти преобразования образуют группу. Преобразование, обратное T, именно

$$T^{-1} = \frac{-dz + nb'}{nc'z - a},$$

имеет тот же вид.

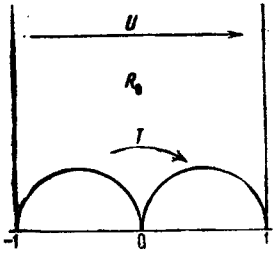
Пусть

$$S = \frac{\alpha z + n\beta'}{n\gamma' z + \delta}$$

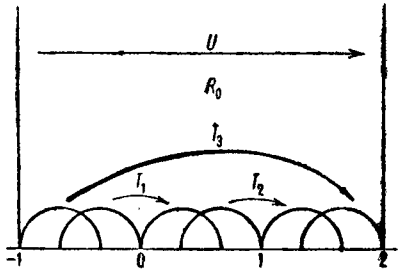
— второе преобразование нашего множества, тогда

$$ST = \frac{(\alpha a + n^2\beta' c')\, z + n\,(\alpha b' + \beta' d)}{n\,(\gamma' a + \delta c')\, z + n^2\gamma' b' + \delta d}.$$

Так как $n(\alpha b' + \beta' d)$ и $n(\gamma' a + \delta c')$ делятся на n, то произведение также принадлежит нашему множеству. Таким образом имеют место оба свойства, характеризующие группу.



Черт. 30.



Черт. 31.

Полагая $c' = 0$, мы получим множество преобразований, образующих группу Γ_u.

Именно:

$$U_m = z + mn,$$

где m любое целое число. Γ_u порождается преобразованием $U = z + n$.

На приложенных здесь чертежах изображены фундаментальные области для двух случаев. При изучении этих фундаментальных областей применимы рассуждения предшествующих параграфов, и поэтому изучение их предоставляется читателю.

На черт. 30 изображена R_0 для случая $n = 2$. В этом случае группа порождается двумя преобразованиями:

$$U = z + 2 \quad \text{и} \quad T = \frac{z}{2z + 1}.$$

Здесь имеются три параболических цикла.

На черт. 31 рассмотрен случай $n = 3$. Порождающими преобразованиями служат:

$$U = z + 3, \quad T_1 = \frac{z}{3z + 1}, \quad T_2 = \frac{4z - 3}{3z - 2}, \quad T_3 = \frac{5z + 3}{3z + 2}.$$

Здесь имеются четыре параболических цикла и один простой цикл с углом 2π.

Глава IV

АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 39. Понятие автоморфной функции. Автоморфные функции являются обобщением тригонометрических, гиперболических, эллиптических и некоторых других функций элементарного анализа. Тригонометрическая функция $\sin z$ обладает тем свойством, что ее значение не меняется в результате замены z на $z+2m\pi$, где m произвольное целое число; т. е. значение этой функции остается неизменным, когда над z выполняется преобразование группы $z'=z+2m\pi$. Значение гиперболической функции $\operatorname{sh} z$ остается неизменным, когда над z выполняется преобразование группы $z'=z+2m\pi i$. Эллиптическая функция, например функция Вейерштрасса $\wp(z)$ сохраняет свое значение при преобразованиях группы $z'=z+m\omega+m'\omega'$.

Автоморфные функции являются результатом развития выраженной этими примерами идеи на случай более общих собственно разрывных групп.

Короче говоря, функция является автоморфной по отношению к некоторой группе, если она принимает одни и те же значения в конгруэнтных точках. Мы сейчас дадим более точное определение.

Областью существования однозначной аналитической функции мы будем называть множество точек, в которых $f(z)$ аналитична или имеет полюс. Область существования есть связная область, состоящая только из внутренних точек—некоторый двумерный континуум.

Определение. *Функция $f(z)$ называется автоморфной по отношению к группе линейных преобразований $T_1, T_2, \ldots$, если*

1) *$f(z)$ однозначная аналитическая функция;*

2) *когда точка z лежит в области существования $f(z)$, то точка $T_n(z)$ тоже лежит в этой области;*

3) $f[T_n(z)]\equiv f(z)$.

В связи с первым условием нужно заметить, что определенные здесь функции более точно могут быть названы „однозначными“ автоморфными функциями.

Существуют многозначные аналитические функции, удовлетворяющие условиям 2) и 3). Мы, однако, будем заниматься только однозначными функциями, и чтобы не пришлось часто об этом напоминать, требование однозначности сделано частью определения.

Необходимо отметить, что не существует функции, не равной тождественно постоянному, и автоморфной в соответствии со сделанным определением по отношению к непрерывной или несобственно разрывной группе. В самом деле, предположим, что $F(z)$ является такой функцией и пусть z_0 точка, в которой эта функция аналитична. Тогда в окрестности z_0 существует бесконечно много точек, конгруэнтных точке z_0. В каждой из этих точек $F(z) = F(z_0)$; однако известно, что в окрестности правильной точки функция может принимать бесконечно много раз одно и то же значение только в том случае, если она есть постоянное.

Из определения следует, что если функция автоморфна по отношению к некоторой группе, то она автоморфна также по отношению к любой подгруппе этой группы.

При решении вопроса о том, является ли данная функция автоморфной по отношению к некоторой группе, нет необходимости проверять, выполняются ли условия 2) и 3) для всех точек области существования функции и для всех преобразований группы. Как показывает следующая теорема, достаточно установить, что эти условия выполняются для некоторой небольшой области и для порождающих преобразований группы.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ однозначная функция, аналитическая в точке z_0. Пусть точка $T(z_0)$, где T линейное преобразование, лежит в области существования функции. И пусть*

$$f[T(z)] \equiv f(z) \tag{1}$$

в некоторой окрестности точки z_0. Тогда, какова бы ни была точка z, лежащая в области существования функции, точка $T[z]$ тоже лежит в этой области, и соотношение (1) *выполняется во всей области существования функции. Преобразование T переводит область существования $f(z)$ самое в себя.*

Эта теорема непосредственно следует из принципа аналитического продолжения. Две функции z, входящие в соотношение (1), равны в некоторой окрестности точки z_0. Следовательно, эти функции совпадают в любой области, в которую любая из них может быть аналитически продолжена. Пусть z_1 правильная точка функции $f(z)$; тогда $f(z)$ может быть аналитически продолжена из z_0 в область S, содержащую точку z_1. Но тогда в области S функция $f[T(z)]$ есть аналитическая функция, и соотношение (1) выполняется в этой области. Итак, $f(z)$ есть аналитическая функция в окрестности точки $z_1' = T(z_1')$ и $f(z') = f(z)$.

В любой точке окрестности полюса z_2, исключая z_2, $f(z)$ есть аналитическая функция и $f(z)$ стремится к бесконечности, когда z приближается к z_2. Отсюда следует, что $f(z)$ есть аналитическая функция в любой точке окрестности $z_2' = T(z_2)$ и стремится к бесконечности при приближении к z_2'.

T переводит любую точку области существования $f(z)$ в другую точку той же области. То же самое справедлив относительно T^{-1}, так как $f[T^{-1}(z)] \equiv f(z)$ выполняется в окрестности точки $z_0' = T(z_0)$.

Таким образом T не переводит ни одной точки, лежащей вне области существования, внутрь ее, т. е. T переводит область существования самое в себя.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ однозначная аналитическая функция, удовлетворяющая соотношениям*

$$f[T_1(z)] \equiv f(z), \quad f[T_2(z)] \equiv f(z), \ldots,$$

тогда $f(z)$ есть автоморфная функция по отношению к группе, порождаемой преобразованиями $T_1, T_2, \ldots$ Каждое преобразование группы переводит область существования $f(z)$ самое в себя.

Группа образуется из всех возможных произведений преобразований $T_1, T_2, \ldots$ и обратных им. Очевидно, что $f(z)$ не меняется, если вместо z подставить $T_1^{-1}(z), T_2^{-1}(z), \ldots$ Так как любое произведение можно получить, выполняя несколько раз подряд перемножение двух преобразований, то для доказательства первой части теоремы достаточно установить, что из двух соотношений $f[S(z)] \equiv f(z)$ и $f[T(z)] \equiv f(z)$ следует, что $f[ST(z)] \equiv f(z)$. Но если z лежит в области существования функции, то $T(z)$, а следовательно, и $ST(z)$ также лежат в этой области, и мы получим $f[ST(z)] \equiv f[T(z)] \equiv f(z)$.

Вторая часть теоремы получается как приложение второй части теоремы 1.

Рассмотрим в качестве примера функцию $\cos z$. Имеем: $\cos(z+2\pi) \equiv \cos z$ и $\cos(-z) - \cos z$; таким образом $\cos z$ автоморфная функция по отношению к группе, порождаемой преобразованиями $z' = z + 2\pi$ и $z' = -z$.

Существование однозначной аналитической функции, не равной тождественно постоянному, значения которой не меняются, когда над независимым переменным выполняются линейные преобразования, принадлежащие некоторому множеству линейных преобразований, достаточно для того, чтобы утверждать, что группа, порождаемая этим множеством преобразований, есть собственно разрывная группа. Таким образом упомянутая в предшествующем абзаце группа собственно разрывна.

Теорема 3. *В любой окрестности каждой предельной точки группы, по отношению к которой функция $f(z)$ автоморфна, находятся части области существования этой функции.*

В самом деле, в окрестности предельной точки лежат точки, конгруэнтные точкам области существования функции. Эти точки принадлежат области существования функции.

Теорема 4. *Если автоморфная функция не есть постоянное, то каждая предельная точка группы является существенно особой точкой функции.*

В окрестности точки, в которой функция аналитична или имеет полюс, функция может принимать одно и то же значение лишь конечное число раз. В окрестности предельной точки группы существует бесконечно много точек, в которых функция принимает одно и то же значение. Следовательно, предельная точка является существенно особой точкой функции.

Следствие. *Все точки области существования автоморфной функции, не равной постоянному, являются обыкновенными точками группы.*

Конечно, неправильно было бы думать, что все точки границы области существования функции являются обязательно предельными точками группы.

Предельные точки лежат на границе области существования, но на этой границе могут лежать и другие точки. Например, функция $e^{\wp(z)}$ автоморфна по отношению к группе $z' = z + m\omega + m'\omega'$. Ее область существования состоит из всех точек плоскости за исключением ∞ (единственная предельная точка группы) и точек $m\omega + m'\omega'$. В этих последних точках $\wp(z)$ имеет полюсы, и поэтому для нашей функции они являются существенно особыми.

Из предшествующих рассуждений следует, что не для всякой собственно разрывной группы существует не равная постоянному автоморфная функция.

Теорема 5. *Если для некоторой группы существует не равная постоянному автоморфная функция, то эта группа есть функциональная группа.*

Пусть данной группе принадлежит не равная постоянному автоморфная функция, область существования которой S. Пусть Σ часть плоскости, ограниченная предельными точками, в которой лежит S. Σ состоит из всех обыкновенных точек, могущих быть соединенными с любой точкой S посредством кривых, не проходящих через предельные точки.

Любая точка z, лежащая в Σ, и кривая C, соединяющая эту точку с какой-нибудь точкой S, переходят посредством преобразования T, принадлежащего группе, в точку z' и кривую C', соединяющую z' с некоторой точкой области S, причем C' состоит из обыкновенных точек группы. Тогда z' принадлежит Σ и, следовательно, Σ переходит сама в себя. Таким образом рассматриваемая группа есть функциональная группа.

Мы докажем в следующей главе, что каждой функциональной группе принадлежит не равная постоянному автоморфная функция.

§ 40. Простые автоморфные функции. В настоящей главе, а также в дальнейшем, нам придется часто сталкиваться с автоморфными функциями, на которые наложены некоторые ограничения. Мы наложим ограничения одновременно на функцию и на группу, по отношению к которой функция автоморфна.

Пусть ни одна обыкновенная точка группы не является существенно особой точкой $f(z)$. Тогда область существования функции в предположении, что эта функция не есть постоянное, совпадает с одной из областей Σ, на которые предельные точки группы делят плоскость.

R_0, т. е. лежащая в Σ часть области R, есть фундаментальная область группы Мы потребуем, чтобы R_0 имела конечное число сторон. Если R_0 имеет одну или несколько параболических точек, мы наложим на функцию дополнительное ограничение. А именно мы потребуем, чтобы, когда точка z приближается

к параболической точке из области R_0, функция стремилась к определенному конечному или бесконечному значению, так что

$$\lim_{z=P} f(z) = C \quad \text{или} \quad \infty,$$

где z ограничена тем, что лежит внутри или на границе области R_0[1]).

Чтобы избежать длинных рассуждений при формулировке теорем, мы будем называть такую функцию „простой автоморфной функцией". Таким образом простая автоморфная функция обладает следующими свойствами: 1) она принадлежит функциональной группе, область R_0 которой имеет конечное число сторон; 2) если функция не равна тождественно постоянному, она имеет в качестве области существования область Σ; 3) если имеются параболические точки, функция ведет себя в них требуемым образом.

Если группа конечна, Σ совпадает со всей плоскостью. Простая автоморфная функция не имеет тогда кроме полюсов никаких других особенностей и является поэтому рациональной функцией.

Простая автоморфная функция, принадлежащая фуксовой группе, называется „фуксовой функцией". Если группа первого рода, а функция не есть постоянное, то областью существования функции служит внутренность главной окружности. Если группа второго рода, область существования состоит из всей плоскости за исключением предельных точек, лежащих, как известно, на главной окружности.

Простая автоморфная функция, принадлежащая клейновой группе, называется „клейновой функцией".

Расширение сделанного ранее определения. Пусть $f(z)$ простая автоморфная функция, принадлежащая группе T_n; мы определим функцию

$$\psi(z) \equiv f[S(z)],$$

где S — линейное преобразование, тогда $\psi(z)$ есть простая автоморфная функция, принадлежащая преобразованной группе $S^{-1}T_nS$. В самом деле,

$$\psi[S^{-1}T_nS(z)] \equiv f[SS^{-1}T_nS(z)] \equiv f[T_nS(z)] \equiv f[S(z)] \equiv \psi(z).$$

Область существования $\psi(z)$ есть область $S^{-1}(\Sigma)$ где Σ — область существования $f(z)$; $S^{-1}(R_0)$ есть фундаментальная область преобразованной группы, она имеет конечное число сторон.

Таким образом мы распространяем определение на группы, имеющие неподвижную или предельную точку в бесконечности. Такого рода группа может быть бесконечно многими способами

[1]) Если в P совмещаются две параболические точки (как на черт. 19), то приближение к P должно происходить только с одной стороны. При приближении с другой стороны тоже должен существовать определенный предел, однако он может отличаться от первого предела.

преобразована в группу, для которой бесконечно удаленная точка будет обыкновенной и притом не неподвижной точкой. Предложения относительно нулей, полюсов, алгебраические соотношения и т. д., выводимые в настоящей главе, останутся справедливыми для фундаментальной области $S^{-1}(R_0)$ группы, преобразованной посредством S.

Для многих простых групп нами уже были построены без применения изометрических окружностей фундаментальные области, для которых остаются в силе доказательства следующих ниже теорем (например, для областей, иллюстрированных на черт. 11, 12, 13, 14). В общих случаях, однако, мы будем пользоваться областью R_0, так как свойства области R были установлены с исчерпывающей полнотой.

Как известный пример простой автоморфной функции укажем функцию Вейерштрасса $\wp(z)$. Здесь область существования есть вся плоскость за исключением бесконечно удаленной точки; параллелограм периодов представляет собой фундаментальную область; параболических точек нет.

Точно так же $\sin z$ есть простая автоморфная функция. Полоса периодов есть фундаментальная область с параболическими точками на концах. Нетрудно видеть, что $\sin z$ приближается к ∞, когда z приближается к одному из концов полосы.

§ 41. Поведение в вершинах и в параболических точках. Из всех неподвижных точек преобразований группы только неподвижные точки эллиптического преобразования могут лежать внутри той области, в которой автоморфная функция аналитична или имеет полюсы. Все другие неподвижные точки являются предельными точками. Однако и в неподвижной точке эллиптического преобразования функция должна вести себя особенным образом.

Теорема 6. *В окрестности неподвижной точки эллиптического преобразования с периодом k, лежащей внутри области существования автоморфной функции, эта функция принимает свои значения k раз или кратное k число раз.*

Пусть $f(z)$ функция аналитическая в точке z_0. Мы будем говорить, что $f(z)$ принимает в окрестности z_0 свои значения s раз, если она может быть представлена в этой окрестности в виде:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^s \varphi(z),$$

где $f(z)$ — функция аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$. $f(z)$ обращается в точке z_0 в бесконечность s раз, если $\frac{1}{f(z)}$ принимает в этой точке s раз нуль. Если $z_0 = \infty$, то $z - z_0$ должно быть заменено на $\frac{1}{z}$. Пусть z_0 есть неподвижная точка эллиптического преобразования с периодом k. Предположим, что z_0 не беско-

нечность. Тогда это преобразование — обозначим его через S — имеет вид:

$$\frac{z'-z_0}{z'-z_0'}=e^{\frac{2\pi i}{k}}\frac{z-z_0}{z-z_0'},$$

где z_0' — вторая неподвижная точка, отличная от z_0. Пусть $f(z)$ функция аналитическая в точке z_0. Тогда в окрестности z_0 будем иметь:

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)^s\varphi(z)=f(z_0)+\left(\frac{z-z_0}{z-z_0'}\right)^s\psi(z),$$

где $\psi(z)=(z-z_0')^s\varphi(z)$; так что $\psi(z)$ есть функция аналитическая в точке z_0 и $\psi(z_0)\neq 0$. Если z лежит в окрестности точки z_0, то $z'=S(z)$ тоже находится в окрестности z_0; таким образом

$$f(z')=f(z_0)+\left(\frac{z'-z_0}{z'-z_0'}\right)^s\psi(z')=f(z_0)+\left(\frac{z-z_0}{z-z_0'}\right)^s\cdot e^{\frac{2\pi is}{k}}\psi(z').$$

Так как функция автоморфна, то $f(z')=f(z)$, откуда

$$e^{\frac{2\pi is}{k}}=\frac{\psi(z)}{\psi(z')}.$$

Левая часть этого уравнения есть величина постоянная; следовательно, правая часть тоже постоянна. Но когда z приближается к z_0, z' тоже приближается к z_0, и следовательно,

$$e^{\frac{2\pi is}{k}}=1.$$

Отсюда следует, что целое положительное число s есть кратное числа k, что и требовалось доказать.

Если $f(z)$ имеет полюс в точке z_0, то $\frac{1}{f(z)}$ есть автоморфная функция, имеющая в z_0 нуль. Порядок этого нуля есть число, кратное k. Поэтому $f(z)$ имеет полюс, порядок которого есть кратное k.

В случае, когда $z_0=\infty$, доказательство теоремы ничем существенным не отличается от изложенного.

Теорема 7. *В вершине, принадлежащей циклу, сумма углов которого равна $\frac{2\pi}{k}$, автоморфная функция, не равная постоянному, принимает свое значение k раз или кратное k число раз.*

Это следствие из предшествующей теоремы. Если $k>1$, то вершина есть неподвижная точка эллиптического преобразования с периодом k (§ 26, теорема 14). Если $k=1$, предложение тривиально.

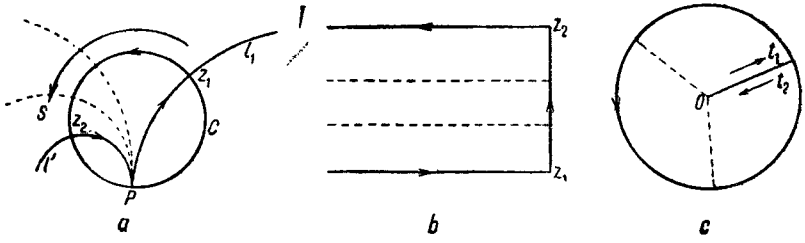
Теперь рассмотрим поведение простой автоморфной функции в параболической точке P. Переведем каждую точку, принадлежащую циклу, в точку P. При этих преобразованиях фундаментальная область перейдет в области, примыкающие друг к другу около P, как это показано на черт. 23. Тогда при стремлении z

к точке P изнутри этих областей функция $f(z)$ приближается к определенному конечному или бесконечному значению. В самом деле, $f(z)$ приближается к определенному пределу, когда z приближается к P изнутри или вдоль границы любой из этих областей. Но так как области имеют общие границы, то эти пределы равны. Иными словами, $f(z)$ стремится к одному и тому же предельному значению около всех точек параболического цикла.

В § 27 было отмечено, что преобразование S, переводящее область R, изображенную на черт. 23, в область R_1 и сторону l_1 в l', есть преобразование параболического типа. S имеет вид [§ 10, уравнение (37)]:

$$\frac{1}{z'-P}=\frac{1}{z-P}+c.$$

Произведем исследование функции в треугольной области z_1z_2P, образованной сторонами l_1, l' и небольшой окружностью C, проходящей через P и ортогональной сторонам, встречающимся в P (черт. 32, *a*). C есть неподвижная окружность преобразования S. При многократном выполнении преобразования S области,



Черт. 32.

конгруэнтные рассматриваемой здесь области, заполняют круг C. При этом значения $f(z)$ повторяются в конгруэнтных областях.

Произведем замену переменных:

$$t=e^{\frac{2\pi i}{c(z-P)}}.$$

Тогда рассматриваемая нами область отобразится на плоскость переменного t. Напишем это преобразование в следующей форме:

$$Z=\frac{2\pi i}{c(z-P)},\qquad t=e^{Z}.$$

Первое есть линейное преобразование, оно переводит P в бесконечность и окружности, проходящие через P, в прямые. Обозначим через Z_1 и Z_2 точки, в которые переходят z_1 и z_2. Тогда

$$Z_1=\frac{2\pi i}{c(z_1-P)},\quad Z_2=\frac{2\pi i}{c(z_2-P)}=\frac{2\pi i}{c}\left[\frac{1}{z_1-P}+c\right]=Z_1+2\pi i.$$

Дуга z_1z_2 окружности C переходит в отрезок прямой линии, параллельной мнимой оси (черт. 32, *b*). Стороны Pz_1 и Pz_2 пере-

ходят в прямые, перпендикулярные прямой Z_1Z_2, и, следовательно, параллельные действительной оси. Треугольник на черт. 32, *a* переходит в область, ограниченную тремя прямыми, изображенную на черт. 32, *b*. Каждая пара конгруэнтных точек, лежащих на сторонах l_1 и l', переходит в пару точек (черт. 32, *b*), аффиксы которых отличаются на $2\pi i$. Но при преобразовании $t = eZ$ отображения точек Z и $Z + 2\pi i$ совпадают. Сторона Z_1Z_2 переходит в окружность с центром в начале координат. Таким образом исходная дуга окружности z_1z_2 переходит в окружность круга, разрезанного вдоль радиуса (черт. 32, *c*). Итак, $f(z)$ преобразуется в функцию переменного t, $\varphi(t)$, аналитическую всюду внутри и на границе области, изображенной на черт. 32, *c*, за исключением полюсов и, возможно, также точки O. В каждой точке радиуса, вдоль которого разрезана область, $\varphi(t)$ принимает одно и то же значение независимо от того, с какой стороны t приближается к радиусу. Если устранить этот разрез, функция будет однозначной. Если $\varphi(t)$ стремится к конечному значению, когда t приближается к 0, то $\varphi(t)$ будет аналитическая функция в точке O, если ее там соответствующим образом определить. Если при t, стремящемся к 0, $\varphi(t)$ стремится к бесконечности, то $\varphi(t)$ имеет в точке O полюс. Мы доказали таким образом следующее предложение:

Теорема 8. *В параболической точке простая автоморфная функция или является аналитической функцией переменного t или имеет полюс при* $t = 0$ $\left(t = e^{\frac{2\pi i}{c(z-P)}}\right)$.

Если $P = \infty$, то S имеет вид $z' = z + c$, и в теореме 8 мы полагаем $t = e^{\frac{2\pi i z}{c}}$.

В окрестности точки O (черт. 32, *c*) мы можем написать:

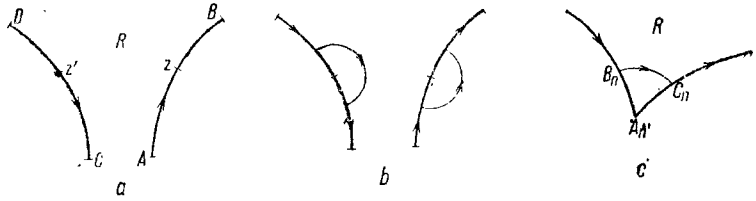
$$f(z) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \quad \text{или} \quad f(z) = t^{-n}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots),$$

в зависимости от того, приближается ли $f(z)$ к конечному пределу или к бесконечности, когда z приближается к P. Это разложение справедливо в круге с центром в O, на границе которого лежит самая близкая к O особенность функции в плоскости t. Если перейдем обратно к плоскости z, соответствующее разложение будет справедливо в круге C, на границе которого лежит ближайшая к P особая точка $f(z)$.

§ 42. Полюсы и нули. Приступая к подсчету нулей и полюсов простой автоморфной функции, лежащих в фундаментальной области, необходимо заключить некоторые условия относительно случаев, когда полюсы или нули лежат на границе. 1) Если какая-нибудь точка стороны l_n есть полюс или нуль, то конгруэнтная ей точка на стороне l_{-n} есть тоже полюс или нуль. Мы условимся только одну из этих точек считать принадлежащей области. Порядок s полюса или нуля в вершине условимся распределять поровну между областями, встречающимися в этой вершине. 2) Если цикл содержит m вершин и сумма углов при

вершинах равняется $\frac{2\pi}{k}$, то около каждой вершины встречаются km областей. Считая, что в каждой вершине имеется $\frac{s}{km}$ полюсов или нулей, мы получим во всех m вершинах $\frac{s}{k}$ полюсов или нулей. Это число (теорема 7) есть целое число. 3) Если $f(z)$ становится бесконечной или стремится к нулю около параболической точки, то мы будем определять число полюсов или нулей в зависимости от поведения $\varphi(t)$ в начале координат. Число полюсов или нулей функции $f(z)$ во всех вместе взятых параболических точках цикла, которому принадлежит P, мы будем считать равным числу нулей или полюсов, принимаемых функцией $\varphi(t)$ в точке $t=0$.

Функция $f(z)$ принимает любое значение c столько раз, сколько раз $f(z)-c$ принимает значение нуль.



Черт. 33.

Теорема 9. *Простая автоморфная функция, не равная тождественно нулю, имеет в фундаментальной области одно и то же число нулей и полюсов.*

Предположим сначала, что на границе области нет ни нулей, ни полюсов функции. Тогда

$$N-M=\frac{1}{2\pi i}\int d\ln f(z),$$

где N есть число нулей, лежащих в фундаментальной области, а M — число полюсов и интеграл взят вдоль границы в положительном направлении. (Если область многосвязна или несвязна, то интегрирование производится конечно вдоль всей границы области.)

Рассмотрим часть интеграла, распространенную на две конгруэнтных стороны AB и CD (черт. 33, *a*):

$$\int_A^B d\ln f(z)+\int_D^C d\ln f(z).$$

В конгруэнтных точках z и z' $f(z)=f(z')$, и поэтому $\ln f(z)$ и $\ln f(z')$ отличаются друг от друга на число, кратное $2\pi i$, и, следовательно, $d\ln f(z)=d\ln f(z')$. Поэтому второй интеграл равен

$\int\limits_B^A d\ln f(z)$ и, следовательно, сумма этих двух интегралов равна нулю. Таким образом сумма интегралов, распространенных на пару конгруэнтных сторон, равна нулю и поэтому $N-M=0$ или $N=M$, что и требовалось доказать.

Если полюс или нуль лежат на стороне AB, то мы ее слегка деформируем, как показано на черт. 33, *b*, для того чтобы включить полюс или нуль в область; соответствующую деформацию мы произведем также в стороне CD. Сумма интегралов, распространенных на конгруэнтные стороны, попрежнему будет равна нулю. Заметим, что при этой деформации только один из пары конгруэнтных нулей или полюсов попадает внутрь области. Теорема остается верной, поскольку из каждой пары конгруэнтных нулей или полюсов мы считаем принадлежащим области только один.

Пусть $f(z)$ имеет нуль порядка s в вершине. Мы изменим путь интегрирования, обходя каждую вершину так, как показано на черт. 33, *c*; точки B_n и C_n лежат на расстоянии d от точки A_n. Части сторон, которые остаются после этого изменения, попарно конгруэнтны и сумма интегралов, на них распространенных, попрежнему равна нулю. В точке A_n $f(z)=(z-A_n)^s\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ функция аналитическая в A_n и не равная там нулю; далее

$$\int\limits_{B_n}^{C_n} d\ln f(z)=s\int\limits_{B_n}^{C_n} d\ln(z-A_n)+\int\limits_{B_n}^{C_n}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz.$$

При стремлении d к нулю второй интеграл в правой части стремится к нулю, так как подинтегральное выражение остается конечным, в то время как длина пути интегрирования стремится к нулю. Первый интеграл в правой части стремится к $s(-i\widehat{A})$. Суммируя такие интегралы для всех вершин, входящих в цикл, мы получим:

$$N-M=-\frac{s}{2\pi}\sum\cdot\widehat{A}_n.$$

Если сумма углов цикла равняется $\frac{2\pi}{k}$, то мы получим:

$$N-M=-\frac{s}{k}$$

или

$$N+\frac{s}{k}=M.$$

Здесь N число нулей, лежащих внутри области; так как согласно условию $\frac{s}{k}$ есть в точности число нулей во всех вершинах цикла, то число нулей равно числу полюсов, что и требо-

валось доказать. Если вершина является полюсом, доказательство ведется аналогично; в этом случае s нужно заменить на $-s$.

Пусть наконец $f(z)$ имеет полюс или нуль в параболической точке. Проведем через точку P окружность C, как на черт. 32, *а* настолько малого радиуса, чтобы в области z_1z_2P, изображенной на этом чертеже, не было ни нулей, ни полюсов, отличных от P. Дуга z_1z_2 отсекает от областей, попавших в z_1z_2P, некоторые части $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$. Конгруэнтные им области $A_1', A_2', A_3', \ldots, A_m'$ заполняют части окрестностей точек параболического цикла, лежащие в фундаментальной области. Мы устраним эти части из фундаментальной области и произведем интегрирование вдоль контура оставшейся части области. Интегралы, взятые вдоль пары конгруэнтных сторон, взаимно уничтожаются. Интегралы вдоль круговых дуг, отделяющих параболические точки, могут быть заменены интегралами по конгруэнтным дугам, принадлежащим окружности C:

$$N - M = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_1}^{z_2} d\ln f(z).$$

Этот последний интеграл может быть заменен интегралом $\frac{1}{2\pi i}\int d\ln\varphi(t)$, взятым вдоль окружности на черт. 32, *с* по часовой стрелке. Если $\varphi(t)$ имеет нуль порядка s в точке $t=0$, то этот интеграл равен $-s$, если же $\varphi(t)$ имеет полюс порядка p, то интеграл равен p. Таким образом $N+s=M$ или $N=M+p$; в согласии с утверждением теоремы.

Комбинируя изложенные здесь методы, мы установим справедливость теоремы во всех случаях, когда на границе фундаментальной области имеется лишь конечное число нулей и полюсов. Но $f(z)$ не может иметь бесконечно много полюсов, так как они имели бы точку сгущения z'. Если бы z' была обыкновенной точкой, то $f(z)$ имела бы существенную особенность в обыкновенной точке; если бы z' была параболическая точка, $\varphi(t)$ имела бы существенную особенность в начале. Обе эти возможности противоречат сделанным предположениям. Аналогично $f(z)$ не может иметь бесконечно много нулей, если она не равна тождественно нулю, так как в противном случае точка накопления нулей была бы существенной особенностью. Таким образом теорема доказана полностью.

Теорема 10. *Простая автоморфная функция, не имеющая полюсов в фундаментальной области, есть постоянное.*

Пусть $f(z)$ простая автоморфная функция, не имеющая полюсов в фундаментальной области, и пусть ее значение в точке z_0 этой области равно c. Тогда $f(z)-c$ есть простая автоморфная функция, имеющая нуль в точке z_0 и не имеющая полюсов. Это возможно согласно теореме 9 только в том случае, если $f(z)-c\equiv 0$, т. е. $f(z)\equiv c$.

Теорема 11. *Простая автоморфная функция, не равная постоянному, принимает в фундаментальной области любые значения и притом одно и то же число раз.*

Если простая автоморфная функция не равна постоянному, она имеет некоторое конечное число полюсов в фундаментальной области. Функция $f(z)-c$, где c есть некоторое постоянное, есть простая автоморфная функция с теми же полюсами, что $f(z)$. Число нулей равно числу полюсов; таким образом $f(z)$ принимает значение c столько раз, сколько у нее полюсов, и теорема доказана.

§ 43. Алгебраические соотношения. Пользуясь предшествующими результатами, можно доказать следующую важную теорему:

Теорема 12. *Две простых автоморфных функции, принадлежащие одной и той же группе и имеющие одну и ту же область существования, связаны алгебраическим соотношением.*

Пусть f_1 и f_2 две простых автоморфных функции, удовлетворяющие условиям теоремы, и пусть эти функции имеют в фундаментальной области соответственно k_1 и k_2 полюсов. Мы докажем, что существует соотношение вида:

$$\Phi(f_1, f_2) = A_1 f_1^m f_2^n + A_2 f_1^m f_2^{n-1} + \ldots + A_{(m+1)(n+1)} = 0, \qquad (2)$$

справедливое для всех значений z в области существования функций; коэфициенты $A_1, A_2, \ldots$ постоянные. Для произвольно выбранных значений постоянных $\Phi(z)$ есть простая автоморфная функция. Степени Φ по отношению к f_1 и f_2, а именно числа m и n, будут определены впоследствии. Число полюсов функции Φ не превышает $mk_1 + nk_2$.

Наиболее общий полином степени m относительно f_1 и степени n относительно f_2 содержит $(m+1)(n+1)$ постоянных. Мы можем эти постоянные выбрать таким образом, чтобы Φ имела нули в $(m+1)(n+1)-1$ заданных точках фундаментальной области. В самом деле, пусть $c_1, c_2, \ldots, c_{(m+1)(n+1)-1}$ различные точки области, отличные от полюсов $f_1(z)$ и $f_2(z)$, и пусть $A_1, A_2, \ldots$ определены из уравнений:

$$A_1 f_1^m(c_i) f_2^n(c_i) + \ldots + A_{(m+1)(n+1)} = 0 \qquad (3)$$
$$i = 1, 2, \ldots [(m+1)(n+1)-1].$$

Так как число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то могут быть найдены постоянные, не все равные нулю, удовлетворяющие этим уравнениям. При этих значениях $A_1, A_2, \ldots$, Φ имеет нули в точках $c_1, c_2, \ldots$ Следовательно, функция Φ имеет по крайней мере $(m+1)(n+1)-1$ нулей и не более $mk_1 + nk_2$ полюсов. Но при достаточно больших m и n

$$(m+1)(n+1)-1 > mk_1 + nk_2 \qquad (4)$$

и Φ имеет больше известных нулей, чем возможных полюсов. Но тогда согласно теореме 9, Φ тождественно равна нулю, что доказывает теорему.

Может случиться, что в полученном этим способом алгебраическом соотношении полином Φ приводим:

$$\Phi(f_1, f_2) \equiv \Phi_1(f_1, f_2)\,\Phi_2(f_1, f_2)\ldots\Phi_r(f_1, f_2),$$

где Φ_i уже неприводимые полиномы от f_1 и f_2. Один какой-нибудь из этих неприводимых множителей должен тождественно равняться нулю. Это неприводимое соотношение должно содержать обе функции, если одна из них не есть постоянное, так как из соотношения вида $\Phi_i(f_1)=0$ следует $f_1=\text{const}$. Важно заметить, что если ни одна из этих функций не равна тождественно постоянному, то их связывает только одно алгебраическое соотношение. Действительно, из двух независимых соотношений $\Phi_i(f_1, f_2)=0$ и $\Phi_j(f_1, f_2)=0$ мы получим $f_1\equiv\text{const.}$ и $f_2\equiv\text{const.}$

Легко увидеть, каковы будут в общем случае степени неприводимого уравнения относительно f_1 и f_2. Степень относительно f_1 равна числу значений f_1, которые удовлетворяют уравнению, когда значение f_2 зафиксировано. В фундаментальной области имеется k_2 точек, в которых f_2 равно c, причем k_2 попрежнему равно числу полюсов функции f_2. В каждой из этих точек f_1 принимает значения, удовлетворяющие неприводимому уравнению. Таким образом в общем случае это уравнение имеет степень k_2 относительно f_1. Аналогично в общем случае оно имеет степень k_1 относительно f_2. Однако может случиться, что некоторые из значений f_1 в упомянутых выше k_2 точках совпадают; тогда степень относительно f_1 будет меньше, чем k_2; например, в случае функции f_2 и $f_1=f_2^2$.

Возникает вопрос о том, будет ли каждая пара значений c_1 и c_2, удовлетворяющих неприводимому уравнению $\Phi_i(c_1, c_2)=0$, парой значений, принимаемых функциями в некоторых точках фундаментальной области? Оказывается, что это так. Алгебраическое уравнение $\Phi_i(f_1, f_2)=0$ определяет, скажем, f_1 как функцию f_2; $f_1=\psi(f_2)$. Риманова поверхность этой функции связна. Всем парам значений f_1, f_2, удовлетворяющих уравнению, соответствуют точки римановой поверхности. Пусть в точке z_0 фундаментальной области $f_1(z_0)=c_1'$, $f_2(z_0)=c_2'$ и пусть z_0 выбрано так, что точка римановой поверхности c_1', c_2' не является точкой ветвления этой поверхности. В окрестности точки z_0 функция $f_1(z)$ совпадает с той ветвью $\psi[f_2(z)]$, которая принимает значение c_1' в точке z_0; поэтому эти две функции совпадают всюду, куда они могут быть аналитически продолжены. Далее, в плоскости переменного f_2 мы можем провести такую кривую, что, когда f_2 движется по этой кривой от c_2' к c_2, $\psi(f_2)$ движется от c_1' к c_1. Условимся, что эта кривая выбрана так, что во всех ее точках существует производная $\frac{dz}{df_2}=\frac{1}{f_2'(z)}$, тогда $z(f_2)$ будет аналитической функцией на этой кривой. Следовательно, точка z описывает некоторую кривую в области существования функций. В конечной точке z' этой кривой будем иметь $f_1(z')=c_1$. В точке z_0' фундаментальной области, конгруэнтной z', мы получим $f_1(z_0')=c_1$, $f_2(z_0')=c_2$.

Теорема 13. *Любая простая автоморфная функция может быть представлена в виде рациональной функции двух простых автоморфных функций, обладающих следующими свойствами: каждая пара значений этих двух функций принимается в одной и только одной точке фундаментальной области; все три функции имеют одну и ту же область существования.*

Пусть f_1 и f_2 функции, удовлетворяющие указанным в теореме требованиям, и пусть f_3 третья функция. Каждой паре значений f_1, f_2 соответствует одно и только одно значение z фундаментальной области и, следовательно, одно значение f_3. Тогда f_3 однозначна на римановой поверхности $f_1 = \psi(f_2)$.

Следовательно, f_3 есть аналитическая функция f_2, исключая точки, в которых f_3 обращается в бесконечность или в которых $f_2'(z) = 0$. Около всех исключительных точек поверхности f_3 приближается к конечному пределу или стремится к бесконечности. Следовательно, f_3 не имеет на римановой поверхности никаких особенностей за исключением полюсов. Поэтому на основании хорошо известной теоремы f_3 есть рациональная функция f_1 и f_2:

$$f_3 = \frac{A_1 f_1^r f_2^s + \dots}{B_1 f_1^p f_2^q + \dots} = R(f_1, f_2). \tag{5}$$

Теорема 14. *Если существует простая автоморфная функция $f_1(z)$, имеющая в фундаментальной области простой полюс, то любая автоморфная функция, принадлежащая той же группе и имеющая ту же область существования, есть рациональная функция $f_1(z)$.*

Пусть $f_2(z)$ простая автоморфная функция, имеющая k_2 полюсов. Если в уравнении (2) мы положим $m = k_2$, $n = 1$, то неравенство (4) выполняется: $2k_2 + 1 > 2k_2$. Обращающийся тождественно в нуль полином (2) имеет вид:

$$Q_{k_2}(f_1) \cdot f_2 + P_{k_2}(f_1) \equiv 0,$$

где P_{k_2} и Q_{k_2} полиномы степени, не большей k_2. Очевидно, что все коэфициенты Q_{k_2} не могут быть равны нулю, так как в противном случае было бы $P_{k_2} \equiv 0$ и $f_1 \equiv \text{const.}$, что противоречит предположению. Таким образом мы имеем:

$$f_2 = -\frac{P_{k_2}(f_1)}{Q_{k_2}(f_1)}, \tag{6}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Наиболее общая простая автоморфная функция, имеющая в фундаментальной области простой полюс, есть функция*

$$f = \frac{Af_1 + B}{Cf_1 + D}, \qquad AD - BC \neq 0.$$

Очевидно, что эта функция имеет в фундаментальной области простой полюс, если A, B, C, D выбраны так, что $AD - BC \neq 0$. В самом деле, значения f и f_1 соответствуют друг другу взаимно однозначно; поэтому f принимает в фундаментальной области

каждое свое значение только один раз. То, что это есть самая общая функция такого рода, следует из доказательства предшествующей теоремы. Каждая функция f_2, имеющая простой полюс, удовлетворяет уравнению вида (6), где $k_2 = 1$; поэтому числитель и знаменатель линейны, причем, так как $f_2 \equiv \text{const.}$, то детерминант отличен от нуля.

§ 44. Диференциальные уравнения. Производная автоморфной функции вообще не является автоморфной функцией. Диференцируя тождество

$$f(z') \equiv f(z),$$

где

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \frac{dz'}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2},$$

мы получим:

$$f'(z') = f'(z)\frac{dz}{dz'} = (cz+d)^2 f'(z). \tag{7}$$

Отсюда видно, что если производная не равна тождественно нулю, то она может быть автоморфной функцией, только если $c = 0$ и $d = \pm 1$ для всех преобразований, принадлежащих группе. Все преобразования в этом случае будут иметь вид: $z' = z + b$ и группа, как мы увидим впоследствии (§ 59), есть группа одно- или двоякопериодической функции.

Из (7) мы заключаем, что отношение первых производных двух автоморфных функций, принадлежащих некоторой группе, остается неизменным относительно преобразований этой группы. Для простых автоморфных функций это можно доказать, диференцируя связывающее их соотношение. Мы получаем: $\Phi'_{f_1} f_1'(z) + \Phi'_{f_2} f_2'(z) = 0$, откуда заключаем, что дробь $\frac{f_1'(z)}{f_2'(z)}$ рациональна относительно $f_1(z)$ и $f_2(z)$ и, следовательно, является простой автоморфной функцией.

Можно получить другие комбинации, не меняющиеся при преобразованиях группы. Диференцируя (7), находим:

$$f''(z') = (cz+d)^4 f''(z) + 2c(cz+d)^3 f'(z),$$

$$f'''(z') = (cz+d)^6 f'''(z) + 6c(cz+d)^5 f''(z) + 6c^2(cz+d)^4 f'(z)$$

и

$$2f'(z')f'''(z') - 3[f''(z')]^2 = (cz+d)^8 [2f'(z)f'''(z) - 3[f''(z)]^2]. \tag{8}$$

Величина

$$D(y)_x = \frac{2\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d^2}{dx^2}\ln\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\ln\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{9}$$

известна под названием „производной Шварца“[1]) от y до x.

[1]) Schwarz H. A., Gesammelte mathematische Abhandlungen, т. 2, стр. 78. Для этого выражения были использованы различные обозначения: Шварц обозначал его через $\psi(y, x)$, Кайлей — через $\{y, x\}$, Клейн — через $[y]_x$ и Кёбе — через $D(y)_x$.

Из (7) и (8) заключаем, что функция

$$\frac{2f'(z)f'''(z)-3[f''(z)]^2}{2[f'(z)]^4}=\frac{D(f)_z}{[f'(z)]^2} \tag{10}$$

остается неизменной относительно преобразований группы.

Мы сейчас покажем, что если $f(z)$ есть простая автоморфная функция, то (10) также простая автоморфная функция. Если в некоторой точке $f(z)$ правильна или имеет в ней полюс, то то же самое справедливо относительно ее производной. И, следовательно, рациональная комбинация производных (10) есть аналитическая функция или имеет полюс в той же точке. Таким образом (10) есть аналитическая функция всюду в области существования $f(z)$ за исключением полюсов. Теперь остается вопрос о поведении этой функции в параболических точках, если таковые имеются. Но в параболической точке P $f(z)$, будучи рассматриваема как функция переменного t, есть или аналитическая функция в начале координат или имеет там полюс, причем $t=e^Z$, $Z=\frac{2\pi i}{c(z-P)}$ или $Z=\frac{2\pi i z}{c}$ в зависимости от того, стремится ли $f(z)$ около параболической точки к конечному или бесконечному пределу.

При замене переменного мы будем пользоваться следующими легко доказываемыми свойствами производной Шварца:

$$D\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right)_x=D(y)_x, \tag{11}$$

откуда

$$D\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)_x=D(x)_x=0,$$

$$D(y)_x=D(y)_t\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+D(t)_x. \tag{12}$$

Уравнение (11) выражает основное свойство производной Шварца; эта производная и была первоначально построена как остающаяся инвариантной, когда над y производится линейное преобразование. Уравнение (12) есть формула замены переменного.

Делая теперь замену переменного и замечая, что

$$D(Z)_z=0,\quad D(t)_Z=-\frac{1}{2},$$

мы получим:

$$D(f)_z=D(f)_Z\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2=\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2\left[D(f)_t\left(\frac{dt}{dZ}\right)^2-\frac{1}{2}\right],$$

откуда

$$\frac{D(f)_z}{\left(\frac{df}{dz}\right)^2}=\frac{D(f)_t}{\left(\frac{df}{dt}\right)^2}-\frac{1}{2\left(\frac{df}{dZ}\right)^2}=\frac{D(f)_t}{f'^2(t)}-\frac{1}{2t^2f'(t)^2}.$$

Эта функция переменного t есть аналитическая функция в $t=0$ или имеет там полюс. Следовательно, функция (10) есть простая автоморфная функция.

Теперь мы докажем следующую замечательную теорему:

Теорема 15. *Если $w(z)$ есть не равная постоянной простая автоморфная функция переменного z, то z может быть выражено как функция w в виде отношения двух решений линейного диференциального уравнения второго порядка:*

$$\frac{d^2\eta}{dw^2} = u\eta, \tag{13}$$

где u есть некоторая алгебраическая функция w, $\Phi(u, w) = 0$. Если функция $w(z)$ имеет простой полюс в фундаментальной области, то u есть рациональная функция w.

Рассмотрим функции:

$$\eta_1 = z\sqrt{\frac{dw}{dz}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{dw}{dz}}, \quad z = \frac{\eta_1}{\eta_2}. \tag{14}$$

Мы покажем, что

$$\frac{1}{\eta_1}\frac{d^2\eta_1}{dw^2} = \frac{1}{\eta_2}\frac{d^2\eta_2}{dw^2} = \frac{D(w)_z}{2\left(\frac{dw}{dz}\right)^2}. \tag{15}$$

Из соотношений

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\eta_1^2}{z^2} = \eta_2^2, \tag{16}$$

используя последнюю формулу из (9), определим $D(w)_z$. Логарифмируя и диференцируя, получаем:

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{dw}{dz} = \frac{2\frac{d\eta_1}{dw}}{\eta_1}\frac{dw}{dz} - \frac{2}{z} = \frac{2\frac{d\eta_2}{dw}}{\eta_2}\frac{dw}{dz}.$$

Заменяя $\frac{dw}{dz}$ во второй и в третьей частях равенства ее значением из (16), получаем:

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{dw}{dz} = \frac{2\eta_1\frac{d\eta_1}{dw}}{z^2} - \frac{2}{z} = 2\eta_2\frac{d\eta_2}{dw}. \tag{17}$$

Диференцируя вторично и вновь заменяя $\frac{dw}{dz}$, получаем:

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\frac{dw}{dz} = \left[\frac{2\eta_1\frac{d^2\eta_1}{dw^2}}{z^2} + \frac{2\left(\frac{d\eta_1}{dw}\right)^2}{z^2}\right]\frac{\eta_1^2}{z^2} - \frac{4\eta_1\frac{d\eta_1}{dw}}{z^3} + \frac{2}{z^2} =$$

$$= \left[2\eta_2\frac{d^2\eta_2}{dw^2} + 2\left(\frac{d\eta_2}{dw}\right)^2\right]\eta_2^2. \tag{18}$$

Возводя (17) в квадрат, разделив на два и вычитая полученный результат из (18), получим:

$$D(w)_z = \frac{2\eta_1^3 \frac{d^2\eta_1}{dw^2}}{z^4} = 2\eta_2^3 \frac{d^2\eta_2}{dw^2}.$$

Соотношение (15) мы получим, разделив последнее равенство на $2\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$ и воспользовавшись (16).

Из (15) следует, что функции η_1 и η_2, отношение которых равно z, удовлетворяют диференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\eta}{dw^2} = u\eta,$$

где

$$u = \frac{D(w)_z}{2\left(\frac{dw}{dz}\right)^2} \text{ [см. (15)].}$$

Но ранее (10) мы показали, что u есть простая автоморфная функция переменного z. Следовательно (теорема 12), u и w связаны алгебраическим соотношением: $\Phi(u, w) = 0$. В частности, если w имеет в фундаментальной области простой полюс (теорема 14), то u есть рациональная функция w. Таким образом теорема доказана.

Глава V

ТЭТА-РЯД ПУАНКАРЕ

§ 45. Тэта-ряд. В предшествующей главе мы изучали свойства автоморфных функций, молчаливо полагая, что такие функции существуют. Теперь мы докажем существование автоморфных функций, построив их в виде рядов.

Условимся преобразования группы обозначать

$$z_i = T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}, \quad a_i d_i - b_i c_i = 1, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

При этом тождественное преобразование будем писать в виде $z_0 = T_0(z) = z$. Кроме того, для упрощения записи введем еще обозначения:

$$z_{ij} = T_i(z_j) = T_i T_j(z), \quad z_{ijk} = T_i T_j T_k(z) \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим сначала, как наиболее простой, случай конечной группы. Пусть группа состоит из m преобразований

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Построим функцию

$$\varphi(z) = H(z) + H(z_1) + \ldots + H(z_{m-1}), \tag{2}$$

где $H(z)$ какая-нибудь рациональная функция z. Очевидно, что $\varphi(z)$ не имеет никаких особенностей кроме полюсов. Применяя к точке z преобразование T_k, получим:

$$\varphi(z_k) = H(z_k) + H(z_{1k}) + \ldots + H(z_{m-1,k}).$$

Так как m точек $z_k, z_{1k}, \ldots, z_{m-1,k}$, получаемых в результате применения к точке z_k m различных преобразований группы, различны, то они совпадают с точками $z, z_1, \ldots, z_{m-1}$. Таким образом сумма

$$H(z_k) + H(z_{1k}) + \ldots + H(z_{m-1,k})$$

отличается от суммы

$$H(z) + H(z_1) + \ldots + H(z_{m-1})$$

только расположением слагаемых, откуда $\varphi(z_k) = \varphi(z)$. Так как кроме того все особые точки $\varphi(z)$ полюсы, то $\varphi(z)$ есть простая автоморфная функция. Таким же образом убеждаемся, что всякая рациональная симметрическая функция от $H(z), H(z_1), \ldots, H(z_{m-1})$ есть простая автоморфная функция.

Пусть теперь группа содержит бесконечно много преобразований; если мы пожелаем и в этом случае применить построение (2), то на месте суммы, стоящей в правой части (2), окажется бесконечный ряд, который в общем не сходится. В самом деле, общий член $H(z_n)$ будет стремиться к нулю лишь в том случае, если $H(z)=0$ во всякой точке сгущения множества z_n. Пуанкаре обошел эту трудность, помножив члены рассматриваемого ряда на соответствующим образом выбранных множителей. Пользуясь этими множителями, мы придем к некоторому сходящемуся ряду, сумма которого хотя и не является автоморфной функцией, но изменяется чрезвычайно просто, когда над переменным z выполняются преобразования вашей группы.

Пусть $H(z)$ рациональная функция, ни один полюс которой не является предельной точкой группы [1]).

Рассмотрим ряд

$$\theta(z)=\sum_{i=0}^{i=\infty}(c_iz+d_i)^{-2m}\cdot H(z_i); \tag{3}$$

это тэта-ряд Пуанкаре [2]).

Ниже мы докажем, что если $m>1$, то при некоторых дополнительных предположениях этот ряд сходится, а пока займемся изучением его суммы как функции z, полагая, что ряд сходится.

Выполняя над z_i принадлежащее группе преобразование T_j, получим:

$$\theta(z_j)=\sum\left(c_i\,\frac{a_jz+b_j}{c_jz+d_j}+d_i\right)^{-2m}H(z_{ij})=$$
$$=\sum\left[\frac{(c_ia_j+d_ic_j)\,z+c_ib_j+d_id_j}{c_jz+d_j}\right]^{-2m}H(z_{ij}).$$

Множитель $(c_jz+d_j)^{2m}$ можно вынести за знак суммы; далее замечая, что $c_ia_j+d_ic_j=c_{ij}$ и $c_ib_j+d_id_j=d_{ij}$, получим:

$$\theta(z_j)=(c_jz+d_j)^{2m}\sum(c_{ij}z+d_{ij})^{-2m}H(z_{ij}).$$

Но ряд, стоящий в правой части этого соотношения, получается из ряда (3) простой перестановкой слагаемых и, следовательно (в дальнейшем при доказательстве сходимости будет обосновано право переставлять члены нашего ряда), его сумма равна сумме ряда (3). Отсюда заключаем, что

$$\theta(z_j)=(c_jz+d_j)^{2m}\,\theta(z). \tag{4}$$

Соотношение (4) выражает основное свойство тэта-ряда. Пользуясь такими рядами, можно построить функции, инвариантные относительно преобразований нашей группы. Пусть $\theta_1(z)$

---

[1]) В случае функциональной группы, переводящей область Σ в самое себя, достаточно, чтобы $H(z)$ помимо полюсов не имела в Σ никаких других особенностей и была ограничена на границе Σ.

[2]) Poincaré H., Mèmoire sur les fonctions fuchsiennes, „Acta Math.", т. I, стр. 193—294; Oeuvres, т. 2, стр. 169—257.

и $\theta_2(z)$ два тэта-ряда с одним и тем же целым m. Рассмотрим их отношение $F(z)=\frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)}$. Тогда

$$F(z_j)=\frac{\theta_1(z_j)}{\theta_2(z_j)}=\frac{(c_jz+d_j)^{2m}\theta_1(z)}{(c_jz+d_j)^{2m}\theta_2(z)}=F(z). \tag{5}$$

В дальнейшем будет показано, что в случае функциональной группы z_j лежат в области существования θ функций, и таким образом $F(z)$ автоморфная функция.

Согласно Пуанкаре ряд (3) называется фуксовым тэта-рядом или клейновым тэта-рядом в соответствии с тем, является ли группа, для которой этот ряд построен, группой Фукса или Клейна.

Функции, которые удовлетворяют соотношению (4) и не имеют в обыкновенных точках группы кроме полюсов никаких иных особенностей, Пуанкаре назвал соответственно фуксовыми тэта-функциями и клейновыми тэта-функциями. Для примера заметим, что производная автоморфной функции [§ 44, уравнение (7)] есть тэта-функция, для которой $m=1$.

§ 46. Сходимость ряда. В основе доказательства сходимости различных рядов и произведений, связанных с группой, лежит следующее предложение.

Теорема 1. *Если бесконечно удаленная точка является обыкновенной точкой группы, то ряд $\sum|c_n|^{-2m}$, где при суммировании опускается конечное число членов, для которых $c_n=0$, сходится при $m\geqslant 2$.*

Рассматриваемый ряд можно написать в виде $\sum r_n^{2m}$, где r_n радиус изометрической окружности I_n преобразования T_n. Допустим сначала, что ни одно из входящих в группу эллиптических преобразований не имеет неподвижной точки в бесконечности. Тогда в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки не будет точек, конгруэнтных бесконечно удаленной точке, и таким образом для нашей группы будут справедливы предложения относительно изометрических окружностей, высказанные в главе II.

Так как $r_n<1$ для всех n, начиная с некоторого, то $r_n^{2m}<r_n^4$, если $m>2$, и нашу теорему достаточно доказать для $m=2$, т. е. достаточно доказать сходимость ряда $\sum r_n^4$.

Центры изометрических окружностей лежат в конечной области и радиусы их ограничены (§ 17). Следовательно, существует такое постоянное положительное число h, что все изометрические окружности группы будут лежать внутри круга Q_n радиуса h, концентрического с какой-либо изометрической окружностью I_n. Пусть преобразование T_n переводит Q_n в Q_n'. Q_n' получается из Q_n посредством инверсии относительно I_n и некоторых других преобразований, при которых длины и площади не изменяются (теорема 19 § 11) Очевидно, радиус Q_n' равен $\frac{r_n^2}{h}$, а его площадь

равна $\frac{\pi r_n^4}{h^2}$ Внешность Q_n, лежащая целиком внутри области R, перейдет во внутренность Q_n', лежащую в свою очередь внутри области R_n, в которую переходит R при преобразовании T_n. Так как области R_n не перекрываются, то круги Q_n', построенные для всех преобразований группы, не перекрываются. Но все круги Q_n' содержатся внутри любого Q_n, и поэтому сумма их площадей меньше, чем πh^2. Таким образом получаем:

$$\sum \frac{\pi r_n^4}{h^2} < \pi h^2, \quad \sum r_n^4 < h^4,$$

и, следовательно, ряд сходится.

В случае, когда бесконечность является неподвижной точкой некоторых эллиптических преобразований, в доказательство придется внести лишь несущественные изменеиия. Попрежнему все изометрические окружности лежат в некоторой конечной области, и, следовательно, существует констаита h. Разница заключается в том, что точка, лежащая вне Q_h, может иметь $p-1$ конгруэнтных ей точек, расположенных также вне Q_h. При этом p число преобразоваиий, имеющих неподвижную точку в бесконечности и образующих эллиптическую циклическую подгруппу. Круги Q_n' могут перекрываться, однако ни одна точка не может принадлежать более чем p таким кругам. Отсюда следует, что

$$\sum \frac{\pi r_h^4}{h^2} < p\pi h^2, \quad \sum r_h^4 < ph^4,$$

таким образом ряд $\sum r_h^4$ сходится.

Пользуясь доказанной теоремой, мы теперь можем установить сходимость тэта-ряда.

Теорема 2. *Пусть $m>2$ и бесконечность обыкновенная точка группы. Пусть, далее, S какая-нибудь связная область, внутри которой нет ни одной предельной точки группы. Тогда функция, определяемая тэта-рядом* (3), *аналитична всюду в области S за исключением некоторых точек, являющихся ее полюсами.*

Достаточно доказать эту теорему для области S', не содержащей предельных точек группы ни внутри, ни на границе, потому что всегда можно S' выбрать так, чтобы произвольно выбранная внутренняя точка области S, имеющей на границе предельные точки группы, попала внутрь S'. Заметим, во-первых, что некоторые члены ряда (3) могут иметь в области S' полюсы. Так, в точке $-\frac{d_i}{c_i}$, т. е. в центре изометрической окружности I_i, множитель $(c_i z+d_i)^{-2m}$ обращается в бесконечность. Равным образом $H(z_i)$ обращается в бесконечность, если $z=T_i^{-1}(a)$, где a есть полюс функции $H(z)$. Ясно, что лишь конечное число членов ряда могут иметь полюсы в области S', так как внутри и на границе области S' содержится лишь конечное число центров изометрических окружностей, а также лишь конечное число точек, конгруэнтных полюсам $H(z)$ Отбрасывая члены, имеющие полюсы

внутри или на границе S', мы сейчас докажем абсолютную и равномерную сходимость в области S' ряда, состоящего из оставшихся членов. Пусть $d>0$ есть расстояние от границы S' до ближайшего, лежащего вне S', центра изометрической окружности. Тогда для всех рассматриваемых членов ряда и для всех z, принадлежащих S', будет иметь место неравенство:

$$\left|z+\frac{d_i}{c_i}\right|\geqslant a.$$

Далее, какова бы ни была точка z в области S' или на ее границе, всегда можно провести замкнутые кривые около полюсов $H(z)$, так чтобы все z_i, фигурирующие в рассматриваемых членах ряда, оказались вне этих кривых.

Но так как вне этих кривых $H(z)$ ограничена, то мы получим:

$$H(z_i)<M.$$

Наконец, оставляя в стороне конечное число членов, для которых $c_i=0$, мы приходим к неравенству:

$$(c_iz+d_i)^{-2m}H(z_i)=\left|\frac{H(z_i)}{c_i^{2m}\left(z+\frac{d_i}{c_i}\right)^{2m}}\right|<\frac{M}{d^{2m}}|c_i|^{-2m}. \qquad (6)$$

Это неравенство справедливо для всех точек области S'. Так как ряд с постоянными, положительными членами $\sum\frac{M}{d^{2m}}|c_i|^{-2m}$ сходится (теорема 1), то этим доказана абсолютная и равномерная сходимость в области S' рассматриваемого нами ряда.

Сумма этого ряда есть аналитическая функция в области S'. Отсюда следует, что сумма ряда (3) также есть аналитическая функция всюду в области S' за исключением конечного числа точек, в которых она имеет полюсы. Эти точки являются полюсами ранее отброшенных нами членов ряда (3).

§ 47. Сходимость тэта-ряда для фуксовой группы второго рода. Можно показать, что вообще при $m=1$ тэта-ряд не сходится. Однако существуют группы, для которых при $m=1$ он сходится. Один из важных случаев характеризуется следующей теоремой [1]):

Теорема 3. *Для фуксовой группы второго рода, для которой бесконечность есть обыкновенная точка, ряд* $\sum|c_n|^{-2}$ *сходится.*

Таким образом тэта-ряд (3) *сходится для* $m=1$.

Сначала мы предположим, что главной окружностью является прямая линия; например, действительная ось. Очевидно, что часть действительной оси, лежащая в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, принадлежит области R. Изометрические окружности лежат в конечной области и их центры находятся на действительной оси. Для доказательства теоремы мы воспользуемся методом, уже примененным в теореме 1. Выбирая соот-

[1]) Burnside W., On a Class of Automorphis Functions, „Proc. London Math. Soc.", т. 23, стр. 49—88, 1892.

ветствующим образом h (независящее от n), мы заключаем, как и ранее, что окружность Q_n, концентрическая с I_n и с радиусом, равным h, лежит целиком в области R. Внешность окружности Q_n переходит посредством преобразования T_n во внутренность некоторой окружности Q_n' с центром на действительной оси. Часть действительной оси, лежащая вне Q_n, переходит в часть действительной оси, лежащей в Q_n'. Длина этого последнего отрезка равна диаметру Q_n', т. е. $\frac{2r_n^2}{h}$. Так как круги Q_n' не перекрываются и так как, с другой стороны, все эти круги лежат внутри Q_n, то куски действительной оси, содержащиеся в кругах Q_n', также не перекрываются и, следовательно, сумма длин этих кусков конечна:

$$\sum \frac{2r_n^2}{h} < 2h, \quad \sum r_n^2 < h^2.$$

Таким образом ряд $\sum r_n^2$ или, что то же, $\sum |c_n|^{-2}$ сходится.

Доказательство этой теоремы для общей фуксовой группы второго рода опирается на следующую лемму:

Лемма. *Если бесконечность есть обыкновенная точка для группы преобразований T_n, а также для группы преобразований $T_n' = GT_nG^{-1}$, то ряды $\sum |c_n|^{-2m}$ и $\sum |c_n'|^{-2m}$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.*

Пусть G, посредством которого была преобразована группа T_n, имеет вид:

$$G = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Тогда [уравнение (2) § 15]

$$c_n' = -\gamma\delta a_n + \gamma^2 b_n - \delta^2 c_n + \gamma\delta d_n. \tag{7}$$

Сначала предположим, что $\gamma \neq 0$. Воспользовавшись равенством $b_n = \frac{a_n d_n - 1}{c_n}$ и произведя соответствующие преобразования, мы можем написать (7) в следующем виде:

$$c_n' = \gamma^2 c_n \left[\left(\frac{d_n}{c_n} - \frac{\delta}{\gamma}\right)\left(\frac{a_n}{c_n} + \frac{\delta}{\gamma}\right) - \frac{1}{c_n^2}\right]. \tag{8}$$

Но центры изометрических окружностей $-\frac{d_n}{c_n}$ и $\frac{a_n}{c_n}$ лежат в конечной области, поэтому расстояния от них до точки $-\frac{\delta}{\gamma}$ ограничены, т. е.

$$\left|\frac{d_n}{c_n} - \frac{\delta}{\gamma}\right| < K, \quad \left|\frac{a_n}{c_n} + \frac{\delta}{\gamma}\right| < K.$$

Далее, величины $\frac{1}{|c_n^2|}$ тоже ограничены; $\frac{1}{|c_n^2|} < K'$; следовательно, мы будем иметь:

$$|c_n'| < |\gamma^2| \cdot |c_n| (K^2 + K') = K_1 |c_n| \quad \text{и} \quad |c_n|^{-2m} < K_1^{2m} |c_n'|^{-2m}.$$

Из этого неравенства заключаем, что если сходится ряд

$$\sum |c_n'|^{-2m},$$

то сходится и ряд

$$\sum |c_n|^{-2m}$$

Если $\gamma=0$, то $\delta \neq 0$, и мы получаем сразу $|c_n'| = |\delta^2||c_n|$, откуда вытекает справедливость леммы.

Так как группа T_n может быть рассматриваема как результат преобразования группы T_n', причем $T_n = G^{-1}T_n'G_n$, то сходимость ряда $\sum |c_n|^{-2m}$ влечет за собой сходимость ряда

$$\sum |c_n'|^{-2m}.$$

Таким образом лемма доказана.

Теперь возвратимся к общей фуксовой группе второго рода. Преобразуем группу таким образом, чтобы главная окружность перешла в действительную ось и чтобы при этом в бесконечно удаленную точку перешла обыкновенная точка группы. Ряд

$$\sum |c_n'|^{-2},$$

построенный для полученной в результате нашего преобразования группы, по доказанному сходится, и, следовательно, применяя лемму, заключаем, что ряд $\sum |c_n|^{-2}$, построенный для исходной группы, также сходится.

Абсолютная и равномерная сходимость тэта-ряда, при $m = 1$, следует из уравнения (6), так как ряд с положительными членами $\sum \frac{M}{d^2} |c_i|^{-2}$ сходится.

§ 48. Некоторые свойства тэта-функции. Пусть Σ есть связная область на плоскости z, граница которой состоит из предельных точек группы. Как было показано, функция $\theta(z)$, определенная формулой (3), аналитична всюду в области Σ за исключением некоторого множества точек, в которых $\theta(z)$ имеет полюсы. Если множество предельных точек группы разбивает плоскость на две или несколько областей, то ряд (3) определяет в каждой области некоторую функцию; в общем эти функции различны.

Рассмотрим в качестве примера фуксову группу первого рода. Для этой группы множество предельных точек есть множество всех точек главной окружности. Таким образом ряд (3) определяет функцию, аналитическую всюду внутри главной окружности, за исключением точек, в которых эта функция имеет полюсы. Если функция $\theta(z)$ имеет полюс в какой-нибудь точке z, то это происходит за счет того, что в этой точке имеет полюс один или несколько членов ряда (3). Если $H(z)$ имеет полюс в точке a внутри главной окружности, то $H(z_i)$ обращается в бесконечность, когда $z_i = a$. Таким образом внутри главной

окружности функция $\theta(z)$ имеет полюсы в тех точках, в которых $H(z)$ имеет полюсы, а также в точках, конгруэнтных полюсам $H(z)$. Исключение составляет случай, когда два или несколько полюсов $H(z)$ находятся в конгруэнтных друг другу точках, если при этом сумма всех членов ряда, имеющих в этих точках полюсы, есть величина конечная. Оставляя в стороне этот особый случай, мы заключаем, что число полюсов $\theta(z)$ в фундаментальной области R_0 равно числу полюсов $H(z)$ внутри главной окружности. Далее очевидно, что если внутри главной окружности имеется хотя бы один полюс $\theta(z)$, то их там имеется бесконечно много, причем каждая точка главной окружности есть точка сгущения для этого множества. Таким образом главная окружность является естественной границей области существования функции (купюра).

Совершенно аналогично формула (3) определяет функцию, аналитическую всюду вне главной окружности, за исключением точек, в которых она имеет полюсы. Эта функция имеет полюсы: в точках, в которых $H(z)$ имеет полюсы; в точках, конгруэнтных полюсам $H(z)$; а также в точках $-\frac{d_i}{c_i}$, в которых множители $(c_i z + d_i)^{-2m}$ обращаются в бесконечность. Здесь, как и раньше, возможен случай, когда сумма членов, имеющих в конгруэнтных точках полюсы, есть величина конечная. Если эта функция имеет хотя бы один полюс, то она имеет их бесконечное множество, и все точки главной окружности служат точками сгущения для этого множества. Отсюда заключаем, что функция не может быть аналитически продолжена за главную окружность. Таким образом одна и та же формула (3) определяет две различных функции: одну — существующую внутри главной окружности, другую — во вне.

В случае фуксовой группы второго рода формула (3) определяет единственную функцию, существующую как внутри, так и вне главной окружности.

При доказательстве сходимости тэта-ряда нигде не предполагалось, что рассматриваемая группа преобразований есть функциональная группа. Если функцию $\theta(z)$ нельзя продолжить аналитически от z до z_j, то соотношение (4) характеризует связь между двумя различными функциями. Для того чтобы соотношение (4) характеризовало свойства одной из определяемых рядом функций, необходимо, чтобы область ее существования переходила сама в себя посредством преобразований группы; таким образом для этого необходимо, чтобы группа была функциональной.

При построении функции посредством ряда (3) выбор точек, являющихся полюсами $H(z)$, зависит от нас. Поэтому, для того чтобы построенная в области Σ функция $\theta(z)$ не была тождественно равна нулю, достаточно разместить полюсы $H(z)$ так, чтобы $\theta(z)$ имела в области Σ полюс.

Далее, при построении автоморфной функции для функциональной группы посредством формулы (5) мы можем расположить полюсы числителя и знаменателя в различных точках обла-

сти Σ и таким образом исключить возможность получения тождественной постоянной при этом построении.

Соотношение (4) характеризует зависимость между $|\theta(z)$ и положением точки z относительно изометрической окружности; если $\theta(z)$ не равна ни нулю, ни ∞ в точке z, то $|\theta(z_j)|$ будет больше, меньше или равен $|\theta(z)|$ в зависимости от того, будет ли $c_j z + d_j|$ соответственно больше, меньше или равен единице; т. е. в соответствии с тем, лежит ли точка z вне, внутри или на изометрической окружности преобразования T_i. Между прочим, отсюда следует, что в любой точке области R (внешней по отношению ко всем изометрическим окружностям), в которой $\theta(z)$ не равна ни нулю, ни ∞, $|\theta(z)|$ принимает значение меньшее, чем в других точках области существования $\theta(z)$, конгруэнтных этой точке.

Поведение около вершины. Пусть ξ неподвижная точка эллиптического преобразования, лежащая внутри области существования тэта-функции. Преобразования, для которых ξ является неподвижной точкой, образуют эллиптическую циклическую группу; эта группа порождается преобразованием $z' = T(z)$, которое имеет вид:

$$\frac{z'-\xi}{z'-\xi'} = K\frac{z-\xi}{z-\xi'}, \qquad K = e^{\frac{2\pi i}{k}}, \tag{9}$$

где ξ' вторая неподвижная точка, k целое число, большее единицы. Основное соотношение (4) применительно к преобразованию T может быть написано в виде:

$$\theta(z') = \left(\frac{dT}{dz}\right)^{-m}\theta(z). \tag{10}$$

Взяв логарифм от обеих частей равенства (9) и затем продифференцировав, получим:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dz'}{dz} = \frac{(z'-\xi)(z'-\xi')}{(z-\xi)(z-\xi')}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь функцию:

$$F(z) = (z-\xi)^m (z-\xi')^m \theta(z'). \tag{12}$$

Из соотношения (10) получаем:

$$\begin{aligned} F(z') &= (z'-\xi)^m (z'-\xi')^m \theta(z') = \\ &= (z-\xi)^m (z-\xi')^m \theta(z) = F(z). \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом функция $F(z)$ остается неизменной при преобразовании T и, следовательно, автоморфна по отношению к циклической подгруппе, порожденной преобразованием T.

Применяя теорему 6 § 41, мы заключаем, что около точки ξ $F(z)$ *принимает каждое значение k раз или число раз, кратное k.*

Предположим, что $\theta(z)$ аналитична в точке ξ. Тогда $F(z)$ имеет в точке ξ нуль, кратность которого равна $l \cdot k$, где l целое

число, большее или равное единице. Если число m не есть кратное k, то, как непосредственно видно из (12), $\theta(z)$ должна иметь в точке ξ нуль кратности s, причем

$$m + s = lk \tag{14}$$

Таким образом, если $\theta(z)$ аналитична в точке ξ, то она в этой точке равна нулю всегда за исключением случая, когда m есть число, кратное k. Порядок s этого нуля удовлетворяет уравнению (14)

Если в точке ξ функция $\theta(z)$ имеет полюс порядка p, то, если $p \neq m$, функция $F(z)$ имеет или полюс порядка $p - m$ или нуль порядка $m - p$. Уравнение (14) сохраняет смысл, если в нем заменить s через $-p$, а под l подразумевать целое число, положительное, отрицательное или нуль.

Поведение в окрестности параболической точки. Пусть параболическая циклическая подгруппа порождена преобразованием S, для которого параболическая точка P есть неподвижная точка. S имеет вид:

$$\frac{1}{z' - P} = \frac{1}{z - P} + c. \tag{15}$$

Отсюда мы получаем:

$$\frac{dS}{dz} = \frac{dz'}{dz} = \left(\frac{z' - P}{z - P}\right)^2. \tag{16}$$

Введем функцию

$$G(z) = (z - P)^{2m}\,\theta(z). \tag{17}$$

Пользуясь основным соотношением (10) применительно к преобразованию S, получаем:

$$G(z') = (z' - P)^{2m}\,\theta(z') = (z - P)^{2m}\,\theta(z) = G(z). \tag{18}$$

Таким образом функция $G(z)$ автоморфна по отношению к подгруппе, порожденной преобразованием S.

Произведем обычную замену переменного:

$$t = e^{\frac{2\pi i}{c(z - P)}} \tag{19}$$

(§ 41; в частности, мы будем пользоваться черт. 32) Тогда функция $G(z)$ перейдет в функцию переменного t, $G(z)$ $g(t)$, однозначную в окрестности $t = 0$.

Отсюда:

$$\theta(z) = \frac{G(z)}{(z - P)^{2m}} = \left(\frac{c \ln t}{2\pi i}\right)^{2m} g(t) \tag{20}$$

Таким образом тэта-функция имеет логарифмическую особенность при $t = 0$. Теперь займемся исследованием функции $g(t)$ в предположении, что $\theta(z)$ определена рядом (3). Изображенный на черт. 32, *а* круг C можно взять настолько малым, чтобы внутрь его не попала ни одна из точек $\frac{d_i}{c_i}$ и ни одна из точек, кон-

груэнтных полюсам $H(z)$. В самом деле, если радиус кружка C достаточно мал, то внутренность C будет состоять только из таких точек, которые конгруэнтны точкам фундаментальной области R, лежащим в окрестностях параболических точек цикла. Эти окрестности могут быть выбраны так, чтобы бесконечно удаленная точка и конечное число точек области R, конгруэнтных полюсам $H(z)$, лежали вне их. Итак, при достаточно малом радиусе круга C будут одновременно иметь место неравенства:

$$\left|\frac{z-P}{z+\frac{d_i}{c_i}}\right| < K, \qquad H(z_i) < M,$$

где z лежит внутри или на контуре треугольника z_1z_2P (исключая точку P), изображенного на черт. 32, *а*. Члены ряда

$$G(z) = \sum \left(\frac{z-P}{z+\frac{d_i}{c_i}}\right)^{2m} \frac{1}{c_i^{2m}} H(z_i)$$

по абсолютной величине меньше соответствующих членов сходящегося ряда $K^{2m} M \sum |c_i|^{-2m}$. Таким образом $G(z)$ остается ограниченной, когда z приближается к P изнутри треугольника. Отсюда следует, что функция $g(t)$ аналитична в окрестности $t=0$ и ограничена там; поэтому $g(t)$ аналитична в точке $t=0$, если ее там соответствующим образом определить.

Строя теперь автоморфную функцию как частное двух тэта-рядов, которое может быть написано в виде

$$f(z) = \frac{(z-P)^{2m}\theta_1(z)}{(z-P)^{2m}\theta_2(z)} = \frac{G_1(t)}{G_2(t)},$$

мы видим, что $f(z)$, рассматриваемая как функция переменного t, или аналитична в точке P, или имеет там полюс. Отсюда следует, что, когда z приближается к P изнутри области R, $f(z)$ стремится к определенному конечному пределу или к бесконечности. Для этой функции таким образом выполняются условия, определяющие согласно § 40 поведение простой автоморфной функции в окрестности параболической точки.

§ 49. Нули и полюсы тэта-функций. Рассмотрим теперь функциональные группы, для которых область R_0, лежащая в Σ, имеет конечное число сторон (§ 40), и тэта-функции, которые, так же как тэта-функции, определенные рядом (3), имеют в области R_0 конечное число полюсов. Предположим, что функция $g(t)$, входящая в правую часть соотношения (20), аналитична в точке $t=0$ или имеет там полюс. Далее предположим, что $\theta(z)$ не тождественный нуль.

В отношении счета нулей и полюсов в обыкновенных точках границы мы здесь будем пользоваться правилами, установленными в § 42. Заметим, что такого рода принцип счета может привести

к дробному числу нулей или полюсов в области. Так, число нулей в вершинах цикла с углом $\frac{2\pi}{k}$ равно

$$\frac{s}{k} = l - \frac{m}{k}$$

и может оказаться дробным. Число нулей или полюсов функции $\theta(z)$ в точках параболического цикла, которому принадлежит точка P, будем считать равным порядку нуля или полюса функции $g(t)$ в точке $t=0$.

Удалим теперь из области R_0, как это было сделано в § 42, небольшие кружки с центрами в вершинах и параболических точках. Обозначим число нулей и полюсов в оставшейся области соответственно через N_0 и M_0.

Тогда

$$N_0 - M_0 = \frac{1}{2\pi i} \int d \ln \theta(z), \tag{21}$$

интеграл при этом берется вдоль границы области, которая, в случае, если нуль или полюс лежат на стороне, должна быть изменена так, как показано на черт. 33, *b*.

Прежде чем вычислять интегралы вдоль сторон области, рассмотрим интегралы вдоль только что построенных нами круговых дуг.

Так же как и в § 42, покажем, что когда радиусы круговых дуг с центрами в вершинах стремятся к нулю, то интегралы распространенные на эти дуги, будут стремиться к $m_0 - n_0$, где n_0 и m_0 соответственно число нулей и полюсов во всех различных вершинах.

Параболические точки, как обычно, труднее исследовать. Круговые дуги $h, h_1, h_2, \ldots, h_n$ с центрами в параболических точках цикла $P, P_1, \ldots, P_n$ являются образами дуг $h, h_1', \ldots, h_n'$, примыкающих друг к другу и образующих дугу $z_1 z_2$, изображенную на черт. 32, *a*.

Дуга h_k' переходит в дугу h_k посредством преобразования $\eta_k = T_k(z)$. Поэтому

$$\int d \ln \theta(\eta_k) = \int_{h_k'} d \ln (c_k z + d_k)^{2m} \theta(z) = \int_{h_k'} d \ln \left(\frac{c_k z + d_k}{z - P} \right)^{2m} \theta(z) =$$

$$= 2m \int_{h_k'} \left[d \ln \left(z + \frac{d_k}{c_k} \right) - d \ln (z - P) \right] + \int_{h_k''} d \ln g(t), \tag{22}$$

где h_k'' соответствующая дуга кружка на плоскости t, изображенного на черт. 32, *c*. Очевидно, что мы должны рассмотреть только мнимую часть интеграла $\int d \ln \theta$, так как обе части уравнения (21)

действительны. Нетрудно видеть, что когда радиус кружка C (черт. 32, a) стремится к нулю, то мнимые части интегралов

$$\int\limits_{h_{k'}} d \ln \left(z + \frac{d_k}{c_k}\right),$$

$$\int\limits_{h_{k'}} d \ln (z - P)$$

будут стремиться к нулю. В самом деле, мнимая часть первого интеграла равняется произведению i на угол, на который поворачивается прямая, соединяющая точку $-\frac{d_k}{c_k}$ с точкой z, когда z проходит дугу $h_{k'}$, лежащую на $z_1 z_2$. Мнимая часть второго интеграла равна произведению i на угол поворота прямой, соединяющей точку P с точкой z.

Таким образом остается рассмотреть только последний интеграл в правой части (22). Складывая такие интегралы, происходящие от различных вершин, получаем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int d \ln g(t),$$

взятый по окружности, изображенной на черт. 32, c в направлении против часовой стрелки. Он равен $-n'$ или m' в соответствии с тем, имеет ли $g(t)$ в точке $t = 0$ нуль порядка n' или полюс порядка m'.

Перенося вычисленные интегралы в левую часть соотношения (21) и обозначая полное число нулей и полюсов, лежащих в области R_0, соответственно через N и M, получим:

$$N - M = \frac{1}{2\pi i} \sum \int\limits_{l_i} d \ln \theta(z), \tag{23}$$

причем интегралы здесь берутся вдоль *сторон* l_i области R_0.

Рассмотрим пару интегралов, взятых вдоль конгруэнтных сторон AB и CD (черт. 33, a или b). Пусть $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ преобразование, переводящее AB в CD. Здесь $-\frac{d}{c}$ центр окружности, которой принадлежит дуга AB. Получаем:

$$\int\limits_{AB} d \ln \theta(z) + \int\limits_{DC} d \ln \theta(z') = \int\limits_{AB} d \ln \theta(z) + \int\limits_{BA} d \ln (cz + d)^{2m} \theta(z) =$$
$$= 2m \int\limits_{BA} d \ln \left(z + \frac{d}{c}\right) = 2im\alpha,$$

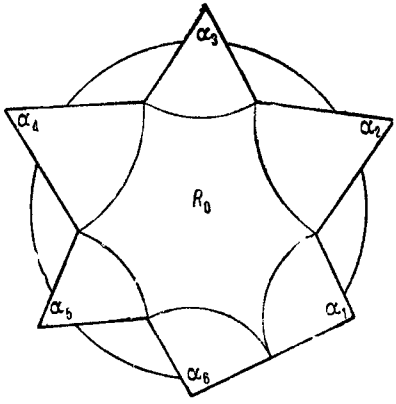
где α центральный угол, опирающийся на дугу BA. Дуге CD, равной BA, соответствует такой же центральный угол α, и таким образом можно написать, что интеграл равен mi, умноженному на сумму углов, опирающихся на обе дуги. Так как аналогичные

результаты справедливы для других сторон, то получаем следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть N число нулей, а M число полюсов тэта-функции в области R_0, пусть, далее, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ углы, опирающиеся на стороны R_0, с вершинами в центрах изометрических окружностей, на которых лежат эти стороны. Тогда*

$$N - M = \frac{m}{2\pi} \Sigma \alpha_i. \tag{24}$$

Из этого соотношения видно, что число нулей функции в области R_0 всегда больше, чем число полюсов. Кроме того, замечаем, что разность $N-M$ зависит исключительно от m и от характера группы. Эта разиость не зависит от функции $H(z)$, которая была использована при построении тэта-ряда (3). Впрочем, это обстоятельство легко можно было предвидеть. В самом деле, автоморфная функция, определенная формулой (5), имеет такое же число нулей, как и полюсов, а поэтому величина разности $N-M$ должна быть одна и та же для функций $\theta_1(z)$ и $\theta_2(z)$.



Черт. 34.

Нули и полюсы, расположенные в области R_j, конгруэнтной R_0, определяются из соотношения (4). В случае если R_0 не содержит ∞, то в области R_j будет столько же нулей и столько же полюсов, как и в R_0. Если же, напротив, R_0 содержит ∞, то ввиду наличия в правой части соотношения (4) множителя $(c_j z + d_j)^{2m}$ величина $N-M$ уменьшится на $2m$.

Пусть R_0 фундаментальная область фуксовой группы первого рода, имеющая n пар сторон. Пусть, далее, $\frac{2\pi}{k_1}, \frac{2\pi}{k_2}, \ldots$ суммы углов простых циклов в R_0. Тогда сумма внутренних углов многоугольника, образованного дугами окружностей, равна

$$2\pi \sum \frac{1}{k_i}.$$

Рассмотрим прямолинейный многоугольник с $4n$ сторонами, изображенный на черт. 34. Сумма его внутренних углов равна $2\pi(2n-1)$. Сумма углов с вершинами в центрах изометрических окружностей равна $\Sigma \alpha_i$, поэтому сумма углов при остальных вершинах равна $2\pi \sum \frac{1}{k_i} + 2n\pi$. Отсюда следует, что

$$2\pi(2n-1) = \sum \alpha_i + 2\pi \sum \frac{1}{k_i} + 2n\pi.$$

Подставляя сюда величину $\Sigma \alpha_i$ из (24), получаем:

$$N - M = m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right).$$

Это соотношение было дано Пуанкаре в уже цитированной его работе.

Применение формулы (24) особенно просто в случае группы § 25, а). Здесь R ограничена $2n$ полными окружностями и $\alpha_i = 2\pi$ Поэтому для R получим:

$$N - M = 2mn.$$

R в этом случае содержит ∞, поэтому для R_j, т. е. для области, конгруэнтной R,

$$N - M = 2m\ (n - 1).$$

§ 50. Ряды и произведения, связанные с группой. При помощи теорем 1 и 3 мы можем установить сходимость многих рядов и произведений, связанных с группой. Рассмотрим здесь несколько примеров.

Пусть z_n, u_n, v_n получаются из z, u, v,... посредством преобразования T_n группы. Мы имеем:

$$z_n - u_n = \frac{z - u}{(c_n z + d_n)(c_n u + d_n)} = \frac{z - u}{\left(z + \frac{d_n}{c_n}\right)\left(n + \frac{d_n}{c_n}\right)} \frac{1}{c_n^2}. \tag{25}$$

Если z и u лежат в области, не содержащей предельных точек группы ни внутри, ни на границе, то тогда множитель, стоящий перед $\frac{1}{c_n^2}$ в (25), ограничен, исключая конечное число значений n.

Предположим, что ряд $\Sigma (c_n)^{-2}$ сходится, и рассмотрим ряд

$$\Sigma (z_n - u_n),$$

где суммирование распространено на все разности $z_n - u_n$, получающиеся из $z - u$ посредством преобразований группы. Пренебрегая конечным числом членов, можно утверждать, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно в ранее упомянутых областях. Поэтому его сумма является аналитической функцией каждого из переменных всюду в рассматриваемых областях за исключением полюсов, происходящих от конечного числа от отдельных членов ряда. Подобным же образом доказывается сходимость таких рядов, как

$$\sum \frac{z_n - u_n}{z - w_n}, \quad \sum (z_n - u_n) \cdot H\ (z_n),$$

где $H(z)$ — такая же функция, как в тэта-ряде, и т. д.

В одной из следующих глав (§ 99) будет использовано произведение вида:

$$\prod \frac{z - u_n}{z - v_n} = \prod \left(1 + \frac{v_n - u_n}{z - v_n}\right), \tag{26}$$

построенное для фуксовой группы второго рода, в котором u и v отличны от предельных точек группы.

Сходимость произведения (26) следует из сходимости ряда:

$$\sum \frac{v_n - u_n}{z - v_n}.$$

Сходимость же этого последнего ряда следует непосредственно из сходимости ряда $\Sigma |c_n|^{-2}$. Далее легко заключаем, что (26) есть аналитическая функция z во всех обыкновенных точках плоскости z за исключеннем точек v_n, в которых она имеет полюсы, и что эта функция обращается в нуль только в точках u_n.

Так как в общем случае ряд $\Sigma (c_n)^{-4}$ сходится, то без труда можно доказать сходимость таких рядов, как

$$\sum (z_n - u_n)^2, \quad \sum \frac{(z_n - u_n)(v_n - w_n)}{z - t_n},$$

$$\sum \frac{z_n - u_n}{(c_n z + d_n)^2} \cdot H(z_n) \text{ и т. п.}$$

Вводя в (26) множитель $e^{\frac{u_n - v_n}{z - w_n}}$, где w обыкновенная точка, получим произведение:

$$\prod \frac{z - u_n}{z - v_n} e^{\frac{u_n - v_n}{z - w_n}},$$

которое сходится уже в общем случае. Другой пример произведения, сходимость которого легко доказывается, предложен Уайтекером[1]):

$$(z - u) \prod{}' \left[\frac{(z - u_n)(u - z_n)}{(z - z_n)(u - u_n)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \frac{(z-u)(z_n - u_n)}{(z - z_n)(u - u_n)}};$$

произведение здесь распространено на все преобразования группы за исключением тождественного преобразования.

---

[1]) «Mess. Math»., т. 31, стр. 145, 1902.

Глава VI

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ГРУППЫ

I. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

§ 51. Инверсия относительно сферы. Изучение конечных групп значительно упрощается, если ввести в рассмотрение преобразования трехмерного пространства. В настоящем разделе будет иметь большое значение пространственное преобразование, известное под названием *инверсии относительно сферы*. Сейчас мы сделаем небольшое отступление от предмета настоящей главы и выведем важнейшие свойства этого преобразования.

Инверсия относительно сферы является прямым обобщением инверсии относительно окружности (§ 5). Рассмотрим сферу S с центром в точке K и с радиусом ϱ. Пусть P какая-нибудь точка пространства; построим полупрямую, начинающуюся в K и проходящую через P. Обозначим через P_1 точку, лежащую на этой полупрямой, для которой выполняется соотношение $KP_1 \cdot KP = \varrho^2$; точку P_1 мы будем называть сопряженной с точкой P относительно сферы S. Очевидно, что в свою очередь точка P сопряжена с точкой P_1. Сфера S называется „сферой инверсии", а точка K—„центром инверсии". Инверсия переводит точку, лежащую внутри S, во внешнюю точку и оставляет неподвижными точки, лежащие на поверхности сферы. Очевидно (§ 5), что любая сфера или окружность S', проходящая через точки P_1 и P, ортогональна сфере. В самом деле, для касательной KT, проведенной из центра K к S' выполняется равенство $\overline{KT}^2 = KP_1 \cdot KP = \varrho^2$. Таким образом точка T лежит на поверхности S и кроме того в этой точке S' ортогональна S. Далее, для всякой секущей, выходящей из точки K и встречающей сферу или окружность S' в точках P_1' и P', выполняется равенство $KP_1' \cdot KP' = \overline{KT}^2 = \varrho^2$. Отсюда заключаем, что при инверсии относительно S окружность или сфера, проходящая через две сопряженных относительно S точки, переходит сама в себя.

Теперь мы выведем аналитическое выражение для инверсии. Обозначим прямоугольные декартовы координаты точек K, P, P_1 соответственно через a, b, c; ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'.

Положим

$$r^2 = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2,$$

$$r'^2 = (\xi' - a)^2 + (\eta' - b)^2 + (\zeta' - c)^2. \qquad (1)$$

Согласно предшествующему

$$rr' = \varrho^2. \tag{2}$$

Проектируя отрезки KP и KP_1 на координатные оси, мы заключаем, пользуясь подобием треугольников, что

$$\frac{\xi' - a}{\xi - a} = \frac{\eta' - b}{\eta - b} = \frac{\zeta' - c}{\zeta - c} = \frac{r'}{r} = \frac{rr'}{r^2} = \frac{\varrho^2}{r^2}. \tag{3}$$

Отсюда получаем для нашего преобразования следующие формулы:

$$\xi' - a = \frac{\varrho^2(\xi - a)}{r^2}, \quad \eta' - b = \frac{\varrho^2(\eta - b)}{r^3}, \quad \zeta' - c = \frac{\varrho^2(\zeta - c)}{r^2}. \tag{4}$$

Выражения для ξ, η, ζ через ξ', η', ζ' получим, поменяв в уравнении (4) местами ξ, η, ζ и ξ', η', ζ'.

Исследуем теперь изменение элемента ds. Пусть ds' означает длину преобразованного элемента. Из (4) следует:

$$d\xi' = \frac{\varrho^2}{r^2} d\xi - 2\frac{\varrho^2(\xi - a)}{r^3} dr$$

и аналогичные выражения для $d\eta'$ и $d\zeta'$. Возводя в квадрат и складывая, получим:

$$(ds')^2 = d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2 = \frac{\varrho^4}{r^4}(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) - \frac{4\varrho^4}{r^5} dr\,[(\xi - a)d\xi +$$

$$+ (\eta - b)d\eta + (\zeta - c)d\zeta] + \frac{4\varrho^4}{r^6} dr^2\,[(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2] =$$

$$= \frac{\varrho^4}{r^4} ds^2 - \frac{4\varrho^4}{r^5} dr\,[r\,dr] + \frac{4\varrho^4}{r^6} dr^2\,[r^2] = \frac{\varrho^4}{r^4} ds^2$$

или

$$ds' = \frac{\varrho^2}{r^2} ds. \tag{5}$$

Изменение длины элемента определяется только положением его, а не направлением. Стороны небольшого треугольника в окрестности некоторой точки умножаются при преобразовании на одну и ту же величину, т. е. этот треугольник преобразуется в подобный треугольник; углы треугольника не изменяются по величине. Иными словами, инверсия относительно сферы есть конформное преобразование.

Рассмотрим теперь, как преобразуются при инверсии сфера или плоскость Σ:

$$A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + B\xi + C\eta + D\zeta + E = 0.$$

Написанное уравнение есть уравнение сферы (радиус может быть и мнимый), если $A \neq 0$, и уравнение плоскости, если $A = 0$.

Это уравнение можно переписать в виде:

$$A[(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2]+B'(\xi-a)+C'(\eta-b)+D'(\zeta-c)+E'=0$$

или

$$Ar^2+B'(\xi-a)+C'(\eta-b)+D'(\zeta-c)+E'=0. \qquad (6)$$

На основании (2) и (4) уравнение преобразованной сферы будет:

$$A\frac{\varrho^4}{r'^2}+B'\frac{\varrho^2}{r'^2}(\xi'-a)+C'\frac{\varrho^2}{r'^2}(\eta'-b)+D'\frac{\varrho^2}{r'^2}(\zeta'-c)+E'=0$$

или

$$E'r'^2+B'\varrho^2(\xi'-a)+C'\varrho^2(\eta'-b)+D'\varrho^2(\zeta'-c)+A\varrho^4=0. \qquad (7)$$

Полученное уравнение есть уравнение сферы или плоскости в зависимости от того, будет ли $E'\neq 0$ или $E'=0$. Итак, доказано ли, что при инверсии относительно сферы сфера или плоскость переходят в сферу или плоскость.

Если сфера проходит через центр инверсии, то в уравнении (6) $E'=0$. Поэтому сфера или плоскость, проходящая через центр инверсии, преобразуется в плоскость. Этого можно было ожидать из геометрических соображений.

Так как окружность или прямая являются соответственно пересечением двух сфер или двух плоскостей и так как эти последние переходят при преобразовании в сферы или плоскости, то окружность или прямая при инверсии переходят в окружность или прямую.

Окружность (или прямая) переходит в прямую тогда и только тогда, когда она проходит через центр инверсии.

Наконец, если точки P и Q сопряжены относительно сферы Σ, они переходят в точки P_1 и Q_1, сопряженные относительно преобразованной сферы Σ_1.

Проще всего доказать это геометрически. Через P и Q проходит семейство сфер, ортогональных Σ. Каждая сфера, принадлежащая семейству, переходит в сферу, проходящую через точки P_1 и Q_1 и ортогональную Σ_1, так как углы при преобразовании сохраняются. При инверсии относительно Σ_1 каждая из этих сфер переходит сама в себя. При этом, так как точка P_1 лежит на всех сферах, она переходит в точку Q_1, также лежащую на всех сферах. Следовательно, P_1 и Q_1 сопряжены относительно Σ_1.

Если Σ_1 есть плоскость, то две точки P_1 и Q_1 — такие, что все сферы, проходящие через них, ортогональны к Σ—должны быть равно удалены от плоскости и лежать на общем перпендикуляре к ней, т. е. точка Q_1 получается из P_1 путем зеркального отражения в Σ. Таким образом мы можем распространить понятие инверсии на случай, когда сфера инверсии вырождается в плоскость.

Инверсия относительно плоскости есть простое зеркальное отражение относительно этой плоскости. Это преобразование обладает всеми свойствами инверсии относительно сферы, перечисленными в этом параграфе.

§ 52 Стереографическая проекция. Мы введем теперь часто используемый метод изображения плоскости комплексного переменного z посредством сферы. Пусть плоскость комплексной переменной есть плоскость в трехмерном пространстве. Произведем инверсию относительно какой-нибудь сферы, центр которой K не лежит на этой плоскости. При этом наша плоскость переходит в сферу, пооходящую через точку K. Между точками плоскости переменной z и точками полученной посредством инверсии сферы существует взаимно-однозначное соответствие. Сопряженные точки лежат на прямой, проходящей через K. Соответствующие друг другу углы равны. Это соответствие между точками плоскости и сферы называется стереографической проекцией. Для удобства сферу, относительно которой производится инверсия, выберем так, чтобы плоскость переменной z переходила в сферу единичного радиуса с центром в начале координат.

Обозначим координаты точки в пространстве через ξ, η, ζ, и пусть оси координат в пространстве расположены так, что ось ξ совпадает с действительной, а ось η с мнимой осью плоскости комплексного переменного. Обозначим через S сферу, относительно которой производится инверсия; пусть 0, 0,1 координаты ее центра K и пусть ее радиус равен $\sqrt{2}$. S проходит через единичную окружность Q_0 с центром в начале координат, лежащую на плоскости переменного z. Точки окружности Q_0 остаются неподвижными при инверсии относительно S. Бесконечно удаленная точка плоскости z переходит в точку K, центр сферы S. Таким образом плоскость комплексного переменного z переходит в сферу Σ_0, проходящую через окружность Q_0 и точку K. Следовательно, Σ_0 есть сфера единичного радиуса; ее уравнение имеет вид:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1. \tag{8}$$

Соответствующие друг другу точки плоскости z и сферы Σ_0 лежат на прямой, проходящей через точку 0, 0, 1. Внутренность окружности Q_0 преобразуется в нижнюю половину сферы Σ_0, а внешность в ее верхнюю половину. Окружности и прямые на плоскости z переходят в окружности на Σ_0. Уравнения, связывающие точку $z=x+iy$ и соответствующую ей точку ξ, η, ζ на сфере Σ_0, могут быть написаны сразу на основании формулы (4). Вставляя в (4) x, y, 0 вместо ξ, η, ζ и ξ, η, ζ вместо ξ', η', ζ', мы получим, принимая во внимание, что $r^2=x^2+y^2+1=z\bar{z}+1$ и $\varrho^2=2$, уравнения:

$$\xi=\frac{2x}{z\bar{z}+1},\quad \eta=\frac{2y}{z\bar{z}+1},\quad \zeta=\frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}. \tag{9}$$

Поменяв в формуле (4) местами ξ, η, ζ и ξ', η', ζ' и используя уравнение

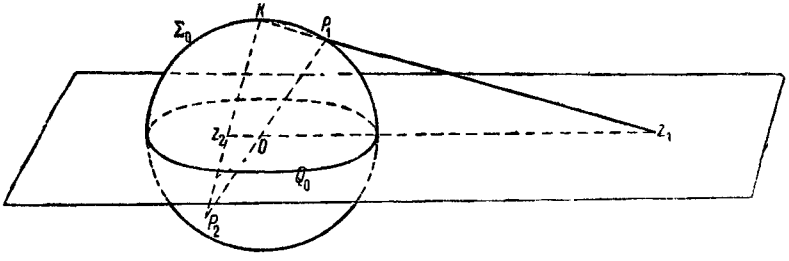
$$r'^2=\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\zeta+1=2(1-\zeta),$$

получим:

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta},\quad z=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}. \tag{10}$$

§ 53. Вращение сферы. Если преобразуем конформно сферу Σ_0 в самое себя, то в силу установленного соответствия между точками Σ_0 и плоскости z плоскость z также подвергнется одно-однозначному и конформному преобразованию в самое себя, т. е. плоскость z подвергнется линейному преобразованию. В дальнейшем для нас будут представлять особый интерес жесткие движения пространства, переводящие сферу Σ_0 в самое себя. Такого рода движения являются, очевидно, одно-однозначными преобразованиями, сохраняющими углы.

Самое общее движение этого рода, переводящее сферу Σ_0 в самое себя, есть вращение около оси, проходящей через центр сферы. В самом деле, при таком жестком движении, переводящем сферу Σ_0 в самое себя, на сфере Σ_0 должна лежать хотя бы одна неподвижная точка P_1, так как соответствующее линейное пре-



Черт. 35.

образование плоскости z имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Центр сферы Σ_0 также остается неподвижным при этом преобразовании; следовательно, прямая OP есть неподвижная ось и рассматриваемое движение есть вращение.

Посмотрим теперь, каково будет соответствующее преобразование плоскости z. Обозначим через P_1 и P_2 точки пересечения оси вращения со сферой Σ_0 (черт. 35). Окружность большого круга, проходящая через точки P_1 и P_2, переходит в другую такую же окружность, пересекающую первоначальную под углом θ (θ—угол вращения сферы).

Каждая окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной прямой P_1P_2, переходит сама в себя, причем все такие окружности ортогональны окружностям, проходящим через точки P_1 и P_2.

Воспользуемся теперь стереографической проекцией. P_1 и P_2 проектируются в точки z_1 и z_2, которые остаются неподвижными при вращении сферы. Окружности, проходящие через P_1 и P_2, проектируются в окружности, проходящие через z_1 и z_2. Следовательно, каждая окружность, проходящая через точки z_1 и z_2, перейдет при вращении в окружность, проходящую через те же точки и образующую с первой угол θ. Неподвижные окружности на сфере проектируются в неподвижные окружности на плоскости z, ортогональные окружностям, проходящим через z_1

и z_2. Такое расположение неподвижных окружностей показывает (черт. 7), что это преобразование эллиптическое.

Обратно: каждое эллиптическое преобразование плоскости z, неподвижные точки которого являются проекциями концов диаметра, соответствует вращению Σ_0. В самом деле, мы можем найти такое вращение Σ_0, чтобы соответствующее ему преобразование плоскости z имело те же неподвижные точки, что и данное преобразование, и поворачивало окружность, проходящую через неподвижные точки, на тот же угол. Тогда данное преобразование и преобразование плоскости, соответствующее вращению сферы, имеют одни и те же неподвижные точки и один и тот же множитель и, следовательно, они тождественны.

Найдем теперь соотношение, которое должно существовать между двумя точками z_1 и z_2, для того чтобы они являлись проекциями двух концов P_1 и P_2 диаметра Σ_0. Пусть ξ_1, η_1, ζ_1 координаты точки P_1, тогда координаты точки P_2 будут $-\xi_1, -\eta_1, -\zeta_1$. Из (10) следует, что

$$z_1 = \frac{\xi_1 + i\eta_1}{1 - \zeta_1}, \quad z_2 = -\frac{\xi_1 + i\eta_1}{1 + \zeta_1}.$$

Помножая $\bar{z}_1$ на z_2, мы получим, принимая во внимание (8):

$$\bar{z}_1 z_2 = -\frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{1 - \zeta_1^2} = -1,$$

отсюда

$$z_2 = -\frac{1}{\bar{z}_1}. \tag{11}$$

Обратно: если для точек z_1 и z_2 удовлетворяется уравнение (11) соответствующие им точки Σ_0 лежат на противоположных концах диаметра.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 1. *Для того чтобы преобразование плоскости z соответствовало вращению сферы Σ_0, необходимо и достаточно, чтобы это преобразование имело вид:*

$$z' = \frac{az - \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \qquad a\bar{a} + c\bar{c} = 1. \tag{12}$$

Пусть преобразование $z' = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc = 1$ соответствует вращению Σ_0. При вращении Σ_0 две точки, лежащие на противоположных концах какого-нибудь диаметра, переходят в точки, лежащие на концах диаметра. Итак, если z_1 и z_2 удовлетворяли уравнению (11), ему же должны удовлетворять преобразованные точки $\frac{az_1 + b}{cz_1 + d}$ и $\frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$, т. е.

$$\frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = -\frac{\bar{c}\,\bar{z}_1 + \bar{d}}{\bar{a}\,\bar{z}_1 + \bar{b}} = \frac{\bar{d}z_2 - \bar{c}}{-\bar{b}z_2 + \bar{a}}.$$

Последнее выражение получается после подстановки $-\frac{1}{z_2}$ вместо $\bar{z}_1$. Из этого тождества относительно z_2 получаем:

$$\frac{a}{\bar{d}} = -\frac{b}{\bar{c}} = -\frac{c}{\bar{b}} = \frac{d}{\bar{a}} = \lambda$$

или

$$a = \lambda\bar{d}, \quad b = -\lambda\bar{c}, \quad c = -\lambda\bar{b}, \quad d = \lambda\bar{a}.$$

Из этих уравнений следует, что

$$ab - bc = \lambda(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) = 1,$$

т. е.

$$\lambda = 1.$$

Следовательно, $b = -\bar{c}$ и $d = \bar{a}$ и преобразование имеет вид (12).

Допустим теперь, что дано преобразование вида (12). Покажем, что соответствующее ему преобразование сферы есть вращение. Во-первых, покажем, что преобразование (12) есть преобразование эллиптического типа, если только оно не тождественное есть преобразование. В самом деле, положим $c \neq 0$, тогда $|a| < 1$, так что $|a + \bar{a}| < 2$. А это и есть условие того, что преобразование принадлежит эллиптическому типу (теорема 15 § 10), так как $a + \bar{a}$ действительно. Если же $c = 0$, то $|a| = 1$; тогда или $|a + \bar{a}| < 2$, или $a = \pm 1$. В этом последнем случае равенство (12) обращается в тождество $z_1' = z$.

Далее покажем, что неподвижные точки преобразования (12) удовлетворяют уравнению (11). Обозначим через z_1 одну из неподвижных точек. z_1 есть корень уравнения

$$cz_1^2 + (\bar{a} - a)z_1 + \bar{c} = 0.$$

Заменяя здесь все величины сопряженными им, получим:

$$\bar{c}\,\bar{z}_1^2 + (a - \bar{a})\bar{z}_1 + c = 0.$$

Отсюда, разделив на $\bar{z}_1^2$, будем иметь:

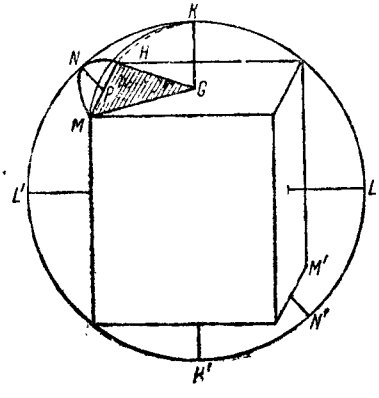
$$\frac{c}{\bar{z}_1^2} + (\bar{a} - a)\left(-\frac{1}{\bar{z}_1}\right) + \bar{c} = 0,$$

т. е. $-\frac{1}{\bar{z}_1}$ также является корнем уравнения, определяющего неподвижную точку. Итак, неподвижные точки удовлетворяют уравнению (11), т. е. они являются проекциями концов диаметра. Таким образом преобразование (12) соответствует вращению сферы.

§ 54. Группы правильных многогранников. Образуя конечные группы вращений сферы Σ_0 и пользуясь стереографической проекцией сферы Σ_0 на плоскость z, можно построить конечные группы линейных преобразований. Для этого мы поступим следующим образом: расположим какой-нибудь правильный многогранник

например куб или тетраэдр, так, чтобы его центр совпал с центром сферы Σ_0. Существуют жесткие движения пространства, которые переводят этот правильный многогранник в самого себя. При этом грани меняются местами, но центр многогранника остается неподвижным. Следовательно, всякое жесткое движение, переводящее многогранник в самого себя, есть вращение около оси, проходящей через его центр. При такого рода движении сфера Σ_0 повернется около оси, проходящей через ее диаметр, и точки плоскости z, соответствующие точкам сферы Σ_0 при стереографической проекции, подвергнутся линейному преобразованию.

Ясно, что множество всех жестких движений пространства, переводящих многогранник самого в себя, образует группу жестких движений. В самом деле, всякое жесткое движение пространства, являющееся результатом двух последовательных движений, принадлежащих множеству, переводит многогранник самого в себя, т. е. также принадлежит множеству. То же самое справедливо относительно движения, обратного какому-нибудь движению, входящему в наше множество. Множество линейных преобразований плоскости z, соответствующее группе вращений, переводящих правильный многогранник в самого себя, есть группа линейных преобразований, изоморфная группе вращений.



Черт. 36.

Очевидно, что число вращений, переводящих правильный многогранник в самого себя, конечно. Действительно, существует лишь конечное число способов, посредством которых данную грань можно совместить с ней самой или какой-либо иной гранью. Отсюда следует, что соответствующие группы на плоскости z состоят из конечного числа линейных преобразований[1]).

§ 55. Исследование куба. Начнем с наиболее знакомого правильного многогранника — с куба.

Пусть дан куб с центром в начале координат и ребрами, параллельными координатным осям. Можно предположить, что этот куб вписан в сферу Σ_0. Найдем оси, при повороте около которых куб может перейти сам в себя. Имеются три различных типа таких осей.

Во-первых, оси, соединяющие середины противоположных граней, как, например, прямая KK_1 на черт. 36. Таких осей всего три. Поворот около каждой из осей на угол 90,180 или 270°

[1]) По вопросу о таких группах смотрите Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder.

переводит куб в самого себя. Таким образом получается девять вращений, переводящих куб в самого себя.

Во-вторых, оси, соединяющие противоположные вершины; например, прямая MM' на черт. 36. Их всего четыре. Куб переходит сам в себя при повороте на 120 или 240° около любой из этих осей. В этом случае получаем восемь вращений.

В-третьих, оси, соединяющие середины противоположных ребер; например, прямая NN' на черт. 36. Всего таких осей шесть. Поворот около каждой из них на 180° переводит куб в самого себя.

Таким образом всего получается $9+8+6=23$ вращения, переводящих куб в самого себя. К ним нужно еще присоединить тождественное преобразование (т. е. случай, когда вращение отсутствует).

Группа вращений, которые переводят куб в самого себя, состоит из 24 вращений. Соответствующая группа преобразований плоскости z состоит из 24 линейных преобразований. Нахождение этих преобразований есть чисто алгебраическая задача. Сначала нужно найти точки, в которых ось вращения пересекает Σ_0; затем найденные две точки спроектировать на плоскость z [уравнение (10)]. Пусть z_1 и z_2 эти проекции; тогда соответствующее линейное преобразование будет иметь вид:

$$\frac{z'-z_1}{z'-z_2}=e^{i\theta}\,\frac{z-z_1}{z-z_2}\,, \tag{13}$$

где θ — угол поворота куба.

Рассмотрим несколько примеров (черт. 36). Точки $L(1,0,0)$ и $L'(-1,0,0)$ проектируются в точки $z_1=1$ и $z_2=-1$. Угол θ равен $\frac{\pi}{2}$, π или $3\frac{\pi}{2}$, так что $e^{i\theta}=i, -1$ или $-i$. Три преобразования, соответствующие трем вращениям около оси L, L', суть:

$$\frac{z'-1}{z'+1}=k\,\frac{z-1}{z+1}\,,\qquad k=i,-1,-i.$$

Точки $M\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $M'\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ проектируются согласно уравнению (10) в точки $z_1=-\frac{1+i}{\sqrt{3}-1}$, $z_2=\frac{1+i}{\sqrt{3}+1}$.

Здесь $\theta=\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{4\pi}{3}$; $e^{i\theta}=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ или $\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$.

Подставив в уравнение (13), получим требуемые преобразования.

Точки $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $N'\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ проектируются в точки $z_1=-\left(\sqrt{2}+1\right)$ и $z_2=\sqrt{2}-1$. Здесь $\theta=\pi$ и $e^{i\theta}=-1$. Подставив в (13) и упростив, получим:

$$z'=S(z)=-\frac{z-1}{z+1}\,. \tag{14}$$

Точки K и K' проектируются в ∞ и 0 соответственно. Соответствующие преобразования плоскости z суть вращения $z' = kz$, причем $k = i, -1, -i$. Эти три вращения представляют собой степени преобразования

$$z' = T(z) = iz. \tag{15}$$

Очевидно, что, когда ось вращения проходит через середины противоположных граней, три соответствующих линейных преобразования представляют собой степени одного преобразования, имеющего период четыре. Когда ось соединяет противоположные вершины, соответствующие два преобразования являются степенями преобразования, имеющего период три. Если ось соединяет середины противоположных ребер, соответствующее линейное преобразование имеет период два. Неподвижные точки эллиптических преобразований, составляющих нашу группу, распадаются на три таких множества, что любые две точки, входящие в одно и то же множество, конгруэнтны друг другу. В самом деле, K можно перевести в L, K', L' или какую-нибудь другую точку, являющуюся концом оси такого же рода, посредством жесткого движения, переводящего куб в самого себя. Следовательно, проекции этих точек конгруэнтны. Но K нельзя посредством такого движения перевести в точку M или N. Аналогично точки, соответствующие концам оси MM' и других осей того же рода, конгруэнтны между собой. То же самое справедливо относительно точек, соответствующих точкам N, N' и подобным точкам.

Фундаментальную область группы можно образовать, строя изометрические окружности. Мы, однако, поступим иначе.

Рассмотрим треугольник MHG на черт. 36, получающийся, если соединить вершины, лежащие на концах ребра с серединой прилежащей грани. Посредством соответствующего вращения около оси KK' этот треугольник может быть переведен в один из двух аналогичных треугольников, примыкающих к нему вдоль сторон MG и MH.

Поворачивая куб около оси NN', мы получим треугольник, примыкающий к первому вдоль стороны MH.

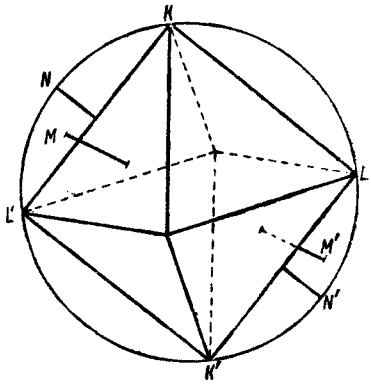
Если мы спроектируем треугольник MHG на поверхность сферы, взяв центр проекции в начале координат, то получим сферический треугольник, образованный дугами больших кругов KM, KH, MNH. Этот сферический треугольник представляет собой фундаментальную область группы вращений сферы. Его стереографическая проекция на плоскость z является фундаментальной областью группы линейных преобразований.

Обозначим проекции точек M, N, H, K на плоскость z через z_M, z_N, z_H, $z_K (= \infty)$. Фундаментальная область имеет таким образом две пары конгруэнтных сторон. Преобразование T [уравнение (15)] переводит $z_K z_H$ в $z_K z_M$; преобразование S [уравнение (14)] переводит $z_N z_M$ в $z_N z_H$. Имеем три цикла: z_K образует цикл с углом $\frac{\pi}{2}$; z_N образует цикл с углом π; z_H и z_M

образуют цикл с углом $2\frac{\pi}{3}$. Отсюда получаются соотношения $T^4=1$ и $S^2=1$, которые мы уже имели, и $(ST)^3=1$, которое легко проверить.

Можно построить на кубе 23 других треугольника, соединяя концы ребра с серединой прилежащей грани. И посредством соответствующего вращения можно перевести MHG в любой из этих треугольников. Если спроектировать эти 23 треугольника на поверхность сферы, а затем стереографически спроектировать сферу на плоскость z, мы получим 23 области, конгруэнтные ранее построенной фундаментальной области.

Преобразования S и T, посредством которых переходят друг в друга стороны фундаментальной области, являются порождающими преобразованиями группы. В самом деле, комбинируя преобразования S и T, мы можем построить области, примыкающие к фундаментальной области; области, примыкающие к новым областям, и т. д. до тех пор, пока имеется хотя бы одна свободная сторона. Мы покроем таким образом всю плоскость и получим все области, конгруэнтные фундаментальной области.



Черт. 37.

Только что полученная группа 24 линейных преобразований называется „группой октаэдра", так как ее можно построить, рассматривая вращения октаэдра. Соединяя шесть точек пересечения сферы с осями координат K, L, K' и т. д. прямыми, получим октаэдр (черт. 37). Октаэдр допускает те же вращения около осей KK', LL' и т. д., что и куб. Легко видеть, что оси, соединяющие противоположные вершины куба, как, например, MM', соединяют также середины противоположных граней октаэдра; оси, соединяющие середины противоположных ребер куба, как, например, NN', соединяют также середины противоположных ребер октаэдра; октаэдр и куб допускают одни и те же вращения около этих осей.

§ 56. Правильный многогранник. Общий случай. Пусть дан правильный многогранник, имеющий F граней, V вершин и E ребер. Пусть каждая грань ограничена μ ребрами и пусть в каждой вершине сходятся ν граней.

Легко определить число жестких движений, переводящих многогранник в самого себя. Многогранник может быть переведен в самого себя таким образом, чтобы данное ребро a_0b_0 совместилось с каким-нибудь ребром a_ib_i или b_ia_i. Таким образом *число вращений, переводящих правильный многогранник в самого себя, равно* $2E$.

Пусть наш правильный многогранник вписан в сферу Σ_0. Так же как в § 55, спроектируем стереографически сферу Σ_0 на плоскость. Все неподвижные точки линейных преобразований на плоскости являются проекциями концов диаметров, около которых происходили вращения.

Диаметр является осью, вращение около которой переводит многогранник в самого себя, тогда и только тогда, если он проходит через середину грани, через вершину или через середину ребра. Поэтому число неподвижных точек группы равно

$$F + V + E.$$

Применяя формулу Эйлера

$$V + F = E + 2, \tag{16}$$

справедливую для любого односвязного многогранника, заключаем, что число неподвижных точек группы равно $2E + 2$.

Углы вращения около оси, проходящей через середину грани, все являются кратными $\frac{2\pi}{\mu}$; т. е. все такие вращения представляют собой степени вращения с периодом μ. Вращения около осей, проходящих через вершины, представляют собой степени вращения с периодом ν. Вращения около осей, проходящих через середины ребер, представляют собой степени вращения с периодом 2. Аналогичные утверждения справедливы относительно соответствующих преобразований плоскости.

Посредством вращения, переводящего многогранник в самого себя, можно середину грани перевести в середину любой другой грани, вершину — в любую другую вершину и середину ребра — в середину любого другого ребра.

Следовательно, все неподвижные точки на плоскости распадаются на три множества, причем каждое из этих множеств состоит из конгруэнтных друг другу точек. В первом содержится F точек, во втором V точек и в третьем E точек.

Фундаментальную область группы можно получить следующим образом: две вершины, находящиеся на концах ребра, соединяем с серединой прилежащей грани, как показано на черт. 36; полученный таким образом треугольник проектируем на поверхность сферы, а затем сферический треугольник стереографически проектируем на плоскость. Все области, конгруэнтные фундаментальной области, являются такими же проекциями $2E - 1$ остальных треугольников из $2E$ треугольников, могущих быть нарисованными на многограннике.

Конгруэнтные стороны этой фундаментальной области переходят друг в друга посредством преобразования T с периодом μ и преобразования S с периодом 2. S и T являются порождающими преобразованиями группы. Они связаны соотношением $(ST)^{\nu} = 1$.

На табл. 1 выписаны все правильные многогранники, причем указано число их граней, вершин и т. д. В последнем столбце указано число преобразований группы.

Таблица 1

	F	V	E	μ	ν	N
Тетраэдр	4	4	6	3	3	12
Куб	6	8	12	4	3	24
Октаэдр	8	6	12	3	4	24
Додекаэдр	12	20	30	5	3	60
Икосаэдр	20	12	30	3	5	60
Диэдр	2	n	n	n	2	$2n$

Диэдр можно рассматривать как правильный многогранник с нулевым объемом. Пусть в окружность Q_0, — экватор Σ_0 — вписан правильный n угольник. Мы можем рассматривать эту фигуру как правильный многогранник с двумя совпадающими гранями. Фигура переходит в самое себя при вращении на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$, около оси KK'. Фигура также переходит в самое себя при вращении на угол π около одного из диаметров, проходящих через вершину многоугольника или середину его стороны. Группа вращений этой фигуры переводит в самое себя также двойную пирамиду, которая получится, если соединить точки K и K' с вершинами вписанного в Q_0 многоугольника. Но эта пирамида не является правильным многогранником.

Отметим, что додекаэдр и икосаэдр обладают таким же свойством двойственности, как куб и октаэдр. Если в табл. 1 поменять местами числа F и V и μ и ν, указанные для додекаэдра, то мы получим соответствующие величины для икосаэдра. Нетрудно проверить, что икосаэдр можно расположить так, чтобы он имел ту же группу вращений, что и додекаэдр. Оси, соединяющие середины противоположных граней одного многогранника, могут быть сделаны осями, соединяющими противоположные вершины другого.

Осталось упомянуть еще две группы:

Группу четырех преобразований, которая соответствует четырем вращениям сферы Σ_0, переводящим действительную ось в самое себя и мнимую ось в самое себя. Эта группа может быть рассматриваема как предельный случай группы диэдра, причем $n = 2$.

Наконец простейшей из всех конечных групп является *эллиптическая циклическая группа*. Эта группа имеет две неподвижных точки, которые не конгруэнтны друг другу. Эту группу можно получить геометрическим путем, пользуясь группой вращений, переводящих саму в себя правильную пирамиду, которая получится, если соединить точку K с вершинами вписанного в Q_0 правильного многоугольника.

Таким образом нами найдены пять типов конечных групп линейных преобразований: эллиптическая циклическая группа, группа диэдра (включающая группу четырех преобразований), группа тетраэдра, группа октаэдра и группа икосаэдра. Из каж-

дой из этих групп можно получать, применяя способ, указанный в § 15, другие конечные группы.

Вопрос о том, могут ли существовать еще какие-либо другие конечные группы, будет разобран в § 57. Мы убедимся в том, что никаких других конечных групп кроме перечисленных выше (и получающихся из них путем преобразования) не существует.

§ 57. Определение всех конечных групп. Докажем сначала следующую теорему:

Теорема 2. *Если группа содержит два непараболических преобразования, имеющих общую неподвижную точку, и если при этом две других неподвижных точки этих преобразований не совпадают, то эта группа содержит параболическое преобразование, неподвижной точкой которого является общая неподвижная точка первых двух преобразований.*

Предположим, что группа преобразована так, чтобы ∞ являлась общей неподвижной точкой, а 0 и 1 — двумя другими неподвижными точками. Тогда два преобразования, о которых идет речь, имеют вид:

$$S_1 = K_1 z, \qquad S_2 = K_2(z-1)+1, \qquad K_1 \neq 1,\ K_2 \neq 1.$$

Составим произведение:

$$U = S_1^{-1} S_2 S_1 S_2^{-1} = z + \frac{(K_1-1)(K_2-1)}{K_1}.$$

Нетрудно видеть, что это — преобразование переноса, т. е. параболическое преобразование с неподвижной точкой в бесконечности. Любая степень этого преобразования U^n при $n \neq 0$ представляет собой также параболическое преобразование с неподвижной точкой в ∞.

Конечная группа содержит только эллиптические преобразования. Из предыдущей теоремы следует, что если два преобразования такой группы имеют общую неподвижную точку, то две других неподвижных точки также должны совпадать. Мы будем называть точку e неподвижной точкой порядка v, если e является неподвижной точкой для v преобразований (включая тождественное). Эти преобразования образуют циклическую подгруппу; все они представляют собой степени преобразования, имеющего множитель $e^{\frac{2\pi i}{v}}$. Все неподвижные точки конгруэнтные точке e, также имеют порядок v. В самом деле, пусть $e' = T(e)$ и пусть S_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ преобразования, для которых e неподвижная точка. Тогда точка e' является неподвижной точкой для v преобразований TS_iT^{-1} и только для них.

Пусть дана конечная группа, состоящая из $N(>1)$ линейных преобразований. Можно считать, что ни одно преобразование группы не имеет неподвижной точки в бесконечности (так как этого всегда можно достигнуть путем соответствующего преобразования группы).

Пусть R фундаментальная область нашей группы, лежащая вне всех изометрических окружностей. Исследуем циклы этой области. Пусть z_0 вершина, принадлежащая циклу с углом $\frac{2\pi}{k}$, $k > 1$. В § 26 было указано, что в таком случае z_0 является неподвижной точкой эллиптического преобразования, имеющего множитель $e^{\frac{2\pi i}{k}}$.

Преобразования с множителем $e^{i\theta}$, где $0 < \theta < \frac{2\pi}{k}$, для которых z_0 является неподвижной точкой, не могут принадлежать группе, и поэтому z_0 неподвижная точка порядка k.

Рассмотрим неподвижную точку e порядка ν, лежащую вне R. Существует точка e', конгруэнтная e, лежащая внутри области R или на ее границе. Но через e' проходят изометрические окружности, так как она является неподвижной точкой эллиптического преобразования порядка ν. Следовательно, e' есть вершина R. Итак, каждая неподвижная точка порядка ν конгруэнтна вершине R, принадлежащей циклу с углом $\frac{2\pi}{\nu}$.

Обозначим через a и b две конечных точки, лежащих внутри области R. Построим функцию

$$f(z) = \frac{(z-a)(z_1-a)\ldots(z_{N-1}-a)}{(z-b)(z_1-b)\ldots(z_{N-1}-b)}, \tag{17}$$

где точки $z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}$ конгруэнтны z. Эта функция автоморфна по отношению к данной группе, так как, когда z переходит в точку z_i, переменные $z, z_1, \ldots, z_{N-1}$ меняются местами и $f(z)$ остается неизменной. $f(z)$ имеет нули первого порядка в точке a и в конгруэнтных ей точках и полюсы первого порядка в точке b и конгруэнтных ей точках. В области R находится только один полюс $f(z)$; следовательно, в области R эта функция принимает каждое значение только один раз (§ 42, теорема 11).

Утверждая, что автоморфная функция принимает в фундаментальной области все свои значения одно и то же число раз, необходимо помнить, что число значений, принимаемых в вершине, определяется особым образом. Пусть $f(z_0) = A$ и пусть $f(z)$ принимает значение A r раз. В таком случае считают, что значение A принимается $\frac{r}{k}$ раз в каждой из вершин, принадлежащих циклу (§ 42, 2). В данном случае $\frac{r}{k} = 1$; следовательно, $f(z)$ принимает в точке z_0 значение A ровно k раз. Производная $f'(z)$ имеет $k-1$ нулей в точке z_0.

Исследуем теперь рациональную функцию $f(z)$ на всей плоскости. $f(z)$ имеет N полюсов; следовательно, она принимает любое значение N раз. Оно принимает значение A только в вершине z_0 и в точках, конгруэнтных этой вершине, при этом в каждой из

этих точек значение A принимается k раз. Отсюда следует, что точка z_0 и точки, конгруэнтные ей, образуют множество, состоящее из $\frac{N}{k}$ конгруэнтных друг другу точек.

Так как каждая неподвижная точка конгруэнтна некоторой вершине области R, полученный результат можно формулировать следующим образом.

Каждая неподвижная точка порядка ν принадлежит множеству, состоящему из $\frac{N}{\nu}$ конгруэнтных друг другу неподвижных точек. Порядок неподвижной точки является делителем числа N.

Рассмотрим $f'(z)$. Так как $f(z)$ имеет N полюсов первого порядка, ее производная имеет N полюсов второго порядка. Следовательно, $f'(z)$ имеет $2N$ нулей. Найдем все нули $f'(z)$. В любой конечной точке, не являющейся неподвижной, $f'(z) \neq 0$. Если бы это было не так, $f(z)$ принимала бы свое значение в этой точке дважды, а это противоречило бы тому факту, что функция $f(z)$ принимает только один раз каждое свое значение, как в области R, так и в областях, конгруэнтных R, которые вместе с R покрывают всю плоскость. В бесконечно удаленной точке имеют место следующие разложения:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots, \quad f'(z) = -\frac{c_1}{z^2} + \ldots$$

Здесь $c_1 \neq 0$, так как $f(z)$ принимает в бесконечности значение c_0 только один раз. Следовательно, $f'(z)$ имеет в бесконечности нуль второго порядка. Остальные $2N-2$ нуля $f'(z)$ находятся в неподвижных точках.

Допустим, что множество всех неподвижных точек группы распадается на s множеств, состоящих из конгруэнтных друг другу точек. Пусть порядок точек первого из этих множеств равен ν_1, второго $\nu_2, \ldots$, последнего — ν_s. Тогда первое множество состоит из $\frac{N}{\nu_1}$ точек, второе из $\frac{N}{\nu_2}$, ..., последнее — из $\frac{N}{\nu_s}$ точек. Приравняв сумму всех нулей функции $f'(z)$ $2N-2$, получим:

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{N}{\nu_i}(\nu_i - 1) = 2N - 2$$

или

$$\sum_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) = 2 - \frac{2}{N}. \tag{18}$$

Целые числа N и ν_i должны для любой конечной группы удовлетворять уравнению (18). Здесь $N \geqslant 2$ и $\nu_i \geqslant 2$, при этом $\frac{N}{\nu_i}$ также целое число. s должно быть больше единицы, так как если бы $s = 1$, то левая часть уравнения (18) была бы меньше

единицы, а правая больше или равна единице. С другой стороны, $s<4$; в самом деле, $1-\frac{1}{\nu_i}<\frac{1}{2}$, и поэтому левая часть уравнения (18) больше или равна $\frac{s}{2}$ и была бы больше правой, если бы s было больше четырех. Итак, возможны только два случая: $s=2$ и $s=3$.

Если $s=2$, то уравнение (18) будет иметь вид:

$$1-\frac{1}{\nu_1}+1-\frac{1}{\nu_2}=2-\frac{2}{N},$$

откуда

$$\frac{N}{\nu_1}+\frac{N}{\nu_2}=2.$$

Следовательно, $\frac{N}{\nu_1}=\frac{N}{\nu_2}=1$. Таким образом N может равняться любому целому числу и $\nu_1=\nu_2=N$. Каждое из двух множеств, состоящих из неподвижных точек, конгруэнтных друг другу, содержит по одной точке и каждая неподвижная точка имеет порядок N. Очевидно, что группы, удовлетворяющие этим требованиям, представляют собой циклические группы, состоящие из N преобразований.

Если $s=3$, то из (18) получаем:

$$\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}=1+\frac{2}{N}. \tag{19}$$

Предположим, что знаменатели выбраны так, что $\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\nu_3$. Тогда $\nu_1=2$, так как в противном случае левая часть не превосходила бы единицу. Отсюда

$$\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{N}. \tag{20}$$

ν_2 должно равняться двум или трем, так как иначе левая часть не превосходила бы половины.

Если $\nu_2=2$, то $\nu_3=\frac{N}{2}$. И поэтому уравнение удовлетворится, если N будет какое-нибудь четное число, т. е. $N=2n$.

Из уравнения (20), в случае если $\nu_2=3$, получится:

$$\frac{1}{\nu_3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{N}; \tag{21}$$

следовательно, $\nu_3<6$. Оказывается, что каждое из трех возможных значений $\nu_3=3, 4, 5$ приводит к целому значению N, а именно к $N=12, 24, 60$ соответственно.

Таким образом установлено, что всякой конечной группе, исключая циклическую группу ($s=2$), соответствуют три множества, состоящие из конгруэнтных друг к другу неподвижных точек. Порядки неподвижных точек, число точек в каждом из

множеств и общее число преобразований группы могут быть только такими, как выписанные в табл. 2.

Таблица 2

ν_1	ν_2	ν_3	$\frac{N}{\nu_1}$	$\frac{N}{\nu_2}$	$\frac{N}{\nu_3}$	N
2	2	n	n	n	2	$2n$
2	3	3	6	4	4	12
2	3	4	12	8	6	24
2	3	5	30	20	12	60

То, что в действительности существуют конечные группы, в которых реализуются возможности, перечисленные в табл. 2, непосредственно видно из табл. 1. Каждой из перечисленных в табл. 1 групп соответствуют три множества конгруэнтных друг другу неподвижных точек. В одном из множеств содержится F точек порядка μ, в другом V точек порядка ν и в третьем E точек порядка 2. Первая возможность из перечисленных в табл. 2 реализуется в группе диэдра (в группе четырех преобразований, если $n=2$), вторая — в группе тетраэдра, третья — в группе октаэдра и последняя — в группе икосаэдра.

Теорема 3. *Не существует никаких других конечных групп линейных преобразований кроме эллиптических циклических групп, группы правильных многогранников (включая сюда группу четырех преобразований) и групп, получающихся из этих последних посредством линейных преобразований.*

Ранее было установлено, что случаю $s=2$ соответствуют только циклические группы. Теперь мы покажем, что любая группа, имеющая три множества конгруэнтных неподвижных точек, может быть получена путем линейного преобразования из одной из групп правильных многогранников. Для этого достаточно показать, что если двум группам соответствуют одни и те же значения ν_1, ν_2, ν_3, то одна из этих групп получается из другой посредством линейного преобразования.

Пусть даны две группы, которым соответствуют одни и те же значения ν_1, ν_2, ν_3. Преобразуем, если это окажется необходимым, каждую из данных двух групп так, чтобы ∞ не являлась неподвижной точкой. Если относительно преобразованных групп будет установлено, что одна из них получается из другой путем линейного преобразования, то, очевидно, то же самое справедливо относительно первоначальных групп. Пусть группа S состоит из преобразований $S_1, \ldots, S_N$ и пусть неподвижные точки этих преобразований суть: $a_1, a_2, \ldots, \underset{\nu_1}{a_N}$ порядка ν_1; $b_1, b_2, \ldots, \underset{\nu_2}{b_N}$ порядка ν_2 и $c_1, c_2, \ldots, \underset{\nu_3}{c_N}$ порядка ν_3. Пусть группа S' состоит из преобразований $S_1', \ldots, S_N'$ и пусть соответствующие неподвижные точки суть $a_1', a_2', \ldots, \underset{\nu_1}{a'_N}$ порядка ν_1; $b_1', \ldots, \underset{\nu_2}{b'_N}$ порядка ν_2 и c_1', $\underset{\nu_3}{c'_N}$ порядка ν_3. Построим теперь, воспользовавшись формулой (17), функцию $f(z)$, автоморфную по отношению к группе S, и функцию $f_1(z)$, автоморфную по отношению к группе S', при

этом постоянные a и b, фигурирующие в формуле, выбираются отличными от неподвижных точек. Пусть $f(a_i)=A$, $f(b_i)=B$, $f(c_i)=C$; $f_1(a_i')=A'$, $f_1(b_i')=B'$, $f_1(c_i')=C'$. Обозначим через $t=\frac{at_1+b}{ct_1+d}$ преобразование, переводящее три различных точки $t_1=A'$, B', C' соответственно в три различных точки A, B, C и построим функцию

$$F(z)=\frac{af_1(z)+b}{cf_1(z)+d}.$$

Тогда $F(a_i')=A$, $F(b_i')=B$, $F(c_i')=C$. Функции $F(z)$ и $f(z)$ имеют каждая по N полюсов и, следовательно, принимают каждое значение N раз. Мы будем изображать группу S на плоскости z, а группу S' на другой плоскости z'. Установим соответствие между точками обеих плоскостей при помощи уравнения[1]):

$$F(z')=f(z). \tag{22}$$

Каждому значению z соответствуют N значений z', так как каждое данное значение z определяет одно значение $f(z)$, а это последнее значение принимается функцией $F(z')$ в N точках z'. Аналогично каждому z' соответствует N значений z.

Если $z\neq a_i, b_i, c_i$, то $f(z)$ отлична от A, B, C и соответствующие значения z' изобразятся N различными точками на плоскости z'.

Если $z=a_i$, то $f(z)=A$ и соответствующие значения z' распределяются между $\frac{N}{\nu_1}$ множествами по ν_1 одинаковых значений в каждом; а именно: $z'=a_1', \ldots, a'_{\frac{N}{\nu_1}}$. Рассмотрим расположение ν_1 значений z' в окрестности a_j', когда z находится в окрестности a_i. В точках a_j' и в точках a_i рассматриваемые функции принимают свое значение ν_1 раз; следовательно, в окрестностях этих точек имеют место разложения:

$$f(z)=A+k(z-a_i)^{\nu_1}+\ldots, \qquad k\neq 0,$$
$$F(z')=A+k'(z'-a_j')^{\nu_1}+\ldots, \qquad k'\neq 0.$$

Подставив в уравнение (22), получим:

$$(z'-a_j')^{\nu_1}(k'+\ldots)=(z-a_i)^{\nu_1}(k+\ldots).$$

Извлекая корень ν_1 степени, получим:

$$(z'-a_j')\left(k'^{\frac{1}{\nu_1}}+\ldots\right)=\varepsilon_\varkappa(z-a_i)\left(k^{\frac{1}{\nu_1}}+\ldots\right) \quad (\varkappa=1, 2, \ldots, \nu_1),$$

причем $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\nu_1}$ означают корни ν_1 степени из единицы. Отсюда получаем ν_1 разложений в окрестности a_i:

$$z'=a_j'+\varepsilon_\varkappa\left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{1}{\nu_1}}(z-a_i)+\ldots$$

Следовательно, несмотря на то, что ν_1 значений z' становятся равными между собой в точке a_i, эти значения принадлежат раз-

[1]) Идея этого соответствия была дана П. Кёбе.

личным ветвям. Аналогичные рассуждения применимы к точкам b_i и c_i. Соотношение (22) определяет таким образом в окрестности любой точки плоскости z N различных элементов функции. Эти элементы, сочетаясь, образуют N однозначных функций z. С другой стороны, так как точек ветвления нет, N листов, несущих на себе значения z', не связаны между собой. Рассмотрим одну из этих функций $z' = T(z)$. Каждому значению z посредством этой функциональной зависимости соответствует одно и только одно значение z'. Поменяв местами z и z', можно установить, что каждому z' соответствует одно и только одно z. Следовательно, $z' = T(z)$ линейное преобразование (§ 1, теорема 3, следствие 1).

Преобразование T переводит неподвижные точки группы S в неподвижные точки группы S'; следовательно, когда $z = a_i$, b_i, c_i, $T(z) = a_i$, b_i, c_i. Таким образом группе $U_i = TS_iT^{-1}$ соответствуют те же неподвижные точки тех же порядков, что и группе S'. Тождественна ли группа U группе S'?

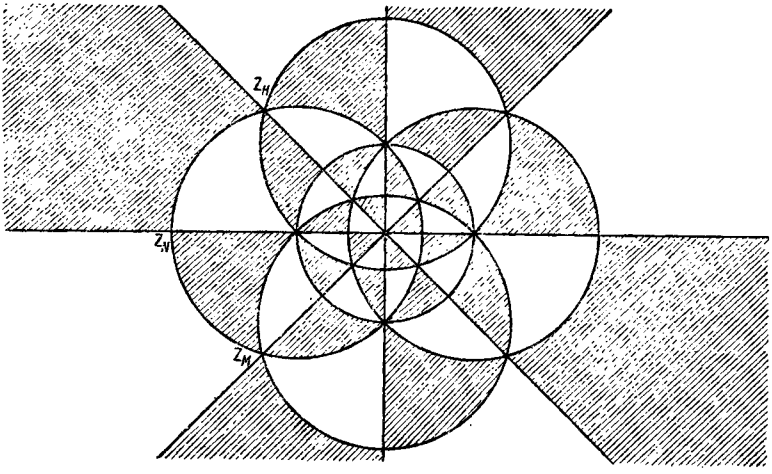
Пусть U_i и S_j' преобразования, имеющие один и тот же множитель и общую неподвижную точку a_i'. Покажем, что и две других их неподвижных точки совпадают. Предположим, что они различны. Образуем группу Γ, комбинируя всеми возможными способами преобразования U_i и S_j'. Любое преобразование, принадлежащее группе Γ, переводит точку a_i' ($\neq a_j'$) в другую из точек a_k'; следовательно, имеется только конечное число различных точек, конгруэнтных точке a_i' посредством преобразований группы Γ. Но Γ содержит параболические преобразования, неподвижные точки которых суть a_j' (теорема 2), и повторяя эти параболические преобразования, мы получили бы бесконечно много различных точек, конгруэнтных a_i'. Это противоречие показывает, что преобразования U_i и S_j' имеют одни и те же неподвижные точки, и следовательно, эти преобразования совпадают. Таким образом доказано, что любое преобразование, принадлежащее группе U, совпадает с некоторым преобразованием, принадлежащим группе S'. Итак, группа S' получается из группы S посредством линейного преобразования, что и требовалось доказать.

Полиэдральные функции. Функции, автоморфные по отношению к конечным группам, вследствие их связи с правильными многогранниками называются полиэдральными функциями. Функция $f(z)$, определенная формулой (17), принимает в фундаментальной области каждое значение только один раз. Следовательно, рациональная функция от функции $f(z)$ является самой общей простой автоморфной функцией по отношению к конечной группе (§ 43, теорема 14).

§ 58. Расширенные группы. В тесной связи с вращениями, переводящими многогранник в самого себя, находятся отражения относительно плоскостей симметрии, которые также переводят многогранник в самого себя.

Куб имеет девять плоскостей симметрии (черт. 36): три плоскости, проходящие через середины четырех граней (координат-

ные плоскости), и шесть плоскостей, содержащих пары противоположных ребер. Все эти плоскости пересекут сферу Σ_0 по девяти большим кругам. На черт. 38 показана стереографическая проекция этих кругов на плоскость z. Действительная и мнимая оси и единичная окружность Q_0 являются проекциями пересечений сферы Σ_0 с первыми тремя из вышеупомянутых плоскостей симметрии. Остальные — две прямые и четыре окружности являются проекциями пересечений сферы Σ_0, с последними шестью плоскостями.



Черт. 38.

Какое преобразование плоскости z соответствует отражению точек сферы Σ_0 относительно диаметральной плоскости? Посредством инверсии, проектирующей стереографически сферу Σ_0 на плоскость z, диаметральная плоскость π, проходящая через окружность большого круга C, переходит в сферу Σ, проходящую через C', стереографическую проекцию C. Следовательно, так как плоскость π ортогональна сфере Σ_0, то сфера Σ ортогональна плоскости z, причем окружность C' является экватором сферы. Две точки сферы Σ_0, симметричные относительно плоскости π, переходят в две точки плоскости z, сопряженные относительно сферы Σ, и следовательно, относительно окружности C'. Таким образом, когда точки сферы Σ_0 преобразуются путем отражения относительно плоскости π, соответствующие точки плоскости z подвергаются инверсии относительно окружности C'. Отражения относительно девяти плоскостей симметрии куба соответствуют таким образом инверсиям относительно девяти окружностей, изображенных на черт. 38.

Плоскости симметрии разбивают поверхность куба на 48 одинаковых треугольников. Один из них есть треугольник GHP, который получается, если разбить треугольник MHG на два треугольника прямой, соединяющей точку G с серединой стороны MH.

Треугольник GHP проектируется в треугольник KNH на сфере, а этот последний проектируется стереографически в заштрихованный треугольник, изображенный в левом верхнем углу на черт. 38. Треугольнику GPM соответствует незаштрихованная область в левом нижнем углу на черт. 38. Оставшимся треугольникам на кубе соответствуют оставшиеся треугольники на черт. 38.

Теперь образуем группу, комбинируя всеми возможными способами отражения относительно плоскостей симметрии. Каждое такое отражение переводит треугольник GHP в один из 48 треугольников на поверхности куба. Далее, посредством подходящим образом выбранных последовательностей таких отражений, поверхность куба может быть покрыта полностью, т. е. GHP можно перевести в любой другой треугольник. Очевидно, что любые две последовательности отражений, которые переводят GHP в один и тот же треугольник, преобразуют все точки одинаково, т. е. эти две последовательности определяют два тождественно равных преобразования. Таким образом группа содержит в точности 48 преобразований.

Соответствующие преобразования плоскости z переводят любой из треугольников, изображенных на черт. 38, в другой такой треугольник.

Эта группа преобразований плоскости z называется „расширенной группой". Ее можно построить, комбинируя всеми возможными способами инверсии относительно девяти окружностей, изображенных на черт. 38. Каждый треугольник является фундаментальной областью группы. В группе имеются преобразования двух категорий: преобразования, получающиеся в результате последовательного выполнения четного числа инверсий, т. е. линейные преобразования, и преобразования, получающиеся в результате нечетного числа инверсий, т. е. конформные преобразования второго рода, имеющие вид:

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{\bar{z} + d}$$

[§ 5, уравнение (23)]. К каждой из этих двух категорий относится 24 преобразования. Преобразования первой категории соответствуют вращениям сферы, переводящим куб в самого себя, так как четное число отражений относительно диаметральных плоскостей эквивалентно жесткому движению. В числе комформных преобразований второго рода находятся девять инверсий, из которых была построена группа. Если заштриховать треугольники, как показано на черт. 38, то можно сказать, что преобразование, переводящее заштрихованный треугольник в заштрихованный, а незаштрихованный в незаштрихованный, есть линейное преобразование; преобразование, которое переводит заштрихованный треугольник в незаштрихованный или обратно, есть преобразование, меняющее направление углов. Первые 24 преобразования образуют группу октаэдра. Область, составленная из одного заштри-

хованного и одного незаштрихованного треугольников, является фундаментальной областью этой группы.

Легко видеть, что расширенная группа может быть порождена тремя инверсиями, а именно инверсиями относительно каждой из трех сторон какого-нибудь из треугольников, изображенных на черт. 38. Повторным применением этих трех инверсий можно каждый из треугольников, показанных на черт. 38, перевести в любой другой такой треугольник.

Точно таким же способом могут быть расширены остальные группы правильных многогранников, но мы не будем рассматривать все случаи подробно. Производя отражения относительно плоскостей симметрии, можно перевести данное ребро a_0b_0 в ребро a_ib_i четырьмя способами: так, чтобы a_0b_0 совпало с a_ib_i или с b_ia_i и чтобы при этом углы сохранялись или меняли свой знак на обратный. Расширенная группа, соответствующая совокупности отражений, состоит таким образом из $4E$ преобразований, где E число ребер многогранника.

Плоскости симметрии разбивают поверхность правильного многогранника на $4E$ треугольников; каждый из них получается в результате соединения середины грани с серединой и концом прилегающего ребра. Проектируя эти треугольники на сферу и затем на плоскость z, мы получим систему треугольников, обладающих свойствами, аналогичными свойствам треугольников, изображенных на черт. 38. В случае тетраэдра получаются 24 треугольника, в случае икосаэдра — 120, в случае диэдра — $4n$. Всякий раз половина получающихся преобразований — линейные преобразования, а остальные преобразования меняют направление углов. Линейные преобразования образуют подгруппу, совпадающую с группой правильного многогранника.

С расширенными группами мы встретимся вновь в последней главе при изучении функции Римана-Шварца.

II. ГРУППЫ С ЕДИНСТВЕННОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКОЙ

§ 59. Одно- и двоякопериодические группы. Группы с единственной предельной точкой представляют особый интерес. К их числу принадлежат группы, автоморфные функции которых — однопериодические и двоякопериодические функции — изучены более подробно, чем какие-либо другие автоморфные функции. С другой стороны, как мы увидим в дальнейшем, эти группы образуют один из трех классов групп, автоморфные функции которых применяются в теории униформизации.

Группа, обладающая единственной предельной точкой, не может содержать ни гиперболических, ни локсодромических преобразований, так как каждая из двух неподвижных точек таких преобразований является предельной точкой. Итак, каждое преобразование, принадлежащее группе, является или параболическим или эллиптическим преобразованием. Единственная предельная точка группы является неподвижной точкой каждого из преобра-

зований группы; в противном случае имелась бы точка, конгруэнтная предельной точке, которая была бы второй предельной точкой группы. Группа не может состоять из одних только эллиптических преобразований. В самом деле, вторые неподвижные точки не могут все совпадать, так как в этом случае группа была бы конечной циклической группой. Следовательно, на основании теоремы 2 группа содержит параболические преобразования. Таким образом группа состоит или из одних параболических преобразований, или из параболических и эллиптических преобразований.

Пусть группа преобразована так, чтобы предельная точка являлась бесконечно удаленной точкой. Тогда все преобразования группы имеют вид:

$$z' = Kz + b,$$

где K множитель преобразования. Параболические преобразования группы ($K = 1$) представляют собой переносы, эллиптические — вращения.

Если группа содержит только переносы, она является или однопериодической группой с полосой периодов в качестве фундаментальной области (черт. 12) или двоякопериодической группой с параллелограмом периодов в качестве фундаментальной области (черт. 13).

Дадим краткое доказательство этих утверждений. Переносы имеют вид $S_i = z + \Omega_i$, причем Ω_i называется „периодом". Имеем:

$$S_1^{m_1} S_2^{m_2} \ldots S_n^{m_n} = z + m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + \ldots + m_n\Omega_n,$$

т. е. линейное относительно периодов выражение с целыми коэфициентами также представляет собой период. Теперь изобразим все периоды точками на плоскости комплексного переменного. Эти точки не имеют точки сгущения. В самом деле, если бы точка сгущения существовала, преобразование $S_i S_j^{-1} = z + \Omega_i - \Omega_j$, где Ω_i и Ω_j взяты достаточно близко от точки сгущения, имело бы произвольно малый период и группа была бы непрерывной. Обозначим через ω наиболее близкий к началу координаты период, т. е. одну из конечного числа точек, отстоящих от начала на минимальном расстоянии. Пусть L прямая, соединяющая начало координат с точкой ω, и пусть Ω какой-нибудь период, лежащий на L. Можно написать $\Omega = M\omega$, причем M действительное число. Покажем, что M целое число. Предположим, что это не так, и пусть m целое число, ближайшее к M. Тогда $|M - m| \leqslant \frac{1}{2}$ и период $\Omega' = \Omega - m\omega$ таков, что $|\Omega'| = |(M - m)\omega| \leqslant \frac{1}{2}|\omega|$. Это противоречит предположению, что ω период, ближайший к началу координат. Таким образом преобразование $S = z + \Omega$ представляет собой целую степень преобразования $T = z + \omega$, т. е. $S = T^M$. Если все периоды лежат на прямой L, группа предста-

вляет собой однопериодическую группу, порожденную преобразованием T.

Предположим теперь, что существуют периоды, не лежащие на прямой L; из периодов, не лежащих на L, выберем период ω', находящийся на минимальном расстоянии от начала координат. Тогда для любого периода можно написать: $\Omega = M\omega + M'\omega'$, причем M и M' оба действительны. Докажем, что M и M' оба целые.

Предположим противное, и пусть m и m' целые числа, ближайшие к M и M'. Тогда $|M - m| \leqslant \frac{1}{2}$, $|M' - m'| \leqslant \frac{1}{2}$. Рассмотрим период

$$\Omega' = \Omega - (m\omega + m'\omega') = (M - m)\omega + (M' - m')\omega' \neq 0.$$

Здесь мы имеем

$$\Omega'| < \frac{1}{2}|\omega| + \frac{1}{2}|\omega'| \leqslant |\omega'|.$$

Это неравенство возможно, только, если Ω лежит на прямой L. Но тогда $M' - m' = 0$ и $\Omega' \leqslant \frac{1}{2}|\omega|$, что невозможно. Следовательно, M и M' целые числа.

Любое преобразование группы $S = z + \Omega$ может быть написано в виде $S = T^M \cdot T_1^{M'}$, причем $T = z + \omega$, $T_1 = z + \omega'$. Таким образом наша группа есть двоякопериодическая группа, порожденная преобразованиями T и T_1.

Без ущерба для общности можно предположить, что период, имеющий наименьшую абсолютную величину, равен единице. В самом деле, если это не так, преобразуем группу посредством преобразования $G = \frac{z}{\omega}$, где ω период, имеющий наименьшую абсолютную величину.

$$S = z + \Omega, \quad GSG^{-1} = G(\omega z + \Omega) = z + \frac{\Omega}{\omega}.$$

Когда $\Omega = \omega$, то период равен единице, если же $\Omega \neq \omega$, $\left|\frac{\Omega}{\omega}\right| \geqslant 1$, так как $|\Omega| \geqslant |\omega|$.

Самая общая группа с единственной предельной точкой, состоящая только из параболических преобразований, получается посредством линейного преобразования из одно- или двоякопериодической группы.

§ 60. Группы, связанные с периодическими группами[1]). Рассмотрим теперь группы, содержащие параболические и эллиптические преобразования. Покажем сначала, что число значений, которые может принимать множитель эллиптического преобразования, весьма ограниченно. Пусть $S = z + \Omega$ и $S_1 = Kz + b$

[1] По поводу материала, изложенного в этом и следующем параграфах, смотрите Koebe, «Math. Ann.», т. 67, стр. 164—163, 1909.

параболическое и эллиптическое преобразования, принадлежащие группе. Тогда преобразование переноса

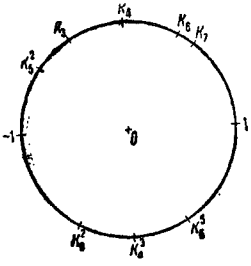
$$S_1 S S_1^{-1} = S_1\left(\frac{z-b}{K} + \Omega\right) = z + K\Omega$$

имеет период $K\Omega$. Предположим, что наименьший период равен единице; в этом случае, положив $\Omega = 1$, заключаем, что K есть период. Далее, множителями преобразований, имеющих общую неподвижную точку порядка ν, являются числа:

$$K_\nu\left(= e^{\frac{2\pi i}{\nu}}\right), \quad K_\nu^2, \ldots, K_\nu^{\nu-1}.$$

Эти множители — корни ν степени из единицы и, следовательно, все лежат на единичной окружности.

Возможные значения K и периоды ± 1 должны быть так расположены на окружности Q_0, чтобы расстояние между любыми двумя периодами было не меньше единицы, так как в противном случае существовал бы период, по абсолютной величине меньший единицы, что противоречит предположению.



Черт. 39.

Если $\nu \geqslant 7$ (черт. 39), получится, что $|K_\nu - 1| < 1$, что невозможно. Если $\nu = 5$, получим $|K_\nu^2 + 1| < 1$, что также невозможно. Следовательно, запас возможных значений ν состоит из чисел 2, 3, 4, 6. При этом $\nu = 4$ и $\nu = 3$ или $\nu = 4$ и $\nu = 6$ не могут появляться одновременно, так как $|K_4 - K_3| < 1$ и $|K_4 - K_6| < 1$.

Постоянные b и b' двух эллиптических преобразований с одним и тем же множителем; $S_1 = Kz + b$, $S_2 = Kz + b'$ отличаются между собой на период. В самом деле, преобразование

$$S_2 S_1^{-1} = K\left(\frac{z-b}{K}\right) + b' = z + b' - b$$

имеет период $b' - b$. Обратно, если Ω какой-нибудь период, то в группе имеется преобразование с множителем K и постоянной $b + \Omega$; а именно, если $S = z + \Omega$, то

$$SS_1 = Kz + b + \Omega.$$

Таким образом все преобразования с одним и тем же множителем K, принадлежащие группе, и только они одни содержатся в формуле:

$$S_i = Kz + b + \Omega_i, \tag{23}$$

причем b постоянная одного из этих преобразований и Ω какой-нибудь период или нуль. Неподвижная точка преобразования (23), лежащая на конечном расстоянии, получается по формуле:

$$\xi_i = \frac{b + \Omega_i}{1 - K}, \tag{24}$$

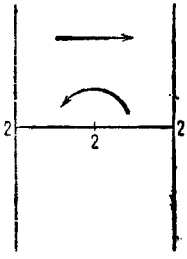
Для отыскания неподвижных точек по формуле (24) достаточно найти те из них, которые лежат в полосе периодов или в параллелограме периодов подгруппы переносов. Остальные неподвижные точки будут отличаться от найденных только на периоды. В самом деле, если U какое-нибудь преобразование группы, то преобразование US_iU^{-1} имеет неподвижную точку $U(\xi_i)$ и тот же множитель, что и преобразование S_i. В частности, любой неподвижной точке соответствует конгруэнтная ей неподвижная точка, лежащая в полосе периодов или в параллелограме периодов.

Рассмотрим сначала случай, когда $\nu = 2$ для всех неподвижных точек, так что $K = -1$. Можно предположить, что $b = 0$, так как если бы это было не так, мы могли бы преобразовать группу посредством переноса, переводящего b в начало координат. Итак, пусть $b = 0$.

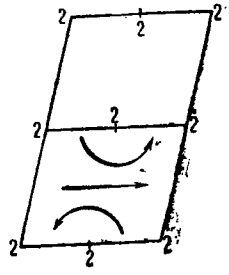
Легко показать, что преобразования

$$S_i = -z + \Omega_i \quad \text{и} \quad T_i = z + \Omega_i$$

образуют группу. При этом преобразования T_i составляют одно- или двоякопериодическую группу. Из уравнения (24) получаем, что неподвижными точками служат $\xi_i = \frac{\Omega_i}{2}$. Расположение неподвижных точек (они обозначены цифрой 2) в полосе или параллелограме периодов показано на черт. 40 и 41. Половина полосы или параллелограма периодов является фундаментальной областью группы. Конгруэнтные стороны фундаментальной области на чертежах соединены стрелками.



Черт. 40.



Черт. 41.

Легко показать, что некоторые из преобразований группы переводят фундаментальную область в области, примыкающие к ней вдоль каждой из ее сторон, и что все преобразования за исключением тождественного переводят точки, лежащие внутри области, в точки, лежащие вне ее.

Если $\nu > 2$, то период K_ν не является кратным единицы, и поэтому подгруппа переносов не может быть однопериодической. Так как K_ν находится на расстоянии единицы от начала координат и так как расстояние между любым другим периодом и началом координат не может быть меньше единицы, то можно в согласии с § 59 выбрать K_ν периодом второго порождающего преобразования. Двоякопериодическая подгруппа порождена здесь преобразованиями $T = z + 1$ и $T_1 = z + K_\nu$.

Рассмотрим случай, когда $\nu = 4$. Тогда $K_4 = i$, $K_4^2 = -1 = K_2$, $K_4^3 = -i$. Так как $K_4^4 = 1$, то все преобразования группы — как эллиптические, так и параболические — можно написать в виде:

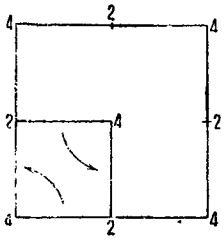
$$S_i = K_4^n z + \Omega_i = K_4^n z + m + m'i.$$

Легко доказать, что для этих преобразований выполняются свойства группы.

При $K = i$ и $K = -1$ из (24) получаем:

$$\xi_i = \frac{m + m'i}{1 - i} = \frac{(1 + i)(m + m'i)}{2}, \quad \xi_i = \frac{m + m'i}{2}.$$

Из первой формулы получаются точки, обозначенные цифрой 4 в параллелограме периодов на черт. 42. Из второй получаются точки, обозначенные цифрой 4, а также и точки, обозначенные цифрой 2. Эти последние имеют порядок 2. В случае, когда $K = -i$, неподвижные точки конечно те же самые, что и в случае, когда $K = i$. Легко показать, что квадрат на черт. 42, конгруэнтные стороны которого соединены стрелками, представляет собой фундаментальную область группы.

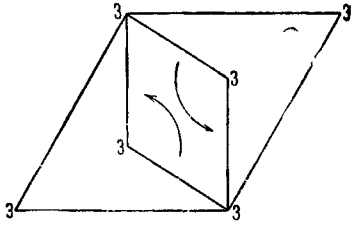


Черт. 42.

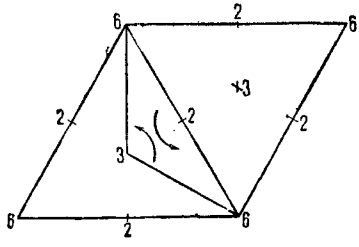
Случаи, когда $\nu = 3$ и $\nu = 6$, интерпретированы на черт. 43 и 44. В обоих случаях преобразования группы имеют вид:

$$S_i = K_\nu^n z + m + m'K_\nu, \qquad n = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Неподвижные точки расположены, как на черт. 42. В случае, когда $\nu = 6$, имеются неподвижные точки трех порядков 2, 3 и 6. На черт. 43 для построения параллелограма использованы периоды 1 и $K_3 + 1 (= K_6)$; период $K_3 + 1$ находится на расстоянии



Черт. 43.



Черт. 44.

единицы от начала координат и может быть так же хорошо, как и K_3, использован как период второго порождающего преобразования.

Заметим, что конгруэнтные стороны фундаментальных областей, изображенных на черт. 42, 43 и 44, переходят друг в друга посредством эллиптических преобразований. Следовательно, каждая из соответствующих групп порождается вращениями. Все группы с единственной предельной точкой, содержащие эллиптические преобразования, находятся среди групп, рассмотренных в настоящем параграфе, или могут быть получены из рассмотренных групп посредством линейных преобразований.

§ 61. Автоморфные функции. Мы построим теперь все простые автоморфные функции групп с единственной предельной точкой. В дальнейшем мы будем предполагать, что группа преобразована таким образом, что предельная точка есть бесконечно удаленная точка, наименьший период равен единице и эллиптическая точка наивысшего порядка (если эллиптические точки существуют) находится в начале координат.

Функция $e^{2\pi iz}$ является функцией, автоморфной по отношению в однопериодической группе. Эта функция принимает в полосе периодов каждое значение (за исключением нуля) и притом только один раз. Следовательно (§ 43, теорема 14), самая общая простая автоморфная функция, связанная с этой группой, представляет собой рациональную функцию от $e^{2\pi iz}$.

Функция $\cos 2\pi z$ является однопериодической функцией, которая принимает дважды каждое свое значение в полосе периодов, изображенной на черт. 40 (так как эта функция имеет два нуля, $z = \pm\frac{1}{4}$ в полосе периодов). Далее, $\cos 2\pi(-z) = \cos 2\pi z$. Функция таким образом не меняет значения при эллиптическом порождающем преобразовании, так что она автоморфна по отношению к группе, полоса периодов которой изображена на черт. 40. Функция принимает каждое значение один раз в верхней половине полосы периодов и другой раз в нижней половине той же полосы. Согласно теореме 14 самой общей простой автоморфной функцией, связанной с этой группой, является рациональная функция от $\cos 2\pi z$.

Аналогичные рассуждения прилагаются к группе, параллелограм периодов которой изображен на черт. 41.

Функция Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_i{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega_i)^2} - \frac{1}{\Omega_i^2}\right], \tag{25}$$

где суммирование распространяется на все неравные нулю периоды Ω_i, является двоякопериодической функцией, имеющей полюс второго порядка в параллелограме периодов. Следовательно, $\wp(z)$ принимает каждое значение дважды в параллелограме периодов. Но $\wp(z)$ четная функция $\wp(-z) = \wp(z)$, что видно из формулы (25), если в ней заменить z на $-z$ и Ω_i на $-\Omega_i$ (множество периодов при этом конечно остается тем же самым). Следовательно, в фундаментальной области, показанной на черт. 41, $\wp(z)$ принимает каждое значение только один раз. Итак, самая общая простая автоморфная функция, связанная с группой, есть рациональная функция от $\wp(z)$.

Не существует функции, автоморфной по отношению к двоякопериодической группе, с простым полюсом в фундаментальной области, через посредство которой рационально выражается любая принадлежащая группе простая автоморфная функция. Пусть

$f(z)$ простая автоморфная функция, принадлежащая группе, т. е. эллиптическая функция. $f(z)$ может быть написана в виде:

$$f(z)=\frac{1}{2}[f(z)+f(-z)]+\frac{1}{2}[f(z)-f(-z)].$$

При этом $f(-z)$ также эллиптическая функция. Первое слагаемое в правой части представляет собой четную функцию z и является функцией, автоморфной относительно группы, параллелограм периодов которой изображен на черт. 41. Значит, эта функция выражается рационально через $\wp(z)$. Второй член представляет собой нечетную функцию. Но $\wp'(z)$ также нечетная функция z; следовательно, $\frac{f(z)-f(-z)}{\wp'(z)}$ является четной функцией z и выражается рационально через $\wp(z)$. Таким образом самая общая простая автоморфная функция может быть написана в виде:

$$f(z)=R_1[\wp(z)]+\wp'(z)R_2[\wp(z)],$$

где R_1 и R_2 означают рациональные функции.

Обратимся теперь к черт. 42, 43 и 44.

Преобразования, принадлежащие соответствующим группам, имеют вид:

$$z_j=K_\nu^n z+\Omega_j, \qquad n=1,2,\ldots,\nu, \tag{26}$$

причем $\nu=4$, 3 или 6. Функция $\wp(z)$ не является автоморфной по отношению к этим группам. Из (25) следует, что

$$\wp(z_j)=\frac{1}{(K_\nu^n z+\Omega_j)^2}+\sum_i{}'\left[\frac{1}{(K_\nu^n z+\Omega_j-\Omega_i)^2}-\frac{1}{\Omega_i^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{K_\nu^{2n}}\left\{\frac{1}{\left(z+\frac{\Omega_i}{K_\nu^n}\right)^2}+\sum_i{}'\left[\frac{1}{\left(z+\frac{\Omega_j-\Omega_i}{K_\nu^n}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{\Omega_i}{K_\nu^n}\right)^2}\right]\right\}.$$

Но деление периода Ω_i на K_ν^n сводится к вращению этого периода на угол $-\frac{2\pi n}{\nu}$ около начала координат и, следовательно, во всех трех случаях переводит период Ω_i в другой период Ω_i'. Такое вращение переводит множество периодов само в себя. Итак, можно написать:

$$\wp(z_j)=\frac{1}{2n}\left\{\frac{1}{(z+\Omega_j')^2}+\sum_i{}'\left[\frac{1}{(z+\Omega_j'-\Omega_i')^2}-\frac{1}{\Omega_i'^2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{K_\nu^{2n}}\wp(z+\Omega_i')=\frac{1}{K_\nu^{2n}}\wp(z). \tag{27}$$

В случае $\nu = 4$ (черт. 42) $K = \pm i, \pm 1$ и $K_\nu^{2n} = \pm 1$. Следовательно $[\wp(z)]^2$ автоморфна по отношению к этой группе. $[\wp(z)]^2$ имеет полюс четвертого порядка в параллелограме периодов и принимает там каждое значение четыре раза. Параллелограм периодов в данном случае состоит из четырех конгруэнтных друг другу областей, из которых одна изображена в качестве фундаментальной области на черт. 42.

Следовательно, в фундаментальной области функция принимает каждое значение только один раз. Отсюда следует (§ 43, теорема 14), что рациональная функция от $\wp(z)^2$ представляет собой самую общую простую автоморфную функцию относительно рассматриваемой группы.

Диференцируя (27) и (26), получим:

$$\frac{dz_j}{dz} = \frac{1}{K_\nu^{2n}} \wp'(z),$$

$$\frac{dz_j}{dz} = K_\nu^n,$$

откуда

$$\wp'(z_j) = \frac{1}{K_\nu^{3n}} \wp'(z). \qquad 28)$$

В случае, когда $\nu = 3$ (черт. 43), K_ν равняется корню кубичному из единицы и $K_\nu^{3n} = 1$. В таком случае $\wp'(z)$ автоморфна относительно рассматриваемой группы. $\wp'(z)$ имеет в параллелограме периодов полюс третьего порядка и принимает там каждое значение три раза. Параллелограм периодов распадается на три конгруэнтные друг другу области, из которых одна изображена на черт. 43 в качестве фундаментальной области. Следовательно, в фундаментальной области функция принимает каждое значение только один раз. Рациональная функция от $\wp'(z)$ представляет собой самую общую простую автоморфную функцию относительно данной группы.

Если $\nu = 6$ (черт. 44), то K_ν представляет собой корень шестой степени из единицы и $K_\nu^{3n} = \pm 1$. Следовательно, функция $[\wp'(z)]^2$ автоморфна. Эта функция имеет в параллелограме периодов полюс шестого порядка и принимает там каждое значение шесть раз.

Параллелограм периодов распадается на шесть конгруэнтных друг другу областей, из которых одна представляет собой фундаментальную область группы, изображенную на черт. 44; следовательно, в фундаментальной области эта функция принимает каждое значение только один раз. Рациональная функция от $\wp'(z)^2$ является самой общей простой автоморфной функцией относительно данной группы.

III. ГРУППЫ С ДВУМЯ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ

§ 62. **Определение группы.** Оставшиеся элементарные группы, а именно группы с двумя предельными точками, менее интересны. Рассмотрим их вкратце. Пусть дана группа с двумя предельными точками, преобразованная так, чтобы ее предельные точки были одна нуль, другая бесконечно удаленная точка. Каждое преобразование, принадлежащее этой группе, переводит предельную точку в самое себя или во вторую предельную точку; следовательно, группа может состоять только из преобразований типа a), имеющих две неподвижные точки 0 и ∞, и преобразований типа b), переводящих точку 0 в ∞, и ∞ в 0. Легко установить, что преобразования типа a) и b) имеют соответственно вид:

$$\text{a) } z' = K_j z, \qquad \text{b) } z' = \frac{c_j}{z}. \tag{29}$$

Преобразование a) может быть гиперболическим, эллиптическим или локсодромическим преобразованием в зависимости от значения K_j, преобразование b) представляет собой эллиптическое преобразование с неподвижными точками $\pm\sqrt{c_j}$. Прологарифмировав формулы (29) и положив $\ln z = w$, $\ln z' = w'$, $\ln K_j = \Omega_j$, $\ln c_j = \Omega_j'$, получим:

$$\text{a) } w' = w + \Omega_j + 2m\pi i, \qquad \text{b) } w' = -w + \Omega_j' + 2\pi n i; \tag{30}$$

в этой формуле целые числа m и n зависят от того, какая ветвь логарифма была взята.

Если преобразования, заданные формулами (29), образуют группу, то то же самое справедливо относительно преобразований, заданных формулами (30), и обратно. Группа, состоящая из преобразований (29), будет непрерывной или разрывной в зависимости от того, будет ли группа преобразований (30) непрерывной или разрывной. Если последняя группа непрерывна, то существуют произвольно малые периоды $\Omega_j + 2\pi m i = \varepsilon$. Тогда $\ln z' = \ln z + \varepsilon$ и $z' = e^{\varepsilon} z$, что произвольно мало отличается от тождества.

Группы преобразований (30) принадлежат к типу, изученному в § 59 и 60, причем $\nu = 2$. Предположим сначала, что в группу не входят преобразования b). В формуле, определяющей преобразование типа a), можно положить один из примитивных периодов, равным чисто мнимому числу. Так как $2\pi i$ также период, то этот примитивный период $\omega = \frac{2\pi i}{k}$, где k целое число. Если не существует других периодов, кроме кратных ω, группа преобразований (30), a) является однопериодической и порождается преобразованием $w' = w + \omega$. В таком случае группа (29), a) порождается преобразованием $z' = e^{\omega} z = e^{\frac{2\pi i}{k}} z$. Она представляет собой конечную циклическую группу и должна быть отброшена, так как не имеет предельных точек.

Допустим, что группа преобразований (30), а) двоякопериодическая и пусть ω, ω' пара примитивных периодов, причем ω период, который был найден раньше. В таком случае ω' не может быть чисто мнимым числом. Общее преобразование группы имеет вид: $w' = w + m\omega + n\omega'$; следовательно, общее преобразование исходной группы будет $z' = e^{m\omega + n\omega'} z$. Если $k = 1$, так что $\omega = 2\pi i$, то $e^{m\omega} = 1$ и преобразования группы имеют вид $z' = e^{n\omega'} z$. Полагая $K = e^{\omega'}$, $K_1 = e^{\omega}$, получим следующие типы групп:

$$\text{A)}\ z' = K^n z, \qquad \text{B)}\ z' = K^n K_1^{\,m} z, \qquad |K| \neq 1, \quad K_1 = e^{\frac{2\pi i}{k}}.$$

Группа A) представляет собой гиперболическую или локсодромическую циклическую группу; B) содержит эллиптические и локсодромические преобразования, может содержать также и гиперболические преобразования.

Предположим, что преобразования b) из формулы (30) не исключаются, в таком случае преобразование b) можно написать в виде [уравнение (23) при $K = -1$]:

$$w' = -w + b + m\omega + n\omega'.$$

Эту группу можно преобразовать посредством переноса, переводящего b в начало координат [для преобразований (29), b); это означает преобразование, переводящее $\sqrt{c}$ в 1]. Итак, положим $b = 0$. Из уравнения $\ln z' = -\ln z + m\omega + n\omega'$ получается, что $z' = \dfrac{e^{m\omega + n\omega'}}{z}$. Отсюда заключаем, что имеются еще следующие группы:

$$\text{C)}\ z' = K^n z, \qquad z' = \frac{K^n}{z} \qquad \text{D)}\ z' = K^n K_1^{\,m} z, \qquad z' = \frac{K^n K_1^{\,m}}{z}.$$

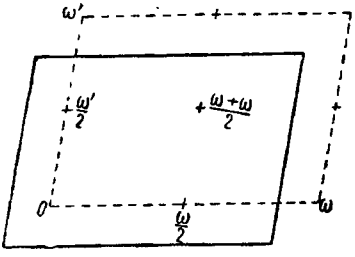
Для любых значений K, K_1, но таких, что $|K| \neq 1$ и $K_1 = e^{\frac{2\pi i}{k}}$, множества преобразований A)—D) образуют искомые группы.

Самый общий вид групп с двумя предельными точками представляют собой группы A)—D) *и группы, получающиеся из них посредством линейных преобразований.*

Глава VII

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ МОДУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 63. Некоторые результаты из теории эллиптических функций. Раньше других автоморфных функций были изучены наиболее элементарные из них, а именно: однопериодические и эллиптические функции, а также рациональные или полиэдральные автоморфные функции. Из неэлементарных функций еще до возникновения общей теории фуксовых функций были подвергнуты многочисленным исследованиям так называемые эллиптические модулярные функции. Эллиптической модулярной функцией или, короче, модулярной функцией называется простая автоморфная функция, принадлежащая модулярной группе или одной из ее подгрупп [1]).



Черт. 45.

В § 37 была построена фундаментальная область модулярной группы. Преобразуя эту группу так, чтобы бесконечно удаленная точка перешла в обыкновенную точку, можно было бы построить автоморфные функции, пользуясь тэта-рядами Пуанкаре (глава V). Вместо того, чтобы поступить таким образом, предпочтительно пойти по тому пути, по которому происходило историческое развитие, и построить теорию модулярных функций так, чтобы воспользоваться их связью с эллиптическими функциями. Для этой цели необходимо вспомнить некоторые свойства вейерштрассовой функции $\wp(z)$. Обозначим через ω и ω' пару примитивных периодов и пусть при этом в выражении

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} = x + iy, \tag{1}$$

y положительное число, т. е. угол $\omega O \omega'$ положителен и меньше π (черт. 45).

---

[1]) Самым полным исследованием, посвященным этим функциям, является: Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, два тома, 1450 страниц. Смотрите также Vivanti, Fonctions polièdriques et modulaires. Краткие сведения можно найти у Гурвица, Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, стр. 288—301, 1933 и у Bieberbach, Lehrbuch der Functionentheorie, т. II, 1933, стр. 95—114.

Для общего выражения периода воспользуемся символом $\Omega = m\omega + n\omega'$. Эллиптические функции:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right], \tag{2}$$

где сумма распространена на все периоды, не равные нулю, и ее производная

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2\sum{}' \frac{1}{(z-\Omega)^3} \tag{3}$$

связаны алгебраическим соотношением (теорема 12 § 43):

$$\wp'(z)^2 = 4\cdot\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3, \tag{4}$$

причем

$$g_2 = 60\sum{}' \frac{1}{\Omega^4}, \qquad g_3 = 140\sum{}' \frac{1}{\Omega^6}. \tag{5}$$

Соотношение (4) легче всего получается следующим образом строится полином от $\wp(z)$ и $\wp'(z)$, не имеющий полюса в начале координат. На основании теоремы 10 § 42 полином этот тождественно равен постоянному. В окрестности начала координат имеем:

$$\frac{1}{(z-\Omega)^2} = \frac{1}{\Omega^2} + \frac{2z}{\Omega^3} + \frac{3z^2}{\Omega^4} + \frac{4z^3}{\Omega^5} + \frac{5z^4}{\Omega^6} + \ldots$$

Подставим это под знак суммы в формуле (2). Заметив, что

$$\sum{}' \frac{1}{\Omega^3} = \sum{}' \frac{1}{\Omega^5} = \ldots = 0,$$

благодаря тому, что члены, происходящие от $\Omega = m\omega + m'\omega'$, сокращаются с членами, происходящими от $\Omega = -m\omega - m'\omega'$, получим:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3z^2\sum{}' \frac{1}{\Omega^4} + 5z^4\sum{}' \frac{1}{\Omega^6} + \ldots$$

или

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \ldots$$

Отсюда получается сразу, что

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10}z + \frac{g_3}{7}z^3 + \ldots,$$

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3g_2}{20z^2} + \frac{3g_3}{28} + \ldots,$$

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{2g_2}{5z^2} - \frac{4g_3}{7} + \ldots$$

Пользуясь этими уравнениями, найдем:

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) = -g_3 + cz^2 + \ldots$$

Левая часть написанного уравнения представляет собой эллиптическую функцию, не имеющую особенности в фундаментальной области; следовательно, она равна постоянному. Полагая $z = 0$, получим, что эта функция равна $-g_3$ и формула (4) доказана.

Для функции $\wp'(z)$ удовлетворяются следующие соотношения:

$$\wp'\left(-\frac{\Omega}{2}\right)=\wp'\left(\frac{\Omega}{2}\right),$$

$$\wp'\left(-\frac{\Omega}{2}\right)=-\wp'\left(\frac{\Omega}{2}\right),$$

причем первое справедливо потому, что числа $-\frac{\Omega}{2}$ и $\frac{\Omega}{2}$ отличаются на период, а второе потому, что $\wp'(z)$ нечетная функция z. Отсюда следует, что если $\wp'(z)$ аналитична в точке $\frac{\Omega}{2}$, т. е. если $\frac{\Omega}{2}$ есть полупериод $\neq 0$, то $\wp'\left(\frac{\Omega}{2}\right)=0$. Три таких полупериода лежат в параллелограме периодов. Таким образом три величины

$$e_1=\wp\left(\frac{\omega}{2}\right),\quad e_2=\wp\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right),\quad e_3=\wp\left(\frac{\omega'}{2}\right) \tag{6}$$

являются корнями уравнения

$$4t^3-g_2t-g_3=0. \tag{7}$$

Три величины e_1, e_2, e_3 не равны между собой. Действительно, $\wp(z)$ принимает каждое значение дважды в параллелограме периодов. И так как $\wp'(z)$ равна нулю в точке $\frac{\omega}{2}$, то $\wp(z)$ принимает в этой точке значение e_1 дважды и не может поэтому принимать то же значение еще где-нибудь в параллелограме периодов. Аналогичным рассуждением легко показать, что e_2 и e_3 также не равны между собой. Условием того, чтобы уравнение (7) имело равные корни, служит равенство нулю выражения

$$\Delta=g_2^3-27g_3^2; \tag{8}$$

следовательно, $\Delta\neq 0$.

§ 64. Замена примитивных периодов. Рассмотрим вопрос об отыскании пар примитивных периодов, т. е. таких периодов, чтобы любой период мог быть представлен как сумма произведений этих периодов на целые числа.

Периоды

$$\omega_1'=a\omega'+b\omega,\qquad \omega_1=c\omega'+d\omega, \tag{9}$$

где a, b, c, d целые числа, составляют пару примитивных периодов тогда и только тогда, если ω' и ω могут быть выражены как сумма произведений ω_1 и ω_1' на целые числа. Это условие необходимо по определению. Но оно также достаточно. В самом деле, любой период Ω выражается как сумма произведений ω' и ω на целые числа; следовательно, выражается как сумма произве-

дений ω'' и ω_1 на целые числа. Разрешая уравнения (9) относительно ω', и ω получим:

$$\omega' = \alpha\omega_1' + \beta\omega_1, \qquad \omega = \gamma\omega_1' + \delta\omega_1,$$

откуда

$$\alpha = \frac{d}{D}, \quad \beta = -\frac{b}{D}, \quad \gamma = -\frac{c}{D}, \quad \delta = \frac{a}{D},$$

причем

$$D = ad - bc.$$

Тогда

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \frac{ad - bc}{D^2} = \frac{1}{D}.$$

Если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ целые числа, то $\frac{1}{D}$ целое число и $D = \pm 1$. С другой стороны, если $D = \pm 1$, то из вышенаписанных четырех равенств следует, что числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ целые. Итак, необходимое и достаточное условие того, чтобы периоды ω_1' и ω_1, определенные формулой (9), представляли собой пару примитивных периодов, заключается в том, чтобы

$$ad - bc = \pm 1.$$

Обозначим через τ_1 дробь $\frac{\omega_1'}{\omega_1}$, тогда τ_1 удовлетворяет уравнению:

$$\tau_1 = \frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \tag{10}$$

Допустим, что периоды обозначены так, что в выражении $\tau_1 = x_1 + iy_1$ y_1 положительно. Тогда τ_1, так же как τ, лежит в верхней полуплоскости. Преобразование (10) не локсодромическое, если $D > 0$, и локсодромическое, если $D < 0$. В первом случае посредством преобразования (10) верхняя полуплоскость переходит в самое себя, во втором случае — в нижнюю полуплоскость. Таким образом в нашем случае

$$ad - bc = +1. \tag{11}$$

Множество преобразований (10) представляет собой модулярную группу.

§ 65. **Функция $J(\tau)$.** Выразим, пользуясь формулами (5) и (8), величины g_2 и g_3 и Δ через τ:

$$\left.\begin{aligned}
g_2 = g_2(\omega, \omega') &= 60 \sum{}' \frac{1}{(m\omega + m'\omega')^4} = \\
&= \frac{60}{\omega^4} \sum{}' \frac{1}{(m + m'\tau)^4} = \frac{1}{\omega^4} g_2(1, \tau), \\
g_3 = g_3(\omega, \omega') &= \frac{140}{\omega^6} \sum{}' \frac{1}{(m + m'\tau)^6} = \frac{1}{\omega^6} g_3(1, \tau), \\
\Delta = \Delta(\omega, \omega') &= g_2(\omega, \omega')^3 - 27 g_3(\omega, \omega')^2 = \frac{1}{\omega^{12}} \Delta(1, \tau).
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Известно, что ряды (5) абсолютно сходятся для любой пары примитивных периодов ω, ω', отношение которых не есть действительное число. Следовательно, ряды $g_2(1, \tau)$ и $g_3(1, \tau)$ сходятся абсолютно для любого τ, не равного действительному числу. Ниже будет доказано, что эти ряды сходятся равномерно в любой замкнутой области, не содержащей точек действительной оси. Отсюда будет следовать, что $g_2(1, \tau)$ и $g_3(1, \tau)$ являются аналитическими функциями τ во всей верхней полуплоскости. То же самое справедливо относительно $\Delta(1, \tau)$.

Равномерная сходимость может быть доказана следующим образом: пусть S замкнутая область на плоскости τ, не содержащая действительных точек; пусть η минимальное расстояние от границы S до действительной оси и пусть в области S $|\tau| < N$. Покажем теперь, что можно найти такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, чтобы

$$|m + m'\tau| > \varepsilon |m + m'i| \quad \text{или} \quad |m + m'\tau|^2 - \varepsilon^2 |m + m'i|^2 > 0,$$

для всех значений m, m', входящих под знак суммы, и для всех τ из области S. Так как $\tau = x + iy$, то левую часть последнего неравенства можно переписать в виде:

$$|m + m'x + m'iy|^2 - \varepsilon^2 |m + m'i|^2 = m^2 + 2mm'x + m'^2x^2 + m'^2y^2 - \varepsilon^2 m^2 - \varepsilon^2 m'^2 =$$

$$m^2\left[1 - \frac{1}{k^2} - \varepsilon^2\right] + \left[\frac{1}{k}\, m + k m' x\right]^2 + m'^2 [y^2 - (k^2 - 1)\, x^2 - \varepsilon^2].$$

Так как $|x|$ ограничено, $|x| < N$ и $|y| \geqslant \eta$, то можно выбрать такое k, достаточно близкое к единице ($k > 1$), и такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, чтобы все три члена, входящие в правую часть последнего уравнения, были положительны независимо от того, каковы m и m', что и требовалось доказать. Итак, каждый член ряда $g_2(1, \tau)$ меньше по абсолютной величине, чем соответствующий член ряда с постоянными положительными членами, а именно ряда

$$\sum{}' \frac{1}{|m + m'i|^4 \varepsilon^4},$$

относительно которого известно, что он сходится. Следовательно, ряд $g_2(1, \tau)$ сходится равномерно в области S. Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда $g_3(1, \tau)$.

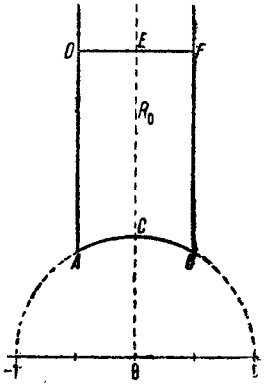
Деля g_2^3 на Δ, получим функцию одного только τ_1, так как множители, содержащие ω, сократятся. Обозначим эту функцию через $J(\tau)$:

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2(1, \tau)^3}{\Delta(1, \tau)}. \tag{13}$$

Числитель и знаменатель аналитические функции τ и знаменатель не обращается в нуль в верхней полуплоскости; следовательно, $J(\tau)$ аналитическая функция τ во всей верхней полуплоскости. Рассмотрим группу, порожденную периодами ω, ω', отношение которых $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$. Очевидно, что периоды $\omega_1' = a\omega' + b\omega$, $\omega_1 = c\omega' + d\omega$, где a, b, c и d целые числа, удовлетворяющие условию $ad - bc = 1$, также являются примитивными периодами и, следовательно, порождают ту же группу. Далее очевидно, что периодам ω_1' и ω_1 соответствуют та же самая функция $\wp(z)$

и те же постоянные g_2, g_3, Δ, что и периодам ω' и ω. А следовательно, и функция $J(\tau)$ не меняется при переходе от периодов ω', ω к периодам ω_1', ω_1. Но отношение второй пары периодов $\tau_1 = \frac{\omega_1'}{\omega_1}$ связано с отношением первой пары уравнением (10). Следовательно, для любого преобразования, принадлежащего модулярной группе,

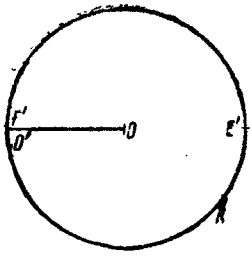
$$J\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = J(\tau). \qquad (14)$$



Черт. 46.

§ 66. Поведение $J(\tau)$ в параболических точках. $J(\tau)$ аналитична во всех конечных точках фундаментальной области R_0, изображенной на черт. 46. Исследуем поведение этой функции в верхней части области. Стороны, которые встречаются в бесконечно удаленной точке, переходят друг в друга посредством преобразования $\tau' = \tau + 1$. Сделаем в соответствии с § 41 замену переменной

$$t = e^{2\pi i\tau}. \qquad (15)$$



Черт. 47.

Посредством этого преобразования часть области R_0, лежащая вверх от прямой DEF, уравнение которой $y = k > 1$ переходит во внутренность окружности K, уравнение которой $|t| = e^{-2\pi k}$. Пары конгруэнтных точек на двух сторонах R_0 переходят в совпадающие точки на радиусе (черт. 47). Функция $J(\tau)$ принимает одни и те же значения во всех точках этого радиуса кроме начала координат, с какой бы стороны ни приближаться к радиусу. Таким образом функция J однозначна и аналитична всюду внутри K кроме, может быть, начала координат. То же самое верно относительно функций $g_2(1, \tau)$ и $g_3(1, \tau)$, так как обе они не меняются при преобразовании $\tau' = \tau + 1$. В самом деле,

$$g_2(1, \tau+1) = 60 \sum{}' \frac{1}{[m + m'(\tau+1)]^4} =$$

$$= 60 \sum{}' \frac{1}{[m + m' + m'\tau]^4} = g_2(1, \tau). \qquad (16)$$

Так как, очевидно, вторая сумма получается путем перестановки членов из суммы, определяющей $g_2(1, \tau)$. Аналогично

$$g_3(1, \tau+1) = g_3(1, \tau).$$

Для того чтобы выразить $g_2(1, \tau)$ и $g_3(1, \tau)$ как функции t, воспользуемся двумя известными формулами для котангенса [1]):

$$\pi \operatorname{ctg} \pi u = \frac{1}{u} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{u+m} - \frac{1}{m}\right] \tag{17}$$

и

$$\operatorname{ctg} \pi u = i\,\frac{w+1}{w-1}, \qquad w = e^{2\pi i u},$$

откуда

$$\pi \operatorname{ctg} \pi u = -\pi i\,[1 + 2w + 2w^2 + 2w^3 + \ldots]. \tag{18}$$

Приравняем теперь правые части уравнений (17) и (18) и продиференцируем полученное уравнение по u сначала три раза, а затем пять раз, используя оба раза соотношение $\frac{dw}{du} = 2\pi i w$. Получим следующие результаты:

$$-6\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+u)^4} = -16\pi^4\,[w + 8w^2 + \ldots],$$

$$-120\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+u)^6} = 64\pi^6\,[w + 32w^2 + \ldots],$$

при этом члены $\frac{1}{u^4}$ и $\frac{1}{u^6}$ также входят в суммы. Положим $u = m'\tau\,(m' > 0)$, тогда $w = e^{2\pi i m'\tau} = t^{m'}$, получим:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+m'\tau)^4} = \frac{8\pi^4}{3}\,[t^{m'} + 8t^{2m'} + \ldots],$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+m'\tau)^6} = -\frac{8\pi^6}{15}\,[t^{m'} + 32t^{2m'} + \ldots].$$

Поэтому можно написать [2]):

$$g_2(1, \tau) = 60\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{m^4} + 2\sum_{m'=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+m'\tau)^4}\right] =$$

$$= 60\left[\frac{\pi^4}{45} + \frac{16\pi^4}{3}\sum_{m'=1}^{\infty} (t^{m'} + 8t^{2m'} + \ldots)\right].$$

---

[1]) Первое выражение смотрите у Гурвица, Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, стр. 163—164, 1933.

[2]) Значения $\sum{}' \frac{1}{m^4}$ и $\sum{}' \frac{1}{m^6}$, которые использованы здесь и в выражении (20), можно легко получить из (17), разложив $\pi \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{u}$ по степеням u, продиференцировав затем три и пять раз и положив $u = 0$.

Функции, фигурирующие под знаком последней суммы, аналитические всюду внутри окружности K, включая начало. Так как ряд сходится равномерно на окружности K, сумма его представляет собой функцию, аналитическую всюду в круге K. Собирая степени t, получим:

$$g_2(1, \tau) = \pi^4\left[\frac{4}{3} + 320t + \ldots\right]. \tag{19}$$

Аналогично

$$g_3(1, \tau) = 140\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{m^6} + 2\sum_{m'=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+m'\tau)^6}\right] =$$

$$= 140\left[\frac{2\pi^6}{945} - \frac{16\pi^6}{15}\sum_{m'=1}^{\infty}(t^{m'} + 32t^{2m'} + \ldots)\right] = \pi^6\left[\frac{8}{27} - \frac{448}{3}t + \ldots\right]. \tag{20}$$

Из (19) и (20) находим, что

$$\Delta(1, \tau) = g_2(1, \tau)^3 - 27g_3(1, \tau)^2 = \pi^{12}[4\,096t + \ldots] \tag{21}$$

и наконец

$$J(\tau) = \frac{g_2(1,\tau)^3}{\Delta(1,\tau)} = \frac{\pi^{12}\left(\frac{4}{3} + 320t + \ldots\right)^3}{\pi^{12}(4\,096t + \ldots)} = \frac{1}{1\,728t} + c_0 + c_1 t + \ldots \tag{22}$$

Функция $J(\tau)$, рассматриваемая как функция t, имеет таким образом полюс первого порядка при $t = 0$.

§ 67. Другие свойства функции $J(\tau)$. Функция $J(\tau)$ имеет единственный полюс первого порядка в области R_0 и удовлетворяет условиям, изложенным в § 42. Поэтому в области R_0 она принимает каждое значение только один раз (теорема 11 § 42).

Теорема 1. *Функция $J(\tau)$ принимает в фундаментальной области каждое значение один и только один раз.*

Пользуясь теоремой 14 § 43, определим все функции, автоморфные относительно модулярной группы и не имеющие в фундаментальной области никаких особенностей кроме полюсов.

Теорема 2. *Самая общая простая автоморфная функция, принадлежащая модулярной группе, представляет собой рациональную функцию от $J(\tau)$.*

Рассмотрим теперь значения $J(\tau)$ в вершинах области R_0, т. е. в точках A, B, C. В точке A $\tau = \varrho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. ϱ означает здесь корень, кубичный из единицы, такой, что $\varrho^3 = 1$ и $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$. Помножая в правой части выражения

$$g_2(1, \tau) = 60\sum{}' \frac{1}{(m + m'\varrho)^4}$$

числитель и знаменатель каждого слагаемого на ϱ^8 и внося в знаменателе ϱ^2 в скобки, получим:

$$g_2(1,\tau)=60\varrho^8\sum{}'\frac{1}{(m\varrho^2+m')^4}=60\varrho^2\sum{}'\frac{1}{(m'-m-m\varrho)^4}=\varrho^2 g_2(1,\varrho),$$

так как последняя сумма содержит те же слагаемые, что и первая, только расположенные в другом порядке. Отсюда получаем, так как $\varrho^2\neq 1$:

$$g_2(1,\varrho)=0,\quad J(\varrho)=0. \tag{23}$$

$J(\tau)$ обращается в нуль также и в вершине B, конгруэнтной A.

В вершине C $\tau=i$. В этом случае

$$g_3(1,i)=140\sum{}'\frac{1}{(m+m'i)^6}=140i^6\sum{}'\frac{1}{(mi-m')^6}=-g_3(1,i).$$

Отсюда

$$g_3(1,i)=0,\quad J(i)=1. \tag{24}$$

Найдем теперь все точки области R_0, в которых $J(\tau)$ действительна. Рассмотрим точки $\tau'=-\bar{\tau}$, получаемые путем отражения τ относительно мнимой оси. Получаем:

$$g_2(1,\tau')=60\sum{}'\frac{1}{(m-m'\bar{\tau})^4},\quad \bar{g}_2(1,\tau)=60\sum\frac{1}{(m+m'\bar{\tau})^4};$$

таким образом $g_2(1,\tau')=\bar{g}_2(1,\tau)$, аналогично $g_3(1,\tau')=\bar{g}_3(1,\tau)$, и, следовательно:

$$J(\tau')=\bar{J}(\tau). \tag{25}$$

Найдем точки, в которых $J(\tau')=J(\tau)$. Если τ лежит на мнимой оси, ее отражение совпадает с ней самой и $\tau'=\tau$. Если τ лежит на границе R_0, ее отражение τ есть точка границы R_0, конгруэнтная τ, в которой функция J принимает то же самое значение, что и в τ.

В обоих случаях

$$J(\tau)=\bar{J}(\tau)$$

и, следовательно, в силу (25) $J(\tau)$ действительна. Таким образом $J(\tau)$ принимает действительные значения на мнимой оси и на границе области R_0.

В области R_0 нет других точек, в которых $J(\tau)$ действительна. В самом деле, предположим, что функция принимает действительное значение в какой-нибудь иной точке τ_1, лежащей в области R_0, тогда $J(\tau_1)=\bar{J}(\tau_1)=J(\tau_1')$, т. е. $J(\tau)$ принимает одно и то же значение в двух различных точках τ_1 и τ_1', лежащих внутри области R_0, что противоречит теореме 1. Из изложенного следует, что мнимая часть функции $J(\tau)=u+iv$ сохраняет постоянный знак в каждой из двух половин, на которые мнимая ось разбивает R_0. В самом деле, предположим, что в двух

точках области τ_1 и τ_2, лежащих по одну сторону от мнимой оси, ν имеет разные знаки. Пусть $\nu_{\tau_1} > 0$ и $\nu_{\tau_2} < 0$. Соединим точки τ_1 и τ_2 кривой λ, лежащей в области R_0 и не встречающей мнимую ось, в таком случае на кривой λ найдется точка, в которой $\nu = 0$. В этой точке функция должна иметь действительное значение, что противоречит только что доказанному. Остается определить, в какой половине области R_0 ν больше нуля. Когда τ передвигается по границе области R_0 из точки A в точку C, $J(\tau)$ движется от 0 до 1 по действительной оси на плоскости J. Точки области R_0, лежащие в окрестности дуги AC и влево от нее, переходят в точки плоскости J, лежащие в окрестности отрезка [0,1] действительной оси и влево от него, т. е. в точки верхней полуплоскости. Таким образом $\nu > 0$ в левой половине области R_0.

Полученные результаты можно формулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 3. *Если u и v действительная и мнимая часть функции $J(\tau)$, т. е. $J(\tau) = u + iv$, то $v > 0$ во внутренних точках области R_0, лежащих влево от мнимой оси, $v < 0$ во внутренних точках области R_0, лежащих вправо от мнимой оси, $v = 0$ на границе области R_0 и на мнимой оси. При этом $v_{\tau'} = -v_\tau$, где τ' точка, получающаяся путем отражения τ около мнимой оси.*

Последнее утверждение следует непосредственно из уравнения (25).

Функция $z = J(\tau)$ отображает взаимно-однозначно левую половину области R_0 в верхнюю полуплоскость плоскости z и аналогично правую половину области R_0 в нижнюю полуплоскость. Когда τ движется вверх по мнимой оси от точки c до ∞, z движется вправо по действительной оси от 1 до $+\infty$. Две половины плоскости z соединяются вдоль действительной оси вправо от точки $z = +1$. Следовательно R_0 отображается в плоскость z, разрезанную вдоль действительной оси от $z = 1$ до $z = -\infty$.

§ 68. Функция $\lambda(\tau)$. Мы рассмотрим одну из эллиптических модулярных функций, принадлежащих подгруппе модулярной группы и не автоморфных по отношению ко всей группе. Функция, которую мы будем рассматривать, определяется следующим образом:

$$\lambda(\tau) = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \tag{26}$$

причем e_1, e_2, e_3 величины, определенные формулами (6).

Покажем, во-первых, что λ действительно есть функция одного только τ. Так как ряд (2), определяющий функцию $\wp$, содержит только члены минус второй степени по z, ω, ω', то

$$\wp(z, \omega, \omega') = k^2 \wp(kz, k\omega, k\omega'), \qquad k \neq 0. \tag{27}$$

Мы пишем здесь $\wp(z, \omega, \omega')$ для того, чтобы подчеркнуть зависимость функции $\wp$ от периодов.

Полагая $k=\frac{1}{\omega}$ и воспользовавшись (27), получим из уравнений (6):

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \wp\left(\frac{\omega}{2};\ \omega,\ \omega'\right)=\frac{1}{\omega^2}\wp\left(\frac{1}{2};\ 1,\ \tau\right),\\ e_2 &= \wp\left(\frac{\omega+\omega'}{2};\ \omega,\ \omega'\right)=\frac{1}{\omega^2}\wp\left(\frac{1+\tau}{2};\ 1,\ \tau\right),\\ e_3 &= \wp\left(\frac{\omega'}{2};\ \omega,\ \omega'\right)=\frac{1}{\omega^2}\wp\left(\frac{\tau}{2};\ 1,\ \tau\right). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Подставив полученные для e_1, e_2, e_3 выражения в (26), мы замечаем, что ω сокращается и что, следовательно, λ есть функция одного только τ.

Относительно рядов, фигурирующих в (28) и определяющих функции τ, можно доказать, что они равномерно сходятся в любой замкнутой области на плоскости τ, не содержащей точек действительной оси. Это доказательство совпадает в основном с доказательством сходимости, данным в § 65, и поэтому мы его опускаем. Таким образом эти функции переменного τ аналитичны в верхней полуплоскости. Величины e_1, e_2, e_3 различны между собой и, следовательно, $\lambda(\tau)$ аналитическая функция τ, не принимающая значений 0 и 1 нигде в верхней полуплоскости.

Рассмотрим группу, порожденную парой периодов ω, ω', отношение которых $\frac{\omega'}{\omega}$ есть τ. Пусть ω_1, ω_1' другая пара примитивных периодов уравнения (9), причем $ad-bc=+1$. Отношение новых периодов получается из (10). Для новых периодов имеем:

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= \wp\left(\frac{c\omega'+d\omega}{2}\right),\\ e_2' &= \wp\left(\frac{c\omega'+d\omega+b\omega+a\omega'}{2}\right),\\ e_3' &= \wp\left(\frac{a\omega'+b\omega}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Так как мы имеем дело с той же группой и, следовательно, с той же функцией $\wp$, то и константы должны быть те же самые, но возможно, что они перенумерованы в другом порядке. Но при перестановке констант в (26) значение λ, вообще говоря, меняется.

В случае, если величины $\frac{c\omega'+d\omega}{2}$ и $\frac{\omega}{2}$ отличаются на период, т. е. если $\frac{c\omega'+(d-1)\omega}{2}$ есть период, имеем:

$$\wp\left(\frac{c\omega'+d\omega}{2}\right)=\wp\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

или

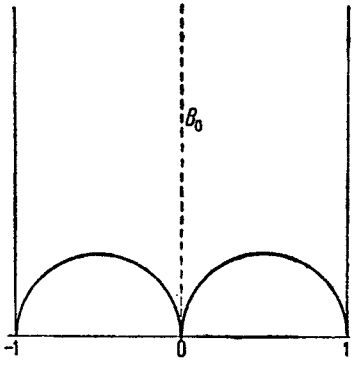
$$e_1'=e_1.$$

Это произойдет в том и только в том случае, если c четное число, а d нечетное. Аналогично, если $\frac{a\omega'+b\omega}{2}$ и $\frac{\omega'}{2}$ отличаются на период, т. е. если $\frac{(a-1)\omega'+b\omega}{2}$ есть период, имеем $e_3'=e_3$. Это произойдет, если a нечетное, а b четное число. Если оба эти условия выполнены, оставшиеся корни тоже равны, т. е. $e_2'=e_2$ и λ остается неизменной.

Если b и c оба четны, $b=2b'$, $c=2c'$, то вследствие соотношения $ad-bc=1$ a и d должны быть оба нечетны, и мы имеем:

$$\lambda\left(\frac{a\tau+2b'}{2c'\tau+d}\right)=\lambda(\tau),\quad ad-4b'c'=1. \quad (30)$$

Таким образом $\lambda(\tau)$ не изменяется при всех преобразованиях, принадлежащих подгруппе, рассмотренной в § 38. Фундаментальная область этой подгруппы изображена на черт. 30 и для удобства также и на черт. 48.



Черт. 48.

§ 69. Соотношение между функциями $\lambda(\tau)$ и $J(\tau)$. Если мы подвергнем τ преобразованию, принадлежащему модулярной группе, но не принадлежащему подгруппе (30), корни e_1, e_2, e_3 меняются местами. Все значения, которые может при этом принять функция (26), содержатся в следующей таблице:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\lambda, & \frac{e_3-e_1}{e_2-e_1}=\frac{1}{1-\lambda}, & \frac{e_1-e_2}{e_3-e_2}=\frac{\lambda-1}{\lambda}, \\ \frac{e_1-e_3}{e_2-e_3}=\frac{1}{\lambda}, & \frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}=\frac{\lambda}{\lambda-1}, & \frac{e_2-e_1}{e_3-e_1}=1-\lambda. \end{array}\right\} \quad (31)$$

Эти шесть преобразований λ образуют группу, а именно группу ангармонических отношений (§ 36).

Если мы построим теперь рациональную симметрическую функцию шести количеств (31), то получится простая автоморфная функция $F(\tau)$, принадлежащая модулярной группе. В самом деле, при любом модулярном преобразовании количества e_1, e_2, e_3 только меняются местами и поэтому модулярное преобразование не может изменить симметрической функции этих количеств. Далее, такая симметрическая функция корней может быть представлена как рациональная функция коэфициентов $g_2(\omega, \omega')$, $g_3(\omega, \omega')$ и, следовательно, также $g_2(1, \tau)$ и $g_3(1, \tau)$. Последние две функции не имеют в области R_0 (включая параболические точки) других особенностей кроме полюсов; поэтому рациональ-

ная функция этих двух функций также не имеет никаких особенностей кроме полюсов. Таким образом $F(\tau)$ простая автоморфная функция. На основании теоремы 2 заключаем, что $F(\tau)$ есть рациональная функция $J(\tau)$.

Рассмотрим следующую симметрическую функцию:

$$F(\tau)=(\lambda+1)\left(\frac{1}{1-\lambda}+1\right)\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}+1\right)\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}+1\right)(1-\lambda+1)=$$

$$=-\frac{(\lambda+1)^2(2-\lambda)^2(2\lambda-1)^2}{\lambda^2(1-\lambda)^2}. \tag{32}$$

Выражая правую часть через e_1, e_2, e_3, получим:

$$F(\tau)=-\frac{(e_2+e_1-2e_3)^2(e_2+e_3-2e_1)^2(e_1+e_3-2e_2)^2}{(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_1-e_3)^2}. \tag{33}$$

Из уравнения (7) имеем $e_1+e_2+e_3=0$, $e_1\cdot e_2\cdot e_3=\frac{g_3}{4}$.

Используя эти соотношения, можно написать числитель (33) в виде:

$$(-3e_3)^2(-3e_1)^2(-3e_2)^2=\frac{3^6}{4^2}g_3^2.$$

Знаменатель (33) с точностью до постоянного множителя равен дискриминанту уравнения (7). В самом деле,

$$(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_1-e_3)^2=\frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2).$$

Следовательно:

$$F(\tau)=-\frac{3^6g_3^2}{g_2^3-27g_3^2}=27\,[1-J(\tau)]. \tag{34}$$

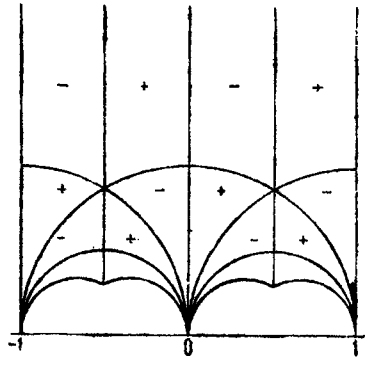
Сделав небольшие вычисления, получим из (32) и (34):

$$J(\tau)=1-\frac{F(\tau)}{27}=\frac{4}{27}\,\frac{(1-\lambda-\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}. \tag{35}$$

§ 70. Дальнейшие свойства $\lambda(\tau)$. Заметим сначала, что каждой точке области B_0 (черт. 48) соответствуют пять других конгруэнтных ей относительно преобразований модулярной группы точек, лежащих в той же области B_0. На черт. 49 представлено разбиение области B_0 на части посредством модулярной группы. Отмечая левую половину области R_0 и треугольники, конгруэнтные ей, знаком плюс, а правую половину и конгруэнтные ей треугольники знаком минус, мы замечаем, что в области B_0 содержится по шесть копий каждой из этих половин. Таким образом $J(\tau)$ принимает в области B_0 каждое свое значение шесть раз.

Покажем теперь, что $\lambda(\tau)$ есть простая автоморфная функция. Здесь нужно подвергнуть рассмотрению только один вопрос: поведение функции в окрестности параболических точек. Рассмотрим бесконечно удаленную параболическую точку. Если

в соответствии с § 41 сделаем преобразование $\tau_1 = e^{\pi i \tau}$ (стороны B_0 конгруэнтны относительно преобразования $\tau' = \tau + 2$), то верхняя часть области B_0 отобразится на область такого рода, как изображенная на черт. 47. При этом λ перейдет в функцию переменного τ_1, аналитическую в окрестности начала координат. Если бы $\tau_1 = 0$ была существенной особой точкой для λ, то эта функция принимала бы в окрестности τ некоторое значение бесконечно много раз. Но тогда на основании (35) функция J принимала бы в области B_0 некоторое значение бесконечно много раз, что невозможно. Таким образом λ аналитична в точке $\tau_1 = 0$ или имеет там полюс. Аналогичные замечания применимы также к остальным параболическим точкам. Итак, $\lambda(\tau)$ простая автоморфная функция. Вследствие этого $\lambda(\tau)$ принимает все свои значения одно и то же число раз.



Черт. 49.

Исключительные значения $0, 1, \infty$, не принимаемые функцией ни в одной из точек верхней полуплоскости, по необходимости принимаются ею в параболических точках $0, \pm 1$ и ∞. Но точки $+1$ и -1 конгруэнтны и, следовательно, значения функции в этих точках равны. Теперь определим, в какой точке принимается каждое из этих значений. Мы могли бы этого достигнуть, рассматривая предел, к которому стремится $\lambda(\tau)$, когда τ стремится к параболической точке, оставаясь все время внутри области. Мы воспользуемся более простым методом: произведем замену периодов [см. (9) и (10)]:

$$\omega_1' = \omega' + \omega, \quad \omega_1 = \omega, \quad \tau_1 = \tau + 1.$$

При этом новыми константами будут:

$$e_1' = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1,$$

$$e_3' = \wp\left(\frac{\omega_1'}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = e_2,$$

$$e_2' = e_3$$

и

$$\lambda' = \frac{e_2' - e_3'}{e_1' - e_3'} = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

При этой замене периодов значения $\tau = 0, -1, \infty$ переходят соответственно в $\tau' = 1, 0, \infty$; и далее значения $\lambda = 0, 1, \infty$ переходят соответственно в $\lambda' = 0, \infty, 1$.

Так как $\tau = \infty$ переходит в $\tau' = \infty$, то соответствующее значение λ остается без изменения; следовательно, $\lambda(\infty) = 0$.

Теперь произведем другую замену периодов:

$$\omega_1' = -\omega, \quad \omega_1 = \omega', \quad \tau_1 = -\frac{1}{\tau}.$$

При этом

$$e_1' = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega'}{2}\right) = e_3,$$

$$e_3' = \wp\left(\frac{\omega_1'}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega}{2}\right) = e_1,$$

$$e_2' = e_2$$

и

$$\lambda' = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1} = 1 - \lambda.$$

Здесь значениям $\tau = 0, -1, \infty$ соответствуют значения $\tau_1 = \infty$, 1, 0; значениям $\lambda = 0$, 1, ∞ — значения $\lambda' = 1$, 0, ∞, откуда $\lambda(\pm 1) = \infty$ и $\lambda(0) = 1$.

Сейчас мы докажем следующую теорему:

Теорема 4. *Функция $\lambda(\tau)$ принимает в фундаментальной области B_0 каждое значение один и только один раз. Каждая принадлежащая подгруппе простая автоморфная функция является рациональной функцией от $\lambda(\tau)$.*

Во-первых, определим порядок нуля $\lambda(\tau)$ в бесконечно удаленной параболической точке. Когда τ стремится к ∞, оставаясь в B_0, λ стремится к нулю, и на основании (35) имеем:

$$\lambda^2 J \to \frac{4}{27}. \tag{36}$$

Производя замену $t_1 = e^{\pi i \tau}$ и пользуясь (15) и (22), получаем:

$$J = \frac{1}{1\,728t} + c_0 + c_1 t + \ldots = \frac{1}{1\,728t_1^2} + c_0 + c_1 t_1^2 + \ldots$$

Таким образом J имеет в $t_1 = 0$ полюс второго порядка. Следовательно, на основании (36) λ имеет нуль первого порядка. Так как $\lambda(\tau)$ имеет единственный нуль в области B_0, то она принимает там каждое значение один и только один раз. Второе утверждение теоремы является следствием из теоремы 14 § 43.

Точки, в которых $\lambda(\tau)$ принимает действительные значения, могут быть найдены таким же образом, как и для $J(\tau)$. Прежде всего получим $\lambda(-\bar{\tau}) = \bar{\lambda}(\tau)$; воспроизводя далее рассуждения, которыми мы пользовались при доказательстве теоремы 3, приходим к заключению, что $\lambda(\tau)$ принимает действительные значения на границе B_0 и на мнимой оси. Правой части области B_0 соответствует верхняя полуплоскость плоскости λ.

В заключение дадим одну общую теорему о модулярных функциях.

Теорема 5. *Пусть дана подгруппа модулярной группы, фундаментальная область которой состоит из k копий фундаментальной области R_0 модулярной группы. Тогда всякая простая автоморфная функция $f(\tau)$, принадлежащая этой подгруппе, связана с $J(\tau)$ соотношением*

$$\Phi(f, J) = 0,$$

где Φ полином по f степени не выше k.

То, что между f и J существует алгебраическое соотношение, следует из теоремы 15 § 43, так как очевидно, что $J(\tau)$ есть простая автоморфная функция, принадлежащая подгруппе. Каждому значению J_0 функции J соответствует не более k различных значений функции f, а именно значения $f(\tau)$ в k точках фундаментальной области, в которых $J(\tau) = J_0$. Следовательно, неприводимый полином, стоящий в левой части соотношения, связывающего f и J, имеет степень по f не большую, чем k.

Уравнение (35), связывающее J и λ, является примером, иллюстрирующим теорему.

Глава VIII

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

§ 71. Конформное отображение. Настоящая глава посвящена проблеме конформного отображения одной области на другую. Как мы увидим в дальнейшем, конформные отображения играют существенную роль в некоторых приложениях теории автоморфных функций.

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую и однозначную в области S и принимающую там каждое свое значение только один раз. Тогда соотношение $z' = f(z)$ определяет взаимно-однозначное соответствие между внутренними точками S и внутренними точками некоторой области S' на плоскости z'. При этом отображении области S на область S' сохраняются углы по величине и направлению. Мы будем говорить, *что посредством функции $f(z)$ область S конформно отображается на область S'*. Наоборот, если при преобразовании одной области в другую сохраняются углы, то функция, определяющая соответствие между точками этих областей, есть аналитическая функция $z' = f(z)$. Говоря о конформном отображении, мы будем всегда предполагать, что это отображение взаимно-однозначное.

Это простое понятие может быть существенным образом расширено. А именно: во-первых, мы можем отказаться от ограничения, что $f(z)$ принимает в области S каждое свое значение только один раз; при этом мы конечно будем предполагать, что $f(z)$ не тождественная постоянная.

Пусть точка a лежит в области S и пусть $f'(a) \neq 0$, тогда окрестность точки a отображается в однолистную область, содержащую точку $b = f(a)$. В самом деле, в точке a имеет место разложение:

$$z' = b + f'(a)(z - a) + \ldots \tag{1}$$

Если z находится в достаточно малой окрестности a, то величины z и z' удовлетворяют также соотношению:

$$z = a + \frac{1}{f'(a)}(z' - b) + \ldots \tag{2}$$

Таким образом обратная функция однозначна и, следовательно, преобразованная область однолистна. Предположим теперь, что $f'(a) = 0$. Тогда

$$z' = b + c(z - a)^n + \ldots, \qquad n > 1,\ c \neq 0. \tag{3}$$

Для обратной функции имеем в этом случае:

$$z = a + c'(z' - b)^{\frac{1}{n}} + \ldots \tag{4}$$

и, следовательно, она не однозначна. Каждой точке в некоторой достаточно малой окрестности b соответствует n точек, лежащих в окрестности a. Рассматривая полученную на плоскости z' в окрестности точки b область как n-листную область с точкой ветвления b, мы можем утверждать, что и в этом случае отображение взаимно-однозначно.

Точки z', принадлежащие всем различным ветвям вместе с соответствующими точками ветвления, если таковые имеются, образуют поверхность S' с конечным или бесконечным числом листов, точки которой находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками поверхности S. И в этом случае мы будем говорить, что посредством функции $f(z)$ осуществляется конформное отображение области S на S'. Очевидно, S' есть часть римановой поверхности (а возможно, и вся риманова поверхность) для функции, обратной по отношению к $f(z)$. В точках ветвления отображение не конформно, непрерывность же в этих точках сохраняется. Число лежащих на поверхности S' точек ветвления может быть бесконечно, однако порядок каждой из точек ветвления конечен. Далее, вместо однолистной области S можно рассматривать риманову поверхность с конечным или бесконечным числом листов, содержащую точки ветвления только конечного порядка. Мы будем говорить, что $f(z)$ аналитична и однозначна на поверхности S, если она однозначна на этой поверхности и аналитична всюду за исключением точек ветвления.

Таким образом получается отображение одной многолистной римановой поверхности на другую.

Наконец мы можем рассматривать бесконечно удаленную точку как внутреннюю точку S или S'. Так, например, если $f(z)$ имеет полюс в точке a области S, то соответствующая точка в области S' есть бесконечность.

В первой части этой главы мы будем заниматься главным образом однолистными областями, хотя и используем некоторые простые двулистные области при доказательстве теорем. Теперь докажем некоторые теоремы, которые будут нам полезны в дальнейшем.

§ 72. Лемма Шварца[1]. Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в единичном круге Q_0 и равна нулю в начале координат. Если внутри Q_0 $|f(z)| \leqslant 1$, то $|f(z)| \leqslant |z|$ всюду внутри Q_0; кроме того, $|f'(0)| \leqslant 1$. Равенства $|f(z)| = |z|$ при $z \neq 0$ и $|f'(0)| = 1$ возможны только в случае, если $f(z) = e^{i\theta}z$.*

Функция $\frac{f(z)}{z}$ аналитична в Q_0, если ей приписать значение $f'(0)$ в начале координат. Пусть Q_r круг, концентричный с Q_0 и с ра-

[1]) Schwarz H. A., Ges. Abhandl., т. 2, стр. 110; C. Caratheodory, Math. Ann., т. 72, стр. 110, 1912.

диусом r, меньшим единицы. Так как максимум модуля нашей функции достигается на границе области, то для всех точек круга Q_r будем иметь:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{r}.$$

С другой стороны, так как r можно взять как угодно близким к единице, то

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1, \tag{5}$$

для всех точек z, лежащих внутри Q_0. Таким образом первая часть теоремы доказана. Полагая в неравенстве (5) $z=0$, получаем:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|_{z=0} = |f'(0)| \leqslant 1; \tag{6}$$

этим доказана также вторая часть теоремы.

С другой стороны, очевидно, что если в какой-нибудь внутренней точке z'

$$\left|\frac{f(z')}{z'}\right| = 1,$$

то или в сколь угодно малой окрестности z' должны лежать точки, в которых $\left|\frac{f(z)}{z}\right| > 1$, или $\frac{f(z)}{z}$ есть постоянная величина. Вследствие (5) первое предположение отпадает, и, следовательно, если выполняется одно из равенств: $\left|\frac{f(z)}{z}\right|_{|z|<1} = 1$ или $f'(0)=1$, то $\frac{f(z)}{z} = e^{i\theta}$ или $f(z) = e^{i\theta} z$. Обратно, если $f(z) = e^{i\theta} z$, то равенства имеют место.

В качестве приложения леммы Шварца мы докажем одну теорему, устанавливающую соотношение между функцией, отображающей какую-нибудь область на единичный круг, и функцией, отображающей на единичный круг подобласть этой области. Условимся называть область S_1 *подобластью* области S, если, во-первых, каждая внутренняя точка S_1 является внутренней точкой S и если, во-вторых, область S_1 не содержит всех точек области S.

Теорема 2. *Пусть $w = f(z)$ отображает конформно некоторую область S на круг Q_0, пусть, далее, $w_1 = f_1(z)$ конформно отображает на круг Q_0 некоторую подобласть S_1 области S. Предположим еще, что при обоих отображениях в начало координат переходит одна и та же точка a. Тогда во всякой точке области S_1, отличной от a, будем иметь:*

$$|f_1(z)| > |f(z)| \tag{7}$$

и кроме того, в случае если a простой нуль, то

$$|f_1'(a)| > |f'(a)|. \tag{8}$$

При отображении S на Q_0 посредством $w=f(z)$ S_1 отображается на некоторую подобласть S_1' круга Q_0. Применим к Q_0 преобразование, обратное $w_1=f_1(z)$. Посредством этого преобразования Q_0 перейдет в S_1. Далее применим к S_1 преобразование $w=f(z)$; тогда S_1 перейдет в S_1'. Отсюда заключаем, что произведение этих преобразований есть преобразование $w=\varphi(w_1)$, переводящее Q_0 в S_1'. Поэтому $|\varphi(w_1)|\leqslant 1$. Так как $w_1=0$ соответствует $w=0$, то приложима лемма Шварца и, следовательно,

$$|w|=|\varphi(w_1)|<|w_1|,$$

а это и есть неравенство (7). Заметим, что знак равенства в нашем случае не может иметь места, так как круг Q_0 сам в себя не переходит. В обыкновенной точке (т. е. в конечной точке, не являющейся точкой ветвления) обе функции имеют неравные нулю производные. На основании леммы Шварца:

$$|\varphi'(0)|=\left|\frac{dw}{dw_1}\right|_{z=a}=\left|\frac{f'(a)}{f_1'(a)}\right|<1,$$

и этим самым доказано (8).

§ 73. Теоремы площадей. Пусть $f(z)$ аналитична внутри круга Q. Тогда посредством $z'=f(z)$ внутренность Q отображается на некоторую область S — однолистную или многолистную, возможно и бесконечно многолистную. Это отображение конформно везде за исключением точек ветвления, в которых, однако, оно остается непрерывным. Мы сейчас докажем теорему, показывающую зависимость между площадями областей Q и S[1]).

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ аналитична внутри некоторого круга с центром в a и с радиусом R. Тогда площадь A области, на которую посредством $f(z)$ отображается внутренность круга, удовлетворяет неравенству:*

$$A\geqslant\pi|f'(a)|^2R^2. \tag{9}$$

В частности, A может быть бесконечно. В соотношении (9) *равенство возможно лишь в случае, если $f(z)=a_0+a_1z$.*

Не ограничивая общности, мы можем считать $a=0$. Пусть Q' круг, определяемый неравенством: $|z|\leqslant R'<R$. При отображении круга Q круг Q' переходит в некоторую область с конечной площадью A'. Так как при конформном отображении элемент площади умножается на $|f'(z)|^2$, то

$$A'=\iint|f'(z)|^2dx\,dy,$$

причем областью интегрирования является круг Q'.

Так как $f(z)$ аналитична в Q, то

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots,$$

причем ряд сходится для $|z|<R$.

[1]) Bieberbach, L., Palermo Rend., т. 38, стр. 98—112, 1914.

Далее:

$$|f'(z)|^2 = (a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots)(\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 \bar{z} + 3\bar{a}_3 \bar{z}^2 + \ldots);$$

поэтому, вводя полярные координаты: $z = re^{i\theta}$, получим:

$$A' = \int_0^{R'} r\,dr \int_0^{2\pi} (a_1 + 2a_2 re^{i\theta} + \ldots)(\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 re^{-i\theta} + \ldots)\,d\theta.$$

Далее, перемножая ряды под знаком интеграла и интегрируя почленно, будем иметь:

$$A' = 2\pi \int_0^{R'} r[a_1 \bar{a}_1 + 4a_2 \bar{a}_2 r^2 + 9a_3 \bar{a}_3 r^4 + \ldots]\,dr =$$

$$= \pi[a_1 \bar{a}_1 R'^2 + 2a_2 \bar{a}_2 R'^4 + \ldots + na_n \bar{a}_n R'^{2n} + \ldots],$$

так как если целое число n отлично от нуля, то

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,d\theta = 0.$$

При неограниченном приближении R' к R сумма полученного ряда стремится или к бесконечности или к сумме ряда $\pi[a\bar{a}_1 R^2 + 2a_2\bar{a}_2 R^4 + \ldots + na_n\bar{a}_n R^{2n} + \ldots]$, если этот последний ряд сходится. Во всяком случае всегда $A \geqslant \pi a_1 \bar{a}_1 R' = \pi |f'(0)|^2 R^2$.

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_2 = a_3 = \ldots = 0$. При этом очевидно $f(z) = a_0 + a_1 z$. В частном случае, когда $|f'(a)| = 1$, т. е. когда длины в окрестности центра не меняются, будем иметь: $A \leqslant \pi R^2$, т. е. площадь S больше или равна площади Q.

Теперь мы исследуем отображение внешности единичного круга на однолистную область, осуществляемое посредством функции, которая оставляет неподвижной бесконечно удаленную точку и которая производит лишь ограниченное смещение точек z, сколь угодно близкое к простому переносу, когда $|z|$ достаточно велик.

Теорема 4. *Пусть функция*

$$w = f(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots \tag{10}$$

отображает внешность единичного круга Q_0 на однолистную область тогда

$$c_1 \bar{c}_1 + 2c_2 \bar{c}_2 + 3c_3 \bar{c}_3 + \ldots \leqslant 1. \tag{11}$$

Функция $f(z)$ аналитична всюду вне Q_0 за исключением бесконечно удаленной точки; следовательно, ряд (10) сходится для всех конечных z, для которых $|z| > 1$. Рассмотрим круг Q: $|z| = r > 1$; окружность $|z| = r$ переходит посредством функции (10) в замкнутую аналитическую кривую C без кратных точек, лежащую в плоскости w. Пусть $z = re^{i\theta}$. Когда θ растет от 0 до 2π, то точка z описывает окружность круга Q в направлении против

часовой стрелки, а точка $w = f(re^{i\theta})$ описывает против часовой стрелки кривую C.

Вычислим площадь A' области, лежащей внутри кривой C. Вводя обозначение $w = X + iY$ и применяя известную формулу, получаем:

$$A' = \frac{1}{2}\int_C X\,dY - Y\,dX,$$

причем интеграл здесь взят вдоль кривой C в направлении против часовой стрелки. Так как

$$X = \frac{w + \bar{w}}{2}, \quad Y = \frac{w - \bar{w}}{2i},$$

то

$$A' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(X\frac{dY}{d\theta} - Y\frac{dX}{d\theta}\right)d\theta = \frac{1}{4i}\int_0^{2\pi}\left(\bar{w}\frac{dw}{d\theta} - w\frac{d\bar{w}}{d\theta}\right)d\theta.$$

Но

$$w\frac{d\bar{w}}{d\theta} = \overline{\left(\bar{w}\frac{dw}{d\theta}\right)}$$

и, следовательно,

$$w\frac{dw}{d\theta} - w\frac{d\bar{w}}{d\theta} = 2iI\left(\bar{w}\frac{dw}{d\theta}\right).$$

Поэтому

$$A' = \frac{1}{2}I\left(\int_0^{2\pi}\bar{w}\frac{dw}{d\theta}\,d\theta\right).$$

На основании (10) получаем:

$$w = re^{i\theta} + c_0 + \frac{c_1}{r}e^{-i\theta} + \frac{c_2}{r^2}e^{-2i\theta} + \ldots,$$

$$\frac{dw}{d\theta} = i\left[re^{i\theta} - \frac{c_1}{r}e^{-i\theta} - \frac{2c_2}{r^2}e^{-2i\theta} - \ldots\right],$$

$$\bar{w} = re^{-i\theta} + \bar{c}_0 + \frac{\bar{c}_1}{r}e^{i\theta} + \frac{\bar{c}_2}{r^2}e^{2i\theta} + \ldots$$

Перемножая последние два ряда и интегрируя почленно произведение, получим:

$$\int_0^{2\pi}\bar{w}\frac{dw}{d\theta}\,d\theta = 2\pi i\left[r^2 - \frac{c_1\bar{c}_1}{r^2} - \frac{2c_2\bar{c}_2}{r^4} - \ldots\right],$$

так как

$$\int_0^{2\pi}e^{in\theta}\,d\theta = 0, \quad \text{если } n \neq 0.$$

Таким образом

$$A' = \pi\left[r^2 - \frac{c_1\bar{c}_1}{r^2} - \frac{2c_2\bar{c}_2}{r^4} - \frac{3c_3\bar{c}_3}{r^6} - \ldots\right] > 0,$$

так как площадь A' области, ограниченной кривой C, больше нуля.

Теперь, приближая r к единице, получим, переходя к пределу:

$$A = \pi\,[1 - c_1\bar{c}_1 - 2c_2\bar{c}_2 - 3c_3\bar{c}_3 - \ldots] \geqslant 0,$$

откуда следует справедливость (11).

Величина A равна площади той части w, которая остается непокрытой при отображении внешности круга Q_0. Эта величина может быть равна нулю.

Нетрудно видеть, что $A < \pi$ всегда за исключением случая когда $f(z) = z + c_0$; т. е. при всех преобразованиях типа (10), з исключением переноса, часть плоскости, не покрытая преобразо ванной областью, меньше площади части плоскости, не покрытой преобразуемой областью $|z| > 1$.

§ 74. Об отображении круга на конечную однолистную область. Теперь стало возможным доказательсто следующей замечательной теоремы:

Теорема 5. *Пусть функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение внутренности единичного круга Q_0 на конечную однолистную область. Пусть, кроме того, выполняются условия: $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$. Тогда, какова бы ни была функция $f(z)$, удовлетворяющая высказанным условиям, круг $|w| < \frac{1}{4}$ лежит внутри преобразованной области. С другой стороны, если для некоторой точки $|w| \geqslant \frac{1}{4}$, то найдутся преобразования рассматриваемого типа, при которых эта точка не будет внутренней.*

Отображающая функция $f(z)$ может быть представлена в виде ряда

$$w = f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots, \tag{12}$$

который сходится при $|z| < 1$.

Нетрудно убедиться, что функция

$$w = F(z) = [f(z^2)]^{\frac{1}{2}} = z + \frac{1}{2}a_2z^3 + \ldots \tag{13}$$

также осуществляет отображение круга Q_0 на конечную однолистную область.

В самом деле, посредством функции $t = f(z^2)$ круг Q_0 отображается взаимно-однозначно на некоторую конечную область, лежащую на двулистной поверхности с точками ветвления 0 и ∞. Далее, посредством $w = \sqrt{t}$ эта двулистная область отображается на конечную однолистную область.

Введем теперь новые переменные $Z = \frac{1}{z}$ и $W = \frac{1}{w}$; тогда мы получим функцию W от переменного Z, посредством которой внешность круга Q_0, лежащего на плоскости Z, отображается на некоторую однолистную область плоскости W. Эта функция W имеет вид:

$$W = \frac{1}{F\left(\frac{1}{Z}\right)} = Z - \frac{a_2}{2Z} + \ldots \tag{14}$$

и, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы (4). Поэтому на основании (11) имеет место неравенство: $\frac{1}{4} a_2\overline{a_2} \leqslant 1$. Таким образом, если функция, определенная формулой (12), осуществляет конечное и однолистное отображение внутренности круга Q_0, то

$$|a_2| \leqslant 2. \tag{15}$$

Пусть точка c есть конечная точка плоскости w, лежащая вне области, в которую перешла внутренность круга Q_0 посредством функции (12); т. е. пусть c внешняя или граничная точка преобразованной области. Очевидно, что $c \neq 0$. Тогда функция

$$w' = \frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right) z^2 + \ldots$$

осуществляет конечное и однолистное отображение внутренности круга Q_0. Поэтому (пользуясь только что полученной оценкой коэфициента при z^2)

$$\left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \leqslant 2. \tag{16}$$

Пользуясь (15) и (16), получим:

$$\left|\frac{1}{c}\right| \leqslant 4, \quad |c| \leqslant \frac{1}{4}. \tag{17}$$

Следовательно, все точки круга $|w| < \frac{1}{4}$ являются внутренними точками преобразованной области, что и требовалось доказать.

Построим пример функции, удовлетворяющей условиям теоремы, для которой преобразованная область имеет граничную точку, лежащую на минимальном расстоянии от начала координат.

Знак равенства в соотношении (17) может иметь место, только если $|a_2| = 2$. Возьмем $a_2 = 2$, тогда вследствие соотношения (11) ряд, стоящий в правой части формулы (14), содержит только два первых члена. Возвращаясь к переменным w и z, мы получим из (14):

$$w' = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{\frac{1}{z}}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2}. \tag{18}$$

Теперь мы покажем, что эта функция осуществляет конечное и однолистное отображение внутренности Q_0, рассматриваемого в нашей теореме типа и что область, в которую она переводит внутренность Q_0, имеет граничную точку, лежащую на окружности $|w| = \frac{1}{4}$.

Функция (18) аналитична внутри Q_0, обращается в нуль в начале координат и имеет в начале координат производную, равную единице. Каждому значению w соответствуют два значения z. Причем, если одно из них равно z_1, то другое равно $\frac{1}{z_1}$. Следовательно, если одно из них лежит внутри круга Q_0, то другое лежит вне. Отсюда заключаем, что каждое значение w, которое функция принимает внутри Q_0, она принимает там только один раз; поэтому отображение однолистно. При $z = -1$ $w = -\frac{1}{4}$, т. е. имеется граничная точка, лежащая на окружности $|w| = \frac{1}{4}$.

Полагая в (18) $z = e^{i\theta}$ и изменяя θ от 0 до 2π, мы получим границу преобразованной области, а именно:

$$w = \frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} = \frac{1}{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2} = -\frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{19}$$

Таким образом функция (18) переводит внутренность Q_0 в плоскость с разрезом вдоль действительной оси от точки $-\frac{1}{4}$ до $-\infty$. Делая замену переменных $z = -e^{-i\alpha}z'$ и $w = -e^{-i\alpha}w'$, при которой сохраняются все интересующие нас свойства функции (18), мы получим функцию $w' = \frac{z'}{(1+e^{-i\alpha}z')^2}$ или в старых обозначениях

$$w = \frac{z}{(1+e^{-i\alpha}z)^2}. \tag{20}$$

Эта функция отображает взаимно-однозначно внутренность Q_0 на плоскость w, разрезанную вдоль радиуса от точки $w = \frac{1}{4}e^{-i\alpha}$, лежащей на окружности $|w| = \frac{1}{4}$, до бесконечности. Каждая точка w, для которой $|w| \geqslant \frac{1}{4}$, лежит на границе одной из областей, в которые переходит внутренность Q_0 посредством функций типа (20). Таким образом круг $|w| < \frac{1}{4}$ есть полное геометрическое место точек, покрываемых при всех возможных отображениях рассматриваемого в теореме типа.

Следствие. *Пусть функция $w=f(z)$ осуществляет конформное отображение внутренности круга $|z-a|<\varrho$ на конечную и однолистную область S. Тогда круг*

$$|w-f(a)|<\frac{|f'(a)|}{4}\varrho \tag{21}$$

лежит внутри области S.

Эта теорема легко приводится к только что доказанной посредством соответствующей замены переменных. Так как область S однолистна, то $f'(a)\neq 0$. Введем новые переменные:

$$W=\frac{w-f(a)}{\varrho f'(a)},\quad Z=\frac{z-a}{\varrho}.$$

Тогда функция

$$W=\frac{f(a+\varrho Z)-f(a)}{\varrho f'(a)} \tag{22}$$

преобразует внутренность круга $|Z|<1$ в конечную однолистную область на плоскости W и кроме того функция (22) удовлетворяет условиям доказанной теоремы в точке $Z=0$. Поэтому внутренность круга $|W|<\frac{1}{4}$ лежит внутри преобразованной области, и отсюда непосредственно следует, что круг (21) лежит внутри области S.

§ 75. Теорема искажения для круга. При конформном преобразовании посредством $f(z)$ бесконечно малые длины в окрестности точки z умножаются на $|f'(z)|$.

Мы сейчас найдем границы, в которых происходит искажение длин при отображениях рассмотренного в § 73 типа.

Теорема 6. *Пусть функция $w=f(z)$ отображает внутренность единичного круга Q_0 на конечную однолистную область и пусть при этом $f(0)=0$ и $f'(0)=1$. Тогда в каждой точке $z=re^{i\theta}$, лежащей внутри круга Q_0, имеет место неравенство:*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+r}{(1-r)^3}. \tag{23}$$

При этом не существует более точных границ для $|f'(z)|$, которые годились бы для всех функций рассматриваемого типа.

Пусть z_0 — какая-нибудь точка, которую будем считать фиксированной, лежащая внутри Q_0. Преобразуем круг Q_0 самого в себя так, чтобы точка z_0 перешла в начало координат. Соответствующее преобразование имеет вид:

$$z=\frac{t+z_0}{\bar{z}_0 t+1}.$$

Функция $f(z)=f\left(\frac{t+z_0}{\bar{z}_0 t+1}\right)$, рассматриваемая как функция t,

равна $f(z_0)$ при $t=0$ и производная от нее по t: $f'(z)\dfrac{1-z_0\bar{z}_0}{(z_0t+1)^2}$ равна $f'(z_0)(1-z_0\bar{z}_0)$ при $t=0$. Полагая

$$F(t)=\frac{f(z)-f(z_0)}{f'(z_0)(1-z_0\bar{z}_0)}, \tag{24}$$

мы получим функцию t, удовлетворяющую условиям теоремы 5, т. е. отображающую круг $|t|<1$ на некоторую конечную однолистную область и притом такую, что $F(0)=0$ и $F'(0)=1$.

Вычислим первые две производные функции $F(t)$:

$$F'(t)=\frac{f'(z)}{f'(z_0)(1-z_0\bar{z}_0)}\cdot\frac{1-z_0\bar{z}_0}{(\bar{z}_0t+1)^2}=\frac{f'(z)}{f'(z_0)(\bar{z}_0t+1)^2},$$

$$F''(t)=\frac{f''(z)(1-z_0\bar{z}_0)}{f'(z_0)(\bar{z}_0t+1)^4}-\frac{2\bar{z}_0f'(z)}{f'(z_0)(\bar{z}_0t+1)^3};$$

полагая здесь $t=0$ и имея в виду, что при $t=0$ z равно z_0, получим:

$$F(0)=0,\quad F'(0)=1,\quad F''(0)=\frac{f''(z_0)(1-|z_0|^2)}{f'(z_0)}-2\bar{z}_0.$$

Поэтому, разлагая $F(t)$ в ряд, получим:

$$F(t)=t+\frac{1}{2}\left[\frac{f''(z_0)(1-r_0^2)}{f'(z_0)}-2\bar{z}_0\right]t^2+\ldots \tag{25}$$

На основании неравенства (15) имеем:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z_0)(1-r_0^2)}{f'(z_0)}-2\bar{z}_0\right|\leqslant 2,$$

или

$$\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\frac{2\bar{z}_0}{1-r_0^2}\right|\leqslant\frac{4}{1-r_0^2}. \tag{26}$$

Пусть теперь z_0 изменяется вдоль радиуса, составляющего с действительной осью угол θ. Тогда

$$|dz_0|=|e^{-i\theta}dr_0|=dr_0,\quad \bar{z}_0\,dz_0=r_0e^{-i\theta}dz_0=r_0\,dr_0.$$

Имея в виду, что абсолютная величина интеграла не больше интеграла от абсолютной величины, мы получим из (26), интегрируя вдоль радиуса:

$$\left|\int_0^{z_0}\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}dz_0-\int_0^{0}\frac{2r_0\,dr_0}{1-r_0^2}\right|\leqslant\int_0^{r_0}\frac{4\,dr_0}{1-r_0^2},$$

и, следовательно,

$$|\ln f'(z_0)+\ln(1-r_0^2)|\leqslant 2\ln\frac{1+r_0}{1-r_0}.$$

В этой формуле все логарифмы за исключением $\ln f'(z_0)$ имеют действительные значения. Выражая $\ln f'(z_0)$ через его действительную и мнимую часть, получим:

$$\left|\ln|f'(z_0)| + \ln(1-r_0^2) + i\arg f'(z_0)\right| \leqslant \ln\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^2. \tag{27}$$

Поэтому для действительной части выражения, стоящего слева, имеем:

$$\left|\ln\left[|f'(z_0)|(1-r_0^2)\right]\right| \leqslant \ln\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^2$$

или

$$-\ln\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^2 \leqslant \ln\left[|f'(z_0)|(1-r_0^2)\right] \leqslant \ln\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^2,$$

откуда

$$\left(\frac{1-r_0}{1+r_0}\right)^2 \leqslant |f'(z_0)|(1-r_0^2) \leqslant \left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^2.$$

Отсюда непосредственно получается (23).

Тот факт, что более точных оценок не существует, подтверждается при рассмотрении в качестве функции $f(z)$ функции (18):

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad f'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

Для $z = \pm r$ функция $f'(z)$ принимает оба предельных значения. Из соотношения (27) получается также оценка для угла, на который поворачивается при отображении линейный элемент в точке z. А именно:

$$|\arg f'(z)| \leqslant 2\ln\frac{1+r}{1-r}. \tag{28}$$

Следствие. *Пусть $w=f(z)$ отображает круг $|z-a|<\varrho$ на конечную однолистную область. Тогда во всякой внутренней точке этого круга имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant \left|\frac{f'(z)}{f'(a)}\right| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}, \tag{29}$$

где

$$z = a + \varrho r e^{i\theta}.$$

Неравенства (29) получаются немедленно, если мы применим неравенство (23) к функции (22).

Теорема 7. *Пусть функция $w = f(z)$ отображает внутренность единичного круга Q_0 на конечную однолистную область* и пусть при этом $f(0)=0$ и $f'(0)=1$. *Тогда в каждой точке $z = re^{i\theta}$, лежащей внутри Q_0, имеют место неравенства:*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}. \tag{30}$$

При этом не существует более точных границ для $|f(z)|$, которые годились бы для всех функций рассматриваемого типа.

Умножая второе из неравенств (23) на $|dz|$ и интегрируя вдоль радиуса от начала координат до z, получаем:

$$\left|\int_0^z f'(z)\,dz\right| \leqslant \int_0^r \frac{1+r}{(1-r)^3}\,dr$$

или

$$|f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Для доказательства первого из неравенств (30) заметим сначала следующее: $|f(z)|$ равняется длине отрезка L, соединяющего точку $w=0$ с точкой $w=f(z)$ на плоскости w. Если $|f(z)|<\frac{1}{4}$, то отрезок L лежит в отображенной области и является образом некоторой кривой C, лежащей в круге Q_0 и соединяющей начало координат с точкой z. Поэтому длина L может быть выражена следующим образом:

$$|f(z)| = \int_C |f'(z)|\,|dz|.$$

Конечные суммы, пределом которых является этот интеграл, состоят из неотрицательных слагаемых; поэтому замена слагаемых в этих суммах меньшими числами влечет за собой уменьшение самих сумм. С другой стороны, на кривой C имеем:

$$|dz| = |e^{i\theta}dr + ire^{i\theta}d\theta| = |dr + ir\,d\theta| \geqslant |dr|.$$

Поэтому, принимая во внимание (23), получаем:

$$|f(z)| \geqslant \int_C \frac{1-r}{(1+r)^3}\,|dr| \geqslant \int_0^r \frac{1-r}{(1+r)^3}\,dr = \frac{r}{(1+r)^2}.$$

Если $|f(z)| \geqslant \frac{1}{4}$, то первое из неравенств (30) получаем сразу, так как $\frac{1}{4} > \frac{r}{(1+r)^2}$.

Далее очевидно, что функция

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

привимает оба предельных значения; поэтому оценки более точные, чем (30), невозможны.

Непосредственно из доказанного видно, что функция $w=f(z)$ отображает круг $|z|<\varrho<1$ на некоторую область, граница которой лежит в круговом кольце:

$$\frac{\varrho}{(1+\varrho)^2} \leqslant |w| \leqslant \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2},$$

причем определение этого кольца не зависит от индивидуальных свойств функций нашего типа.

Следствие. *Пусть $w = f(z)$ отображает круг $|z-a|<\varrho$ на конечную однолистную область. Тогда для каждой точки, лежащей внутри этого круга, выполняется следующее неравенство:*

$$\frac{r}{(1+r)^2}\varrho|f'(a)| \leqslant |f(z)-f(a)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}\varrho|f'(a)|, \tag{31}$$

где

$$z = a + r\varrho e^{i\theta}.$$

Справедливость этого неравенства легко доказать, применяя к функции (22) теорему (7).

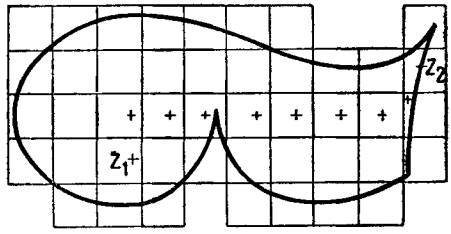
§ 76. Общая теорема искажения. Сейчас мы выведем теорему искажения для областей более общего характера.

Теорема 8. *Пусть Σ' конечная однолистная область и Σ подобласть области Σ', с границей, состоящей из внутренних точек Σ'. Пусть, далее, функция $w = f(z)$ отображает Σ' на конечную однолистную область.*

Тогда существует постоянное число M, зависящее от Σ' и Σ, но не зависящее от $f(z)$, такое, что

$$\frac{1}{M} < \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| < M \tag{32}$$

для любых z_1 и z_2, лежащих внутри или на границе Σ.



Черт. 50.

Так как область Σ вместе с границей состоит из внутренних точек Σ', то существует число $d>0$ такое, что круг Q радиуса d с центром в любой внутренней или граничной точке a области Σ лежит внутри Σ'. При отображении круг Q переходит в конечную однолистную область. Следовательно, на основании (29) в любой точке z, расстояние которой от a не превосходит rd, где $r<1$, выполняется неравенство:

$$\left|\frac{f'(z)}{f'(a)}\right| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}. \tag{33}$$

Проведем на плоскости z системы прямых, параллельных действительной и мнимой осям и расположенных на расстоянии $h=\frac{1}{3}d$ друг от друга: при этом плоскость разделится на квадраты (черт. 50). Так как Σ ограниченная область, то ее точки содержатся лишь в конечном числе N этих квадратов. Если точка z лежит в том же квадрате, в котором лежит a, или в одном из четырех квадратов, смежных с ним, то

$$|z-a| \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{5}\cdot d < \frac{3}{4}d$$

и поэтому на основании (33) в точке z будем иметь:

$$\left|\frac{f'(z)}{f'(a)}\right| < \frac{1+\frac{3}{4}}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^3} = m. \tag{34}$$

Пусть теперь z_1, z_2 произвольно взятые точки области Σ.

Вследствие связности области Σ можно построить такую цепь из точек Σ:

$$z_1,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ z_2, \tag{35}$$

чтобы каждые две соседние точки этой цепи (т. е. точки с индексами, отличающимися на единицу) лежали в соседних квадратах, (исключая случай, когда z_1 и z_2 обе лежат в одном и том же квадрате) и чтобы число $n+1$ точек в этой цепи не превосходило $N+1$. Поэтому

$$\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| = \left|\frac{f'(z_1)}{f'(\xi_1)}\right| \cdot \left|\frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)}\right| \cdots \left|\frac{f'(\xi_{n-1})}{f'(z_2)}\right| < m^n \leqslant m^N.$$

Введем обозначение $m^N = M$. Число M зависит исключительно от областей Σ' и Σ, а следовательно, второе из неравенств (32) доказано. Переставляя z_1 и z_2 в неравенстве $\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| < M$ и имея в виду, что z_1 и z_2 взяты произвольно, получаем первое из неравенств (32). Заметим, что в проведенном доказательстве мы не предполагали односвязности ни для области Σ, ни для Σ'.

Настоящая теорема может быть распространена на случай, когда Σ есть произвольное замкнутое множество (оно может быть и несвязным), состоящее из внутренних точек области Σ'. В самом деле, множество Σ может быть покрыто связной областью, которая вместе с границей состоит из внутренних точек области Σ'. Теорема может быть также легко распространена на случай, когда Σ' имеет конечное число листов; при этом, однако необходимо предположить, что ни одна из точек ветвления не содержится внутри Σ'.

Теорема 9. *В условиях теоремы 8 существует не зависящее от функции $f(z)$ постоянное число L, такое, что*

$$|f(z_2) - f(z_1)| < L\,|f'(z_3)|, \tag{36}$$

где z_1, z_2, z_3 произвольные внутренние или граничные точки области Σ.

Для доказательства воспользуемся построенной ранее точечной цепью (35). Из неравенств (31) и (32) получаем:

$$|f(\xi_1) - f(z_1)| < \frac{\frac{3}{4}}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} d \cdot |f'(z_1)| < \frac{\frac{3}{4} \cdot d \cdot M}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} |f'(z_3)| = m'\,|f'(z_3)|;$$

аналогично:

$$|f(\xi_2)-f(\xi_1)|<m'|f'(z_3)|,\ \ldots,\ |f(z_2)-f(\xi_{n-1})|<m'|f'(z_3)|,$$

откуда

$$|f(z_2)-f(z_1)|\leqslant|f(\xi_1)-f(z_1)|+|f(\xi_2)-f(\xi_1)|+\ldots$$
$$\ldots+|f(z_2)-f(\xi_{n-1})|<nm'|f'(z_3)|\leqslant Nm'|f'(z_3)|.$$

Введем обозначение: $L=Nm'$. Величина L зависит только от областей Σ' и Σ. Следовательно, (36) доказано.

§ 77. Об одном приложении интеграла Пуассона. Пусть функция $f(z)=U_z+iV_z$ аналитична внутри круга Q радиуса ϱ с центром в начале координат и непрерывна на окружности этого круга. Пусть $z=re^{i\theta}$ и пусть $t=\varrho e^{i\psi}$ есть точка окружности Q. Интеграл Пуассона может быть представлен в одной из следующих форм:

$$U_z=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U_t\frac{\left(1-\frac{z\bar z}{\varrho^2}\right)d\psi}{\left(1-\frac{z\bar t}{\varrho^2}\right)\left(1-\frac{\bar z t}{\varrho^2}\right)},\tag{37}$$

$$U_z=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U_t\frac{(\varrho^2-r^2)\,d\psi}{\varrho^2-2\varrho r\cos(\theta-\psi)+r^2}.\tag{38}$$

Это может быть доказано следующим образом: рассмотрим интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_Q\frac{f(t)\,dt}{(t-z)\left(1-\frac{\bar z t}{\varrho^2}\right)}.$$

Функция, стоящая под знаком интеграла, имеет в точке $t=z$ простой полюс и никаких других особенностей в Q не имеет. Поэтому согласно теории вычетов

$$I=\left[\frac{f(t)}{1-\frac{\bar z t}{\varrho^2}}\right]_{t=z}=\frac{f(z)}{1-\frac{\bar z z}{\varrho^2}}=\frac{U_z+iV_z}{1-\frac{\bar z z}{\varrho^2}}.$$

С другой стороны, так как $dt=i\varrho e^{i\psi}d\psi=it\,d\psi$, то наш интеграл может быть представлен в виде:

$$I=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(t)\,t\,d\psi}{(t-z)\left(1-\frac{\bar z t}{\varrho^2}\right)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{U_t+iV_t}{\left(1-\frac{z}{t}\right)\left(1-\frac{\bar z t}{\varrho^2}\right)}\,d\psi,$$

но

$$1-\frac{z}{t}=1-\frac{z\bar t}{t\bar t}=1-\frac{z\bar t}{\varrho^2}.$$

Знаменатель под знаком последнего интеграла равен произведению сопряженных величин, и следовательно, представляет собой действительную величину. Сравнивая действительные части в двух выражениях для I, получим (37).

Полагая в (37) $z=0$, получаем:

$$U_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_t\, d\psi. \tag{39}$$

Предположим теперь, что всюду в круге $QU_z \geqslant 0$. Пусть точка z лежит внутри или на окружности круга Q_λ, концентрического с Q и с радиусом $\lambda\varrho$, меньшим, чем ϱ. Тогда на окружности Q_λ будем иметь:

$$1-\frac{z\bar{z}}{\varrho^2}=1-\lambda^2, \qquad \left|\frac{z\bar{t}}{\varrho^2}\right|=\frac{\varrho\cdot\lambda\varrho}{\varrho^2}=\lambda, \qquad \left|1-\frac{z\bar{t}}{\varrho^2}\right|\geqslant 1-\lambda.$$

На основании (37) и (39) получаем:

$$U_z \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_t \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda)^2}\, d\psi,$$

$$U_z \leqslant \frac{1+\lambda}{1-\lambda} U_0. \tag{40}$$

Так как U_z гармонична, очевидно, что это же неравенство справедливо и внутри Q_λ.

Мы используем этот результат следующим образом: пусть $f(z)$ помимо ранее высказанных условий удовлетворяет еще условию $|f(z)|\geqslant 1$ во всех точках Q. Тогда функция, определенная равенством:

$$\ln f(z)=\ln f(0)+\int_0^z d\ln f(z)=\ln f(0)+\int_0^z \frac{f'(z)\,dz}{f(z)},$$

в котором в качестве $\ln f(0)$ взято какое-нибудь из значений $\ln f(0)$, аналитична внутри Q и непрерывна на его окружности. Действительная часть этой функции, т. е. $\ln|f(z)|$, принимает в Q только положительные или равные нулю значения.

Поэтому, если z находится в Q_λ, то на основании (40) получаем:

$$\ln|f(z)|\leqslant\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\ln|f(0)|,$$

откуда

$$|f(z)|\leqslant|f(0)|^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}. \tag{41}$$

Применяя простой перенос начала координат, мы убеждаемся, что соотношение (41) справедливо также в случае круга Q с центром в точке a; т. е. если функция $f(z)$ удовлетворяет выска-

занным ранее условиям в круге Q с центром в a и если Q_λ есть концентрический круг с радиусом, равным $\lambda\varrho$ (где $\lambda < 1$), то

$$|f(z)| \leqslant |f(a)|^{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \tag{42}$$

в каждой точке z круга Q.

Следующая теорема нами будет многократно использована в дальнейшем в доказательствах сходимости.

Теорема 10. *Пусть Σ' однолистная конечная область. Пусть, далее, Σ подобласть области Σ' с границей, состоящей из внутренних точек области Σ'. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области Σ', ограничена: $|f(z)| < C$, и не обращается в нуль. Тогда существуют положительные постоянные K_1, K_2, K, такие, что*

$$K_1 |f(z_2)|^K \leqslant |f(z_1)| \leqslant K_2 |f(z_2)|^{\frac{1}{K}} \tag{43}$$

для любых точек z_1, z_2, лежащих в области Σ или на ее границе, причем входящие в неравенство величины K_1, K_2, K зависят от Σ, Σ', C, но не зависят от $f(z)$.

Функция $F(z) = \dfrac{C}{f(z)}$ аналитична в Σ' и кроме того $|F(z)| \geqslant 1$.

Пользуясь точечной цепью (35) и применяя (42), получаем:

$$|F(\xi_1)| \leqslant |F(z_1)|^\mu,$$

где

$$\mu = \frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}};$$

аналогично:

$$|F(\xi_2)| \leqslant |F(\xi_1)|^\mu \leqslant |F(z_1)|^{\mu^2}$$

и т. д.; окончательно получим:

$$|F(z_2)| \leqslant |F(z_1)|^{\mu^n} \leqslant |F(z_1)|^{\mu^N} = |F(z_1)|^K,$$

где $K = \mu^N$. Наконец, пользуясь соотношением

$$F(z) = \frac{C}{f(z)},$$

будем иметь:

$$|f(z_1)| \leqslant C^{1-\frac{1}{K}} \cdot |f(z_2)|^{\frac{1}{K}},$$

и таким образом второе из неравенств (43) доказано. Меняя местами z_1 и z_2 и делая необходимые упрощения, получим второе из неравенств (43). Отметим, что величина K не зависит от C.

§ 78. Об отображении однолистной односвязной области на круг. Процесс итерации. Однолистная односвязная область может представлять собой: (*a*)—полную плоскость, (*b*)—полную плоскость без одной точки (которая в этом случае будет единственной граничной точкой) или (*c*)—некоторую область, граница которой содержит бесконечно много точек.

В двух первых случаях (*a*) и (*b*) отображение области на круг невозможно. В самом деле, допустим, что посредством функции $w=f(z)$ выполняется отображение области (*a*) на единичный круг Q_0 с центром в начале координат (если возможно отображение на какой-нибудь круг, то возможно отображение и на Q_0); так как тогда $|f(z)|\leqslant 1$ во всей плоскости, то по теореме Лиувилля $f(z)\equiv\text{const.}$, что противоречит сделанному допущению. Если $w=f(z)$ отображает на Q_0 область (*b*), то в окрестности ее граничной точки $|f(z)|\leqslant 1$, а следовательно, $f(z)$ аналитична в этой точке, если ее там соответствующим образом определить. Следовательно, как и раньше, $f(z)\equiv\text{const.}$, что невозможно.

Теорема 11. *Любая однолистная и односвязная область S, граница которой содержит более чем одну точку, может быть конформно отображена на подобласть единичного круга Q_0.* Допустим сначала, что существует точка z_0, не лежащая ни внутри, ни на границе рассматриваемой области S. Очевидно, что в этом случае можно построить круг Q' с центром в точке z_0 настолько малого радиуса, чтобы ни одна из точек, лежащих внутри Q' или на его окружности, не была ни внутренней, ни граничной точкой S. Тогда линейное преобразование $z'=T(z)$, переводящее окружность Q' в окружность Q_0 и внешность круга Q' во внутренность Q_0, отображает S на область S_0, лежащую внутри круга Q_0.

Однако может случиться, что любая точка плоскости является внутренней или граничной точкой области S. Это произойдет, например, в случае если область S есть вся плоскость за вычетом положительной части действительной оси. Итак, отбросим предположение, что существует точка z_0, лежащая вне S. Пусть α и β две граничных точки области S. Рассмотрим отображение области S посредством функции

$$z'=\sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}} \tag{44}$$

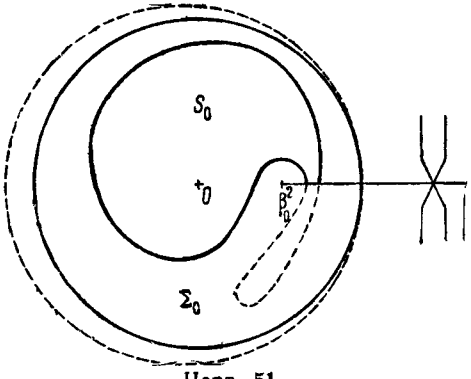
или функции $z'=\sqrt{z-\alpha}$ (в случае если $\beta=\infty$).

Каждая из этих функций отображает двулистную поверхность Σ с линией ветвления, соединяющей α и β на всю плоскость z'. Так как S есть подобласть Σ, то она отображается на однолистную область S', покрывающую только часть плоскости z'. Если точка z_1 лежит внутри области S, то точка P с тем же самым аффиксом $z=z_1$, лежащая на другом листе поверхности Σ, является внешней по отношению к S точкой поверхности Σ.

Очевидно, что при отображении посредством функции (44) P перейдет в точку, не лежащую ни внутри, ни на границе области S'. Теперь для доказательства теоремы достаточно отобразить S'

на область, лежащую внутри Q_0, что может быть выполнено методом, примененным вначале доказательства.

Займемся решением задачи об отображении на круг Q_0 однолистной и односвязной области S_0, лежащей внутри этого круга Q_0. Можно предположить, что начало координат лежит внутри области S_0. В случае если бы это было не так, мы бы сделали линейное преобразование, переводящее круг Q_0 в самого себя и какую-нибудь внутреннюю точку области S_0 в начало координат. Для решения нашей задачи воспользуемся следующим методом: отобразим сначала область S_0 на некоторую область S_1, лежащую внутри Q_0 с площадью большей, чем площадь S_0. Затем отобразим область S_1 на область S_2, тоже лежащую внутри Q_0 с площадью большей, чем площадь S_1, и т. д. Применяя соответствующим образом этот процесс, мы получим в пределе отображение области S_0 на Q_0.



Черт. 51.

Пусть β_0^2 внутренняя точка круга Q_0, лежащая вне или на границе области S_0 (мы пользуемся квадратом для того, чтобы впоследствии обойти радикалы). Построим двулистную поверхность с точкой ветвления в β_0^2, не имеющую других точек ветвления в области Q_0 (черт. 51). Обозначим через Σ_0 часть этой поверхности, которая лежит внутри двойного круга, вырезаемого на обоих листах окружностью $|z|=1$. Расположим S_0 на этой поверхности таким образом, чтобы часть S_0, содержащая начало координат и некоторую его окрестность, оказалась на верхнем листе. S_0 является подобластью Σ_0. Отобразим теперь Σ_0 на внутренность однолистного круга Q_0 так, чтобы начало координат, лежащее на верхнем листе Σ_0, перешло в центр круга Q_0. Этого мы достигнем, применяя последовательно преобразования:

$$s=\frac{z-\beta_0^2}{-\beta_0^2 z+1},\quad t=\sqrt{s},\quad z_1=\frac{t+c}{\bar{c}t+1}, \tag{45}$$

причем $1-c\bar{c}>0$ (величина c будет определена в дальнейшем). В самом деле, первое преобразование отображает Σ_0 на двулистную поверхность, ограниченную окружностью $|s|=1$ [уравнение (47) § 12], с точкой ветвления в начале координат. Второе отображает эту последнюю поверхность на однолистный круг $|t|<1$ и, наконец, третье переводит этот круг в круг $|z_1|<1$. Полученное отображение всюду конформно за исключением точки ветвления $z=\beta_0^2$. Отсюда следует, что отображение подобласти S_0 конформно во всех точках без исключения. Покажем теперь, как нужно избрать величину c, для того чтобы начало

координат, лежащее в верхнем листе поверхности Σ_0, осталось неподвижным. Когда $z=0$, то $t=\pm i\sqrt{\beta_0^2}$. Выберем квадратный корень так, чтобы точке $z=0$, лежащей в верхнем листе, соответствовало значение $t=i\beta_0$. Так как z_1 должно быть равно нулю, когда $t=i\beta_0$, то, следовательно, $c=-i\beta_0$.

Выражая z через z_1, получим:

$$z=z_1\cdot\frac{z_1+\overline{B}_0}{B_0z_1+1},\quad \text{где}\quad B_0=-\frac{2i\overline{\beta}_0}{1+\beta_0\overline{\beta}_0}. \tag{46}$$

Далее предположим, что производная отображающей функции имеет действительное и положительное значение в начале координат. Это требование, исключающее поворот области около начала, может быть удовлетворено умножением одной из частей (46) на $e^{i\theta}$. Это умножение приводит к вращению около начала до выполнения последовательности преобразований (45) и не изменяет других свойств отображения. Из (46) получаем:

$$\left(\frac{dz}{dz_1}\right)_{z_1=0}=\overline{B}_0=\frac{2i\beta_0}{1+\beta_0\overline{\beta}_0}.$$

Производная будет иметь действительное и положительное значение, если мы умножим правую часть уравнения (46) на число $\frac{-i\overline{\beta}_0}{\sqrt{\beta_0\overline{\beta}_0}}$, абсолютная величина которого равна единице. Отображающая функция будет иметь вид:

$$z=-i\frac{\beta_0}{\sqrt{\beta_0\overline{\beta}_0}}\cdot z_1\frac{z_1+B_0}{B_0z_1+1}. \tag{47}$$

Таким образом нами построена функция, отображающая конформно область S_0 на некоторую однолистную область S_1, лежащую внутри круга Q_0 на плоскости z_1. Обозначим эту функцию через $z_1=f_1(z)$.

Важным свойством построенного отображения области S_0 является то, что расстояние от начала координат до каждой точки (за исключением начала координат) при этом отображении возрастает. Это непосредственно следует из леммы Шварца (теорема 1). Посредством функции (47) круг Q_0, лежащий на плоскости z_1, отображается на двулистный круг $|z|\leqslant 1$. Таким образом $|z(z_1)|\leqslant 1$, а следовательно, применяя, лемму Шварца, получим $|z|\leqslant|z_1|$. Поэтому если h_0 кратчайшее расстояние от начала координат до границы S_0 и h_1 кратчайшее расстояние от начала до границы S_1, то $h_1>h_0$.

Возьмем теперь точку β_1^2, лежащую внутри Q_0, но не содержащуюся в S_1, и построим функцию, аналогичную (47), отображающую S_1 на некоторую область S_2 Затем отобразим таким же образом S_2 на S_3 и т. д. Функция, отображающая область S_n, лежащую на плоскости z_n, на область S_{n+1} на плоскости z_{n+1}, будет иметь вид:

$$z_n=-\frac{i\overline{\beta}_n}{\sqrt{\beta_n\overline{\beta}_n}}\cdot z_{n+1}\frac{z_{n+1}+\overline{B}_n}{\beta_n z_{n+1}+1},\quad B_n=\frac{-2i\overline{\beta}_n}{1+\beta_n\overline{\beta}_n}. \tag{48}$$

Если z_n и z_{n+1} соответствующие друг другу точки областей S_n и S_{n+1}, то $|z_{n+1}| > |z_n|$ (исключая конечно случай, когда $z_n = 0$, что влечет за собой $z_{n+1} = 0$). Если обозначить через h_n кратчайшее расстояние от границы S_n до начала координат, то

$$h_{n+1} > h_n. \tag{49}$$

Точка β_n^2 находится внутри Q_0, но во-вне или на границе области S_n. Наложим на β_n^2 еще одно дополнительное ограничение, а именно: поставим выбор β_n^2 в зависимость от h_n таким образом, чтобы стремление β_n^2 к окружности Q_0 могло происходить только при условии, что h_n стремится к единице. Это условие будет выполнено, если мы положим

$$|\beta_n^2| < \frac{1+h_n}{2}. \tag{50}$$

[В частности, условие (50) выполняется, если β_n^2 есть точка границы S_n, лежащая на кратчайшем расстоянии от начала координат; в этом случае $|\beta_n^2| = h_n$.]

Переменная z_n, к которой мы приходим после n-кратного применения процесса, является функцией z, которую мы обозначим через

$$z_n = f_n(z). \tag{51}$$

Эта функция отображает конформно область S_0 на S_n.

§ 79. Доказательство сходимости. Мы теперь докажем:

1) что $\lim h_n = 1$, т. е. что ширина кругового кольца, ограниченного окружностями Q_0 и $|z_n| = h_n$, в котором лежит граница области S_n, стремится к нулю при неограниченном росте n;

2) что при неограниченном возрастании n последовательность функций $f_n(z)$ сходится к некоторой функции $f(z)$, аналитической в области S_0;

3) что функция $z' = f(z)$ конформно отображает внутренность области S_0 на внутренность единичного круга Q_0.

1) *Стремление границы области S_n к окружности Q_0.* Так как h_n, возрастая с ростом n, остается меньше единицы, то h_n стремится к определенному пределу $h \leqslant 1$. Мы докажем, что невозможно, чтобы этот предел был меньше единицы.

На основании (48) производная $\frac{dz_n}{dz_{n+1}}$ в начале координат может быть представлена в виде:

$$\left(\frac{dz_n}{dz_{n+1}}\right)_0 = -\frac{i\overline{\beta_n}}{\sqrt{\beta_n\overline{\beta_n}}} \cdot \overline{B}_n = \frac{2\sqrt{\beta_n\overline{\beta_n}}}{1+\beta_n\overline{\beta_n}} = \frac{2r_n}{1+r_n^2},$$

где $r_n = |\beta_n|$. Если $h < 1$, то r_n все время остается меньшим некоторого числа, которое в свою очередь меньше единицы:

$$r_n < 1 - \eta, \qquad \eta > 0.$$

Поэтому

$$\left(\frac{dz_{n+1}}{dz_n}\right)_0 = \frac{1+r_n^2}{2r_n} = 1 + \frac{(1-r_n)^2}{2r_n} > 1+\varepsilon, \tag{52}$$

где $\varepsilon = \frac{\eta^2}{2}$. Далее получаем:

$$f_n'(0) = \left(\frac{dz_1}{dz}\right)_0 \left(\frac{dz_2}{dz_1}\right)_0 \cdots \left(\frac{dz_n}{dz_{n-1}}\right)_0 > (1+\varepsilon)^n. \tag{53}$$

Рассмотрим теперь отображение посредством $f_n(z)$ круга $|z| < h_0$, лежащего в области S_0. Пользуясь теоремой 3, мы заключаем, что площадь A_n отображенной области, лежащей в области S_n, удовлетворяет неравенству:

$$A_n \geqslant \pi |f_n'(0)|^2 h_0^2 > \pi (1+\varepsilon)^{2n} h_0^2.$$

При достаточно большом n величина $(1+\varepsilon)^{2n}$, а следовательно, и величина A_n может быть сделана как угодно большой. Но это невозможно, так как область, в которую переходит при отображении рассматриваемый круг, лежит внутри Q_0, а следовательно, ее площадь меньше площади Q_0. Итак, предположение, что $h < 1$, приводит к противоречию; следовательно, $h = 1$.

2) *Сходимость.* Для доказательства сходимости $f_n(z)$ и того, что предельная функция аналитична в S_0, достаточно доказать равномерную сходимость этой последовательности в любой области Σ, лежащей вместе с границей внутри S_0 и содержащей начало координат. Таким образом нам нужно доказать, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в области Σ выполняется неравенство:

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon \tag{54}$$

при достаточно большом n и произвольном положительном p.

В начале координат производная функция $f_n(z)$, т. е. $f_n'(0) = \left(\frac{f_n(z)}{z}\right)_{z=0}$ положительна по построению; кроме того, она больше единицы и растет при возрастании n. В самом деле, на основании (52) и (53)

$$f'_{n+1}(0) = f_n'(0)\left(\frac{dz_{n+1}}{dz_n}\right)_0 = \left[1 + \frac{(1-r_n)^2}{2r_n}\right] f_n'(0) > f_n'(0). \tag{55}$$

Кроме того, в конце 1) было установлено, что $f_n'(0)$ ограничена; следовательно, $f_n'(0)$ стремится к определенному пределу при n, стремящемся к ∞, т. е. каково бы ни было $\eta > 0$,

$$|f_{n+p}'(0) - f_n'(0)| < \eta \tag{56}$$

для достаточно большого n и для произвольного целого положительного p.

Неравенство, которое мы хотим доказать, получится сразу, если применить теорему (10) к функции $\frac{f_{n+p}(z) - f_n(z)}{z}$. То, что эта функция не обращается в нуль в начале координат, следует из (55); она не обращается в нуль и в других точках области S_0,

так как $|f_{n+p}(z)| > |f_n(z)|$. Нетрудно показать, что эта функция ограничена. Обозначим через Σ' область, содержащую область Σ и ее границу и лежащую, в свою очередь, вместе с границей в области S_0. Функция $\frac{f_{n+p}(z)-f_n(z)}{z}$ аналитична внутри и на границе области Σ'. А поэтому модуль этой функции принимает наибольшее значение на границе Σ'. Но, с другой стороны, на границе имеют место неравенства:

$$|f_{n+p}(z)| \leqslant 1, \quad |f_n(z)| \leqslant 1$$

и

$$|z| \geqslant h',$$

где h' кратчайшее расстояние от начала координат до границы Σ'. Отсюда получаем для любой точки z из Σ' и для каких угодно h и p

$$\left|\frac{f_{n+p}(z)-f_n(z)}{z}\right| < \frac{2}{h'}.$$

Таким образом условия теоремы (10) выполнены, и поэтому, выбирая $z_1 = z$ и $z_2 = 0$, будем иметь:

$$\left|\frac{f_{n+p}(z)-f_n(z)}{z}\right| \leqslant K_2 [f'_{n+p}(0) - f_n'(0)]^{\frac{1}{K}}.$$

Здесь K_2 и K не зависят от n и p. Неравенство справедливо для всех точек z области Σ. Выбирая теперь n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство (56), получим в Σ:

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| \leqslant K_2 \cdot \eta^{\frac{1}{K}} \cdot |z| \leqslant K_2 \eta^{\frac{1}{K}}. \tag{57}$$

При подходящем выборе η левая часть этого неравенства может быть сделана меньше ε, и этим самым (54) доказано.

Из равномерной сходимости $f_n(z)$ в области Σ следует, что предельная функция $f(z)$ аналитична в Σ. Так как какова бы ни была точка z области S_0, всегда можно выбрать область Σ так, чтобы z лежала внутри Σ, то $f(z)$ аналитична всюду внутри S_0.

3) *Отображение.* Для того чтобы доказать, что функция $z' = f(z)$ отображает внутренность круга S_0 на внутренность круга Q_0, мы покажем, что какова бы ни была точка α, лежащая внутри Q_0, функция $f(z)$ принимает в области S_0 значение α один и только один раз. Доказательство этого будет основано на теореме Гурвица[1]), которую мы сейчас докажем:

Теорема 12. *Пусть $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ последовательность функций, аналитических в области S и непрерывных на ее границе, и пусть эта последовательность сходится равномерно в замкнутой области S к предельной функции $f(z)$. Предположим кроме того, что $f(z)$ не обращается в нуль на границе области S. Тогда, начиная с некоторого n, $n > N$, каждая из функций $f_n(z)$ имеет в области S столько же нулей, сколько их имеет там предельная функция $f(z)$.*

[1]) Hurwitz, A., Math. Ann., т. 33, стр. 248, 1888.

Так как на границе области S функция $f(z)$ не обращается в нуль, то можно построить область S^*, ограниченную кусочно гладкой границей C, лежащую целиком вместе с границей внутри S, и притом такую, чтобы во всякой точке области S, лежащей вне S^* или на C, имело место неравенство $|f(z)|>K>0$. Но так как последовательность равномерно сходится, то для достаточно большого n, $n>N'$, будем иметь:

$$|f(z)-f_n(z)|<\frac{K}{2}$$

всюду в S и, в частности, для точек, лежащих на C или во-вне S^*. Поэтому не только $f(z)$, но и $f_n(z)$ $(n>N')$ не имеет нулей на C и во-вне S^*. На C последовательность $f_n'(z)$ равномерно сходится к $f'(z)$.

Число нулей функций $f(z)$ и $f_n(z)$ $(n>N')$, расположенных внутри S^*, может быть представлено в виде:

$$m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$$

и

$$m_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f_n'(t)}{f_n(t)}\,dt;$$

следовательно,

$$m-m_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left[\frac{f'(t)}{f(t)}-\frac{f_n'(t)}{f_n(t)}\right]dt.$$

Так как последовательность $\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$ равномерно сходится на C, то, начиная с некоторого $n>N\geqslant N'$, будем иметь:

$$|m-m_n|<\frac{1}{2\pi L}\int\limits_C |dt|=\frac{L}{2\pi L}<1,$$

причем через L здесь обозначена длина C. Но $|m-m_n|$ целое число и поэтому может быть меньше единицы только будучи нулем. Отсюда $m=m_n$ для $n>N$ ч. и т. д.

Рассмотрим теперь точку a, лежащую внутри Q_0. Пусть $h_m>|a|$ и пусть функция $z_m=f_m(z)$ отображает S_0 на S_m. Так как при $n>m$ область S_n также содержит a и так как, с другой стороны, рассматриваемое отображение взаимно однозначно, то $f_n(z)$ принимает в области S_0 значение a и притом только один раз. Пусть Q_m круг радиуса λ с центром в начале координат, причем $|a|<\lambda<h_m$. Очевидно, что Q_m лежит в S_m и содержит точку a. Обозначим через C_m лежащую в области S_0 кривую, которая переходит при отображении посредством $f_m(z)$ в окружность Q_m, и через C некоторую другую кривую, лежащую в области S_0 и заключающую C_m. Функции $f_n(z)-a$ удовлетворяют в области ограниченной кривой C условиям теоремы 12. Выполнение первых

условий теоремы очевидно, нетрудно показать также, что предельная функция $f(z)-a$ не обращается в нуль на C. В самом деле, функция $z=f_n(z)$ при $n \geqslant m$ отображает кривую C на кривую, заключающую Q_m, поэтому для точек кривой C $|f_n(z)-a| > \lambda - |a|$ и поэтому для предельной функции получим: $|f(z)-a| \geqslant \lambda - |a|$ на кривой C. На основании теоремы 12 заключаем, что функции $f_n(z)-a$ и $f(z)-a$ для достаточно больших n имеют одинаковое число нулей в области, ограниченной кривой C. Но $f_n(z)-a$ обращается в нуль один раз в этой области; следовательно, $f(z)-a$ обращается там в нуль и притом только один раз. Наконец, так как какова бы ни была точка z области S_0, всегда можно выбрать кривую C, так, чтобы точка z содержалась внутри области, ограниченной этой кривой, то $f(z)$ принимает в области S_0 значение a один и только один раз.

Очевидно, что $f(z)$ не принимает в области S_0 значений, лежащих на окружности Q_0 или вне круга Q_0. В самом деле, в S_0 имеем $|f_n(z)| < 1$ и, следовательно, переходя к пределу, $|f(z)| \leqslant 1$. Если бы $|f(z)|=1$ во внутренней точке области S_0, то в любой окрестности этой точки содержались бы значения z, в которых было бы $|f(z)|>1$, но это невозможно. Таким образом функция $z'=f(z)$ осуществляет конформное отображение S_0 на Q_0.

Таким образом мы доказали следующую важную теорему[1]:

Теорема 13. *Внутренность любой односвязной однолистной области, граница которой содержит больше чем одну точку, может быть конформно отображена на внутренность единичного круга.*

После того как установлено, что существует функция, отображающая данную область на Q_0, естественно поставить вопрос о существовании других функций, осуществляющих то же отображение. Следующая общая теорема является ответом на этот вопрос.

Теорема 14. *Если функция $z'=f(z)$ конформно отображает область S на единичный круг Q_0, то всякая другая функция, осуществляющая то же отображение, имеет вид:*

$$Z=\frac{af(z)+\bar{c}}{cf(z)+\bar{a}}, \quad a\bar{a}-c\bar{c}=1. \tag{58}$$

Пусть функция $Z=F(z)$ дает конформное отображение S на Q_0. Тогда Z является функцией переменного z', $Z=\varphi(z')$, отображающей Q_0 взаимно-однозначно и конформно на самого себя. В самом деле, каждому z' из Q_0 соответствует точка в S, а этой последней соответствует, в свою очередь, точка Z из Q_0. Обратно, каждому Z из Q_0 соответствует точка z' из того же Q_0. Далее, окрестность точки z' конформно отображается на окрестность точки z, а эта последняя отображается конформно на

[1]) Эта теорема впервые была высказана Риманом в его диссертации в 1851 г. Первое доказательство для произвольной односвязной области было дано Осгудом (Trans. Amer. Math. Soc., т. 1, стр. 310—314, 1900), который доказал существование функции Грина для такой области. Доказательство, изложенное в тексте, было опубликовано Кёбе (Gött. Nachr., 1912).

окрестность точки Z. Но из теоремы 24 § 12, в которой был выведен наиболее общий вид функции, отображающей Q_0 на самого себя, мы заключаем, что $Z = \frac{az' + \bar{c}}{cz' + \bar{a}}$, где $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$. Обратно, всякая функция вида (58) отображает S на Q_0. В самом деле, преобразование (58) равносильно двум последовательно выполненным преобразованиям, первое из которых $z' = f(z)$ переводит S в Q_0, а второе — линейное преобразование, переводящее круг Q_0 в самом себя.

Следствие. *Если область S может быть конформно отображена на круг Q_0, то среди функций, производящих это отображение, существует одна и притом единственная функция, которая переводит точку z_0, лежащую внутри S, в начало координат и направление, заданное в этой точке, в направление, заданное в начале координат.*

Пусть $z' = f(z)$ функция, отображающая S на Q_0. Постоянные в выражении (58) могут быть выбраны так, чтобы $z = z_0$ переходило в $Z = 0$, соответствие же направлений может быть достигнуто подходящим поворотом около начала координат.

Пусть имеются две функции $z_1 = f_1(z)$ и $z_2 = f_2(z)$, отображающие область S на Q_0 указанным образом. Тогда $z_2 = \frac{\alpha z_1 + \bar{\gamma}}{\gamma z_1 + \bar{\alpha}}$, $\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} = 1$. Так как при $z = z_0$ имеем $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, то $\bar{\gamma} = 0$ и, следовательно, $z_2 = \frac{\alpha z_1}{\bar{\alpha}} = e^{i\theta} z_1$; таким образом z_2 получается из z_1 путем поворота около начала координат, но так как по условию один линейный элемент, выходящий из начала координат, остается неподвижным при этом повороте, то угол поворота равен нулю, т. е. $z_2 \equiv z_1$. Следовательно, существует только одна отображающая функция, удовлетворяющая поставленным требованиям.

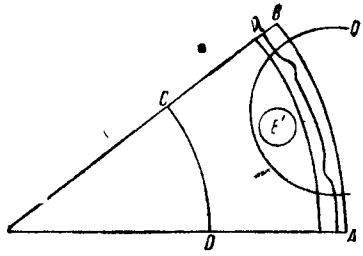
§ 80. Поведение отображающей функции на границе области. Исследование поведения отображающей функции, когда переменное приближается к границе области, привело за последние годы к большому числу замечательных результатов. Наиболее важные из них изложены в настоящем параграфе. Имеются некоторые простые случаи, в которых о поведении функции можно судить непосредственно.

Пусть, например, однолистная область S отображается на однолистную область S' посредством линейного преобразования. Так как это преобразование устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками обеих плоскостей, то, в частности, и между граничными точками областей S и S' устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Рассмотрим, далее, случай, когда отображающая функция аналитична в граничной точке Z области S. Пусть $z_1, z_2, \ldots$ последовательность точек области S, стремящихся к Z. Тогда соответствующая последовательность точек области S' сходится к един-

ственной точке $Z' = f(Z)$, лежащей на границе S'. Этот простой факт даст возможность с легкостью установить соответствие между граничными точками обеих областей, в случае если отображение выполняется посредством элементарной функции, аналитической всюду на плоскости за исключением некоторых изолированных точек.

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться следующей общей леммой [1]):

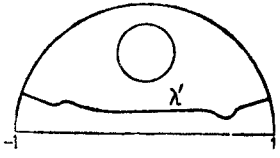


Черт. 52.

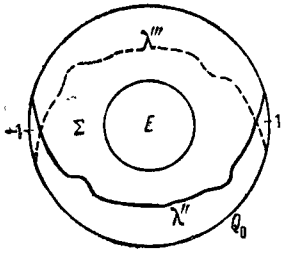
Лемма. *Пусть $ABCD$ область, ограниченная дугой AB окружности $|z| = 1$, дугой CD окружности $|z| = r' < 1$ и отрезками BC и DA радиусов окружности $|z| = 1$ (черт. 52). Пусть, далее, $f(z)$ функция аналитическая и ограниченная, $|f(z)| < M$, всюду внутри и на границе области $ABCD$ за исключением дуги AB.*

Если, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ и в любой подобласти $|z| > r$ области $ABCD$ можно провести кривую λ, соединяющую стороны BC и DA, во всех точках которой $|f(z)| < \varepsilon$, то $f(z) \equiv 0$.

Проведем окружность Q ортогонально дуге AB так, чтобы область S — общая часть кругов Q и $|z| < 1$ — лежала внутри $ABCD$. Переведем с помощью соответствующего линейного преобразования $\tau = T(z)$ лежащую в круге Q дугу окружности Q_0 (т. е. окружности $|z| = 1$) в отрезок действительной оси от -1 до $+1$ так, чтобы область S при этом перешла в верхнюю половину круга Q_0 на плоскости τ (черт. 53). Далее посредством преобразования



Черт. 53.



Черт. 54.

$$\frac{t+1}{1-t} = -i\left(\frac{\tau+1}{1-\tau}\right)^2$$

отобразим верхнюю половину круга Q_0 плоскости τ на полный круг Q_0 плоскости t (черт. 54). При этом отрезок $(-1, +1)$ перейдет в нижнюю полуокружность круга Q_0 плоскости t и полуокружность плоскости τ перейдет в верхнюю полуокружность Q_0 плоскости t.

Заметим, что при обоих преобразованиях границы соответствуют друг другу непрерывно. При этих преобразованиях функция $f(z)$ переходит в функцию $\varphi(t)$, аналитическую внутри круга Q_0 и на верхней половине окружности этого круга.

Обозначим через E круг $|t| \leqslant \varrho < 1$ и через E' лежащую в S область, в которую переходит E посредством построенного нами

[1]) Koebe, Journ. für Math., т. 145, стр. 213, 1915.

преобразования. Выберем теперь r настолько близким к единице, чтобы окружность $|z|=r$ заключала область E'. И затем для данного ε построим соответствующую кривую λ. Нетрудно видеть, что в области S находится по крайней мере одна дуга кривой λ, концы которой лежат на окружности Q и которая делит область S на две области таким образом, что одна из этих областей содержит область E' и имеет границу, на которой нет точек окружности Q_0. При отображении эта дуга переходит в кривую λ'', лежащую в круге Q_0 на плоскости t, причем концы λ'' лежат на верхней полуокружности. Кривая λ'' делит Q_0 на две области. Одна из этих областей содержит E и имеет в качестве своей границы λ'' и некоторую дугу верхней полуокружности, не содержащую точек 1 и -1. Обозначим через λ''' кривую, в которую переходит λ'' в результате поворота на угол π около начала координат. Части кривых λ'' и λ''' образуют границу некоторой области Σ, лежащей целиком в Q_0 и содержащей, в свою очередь, область E. Рассмотрим теперь в этой области функции $\varphi(t)$ и $\varphi(-t)$. Когда t находится на λ''', $-t$ находится на λ'', и наоборот. На кривой λ'' $|\varphi(t)|<\varepsilon$, а $|\varphi(-t)|<M$, на кривой λ''' $|\varphi(t)|<M$, а $|\varphi(-t)|<\varepsilon$, отсюда мы заключаем, что на границе области Σ

$$|\varphi(t)\varphi(-t)|<M\varepsilon.$$

Так как максимум модуля этой функции достигается на границе, то неравенство справедливо всюду в Σ, а следовательно, в E. Так как ε может быть выбрано сколько угодно малым, то в области E $\varphi(t)\,\varphi(-t)\equiv 0$, поэтому $\varphi(t)\equiv 0$, а значит и $f(z)\equiv 0$.

Рассматривая соответствие границ при отображении области S на единичный круг Q_0, можно предположить, не нарушая общности, что область S лежит внутри Q_0 и содержит начало координат. Это следует из теоремы 11. В самом деле, из доказательства этой теоремы видно, что функции, посредством которых достигается отображение полученной внутри Q_0 области на исходную область S, аналитичны на границе повсюду за исключением, может быть, некоторых изолированных точек.

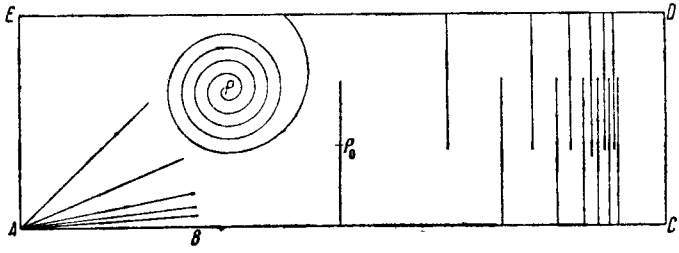
Достижимые граничные точки. Обозначим границу области S через C. Точка Z, лежащая на C, называется „достижимой граничной точкой", если какая-нибудь внутренняя точка области S может быть соединена с точкой Z непрерывной кривой L, лежащей целиком за исключением ее конца Z в области S. Мы можем предположить, что L начинается в начале координат и не имеет кратных точек. Уравнение кривой L имеет вид $z=z(t)$, где $z(t)$ непрерывная функция действительного переменного t в некотором интервале $t_1\leqslant t\leqslant t_2$; $z(t_1)=0$, $z(t_2)=Z$ и $z(t')\neq z(t'')$, если t' и t'' различные точки интервала. Такая кривая называется жордановой кривой.

Легко привести пример односвязных областей, не все граничные точки которых достижимы. Область, изображенная на черт. 55, представляющая собой прямоугольник, в котором сделаны некоторые разрезы, начинающиеся на границе прямоугольника и кончающиеся внутри его, есть односвязная область. В правой

части четырехугольника разрезы сделаны следующим образом: пусть $AC = h$, $CD = k$. В точках стороны AC, лежащих на расстоянии $\frac{h}{2}, \frac{3h}{4}, \frac{5h}{6}, \frac{7h}{8}, \ldots$ от точки A, восставлены перпендикуляры к AC длиной $\frac{2k}{3}$. В точках стороны ED, расстояния которых от E равны $\frac{2h}{3}, \frac{4h}{5}, \frac{6h}{7}, \ldots$, восставлены перпендикуляры к ED длиной $\frac{2k}{3}$. Очевидно, отрезок, CD есть часть границы области и вместе с тем не содержит ни одной достижимой точки.

Отрезки, исходящие из точки A, имеют одинаковые длины l, где $l < \frac{h}{2}$ и $l < k$, и образуют со стороной AC углы $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \ldots$ Очевидно, что все точки отрезка AB за исключением его концов недостижимы. С другой стороны, точка P, к которой стремится принадлежащая границе спиральная кривая, есть достижимая точка границы.

Рассмотрим точку типа P_0 (черт. 55). Она может быть достигнута с различных сторон отрезка, на котором она лежит. В целях простоты целесообразно рассматривать точку P_0 как две *различ-*



Черт. 55.

ных достижимых точки в зависимости от того, с какой стороны отрезка лежит кривая, приводящая в эту точку. Таким образом достижимая точка определяется не только положением, но также кривой, к ней приводящей.

Пусть Z_1 и Z_2 достижимые точки границы, определенные посредством кривых L_1 и L_2. Если $Z_1 \neq Z_2$, то эти достижимые точки различны. Если $Z_1 = Z_2$, то для того, чтобы обе кривые определяли одну и ту же достижимую точку, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие, которое мы сейчас формулируем: пусть C окружность с центром в точке Z_1 настолько малого радиуса, чтобы начало координат лежало вне ее. Кривая L_1, соединяющая начало координат с точкой Z_1, пересекает окружность C в одной или нескольких точках. Обозначим через P_1 последнюю точку пересечения кривой L_1 с C; тогда дуга N_1 кривой L_1 от точки P_1 до Z_1 целиком лежит внутри C. Аналогично дуга N_2 кривой L_2 от последней точки пересечения кривой L_2 с окружностью C до точки Z_1 целиком лежит в C. Если теперь, какова бы ни была окружность C, каждая внутренняя точка дуги N_1 может быть соединена жордановой кривой, целиком лежащей и в S

и в C, с внутренней точкой дуги N_2, то кривые L_1 и L_2 определяют одну и ту же достижимую точку. Согласно этому определению все кривые, приводящие в P_0 и лежащие справа от прямой, на которой эта точка расположена (черт. 55), определяют одну и ту же достижимую точку. Кривые, лежащие слева, также определяют единственную достижимую точку, однако отличную от первой. Таким образом точку P_0 нужно рассматривать как две различных достижимых точки. Точку A на черт. 55 нужно рассматривать как бесконечное множество достижимых точек.

Пусть $z' = f(z)$ производит конформное отображение внутренности области S на внутренность единичного круга Q_0. Сейчас мы докажем ряд предложений[1]), характеризующих поведение функции $f(z)$, когда точка z приближается к границе области S.

Предложение 1. *Пусть Z достижимая граничная точка области S, определенная посредством кривой L. Тогда: если точка z приближается к точке Z вдоль кривой L, то точка z' приближается к некоторой точке Z', лежащей на границе Q_0.*

Во-первых, заметим, что когда z приближается к точке P, лежащей на границе S, по какому-нибудь пути, лежащему целиком (за исключением конца P) внутри области S, то $|f(z)|$ стремится к единице.

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ круг $|z'| < 1 - \varepsilon$ является образом, полученным посредством $f(z)$ от некоторой области S', которая вместе со своей границей состоит из внутренних точек области S. Выберем η настолько малым, чтобы круг $|z - P| < \eta$ не содержал точек области S'; тогда в любой принадлежащей области S точке этого круга получим: $1 - \varepsilon < |z'| < 1$ и, следовательно, $|z'| = |f(z)|$ стремится к единице.

Когда точка z описывает кривую L от начала координат до Z, то точка z' описывает непрерывную кривую L' без двойных точек, начинающуюся в начале координат плоскости z'. Кривая L' имеет уравнение $z' = z'(t) = f[z(t)]$, где $z'(t)$ непрерывная функция переменного t в полуоткрытом интервале $t_1 \leqslant t < t_2$; когда z стремится к Z, то $|z'|$ стремится к единице, и поэтому на окружности Q_0 имеются одна или несколько точек сгущения для точек кривой L'.

Если на Q_0 имеется только одна такая точка сгущения, то наше предложение доказано. Допустим, что их там больше чем одна; обозначим две из них через Z_1' и Z_2'. В этом случае при приближении z к Z кривая L' переходит бесконечно много раз из окрестности точки Z_1' в окрестность точки Z_2', и наоборот. Отсюда следует, что одна из двух дуг, на которые разделяется окружность круга Q_0 точками Z_1' и Z_2', вся состоит из точек сгущения для точек кривой L'. Построим теперь область такую, как на черт. 52, причем в качестве AB возьмем дугу Q_0, состоящую из точек сгущения для точек кривой L. Очевидно, что каково

[1]) Koebe, P., Jour. fur Math., т. 145, стр. 215—218, 1915.
Osgood. W. F. and Taylor, E. H, Trans. Amer. Math. Soc., т. 14, стр. 77—298, 1913.

бы ни было $\varepsilon > 0$ и какова бы ни была окружность $|z'| = r < 1$, всегда существует дуга кривой L, на которой выполняется условие $|z - Z| < \varepsilon$ и которой соответствует дуга кривой L', начинающаяся в точке стороны BC, оканчивающаяся в точке стороны DA и лежащая целиком (вместе с концами) вне окружности $|z| = r < 1$. Обозначая теперь через $z = \varphi(z')$ функцию, обратную отображающей функции $f(z) = z'$, мы можем утверждать, что, какова бы ни была окружность $|z| = r < 1$, в части построенной нами области (черт. 52), лежащей вне этой окружности, существует кривая (соответствующая дуга кривой L'), начинающаяся в точке стороны BC, оканчивающаяся в точке стороны DA, на которой выполняется неравенство: $|\varphi(z') - Z| < \varepsilon$. С другой стороны, в круге Q_0, $|\varphi(z') - Z| \leqslant 2$; поэтому, применяя доказанную нами ранее лемму к функции $\varphi(z') - Z$, заключаем, что $\varphi(z') - Z \equiv 0$, т. е. $\varphi(z') \equiv \text{const.}$, что невозможно. Таким образом предложение доказано. Функция $z'(t)$, определяющая кривую L', непрерывна в замкнутом интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, если положим $z'(t_2) = Z'$.

Предложение 2. *Если L_1 и L_2 кривые, определяющие одну и ту же достижимую точку Z на границе области S, то соответствующие кривые L_1' и L_2' оканчиваются в одной и той же точке окружности Q_0.*

Допустим, что L_1' и L_2' оканчиваются в различных точках Z_1' и Z_2'. Рассмотрим круг C произвольно малого радиуса с центром в точке Z. Так как кривые L_1 и L_2 определяют одну и ту же достижимую точку, то внутри принадлежащей кругу C части области S можно провести кривую λ, соединяющую некоторую точку ξ кривой L_1 с точкой η на кривой L_2.

Пусть в плоскости z' точкам ξ, η и кривой λ соответствуют точки ξ', η' и кривая λ'. Выбирая радиус круга C достаточно малым, мы можем добиться того, чтобы точка ξ' была сколь угодно близка к Z_1', точка η' сколь угодно близка к Z_2' и чтобы при этом вся кривая λ' лежала вне окружности $|z| = r < 1$. Но если радиус круга C меньше ε, то на кривой λ' получаем:

$$|z - Z| = |\varphi(z') - Z| < \varepsilon;$$

таким образом одна из двух дуг, на которые разделяется окружность Q_0 точками Z_1' и Z_2', может играть роль дуги AB, фигурировавшей в нашей лемме. Применяя эту лемму, получаем:

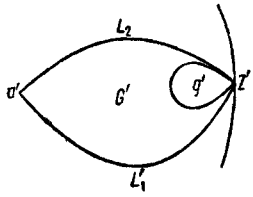
$$\varphi(z') - Z \equiv 0.$$

Но это невозможно, и, следовательно, предложение доказано.

Предложение 3. *Если кривые L_1 и L_2 определяют различные достижимые граничные точки Z_1 и Z_2 области S, то соответствующие им при отображении кривые L_1' и L_2' оканчиваются в различных точках окружности Q_0.*

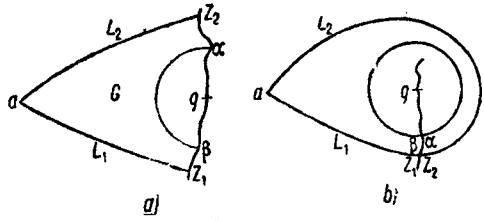
Это предложение доказывается менее просто, чем предшествующие. Допустим противное, т. е. что кривые L_1' и L_2' оканчиваются в одной и той же точке Z'. Обозначим через a последнюю

из точек кривой L_1, встречающихся на L_2 при движении вдоль кривой L_2 от начала координат к точке Z_2. Точкой a может быть само начало координат. Эта точка безусловно существует, так как в противном случае кривые L_1 и L_2 определяли бы одну и ту же достижимую точку. Отбросим части кривых L_1 и L_2 от начала координат до a и будем считать, что эти кривые проведены из точки a к точкам Z_1 и Z_2. Очевидно, что при этом кривые L_1' и L_2' исходят из соответствующей точки a' в круге Q_0, оканчиваются в точке Z' окружности и помимо a' не имеют никаких общих точек.



Черт. 56.

Кривая, состоящая из кривых L_1 и L_2, начинается в некоторой граничной точке области S и оканчивается в граничной точке области S. Эта кривая делит область S на две односвязных части. При отображении на круг Q_0 одна из этих частей переходит в область G' (черт. 56), граница которой состоит из кривых L_1' и L_2'. Единственная граничная точка области G', лежащая на окружности Q_0, есть Z'. Обозначим через G соответствующую область, лежащую в S (черт. 57, a или b). Граница области G помимо кривых L_1 и L_2 содержит еще кусок границы S. Это очевидно, если $Z_1 \neq Z_2$. Покажем, что это верно в случае $Z_1 = Z_2$. В самом деле, если бы это было не так, то в области G можно было бы проводить кривые, из существования которых вытекало бы, что L_1 и L_2 определяют одну и ту же достижимую граничную точку.



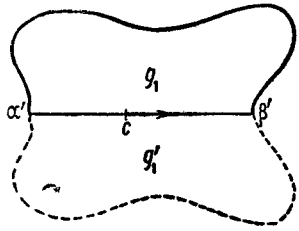
Черт. 57.

Проведем внутри области G дугу окружности, соединяющую различные достижимые точки границы S. То, что такое построение возможно, видно из следующих соображений: пусть P точка, лежащая на той части границы G, которая входит в границу S, и отличная от Z_1 и Z_2. Пусть P_1 внутренняя точка области G, отстоящая от точки P на расстоянии меньшем, чем расстояния от точки P до кривых L_1 и L_2.

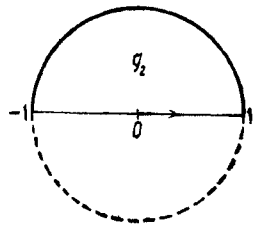
Дуга окружности с центром в P, соединяющая точку P_1 с ближайшими на этой окружности в обоих направлениях от P_1 точками α и β границы G (эти точки могут совпадать), удовлетворяет поставленным требованиям. (Эта окружность обязательно пересекает границу G, так как в противном случае область G не была бы односвязной.) Одна из двух односвязных областей, на которые разделяется область G по проведении этой дуги, ограничена дугой $\alpha\beta$ и частью границы области S. Она не имеет ни одной граничной точки, принадлежащей кривым L_1 и L_2. Обозначим эту область через g.

Целесообразность произведенного разбиения области G и, в частности, использования для этой цели дуги окружности станет очевидна, если мы заметим, что область g может быть отображена на полукруг и притом так, что входящая в границу области g дуга окружности перейдет при отображении *взаимно-однозначно и непрерывно в диаметр.*

Во-первых, сделаем линейное преобразование $\tau = T(z)$, переводящее дугу окружности $\alpha\beta$ в отрезок $\alpha'\beta'$ действительной оси. За исключением случая, когда $\alpha = \beta$, в качестве $\alpha'\beta'$ может быть избран конечный интервал. Мы можем всегда считать, что область g_1, в которую перейдет при этом преобразование g, лежит в соседстве с $\alpha'\beta'$, в верхней полуплоскости.



Черт. 58.



Черт. 59.

Более того, можно предполагать, что g_1 целиком лежит в верхней полуплоскости. Действительно, если последнее обстоятельство не имеет места, то можно воспользоваться вторым преобразованием вида:

$$\frac{\tau' - \alpha'}{\beta' - \tau'} = \left(\frac{\tau - \alpha'}{\beta' - \tau}\right)^{\frac{1}{2}},$$

отображающим плоскость τ с разрезом по $\alpha'\beta'$ на верхнюю половину плоскости τ'. (Очевидно, что во втором преобразовании не будет надобности, если $\alpha' = \beta' = \infty$.)

Обозначим через g_1' зеркальное отображение области g_1 относительно действительной оси (черт. 58) и через $g_1 + g_1'$ односвязную область, которая получится, если стереть на черт. 58 отрезок $\alpha'\beta'$. Отобразим область $g_1 + g_1'$ на единичный круг Q_0 и притом таким образом, чтобы некоторая внутренняя точка c отрезка $\alpha'\beta'$ перешла в начало координат, а направление действительной оси в точке c—в направление действительной оси в начале координат (черт. 59).

На основании следствия из теоремы 14 существует единственная отображающая функция, удовлетворяющая поставленным требованиям. Обозначим ее через $t = F(\tau)$.

Покажем теперь, что при этом отображении открытый интервал $\alpha'\beta'$ (без обоих концов) переходит в открытый интервал $-1, 1$.

Произведем зеркальное отражение $\tau_1 = \bar{\tau}$ области $g_1 + g_1'$ около действительной оси плоскости τ. При этом область $g_1 + g_1'$ перейдет сама в себя. Далее, область $g_1 + g_1'$ плоскости τ_1 отобразим посредством функции $t_1 = F(\tau_1)$ на круг Q_0 и наконец произведем зеркальное отражение $t = \bar{t}_1$ круга Q_0 относительно действитель-

ной оси плоскости t_1. Последовательность этих трех преобразований:

$$\tau_1 = \bar{\tau}, \quad t_1 = F(\tau_1), \quad t = \bar{t}_1 \quad \text{или} \quad t = \bar{F}(\bar{\tau})$$

есть конформное преобразование, осуществляемое аналитической функцией $t = \bar{F}(\bar{\tau})$. Так как при этом преобразовании точка c плоскости τ переходит в начало координат плоскости t и направление действительной оси в точке c переходит в направление действительной оси в начале координат плоскости t, то

$$\bar{F}(\bar{\tau}) = F(\tau),$$

так как существует лишь одна функция, производящая такое отображение.

Пусть τ внутренняя точка области $g + g'$, не лежащая на действительной оси, т. е. $\tau \neq \bar{\tau}$; тогда, так как наше отображение взаимно-однозначно, получаем:

$$F(\tau) \neq F(\bar{\tau}),$$

и поэтому $\bar{F}(\tau) \neq \bar{F}(\bar{\tau})$ или $\bar{t} \neq t$. Отсюда заключаем, что не лежащей на действительной оси точке τ области $g_1 + g_1'$ соответствует точка t круга Q_0, также не лежащая на действительной оси. Следовательно интервал $\alpha'\beta'$ на действительной оси плоскости τ переходит взаимно-однозначно и непрерывно в интервал -1, 1 плоскости t. Заметим, что на основании предложения 1 взаимно-однозначное соответствие между точками интервалов $\alpha'\beta'$ может быть распространено и на их концы. Область g_1 плоскости τ перешла в полукруг g_2 круга Q_0 в верхней полуплоскости t.

Воспользуемся теперь областью g_2 для применения леммы. Замена переменного z на t приводит к функции $z' = f(z) = \psi(t)$, отображающей g_2 на область g_1', лежащую в G'. Граница g' есть непрерывный образ $\alpha\beta$ и, следовательно, непрерывный образ интервала $(-1, 1)$.

Разделим область g_2 на две части посредством окружности $|t| = r < 1$. Образом этой окружности в g' является некоторая кривая q, делящая область g' на две части.

Часть g_2, лежащая вне окружности $|z| = r$, соответствует той части области g', граница которой содержит точку Z'. Проведем в этой последней области кривую λ', соединяющую две точки границы, отличные от Z', и притом такую, чтобы отсекаемая этой кривой часть области g' с точкой Z' на границе лежала внутри круга с центром в Z' и с радиусом $< \varepsilon$. Тогда соответствующая кривая λ в области g_2 лежит вне окружности $|t| = r < 1$ и соединяет точку действительной оси, лежащую слева от начала координат, с точкой действительной оси, лежащей справа от начала. На кривой λ будем иметь $|\psi(t) - Z'| < \varepsilon$. Так как, с другой стороны, функция $\psi(t) - Z'$ ограничена в круге Q_0, то на основании леммы $\psi(t) - Z' \equiv 0$, т. е. $f(z) = \text{const}$. Получилось противоречие, и, следовательно, предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Множество точек окружности Q_0, соответствующих достижимым граничным точкам области S, всюду плотно на окружности Q_0.*

Предположим, что это не так, т. е. что существует дуга $Z_1'Z_2'$ окружности Q_0, не содержащая точек, которым на границе S соответствуют достижимые точки. Пусть Z' точка этой дуги, отличная от Z_1' и Z_2', и пусть $z_1', z_2', \ldots$ последовательность внутренних точек круга Q_0, сходящаяся к Z'. Соответствующая последовательность $z_1, z_2, \ldots$ точек области S имеет по крайней мере одну точку сгущения на границе области S. Пусть Z точка сгущения этой последовательности. Выберем из последовательности $z_1, z_2, \ldots$ подпоследовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$, сходящуюся к Z. Очевидно, что соответствующая последовательность $\xi_1', \xi_2', \ldots$ в круге Q_0 сходится к точке Z'. Обозначим через L_n отрезок прямой, соединяющей ξ_n с ближайшей точкой границы (или с одной из ближайших точек) L_n определяет достижимую граничную точку, а поэтому соответствующая L_n в круге Q_0 кривая L_n' начинается в ξ_n' и приводит к точке окружности, лежащей вне дуги $Z_1'Z_2'$ Выбирая произвольно $\varepsilon > 0$ и $r < 1$, мы можем взять настолько большое n, $n > N$, чтобы расстояния от всех точек L_n до точки Z были меньше ε и чтобы, кроме того, L_n находилось вне области, соответствующей в S кругу $|z'| < r$. Поэтому кривая L_n' лежит вне окружности $|z'| < r$, причем на этой кривой $|z - Z| = |\varphi(z') - Z| < \varepsilon$. Замечая, что одна из дуг $Z'Z_1'$ или $Z'Z_2'$ может быть использована в качестве дуги AB (черт. 52) (в окрестности этой дуги должно быть бесконечно много кривых L_n') и применяя лемму 11, приходим к заключению, что $\varphi(z)' - Z \equiv 0$.

Это тождество невозможно, и следовательно, наше предложение доказано.

Граничные элементы[1]). Произведем теперь исследование в обратном порядке, а именно рассмотрим, какая точка или точки на границе области S соответствуют точке Z' на окружности Q_0.

Если дана непрерывная кривая L', ведущая изнутри Q_0 в точку Z', то к какой точке или к каким точкам границы S подходит как угодно близко соответствующая кривая L — причем при всех возможных положениях L'?

Ту же самую проблему можно представить в следующем виде: пусть $z_1', z_2', \ldots$ последовательность внутренних точек Q_0, сходящаяся к точке Z' на окружности Q_0; требуется исследовать расположение предельных точек соответствующей последовательности $z_1, z_2, \ldots$ на границе области S — причем для всех возможных последовательностей, сходящихся к точке Z'.

Рассмотрим в области S последовательность кривых $C_1, C_2, \ldots$ Пусть C_1 жорданова кривая, соединяющая различные достижимые точки границы области S и целиком за исключением концов лежащая в S. Обозначим через S_1 одну из односвязных областей, на которые эта кривая делит область S. Пусть C_2 жорданова кривая,

[1]) Carathèodory, Math. Ann., т. 73, стр. 323—370, 1913.

целиком лежащая в S_1 и соединяющая достижимые точки границы S, отличные друг от друга и от концов C_1. Кривая C_2 делит область S_1 на две односвязных части. Обозначим через S_2 ту из этих частей, граница которой не содержит кривой C_1. И вообще пусть C_{n+1} жорданова кривая, целиком лежащая в области S_n и соединяющая достижимые точки границы S, отличные друг от друга и от концов кривой C_n. Кривая C_{n+1} делит область S_n на две односвязных части. Обозначим через S_{n+1} ту из этих частей, граница которой не содержит кривой C_n. Потребуем, чтобы кривые C_n удовлетворяли еще следующему условию: какова бы ни была внутренняя точка S, всегда можно найти такое число N, чтобы эта точка лежала вне всех областей S_n, для которых $n > N$. Это условие выполняется, например, в случае, когда кривые проведены так, что области S_n не содержат точек, соответствующих при отображении точкам круга $|z'| < 1 - \frac{1}{n}$.

Обозначим через C_n' кривую в круге Q_0, в которую при отображении переходит C_n, и через S_n' область, лежащую в Q_0, в которую переходит S_n. Области $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots$ (здесь черта сверху означает замыкание области) имеют по крайней мере одну общую точку на границе области S. В соответствии с этим области $\overline{S}_1'$, $\overline{S}_2', \ldots$ имеют по крайней мере одну общую точку на окружности Q_0. В случае если общих точек больше, чем одна, то они имеют общую дугу на границе Q_0.

Определение. *Если области $\overline{S}_1'$, $\overline{S}_2'$ имеют единственную общую точку Z', то мы будет говорить, что точки, принадлежащие всем областям $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots$ образуют граничный элемент, определяемый кривыми $C_1, C_2, \ldots$ и соответствующий точке Z'. Две последовательности кривых определяют один и тот же граничный элемент, если соответствующие точки на окружности Q_0 совпадают.*

Нетрудно видеть, что две последовательности кривых определяют один и тот же граничный элемент в том и только в том случае, если каждая область $\overline{S}_m$ первой последовательности содержит все области $\overline{s}_n$ второй последовательности для достаточно больших значений n; и обратно, каждая область $\overline{s}_m$ содержит все $\overline{S}_n$ для достаточно больших n. В самом деле, соответствующие области $\overline{S}_n'$ и $\overline{s}_n'$ в Q_0, в этом и только в этом случае имеют единственную общую точку Z.

Каждому граничному элементу соответствует согласно определению единственная точка окружности Q_0. Мы теперь покажем, что каждой точке Z' окружности Q_0 соответствует граничный элемент. В дальнейшем через U_n' и V_n' будем обозначать точки окружности Q_0, соответствующие достижимым точкам U_n и V_n на границе области S. Пусть $U_1'V_1'$ дуга окружности, содержащая точку Z'. Пусть, далее точки последовательностей $U_1', U_2', \ldots$; $V_1', V_2', \ldots$ выбраны таким образом, что U'_{n+1} лежит между U_n' и Z', V'_{n+1} лежит между V_n' и Z' и что длины дуг $U_n'V_n'$

стремятся к нулю. Каждая дуга из последовательности $U_1'V_1'$, $U_2'V_2'$,... содержит все дуги, следующие за ней, причем Z' единственная точка, принадлежащая всем этим дугам.

Проведем теперь кривые C_1, C_2,... описанного выше типа так, чтобы C_n соединяла точки U_n и V_n. При этом области S_1', S_2',... будут иметь единственную общую точку Z', а следовательно, кривые C_1, C_2,... определяют граничный элемент, соответствующий точке Z' на Q_0.

Нами доказано следующее:

Предложение 5. *Между точками окружности Q_0 и граничными элементами области S существует взаимно-однозначное соответствие.*

Теперь покажем, что граничный элемент, соответствующий точке Z' окружности Q_0, есть геометрическое место предельных точек для последовательностей z_1, z_2,..., соответствующих всем возможным последовательностям z_1', z_2',... из внутренних точек Q_0, сходящимся к точке Z'.

Каждая область из последовательности S_1', S_2',... содержит все последующие области; любая окрестность точки Z' содержит все области S_n', начиная с достаточно большого n. В каждой области S_n' лежат все точки последовательности z_1', z_2',... за исключением конечного числа. Соответственно этому все точки последовательности z_1, z_2,... за исключением конечного числа лежат в S_n. Следовательно, все точки сгущения последовательности z_1, z_2,... лежат в $\overline{S}_n$, каков бы ни был номер n, а поэтому принадлежат граничному элементу, соответствующему точке Z'. Пусть теперь Z есть точка, принадлежащая граничному элементу, соответствующему точке Z' на Q_0. Мы можем построить последовательность z_1, z_2,... внутренних точек S, сходящуюся к Z, так чтобы z_1 лежало в S_1; z_2 в S_2 и т. д. Пусть z_1', z_2',... соответствующая последовательность в Q_0. Очевидно, что z_1' лежит в S_1'; z_2' в S_2' и т. д., и поэтому последовательность z_1', z_2',... сходится к Z'.

Сейчас мы выведем некоторые предложения, относящиеся к определенным нами выше последовательностям кривых линий.

Предложение 6. *Если области $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$,... содержат не более чем одну общую достижимую точку границы, то кривые C_1, C_2,... определяют граничный элемент.*

Из предложения 3 следует, что граничный элемент не может содержать двух достижимых граничных точек. Предположим, что области $\overline{S}_1'$, $\overline{S}_2'$,... имеют общую дугу окружности Q_0. Пусть Z_1' и Z_2' две точки, лежащие внутри этой дуги и соответствующие достижимым точкам Z_1 и Z_2 границы S. Кривым L_1 и L_2, определяющим достижимые точки Z_1, Z_2, соответствуют кривые L_1', L_2', оканчивающиеся в Z_1', Z_2'. В окрестности точки Z_1' кривая L_1' лежит в S_n' и в соответствии с этим в окрестности точки Z_1 кривая L_1 лежит в S_n. Таким образом Z_1 и Z_2 являются достижимыми граничными точками для любой области S_n. Но, с другой

стороны, мы знаем, что не может быть двух достижимых точек, принадлежащих всем областям $\bar{S}_n$, поэтому $\bar{S}_1'$, $\bar{S}_2'$,... не могут иметь общей дуги, и следовательно, C_1, C_2,... определяют граничный элемент.

Проведем на черт. 55 в качестве кривых C_n вертикальные прямые, соединяющие точки сторон AC и ED и проходящие на расстоянии ε_n от CD, причем пусть ε_n стремится к нулю с ростом n. Все области $\bar{S}_n$ содержат кусок границы CD и никаких общих точек, не принадлежащих CD, не имеют. Но отрезок CD не содержит ни одной достижимой точки; поэтому отрезок CD есть граничный элемент, определяемый линиями C_n. При конформном отображении области, изображенной на черт. 55, на круг всякая последовательность внутренних точек z_1, z, .. такая, что расстояние от z_n до CD стремится к нулю при неограниченном росте n, переходит в последовательность z_1', z_2',... в круге Q_0, имеющую единственную предельную точку на окружности Q_0.

Предложение 7. *Если все точки кривой C_n при достаточно большом n лежат в сколь угодно малой окрестности точки Z, то кривые C_1, C_2,... определяют граничный элемент.*

Предположим, что это не так; тогда области $\bar{S}_1'$, $\bar{S}_2'$,... имеют общую дугу AB. Далее, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, $|z - Z| = |\varphi(z') - Z| < \varepsilon$ на кривой C_n', где C_n' есть кривая, соответствующая C_n и, следовательно, лежащая в окрестности AB. Применяя лемму 11, заключаем, что $\varphi(z') - Z \equiv 0$ и, следовательно, $f(z) = \text{const}$. Получилось противоречие, и следовательно, теорема доказана.

На черт. 55 можно провести кривые C_n, соединяющие концы лучей, исходящих из точки A, с точкой B, и притом так, чтобы все эти кривые для достаточно больших n лежали целиком в заданной окрестности точки B. Таким образом точки отрезка AB образуют граничный элемент области, изображенной на черт. 55. Этот граничный элемент содержит одну достижимую точку, а именно точку B.

Предложение 8. *Если диаметры кривых C_n стремятся к нулю при бесконечном возрастании n, то кривые C_1, C_2,... определяют граничный элемент.*

Диаметром C_n мы называем максимальное расстояние между двумя точками кривой C_n. В условиях нашего предложения из последовательности C_1, C_2,... можно выделить подпоследовательность кривых C_{n_1}, C_{n_2},..., сходящуюся к некоторой точке Z. На основании предложения 7 эта подпоследовательность определяет граничный элемент. Но каждая область S_{n_m} заключает все S_n для $n > n_m$, следовательно, последовательность C_1, C_2,... определяет граничный элемент.

§ 81. Области, ограниченные жордановыми кривыми. Следующая теорема является простым следствием из доказанных предложений:

Теорема 15. *Пусть $z' = f(z)$ производит конформное отображение однолистной области S, ограниченной замкнутой жордановой кривой C на единичный круг Q_0. Тогда при этом отображении между точками границ устанавливается взаимно-однозначное и непрерывное соответствие.*

Если в каждой точке Z кривой C мы положим $f(Z) = \lim f(z)$ при z, стремящемся к Z, то функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области S.

Кривая C не имеет кратных точек; каждая ее точка есть достижимая граничная точка. Каждой точке C соответствует единственная точка окружности Q_0. Каждой точке окружности соответствует граничный элемент, состоящий из одной или многих точек кривой C. Но так как граничный элемент не может содержать больше чем одну достижимую точку, то, следовательно, этот граничный элемент есть точка. Таким образом соответствие взаимно-однозначно.

Согласно известной теореме, если значения функции, непрерывной внутри двумерной области, определены на ее границе так, как это сделано в нашем случае, то эти значения на границе распределяются непрерывным образом, и определенная таким образом функция непрерывна в замкнутой области.

Мы предоставляем читателю вывод многочисленных следствий из теоремы 15. Например, что при отображении S на другую однолистную область Σ, ограниченную замкнутой жордановой кривой Γ, между точками кривых C и Γ устанавливается взаимно-однозначное и непрерывное соответствие. Причем отображающая функция непрерывна в замкнутой области $\bar{S}$, если ее значения на C будут определены посредством такого же предельного перехода, как и выше. В справедливости этого утверждения мы убеждаемся, отображая S на Q_0, а затем Q_0 на Σ.

Многие из предложений о соответствии границ при отображении однолистных областей могут быть распространены на весьма широкий класс областей многолистных. В дальнейшем мы воспользуемся следующей теоремой и следствием из нее:

Теорема 16. *Пусть однолистная или многолистная область S конформно отображена на круг Q_0. Допустим далее, что граница S содержит жорданову кривую C_1 и что можно провести в S жорданову кривую K_1, соединяющую концы C_1 и отсекающую от S однолистную область S_1 с границей, состоящей только из кривых C_1 и K_1. Тогда точки кривой C_1 соответствуют взаимно-однозначно точкам некоторой дуги окружности Q_0.*

При отображении S на Q_0 область S_1 отображается на плоскую однолистную область S_1' и, следовательно, может быть отображена на круг. S_1' ограничена жордановой кривой. В самом деле, кривая K_1 переходит в жорданову кривую, причем, как это видно из предложения 1, соответствие остается непрерывным и в конечных точках; остальная часть границы S_1 переходит в дугу окружности Q_0.

Далее, так как каждая из областей S_1 и S_1' ограничена замкнутой жордановой кривой, то при отображении между точками этих границ устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Следовательно, точки C_1 соответствуют взаимно-однозначно точкам дуги окружности Q_0.

Может случиться, что граница многолистной области, не укладывающаяся на одном листе, может быть разбита на части, каждая из которых есть жорданова кривая, удовлетворяющая условиям нашей теоремы. Каждой из этих частей соответствует дуга окружности Q_0, и мы таким образом получаем следующий результат:

Следствие. *Если граница области S теоремы 16 состоит из конечного числа жордановых кривых A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, для которых выполняются условия теоремы 16, то точки границы области S соответствуют взаимно-однозначно точкам окружности Q_0.*

В случае когда соответствие границ при отображении непрерывно, то возникает вопрос о существовании среди функций, осуществляющих это отображение, такой функции, которая переводит некоторые заданные точки на границе одной области в заданные точки на границе другой.

Теорема 17. *Если каждая из двух областей S и S' типа, рассмотренного в следствии из теоремы 16, может быть конформно отображена на круг, то область S может быть таким образом отображена на S', чтобы три заданных различных точки границы S перешли в три заданных точки границы S', расположенных в том же порядке. Такое отображение может быть выполнено единственным способом.* По условию каждая из областей S и S' может быть отображена на Q_0, причем соответствие границ будет непрерывным. Пусть m, n, p три точки на границе S, расположенные таким образом, что, двигаясь от m в положительном направлении, встречаем сначала точку n, а затем p. Пусть m', n', p' три в таком же порядке расположенных точки границы S'. Обозначим соответственно через $t = \varphi(z)$ и $t' = \psi(z')$ функции, производящие отображение областей S и S' на круг Q_0. При отображениях посредством этих функций точки m, n, p и m', n', p' переходят соответственно в m_1, n_1, p_1 и m_1', n_1', p_1' на окружности Q_0. Обозначим через $t' = T(t)$ линейное преобразование, переводящее три точки окружности Q_0: m_1, n_1, p_1 в точки m_1', n_1', p_1' той же окружности; это преобразование переводит внутренность Q_0 в самое себя.

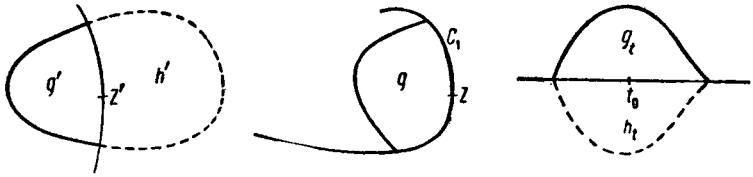
Выполняя последовательно преобразования $t = \varphi(z)$, $t' = T(t)$ и затем преобразование, обратное преобразованию $t' = \psi(z')$, переводящему S' в Q_0, убеждаемся, что в результате область S переходит в S' и при этом точки m, n, p переходят соответственно в m', n', p'.

Предположим теперь, что существуют две функции: $z' = f(z)$ и $z' = F(z)$, осуществляющие такого рода отображение. Тогда функции $t' = \psi(z') = \psi[f(z)]$ и $t_1 = \psi[F(z)]$ производят отображение S на Q_0. Но тогда согласно теореме 14 t_1 есть линейная функция t'. Далее, так как при $z = m$, n, p имеем $t_1 = t'$, то (теорема 6 § 3) $t_1 \equiv t'$; или $\psi[F(z)] \equiv \psi[f(z)]$ и, следовательно, $F(z) \equiv f(z)$.

Итак, существует только одна функция, удовлетворяющая условиям теоремы.

§ 82. Аналитические дуги и продолжение отображающей функции через границу области. Возвратимся теперь к отображению S на Q_0. Допустим, что отображающая функция $z' = f(z)$ аналитична в точке Z на границе S; в этом случае отображающая функция может быть продолжена за границу S и кроме того, в случае если $f'(z) \neq 0$ в точке Z, обратная функция $z = \varphi(z')$ аналитична в точке $Z' = f(Z)$, лежащей на границе Q_0. При этом окрестность точки Z конформно отображается на однолистную окрестность точки Z'. Дуга окружности Q_0, лежащая в достаточно малой окрестности Z', переходит посредством функции $\varphi(z)$ в *аналитическую* дугу $z = \varphi(e^{i\theta})$, проходящую через Z [1]).

Если $f'(Z) = 0$, то $f'(z)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности точки Z, исключая Z, и граница области S в окрестности Z состоит из аналитических дуг. Для того чтобы было возможно продолжение $f(z)$ через границу области, необходимо, чтобы граница содержала по крайней мере одну аналитическую дугу. Если граница области S не содержит ни одной аналитической дуги, то эта граница является естественной границей области S (купюрой).



Черт. 60.

Теорема 18. *Если жорданова кривая C_1, рассматриваемая в теореме 16, есть аналитическая кривая, то $f(z)$ аналитична в каждой внутренней точке Z кривой C_1 и, следовательно, может быть аналитически продолжена через границу в окрестности Z. Функция $f(z)$ производит конформное отображение окрестности Z.*

Пусть $z = \psi(t)$ уравнение кривой C_1, причем $\psi(t_0) = Z$, $\psi'(t_0) \neq 0$. Функция $z = \psi(t)$ конформно отображает окрестность t_0 на окрестность точки Z и притом так, что кусок действительной оси, содержащий t_0, переходит в кусок кривой C_1, содержащий Z. Тогда очевидно, что достаточно малая область g_t (черт. 60), примыкающая к действительной оси в окрестности t_0,—предположим, для определенности, что эта область лежит в верхней полуплоскости,—отображается на область g, содержащуюся в S и примыкающую к C_1 в окрестности точки Z. Область g в свою очередь отображается посредством функции $z' = f(z)$ на область g', содержащуюся в Q_0 и примыкающую к дуге окружности Q_0, проходящей через точку Z', соответствующую точке Z. Функция $z' = f[\psi(t)]$, отображающая g_t на g', аналитична в g_t и непрерывна на куске

[1]) Жорданова кривая $z = z(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ называется *аналитической*, если $z = z(t)$ есть аналитическая функция t и если $z'(t) \neq 0$ в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. В нашем случае θ играет роль t.

действительной оси, входящем в границу g_t. Обозначим через h_t область, получающуюся путем отражения области g_t относительно действительной оси, и через h' область, получающуюся из области g' путем инверсии относительно окружности Q_0. Выполним последовательно преобразования: отражение относительно действительной оси, переводящее h_t в g_t, отображение g_t на g' посредством функции $z' = f[\psi(t)]$ и наконец инверсию относительно Q_0, переводящую g' в h'. В результате мы получили конформное отображение h_t на h' посредством некоторой функции $z' = F(t)$, аналитичной в h_t и непрерывной на куске действительной оси, содержащемся в границе h_t. Далее заметим, что посредством этого преобразования точки действительной оси переходят в те же самые точки, в которые они переходят посредством преобразования $z' = f[\psi(t)]$. Итак, функции $F(t)$ и $f[\psi(t)]$ аналитичны соответственно в областях g_t и h_t, примыкающих друг к другу вдоль куска действительной оси. В точках общей границы этих областей $F(t)$ и $f[\psi(t)]$ принимают одно и то же непрерывное множество значений; следовательно, $F(t)$ есть аналитическое продолжение $f[\psi(t)]$ на область h_t. Таким образом функция $f[\psi(t)]$ аналитична в полной окрестности t_0 и, следовательно, $f(z)$ аналитична в соответствующей окрестности Z. Отображения окрестности Z на окрестность t_0 и этой последней окрестности на окрестность Z' оба конформны, поэтому $z' = f(z)$ дает конформное отображение окрестности Z на окрестность Z'.

§ 83. Границы, содержащие дуги окружности. Сейчас мы докажем теорему, очень полезную в различных приложениях.

Теорема 19. *Пусть $z' = f(z)$ отображает область S на область S' и притом так, что содержащаяся в границе S дуга окружности AB переходит непрерывным образом в дугу окружности $A'B'$, содержащуюся в границе S'. Пусть S_1 и S_1' области, получающиеся путем инверсии областей S и S' относительно дуг AB и $A'B'$ соответственно. Тогда $f(z)$ может быть аналитически продолжена через дугу AB в область S_1 и производит конформное отображение S_1 на S_1'.*

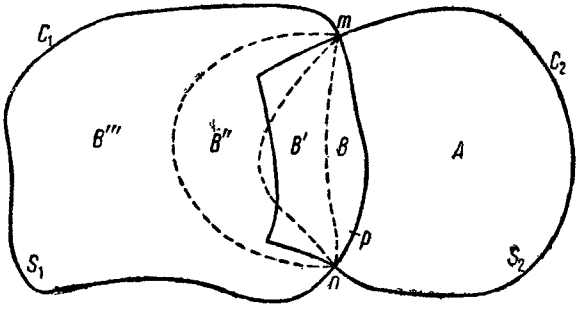
Теорема доказывается аналогично теореме 18. Пусть z_1 точка области S_1 и пусть z точка области S, сопряженная z_1 относительно AB; пусть, далее, $z' = f(z)$ и пусть, наконец, z_1' точка области S_1', сопряженная z' относительно дуги $A'B'$. Очевидно, что z_1' есть функция z_1, $z_1' = F(z_1)$. Отображение области S_1 на область S_1', производимое этой функцией, конформно, так как оно равносильно одному конформному отображению и двум инверсиям. Следовательно, $F(z_1)$ аналитична в S_1. Когда z_1 и z приближаются к одной и той же точке на AB, то z_1' и z' приближаются к одной и той же точке на $A'B'$. Таким образом $F(z_1)$ и $f(z)$ принимают на дуге одни и те же значения. Отсюда вытекает, что $F(z_1)$ есть аналитическое продолжение $f(z)$ на область S_1 через дугу AB.

Следствие. *Если рассматриваемая в теореме 19 область S' есть единичный круг и если дуга AB не составляет всей границы области S, то область, образуемая из областей S и S_1, примыкающих вдоль AB, может быть отображена на Q_0.*

В этом случае $A'B'$ есть дуга Q_0, однако не вся окружность; S_1' есть полная внешность круга Q_0. Функция $z' = f(z)$ отображает область, образованную из областей S и S_1, соединенных вдоль AB, на область, образованную из внутренности и внешности круга Q_0, соединенных вдоль $A'B'$. Последняя область есть однолистная область, ограниченная дугой окружности Q_0, которая получается, если удалить из Q_0 дугу $A'B'$.

Согласно теореме 13 эта область может быть отображена на Q_0.

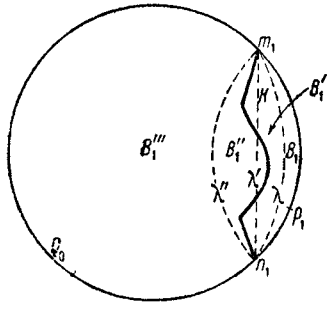
§ 84. Отображение комбинированных областей. Теперь перейдем к рассмотрению вопроса об отображении многолистной области на круг.



Черт. 61.

Докажем следующее предложение, которое даст нам возможность в дальнейшем доказать значительно более общую теорему.

Теорема 20. *Пусть S_1 и S_2 области, имеющие границы C_1 и C_2, типа, рассмотренного в следствии из теоремы 16, и пусть каждая из этих областей может быть отображена на круг. Пусть, далее, границы C_1 и C_2 пересекаются в двух точках m, n и пусть общая часть областей S_1 и S_2 есть односвязная область. Пусть, наконец, точки m, n лежат внутри аналитических дуг как на границе области S_1, так и на границе области S_2 и пусть ни один из углов с вершинами в точках m, n, образуемых дугами, ограничивающими общую часть областей S_1 и S_2, не равен нулю. Тогда область S_1+S_2 может быть отображена на круг.*

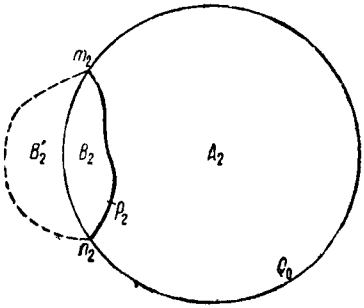


Черт. 62.

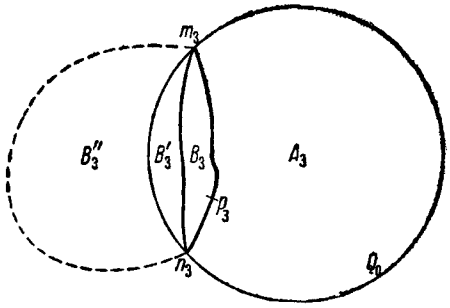
Области S_1 и S_2 схематически изображены на черт. 61. Пусть p точка C_1, лежащая в S_2. Обозначим через $z_1 = f_1(z)$ функцию, отображающую S_1 конформно на Q_0. Точки m, n, p переходят в точки m_1, n_1, p_1 на окружности Q_0. Общая часть областей S_1 и S_2 переходит в область K, лежащую в круге Q_0; граница области K содержит дугу $n_1p_1m_1$. Отображающая функция аналитична в точках m и n, а поэтому в этих точках при отображении сохраняются углы. Отсюда следует, что лежащая в S_1 часть C_2 при отображении переходит в кривую, лежащую в круге Q_0 (волнистая кри-

вая, черт. 62), пересекающую дугу $n_1p_1m_1$ в точках m_1 и n_1 под углами, каждый из которых больше нуля.

Проведем через точки m_1 и n_1 дугу окружности, целиком лежащую в области K. Обозначим эту дугу через λ. Потребуем кроме того, чтобы λ пересекала дугу $n_1p_1m_1$ под углом $\theta=\frac{\pi}{2^s}$, где s — целое положительное число. Обозначим через λ' дугу, в которую переходит $n_1p_1m_1$ при инверсии относительно λ. Далее обозначим через λ'' дугу, в которую переходит $n_1p_1m_1$ при инверсии относительно λ' и т. д. Очевидно, что дуга $\lambda^{(s)}$ лежит на окружности Q_0. Дуги $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(s)}$ делят круг Q_0 на части $B_1, B_1', B_1'', \ldots, B_1^{(s)}$. Обозначим через $B, B', B'', \ldots, B^{(s)}$ соответствующие области в S_1. Пусть A есть часть области S_2, лежащая вне S_1. Пусть, далее, функция $z_2=f_2(z)$ производит конформное отображение области $A+B$ на Q_0. Такое отображение возможно, так как при отобра-



Черт. 63.



Черт. 64.

жении S_2 на Q_0 $A+B$ переходит в однолистную область, а эта последняя на основании теоремы 13 может быть отображена на Q_0.

Обозначим через A_2, B_2, m_2, n_2, p_2 области и точки, в которые переходит A, B, m, n, p при отображении посредством функции $f_2(z)$ (черт. 63).

Функция $f_2(z)$ может быть аналитически продолжена через границу области B. Мы сейчас покажем, что она может быть продолжена на полную область B'. Как известно, существует единственная функция, отображающая B_1 на B_2 так, что при этом точки m_1, n_1, p_1 переходят соответственно в m_2, n_2, p_2. Обозначим эту функцию через $z_2'=\varphi_2(z_1)$. На основании теоремы 19 $\varphi_2(z_1)$ может быть аналитически продолжена через λ на область B_1' и отображает B_1' на B_2'. Через B_2' обозначена область, в которую переходит B_2 при инверсии относительно окружности Q_0. Функция $z'=\varphi_2[f_1(z)]$ существует всюду в области $B+B'$ и отображает $B+B'$ на B_2+B_2'. Но в области B $\varphi_2[f_1(z)]\equiv f_2(z)$, так как обе эти функции отображают точки m, n, p в одни и те же точки (теорема 17). Следовательно, $\varphi_2[f_1(z)]$ есть аналитическое продолжение $f_2(z)$. Функция $f_2(z)$ отображает область $A+B+B'$ на $A_2+B_2+B_2'$. Эта последняя область однолистна и, следовательно, может быть отображена на Q_0.

Повторим теперь проведенное рассуждение с той лишь разницей, что вместо области B будем рассматривать $B+B'$. Обозначим через $z_3=f_3(z)$ функцию, отображающую $A+B+B'$ на Q_0 (черт. 64). Функция $z_3=\varphi_3(z_1)$, отображающая B_1+B_1' на B_3+B_3', так что при этом точки m_1, n_1, p_1 переходят в m_3, n_3, p_3, может быть аналитически продолжена на область B_1'' и производит отображение области B_1'' на B_3''. Через B_3'' обозначена область, в которую переходит B_3+B_3' при инверсии относительно Q_0. Но из того, что $\varphi_3[f_1(z)]$ и $f_3(z)$ совпадают в $B+B_1$, мы заключаем, что $f_3(z)$ может быть аналитически продолжена на область B'' и отображает B'' на область B_3''. Следовательно, функция $z_3=f_3(z)$ отображает область $A+B+B'+B''$ на однолистную область, которая, в свою очередь, может быть отображена на Q_0. Продолжая рассуждать таким же образом, мы после конечного числа шагов придем к функции, отображающей $A+B+B'+\ldots+B^{(s)}$ на Q_0, и теорема доказана.

§ 85. Отображение предельной области. Применяя шаг за шагом метод предшествующего параграфа, мы можем строить из конечного числа перекрывающихся однолистных областей новые области, которые могут быть отображены на круг. Эти области имеют конечное число листов и ограничены жордановыми кривыми. Сейчас мы докажем теорему относительно области, построенной посредством бесконечного процесса. Пользуясь этой теоремой, мы получим результаты, относящиеся к областям с границей общего вида, а также к областям с бесконечным числом листов. Эта важная теорема принадлежит Кёбе.

Теорема 21. *Пусть дана бесконечная последовательность областей $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \ldots$, обладающих следующими свойствами: каждая из этих областей может быть отображена на круг и каждая из них является подобластью следующей за ней области. Обозначим через Φ область, содержащую все внутренние точки каждой из областей Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ и не содержащую никаких других точек ($\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\ldots+\Phi_n+\ldots$). Тогда область Φ может быть конформно отображена или на круг или на всю конечную плоскость (на плоскость из которой удалена бесконечно удаленная точка).*

Пусть a обыкновенная внутренняя точка области Φ_1. Очевидно, что a лежит внутри Φ_n. Обозначим через $z_n=f_n(z)$ функцию, отображающую Φ_n на единичный круг Q_0 плоскости z_n и притом так, что a переходит в начало координат, а положительное направление действительной оси в точке a переходит в положительное направление действительной оси в начале координат, т. е. $f_n(a)=0$ и $f_n'(a)>0$. Функция $f_n(z)$ существует на основании следствия из теоремы 14. Займемся изучением последовательности функций:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{59}$$

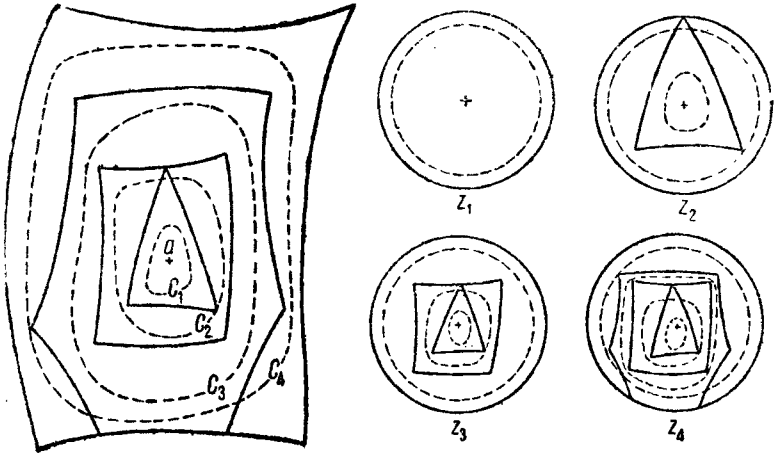
Области Φ_n схематически изображены на черт. 65 слева. Отображения на круг нескольких первых из этих областей представлены на том же чертеже справа. Пусть z есть точка области Φ_m и пусть

$$z_m=f_m(z), \quad z_n=f_n(z), \qquad m<n \tag{60}$$

соответствующие точки на плоскостях z_m и z_n. Функция $f_m(z)$ отображает Φ_m на Q_0 на плоскости z_m, функция $f_n(z)$ отображает Φ_m на некоторую область, лежащую внутри Q_0 на плоскости z_n. Функция

$$z_n = f_n\left[f_m^{-1}(z_m)\right] = \varphi_{n,m}(z_m), \tag{61}$$

где через $f_m^{-1}(z)$ обозначена функция, обратная $f_m(z)$, отображает круг Q_0 плоскости z_m на область, лежащую в круге Q_0 на



Черт. 65.

плоскости z_n. Функция $\varphi^{n,\,m}(z_m)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца (теорема 1), поэтому

$$|z_n| = |\varphi_{n,\,m}(z_m)| < |z_m|, \quad z_m \neq a; \quad \left|\frac{dz_n}{dz_m}\right|_0 = |\varphi'_{n,\,m}(0)| < 1. \tag{62}$$

На основании (60) имеем:

$$\left(\frac{dz_n}{dz_m}\right)_0 = \frac{f'_n(a)}{f'_m(a)}$$

и, следовательно:

$$|f_n(z)| < |f_m(z)|, \quad z \neq a; \quad f'_n(a) < f'_m(a). \tag{63}$$

В частности,

$$|f_{n+1}(z)| < |f_n(z)|, \quad z \neq a; \quad f'_{n+1}(a) < f'_n(a). \tag{64}$$

Проведем в каждой из плоскостей z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ окружность Q с центром в начале и с радиусом $r < 1$. Обозначим через C_n кривую в области Φ_n, которая переходит посредством функции $z_n = f_n(z)$ в окружность Q. Кривые $C_1, C_2, \ldots$ являются границами областей $S_1, S_2, \ldots$, лежащих в области Φ и обладающими следующими свойствами: S_n лежит в Φ_n и содержит точку a. Кроме того, S_n вместе со своей границей C_n лежит в области S_{n+1}. Последнее утверждение следует из того, что на основании неравен-

ства (62) внутренность и граница Q на плоскости z_n переходит посредством функции $\varphi_{n+1,\,n}(z)$ в область, лежащую внутри Q на плоскости z_{n+1}.

Далее, какова бы ни была точка P из области Φ, можно выбрать r настолько близким к единице, чтобы для достаточно большого m точка P лежала внутри всех областей S_m, S_{m+1}, ... В самом деле, пусть P лежит внутри Φ_m. Тогда при отображении области Φ_m на Q_0 посредством функции $z_m = f_m(z)$ точка P переходит во внутреннюю точку P' круга Q_0. Следовательно, достаточно выбрать r настолько большим, чтобы P' лежала внутри Q.

Производная $f_n'(a)$ положительна и убывает с ростом n [неравенство (64)]. Следовательно, при n, стремящемся к бесконечности, $f_n'(a)$ стремится к определенному пределу $h \geqslant 0$. Мы будем различать два случая:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} f_n'(a) = h > 0; \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty} f_n'(a) = 0.$$

Сходимость. Во-первых докажем, *что в обоих случаях последовательность $f_n(z)$ сходится в области Φ и что предельная функция аналитична в Φ.* Для того чтобы это доказать, достаточно доказать, что последовательность $f_n(z)$ сходится равномерно в каждой области S_m. В самом деле, из равномерной сходимости вытекает аналитичность предельной функции в S_m. А так как, с другой стороны, какова бы ни была точка области Φ, m и r могут быть выбраны так, чтобы эта точка содержалась в S_m, то этим самым будет доказано, что предельная функция аналитична в Φ.

Вместо того чтобы рассматривать функции переменного z в области S_m, можно, отобразив S_m на круг Q на плоскости z_m, рассматривать соответствующие функции переменного z_m. Таким образом имеем $f_n(z) = \varphi_{n,\,m}(z_m)$ и нам нужно доказать равномерную сходимость последовательности:

$$\varphi_{m,\,m}(z_m),\quad \varphi_{m+1,\,m}(z_m),\quad \varphi_{m+2,\,m}(z_m),\ \ldots \tag{65}$$

в круге Q. Рассмотрим функцию:

$$\frac{\varphi_{n+p,\,m}(z_m) - \varphi_{n,m}(z_m)}{z_m}, \qquad n \geqslant m, \quad p > 0. \tag{66}$$

Эта функция не обращается в нуль в круге Q_0. В самом деле, если $z_m \neq 0$, то на основании (63) $|\varphi_{n+p,\,m}(z_m)| < |\varphi_{n,m}(z_m)|$, если же $z_m = 0$, то

$$\left(\frac{\varphi_{n+p,\,m}(z_m) - \varphi_{n,m}(z_m)}{z_m}\right)_0 = \left(\frac{dz_{n+p}}{dz_m}\right)_0 - \left(\frac{dz_n}{dz_m}\right)_0 = \frac{f_{n+p}'(a) - f_n'(a)}{f_m'(a)} < 0.$$

Далее, эта функция ограничена в Q_0, так как на основании (62) $\left|\frac{\varphi_{n,m}(z_m)}{z_m}\right| < 1$, поэтому

$$\left|\frac{\varphi_{n+p,m}(z_m) - \varphi_{n,\,m}(z_m)}{z_m}\right| < 2. \tag{67}$$

Итак, функция (66) удовлетворяет всем условиям теоремы 10. В данном случае роль Σ и Σ' играют соответственно круги Q и Q_0. Поэтому (полагая $z_1 = z_m$ и $z_2 = 0$) получаем:

$$\left|\frac{\varphi_{n+p,m}(z_m) - \varphi_{n,m}(z_m)}{z_m}\right| \leqslant K_2 \left|\frac{f'_{n+p}(a) - f_n'(a)}{f_m'(a)}\right|^{\frac{1}{K}}, \tag{68}$$

где K_2 и K постоянные, зависящие от r (радиус круга Q), но не зависящие от m, n, p. Неравенство (68) имеет место для всех точек, принадлежащих Q.

Так как последовательность $f_n'(a)$ сходится, то при соответствующем выборе n правая часть (68) может быть сделана меньше произвольно взятого положительного числа ε. Таким образом для всех точек, лежащих внутри и на окружности Q, получаем:

$$|\varphi_{n+p,m}(z_m) - \varphi_{n,m}(z_m)| \leqslant \varepsilon |(z_m)| < \varepsilon \tag{69}$$

для достаточно большого n и для всех $p > 0$. Этим доказана равномерная сходимость последовательности (65) в Q.

Нетрудно видеть, что в случае *II предельная функция тождественно равна нулю*. Прилагая теорему 10 к функции $\frac{\varphi_{n,m}(z_m)}{z_m}$, получаем для всех точек круга Q.

$$\left|\frac{\varphi_{n,m}(z_m)}{z_m}\right| \leqslant K_2 \left|\frac{\varphi_{n,m}(z_m)}{z_m}\right|^{\frac{1}{K}} = K_2 \left(\frac{f_n'(a)}{f_m'(a)}\right)^{\frac{1}{K}}. \tag{70}$$

Выбирая достаточно большое n, мы можем сделать $f_n'(a)$, а, следовательно, и $|\varphi_{n,m}(z_m)|$ произвольно малым. Отсюда следует, что

$$\lim_{h \to \infty} \varphi_{n,m}(z_m) = 0.$$

Случай I. Пусть $f(z)$ предельная функция последовательности (59). Докажем, что эта функция отображает Φ на Q_0. Абсолютная величина $f(z)$ в области Φ не превышает единицы, так как в каждой точке области Φ $f(z)$ есть предел последовательности функций, каждая из которых меньше единицы по абсолютной величине. Остается показать, что $f(z)$ принимает каждое значение z', лежащее в Q_0, и притом только один раз.

Обозначим через $\varphi_m(z_m)$ функцию, в которую преобразуется $f(z)$ при отображении области Φ_m на круг Q_0 посредством функции $z_m = f_m(z)$. Когда z лежит в Φ_m, z_m находится в Q_0 и

$$f(z) = \varphi_m(z_m) = \lim_{n \to \infty} \varphi_{n,m}(z_m).$$

Пусть a точка круга Q_0; выберем r настолько близким к единице, чтобы круг Q заключал точку a. Этим самым будут фик-

сированы постоянные K_2 и K в неравенстве (68). Полагая $n=m$, получаем из (68):

$$\left|\frac{\varphi_{m+p,m}(z_m)-z_m}{z_m}\right| \leqslant K_2 \left|\frac{f'_{m+p}(a)-f_m'(a)}{f_m'(a)}\right|^{\frac{1}{K}}. \tag{71}$$

Выберем теперь $\varepsilon>0$, так, чтобы

$$\varepsilon < r-|a|. \tag{72}$$

Так как последовательность $f_n'(a)$ сходится, то, выбирая соответствующим образом m, можно сделать числитель дроби, стоящей в правой части (71), сколь угодно малым; но знаменатель $f_m'(a)$ остается большим, чем h, и поэтому мы можем сделать вторую часть неравенства (71) сколь угодно малой. Отсюда

$$|\varphi_{m+p,m}(z_m)-z_m| \leqslant \varepsilon |z_m| < \varepsilon \tag{73}$$

для достаточно большого m. Переходя к пределу при $p\to\infty$, получаем:

$$|\varphi_m(z_m)-z_m| \leqslant \varepsilon. \tag{74}$$

Функция $\varphi_{m+p,m}(z_m)$ отображает круг Q вместе с границей на некоторую однолистную область на плоскости z_{m+p}. На самой окружности Q $|z_m|=r$, и поэтому на основании (73) и (74) получаем:

$$\left.\begin{aligned} r-\varepsilon < |\varphi_{m+p,m}(z_m)| < r+\varepsilon; \\ r-\varepsilon \leqslant |\varphi_m(z_m)| \leqslant r+\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Из первого из неравенств (75) и из (72) следует, что окружность Q переходит при отображении в кривую, заключающую точку a, поэтому для всех $p>0$ функция $\varphi_{m+p,m}(z_m)-a$ имеет единственный нуль в круге Q. Далее, из второго неравенства (75) следует, что $\varphi_m(z_m)-a$ не обращается в нуль на окружности Q. Применяя теорему (12), заключаем, что $\varphi_m(z_m)-a$ имеет единственный простой нуль в Q. Итак, $f(z)$ принимает в области S_m значение a один и только один раз. Осталось показать, что $f(z)$ принимает значение a в области Φ только в одной точке. Предположим противное, т. е. что значение a принимается в двух различных точках области Φ. Тогда можно выбрать r ($r>|a|$) и ν так, чтобы обе точки содержались в S_ν. Поэтому, если бы мы в предшествующем рассуждении выбрали $m\geqslant\nu$, то получилось бы противоречие, так как $f(z)$ принимала бы значение a в области S_m более чем один раз.

Случай II. Если $\lim f_n'(a)$ равен нулю, то предел последовательности (59) есть тождественный нуль, и вопрос об отображении области Φ на круг отпадает. В этом случае мы изменим нашу задачу следующим образом: вместо того чтобы отображать область Φ_n на Q_0, отобразим Φ_n на круг Q_n с центром в начале коор-

динат и радиусом $\frac{1}{f_n'(a)}$. В качестве отображающей функции возьмем

$$Z_n = F_n(z) = \frac{f_n(z)}{f_n'(a)}. \tag{76}$$

Эта функция переводит a в начало координат, и так как $F_n'(a)=1$, то при отображении длины в точке a остаются неизменными. Радиусы кругов Q_n стремятся к бесконечности при неограниченном росте n. Области, получающиеся при отображении посредством функций $F_n(z)$, могут быть построены в соответствии с формулой $Z_n = \frac{z_n}{f_n'(a)}$ путем подобного преобразования областей, изображенных на черт. 65, с центром подобия в начале. Кругу Q соответствует круг Q_n' радиуса $\frac{r}{f_n'(a)}$.

Мы сейчас докажем, что последовательность

$$F_1(z), \quad F_2(z), \quad F_3(z), \ldots \tag{77}$$

сходится в Φ, что предельная функция $F(z)$ аналитична в Φ и что $Z' = F(z)$ отображает область Φ на всю конечную плоскость.

При отображении Φ_n на круг Q_n плоскости Z_n посредством функции (76) каждая подобласть S_m, $m \leqslant n$ области Φ_n переходит в подобласть круга Q_n.

Обозначим границу этой подобласти через $C_{n,m}$. Область, ограниченная кривой $C_{n,m}$, есть однолистное отражение области Q_m', лежащей на плоскости Z_m, посредством функции

$$Z_n = F_n(z) = F_n[F_m^{-1}(Z_m)] = \psi_{n,m}(Z_m). \tag{78}$$

Далее имеем:

$$\psi_{n',m}(0) = \left(\frac{dZ_n}{dZ_m}\right)_0 = \frac{F_n'(a)}{F_m'(a)} = 1. \tag{79}$$

Применим теперь к области Q_m' следствие из теоремы 7. Когда Z_m лежит на окружности Q_m', то в соответствующей граничной точке, лежащей на $C_{n,m}$ в плоскости Z_n, имеют место неравенства:

$$\frac{r}{(1+r)^2 f_n'(a)} \leqslant |Z_n| = |\psi_{n,m}(Z_m)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2 f_n'(a)}. \tag{80}$$

Останавливая наше внимание на определенной области S_m из Φ и ее отображении Q_m' на плоскости Z_m, мы хотим доказать, что для данного $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое n, что

$$|\psi_{n+p,m}(Z_m) - \psi_{n,m}(Z_m)| < \varepsilon \tag{81}$$

для всех $p > 0$. Мы докажем это неравенство, рассматривая бо́льшую область S_s, $s > m$, содержащую S_m, и круг Q_s' на плоскости Z_s, в которой отображается S_s.

Так как $f_s'(a)$ стремится к нулю, когда s неограниченно возрастает, то можно выбрать настолько большое s ($>m$), чтобы

$$\frac{(1+r)^2 f_s'(a)}{r} < \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{(1-r)^2 f_m'(a)}{r}\right]^2. \tag{82}$$

Из неравенств (80) и (82) получаем для любого $n>s$:

$$\left|\frac{1}{\psi_{n,s}(Z_s)}\right| \leqslant \frac{(1+r)^2 f_s'(a)}{r} < \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{(1-r)^2 f_m'(a)}{r}\right]^2. \tag{83}$$

Следовательно, на окружности Q_s' имеет место неравенство:

$$\left|\frac{1}{\psi_{n+p,s}(Z_s)} - \frac{1}{\psi_{n,s}(Z_s)}\right| < \varepsilon\left[\frac{(1-r)^2 f_m'(a)}{r}\right]^2. \tag{84}$$

Функция $\frac{1}{\psi_{n+p,s}(Z_s)} - \frac{1}{\psi_{n,s}(Z_s)}$ аналитична всюду в круге Q_s'

В самом деле, каждая из этих дробей имеет полюс в начале координат и аналитична в других точках круга Q_s'. Так как $\psi_{n,s}'(0) = 1$, то в окрестности полюса имеет место разложение:

$$\frac{1}{\psi_{n,s}(Z_s)} = \frac{1}{Z_s + C_n Z_s^2 + \ldots} = \frac{1}{Z_s} - C_n + \ldots$$

и

$$\frac{1}{\psi_{n+p,s}(Z_s)} - \frac{1}{\psi_{n,s}(Z_s)} = \frac{1}{Z_s} - C_{n+p} + \ldots - \left(\frac{1}{Z_s} - C_n + \ldots\right) = \varphi(Z_s),$$

причем $\varphi(Z_s)$ аналитична в начале.

Так как максимум модуля аналитической функции достигается на границе, то неравенство (84) справедливо всюду внутри Q_s'.

Область Q_s' содержит область $Q_{s,m}'$, в которую переходят области Q_m' посредством функции $\psi_{s,m}(Z_m)$, и следовательно, неравенство (84) справедливо в области $Q_{s,m}'$. Подставляя в неравенство (84) $\psi_{s,m}(Z_m)$ вместо Z_s, получаем во всех точках окружности Q_m:

$$\left|\frac{1}{\psi_{n+p,m}(Z_m)} - \frac{1}{\psi_{n,m}(Z_m)}\right| < \varepsilon\left[\frac{(1-r)^2 f_m'(a)}{r}\right]^2.$$

Поэтому, принимая во внимание второе из неравенств (80), будем иметь на окружности Q_m':

$$|\psi_{n+p,m}(Z_m) - \psi_{n,m}(Z_m)| < \varepsilon\left[\frac{(1-r)^2 f_m'(a)}{r}\right]^2 |\psi_{n+p,m}(Z_m)\psi_{n,m}(Z_m)| \leqslant \varepsilon.$$

Так как левая часть последнего неравенства аналитична внутри Q_m', то, следовательно, это неравенство справедливо для всех точек круга Q_m' и т. д. Из предшествующего вытекает, что последовательность $\psi_{n,m}(Z_m)$, сходится к предельной функции $\psi_m(Z_m)$, аналитической в круге Q_m'. Соответствующая функция z, т. е. $\psi_m(Z_m) \equiv F(z)$, которая является предельной функцией последовательности (77), аналитична в области S_m. Но область S_m может быть выбрана так, чтобы любая наперед заданная точка области Φ

содержалась в S_m, и поэтому последовательность (77) сходится всюду в Φ и предельная функция этой последовательности аналитична в Φ.

Теперь мы докажем, что $Z' = F(z)$ отображает Φ на всю конечную плоскость. Пусть a какая-нибудь конечная точка плоскости Z' и пусть m выбрано так, что $\frac{r}{(1+r)^2 f_m'(a)} > |a|$. Тогда на основании неравенства (80) будем иметь на окружности Q_m':

$$|\psi_m(Z_m)| = \lim_{n=\infty} |\psi_{n,m}(Z_m)| > |a|.$$

Отсюда заключаем, что $\psi_m(Z_m) - a$ не обращается в нуль на окружности Q_m'. Поэтому на основании теоремы 12 функция $\psi_m(Z_m) - a$ и функции $\psi_{n,m}(Z_m) - a$ для достаточно больших значений n имеют одно и то же число нулей в Q_m'. Но функция $\psi_{n,m}(Z_m) - a$ имеет один нуль в Q_m', так как $Z = \psi_{n,m}(Z_m)$ отображает Q_m' на однолистную область, содержащую точку a. Отсюда следует, что функция $\psi_m(Z_m)$ принимает в Q_m' значение a один и только один раз. А поэтому функция $F(z)$ принимает в области S_m значение a один и только один раз.

Так же, как и в случае *I*, доказывается, что функция $F(z)$ не может принять значение a в двух различных точках области Φ. В самом деле, область S_m может быть выбрана так, что обе эти точки будут содержаться в ней; получится противоречие с тем, что было только что доказано. Следовательно, функция $F(z)$ принимает в Φ значение a один и только один раз. Теперь теорема доказана полностью.

Предельные области Φ распадаются на два класса: к одному классу относятся области, которые отображаются на круг; к другому — области, которые отображаются на плоскость, из которой исключена бесконечно удаленная точка. Может показаться, что одна и та же область Φ, будучи аппроксимирована одной последовательностью областей $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, окажется принадлежащей одному классу, будучи же аппроксимирована последовательностью, построенной по другому закону, войдет в другой класс. Однако это невозможно; в самом деле, если бы Φ можно было отобразить и на круг Q_0 и на плоскость с исключенной бесконечно удаленной точкой, то плоскость могла бы быть конформно отображена на Q_0, что невозможно, как это было показано в начале § 78. Следующая теорема дает удобный критерий для определения характера области.

Теорема 22. *Если граница предельной области Φ содержит кривую, ограничивающую вместе с некоторой жордановой дугой однолистную односвязную подобласть области Φ, то Φ отображается на круг.*

Предположим противное, тогда существует функция, отображающая Φ на всю конечную плоскость. Делая соответствующее линейное преобразование, мы можем построить функцию $z' = f(z)$, отображающую Φ на полную плоскость z' без начала координат. Проведем жорданову кривую — обозначим ее через q, — отсекающую

на поверхности Φ однолистную односвязную область S с границей, состоящей из q и из части, упомянутой в условии теоремы кривой, входящей в границу Φ; эту часть кривой мы обозначим через h. Кроме того, мы можем потребовать, чтобы точка Φ, переходящая в бесконечность, лежала вне области S. Область S отображается на область S' в плоскости z', при этом кривая q переходит в замкнутую жорданову кривую, являющуюся границей S' (вся часть границы h переходит в начало координат). Когда точка z, находясь на q, стремится к какому-либо из концов кривой q, точка z' стремится к началу координат. Если мы конформно отобразим S' на единичный круг Q_0, то точки границы S' и окружности Q_0 будут соответствовать друг другу взаимно-однозначно (теорема 15). Выполненные нами два отображения равносильны конформному отображению S на Q_0.

Пусть L_1 и L_2 кривые, проведенные в области S к двум различным достижимым точкам h. Соответствующие кривые L_1' и L_2' в области S оканчиваются в начале координат. Поэтому соответствующие кривые L_1'' и L_2'' в круге Q_0 оканчиваются в одной и той же точке окружности Q_0. Получилось противоречие с предложением 3 § 80, и теорема доказана.

§ 86. Отображение односвязной области с конечным числом листов. Прежде чем изучать области с конечным числом листов общего типа, мы рассмотрим области, образуемые путем соединения квадратных элементов.

Квадратным элементом будем называть: a) внутренность или внешность квадрата, расположенного на одном листе, вместе с границей этого квадрата; b) область, состоящую из n равных квадратов, расположенных друг над другом на n листах и переходящих друг в друга около единственной точки ветвления порядка n, лежащей внутри этой области.

Нетрудно видеть, что квадратный элемент есть односвязная область и может быть отображен на круг. Возможность отображения элемента типа a) следует непосредственно из теоремы 13. В том, что элемент типа b) отображается на круг, убеждаемся следующим образом: пусть z_0 точка ветвления, тогда $z - z_0 = t^n$ дает отображение элемента b) на однолистную односвязную область в плоскости t, которая в свою очередь может быть отображена на круг.

Предположим, что, соединяя квадратные элементы подобно тому, как соединены куски в лоскутном одеяле, мы построим область с конечным числом листов. Для подобного рода областей имеет место следующее предложение:

Если односвязная область, граница которой содержит больше чем одну точку, построена путем соединения конечного числа квадратных элементов и если при этом точками ветвления этой области являются только точки ветвления отдельных элементов, то эта область может быть конформно отображена на круг.

Для доказательства применим метод индукции. Мы предположим, что каждая область рассматриваемого типа, построенная

из n квадратных элементов, может быть отображена на круг, и докажем, что в таком случае любая область, построенная из $n+1$ элементов, может быть отображена на круг. Так как область, состоящая из одного элемента, может быть отображена на круг, то этим самым будет доказано наше предложение.

Область S_{n+1} рассматриваемого в нашем предложении типа, состоящая из $n+1$ квадратных элементов, может быть получена путем присоединения к некоторой области S_n квадратного элемента S, причем присоединение может быть сделано так, чтобы часть границы элемента S входила в границу области S_{n+1}. Области S и S_n отображаются на круг (последняя в силу сделанного предположения). Воспользуемся теперь теоремой 20. Области S и S_n примыкают друг к другу вдоль их общей границы, которую мы обозначим через mn. Но они не имеют общей подобласти. Так как в силу определения квадратных элементов ни одна из точек линии mn не является точкой ветвления, то квадратный элемент S может быть слегка увеличен, с тем чтобы получился квадратный элемент S', имеющий с S_n общую односвязную часть, и чтобы граница S' пересекалась с границей S_n так, как требуется в теореме 20.

Тогда область S_n+S' может быть отображена на круг, а следовательно, область S_{n+1}, будучи подобластью S_n+S', может быть отображена на однолистную и односвязную область, которая в свою очередь, как известно, отображается на круг.

Теорема 23. *Всякая односвязная область с конечным числом листов и конечным числом точек ветвления, граница которой содержит больше чем одну точку, может быть конформно отображена на круг.*

Мы докажем, что любую заданную область указанного в теореме типа можно рассматривать как предел последовательности областей, образованных из квадратных элементов. Во-первых, преобразуем нашу область так, чтобы ее граница и точки ветвления перешли внутрь единичного круга Q_0. Это преобразование может быть сделано следующим образом: пусть P внутренняя точка области, такая, что ее координата z_0 не является в то же время координатой какой-нибудь граничной точки или точки ветвления. (Существование такой точки следует из того, во-первых, что число точек ветвления конечно, и из того, во-вторых, что точки границы не могут заполнить никакого куска плоскости.) Построим круг C с центром в точке z_0 настолько малого радиуса, чтобы все граничные точки и точки ветвления лежали вне C. Затем сделаем линейное преобразование, переводящее z_0 в ∞ и круг C на внешность круга Q_0. Очевидно, что при этом граница и точки ветвления окажутся внутри Q_0.

Далее мы можем предположить, что в выражении для z-координаты каждой точки ветвления $z=x+iy$ x и y иррациональные числа. В самом деле, точки плоскости, абсциссы и ординаты которых отличаются от абсцисс и ординат точек ветвления на рациональные числа, лежат на счетном множестве прямых, парал-

лельных осям абсцисс и ординат. Пусть z_1 точка в окрестности начала координат, не лежащая ни на одной из этих прямых.

Сделаем линейное преобразование (перенос), переводящее z_1 в начало координат. При этом переносе точки ветвления перейдут в точки, абсциссы и ординаты которых иррациональны. Точка z_1 должна быть, конечно, выбрана настолько близко к началу координат, чтобы и после переноса граница области и точки ветвления лежали в Q_0.

Произведем разбиение нашей области, которую мы обозначим через Φ, на квадратные элементы посредством прямых, параллельных осям x и y. Каждое сечение, производимое этими прямыми, мы будем рассматривать как сечение на всех листах. Сначала произведем сечение вдоль сторон квадрата K с вершинами $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$. K содержит Q_0. На каждом листе внешность квадрата K есть квадратный элемент, лежащий или целиком внутри области Φ или целиком вне нее. В первом случае, т. е. когда внешность K содержится в Φ, мы будем говорить, что этот квадратный элемент принадлежит первому множеству. Будем называть *элементом* всякий квадратный элемент, все внутренние и граничные точки которого лежат внутри Φ. Нетрудно видеть, что существует по крайней мере один элемент, принадлежащий первому множеству, а именно внешность K, лежащая на листе, в бесконечно удаленную точку которого перешла при линейном преобразовании точка P.

Займемся теперь областью с конечным числом листов, расположенной внутри K. Обозначим через ν целое число, настолько большое, чтобы диагональ квадрата со стороной $\frac{1}{\nu}$ была меньше чем наименьшее расстояние между точками плоскости z, в которых расположены точки ветвления. Пересечем квадрат K прямыми, параллельными оси y, проходящими через точки $-1+\frac{1}{\nu}$, $-1+\frac{2}{\nu}, \ldots$, и прямыми, параллельными оси x, проходящими через точки $-i+\frac{i}{\nu}$, $-i+\frac{2i}{\nu}, \ldots$ Ни один из квадратов, на которые мы таким образом разбили K, не может содержать больше чем одну точку ветвления. Те из полученных при этом разбиении квадратных элементов, которые целиком лежат в Φ, мы будем называть элементами второго множества.

Займемся теперь элементами последнего разбиения, не вошедшими во второе множество. Разделим каждый из них на четыре части прямыми, соединяющими середины противоположных сторон. Те из новых квадратов, которые целиком принадлежат Φ, образуют третье множество. Каждый из квадратов последнего подразделения, не вошедших в третье множество, вновь разделим на четыре части и выделим четвертое множество. Будем продолжать этот процесс неограниченно.

Приступим теперь к построению областей из полученных элементов. Обозначим через Φ_1 какой-нибудь элемент первого множества. Присоединим к Φ_1 все те элементы первого и второго множеств, которые вместе с Φ_1 образуют связную область, и обозначим эту область через Φ_2 и т. д. В общем мы обозначим через Φ_n область, получаемую в результате присоединения к Φ_{n-1} всех тех элементов первых n множеств, которые вместе с Φ_{n-1} образуют связную область. Линии, которые отделяют содержащиеся в Φ_n смежные элементы, также включаются в Φ_n.

Так как граница области Φ_n состоит из внутренних точек Φ, то существуют элементы, которые в дальнейшем будут присоединены к Φ_n вдоль ее границы. Очевидно, что этот процесс построения неограничен, и мы получим, таким образом, бесконечную последовательность областей.

Область Φ_n построена из конечного числа квадратных элементов. Каждая точка ветвления этой области является внутренней точкой некоторого элемента. В самом деле, в соответствии с примененным способом разбиения каждая точка, лежащая на границе какого-нибудь элемента, имеет или рациональную абсциссу или рациональную ординату, в то время как обе координаты точки ветвления иррациональны.

Далее докажем, что область Φ_n односвязна. Предположим, что это не так. Тогда область Φ_n имеет две или более граничных кривых. Обозначим две из этих кривых через C_1 и C_2. Проведем в области Φ_n замкнутую кривую C', отделяющую друг от друга C_1 и C_2. Кривая C' делит область Φ на две части, одна из которых в силу односвязности Φ не содержит граничных точек области Φ. Допустим, что эта часть содержит кривую C_1. Тогда C_1 ограничивает некоторую подобласть S_1 области Φ, примыкающую к Φ_n; область S_1 не имеет никаких других граничных точек кроме точек кривой C_1. В результате n-кратного применения нашего процесса разбиения на элементы (а может быть, и раньше) область S_1 окажется полностью разбитой на элементы, и так как область S_1 примыкает к Φ_n, то она должна была бы принадлежать Φ_n согласно определению Φ_n. Получилось противоречие. Из предложения, доказанного в начале этого параграфа, следует, что Φ_n может быть конформно отображена на круг.

Докажем теперь, что какова бы ни была точка P_1 области Φ, при достаточно большом n область Φ_n содержит P_1. Пусть P_2 точка области Φ_1. Соединим точки P_1 и P_2 с помощью кривой L, целиком лежащей внутри Φ. Обозначим через $d > 0$ число, меньшее чем длина любой кривой, целиком лежащей в Φ и соединяющей какую-нибудь точку L с границей Φ. Если n выбрано настолько большим, что диагональ квадратного элемента, принадлежащего n множеству, меньше, чем d, то кривая L вся покрыта элементами первых n множеств. Все эти элементы принадлежат области Φ_n, и поэтому точка P_1 есть внутренняя точка области Φ_n.

В последовательности областей $\Phi_1, \Phi_2 \ldots$ некоторые следующие друг за другом области могут совпадать. Это ясно, так как

может оказаться, что нет элементов n множества, которые могли бы быть присоединены к Φ_{n-1}, так что Φ_n и Φ_{n-1} совпадают. Однако после конечного числа шагов мы получим элементы, которые можно будет присоединить к Φ_{n-1}. Составим теперь из нашей последовательности областей последовательность

$$\Phi_1, \quad \Phi_{n_2}, \quad \Phi_{n_3}, \ldots,$$

взяв из каждой группы одинаковых областей старой последовательности область с наименьшим номером и разложив выбранные области в старом порядке. Последовательность Φ_1 $\Phi_{n_2}, \ldots$ удовлетворяет условиям теоремы 21, а поэтому предельная область Φ может быть отображена на круг или на всю плоскость без одной точки.

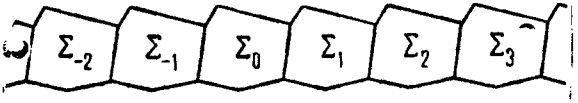
Предположим, что имеет место второй случай, т. е. что Φ отображается на плоскость t без одной точки. Мы можем считать, что исключенная точка есть начало координат, так как в противном случае этого можно было бы добиться путем линейного преобразования. Пусть $z = \varphi(t)$ отображающая функция. $\varphi(t)$ аналитична всюду в плоскости t за исключением начала координат и точек, соответствующих точкам $z = \infty$ из области Φ. Выберем m настолько большое, чтобы Φ_m содержала все элементы первого множества. Обозначим через S_m область в плоскости t, в которую переходит Φ_m, при отображении Φ на плоскость t.

Точки плоскости t, лежащие вне области S_m, переходят посредством функции $z = \varphi(t)$ в точки, лежащие вне квадрата K. Следовательно, вне области S_m будем иметь $|z| = |\varphi(t)| < \sqrt{2}$. Это неравенство справедливо в некоторой окрестности начала координат, поэтому функция $\varphi(t)$ аналитична в начале координат, если ее там соответствующим образом определить. Функция $z = \varphi(t)$ переводит окрестность начала координат в однолистую область или в область с конечным числом листов, содержащую или не содержащую точку ветвления в зависимости от того, будет ли $f'(0) = 0$ или $f'(0) \neq 0$. В обоих случаях точка $t = 0$ переходит в единичную точку и, следовательно, область Φ имеет только одну граничную точку. Но это противоречит предположению, что Φ имеет более чем одну граничную точку. Следовательно, область Φ отображается на круг.

§ 87. Конформное отображение и группы линейных преобразований. Мы закончим эту главу несколькими примерами, показывающими связь между конформным отображением и группами линейных преобразований. Из этих примеров мы почерпнем идеи, которые будут являться основными в следующей главе.

Пусть дана односвязная, однолистная полоса Φ (черт. 66), образованная путем соединения областей Σ_n, каждая из которых может быть переведена в примыкающую к ней область путем переноса $Z' = Z \pm h$. Отобразим эту полосу на единичный круг Q_0 в плоскости z (черт. 67) и обозначим через S_n область, в которую переходит Σ_n при этом отображении.

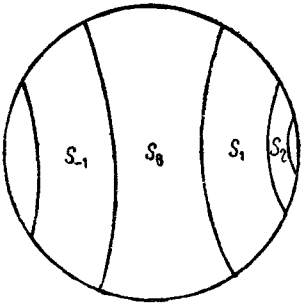
Полосе Φ принадлежит группа конформных преобразований, переводящих ее в самое себя, а именно группа $Z_n = Z + nh$. Какова будет связь между соответствующими точками z и z_n, лежащими в Q_0? Выполним последовательно три преобразования: преобразуем z в Z, Z в Z_n и Z_n в z_n. Так как каждое из этих преобразований есть конформное преобразование, то и результирующее преобразование $z_n = T_n(z)$ есть конформное преобразование и



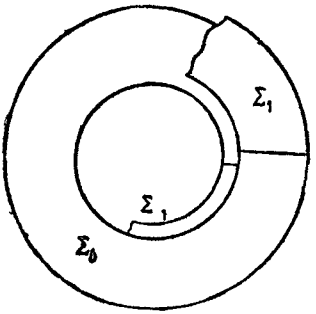
Черт. 66.

поэтому $T_n(z)$ аналитическая функция. Наши три преобразования последовательно переводят Q_0 в Φ, Φ самое в себя и Φ в Q_0, так что $z_n = T_n(z)$ производит конформное отображение круга Q_0 самого на себя.

На основании теоремы 24 § 12 T_n есть линейное преобразование. Непосредственно ясно, что множество всех преобразований T_n обладает обоими характеристическими свойствами группы. Эта группа собственно разрывна, так как каждое из преобразований этой группы за исключением тождественного переводит S



Черт. 67.



Черт. 68.

в область, лежащую вне S_0 (черт. 67). Она представляет собой циклическую группу, порожденную преобразованием T_1. Ее фундаментальная область состоит из S_0 и области, сопряженной с S_0 относительно окружности Q_0.

Сейчас мы построим аналогичную группу, идя по другому пути. Рассмотрим кольцевую область, лежащую между двумя кривыми на плоскости Z. Пусть эта область сделана односвязной посредством разреза, соединяющего границы. Обозначим полученную таким образом область через Σ_0 (черт. 68). Сделаем бесконечно много копий области Σ_0 и построим из них область, имеющую бесконечно много листов. Одну из копий, а именно Σ_1, наложим на область Σ_0 и соединим эти области вдоль одной

стороны *разреза*, как показано на черт. 68. Другую копию Σ_{-1} поместим под область Σ_0 и соединим эти области вдоль другой стороны разреза. Аналогично копия Σ_2 накладывается на область Σ_1 и соединяется с ней вдоль оставшейся свободной стороны разреза области Σ_1'; область Σ_{-2} подкладывается под область Σ_{-1} и соединяется с ней вдоль оставшейся свободной стороны разреза Σ_{-1}' и т. д.

Область $\Phi_n = \Sigma_{-n} + \ldots + \Sigma_0 + \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_n$ односвязна и может быть отображена на круг (теорема 23). Следовательно, на основании теоремы 21 предельная область Φ может быть отображена на круг или на всю плоскость без бесконечно удаленной точки. Но в данном случае область Φ отображается на круг (теорема 22). Пусть функция $Z = f(z)$ производит отображение построенной выше поверхности на круг Q_0 в плоскости z.

Области Φ принадлежит группа конформных преобразований, переводящих ее в самое себя. Если Σ_0 будет точно наложено на Σ_n, то Σ_1 совпадет с Σ_{n+1}, Σ_{-1} с Σ_{n-1} и т. д. и область будет конформно преобразована в самое себя. Эти преобразования области Φ для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, очевидно, образуют группу. Когда область Φ преобразуется таким образом, соответствующие точки круга Q_0 подвергаются преобразованию $z_n = T_n(z)$. Рассуждая так же, как в первом примере, мы приходим к заключению, что T_n линейное преобразование, переводящее Q_0 в самого себя. Группа преобразований T_n изоморфна группе преобразований области Φ в самое себя.

Рассмотрим отображающую функцию $Z = f(z)$. Пусть P точка области и пусть P_n точка, в которую переходит P при преобразовании, переводящем Σ_0 в Σ_n. Соответствующие точки z и z_n связаны соотношением: $z_n = T_n(z)$. Точки P и P_n имеют аффиксы соответственно $Z = f(z)$ и $Z_n = f(z_n)$. Когда Σ_0 переходит в Σ_n, каждая точка Φ переходит на другой лист, сохраняя прежний аффикс. Следовательно, имеет место тождество:

$$f(z_n) \equiv f(z).$$

Итак, отображающая функция не меняется при преобразованиях группы T_n.

Обобщая примененный здесь метод, можно получить значительно более общие фуксовы группы. Взяв однолистную n-связную область, можно, сделав n разрезов, превратить ее в односвязную область Σ_0. Накладывая друг на друга копии Σ_0 и соединяя их вдоль сторон разрезов, мы получим область с бесконечным числом листов, отображающуюся на круг. Этой области принадлежит группа конформных преобразований, переводящих ее в самое себя. Это обобщение может быть без труда проведено подробно.

Глава IX

УНИФОРМИЗАЦИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ И ФУКСОВЫ ФУНКЦИИ

§ 88. Идея униформизации. Уже при прохождении аналитической геометрии и анализа изучающий математику знакомится с преимуществами параметрического представления уравнений кривых. Так, например, известно, что окружность

$$W^2 + Z^2 = 1 \tag{1}$$

может быть представлена в параметрической форме:

$$Z = \sin z, \quad W = \cos z. \tag{2}$$

Та же кривая может быть иным способом представлена параметрически:

$$Z = \frac{2z}{1+z^2}, \quad W = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \tag{3}$$

При вычерчивании кривых и вычислений интегралов от выражений, содержащих Z и $\sqrt{1-Z^2}$, благодаря параметрическому представлению кривой достигаются значительные упрощения.

С точки зрения теории функций уравнение (1) определяет W как двузначную функцию Z. В выражениях (2) и (3) W и Z представлены в виде однозначных (uniforme) функций. Мы будем говорить, что функции (2) или (3) униформизируют функцию, определенную уравнением (1).

Определение. *Пусть*

$$W = F(Z) \tag{4}$$

многозначная функция переменного Z. И пусть, далее,

$$W = W(z), \quad Z = Z(z) \tag{5}$$

однозначные и неравные тождественно постоянному функции переменного z, такие, что

$$W(z) = F[Z(z)]. \tag{6}$$

Тогда мы будем говорить, что функции (5) униформизируют функцию (4). Переменное z называется униформизирующим переменным.

Если существует одна пара униформизирующих функций, то ясно, что существует бесконечно много других пар. В самом деле, мы можем положить в (5) $z = f(t)$, где $f(t)$ — однозначная функция t, и мы получим [в случае если функции (5) существуют]

пару униформизирующих функций с униформизирующим переменным t. Мы будем заниматься главным образом униформизацией посредством автоморфных функций. Заметим, что в приведенном выше примере функции (2) автоморфные функции z.

В § 43 нами было установлено, что между двумя простыми автоморфными функциями $f_1(z)$ и $f_2(z)$, принадлежащими одной и той же группе и имеющими одну и ту же область существования, имеет место алгебраическое соотношение $G(f_1, f_2) \equiv 0$. Если W есть алгебраическая функция переменного Z, определенная соотношением $G(W, Z) = 0$, то очевидно, что функции $W = f_1(z)$ и $Z = f_2(z)$ униформизируют эту алгебраическую функцию. В настоящей главе будет доказано обратное предложение, т. е. что всякая алгебраическая функция может быть униформизирована.

Прежде чем приступить к решению этой проблемы, мы займемся ненадолго рассмотрением римановых поверхностей.

§ 89. О связности областей. В неявном виде всякая алгебраическая функция может быть задана уравнением:

$$G(W, Z) = P_0(Z) W^m + P_1(Z) W^{m-1} + \ldots + P_m(Z) = 0, \qquad (7)$$

где коэфициенты $P_0(Z), \ldots, P_m(Z)$ многочлены и многочлен $G(W, Z)$ не приводим. За исключением некоторых изолированных значений каждому значению Z соответствует m различных значений W. Риманова поверхность для W, рассматриваемого как функция Z) есть замкнутая m-листная двусторонняя поверхность с конечным числом точек ветвления.

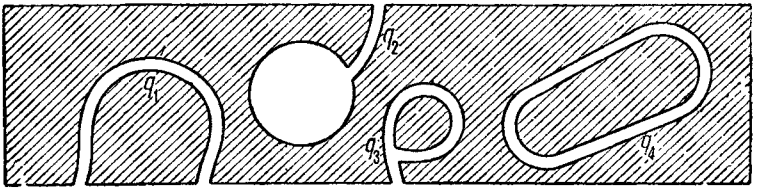
В связи с задачей униформизации выдвигается вопрос о связности римановой поверхности.

Займемся рассмотрением областей, расположенных на такой поверхности, причем мы будем рассматривать только области, ограниченные кривыми, для определенности, предположим, жордановыми кривыми. В число рассматриваемых граничных кривых мы включим как частный случай точку. Так, например, область, представляющая собой внутренность круга Q_0 без начала координат, имеет две граничных кривых: окружность Q_0 и начало координат.

Рассмотрим вопрос об изменении области и разбиении области на две или несколько частей посредством разрезов. Разрез должен производиться вдоль кривой, не имеющей кратных точек, и целиком за исключением, может быть, ее концов, лежащей внутри области. Разрез видоизменяет область. Обе стороны разреза включаются в границу новой области или областей. Делая новые разрезы или продолжая старые, мы должны рассматривать обе стороны уже сделанного разреза как часть границы. Разрез, концами которого служат точки границы, мы будем называть *поперечным разрезом*. Так, например, на черт. 69, где изображена область, ограниченная прямоугольником и окружностью, q_1 и q_2 являются поперечными разрезами. Разрез q_3 есть поперечный разрез особого вида, он начинается в точке границы области и кончается в точке, лежащей на одной из сторон его самого.

Такие разрезы мы будем называть *сигмаобразными* поперечными разрезами. Разрез q_4 начинается в некоторой внутренней точке области и оканчивается в исходной точке. Такие разрезы называются *кругообразными*. Сигмаобразный поперечный разрез равносилен последовательно выполненным кругообразному и поперечному разрезам.

Имеющая границу риманова поверхность с конечным числом листов называется „односвязной", если любой поперечный разрез делит ее на две части. Читателю, вероятно, известны элементарные свойства такого рода областей: например, что каждая из двух областей, на которые поперечный разрез делит область, односвязна; что кругообразный разрез делит область на две части, одна из которых односвязна; что граница такой области состоит из одного связного множества точек. Этими свойствами мы в даль-



Черт. 69.

нейшем будем пользоваться, принимая их без доказательства. Сейчас мы докажем некоторые менее известные предложения, которые нам понадобятся при изучении многосвязных областей.

Мы будем заниматься исключительно областями, имеющими границу. Областям, не имеющим границы, мы будем приписывать границу, исключая из области точку или небольшой кружок.

Область, которая может быть преобразована в односвязную посредством одного поперечного разреза, называется „двусвязной". И вообще область, которая может быть преобразована в односвязную посредством n поперечных разрезов, называется $(n+1)$-связной или областью с числом связности $N = n + 1$. Из доказываемой ниже теоремы следует, что в каждой из двух различных систем поперечных разрезов, преобразующих данную область в односвязную, содержится одно и то же число разрезов.

Теорема 1. *Если система ν_1 поперечных разрезов делит область или множество областей на α_1 односвязных частей, а система ν_2 разрезов — на α_2 односвязных частей, то*

$$\nu_1 - \alpha_1 = \nu_2 - \alpha_2. \tag{8}$$

Можно предположить, что разрезы одной системы не начинаются и не оканчиваются на разрезах другой системы и что разрезы этих двух систем имеют конечное число s пересечений. В самом деле, в случае если бы это было не так, то это могло бы быть достигнуто путем незначительной деформации разрезов, не меняющей ни числа разрезов, ни числа частей, на которые

распадается область. Проведем разрезы обеих систем и подсчитаем число частей.

Проведя разрезы первой системы и разбив этим самым область на a_1 частей, проведем затем разрезы второй системы. Если, проводя разрез второй системы, мы пересекаем разрез первой системы, то в точке пересечения кончается один поперечный разрез и начинается другой. Таким образом в результате каждого пересечения появляется один новый поперечный разрез. Вторая система поперечных разрезов является по отношению к a_1 областей, полученных после проведения первой системы разрезов, системой, состоящей из v_2+s поперечных разрезов. Следовательно, проведя все разрезы второй системы, мы этим самым проведем v_2+s поперечных разрезов в областях, образовавшихся от проведения разрезов первой системы. Каждый из этих v_2+s разрезов есть поперечный разрез некоторой односвязной области, поэтому с проведением его число односвязных областей увеличивается на единицу. Итак, в результате проведения разрезов первой и второй систем получится a_1+v_2+s односвязных областей. Действуя в обратном порядке, т. е. проводя сначала разрезы второй системы, а затем первой, получим a_2+v_1+s односвязных областей. Так как числа получаемых областей в обоих случаях одинаковы, то

$$a_1+v_2+s=a_2+v_1+s,$$

откуда непосредственно следует (8).

Если $a_1=a_2$, то из (8) получаем $v_1=v_2$; т. е. если в результате проведения разрезов каждой из двух систем получается одно и то же число односвязных областей, то в каждой системе содержится одно и то же число разрезов. В частности, если область путем проведения поперечных разрезов может быть преобразована в односвязную, то число поперечных разрезов, посредством которых это преобразование может быть достигнуто, не зависит от выбранного нами для этой цели способа проведения разрезов.

Теорема 2. *Если v поперечных разрезов делят область на a односвязных частей, то число связности этой области*

$$N=v-a+2. \tag{9}$$

Если n подходящим образом сделанных разрезов преобразуют эту область в односвязную, то на основании (8)

$$v-a=n-1,$$

откуда

$$N=n+1=v-a+2. \tag{10}$$

Остается доказать, что из условий нашей теоремы вытекает, что число связности нашей области конечно, т. е. что в ней можно провести конечное число разрезов таким образом, чтобы в результате получилась единственная односвязная область. Если рассматриваемая область неодносвязна, то (в силу определения односвязности области) можно провести в ней поперечный разрез, не разделяющий ее на две части. Если полученная после проведе-

ния этого разреза область также неодносвязна, то в этой области можно провести поперечный разрез, не разделяющий ее на две части, и т. д. Предположим, что можно, не разбивая области на две части, провести m таких поперечных разрезов, и кроме того предположим, что эти разрезы пересекаются с ν разрезами, упомянутыми в теореме, в s точках. (Последнее предположение может быть всегда реализовано путем незначительной деформации разрезов, как и в доказательстве предшествующей теоремы.)

Производя сначала ν разрезов, указанных в теореме, а затем эти m разрезов, получим в α односвязных частях, на которые первые ν разрезов делят область, $m+s$ поперечных разрезов; следовательно, область будет разделена на $\alpha+m+s$ частей. Будем действовать теперь в обратном порядке, т. е. выполним сначала m поперечных разрезов, а затем проводим $\nu+s$ поперечных разрезов. Так как после проведения m разрезов мы согласно предположению все еще будем иметь только одну область, то выполняемые затем $\nu+s$ поперечных разрезов могут разделить эту область не более чем на $\nu+s+1$ частей.

Отсюда следует, что

$$\alpha+m+s\leqslant\nu+s+1;\quad m\leqslant\nu-\alpha+1.$$

Из полученного неравенства мы заключаем, что посредством конечного числа разрезов область может быть превращена в односвязную.

На основании (10) число необходимых для этого поперечных разрезов $n=\nu-\alpha+1$.

Теорема 3. *Пусть дана область с числом связности N. Если в результате проведения в этой области m поперечных разрезов она не распадается на части, то полученная после проведения этих разрезов область имеет число связности $N-m$.*

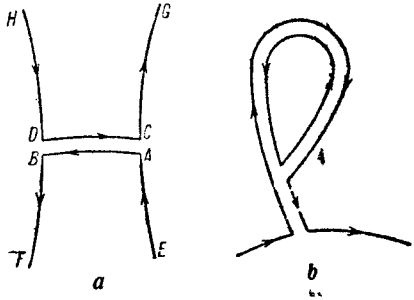
Исходная область может быть превращена в односвязную посредством $N-1$ разрезов. Эти $N-1$ разрезов можно провести следующим образом: сначала проводим m разрезов, упомянутых в теореме, а затем еще $N-1-m$ соответствующим образом выбранных разрезов. Эти последние $N-1-m$ разрезов преобразуют область, полученную после проведения первых m разрезов в односвязную; следовательно, число связности этой области равно $N-1-m+1$, т. е. равно $N-m$.

Теорема 4. *Если область имеет конечное число связности, то это число четно, если число кривых, составляющих границу, четно, и это число нечетно, если число кривых, составляющих границу, нечетно.*

Во-первых, докажем, что с проведением поперечного разреза число кривых, составляющих границу, увеличивается или уменьшается на единицу. Рассмотрим сначала обыкновенный поперечный разрез (черт. 70, *а*). Если этот поперечный разрез начинается на одной граничной кривой $CG\ldots EA$ и кончается на другой кривой $BF\ldots HD$ (каждая из кривых проводится в положительном направлении, т. е. так, что область остается слева),

то после проведения разреза мы вместо этих кривых получим одну единственную кривую $CG\ldots EABF\ldots HDC$; и таким образом число граничных кривых уменьшилось на единицу. Если же поперечный разрез начинается и оканчивается на одной и той же граиичной кривой $CG\ldots HDBF\ldots EA$, то после проведения разреза получатся две кривые $CG\ldots HDC$ и $BF\ldots EAB$; и таким образом число граничных кривых увеличилось на единицу.

В случае сигмаобразного поперечного разреза (черт. 70, *b*) внутренняя сторона петли образует новую граничную кривую, в то время как оставшиеся стороны разреза образуют вместе с граничной кривой, на которой начинается разрез, одну единственную граничную кривую; следовательно, число граничных кривых увеличилось на единицу.



Черт. 70.

Предположим теперь, что граница области состоит из k кривых и что посредством n поперечных разрезов эта область может быть преобразована в односвязную. В результате проведения i-го поперечного разреза число граничных кривых увеличивается на ε_i, где $\varepsilon_i = \pm 1$. После проведения всех n разрезов число граничных кривых будет равно $k + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$, но по предположению, проводя эти n разрезов, мы получаем односвязную область, ограниченную одной кривой. Следовательно, число связности первоначальной области N можно представить в виде:

$$N = n + 1 = n + k + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

или

$$N = (1 + \varepsilon_1) + (1 + \varepsilon_2) + \ldots + (1 + \varepsilon_n) + k.$$

Каждое слагаемое в правой части за исключением последнего есть четное число, так как оно равно нулю или двум; следовательно, N и k или оба четны, или оба нечетны, что и требовалось доказать.

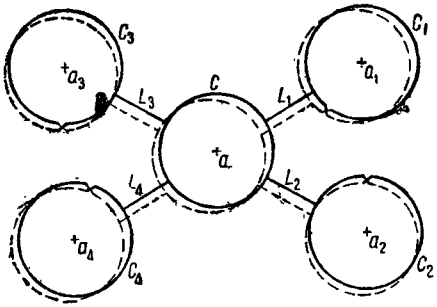
Теорема 5. *Риманова поверхность алгебраической функции имеет конечное и притом нечетное число связности.*

Во-первых, заметим, что рассматриваемая риманова поверхность есть замкнутая поверхность с конечным числом листов и конечным числом точек ветвления. Для того чтобы определить число связности этой поверхности, мы должны сначала приписать ей в качестве границы точку или небольшой кружок. Если мы теперь докажем, что число связности этой области конечно, то нечетность этого числа будет следовать непосредственно из теоремы 4.

Поэтому ясно, что для достижения нашей цели достаточно доказать, что поверхность может быть разбита на односвязные части посредством конечного числа поперечных разрезов.

При разбиении области на односвязные части можно провести конечное число кругообразных разрезов, не включая их в число учитываемых разрезов. В самом деле, в процессе разбиения эти кругообразные разрезы обязательно будут соединены с границей области посредством простого поперечного разреза. Кругообразный разрез вместе с простым разрезом составляют один сигмаобразный разрез, так что можно учитывать только одни простые поперечные разрезы.

Предположим, что наша поверхность имеет m листов и s точек ветвления. Мы можем считать, что аффиксы точек ветвления различны, т. е. что не существует ни одной пары точек ветвления, расположенных друг над другом, так как это всегда может быть достигнуто путем незначительной деформации поверхности. Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_s$ аффиксы точек ветвления и через a аффикс какой-нибудь обыкновенной точки поверхности. Опишем около точек $a, a_1, a_2, \ldots, a_s$ окружности $C, C_1, C_2, \ldots, C_s$ настолько малых радиусов, чтобы каждая из них лежала вне всех остальных. Далее проведем вдоль этих окружностей разрезы на всех m листах. (На черт. 71 показано это построение для двулистной поверхности с четырьмя точками ветвления.) Одну из m окружностей с центром в a мы используем в качестве границы, и поэтому внутренность этой окружности должна быть исключена из поверхности. Разрезы, проведенные вдоль оставшихся окружностей с центром в a, являются кругообразными разрезами, делящими поверхность на односвязные части.



Черт. 71.

Соединим теперь окружность C с окружностями $C_1, C_2, \ldots, C_s$ посредством не самопересекающихся и не пересекающих друг друга линий $L_1, L_2, \ldots, L_s$ и проведем вдоль этих линий разрезы на всех m листах поверхности. Эти поперечные разрезы разбивают m-листную область, лежащую вне ранее проведенных петлеобразных разрезов, на m однолистных областей, каждая из которых имеет единственную граничную кривую и поэтому односвязна. В результате вся поверхность оказалась разделенной на односвязные части посредством конечного числа поперечных разрезов; следовательно, эта поверхность имеет конечное число связности. Сейчас мы выведем формулу для числа связности. На каждом листе нами было проведено s поперечных разрезов; следовательно, всего было проведено $\nu = ms$ разрезов. Пусть в точке ветвления a_i связано r_i листов. Окрестность точки ветвления есть односвязная область, помимо этой области внутри окружности C_i имеется $m - r_i$ однолистных круговых областей. Таким образом внутри окружности C_i имеется всего $m - r_i + 1$ односвязных областей.

Далее, $m-1$ однолистных круговых областей лежат внутри окружности C. Поэтому, присоединяя еще m ранее рассмотренных областей, лежащих вне окружностей, мы получим для числа α односвязных областей, на которые разделена поверхность, выражение:

$$\alpha=\sum_{i=1}^{s}(m-r_i+1)+m-1+m.$$

На основании (9) число связности нашей поверхности

$$N=ms-\left[\sum_{i=1}^{s}(m-r_i+1)+2m-1\right]+2$$

или

$$N=\sum_{i=1}^{s}(r_i-1)-2m+3. \tag{11}$$

Число r_i-1 называется порядком точки ветвления. Так как числа N и $2m-3$ оба нечетны, то из (11) следует, что сумма порядков всех точек ветвления поверхности всегда число четное.

Рассмотрим в качестве примера двулистную поверхность функции:

$$W^2=A(Z-a_1)(Z-a_2)\ldots(Z-a_n), \tag{12}$$

где постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ все различны. При n четном точками ветвления этой функции являются точки a_i, при n нечетном — точки a_i и ∞. Каждая из этих точек ветвления имеет порядок, равный единице, и поэтому $\sum_{i=1}^{s}(r_i-1)$ равна числу точек ветвления, т. е. n или $n+1$. Так как в данном случае $m=2$, то получаем из (11):

$$N=n-1 \quad \text{или} \quad N=n$$

в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным. В частности, при $n=1$ или при $n=2$ наша поверхность односвязна. Если $n=3$ или $n=4$, то число связности равно трем. В этом случае поверхность называется *эллиптической*. В случае, если $n>4$, поверхность называется *гиперэллиптической*.

Жанр алгебраической поверхности. Многие свойства алгебраических поверхностей и функций, которым эти поверхности принадлежат, зависят от числа связности. Обычно при изложении этих свойств пользуются понятием жанра. Это понятие определяется следующим образом:

Определение. *Пусть поверхность имеет число связности, равное $2p+1$. Тогда p называется жанром поверхности.*

Заметим, что так как число связности алгебраической поверхности нечетно, то оно всегда может быть представлено в виде $2p+1$, где p—некоторое целое число. Очевидно, что любое целое положительное число или нуль является жанром некоторой алгебраической поверхности.

В самом деле, если мы положим в (12) $n = 2p + 1$ или $2p + 2$, то число связности будет равно $2p + 1$, и следовательно, жанр будет равен p.

Под жанром алгебраической функции будем понимать жанр ее римановой поверхности.

Если $p = 0$, то поверхность односвязна; если $p > 0$, то она многосвязна. Для того чтобы превратить поверхность жанра p в односвязную, нужно сделать $2p$ поперечных разрезов.

Из формулы (11) получаем для p:

$$p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} (r_i - 1) - m + 1. \tag{13}$$

Если ν поперечных разрезов делят поверхность на α односвязных частей, то на основании (10) получаем:

$$p = \frac{1}{2} (\nu - \alpha + 1). \tag{14}$$

Формула Эйлера. Из формулы (14) можно получить формулу, связывающую число граней F, число вершин V и число ребер E многогранника. Сделаем для этого около каждой вершины кругообразный разрез. Одну из вырезанных таким образом частей отбросим, для того чтобы получить границу. Таким образом будут выделены $V - 1$ частей, содержащих вершины. Оставшаяся часть поверхности делится на F односвязных частей посредством E разрезов, проведенных вдоль ребер.

На основании формулы (14) получаем:

$$p = \frac{1}{2} [E - (V - 1 + F) + 1],$$

откуда

$$V + F = E + 2(1 - p).$$

В случае когда поверхность многогранника есть односвязная область ($p = 0$), получаем классическую формулу Эйлера:

$$V + F = E + 2.$$

Об одном способе проведения разрезов на поверхности. Сейчас мы покажем, что при преобразовании алгебраической поверхности в односвязную разрезы могут быть выполнены таким образом, чтобы каждая из поверхностей, последовательно получающихся при проведении разрезов, имела не более двух граничных кривых (граничной кривой может быть и точка). При доказательстве теоремы 4 было установлено, что при проведении поперечного разреза, соединяющего точки одной и той же граничной кривой, а также сигмаобразного разреза число граничных кривых увеличивается на единицу. При проведении же поперечных разрезов, соединяющих точки различных граничных кривых, их число убывает на единицу. Таким образом, чередуя разрезы этих двух видов, мы будем получать попеременно то одну, то две граничных кривых. Необходимо заметить, что внутренняя сторона петли сигмаобразного разреза представляет собой одну

граничную кривую, в то время как ее внешняя сторона входит во вторую граничную кривую.

Если поперечный разрез соединяет различные граничные кривые и ие разбивает поверхности на две части, то этот разрез может быть видоизменен—простым перемещением его концов вдоль границ—таким образом, чтобы он проходил между заданной точкой одной граничной кривой и заданной точкой другой, причем так, чтобы при этом видоизменении не нарушалась целостность поверхности. Далее можно видоизменить поперечный разрез, соединяющий две точки одной и той же граничной кривой таким образом, чтобы разрез соединял две заданные точки той же кривой. Или наконец можно преобразовать тот же разрез в сигмаобразный разрез, выходящий из заданной точки границы; для того чтобы этого достигнуть, нужно передвинуть один конец разреза вдоль границы в заданную точку P, а второй конец сначала передвинуть вдоль границы к той же точке P, а затем от точки P вдоль одной из сторон разреза. Очевидно, что подобным же образом можно сигмаобразный разрез преобразовать в обыкновенный поперечный разрез.

Выберем в качестве исходной границы поверхности обыкновенную точку P.

Если поверхность неодносвязна, то можно провести поперечный разрез a_1, начинающийся и оканчивающийся в P и не разбивающий поверхности на части. Обозначим через b_1 поперечный разрез, соединяющий противоположные стороны разреза a_1. После проведения этого разреза получится область с одной граничной кривой, и следовательно, разрез b_1 не разделяет области на части (так как если бы получились после проведения b_1 две области, то граничных кривых было бы также две).

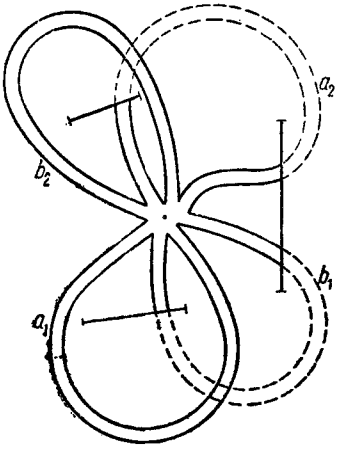
На основании ранее проведенных рассуждений мы можем предположить, что разрез b_1 начинается и оканчивается в точке P.

Если $p=1$, то после проведения указанных разрезов получится односвязная область. Если $p>1$, то область будет неодносвязной, и поэтому в ней можно провести разрез a_2, не делящий эту область иа части. Очевидно, можно предположить, что разрез a_2 начинается и оканчивается в точке P. Далее проведем разрез b_2, соединяющий противоположные стороны a_2. Этот разрез не разбивает поверхности на части. Относительно разреза b_2 также можно предположить, что он начинается и оканчивается в точке P. Если $p=2$, то получившаяся после проведения разрезов a_1, b_1, a_2, b_2 область односвязна. Если $p>2$, то, проводя таким же образом разрезы a_3, b_3, a_4, b_4,..., a_p, b_p, начинающиеся и оканчивающиеся в P, мы придем к односвязной области.

Односвязная область, полученная после проведения всех разрезов, имеет граничную кривую, состоящую из $4p$ частей, начинающихся и оканчивающихся в точке P, так как обе стороны каждого из 2_p разрезов a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_p, b_p входят в граничную кривую.

На черт. 72 показаны гиперэллиптическая поверхность с шестью точками ветвления ($p=2$) и разрезы a_1, b_1, a_2, b_2, преобразующие ее в односвязную область.

Листы этой поверхности (их два) связаны вдоль трех прямолинейных отрезков, изображенных на черт. 72. Сплошной линией изображены разрезы на верхнем листе; разрезы на нижнем листе изображены пунктиром.



Черт. 72.

§ 90. Алгебраические функции нулевого жанра. Униформизация посредством рациональных функций. Во-первых, докажем следующее:

Теорема 6. *Алгебраическая поверхность нулевого жанра может быть конформно отображена на полную плоскость.*

Пусть P обыкновенная точка поверхности и C_n окружность с центром в P и радиусом r_n. Пусть, кроме того, радиус r_n настолько мал, чтобы при проведении разреза вдоль окружности C_n на листе, содержащем точку P, от поверхности отделялся однолистный кружок. Проведем этот разрез и исключим из поверхности содержащий точку P однолистный кружок. Оставшаяся часть поверхности, которую мы обозначим через Φ_n, односвязна и на основании теоремы 23 § 86 может быть отображена на круг. Возьмем последовательность кружков с радиусами $r_1, r_2, \ldots, r_n$, где $r_{n+1} < r_n$ и $\lim r_n = 0$. Соответственно этому мы получим последовательность областей $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, каждая из которых является подобластью всех следующих за ней. Эти области удовлетворяют условиям теоремы 21 § 85; следовательно, предельная область Φ этой последовательности, которая представляет собой рассматриваемую нами поверхность с исключенной из нее единственной точкой P, отображается конформно на круг или на всю плоскость без одной точки.

Допустим, что Φ может быть отображена на единичный круг Q_0 в плоскости z и пусть $z=f(Z)$ отображающая функция. Во всех точках поверхности Φ имеем: $|f(Z)|<1$. Так как, в частности, это неравенство имеет место в окрестности точки P, то функция $f(Z)$ аналитична в P, если ее там соответствующим образом определить. Таким образом $f(Z)$ аналитична во всех обыкновенных точках поверхности и непрерывна в точках ветвления и в ∞. Следовательно, она есть тождественное постоянное [1]), что невозможно.

Таким образом область Φ может быть отображена на полную плоскость z без одной точки. Эту исключенную точку всегда

[1]) Если бы $f(Z)$ не была постоянной, то $|f(Z)|$ принимал бы максимум во внутренней точке, что невозможно.

можно считать началом координат. Поэтому в окрестности точки P отображающая функция ограничена и, следовательно, она аналитична в P, если ее там соответствующим образом определить. Однолистная окрестность точки P отображается на однолистную окрестность начала координат и при этом P переходит в начало; следовательно, область Φ вместе с ее границей P отображается на полную плоскость z.

Теорема 7. *Всякая алгебраическая функция нулевого жанра может быть униформизирована посредством рациональных функций; и обратно, если какая-нибудь функция может быть униформизирована посредством рациональных функций, то эта функция есть алгебраическая функция нулевого жанра.*

Обозначим через $z=f(Z)$ функцию, отображающую риманову поверхность алгебраической функции нулевого жанра на полную плоскость z. Рассмотрим обратную функцию $Z=Z(z)$. $Z(z)$ аналитична во всей плоскости z за исключением конечного числа точек a_i, соответствующих точкам $Z=\infty$ на различных листах римановой поверхности. В точках a_i $Z(z)$ обращается в бесконечность; следовательно, $Z(z)$ не имеет во всей плоскости других особенностей кроме полюсов и поэтому есть рациональная функция z. Порядок этой рациональной функции равен числу m листов римановой поверхности. В самом деле, любое значение Z_0 принимается m раз, а именно в точках $z_1, z_2, \ldots, z_m$, которые соответствуют точкам $P_1, P_2, \ldots, P_m$, расположенным друг над другом на различных листах поверхности и имеющим один и тот же аффикс Z_0.

Пусть $W=F(Z)$ наша алгебраическая функция. На своей римановой поверхности эта функция однозначна и аналитична (непрерывна в точках ветвления и в бесконечности) за исключением некоторых точек, в которых W обращается в бесконечность. Из уравнения (7), которому удовлетворяет W, видно, что все m значений, принимаемых W, конечны всегда за исключением случая, когда $P_0(Z)=0$ и, возможно, случая, когда $Z=\infty$. Таким образом W обращается в бесконечность лишь в конечном числе точек поверхности. Переходя к переменному z, получаем $W=F[Z(z)]$. Эта функция однозначна в плоскости z и аналитична там всюду за исключением точек, соответствующих точкам поверхности, в которых W обращается в бесконечность. Эти точки плоскости z являются полюсами функции $F[Z(z)]$. Следовательно, $F[Z(z)]$ есть рациональная функция z. Итак, рациональные функции $Z=Z(z)$ и $W=W(z)=F[Z(z)]$ униформизируют нашу алгебраическую функцию.

Обратно, пусть функция $W=H(Z)$ униформизирована посредством рациональных функций $Z=R_1(z)$ и $W=R_2(z)$. Соотношение, связывающее W и Z, получается путем исключения z из двух последних уравнений. Освобождаясь от знаменателей, можно эти два уравнения написать в виде: $G_1(Z, z)=0$, $G_2(W, z)=0$, где G_1 и G_2 — полиномы. Элиминанта этих двух полиномов есть полином по Z и W. Тот же результат можно получить также,

пользуясь методом § 43. Так как каждая из функций $R_1(z)$ и $R_2(z)$ принимает на плоскости z все значения одно и то же число раз, то рассуждения § 43 могут быть использованы слово в слово для доказательства алгебраической зависимости между $R_1(z)$ и $R_2(z)$.

Теперь осталось доказать, что род этой алгебраической функции равен нулю. Обозначим через Φ риманову поверхность функции $H(Z)$.

Каждой точке z_0 плоскости z соответствует единственная точка $P_0(Z_0, W_0)$ на поверхности, в то время как точке P_0 могут соответствовать и другие точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$, в которых $R_1(z)$ и $R_2(z)$ принимают те же значения, что и в z_0. Если $R_1'(z_0) \neq 0$, то функция $Z = R_1(z)$ отображает окрестность точки z_0 на однолистную окрестность точки P_0. Следовательно, кривой на поверхности Φ, проходящей через P_0, соответствует единственная кривая, проходящая через z_0.

Предположим теперь, что поверхность Φ неодносвязна. Принимая точку P_0 за исходную границу этой поверхности, проведем обыкновенный поперечный разрез a_1, не разбивающий поверхности на две части, и притом таким образом, чтобы этот разрез не проходил через точки поверхности, соответствующие точкам плоскости, в которых $R_1'(z) = 0$ или точке $z = \infty$ (очевидно, что таких точек лишь конечное число). Предположим теперь, что точка P выходит из точки P_0 и, обойдя вдоль разреза a_1, возвращается в P_0. Если мы теперь воспользуемся той ветвью функции, обратной функции $Z = R_1(z)$, которая принимает значение z_0, то точка z в соответствии с движением точки P опишет кривую λ, начинающуюся в точке z_0 и оканчивающуюся или в точке z_0, или в одной из точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. В случае если кривая λ оканчивается в одной из точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, заставим точку P совершить второй обход вдоль a_1 в том же направлении. В соответствии с этим движением точки z кривая λ будет продолжена до одной из точек $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ и т. д. Продолжая таким образом кривую λ, мы неизбежно придем к точке, принадлежащей уже ранее построенной части λ. Действительно, существует лишь конечное число точек плоскости соответствующих каждой точке разреза a_1. Обозначим через z' первую точку, в которой λ пересекает сама себя, и через P' соответствующую точку на a_1. Нетрудно видеть, что $z' = z_0$, так как в противном случае две различных кривые, проходящие через точку z', соответствовали бы одной кривой, проходящей через P'. Но выше нами было установлено, что это невозможно. Итак, $z' = z_0$ и поэтому λ есть замкнутая кривая на плоскости z.

Обозначим через b_1 поперечный разрез, соединяющий в точке P_0 противоположные стороны разреза a_1 и не проходящий через точки, уже упомянутые при построении a_1. Разрез b_1 встречает a_1 только в точке P_0. Пусть теперь точка P, выйдя из P_0, совершает обходы вдоль b_1. Соответственно этому z, выйдя из точки z_0, опишет кривую μ, замыкающуюся в точке z_0. Очевидно, что

за исключением z_0 кривые λ и μ не имеют общих точек. Так как окрестность точки P_0 конформно отображается на окрестность точки z_0, то начало и конец μ должны находиться по разные стороны λ. Но на плоскости невозможно провести кривую, соединяющую противоположные стороны замкнутой кривой и вместе с тем не пересекающую этой замкнутой кривой. Итак, предположение, что поверхность Φ многосвязна, отпадает, и следовательно, жанр Φ равен нулю, что и требовалось доказать.

Нетрудно найти все пары функций, униформизирующих алгебраическую функцию нулевого жанра.

Теорема 8. *Пусть $Z = Z(z)$ и $W = W(z)$ функции, униформизирующие алгебраическую функцию нулевого жанра так, что функция $Z = Z(z)$ взаимно-однозначно отображает полную плоскость z на риманову поверхность данной функции. Тогда любая пара униформизирующих функций может быть получена путем подстановки вместо z в $Z(z)$ и $W(z)$ некоторой однозначной функции $z = \varphi(t)$ переменного t.*

Предположим, что функции $Z = Z_1(t)$ и $W = W_1(t)$ униформизируют нашу алгебраическую функцию. Эти две функции имеют одну и ту же область существования S, так как из соотношения $W_1(t) \equiv F[Z_1(t)]$, которому эти функции удовлетворяют, следует, что каждая из них может быть аналитически продолжена на область существования другой. Уравнения $Z = Z_1(t)$ и $Z = Z(z)$ определяют z как функцию переменного t, $z = \varphi(t)$. Каждому значению t в области S соответствует единственная точка римановой поверхности, а этой точке в свою очередь соответствует единственное значение z. Областью существования $\varphi(t)$ является область S, так как в противном случае, т. е. если бы $\varphi(t)$ существовала вне S, функция $Z_1(t) = Z(z) = Z[\varphi(t)]$ могла бы быть аналитически продолжена за область S, что противоречит предположению. Следовательно, z есть однозначная функция t. С другой стороны, очевидно, что, заменяя z однозначной функцией t, мы получаем пару униформизирующих функций.

Например: функции (3) униформизируют функцию W, определенную соотношением (1) таким же образом, как в нашей теореме. Рассмотрим униформизирующие функции $Z = \sin t$, $W = \cos t$.

Из уравнений (2) и (3) заключаем, что z является однозначной функцией t.

§ 91. Алгебраические функции жанра, большего, чем нуль. Униформизация посредством автоморфных функций [1]). В случае если жанр поверхности больше, чем нуль, метод § 90 необходимо изменить, так как многосвязная поверхность не может быть отображена на плоскость. В этом случае мы проведем на поверхности разрезы и построим поверхность с бесконечным числом листов, пользуясь методом, сходным с тем, который был применен в § 87 (черт. 68).

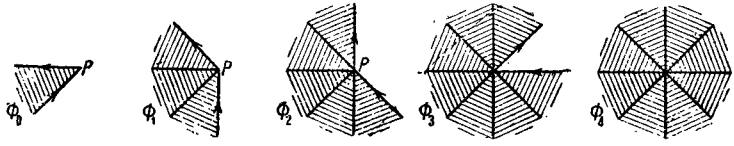
---

[1]) Koebe, P., Math. Ann., т. 67, стр. 145—224, 1909

Пусть $W=F(Z)$ алгебраическая функция жанра $p>0$. Обозначим ее риманову поверхность через F. Преобразуем эту поверхность в односвязную, проведя $2p$ поперечных разрезов: $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$, начинающихся и оканчивающихся в обыкновенной точке поверхности P. Полученная таким образом поверхность, которую мы обозначим через F_0, есть односвязная поверхность с единственной граничной кривой, состоящей из $4p$ дуг или сторон, начинающихся и оканчивающихся в P. Эти стороны пересекаются в $4p$ вершинах, лежащих в одной и той же точке P. Сумма углов около всех вершин равна 2π.

Приготовим бесконечно много копий поверхности F_0 и будем последовательно соединять их и притом таким образом, чтобы после каждого присоединения получалась односвязная поверхность.

Начнем с одной из копий поверхности F_0, которую мы обозначим через Φ_0. Наложим на Φ_0 вторую копию и соединим ее



Черт. 73.

с Φ_0 вдоль одной из $4p$ сторон: соединим, например, одну из сторон разреза a_1 на поверхности Φ_0 с противоположной стороной этого же разреза на второй копии. Получившаяся в результате присоединения область односвязна. Вдоль оставшихся $4p-1$ сторон Φ_0 присоединим другие копии, связывая всякий раз противоположные стороны одинаковых разрезов. Обозначим через Φ_1 поверхность, получившуюся путем присоединения к Φ_0 вдоль каждой из ее $4p$ сторон одной из копий поверхности F_0. Очевидно, что граница поверхности Φ_1 состоит из конечного числа сторон. Присоединим теперь к поверхности Φ_1 вдоль каждой из ее сторон новую копию поверхности F_0, связывая при этом, как и раньше, противоположные стороны одинаковых разрезов. Полученную таким образом новую поверхность обозначим через Φ_2.

Вообще Φ_{n+1} получается путем присоединения копий F_0 вдоль свободных сторон Φ_n. При этом, в процессе построения Φ_{n+1}, всякий раз, когда при обходе границы встречаются одна за другой стороны, происшедшие от одноименных разрезов (например разрезов a_1 и a_1), мы будем соединять эти стороны, превращая разделяющую их вершину во внутреннюю точку поверхности.

На черт. 73 показано для случая поверхности, изображенной на черт. 72, как примыкают друг к другу области около P. Одна из вершин в P взята в качестве исходной. На чертеже показано, как последовательно примыкающие друг к другу области заполняют однолистную окрестность около этой вершины. $4p$ вершин поверхности Φ_0 лежат в $4p$ различных окрестностях такого рода.

Продолжая неограниченно процесс присоединения новых копий поверхности F_0, мы получим в результате поверхность Φ [1]) с бесконечным числом листов, не имеющую границы.

Каждая из областей Φ_n односвязна, имеет конечное число листов и может быть конформно отображена на круг. Далее, Φ_n является подобластью Φ_{n+1}. Следовательно, теорема 21 § 85 приложима к последовательности областей $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ и поэтому *предельная область Φ может быть конформно отображена или на круг или на полную плоскость без одной точки.* Функция $W=F(Z)$ однозначна на поверхности F_0 или Φ_0, так как она однозначна на F. Мы сейчас рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении $F(Z)$ на всю поверхность Φ. Каждой точке поверхности Φ_0 соответствуют единственное Z и единственное W. При присоединении к поверхности Φ_0 ее копии последняя располагается над Φ_0 таким образом, что точки этой копии имеют такие же аффиксы Z, как и до присоединения. Пусть по определению каждой точке копии после ее присоединения к Φ_0 соответствует такое же значение W, как и до присоединения. Очевидно, что определенная таким образом на новой поверхности функция W аналитична на каждой из копий, образующих эту поверхность (за исключением полюсов и точек ветвления).

Из теоремы аналитического продолжения известно, что если две функции аналитичны в примыкающих друг к другу областях и имеют одинаковые значения на их общей границе, то каждая из них есть аналитическое продолжение другой. Так как присоединение копии происходит вдоль кривой, в точках которой W имеет одно и то же значение на обеих соединяемых поверхностях, то функция W на присоединенной копии есть аналитическое продолжение функции W, определенной на исходной поверхности. Из самого построения поверхности Φ видно, что функция $W=F(Z)$ может быть аналитически продолжена на всю поверхность Φ. Таким образом, мы получим однозначную функцию, аналитическую всюду на Φ за исключением полюсов и точек ветвления. Мы уже видели раньше, что поверхность Φ имеет бесконечно много листов, теперь мы можем дать этому факту другое доказательство.

Если бы путем соединения конечного числа копий была получена замкнутая поверхность Φ, то ее можно было бы

---

[1]) То, что всегда существуют стороны поверхности, вдоль которых можно присоединять новые копии F_0, может быть доказано различными путями. Допустим, что Φ_n имеет сторону l, соединяющую вершины P' и P'', каждая из которых принадлежит только одной из копий F_0, содержащихся в Φ_n. Тогда при построении поверхности Φ_{n+1} копия F_0, присоединяемая вдоль стороны l, больше нигде не соединяется. Эта копия имеет $4p$ вершин, причем из них только вершины P' и P'' принадлежат также и другим копиям. Остающиеся $4p-2$ ($\geqslant 2$) вершин этой копии обеспечивают существование по крайней мере одной стороны, соединяющей вершины, не принадлежащие никаким другим копиям, входящим Φ_{n+1}. Так как каждая сторона поверхности Φ_0 соединяет вершины, принадлежащие только одной копии, то по индукции следует, что Φ_n имеет свободные стороны и что поэтому процесс построения неограничен.

отобразить на полную плоскость. И, следовательно, таким же способом, как в § 90, $F(Z)$ можно было бы униформизировать посредством рациональных функций. Тогда жанр $F(Z)$ был бы равен нулю, что противоречит сделанному вначале предположению.

Униформизация в случае, когда Φ отображается на круг. Пусть $z=f(Z)$ функция, отображающая Φ на единичный круг Q_0 в плоскости z, и пусть $Z=Z(z)$ обратная функция. При отображении каждой точке z круга Q_0 соответствует единственная точка P на поверхности Φ. Точке P соответствуют единственное Z и единственное W. Когда z описывает замкнутую кривую внутри Q_0, точка P описывает замкнутую кривую на поверхности Φ, т. е. после обхода переменным z замкнутого пути функции $Z(z)$ и $W(z)=F[Z(z)]$ возвращаются к первоначальным значениям. Однако a priori не исключено, что функции $Z(z)$ и $W(z)$ могут быть аналитически продолжены вдоль некоторой замкнутой кривой, часть которой лежит вне Q_0 и притом таким образом, чтобы после обхода переменным z этой кривой функции $Z(z)$ и $W(z)$ получали значения, отличные от первоначальных. Для того чтобы показать, что это невозможно, достаточно установить, что окружность Q_0 является естественной границей для этих функций, т. е. что ни одна из этих функций не может быть аналитически продолжена за пределы Q_0.

Допустим, что $Z(z)$ может быть аналитически продолжена за окружность. Пусть z' точка окружности, в которой $Z(z)$ аналитична и в которой, кроме того, $Z'(z)\neq 0$. Тогда достаточно малая окрестность s точки z' отображается посредством функции $Z=Z(z)$ на некоторую однолистную область S в плоскости Z.

Пусть z некоторая точка области s, лежащая внутри Q_0, и пусть P соответствующая точка на Φ. Функция $z=f(Z)$ отображает область S, содержащую точку P на s. Но это невозможно, так как S является подобластью Φ и, следовательно, отображается посредством $z=f(Z)$ на некоторую область, лежащую целиком внутри Q_0. Очевидно, что и $W(z)$ не может быть продолжена аналитически за окружность Q_0, так как в противном случае $Z(z)$ как алгебраическая функция W также могла бы быть продолжена за окружность.

Функции

$$Z=Z(z),\quad W=W(z)=F[Z(z)] \tag{15}$$

однозначные функции z и, следовательно, в соответствии с определением униформизирующих функций эти функции униформизируют функцию $W=F(Z)$. Z и W обращаются в бесконечность конечное число раз на каждой из копий F_0.

В соответствующих точках круга Q_0, $Z(z)$ и $W(z)$ имеют полюсы. Так как поверхность Φ состоит из бесконечного множества копий, то каждая из функций $Z(z)$ и $W(z)$ имеет в круге Q_0 бесконечно много полюсов.

Сейчас мы покажем, что $Z(z)$ и $W(z)$ автоморфные функции.

Поверхность Φ может быть отображена сама на себя бесконечным множеством способов. Если мы совместим исходную область Φ_0 с какой-нибудь копией Φ_0', входящей в Φ, то копии, примыкающие к Φ_0, совместятся с копиями, примыкающими к Φ_0', и т. д., при этом поверхность Φ перейдет сама в себя.

Множество всех преобразований, отображающих поверхность Φ самое на себя, которое мы получим, переводя Φ_0 в каждую из копий, входящих в Φ, есть группа. В самом деле, последовательность двух таких преобразований или преобразование, обратное какому-нибудь из них, переводит Φ_0 в соответствующую копию, содержащуюся в Φ.

Пусть P точка Φ и P_n точка, в которую переходит P при переходе Φ в самое себя. Обозначим через z и z_n соответствующие точки на плоскости z. Отображая Q_0 на Φ, Φ самое на себя и затем Φ обратно на Q_0, мы получим выражение z_n как функции z. Так как при этом Q_0 конформно отображается на самого себя, то $z_n = T_n(z)$, где $T_n(z)$ линейное преобразование (§ 12, теорема 24). Множество преобразований, переводящих Q_0 самого в себя, есть группа, изоморфная группе преобразований Φ.

Так как в точках P и P_n поверхности Φ, Z и W имеют одни и те же значения, то $Z(z_n) = Z(z)$ и $W(z_n) = W(z)$. Иначе говоря, $Z(z)$ и $W(z)$ автоморфные функции по отношению к группе T_n.

Область на плоскости z, в которую переходит какая-нибудь из копий F_0, составляющих Φ, является фундаментальной областью группы T_n. Рассмотрим для определенности область S_0, в которую переходит Φ_0. Каждое из преобразований, переводящих поверхность Φ самое в себя, за исключением тождественного, переводит точки Φ_0 в точки, лежащие вне нее, причем имеются преобразования, переводящие Φ_0 в любую примыкающую к ней копию. Поэтому в области S_0 на плоскости z нет ни одной пары конгруэнтных точек, в то время как области, примыкающие к S_0, содержат точки, конгруэнтные точкам S_0; следовательно, S^0 является фундаментальной областью группы T_n. Граница области S_0 состоит из $4p$ сторон, которые соответствуют при отображении $4p$ сторонам Φ_0. При этом стороны области S_0, соответствующие противоположным сторонам одного и того же разреза, конгруэнтны. Граница S_0 лежит внутри круга Q_0, так как граница Φ_0 состоит из внутренних точек поверхности Φ.

Построим для нашей группы область R, т. е. область, состоящую из всех точек, внешних по отношению ко всем изометрическим окружностям преобразований T_n. Область R_0, т. е. часть R, лежащая внутри Q_0, целиком лежит внутри некоторой окружности, лежащей внутри Q_0 (§ 34, теорема 17), и поэтому на основании теоремы 14 § 34 группа T_n есть фуксова группа первого рода.

Если при переходе поверхности Φ самой в себя Φ_0 переходит в одну из копий F_0, отличных от самой Φ_0, то ни одна из точек поверхности Φ не остается неподвижной. При этом внутренние точки каждой из копий переходят во внутренние точки некоторой

другой копии. Точка, лежащая на границе какой-нибудь копии, может, в случае если данная копия переходит в примыкающую к ней копию, перейти в другую точку той же границы, но не может перейти сама в себя. Следовательно, ни одно из преобразований T_n $(T_n \neq 1)$ не имеет неподвижных точек внутри Q_0. Другими словами, *группа T_n не содержит преобразований эллиптического типа.*

Униформизация в случае, когда поверхность Φ отображается на всю конечную плоскость. Пусть $z = G(Z)$ функция, отображающая Φ на всю конечную плоскость, и пусть $Z = Z_1(z)$ обратная ей функция. Каждой точке z соответствует единственная точка P на поверхности Φ_n; в свою очередь точке P соответствуют единственные Z и W. Когда точка z описывает замкнутую кривую на плоскости z, P описывает замкнутую кривую на поверхности Φ и функции $Z_1(z)$ и $W_1(z) \equiv F[Z_1(z)]$ возвращаются к своим первоначальным значениям. Таким образом однозначные функции переменного z

$$Z = Z_1(z), \quad W = W_1(z) \equiv F[Z_1(z)] \tag{16}$$

униформизируют функцию $W = F(Z)$. Каждая из функций (16) аналитична всюду в конечной плоскости за исключением счетного множества полюсов.

Группе преобразований, переводящих поверхность Φ самое в себя, соответствует группа преобразований $z_n = T_n(z)$, переводящих конечную плоскость самое в себя. Отсюда следует, что T_n линейное преобразование с неподвижной точкой в бесконечности. Рассуждая точно таким же образом, как в предшествующем случае, можно показать, что функции $Z_1(z)$ и $W_1(z)$ автоморфны по отношению к группе T_n.

Φ_0 отображается на область S_0, лежащую вместе с границей в конечной части плоскости. S_0 фундаментальная область группы. Как и в первом случае, группа не содержит преобразований эллиптического типа.

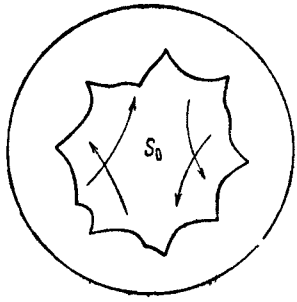
Мы можем теперь дать точную характеристику группы T_n. Так как множество всех точек, конгруэнтных какой-нибудь точке области S_0, не имеет точки сгущения в конечной плоскости, то бесконечно удаленная точка является единственной предельной точкой группы. Все группы, имеющие единственную предельную точку ∞, рассмотрены в § 59 и 60. Группы, рассмотренные в § 60, содержат преобразования эллиптического типа и, следовательно, должны быть отброшены, и таким образом остаются одно- и двоякопериодические группы. Но фундаментальной областью однопериодической группы не может служить область, целиком вместе с границей лежащая в конечной части плоскости; следовательно, группа T_n двоякопериодическая группа.

Итак, униформизирующие функции $Z_1(z)$ и $W_1(z)$ суть эллиптические функции z. Каждая из них (§ 61) представима в виде рациональной функции от вейерштрассовых функций $\wp(z)$ и $\wp'(z)$, связанных с двоякопериодической группой T_n.

§ 92. Жанр фундаментальной области группы. Обозначим попрежнему через S_0 область, в которую переходит Φ_0. Если мы склеим конгруэнтные стороны области S_0 (черт. 74), то получится замкнутая поверхность, точки которой взаимно-однозначно соответствуют точкам исходной римановой поверхности F (из которой путем разрезов была получена F_0).

Обе эти поверхности имеют один и тот же род, так как число связности инвариантно относительно непрерывных преобразований.

Если какая-нибудь система разрезов преобразует одну из поверхностей в односвязную, то соответствующая система разрезов преобразует другую поверхность в односвязную.



Черт. 74.

Определение. *Жанром фундаментальной области группы будем называть жанр замкнутой поверхности, которая получится, если склеить конгруэнтные стороны фундаментальной области так, чтобы конгруэнтные точки совместились.*

Сейчас мы выведем формулу, позволяющую вычислять жанр фундаментальной области, для случая, когда эта область односвязна.

Пусть граница области состоит из $2n$ сторон, т. е. из n пар конгруэнтных сторон, и пусть k— число циклов. Когда посредством склеивания конгруэнтных сторон фундаментальная область преобразуется в замкнутую поверхность, все вершины, принадлежащие i-тому циклу, сосредоточиваются в одной точке P_i поверхности. Произведем теперь следующее разбиение нашей поверхности на односвязные части: во-первых, проведем k кругообразных разрезов около точек $P_1, P_2, \ldots, P_k$, отделяющих от поверхности k односвязных кусков. Один из проведенных разрезов используем в качестве границы и поэтому исключим из поверхности отделяемый этим разрезом кусок. Часть поверхности, оставшаяся вне всех кругообразных разрезов, может быть преобразована в односвязную путем проведения разрезов вдоль кривых, по которым склеены конгруэнтные стороны. В результате этих разрезов мы получим нашу первоначальную область с вырезами около вершин.

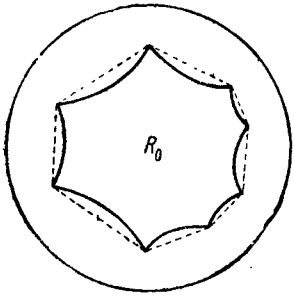
Так как кругообразные разрезы не учитываются, то, следовательно, мы провели всего $v = n$ поперечных разрезов. Помимо $k-1$ кусков у точек $P_1, P_2, \ldots, P_k$ имеется еще один односвязный кусок, и таким образом $a = k$.

На основании (14) получаем:

$$p = \frac{1}{2}(n - k + 1). \tag{17}$$

Если фундаментальная область неодносвязна, то формула (17) неприложима.

§ 93. Случай, когда $p=1$ и когда $p>1$. Сначала рассмотрим случай, когда бесконечно-многолистная поверхность Φ отображается на Q_0. Пусть R_0 фундаментальная область группы T_n, построенная с помощью изометрических окружностей. R_0 имеет конечное число сторон. Пусть Σ_0 область, лежащая на поверхности Φ, соответствующая R_0 при отображении. Σ_0 есть фундаментальная область группы преобразований, переводящих Φ в самое себя. Какова бы ни была точка Φ_0, в области Σ_0 содержится или сама эта точка или какая-нибудь конгруэнтная ей точка, принадлежащая одной из копий F_0. Очевидно, что за исключением точек, лежащих на конгруэнтных сторонах, Σ_0 не содержит ни одной пары конгруэнтных точек. Конгруэнтные стороны Σ_0 расположены друг под другом; соединяя эти стороны, мы получим точную копию замкнутой римановой поверхности F. Замкнутая поверхность, которая получится, если соединить конгруэнтные стороны R_0, взаимно-однозначно и непрерывно отображается на эту поверхность (т. е. на точную копию F) и, следовательно, имеет тот же жанр, что и риманова поверхность F. Построим прямолинейный многоугольник (черт. 75), заменяя дуги, ограничивающие R_0, хордами, и рассмотрим два многоугольника: прямолинейный и криволинейный. Пусть число сторон R_0 $2n$ и число циклов k. Так как группа не содержит преобразований эллиптического типа, то сумма углов у вершин каждого цикла равна 2π. Следовательно, сумма углов криволинейного многоугольника (сторонами его являются дуги окружностей) равна $2\pi k = A$. С другой стороны, сумма углов прямолинейного многоугольника с $2n$ сторонами равна $2\pi(n-1) = B$. Так как последняя сумма больше, то $B - A > 0$, и, применяя (17), получим:



Черт. 75.

$$B - A = 2\pi(n-k-1) = 4\pi(p-1) > 0,$$

откуда следует, что $p > 1$.

В случае когда Φ отображается на всю конечную плоскость, группа T_n есть двоякопериодическая группа. Фундаментальной областью для этой группы служит параллелограм периодов (черт. 13). Рассуждая точно так же, как и раньше, заключаем, что эта фундаментальная область имеет тот же жанр, что и риманова поверхность F. Противоположные стороны параллелограма периодов конгруэнтны и фундаментальная область имеет один цикл, т. е. $n=2$ и $k=1$. А поэтому из (17) получаем $p=1$.

Таким образом поверхность Φ может быть отображена на всю конечную плоскость в том и только в том случае, когда $p=1$, и может быть отображена на круг Q_0 в том и только в том случае, когда $p \geqslant 2$. Обозначим через z_0 точку, лежащую в области существования униформизирующих функций, и через P_0 соответствующую точку на римановой поверхности F.

Из того, что граница фундаментальной области не содержит предельных точек группы, а также неподвижных точек преобразований эллиптического типа, следует, что в достаточно малой окрестности точки z_0 нет ни одной пары конгруэнтных точек, а поэтому двум различным точкам, лежащим в этой окрестности, не может соответствовать одна и та же точка поверхности F.

Соответствие между точками окрестности z_0 на плоскости z и точками окрестности P_0 на римановой поверхности взаимно-однозначно.

Теорема 9. *Алгебраическая функция может быть униформизирована посредством:*

a) *рациональных функций, если* $p=0$;

b) *эллиптических функций, если* $p=1$;

c) *фуксовых функций первого рода, если* $p\geqslant 2$ *и притом так, чтобы в достаточно малой окрестности точки, лежащей в области существования униформизирующих функций, соответствие между точками плоскости* z *и точками римановой поверхности алгебраической функции было взаимно-однозначно.*

Случаи a), b), c) *взаимно исключают друг друга. Далее, в каждом из этих трех случаев любая пара таких униформизирующих функций может быть получена из заданной пары таких же униформизирующих функций посредством линейного преобразования переменного униформизации.*

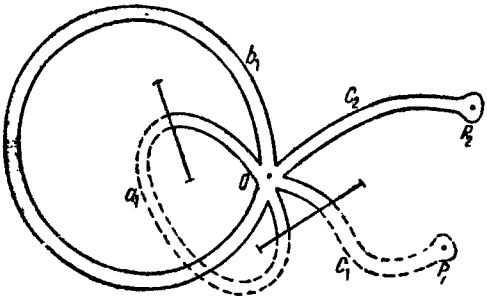
Первая часть этой теоремы объединяет уже полученные нами выше результаты. Остальные утверждения будут сейчас доказаны.

Предположим, что конструируя униформизирующие функции каким-нибудь приемом, отличным от примененного нами, в котором была использована многолистная поверхность Φ, мы получим возможность униформизировать одну и ту же алгебраическую функцию двумя из указанных в теореме способов. Пусть $Z=Z(z)$, $W=W(z)$ пара униформизирующих функций и S (полная плоскость, вся конечная плоскость или внутренность круга) область существования этих функций. Пусть, далее, $Z=Z_1(t)$, $W=W_1(t)$ другая пара униформизирующих функций с областью существования S'. Обозначим через t_0 какую-нибудь точку в области S'; пусть $P(Z_0, W_0)$ соответствующая ей точка на римановой поверхности F. Далее, пусть $z_0, z_1, \ldots$ соответствующие точки в области S. Уравнения $Z=Z(z)$, $Z=Z_1(t)$ совместно с условием, что $z=z_0$, когда $t=t_0$, определяют функцию $z=\varphi_0(t)$, аналитическую в окрестности t_0. Те же уравнения определяют другие функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$, аналитические в точке t_0 и принимающие значения $z_1, z_2, \ldots$, когда $t=t_0$. Каждая из этих функций может быть аналитически продолжена на всю область S'. Но так как все значения z, соответствующие значению t из S', различны, то каждая из этих функций есть однозначная функция в области S' [1]). Таким образом $z=\varphi_0(t)$ однозначная функция в области S'. Меняя роли S' и S, можно точно таким же образом доказать, что обратная

[1]) Osgood, Lehrbuch der Functionentheorie, второе издание, стр. 396.

функция однозначна в S. Итак, функция $z=\varphi_0(t)$ отображает конформно S' на S. С другой стороны, ни одна из таких трех областей, как полная плоскость, вся конечная плоскость, внутренность круга, не может быть конформно отображена на другую. Следовательно, S и S' области одного и того же рода. Таким образом алгебраическая функция, которая, как это было доказано, всегда может быть униформизирована посредством пары функций, принадлежащих одному из трех указанных в теореме типов, не может быть в то же время униформизирована посредством функций, принадлежащих какому-либо из двух остальных типов.

Предположим теперь, что S и S' области одного и того же рода. Тогда функция $z=\varphi_0(t)$ отображает или полную плоскость самое на себя, или плоскость без одной точки на плоскость без одной точки, или внутренность круга. В каждом из этих случаев $z=\varphi_0(t)$ есть линейное преобразование, и следовательно, последняя часть нашей теоремы доказана.



Черт. 76.

§ 94. Униформизирующие фуксовы функции более общего вида. Изложенный в § 93 метод приводит, как мы видели, к группам линейных преобразований, не содержащим ни эллиптических, ни параболических циклов. Сейчас мы рассмотрим вопрос о возможности униформизации посредством фуксовых функций, принадлежащих группам первого рода, для которых это ограничение не имеет места. Сначала рассмотрим случай, когда $p>0$.

Обозначим, как и ранее, риманову поверхность алгебраической функции через F. Выберем на поверхности F s точек $P_1, P_2, \ldots, P_s$ и предположим, что в окрестностях этих точек отображение поверхности F на плоскость переменного униформизации не является взаимно-однозначным. Каждой из точек P_i поставим в соответствие целое число $\nu_i>1$, предполагая, что в окрестности P_i отображение поверхности на плоскость ν_i-значно. В число возможных значений ν_i включим также ∞.

Сделаем нашу поверхность односвязной, проведя $2p$ разрезов, начинающихся и оканчивающихся в обыкновенной точке поверхности O; при этом разрезы проведем так, чтобы ни одна из точек $P_1, \ldots, P_s$ не оказалась на границе новой области. Далее проведем разрезы C_i из точек P_i в точку O границы. Кроме общего конца O разрезы C_i не должны иметь никаких общих точек (черт. 76). Область F_0, полученная после проведения $2p$ поперечных разрезов и s разрезов C_i, односвязна. F_0 имеет $4p+2s$ сторон и столько же вершин, очевидно, что сторонами F_0 служат обе стороны каждого из $2p+s$ разрезов.

Заготовив бесконечно много копий поверхности F_0, будем накладывать их друг на друга и соединять таким образом, чтобы: a) получающаяся после каждого присоединения область была односвязной, b) окрестность точки O, принадлежащей любому листу предельной области, была однолистной и c) каждая из точек P_i являлась точкой ветвления, около которой связаны друг с другом ν_i копий поверхности F_0.

Возьмем какую-нибудь из копий — назовем ее Φ_0 — в качестве исходной. Накладывая на Φ_0 другие копии F_0 и соединяя каждую из них с Φ_0 вдоль одной из сторон последней так, чтобы вдоль каждой стороны Φ_0 была присоединена копия, получим поверхность Φ_1. (Как и раньше, мы соединяем противоположные стороны одноименных разрезов Φ_0 и соответствующей копии.) Далее, таким же образом присоединяя новые копии F_0 вдоль сторон Φ_1, получаем Φ_2 и т. д.

Всякий раз, когда в процессе присоединения целиком заполняется окрестность точки O, мы присоединяем последнюю из копий, заполняющих окрестность вдоль двух следующих друг за другом ее сторон, превращая этим самым точку O во внутреннюю точку. Аналогично всякий раз, когда $\nu_i - 1$ копий связаны друг с другом около точки P_i, мы будем связывать обе стороны разреза C_i, принадлежащего следующей присоединяемой вдоль C_i копии с оставшимися двумя свободными сторонами. Точка P_i превратится при этом в точку ветвления, лежащую внутри поверхности.

Если $\nu_i = \infty$, то P_i никогда не может быть превращена во внутреннюю точку.

Таким же образом, как в § 91, можно доказать, что после каждого присоединения останутся свободные стороны, и поэтому процесс присоединения новых копий неограничен.

Обозначим через Φ бесконечно многолистную поверхность, предельную для последовательности $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ Пусть $W = F(Z)$ алгебраическая функция, подлежащая униформизации. На поверхности F_0 функция $F(Z)$ однозначная функция Z. Если теперь мы поставим в соответствие каждой точке каждой копии те же значения W и Z, которые соответствовали такой же точке на поверхности F_0, то все вместе взятые значения W образуют функцию, однозначную на поверхности Φ и аналитическую всюду на Φ за исключением полюсов и точек ветвления. В самом деле, копии были наложены друг на друга таким образом, что каждой точке соответствует такое же Z, как и до наложения. Кроме того, значения W на линиях соединения копий были одинаковы на присоединяемых друг к другу копиях. Таким образом функция W на одной копии является аналитическим продолжением функции W, определенной на примыкающей копии.

Последовательность $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ удовлетворяет условиям теоремы 21 § 85, и поэтому Φ может быть конформно отображена или на круг Q_0 или на всю конечную плоскость. Пусть $Z = Z(z)$ функция, реализующая это отображение.

Группе конформных преобразований поверхности Φ самой на себя, переводящих Φ_0 в какую-нибудь из копий поверхности F_0, соответствует группа конформных преобразований $z_n = T_n(z)$, переводящих круг Q_0 самого в себя или всю конечную плоскость самое в себя. Область на плоскости z, соответствующая какой-нибудь копии поверхности F_0, является фундаментальной областью группы. И обратно, часть поверхности Φ, соответствующая фундаментальной области группы T_n в круге Q_0 или в конечной плоскости, есть фундаментальная область Σ_0 для группы преобразования поверхности Φ самой на себя. Склеивая конгруэнтные стороны Σ_0, мы получим точную копию поверхности F до ее преобразования посредством разрезов. Поэтому фундаментальная область группы T_n имеет жанр $p > 0$.

Докажем теперь, что отображение поверхности Φ на всю конечную плоскость невозможно. Обращаясь к § 59 и 60 и соответствующим чертежам, заключаем, что фундаментальные области для всех групп с единственной предельной точкой за исключением двоякопериодической группы имеют жанр, равный нулю. То, что и двоякопериодические группы должны быть отброшены, доказывается следующим образом.

Предположим, что v_i конечно, и обозначим через a_i точку плоскости z, соответствующую P_i. Любая точка z, лежащая в окрестности a_i, имеет $v_i - 1$ конгруэнтных ей точек, лежащих в окрестности a_i, так как в v_i различных копиях поверхности F_0, связанных в точке P_i, лежат друг над другом v_i конгруэнтных точек, одна из которых соответствует рассматриваемой точке z в окрестности a_i. Отсюда следует, что a_i есть неподвижная точка порядка v_i преобразования эллиптического типа. Но двоякопериодическая группа не содержит преобразований эллиптического типа. Предположим теперь, что $v_i = \infty$. В этом случае P_i есть граничная точка поверхности Φ. Если бы группа T_n была двоякопериодической, то при отображении всей конечной плоскости на Φ параллелограм периодов переходил бы в область на поверхности Φ, не примыкающую к границе Φ и не содержащую точек, принадлежащих некоторой достаточно малой окрестности лежащих друг над другом точек P_i. Но тогда на плоскости z были бы точки, не имеющие конгруэнтных в параллелограме периодов, что невозможно. Таким образом наша группа не может быть двоякопериодической и, следовательно, Φ отображается на круг Q_0.

Отображающая функция $Z = Z(z)$ и функция $W = W(z) = F[Z(z)]$, униформизирующие нашу алгебраическую функцию, являются автоморфными функциями по отношению к группе T_n. В самом деле, когда точка z переходит в $T_n(z)$, соответствующая ей точка P на поверхности Φ переходит в точку P_n, в которой Z и W имеют те же самые значения, что и в P.

Теорема 10. *Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_s$ точки римановой поверхности F алгебраической функции $W = F(Z)$, жанр которой больше нуля. Пусть каждой точке P_i поставлено в соответствие целое число $v_i > 1$ (допустимо также значение $v_i = \infty$). Тогда алгебраиче-*

ская функция может быть униформизирована посредством фуксовых функций первого рода:

$$Z=Z(z), \quad W=W(z)=F[Z(z)] \tag{18}$$

и притом таким образом, что в достаточно малой окрестности точки a, лежащей внутри главной окружности группы, соответствие между точками плоскости и точками поверхности F взаимно-однозначно, за исключением случая, когда точке a соответствует P_i; в этом случае соответствие ν_i-значно.

Всякая пара униформизирующих функций этого рода может быть получена из любой другой пары таких же униформизирующих функций посредством линейного преобразования переменного униформизации.

Последняя часть теоремы доказывается так же, как в теореме 9. Область существования функций (18) есть круг Q_0. Пусть $Z=Z_1(t)$, $W=W_1(t)$ другая пара униформизирующих функций, обладающих такими же свойствами, как функции (18), и пусть круг Q область существования этих функций. (Окружность Q есть главная окружность для соответствующей группы линейных преобразований.) Пусть t_0 точка, лежащая в Q, и $P_0(W_0, Z_0)$ соответствующая точка на поверхности F; пусть, далее, $z_0, z_1, \ldots$ соответствующие точки в Q_0. Если P_0 обыкновенная точка поверхности F, то уравнения $Z=Z(z)$, $Z=Z_1(t)$ определяют различные функциональные элементы: $z=\varphi_0(t)$, $z=\varphi_1(t), \ldots$, аналитические в t_0, для которых в t_0 имеют места равенства $\varphi_k(t_0)=Z_k$. Если же $P_0=P_i$, то

$$Z-Z_0=c_0(z-z_0)^{\nu_i}+\ldots=d_0(t-t_0)^{\nu_i}+\ldots; \quad c_0\neq 0, \quad d_0\neq 0$$

(в случае если P_i является точкой ветвления поверхности F или бесконечно удаленной точкой, то написанное соотношение должно быть соответствующим образом изменено). Решая относительно z, мы и в этом случае находим различные функциональные элементы. Любая из этих функций, например $z=\varphi_0(t)$, может быть аналитически продолжена на весь круг Q и является в Q однозначной аналитической функцией t. Подобным же образом устанавливаем, что обратная функция [по отношению к $z=\varphi_0(t)$] однозначна в Q_0. Поэтому $z=\varphi_0(t)$ производит конформное отображение Q на Q_0, и таким образом преобразование переменного униформизации $z=\varphi_0(t)$ есть линейное преобразование.

§ 95. Униформизация в случае $p=0$. В случае когда жанр поверхности F равен нулю, поперечных разрезов не будет. Проведем разрезы $C_1, C_2, \ldots, C_s$, соединяющие обыкновенную точку O с точками $P_1, P_2, \ldots, P_s$ соответственно. Полученную после проведения разрезов поверхность обозначим через F_0 (черт. 77). F_0 имеет $2s$ сторон и столько же вершин, при этом s вершин лежат в O. Одну из копий F_0 примем за исходную и обозначим ее через Φ_0. Образуем поверхность Φ_1, присоединяя вдоль сторон Φ_0 новые копии F_0, и т. д. Как и раньше, всякий раз когда около точки P_i оказываются связанными ν_i копий, будем связывать оставшиеся свободные стороны, превращая этим самым P_i

во внутреннюю точку ветвления. Всякий раз, когда в процессе присоединения целиком заполняется окрестность точки O (т. е. на одном листе оказываются s вершин, встречающихся в точке O), мы присоединяем последнюю из копий, заполняющих окрестность вдоль двух следующих друг за другом ее сторон.

Когда $s \geqslant 4$, то точно таким же способом, как в примечании § 91, устанавливаем, что процесс присоединения копии неограничен. В этом случае поверхность Φ — предельная поверхность последовательности $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ — бесконечнолистна. Это, как мы сейчас увидим, следует также из того факта, что неравенство (21) не выполняется, когда $s \geqslant 4$.

Если $s = 1$, то построение невозможно. Построение невозможно также в случае $s = 2$, $\nu_1 \neq \nu_2$. В самом деле, при $s = 2$ для заполнения однолистной окрестности точки O достаточно двух копий. Следовательно, каждая новая копия присоединяется вдоль линии P_1OP_2; всякий раз, когда соединяются стороны вдоль одного разреза, необходимо должны быть соединены стороны вдоль второго разреза. Поэтому, когда мы связываем стороны вдоль разреза OP_1, замыкая ν_1 копий и превращая точку P_1 в точку ветвления, мы необходимо должны связать оставшиеся свободными стороны вдоль разреза OP_2, откуда следует, что при $\nu_2 \neq \nu_1$ построение невозможно. Если $\nu_1 = \nu_2$, то Φ будет замкнутой поверхностью, состоящей из ν_1 копий F_0, в случае когда ν_1 конечно, и бесконечно многолистной поверхностью, в случае когда ν_1 бесконечно.

В случае когда $s = 3$, процесс присоединения копий может оказаться неограниченным, так что Φ будет бесконечнолистной поверхностью или может случиться, что после присоединения конечного числа копий не останется свободных сторон и Φ будет замкнутой поверхностью с конечным числом листов.

Таким образом предельная поверхность Φ отображается или на круг, или на всю конечную плоскость, или на полную плоскость (последнее имеет место, когда Φ замкнутая поверхность). Функция $Z = Z(z)$, производящая это отображение, и функция $W = W(z) \equiv F[Z(z)]$ являются униформизирующими функциями. Функции $Z(z)$ и $W(z)$ автоморфны по отношению к группе преобразований на плоскости z, соответствующей группе преобразований поверхности Φ самой в себя. В зависимости от того, отображается ли Φ на круг, на конечную плоскость или на полную плоскость, эта группа преобразований будет фуксовой группой первого рода или группой с единственной предельной точкой в бесконечности, или конечной группой.

Допустим, что поверхность Φ отображается на Q_0, и рассмотрим фундаментальную область R_0. Жанр R_0 равен нулю. Каждой из точек P_i соответствуют точки, лежащие на границе R_0, и каждая из этих последних принадлежит циклу с углом $\frac{2\pi}{\nu_i}$. Пусть область R_0 имеет $2n$ сторон и k циклов. При этом $k - s$ циклов имеют углы 2π. Сравнивая сумму A углов фундаментальной

области с суммой B углов прямолинейного многоугольника, вершинами которого служат вершины фундаментальной области (черт. 75), получаем:

$$A=\frac{2\pi}{\nu_1}+\ldots+\frac{2\pi}{\nu_s}+2\pi(k-s),\quad B=2\pi(n-1),$$

откуда

$$B-A=2\pi\left[n-k-1+s-\left(\frac{1}{\nu_1}+\ldots+\frac{1}{\nu_s}\right)\right]>0.$$

Но так как $p=0$ и на основании (17) $n=k-1$, то

$$\frac{1}{\nu_1}+\ldots+\frac{1}{\nu_s}<s-2. \tag{19}$$

Допустим теперь, что Φ отображается на всю конечную плоскость. Из проведенного ранее исследования всех возможных групп с единственной предельной точкой в бесконечности вытекает, что в качестве фундаментальной области в этом случае может быть взят прямолинейный многоугольник. Тогда $B=A$ и

$$\frac{1}{\nu_1}+\ldots+\frac{1}{\nu_s}=s-2. \tag{20}$$

Нами уже было установлено (§ 57), что во всех остальных случаях, т. е. когда

$$\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\ldots+\frac{1}{\nu_s}>s-2, \tag{21}$$

группы конечны, и обратно, что для всех конечных групп имеет место неравенство (21).

Случаи, когда Φ замкнутая поверхность, можно определить также, пользуясь формулой Эйлера. Предположим, что поверхность Φ путем непрерывной деформации преобразована в сферу. Тогда копии с их сторонами и вершинами можно рассматривать как грани, ребра и вершины некоторого многогранника. Пусть F число граней. Каждая грань имеет $2s$ сторон и поэтому число ребер многогранника $F\cdot s$. Каждая грань имеет s O-вершин; но так как в каждой O-вершине сходятся s граней, то число O-вершин многогранника будет F. Далее, каждая грань имеет одну P_i-вершину ($i=1, 2, \ldots, s$). Так как в P_i-вершине сходятся ν_i граней, то число P_i-вершин многогранника равно $\frac{F}{\nu_i}$. Таким образом, применяя к нашему многограннику формулу Эйлера $F+V=E+2$, получим:

$$F+\left[F+F\left(\frac{1}{\nu_1}+\ldots+\frac{1}{\nu_s}\right)\right]=Fs+2,$$

откуда

$$\frac{1}{\nu_1}+\ldots+\frac{1}{\nu_s}=s-2+\frac{2}{F}>s-2.$$

Теперь формулируем полученные результаты в виде теоремы. В ней мы перенумеруем все возможные решения (20) и (21) и выделим типы функций, решающих проблему. Доказательство утверждения, стоящего в конце этой теоремы, проводится точно

таким же образом как в предшествующих теоремах; повторять его было бы лишним.

Теорема 11. *Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_s$ точки римановой поверхности F алгебраической функции нулевого жанра. Отнесем каждой точке P_i некоторое целое число $\nu_i > 1$, причем условимся, что в качестве ν_i может быть взята также ∞ и что в случае $s = 2$ должно иметь место равенство $\nu_1 = \nu_2$. Тогда наша алгебраическая функция может быть униформизирована посредством автоморфных функций и притом так, что в окрестности точки a, лежащей в области существования автоморфных функций, соответствие между точками плоскости и точками поверхности F будет взаимно-однозначным всегда за исключением случаев, когда точке соответствует точка P_i на поверхности. В последних случаях соответствие ν_i значно.*

Униформизирующими функциями будут:

1) *рациональные (полиедральные) функции, если*

a) $s = 2$, ν_1 конечно;

b) $s = 3$, $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} > 1$;

2) *однопериодические функции, если*

a) $s = 2$, $\nu_1 = \infty$;

b) $s = 3$, $\nu_1 = \nu_2 = 2$, $\nu_3 = \infty$;

3) *эллиптические функции, если*

a) $s = 3$, $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1$;

b) $s = 4$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 2$;

4) *фуксовы функции первого рода во всех иных случаях.*

Любая пара униформизирующих функций такого рода может быть получена из любой другой пары таких же функций путем линейного преобразования переменного униформизации.

Функции, дающие решение проблемы униформизации в примере (2), приведенном в начале настоящей главы, подходят под рубрику 2), a). Риманова поверхность для функции $W = \sqrt{1 - Z^2}$ есть двулистная поверхность с точками ветвления ± 1. Точки P_1 и P_2 на обоих листах лежат в бесконечности.

§ 96. Группа Уайттекера. Сейчас мы рассмотрим группы, предложенные Уайттекером для униформизации гиперэллиптических алгебраических функций[1]). Они могут быть получены как подгруппы групп, порожденных эллиптическими преобразованиями с периодом, равным двум.

---

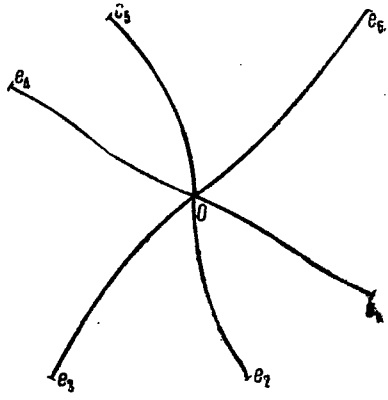
[1]) Phil. Trans., т. 192, стр. 1—32, 1899.

Пусть римановой поверхностью нулевого жанра, фигурирующей в теореме 11, будет плоскость переменного Z. Выберем в качестве точек P_i точки:

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_{2p+2}, \qquad p > 1$$

и пусть $\nu_i = 2$ для всех этих точек. Очевидно, что в этом случае предельная поверхность отображается на Q_0.

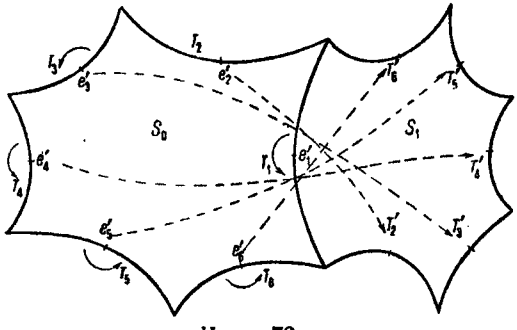
Исходную поверхность Φ_0 получаем, производя в плоскости Z разрезы вдоль линий, соединяющих некоторую точку O с точками e_1, $e_2, \ldots, e_{2p+2}$. (Черт. 77 соответствует случаю $p = 2$.) Каждая присоединяемая к Φ_0 копия связывается с Φ_0 вдоль обеих сторон разреза, соединяющего O с одной из точек e_i. Если перевести Φ_0 в одну из примыкающих к Φ_0 копий, то сама эта копия перейдет при этом в Φ_0, так что точка e_i останется на месте.



Черт. 77.

Пусть при отображении Φ на Q_0 поверхность Φ_0 и какая-нибудь примыкающая к Φ_0 копия отображаются на области S_0 и S_i на плоскости z. Каждая из этих областей служит фундаментальной областью для группы Γ (на плоскости z), соответствующей группе конформных преобразований поверхности Φ в самое себя, при которых Φ_0 переходит в различные копии, принадлежащие Φ.

Пусть преобразование T_i переводит S_0 в S_i. Очевидно, что то же преобразование переводит S_i в S_0, причем точка e_i', лежащая на общей границе этих двух областей, остается на месте. Поэтому T_i есть преобразование эллиптического типа с периодом, равным двум, для которого e_i' является неподвижной точкой. Преобразования $T_1, T_2, \ldots, T_{2p+2}$, связывающие конгруэнтные стороны S_0 и, следовательно, порождающие группу Γ, все являются преобразованиями эллиптического типа с периодом, равным двум (черт. 78).



Черт. 78.

Автоморфная функция $Z = Z(z)$, обратная к функции, отображающей Φ на Q_0, отображает область S_0 на полную плоскость Z и, следовательно, принимает в S_0 каждое значение один раз. Поэтому всякая простая автоморфная функция, принадлежащая той же группе, что и $Z(z)$, является рациональной функцией $Z(z)$. Всякая

алгебраическая функция, которая может быть униформизирована посредством простых автоморфных функций такого рода, является (в соответствии с теоремой 7) функцией нулевого жанра.

Обозначим через Φ_0' поверхность, получаемую путем присоединения к Φ_0 вдоль обеих сторон разреза Oe_1, одной из копий Φ_0 (Φ_0 плоскость Z с разрезами вдоль Oe_i). Предельная поверхность Φ может быть рассматриваема как поверхность, образованная путем соединения копий двулистной поверхности Φ_0'.

Группе преобразований, переводящих Φ самое в себя, при которых Φ_0' переходит во все возможные ее копии, принадлежащие Φ, соответствует группа преобразований Γ' на плоскости z. Γ' является подгруппой Γ. Область S_0', соответствующая Φ_0' при отображении Φ на Q_0, является фундаментальной областью группы Γ'. S_0' состоит из S_0 и примыкающей к ней области $S_1 = T_1(S_0)$. Преобразованиями, связывающими конгруэнтные стороны S_0', т. е. порождающими преобразованиями группы Γ', служат (черт. 78):

$$T_2' = T_1T_2, \quad T_3' = T_1T_3, \quad \ldots, \quad T_{2p+2}' = T_1T_{2p+2}.$$

Таким образом Γ' не содержит преобразований эллиптического типа.

Но поверхность Φ_0' может быть получена в результате проведения разрезов на двулистной римановой поверхности F с точками ветвления в $e_1, e_2, \ldots, e_{2p+2}$. Очевидно, что F риманова поверхность для двузначной функции:

$$W^2 = A(Z - e_1)(Z - e_2)\ldots(Z - e_{2p+2}).$$

Координаты (Z, W) точек поверхности Φ являются простыми автоморфными функциями z; эти функции униформизируют написанную выше гиперэллиптическую функцию.

§ 97. Трансцендентые функции. Каждой аналитической функции

$$W = F(Z) \tag{22}$$

соответствует расположенная над плоскостью Z риманова поверхность F, на которой функция однозначна. Поверхность F может быть получена посредством аналитического продолжения какого-нибудь из элементов функции. Детальное описание процесса построения такой поверхности можно найти в учебниках по теории функций[1]).

Римановы поверхности аналитических функций чрезвычайно разнообразны. Множество листов может быть конечным или счетным. Поверхность может иметь точки ветвления конечного или бесконечного порядка, а может совсем не иметь точек ветвления. Функция может не быть аналитической в отдельных точках или на кривых; на листах поверхности могут оказаться дыры, происходящие от областей, в которые функция не может

[1]) См. Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной, ГТТИ, 1934.

быть аналитически продолжена и которые поэтому не могут принадлежать поверхности.

Некоторые из изолированных особых точек функции мы будем считать принадлежащими поверхности F, а именно принадлежащие только одному листу точки, в которых функция становится бесконечной, т. е. полюсы и точки ветвления конечного порядка, в которых функция непрерывна или обращается в бесконечность. Все иные изолированные особые точки в поверхность не включаются, они принадлежат границе F. Поверхность F состоит из внутренних точек.

Мы сейчас докажем, что какова бы ни была поверхность F, всегда может быть найдена система разрезов — конечная или бесконечная, преобразующих поверхность F в односвязную поверхность.

Не уменьшая общности, можно считать, что каждая из принадлежащих F бесконечно удаленных точек принадлежит только одному листу. К такому положению можно всегда притти, делая соответствующее линейное преобразование.

В самом деле, множество точек ветвления поверхности F счетно и поэтому Z-координаты этих точек не покрывают всей плоскости Z; следовательно, для достижения нашей цели достаточно произвести линейное преобразование плоскости Z, переводящее в бесконечность какую-нибудь точку, не являющуюся Z-координатой ни одной из точек ветвления F.

Кроме того, можно предположить также, что в выражении $Z = X + iY$ для каждой точки ветвления X и Y оба иррациональны. Действительно, все точки, абсциссы и ординаты которых отличаются на рациональные числа от абсцисс и ординат точек ветвления, расположены на счетном множестве линий, параллельных осям X и Y, и поэтому, для того чтобы сделать абсциссы и ординаты точек ветвления иррациональными, достаточно совершить перенос, переводящий начало в какую-нибудь точку, не лежащую ни на одной из этих прямых.

Разобьем нашу поверхность на квадратные элементы (§ 86), а затем соединим их вновь так, чтобы получилась односвязная поверхность. Все соединяемые при построении односвязной поверхности квадратные элементы должны *вместе с их границами принадлежать поверхности* F. Случай, когда поверхность F представляет собой полную плоскость, мы оставляем в стороне.

Рассмотрим сначала бесконечно удаленные точки F. Каждая такая точка принадлежит элементу (внешности квадрата), ограниченному прямыми $X = \pm n$, $Y = \pm n$, где n — целое положительное число. Для числа n мы выбираем наименьшее из возможных значений, при которых элемент принадлежит F. Таким образом мы получим конечное или счетное множество элементов, содержащих бесконечно удаленные точки поверхности F.

Оставшиеся части поверхности мы рассечем вдоль линий $X = m$, $Y = n$, где m и n принимают все целые значения.

При этом разбиении выделится конечное или счетное множество элементов, принадлежащих поверхности F и представляющих собой или однолистные единичные квадратики или наложенные друг на друга единичные квадратики, связанные около единственной точки ветвления. Все такие элементы дальнейшим разбиениям не подлежат.

Оставшиеся после этого разбиения части поверхности разделим вновь на квадратики, производя разрезы вдоль прямых $X = m + \frac{1}{2}$, $Y = n + \frac{1}{2}$, и выделим получающиеся при этом квадратные элементы, принадлежащие F. Каждый из оставшихся после последнего разбиения квадратов опять делим на четыре части и выделяем принадлежащие F квадратные элементы и т. д.

Очевидно, что ни одна точка ветвления не может попасть на сторону какого-либо из квадратов, получающихся в процессе этого разбиения, так как по крайней мере одна из координат X и Y каждой точки, лежащей на стороне такого квадрата, рациональна.

Выделенные в результате всего процесса разбиения элементы, множество которых конечно или счетно, содержат все точки поверхности F. В самом деле, окрестность каждой точки поверхности F или принадлежит одному листу или, в случае если эта точка есть точка ветвления, нескольким листам, соединенным в этой точке, и следовательно, в процессе разбиения попадет в один из выделяемых квадратных элементов, когда сторона квадрата будет достаточно мала.

Покажем теперь, как нужно вновь соединить наши квадратные элементы, чтобы получаемая в результате этого соединения поверхность оказалась односвязной.

Если два квадратных элемента примыкают друг к другу, то они имеют общий прямолинейный кусок границы, длина которого равна стороне меньшего квадрата (если эти квадраты неодинаковые). Такой кусок границы будем называть *ребром*. Два квадратных элемента могут иметь несколько общих ребер, если каждый из них содержит точку ветвления. Если элемент, содержащий бесконечно удаленную точку, и примыкающий к нему элемент имеют одну общую вершину, то они имеют два общих ребра, встречающихся в этой вершине. Так как каждый квадратный элемент имеет конечное число сторон, то множество всех ребер счетно. Поэтому это множество можно представить в виде последовательности:

$$l_1, \quad l_2, \quad l_3, \ldots \tag{23}$$

Обозначим один из принадлежащих поверхности F квадратных элементов через φ_0 и пусть l_{n_1}, первое ребро из последовательности (23), входящее в границу φ_0. Присоединим к φ_0 примыкающий к нему вдоль ребра l_{n_1}, квадратный элемент, скрепляя их вдоль ребра l_{n_1}. Если эти элементы имеют еще одно общее ребро, примыкающее к l_{n_1} (это возможно, если один из элемен-

тов представляет собой внешность квадрата), то произведем скрепление также вдоль этого ребра. Обозначим полученную таким образом поверхность через φ_1. Вычеркнем из последовательности (23) все другие общие ребра двух соединенных элементов.

Вообще поверхность φ_n строится из φ_{n-1} следующим образом: пусть l_{n_n} первое принадлежащее границе φ_{n-1} ребро из последовательности (23), после того как из последовательности (23) было вычеркнуто каждое ребро, принадлежащее любым двум элементам φ_{n-1}, вдоль которого эти элементы не были скреплены.

Присоединяем к поверхности φ_{n-1} квадратный элемент, примыкающий к ней вдоль ребра l_{n_n}, производя скрепление этого элемента с поверхностью φ_{n-1} вдоль ребра l_{n_n}. Мы производим, далее, скрепление вдоль других ребер, если это возможно, следующим образом: если при обходе границы новой области одноименные ребра встречаются два раза под-ряд, то производим скрепление также вдоль этого ребра, удлиняя таким образом линию скрепления. Если при обходе новой границы, какое-нибудь ребро встречается два раза под-ряд, то вдоль этого ребра тоже производится скрепление. Этот процесс скреплений продолжаем до тех пор, пока не окажется ни одной пары одноименных ребер, встречающихся дав раза под-ряд при обходе границы. Получаемую в результате этого построения поверхность обозначим через φ_n.

Поверхность φ_n односвязна. В самом деле, предположим, что φ_{n-1} односвязна. Линию, вдоль которой было произведено скрепление при построении поверхности φ_n из φ_{n-1}, можно рассматривать как поперечный разрез (возможно, как сигмаобразный разрез), разбивающий φ_n на две односвязных части φ_{n-1} и присоединенный элемент, поэтому и φ_n односвязна. Так как φ_0 односвязна, то сделанное утверждение справедливо. Предельная поверхность Φ_0, определяемая последовательностью

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_n, \quad \ldots \longrightarrow \Phi_0, \tag{24}$$

также односвязна.

Нетрудно видеть, что поверхность Φ_0 содержит все квадратные элементы, полученные при разбиении поверхности F. Так как поверхность F связна, то на ней может быть проведева кривая, соединяющая элемент φ_0 с любым заданным элементом s и встречающая лишь конечное число элементов. Обозначим элементы, встречаемые этой кривой, через φ_0, s_1, $s_2, \ldots, s_n$, s и через l_{k_0}, $l_{k_1}, \ldots, l_{k_n}$ пересекаемые ею ребра, разделяющие эти элементы. После конечного числа шагов в процессе построения поверхности Φ_0 ребро l_{k_0} или будет вычеркнуто из последовательности (23), или будет первым не вычеркнутым из этой последовательности ребром, входящим в границу некоторой поверхности φ_m. В обоих случаях элемент s_1 войдет в поверхность φ_{m+1}. Таким же образом убеждаемся, что после конечного числа шагов в конструкцию будут включены элементы $s_2, \ldots, s_n$, s.

Рассмотрим теперь строение поверхности Φ_0. Может случиться, что Φ_0 состоит из конечного числа квадратных элементов и полностью замкнута. Тогда F есть поверхность нулевого рода и функция $F(Z)$ есть алгебраическая функция, так как она не имеет на поверхности F других особенностей кроме полюсов.

Может случиться также, что Φ_0, состоя из конечного числа квадратных элементов, имеет границу. В этом случае функция $F(Z)$ также алгебраическая, но имеет род, больший нуля. Граница Φ_0 представляет собой множество разрезов на поверхности F, преобразующих F в односвязную поверхность. Мы оставим эти алгебраические случаи в стороне.

Если же поверхность F содержит бесконечно много квадратных элементов, то функция $F(Z)$ неалгебраическая. Могут представиться две возможности: Φ_0 не имеет свободных ребер и $F(=\Phi_0)$ односвязна или Φ_0 имеет свободные ребра. В последнем случае свободные ребра представляют собой систему разрезов поверхности F, преобразующих F в односвязную поверхность.

Последовательность (24) удовлетворяет условиям теоремы 21 § 85; следовательно, Φ_0 отображается или на единичный круг Q_0 или на всю конечную плоскость. В случае когда Φ_0 имеет свободные ребра, она отображается на круг (теорема 22 § 85).

Если Φ_0 имеет свободные ребра, мы продолжаем построение предельной поверхности. Перенумеруем все свободные ребра Φ_0 и обозначим через m_i, m_i' противоположные стороны i-го свободного ребра. Получаем последовательность:

$$m_1, \quad m_1'; \quad m_2, \quad m_2'; \quad \ldots \tag{25}$$

Возьмем какую-нибудь копию поверхности Φ_0 и присоединим ее к Φ_0, скрепляя m_1 на поверхности Φ_0 с m_1' на копии. Мы продолжаем скрепление насколько возможно, смыкая стороны всякий раз, когда при обходе границы вслед за ребром идет одноименное ребро. После этого берем другую копию Φ_0 и присоединяем ее вдоль первого из ребер (25) границы оригинала Φ_0, вдоль которых еще не было произведено скрепление. При этом линия скрепления удлиняется, как и раньше.

Этот процесс присоединения копий к Φ_0 продолжаем до тех пор, пока не будут исчерпаны все ребра последовательности (25), т. е. до тех пор, пока поверхность не будет полностью окружена копиями. Полученную таким образом новую поверхность обозначим через Φ_1.

Теперь перенумеруем ребра, ограничивающие Φ_1, и точно таким же образом, как и раньше, присоединим вдоль границы Φ_1 копии поверхности Φ_0. Полученную при этом новую поверхность обозначим через Φ_2 и т. д.

Каждая из поверхностей $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ отображается на круг; следовательно, предельная поверхность Φ, определяемая последовательностью

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots \to \Phi, \tag{26}$$

отображается или на круг Q_0 или на всю конечную плоскость.

Пусть поверхность Φ (в случае когда риманова поверхность F односвязна, то $\Phi = \Phi_0 = F$) отображена на Q_0 или на всю конечную плоскость переменного z. Пусть $Z = Z(z)$ функция, обратная по отношению к функции, производящей отображение. Функции

$$Z = Z(z), \quad W = W(z) = F[Z(z)] \tag{27}$$

аналитичны во всех точках Q_0 или всей конечной плоскости за исключением полюсов. Полюсами $Z(z)$ являются точки плоскости z, соответствующие бесконечно удаленным точкам поверхности Φ. Полюсы $W(z)$ соответствуют точкам поверхности Φ, в которых $F(Z)$ обращается в бесконечность.

Если поверхность Φ отображается на всю конечную плоскость, то по крайней мере одна из функций (27) имеет в бесконечности существенную особенность, так как в противном случае обе функции были бы рациональны и $F(z)$ была бы алгебраической функцией нулевого рода.

Если Φ отображается на Q_0, то каждая точка окружности Q_0 является особой точкой по крайней мере для одной из функций (27). Действительно, допустим противное, т. е. что обе функции аналитичны в некоторой точке a окружности. Функция $Z = Z(z)$ переводит некоторый достаточно малый кружок K, заключающий точку a, в область K' на плоскости Z. K' представляет собой окрестность точки ветвления или однолистную область в соответствии с тем, обращается ли $Z'(a)$ в нуль или нет. Лежащую в Q_0 часть K эта функция отображает на некоторую часть поверхности Φ. Так как функция W может быть аналитически продолжена на всю область K', то K' принадлежит Φ. Но тогда кружок K содержался бы полностью в Q_0, что противоречит предположению, сделанному относительно K.

С поверхностью Φ связана группа конформных преобразований, переводящих ее самое в себя и переводящих исходную копию Φ_0 во всевозможные копии Φ_0, принадлежащие Φ. Этой группе соответствует на плоскости z группа конформных преобразований, переводящих круг Q_0 в самого себя или всю конечную плоскость в самое себя; очевидно, что это группа линейных преобразований. В случае когда Φ состоит из одной единственной копии $\Phi_0 (\Phi = \Phi_0)$, группа содержит только тождественное преобразование. Функции (27) инвариантны относительно преобразований этой группы.

Нами доказана первая часть следующей теоремы:

Теорема 12. *Всякая трансцендентная функция*

$$W = F(Z)$$

может быть представлена в параметрическом виде с помощью двух функций:

$$Z = Z(z), \quad W = W(z),$$

которые аналитичны всюду за исключением полюсов в области Σ, представляющей собой или внутренность единичного круга Q_0 или

всю конечную плоскость; каждая пара значений Z, W, удовлетворяющих функциональному соотношению $W=F(Z)$, соответствует одному или нескольким значениям z из области Σ, причем соответствие между точками достаточно малой окрестности точки z из области Σ и точками римановой поверхности взаимно-однозначно.

Любая пара функций, обладающих этими свойствами, может быть получена от любой другой пары функций такого же рода путем линейного преобразования переменного z.

Если риманова поверхность нашей функции неодносвязна, то функции (37) инвариантны относительно бесконечной группы линейных преобразований.

Вторая часть теоремы доказывается обычным способом. Докажем третью часть. Если бы последовательность (26) обрывалась за исчерпанием свободных ребер после конечного числа шагов, то и в этом случае отображение было бы возможно, но получаемая при этом отображении группа была бы конечна. Следовательно, группа содержала бы эллиптическое преобразование с неподвижной точкой z_0 в области Σ. Но тогда в окрестности z_0 соответствие не было бы взаимно-однозначным; таким образом наше предположение отпадает.

Функции (27) автоморфны, если только они однозначны (в соответствии с определением, сделанным в § 35). Если Σ представляет собой всю конечную плоскость, то эти функции однозначны. Если же Σ есть внутренность круга Q_0, то может оказаться возможным продолжить одну или обе функции за пределы круга и возвратиться обратно в Q_0 со значениями новых ветвей этих функций. Пусть, например, $f(z)$ аналитична в некотором полукруге и пусть граница этого полукруга является естественной границей функции. В этом случае поверхностью Φ_0 является полукруг; следовательно, Φ_0 отображается на Q_0. Очевидно, что окружность Q_0 является естественной границей для $W(z)$. Между тем функция $Z(z)$, отображающая Q_0 на полукруг, может быть аналитически продолжена за окружность и является двузначной функцией.

Не требуя, чтобы соответствие было повсюду взаимно-однозначным, можно получить совсем другие пары функций. Можно выбрать на римановой поверхности некоторые точки и установить в их окрестности ν-значное соответствие ($\nu > 1$), а в окрестности остальных точек — однозначное соответствие. Однако мы не будем вдаваться в детали этого построения.

Глава X

УНИФОРМИЗАЦИЯ. ГРУППЫ ТИПА ШОТТКИ

§ 98. Области плоского характера. Изложенные в гл. IX методы униформизации базировались на отображениях односвязных областей. Для того чтобы получить возможность униформизировать посредством автоморфных функций, принадлежащих группам, фундаментальные области которых неодносвязны, мы должны изучить вопрос об отображении многосвязных областей на однолистные области.

Будем говорить, что область *имеет плоский характер* или является областью *„подобной однолистной“* [1]), если любой кругообразный разрез делит эту область на две части. Этим свойством обладают все однолистные области. Очевидно, что область, не имеющая плоского характера, не может быть взаимно-однозначно отображена на однолистную область (или, иначе говоря, не может быть преобразована в однолистную область путем непрерывной деформации), так как в противном случае кругообразный разрез, не разделяющий на две части отображаемую поверхность, переходил бы в кругообразный разрез в однолистной области, не делящий эту область на две части, что невозможно.

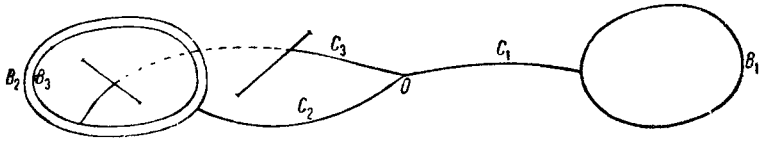
Пусть Σ — область плоского характера, имеющая конечное число листов и конечное число точек ветвления, и пусть граница Σ состоит из конечного числа замкнутых кривых $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Сейчас мы приступим к доказательству того, что Σ может быть отображена на однолистную область, ограниченную m кривыми.

Сначала преобразуем посредством разрезов поверхность Σ в односвязную и выполним одно предварительное отображение. Произведем m разрезов $C_1, C_2, \ldots, C_m$, определяемых следующим образом: C_i соединяет некоторую обыкновенную точку O поверхности с какой-нибудь точкой кривой B_i; разрезы не должны иметь помимо O никаких других общих точек. Полученную таким образом область обозначим через Σ_0; очевидно, что вся ее граница может быть пройдена непрерывным движением, от какой бы точки этой границы мы ни отправились. Далее предположим, что разрезы произведены таким образом (или, что кривые так перенумерованы), что, двигаясь вдоль границы в положительном направлении, мы встречаем последовательно кривые $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Область Σ_0 односвязна. В самом деле, если это не так, то можно провести

---

[1]) По-немецки „schlichtartig“.

поперечный разрез q, не разделяющий Σ_0 на части. Если q не сигмаобразный разрез, то q может быть переделан в сигмаобразный разрез путем непрерывной деформации, так как оба конца q лежат на границе Σ_0 и так как можно перейти от одного конца к другому, двигаясь непрерывным образом вдоль границы. Но ликвидируя ствол сигмаобразного разреза, мы получим круго-



Черт. 79.

образный разрез, не разделяющий Σ_0, а следовательно, и Σ на части, что противоречит предположению, сделанному относительно Σ.

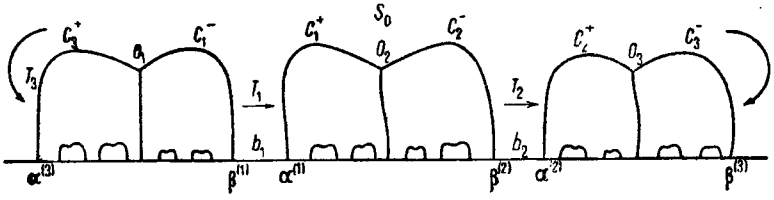
На черт. 79 показана область плоского характера, расположенная на двулистной эллиптической поверхности. На этой поверхности произведен кругообразный разрез на верхнем листе и из верхнего листа удалена область, ограниченная кривой B_1.

Теперь заготовим копии поверхности Σ_0 и займемся построением бесконечнолистной поверхности. Одну из копий выбираем в качестве исходной; обозначим ее через Φ_0. Присоединим к Φ_0 вдоль $2m$ сторон разрезов C_i новые копии и полученную в результате этого поверхность обозначим через Φ_1. Присоединяя затем новые копии вдоль свободных сторон Φ_1, получим Φ_2 и т. д. Всякий раз когда в процессе присоединения новых копий заполняется однолистная окрестность точки O, мы будем скреплять соответствующие две встречающиеся в O стороны одноименных разрезов, превращая O во внутреннюю точку поверхности.

Поверхности $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ образуют последовательность, удовлетворяющую условиям теоремы 21 § 85. Принимая во внимание наличие граничных кривых B_i, заключаем, что в этом случае предельная бесконечнолистная поверхность Φ может быть отображена на круг.

Отобразим поверхность Φ, расположенную над плоскостью Z, на верхнюю полуплоскость плоскости t, ограниченную действительной осью, и притом так, чтобы какая-нибудь точка кривой B_m на исходной копии Φ_0 перешла в ∞. Пусть $Z = Z(t)$ функция, выполняющая это отображение. Обратная ей функция $t = g(Z)$ однозначна на поверхности Φ при условии, что она не будет продолжена через кривые B_i. Каждой точке Φ соответствует одна и только одна точка верхней полуплоскости плоскости t. На нашей первоначальной поверхности Σ $g(Z)$ является бесконечнозначной функцией, принимающей каждое значение из верхней полуплоскости t один и только один раз. Соответствие между точками достаточно малой окрестности точки Z_0 поверхности Σ и точками окрестности соответствующей точки t_0 на плоскости t взаимно-однозначно.

Группе конформных преобразований поверхности Φ, в самое себя переводящих Φ_0 во все возможные копии Σ_0, входящие в Φ, соответствует группа линейных преобразований на плоскости t, переводящих верхнюю полуплоскость t самое в себя. Пусть при отображении Φ на верхнюю полуплоскость Φ_0 переходит в S_0 (черт. 80). Область, состоящая из S_0 и зеркального отражения S_0 относительно действительной оси, является фундамента-



Черт. 80.

ной областью группы. Наша группа линейных преобразований есть фуксова группа второго рода.

§ 99. Некоторые вспомогательные функции. В этом параграфе будут построены некоторые функции, однозначные на поверхности Φ и принимающие одинаковые значения на противоположных сторонах разрезов C_i на Φ_0. Очевидно, что эти функции будут однозначны на поверхности Σ, которую можно получить из Φ_0, устраняя на Φ_0 разрезы. В терминах переменного t мы займемся функциями, принимающими одинаковые значения на конгруэнтных частях границы S_0. Эти функции будут заданы в виде рядов и произведений, сходимость которых для фуксовых групп второго рода была в свое время доказана (§ 50).

В дальнейшем будем пользоваться ранее введенным обозначением $t_n = T_n(t)$, где $T_0, T_1, \ldots$ преобразования группы. Пусть τ и η две внутренних точки области S_0; рассмотрим функцию:

$$\psi(t) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{t-\tau_n}{t-\overline{\tau}_n} \cdot \frac{t-\overline{\eta}_n}{t-\eta_n}, \tag{1}$$

где, как обычно, черта введена для обозначения сопряженной величины. Эта функция аналитична повсюду на полной плоскости переменного t за исключением точек η_n в верхней полуплоскости и точек $\overline{\tau}_n$ в нижней полуплоскости, которые являются ее полюсами, и расположенных на действительной оси предельных точек группы, которые являются для нее существенно особыми точками. Она всюду отлична от нуля за исключением точек τ_n и $\overline{\eta}_n$. Поведение этой функции в нижней полуплоскости не представляет для нас интереса. В обыкновенной точке действительной оси имеем:

$$|t-\tau_n| = |t-\overline{\tau}_n|, \quad |t-\eta_n| = |t-\overline{\eta}_n|$$

и

$$|\psi(t)| = 1. \tag{2}$$

Исследуем теперь поведение $\psi(t)$, когда над t выполняется принадлежащее группе преобразование:

$$t_k = T_k(t) = \frac{at+b}{ct+d}, \qquad ad - bc = 1. \tag{3}$$

Получаем:

$$\psi(t_k) = \prod \frac{t_k - \tau_n}{t_k - \bar{\tau}_n} \cdot \frac{t_k - \bar{\eta}_n}{t_k - \eta_n}.$$

Обозначим через $T_{k'}$ преобразование, обратное по отношению к T_k; тогда можно написать $\tau_n = \tau_{kk'n}$.

Получаем [§ 1, равенство (7)]:

$$t_k - \tau_n = \frac{t - \tau_{k'n}}{(ct+d)(c\tau_{k'n}+d)}$$

и

$$\psi(t_k) = \prod \frac{t - \tau_{k'n}}{t - \bar{\tau}_{k'n}} \cdot \frac{t - \bar{\eta}_{k'n}}{t - \eta_{k'n}} \cdot \frac{c\bar{\tau}_{k'n} + d}{c\tau_{k'n} + d} \cdot \frac{c\eta_{k'n} + d}{c\bar{\eta}_{k'n} + d}.$$

Но множество всех $\tau_{k'n}$ отличается от множества всех τ_n только порядком расположения элементов, и поэтому

$$\psi(t_k) = \psi(t) \prod \frac{c\bar{\tau}_n + d}{c\tau_n + d} \cdot \frac{c\eta_n + d}{c\bar{\eta}_n + d} = H_k \psi(t), \tag{4}$$

где H_k постоянное, не равное нулю. Так как коэфициенты преобразования (3) действительны, то

$$|c\tau_n + d| = |c\bar{\tau}_n + d|$$

и

$$|H_k| = 1. \tag{5}$$

Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_m$ преобразования, связывающие стороны области S_0, перенумерованные в таком же порядке, как на черт. 80. Рассматривая цикл около вершины O_1, находим соотношение: $T_m \ldots T_1 = 1$. Подставляя вместо t $T_m \ldots T_1(t)$ и применяя (4) m раз подряд, получаем:

$$\psi(t) = H_m H_{m-1} \ldots H_1 \psi(t),$$

откуда

$$H_1 \cdot H_2 \ldots H_m = 1. \tag{6}$$

Мы неоднократно будем пользоваться элементарной формулой, связывающей число нулей и полюсов функции $f(t)$, аналитической повсюду в S_0 за исключением ее полюсов, непрерывной и необращающейся в нуль на границе S_0:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_C d \ln f(t) = \frac{1}{2\pi i}[\ln|f(t)| + i \arg f(t)]_\sigma = \frac{1}{2\pi}[\arg f(t)]_\sigma, \tag{7}$$

где C — граница области S_0 — обходится в положительном направлении. Пусть при положительном обходе границы началом интервала b_s (соответствующего B_s) является точка $\beta^{(s)}$, а концом точка $\alpha^{(s)}$ (черт. 80). Обозначим через h_s величину, на которую изменяется $\arg f(t)$, когда точка t переходит от $\beta^{(s)}$ к $\alpha^{(s)}$. Применяя (7) к функции $\psi(t)$, получаем: $N-P=0$, так как $\psi(t)$ имеет в S_0 только один полюс и один нуль. Но на основании (4) $[d\ln\psi(t)]\widehat{C_s^-}=[d\ln\psi(t)]\widehat{C_s^+}$ и поэтому интегралы, распространенные на конгруэнтные стороны, взаимно уничтожаются, так как они берутся в противоположных направлениях. Благодаря этому будем иметь:

$$\sum\left[\arg\psi(t)\right]_{\beta^{(s)}}^{\alpha^{(s)}}=h_1+h_2+\ldots+h_m=0. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что $H_s=e^{ih_s}$, так что (6) получается как следствие (8).

Теперь рассмотрим функцию иного типа:

$$\varphi_s(t)=\prod\frac{t-\alpha_n^{(s)}}{t-\beta_n^{(s)}},\qquad s=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1. \tag{9}$$

Эта функция не имеет полюсов; в самом деле, точки $\alpha^{(s)}$ и $\beta^{(s)}$ конгруэнтны и, следовательно, в числителе выражения (9) имеется множитель, равный $t-\beta_n^{(s)}$. На том же основании $\varphi_s(t)$ не имеет нулей. $\varphi_s(t)$ аналитична повсюду в полной плоскости за исключением предельных точек группы.

В обыкновенной точке действительной оси $\varphi_s(t)$ принимает действительное значение, так как все множители (9) принимают действительные значения. В такой точке все множители произведения (9) за исключением, может быть, одного положительны. Если t лежит в интервале $\beta_j^{(s)}$, $\alpha_j^{(s)}$, то выражения $t-\alpha_j^{(s)}$ и $t-\beta_j^{(s)}$ имеют противоположные знаки, и тогда в (9) содержится отрицательный множитель. Поэтому:

$$\varphi_s(t)\big|_{b_s}<0,\quad \varphi_s(t)\big|_{b_n}>0,\qquad n\neq s. \tag{10}$$

Неравенства (10) показывают, что $\varphi_s(t)$ нетождественная постоянная.

Производя над t преобразование T_k, получаем:

$$\varphi_s(t_k)=\prod\frac{t_k-\alpha_n^{(s)}}{t_k-\beta_n^{(s)}}=\prod\frac{t-\alpha_{k'n}^{(s)}}{t-\beta_{k'n}^{(s)}}\cdot\frac{c\beta_{k'n}^{(s)}+d}{c\alpha_{k'n}^{(s)}+d}=$$

$$=\varphi_s(t)\prod\frac{c\beta_n^{(s)}+d}{c\alpha_n^{(s)}+d}=K_k^{(s)}\varphi_s(t). \tag{11}$$

Постоянное $K_k^{(s)}$ имеет действительное значение, так как каждый из множителей, стоящих под знаком произведения, действителен. Далее, так как точка $-\frac{d}{c}$ конгруэнтна ∞ и поэтому лежит

в одном из интервалов, конгруэнтных b_m, то получаем, воспользовавшись (10):

$$K_k^{(s)} = \prod \frac{-\frac{d}{c} - \beta_n^{(s)}}{-\frac{d}{c} - \alpha_n^{(s)}} = \frac{1}{\varphi_s\left(-\frac{d}{c}\right)} > 0. \tag{12}$$

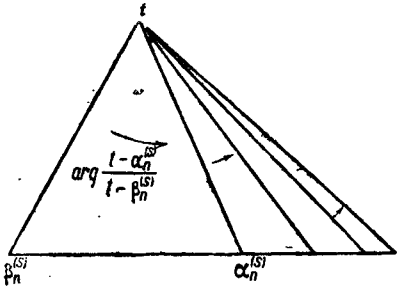
Точно таким же образом, как (6), устанавливаем, что

$$K_1^{(s)} \cdot K_2^{(s)} \ldots K_m^{(s)} = 1. \tag{13}$$

Функция $\varphi_m(t)$ определяется несколько иначе, чем $\varphi_s(t)$ для $s \leqslant m-1$. Если мы построим произведение (9), взяв в качестве $\alpha^{(m)}$ и $\beta^{(m)}$ концы интервала b_m (на черт. 80 интервал b_3), входящего в границу S_0, то точка t будет всегда лежать или между $\alpha^{(m)}$ и $\beta^{(m)}$ или на интервале b_m. В первом случае множитель $\frac{t-\alpha^{(m)}}{t-\beta^{(m)}}$ в произведении (9) отрицателен, во втором случае положителен. Если мы определим $\varphi_m(t)$ посредством формулы:

$$\varphi_m(t) = -\prod \frac{t-\alpha_n^{(m)}}{t-\beta_n^{(m)}},$$

то для $\varphi_m(t)$ будут справедливы все соотношения от (10) до (13).



Черт. 81.

Так как $\varphi_s(t)$ не имеет никаких особенностей в верхней полуплоскости, а также не имеет там нулей, то $\ln \varphi_s(t)$ есть аналитическая однозначная функция в верхней полуплоскости при условии, что мы все время будем рассматривать какую-нибудь одну ветвь логарифма, например главную ($\ln 1 = 0$). Имеем:

$$\ln \varphi_s(t) = \ln|\varphi_s(t)| + i \arg \varphi_s(t) = \sum \ln \frac{t-\alpha_n^{(s)}}{t-\beta_n^{(s)}}, \tag{14}$$

причем в каждом слагаемом в правой части (14) берется главная ветвь логарифма. Из черт. 81 видно, что величина аргумента в каждом из этих слагаемых $\geqslant 0$ и $\leqslant \pi$ и что сумма этих аргументов не превосходит π, т. е.

$$0 \leqslant \arg \varphi_s(t) \leqslant \pi. \tag{15}$$

Когда t находится в верхней полуплоскости, то выполняются оба неравенства (15). Когда t приближается к какой-нибудь точке одного из интервалов, конгруэнтных с b_s, то аргумент одного из слагаемых в правой части (14) стремится к π, а аргументы остальных слагаемых стремятся к 0. Когда t стремится к какой-либо

точке одного из других интервалов, то аргументы всех слагаемых в сумме (14) стремятся к нулю. Поэтому

$$\arg \varphi_s(t)|_{b_s} = \pi, \quad \arg \varphi_s(t)|_{b_n} = 0, \qquad n \neq s. \tag{16}$$

(Это соотношение справедливо и для $\varphi_m(t)$, если положим $\arg(-1) = \pi$.)

Во всех конгруэнтных друг другу точках верхней полуплоскости $\arg \varphi_m(t)$ имеет одно и то же значение. Из (11) получаем:

$$\arg \varphi_s(t_k) = \arg K_k^{(s)} + \arg \varphi_s(t) = \arg \varphi_s(t), \tag{17}$$

так как $K_k^{(s)}$ положительное число и так как если бы выбрали $\arg K_k^{(s)} = 2n\pi$, $n \neq 0$, то вследствие (15) получилось бы противоречие.

В частности, если точка t переходит вдоль b_s от $\beta^{(s)}$ к $\alpha^{(s)}$, то функция $\arg \varphi_s(t)$ принимает в $\alpha^{(s)}$ то же самое значение, которое она имела в $\beta^{(s)}$. Наконец функция

$$G_s(t) = e^{a_s i \ln \varphi_s(t)} = e^{a_s[i \ln|\varphi_s(t)| - \arg \varphi_s(t)]}, \tag{18}$$

где a_s действительное постоянное, обладает следующими свойствами:

$$|G_s(t)|_{b_s} = e^{-\pi a_s} \quad |G_s(t)|_{b_n} = 1, \qquad n \neq s; \tag{19}$$

$$G_s(t_k) = G_s(t) e^{i a_s \omega_k^{(s)}}, \quad \omega_k^{(s)} = \ln K_k^{(s)}, \tag{20}$$

причем $\omega_k^{(s)}$ действительное число. Функция (18) аналитична в верхней полуплоскости и не обращается там в нуль.

§ 100. Отображение многосвязной области плоского характера на область с разрезами[1]. Рассмотрим функцию:

$$G(t) = G_1(t) \cdot G_2(t) \ldots G_m(t) \psi(t). \tag{21}$$

В силу (2) и (19) имеем:

$$|G(t)|_{b_s} = e^{-\pi a_s}. \tag{22}$$

А из (4), (5) и (20) следует, что

$$G(t_k) = G(t) e^{i\left(a_1 \omega_k^{(1)} + \ldots + a_m \omega_k^{(m)} + h_k\right)}. \tag{23}$$

Если постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_m$ будут выбраны так, что удовлетворится система уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\omega_1^{(1)} + \ldots + a_m\omega_1^{(m)} + h_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1\omega_m^{(1)} + \ldots + a_m\omega_m^{(m)} + h_m = 0, \end{array}\right\} \tag{24}$$

то функция (21) будет принимать одинаковые значения в конгруэнтных точках.

---

[1] Koebe, P., Acta Mathematica, т. 41, стр. 305—344, 1918.

Разрешима ли система (24)? Во-первых, замечаем, что уравнения этой системы независимы. Действительно, логарифмируя (13), получаем:

$$\omega_1^{(s)} + \omega_2^{(s)} + \ldots + \omega_m^{(s)} = 0.$$

Это последнее соотношение, а также соотношение (8) показывают, что сумма всех левых частей уравнений (24) равна нулю, каковы бы ни были постоянные $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Поэтому система уравнений (24) имеет решение, если ранг матрицы, составленной из коэфициентов уравнений, равен $m-1$.

Предположим, что ранг этой матрицы равен $m-2$ или меньше. Тогда систему m уравнений

$$a_1\omega_k^{(1)} + \ldots + a_m\omega_k^{(m)} = 0, \qquad k = 1, \ldots, m \tag{25}$$

можно решить, выбирая произвольно по крайней мере два из искомых постоянных и вычисляя остальные. Условимся, что произвольно выбираемые значения постоянных a будут выбраны неравными.

В этих предположениях функция

$$H(t) = G_1(t) \ldots G_m(t) \tag{26}$$

принимает одинаковые значения в конгруэнтных точках границы области S_0. Кроме того, $|H(t)| = e^{-\pi a_s}$ на b_s, и следовательно, так как не все a_s равны между собой, $H(t)$ не есть постоянная. Мы сейчас покажем, что не существует функции, обладающей такими свойствами.

Пусть $H(t_0) = z_0$ значение, принимаемое функцией $H(t)$ во внутренней точке t_0 и притом такое, которого $H(t)$ не принимает ни в одной точке границы; применим формулу (7) к функции $H(t) - z_0$. Будем иметь: $P = 0$ и $N \geqslant 1$. Так как значения, принимаемые $H(t)$ в конгруэнтных точках границы, равны, то интегралы, распространенные на конгруэнтные стороны, взаимно уничтожаются. Когда точка t движется от $\beta^{(s)}$ к $\alpha^{(s)}$, точка $z = H(t)$ движется вдоль окружности $|z| = e^{-\pi a_s}$ и возвращается в исходное положение. Аргумент z при этом не изменяется. Действительно,

$$\arg H(t) = a_1 \ln|\varphi_1(t)| + \ldots + a_m \ln|\varphi_m(t)|,$$

и следовательно, на основании (11) аргумент $H(t)$ возрастает на величину

$$a_1 \ln K_s^{(1)} + \ldots + a_m \ln K_s^{(m)} = a_1\omega_s^{(1)} + \ldots + a_m\omega_s^{(m)},$$

которая в силу (25) равна нулю. Таким образом точка z, двигаясь вдоль окружности, возвращается к исходному положению, не проделав полного оборота. Отсюда следует, что $\arg[H(t) - z_0]$, равный углу, образуемому прямой, соединяющей z_0 с z и положительным направлением оси x-ов, тоже остается без изменений. Но тогда из (7) получаем $N = 0$, что невозможно.

Предположение, что уравнения системы (24) несовместимы, приводит, как было показано, к противоречию. Поэтому система (24) разрешима. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ постоянные, удовлетворяющие уравнениям (24). Тогда на основании (24) получим:

$$G(t_s) = G(t), \qquad s = 1, \ \ldots, \ m. \tag{27}$$

Кроме того,

$$\arg G(t) = a_1 \ln|\varphi_1(t)| + \ldots + a_m \ln|\varphi_m(t)| + \arg\psi(t);$$

и следовательно, когда t переходит от $\beta^{(s)}$ к $\alpha^{(s)}$, то $\arg G(t)$ изменяется на величину

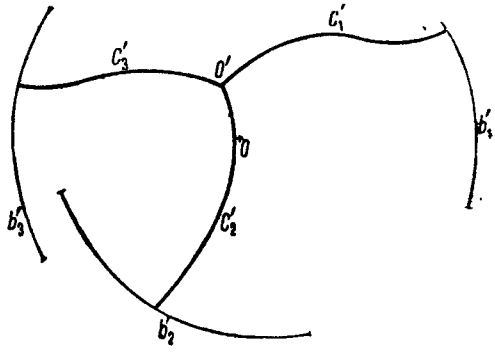
$$a_1\omega_s^{(1)} + \ldots + a_m\omega_s^{(m)} + h_s,$$

которая ввиду (24) равна нулю.

Рассмотрим теперь отображение области S_0, производимое функцией

$$z = G(t). \tag{28}$$

Когда точка t описывает границу области S_0, точка z описывает путь такого вида, как изображенный на черт. 82. Когда t движется вдоль C_1^- от O_1 к $\beta^{(1)}$, z описывает кривую C_1', начинающуюся в точке O', в которую переходит при отображении точка O_1, и оканчивающуюся в некоторой точке окружности $|z| = e^{-\pi a_1}$; когда t движется от $\beta^{(1)}$ к $\alpha^{(1)}$, то z движется вдоль окружности и возвращается в исходное положение со старым значением аргумента. Когда t движется вдоль C_1^+ от $\alpha^{(1)}$ к O_2, то z описывает кривую C_1' [это следует из (27)] в направлении, противоположном прежнему (т. е. движется к точке O'). Аналогичным образом, когда t движется от O_2 к O_3, точка z движется сначала вдоль кривой C_2' (от точки O'), затем вдоль дуги окружности $|z| = e^{-\pi a_2}$ и затем снова вдоль C_2' (только в обратном направлении) к точке O' и т. д.



Черт. 82.

Пусть z_0 точка на плоскости z, в которую при отображении не переходит ни одна из точек границы области S_0. Применим формулу (7) к функции $G(t) - z_0$. В этом случае $P = 1$, так как $G(t)$ имеет полюс первого порядка в точке η. Когда t описывает полную границу области S_0, то $z = G(t)$ описывает кривую такого вида, как на черт. 82. Очевидно, что после обхода точкой t границы S_0 $\arg[G(t) - z_0]$, равный углу между прямой, соединяющей подвижную точку z с точкой z_0, и положительным направлением оси x-ов, возвращается к исходному значению. Из формулы (7)

получаем: $N-1=0$, т. е. $N=1$. Таким образом функция $G(t)$ принимает в области S_0 значение z_0 один и только один раз.

Если z_0 лежит на одной из кривых C'_s, то функция $G(t)$ принимает значение z_0 в какой-нибудь точке t_0 кривой C_s^-. Тогда деформируем кривую C_s^- таким образом, чтобы t_0 стала внутренней точкой; при этом конечно необходимо соответствующим образом деформировать и C_s^+. После такой деформации точка z_0 также станет внутренней точкой, и следовательно, для нее будут справедливы проведенные выше рассуждения. Таким образом каждое значение z_0, не принадлежащее ни одной из дуг b'_s, принимается в области S_0 функцией $G(t)$ один и только один раз, при условии, что к области S_0 мы будем относить только одну из конгруэнтных сторон ее границы. Равным образом к области S_0 должна быть причислена только одна из точек $O_1, O_2, \ldots, O_m$.

Пусть теперь z_0 находится на одной из дуг b'_s; тогда значение z_0 принимается функцией $G(t)$ в некоторой точке t_0 интервала b_s. Функция $z=G(t)$ отображает принадлежащую верхней полуплоскости часть окрестности точки t_0 на часть окрестности точки z_0, принадлежащую внутренности или внешности круга, окружности которого принадлежит дуга b_s, в зависимости от того, описывает ли z дугу b_s против часовой стрелки или по часовой стрелке, когда точка t проходит в положительном направлении через положение t_0.

Отсюда заключаем, что точка z не может пройти через положение z_0 в одном и том же направлении дважды, так как в противном случае $G(t)$ принимала бы в S_0 два раза некоторое значение из окрестности точки z_0, не принадлежащее дуге b'_s, что невозможно.

Если точка z_0 является концом дуги b'_s, то принадлежащая верхней полуплоскости окрестность точки t_0 отобразится на полную окрестность точки z_0, из которой исключена дуга b'_s.

Дуга b'_s не может быть полной окружностью, так как в противном случае концы b_s находились бы в одной и той же точке и функция $G(t)$ принимала бы в области S_0 некоторое значение z из окрестности этой точки, не лежащее на b'_s дважды. Наконец, если z_0 лежит на b'_s, то функция $G(t)$ не принимает значения z_0 ни в каких точках t_1 области S, не принадлежащих интервалу b_s. В самом деле, функция $G(t)$ конформно отображает окрестность точки t_1 на окрестность точки z_0, и поэтому если t_1 не принадлежит b_s и вместе с тем $G(t_1)=z_0$, то некоторое значение из окрестности z_0, не принадлежащее дуге b'_s, было бы принято нашей функцией в S_0 два раза.

Ясно также, что дуга b'_s не может состоять из одной единственной точки, так как в противном случае $G(t)$ имела бы постоянное значение на b_s и, следовательно, была бы тождественной постоянной.

Перейдем теперь от функции $G(t)$, пользуясь отображающей функцией $t = g(Z)$, к соответствующей функции на поверхности Φ:

$$z = G(t) = G[g(Z)] = f(Z). \tag{29}$$

Функция $f(Z)$ принимает одинаковые значения на противоположных сторонах разрезов C_s, проведенных на Φ_0. Если мы склеим эти противоположные стороны разрезов, то функция будет однозначна на получаемой при этом поверхности, т. е. на нашей основной поверхности Σ. Итак, существует взаимно-однозначное соответствие между точками поверхности Σ, и точками плоскости z, не лежащими на дугах b_s'.

В дальнейшем мы будем говорить о множестве дуг, каждая из которых принадлежит окружности с центром в начале координат, но не представляет собой полной окружности, как о множестве концентрических разрезов. Мы доказали первую часть следующей теоремы:

Теорема 1. *Всякая область плоского характера, имеющая конечное число листов и конечное число точек ветвления, граница которой состоит из m кривых линий, может быть отображена на некоторую однолистную область, ограниченную m концентрическими разрезами.*

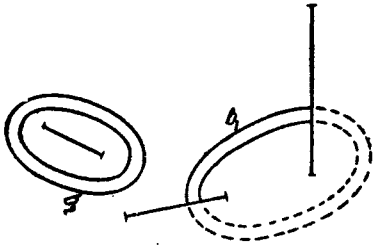
Если при этом будет обусловлено, что точки P_1 и P_2 отображаемой области должны при отображении перейти соответственно в точке 0 и ∞ на плоскости, то отображающая функция будет определена с точностью до преобразования вида $z' = cz$.

Докажем последнюю часть теоремы. Если в качестве η и τ будут выбраны точки плоскости t, соответствующие P_1 и P_2, то отображающая функция (29) будет удовлетворять поставленным условиям. Путь $z' = f_1(Z)$ — другая отображающая функция такого же рода. Переходя к переменному t, получим функцию $z' = f_1[Z(t)] \equiv G_1(t)$. Эта функция имеет полюс в η и нуль τ. В других точках области S_0 эта функция не имеет ни нулей, ни полюсов. Далее она принимает одинаковые значения в конгруэнтных точках сторон области S_0 и, наконец, ее абсолютная величина имеет постоянное значение на каждом из интервалов b_s. Отношение $\frac{G_1(t)}{G(t)}$ не имеет в S_0 ни нулей, ни полюсов. Нетрудно видеть, что это отношение тождественно равно постоянному. Действительно, в противном случае оно обладало бы всеми свойствами, установленными для функции $H(t)$, определенной формулой (26), которые, как было показано, несовместимы. Итак, $\frac{G(t)}{G_1(t)} = c$, постоянной; следовательно, $z' = cz$. И обратно: если мы произведем преобразование $z' = cz$ плоскости z, то точки 0 и ∞ останутся на месте, а концентрические разрезы перейдут в концентрические разрезы[1]).

[1]) Кёбе в своей работе (Acta Math., т. 41, стр. 305—344) рассмотрел вопрос о возможности отображения и о единственности отображения многосвязной области на разнообразные области с разрезами: области, ограниченные радиаль-

§ 101. Приложение к униформизации алгебраических функций[1]). Мы сейчас применим только что доказанную теорему к задаче об униформизации алгебраических функций. Пусть F риманова поверхность алгебраической функции $W = F(Z)$ жанра $p > 0$. Во-первых, докажем, что на поверхности F можно провести p круговых разрезов и притом не более p, без того чтобы поверхность оказалась разделенной на части.

Возвратимся к системе разрезов, построенной в § 89: деформируем каждый из разрезов $a_1, a_2, \ldots, a_p$, прежде чем проводить соответствующие b разрезы, в сигмаобразный разрез. Пусть затем b разрез соединяет противоположные стороны кругообразной части сигмаобразного разреза. Разрезы $b_1, b_2, \ldots, b_p$ не имеют общих точек, поэтому если уничтожим теперь все a разрезы, то получим p кругообразных разрезов, не разделяющих поверхности на части. Полученная поверхность имеет $2p$ граничных кривых, так как каждая из противоположных сторон одного кругового разреза представляет собой отдельную часть границы. (На черт. 83 показаны такие круговые разрезы для поверхности, изображенной на черт. 72.)



Черт. 83.

Допустим теперь, что на поверхности F проведено P' кругообразных разрезов и что при этом поверхность не распалась на части. Пусть O исходная граничная точка. Проведем $2p'$ разрезов, соединяющих O со сторонами проведенных p' кругообразных разрезов. Эти новые разрезы также не повлекут за собой распадения поверхности на части, так как граница получаемой после их проведения поверхности представляет собой одно связанное целое. Так как, с другой стороны, на поверхности рода p можно провести не более $2p$ разрезов, без того, чтобы эта поверхность распалась на части (кругообразные разрезы, которые были затем соединены с границей, в счет не идут), то $p' \leqslant p$. В частности, отсюда следует, что если какие-нибудь p кругообразных разрезов не разделяют F на части, то всякий кругообразный разрез сверх первых p приводит к распадению поверхности на части. Иначе говоря, поверхность, полученная после проведения на F всех круго-

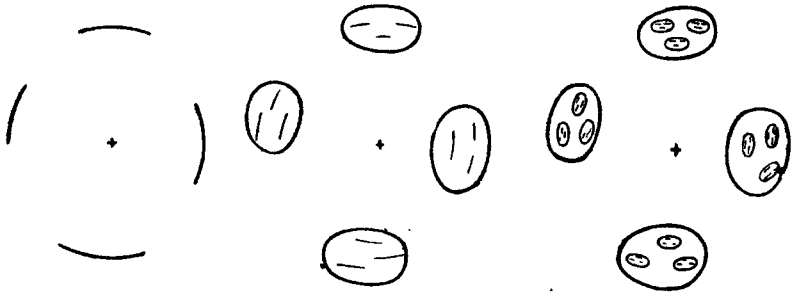
---

ными разрезами, параллельными разрезами, комбинациями радиальных и концентрических разрезов, разрезами, идущими вдоль логарифмической спирали, и т. д. Во всех случаях при конструировании функции используется группа T_n, иллюстрированная на черт. 80. Конструируемая функция должна вести себя требуемым образом на границе области S_0. Оригинальная трактовка проблемы униформизации в настоящей главе опирается на отображение многосвязной области на области, ограниченные параллельными разрезами.

[1]) Koebe, P., Math. Ann., т. 69, стр. 1—81, 1910.
Osgood, W. F., Annals of Math. 2, т. 14, стр. 143 и сл., 1913.

образных разрезов, не разделяющих F на части, есть поверхность плоского характера.

Обозначим через F_0 поверхность, получаемую в результате проведения на F p круговых разрезов, не разделяющих F на части. Можно предположить, что эти разрезы имеют простую форму — например, каждый из них составлен из конечного числа аналитических кривых. Возьмем бесчисленное множество копий поверхности F_0 и построим бесконечно многолистную поверхность на следующих основаниях: пусть Φ_0 исходная копия; наложим на нее $2p$ других копий и присоединим каждую из них к Φ_0, связывая противоположные стороны одного и того же кругового разреза Φ_0 и присоединяемой копии. Получаемую таким образом



Черт. 84.

поверхность обозначим через Φ_1. Далее, наложим новые копии на Φ_1 и присоединим их к Φ_1 вдоль свободных сторон Φ_1 (причем, как и раньше, каждую копию только вдоль одной стороны); получаемую новую поверхность обозначим через Φ_2 и т. д. Поверхность Φ_{n+1} получается в результате присоединения копий вдоль свободных сторон Φ_n. Обозначим предельную поверхность через Φ.

Каждая из областей Φ_n подобна однолистной и удовлетворяет также другим условиям теоремы 1; следовательно, Φ_n может быть конформно отображена на однолистную область, ограниченную концентрическими разрезами. Пусть P_1 и P_2 точки поверхности Φ_0 с аффиксами Z_1 и Z_2. Пусть эти точки при отображении переходят соответственно в 0 и ∞. Если мы еще потребуем, чтобы производная отображающей функции имела значение 1 в точке P_1, то эта функция будет окончательно определена. Мы будем иметь:

$$z_n = f_n(Z), \quad f_n(Z_1) = 0, \quad f_n'(Z_1) = 1, \quad f_n(Z_2) = \infty, \tag{30}$$

причем эти условия выполняются на тех листах, на которых лежат точки P_1 и P_2. Области, получаемые при отображениях, имеют такой вид, как на черт. 84 (для $p = 2$). На этом чертеже показаны области, в которые переходят Φ_0, Φ_1 и Φ_2.

§ 102. Теорема сходимости. Прямое доказательство сходимости последовательности $f_n(Z)$ весьма сложно.

Мы здесь воспользуемся одной теоремой о сходимости, имеющей общий характер.

Эта важная теорема могла бы быть использована и в наших прежних доказательствах сходимости[1]).

Теорема 2. *Пусть дана область Φ, расположенная над плоскостью z, имеющая конечное или бесконечное число листов, и такая, что каждая ее внутренняя точка или принадлежит только одному листу, или является точкой ветвления конечного порядка. Пусть, далее, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ последовательность областей, в которой каждая Φ_n служит подобластью Φ_{n+1} и для которой Φ является предельной областью. Рассмотрим последовательность функций*

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \ldots \tag{31}$$

такую, что $f_n(z)$ аналитична в Φ_n (непрерывна в точках ветвления и в ∞). Пусть для любой внутренней точки p поверхности Φ можно указать окрестность такую, что все функции последовательности (31), которые существуют в этой окрестности, ограничены там, причем

$$|f_n(z)| < M_p, \tag{32}$$

где M_p не зависит от n.

Тогда существует подпоследовательность

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \ldots, \quad n_{k+1} > n_k \tag{33}$$

последовательности (31), сходящаяся к предельной функции, аналитической во всех внутренних точках Φ. Кроме того, эта последовательность сходится равномерно в любой области с конечным числом листов, состоящей вместе с границей только из внутренних точек Φ.

Обозначим через

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad \ldots \tag{34}$$

бесконечную последовательность внутренних точек поверхности Φ, всюду плотную на Φ. Такая последовательность может быть, например, построена из точек поверхности, имеющих рациональные абсциссы и ординаты. Так как множество всех рациональных точек плоскости счетно, то очевидно, что множество всех рациональных точек поверхности с конечным или счетным множеством листов также счетно. Отсюда заключаем, что рациональные точки поверхности Φ могут быть перенумерованы.

Рассмотрим значения функций последовательности (31) в точке p_1. Эта точка принадлежит некоторой области Φ_m, а следовательно, всем областям с номерами, превышающими m. Отсюда заключаем, что существует последовательность чисел:

$$f_m(p_1), \quad f_{m+1}(p_1), \quad \ldots, \tag{35}$$

которая на основании (32) ограничена. Последовательность (35) имеет по крайней мере одну точку сгущения A_1; поэтому можно извлечь из нее подпоследовательность:

$$f_{m_{11}}(p_1), \quad f_{m_{12}}(p_1), \ldots, \qquad m_{1,k+1} > m_{1,k}, \tag{36}$$

---

[1]) Для подробного ознакомления с теоремой этого типа можно рекомендовать книгу Монтеля, Нормальные семейства, ОНТИ, 1935.

которая сходится к A_1. Таким образом мы построили подпоследовательность

$$f_{m_{11}}(z),\quad f_{m_{12}}(z),\quad f_{m_{13}}(z),\quad \ldots \tag{37}$$

последовательности (31), которая сходится в точке p_1. Любая подпоследовательность (37) также сходится в точке p_1 к значению a_1. Рассматривая теперь последовательность (37) в точке p_2, мы можем повторить все предшествующие рассуждения и выделить из нее подпоследовательность:

$$f_{m_{21}}(z),\quad f_{m_{22}}(z),\quad f_{m_{23}}(z),\quad \ldots;\qquad m_{2,k+1} > m_{2,k}, \tag{38}$$

члены которой определены в точке p_2 и стремятся в этой точке к конечному пределу. Будем продолжать этот процесс неограниченно. Из последовательности

$$f_{m_{s1}}(z),\quad f_{m_{s2}}(z),\quad f_{m_{s3}}(z),\quad \ldots;\qquad m_{s,k+1} > m_{s,k}, \tag{39}$$

члены которой определены в каждой из точек $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_s$ и которая в этих точках сходится, выделяем подпоследовательность:

$$f_{m_{s+1,1}}(z),\quad f_{m_{s+1,2}}(z),\quad \ldots;\qquad m_{s+1,k+1} > m_{s+1,k}, \tag{40}$$

члены которой определены в точке p_{s+1} и которая сходится в этой точке к конечному пределу.

Выберем теперь $f_{m_{kk}}(z)$ в качестве $f_{n_k}(z)$ последовательности (33), т. е. в качестве (33) возьмем диагональную последовательность:

$$f_{m_{11}}(z),\quad f_{m_{22}}(z),\quad f_{m_{33}}(z), \ldots \tag{41}$$

В качестве первой функции этой последовательности взята первая функция последовательности (37), в качестве второй функции — вторая функция последовательности (38), в качестве S-й функции взята S-я функция последовательности (39) и т. д.

В соответствии с принципами нашего построения $m_{k+1,k+1} > m_{k,k}$. Рассмотрим какую-вибудь точку p_s из последовательности (34). Все функции последовательности (41), вачиная с s-й, определены в точке p_s и представляют собой некоторую подпоследовательность последовательности (39). Поэтому последовательность (41) сходится в точке p_s.

Итак, построенная нами последовательность (41) сходится во всех точках множества (34), всюду плотного на Φ. Докажем теперь, что эта последовательность сходится во всех внутренних точках поверхности Φ и что предельная функция там аналитична. Пусть p внутренняя точка поверхности Φ, лежащая на конечном расстоянии и не являющаяся точкой ветвления. Все функции последовательности (41), начиная с некоторой, определены в p и удовлетворяют в некоторой однолистной области S_p, заключающей p, неравенству (32). Отбросим конечное число функций этой последовательности, которые не определены в S_p. Пусть C_1, C_2 — окружности, лежащие в S_p, имеющие центры в точке p и радиусы r_1, r_2, причем $r_1 < r_2$. Мы докажем, что

последовательность (41) сходится равномерно с C_1. Этим самым помимо сходимости будет установлена аналитичность предельной функции.

Пусть z_1, z_2 — какие-нибудь две точки, лежащие внутри или на границе C_1. Тогда

$$f_n(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f_n(t)\,dt}{t - z_1}, \quad f_n(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f_n(t)\,dt}{t - z_2};$$

поэтому

$$f_n(z_2) - f_n(z_1) = \frac{z_2 - z_1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f_n(t)\,dt}{(t - z_1)(t - z_2)};$$

причем

$$|t - z_1| \geqslant r_2 - r_1 = \delta, \quad |t - z_2| \geqslant \delta, \quad |f_n(t)| < M_0.$$

Поэтому

$$|f_n(z_2) - f_n(z_1)| \leqslant \frac{|z_2 - z_1| M_p 2\pi r_2}{2\pi\delta^2} = g|z_2 - z_1|, \tag{42}$$

где g не зависит ни от выбора точек z_1, z_2, ни от n.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем в круге C_1 точки p_{s_1}, $p_{s_2}, \ldots, p_{s_m}$ последовательности (34) таким образом, чтобы любая точка круга C_1 находилась на расстоянии меньшем, чем $\frac{\varepsilon}{3g}$, от какой-нибудь из выбранных точек. Этого можно достигнуть, покрывая круг C_1 квадратами со сторонами $\frac{\varepsilon}{6g}$ и выбирая по одной точке из каждого такого квадрата. Так как последовательность (41) сходится в p_{s_k}, то существует число n_k' такое, что для всех функций последовательности с номерами $m_{ii} > n_k'$ будет иметь место неравенство:

$$|f_{m_{i+\nu,i+\nu}}(p_{s_k}) - f_{m_{ii}}(p_{s_k})| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{43}$$

Обозначим через n' большее из чисел n_k'. Тогда (43) будет иметь место для всех точек p_{s_k}, если $m_{ii} \geqslant n'$. Пусть теперь z какая-нибудь точка, лежащая внутри или на окружности круга C_1. Пусть p_{s_k} одна из m выбранных нами точек, для которой $|z - p_{s_k}| < \frac{\varepsilon}{3g}$. Тогда, в предположении, что $m_{ii} \geqslant n'$, получим из (42) и (43):

$$\begin{aligned} |f_{m_{i+\nu,i+\nu}}(z) - f_{m_{ii}}(z)| &\leqslant |f_{m_{i+\nu,i+\nu}}(z) - f_{m+\nu,i+\nu}(p_{s_k})| + \\ &+ |f_{m_{i+\nu,i+\nu}}(p_{s_k}) - f_{m_{ii}}(p_{s_k})| + |f_{m_{ii}}(p_{s_k}) - f_{m_{ii}}(z)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{44}$$

Так как неравенство (44) справедливо для всех точек z круга C_1 и для всех положительных ν, то равномерная сходимость последовательности в круге C_1 доказана.

Если p точка ветвления порядка n, лежащая на конечном расстоянии, бесконечно удаленная точка, принадлежащая одному листу, или точка ветвления порядка n, лежащая в бесконечности, то сначала делаем отображение окрестности точки p на однолистную конечную область посредством функции:

$$z - p = t^n, \quad z = \frac{1}{t} \quad \text{или} \quad = \frac{1}{t^n}$$

соответственно, а затем применяем предшествующие рассуждения.

Справедливость последнего утверждения теоремы следует из того факта, что область S с конечным числом листов, лежащая вместе с границей внутри Φ, может быть покрыта конечным числом областей таких, как C_1, в каждой из которых имеет место неравенство вида (34). Если мы выберем $m_{ii} > N$, где N большее из чисел n' для различных областей покрытия, то (44) будет справедливо всюду в S.

§ 103. Последовательность отображающих функций. Теперь рассмотрим последовательность отображающих функций (30):

$$f_0(Z), \quad f_1(Z), \quad f_2(Z), \ldots \tag{45}$$

Так как в точке P_2 находится полюс функции $f_n(Z)$, исключим точку P_2 из каждой из областей $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$, а также из предельной области Φ, рассматривая P_2 как граничную точку. Тогда последовательность функций (45) и областей $\Phi_0, \Phi_1, \ldots \to \Phi$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 за исключением, может быть, неравенства (32). Сейчас мы покажем, что это неравенсто также выполняется.

Пусть P внутренняя точка поверхности Φ и пусть Φ_m первая из областей Φ_n, содержащих P. Тогда функция $z_m = f_m(Z)$ отображает Φ_m на некоторую область с разрезами, которую мы обозначим через S_m; точка P при этом перейдет во внутреннюю точку p области S_m. Пусть Σ некоторая область вместе с границей, состоящая из внутренних точек S_m и заключающая точку p и начало координат. Всякая функция последовательности (45) с индексом, превышающим m, отображает Φ_m на однолистную конечную область, а поэтому, подставляя в $f_n(Z)$ вместо Z его выражение через z_m, получаем:

$$z_n = f_n(Z) = \varphi_{n,m}(z_m), \qquad n \geqslant m, \tag{46}$$

функцию, отображающую S_m на однолистную конечную область;

S_m и Σ пара областей, к которым применима теорема 9 § 76. и так как $\varphi_{n,m}(0) = 0$, $\varphi_{n,m}'(0) = 1$, то

$$|\varphi_{n,m}(z)| < L$$

всюду в области Σ. Переходя теперь от плоскости z_m к поверхности Φ, получаем неравенство:

$$|f_n(Z)| < L, \qquad n \geqslant m, \tag{47}$$

справедливое в некоторой области Σ_1, заключающей точку P, причем Σ_1 область поверхности Φ, переходящая при отображении посредством функции $f_m(Z)$ в область Σ плоскости z_m.

Таким образом неравенство вида (32) имеет место в некоторой окрестности всякой внутренней точки поверхности.

Так как условия теоремы 2 выполняются, то из последовательности (45) можно выделить подпоследовательность:

$$f_{n_1}(Z), \quad f_{n_2}(Z), \ldots; \quad n_{k+1} > n_k, \tag{48}$$

которая сходится всюду на поверхности Φ к предельной функции $f(Z)$, аналитической на Φ. В любой области с конечным числом листов, лежащей вместе с границей внутри Φ, сходимость равномерна.

Что может быть сказано по поводу предельной функции $f(Z)$? Она не тождественное постоянное; в самом деле, производная этой функции в точке P_1 является пределом для производных от $f_{n_k}(Z)$ в точке P_1 и поэтому равна единице. Затем $f(Z)$ обращается в нуль в точке P_1 и не равна нулю ни в какой другой точке поверхности Φ. В самом деле, пусть P какая-нибудь точка поверхности Φ, отличная от P_1. Построим круг с центром в точке P_1, лежащий целиком на том листе поверхности, которому принадлежит P_1, и настолько малого радиуса, чтобы точка P лежала вне этого круга. Тогда на основании теоремы 5 § 74 для каждой из функций последовательности (48) будет иметь место неравенство: $|f_{n_k}(P)| \geqslant \frac{r}{4}$. А следовательно, переходя к пределу, получим:

$$|f(P)| \geqslant \frac{r}{4} > 0.$$

Функция $f(Z)$ имеет в точке P_2 полюс первого порядка. Пусть Q круг с центром в P_2, лежащий на том месте поверхности, которому принадлежит P_2, и настолько малого радиуса, что точка P_1 лежит вне его. Функция $\frac{1}{f_n(Z)}$ аналитична внутри и на окружности Q и не обращается там в нуль нигде за исключением точки P_2, в которой она имеет нуль первого порядка. Последовательность функций $\frac{1}{f_{n_k}(Z)}$ равномерно сходится в Q. Отсюда заключаем, что предельная функция $\frac{1}{f(Z)}$ обращается в нуль в точке P_2 и имеет там в соответствии с теоремой Гурвица (теорема 12 § 79) нуль первого порядка. Таким образом $f(Z)$ имеет в точке полюс первого порядка.

Наконец $f(Z)$ принимает на Φ каждое свое значение только один раз. Допустим, что $f(Z)$ принимает некоторое значение a в двух точках P' и P'' и пусть Φ_m содержит обе эти точки. Отобразим Φ_m на область с разрезами S_m посредством функции $z_m = f_m(Z)$; при этом точки P' и P'' перейдут в точки p' и p''. Удалим из области S_m некоторую ее часть, содержащую бесконечно удаленную точку и не содержащую ни внутри, ни на границе точек p' и p''. Оставшуюся часть области S_m обозначим через S_m'. Очевидно, что точки p' и p'' лежат внутри S_m'. Тогда последовательность $\varphi_{n_k, m}(z_m) - a$ [уравнение (46)] сходится равномерно в S_m'. Можно считать, что предельная функция этой последовательности $\varphi_m(z_m) - a$ не обращается в нуль на границе, так как это всегда может быть достигнуто посредством незначительной деформации границы области S_m'. На основании теоремы Гурвица $\varphi_m(z_m) - a$ имеет столько же нулей в области S_m', сколько их имеет $\varphi_{n_k, m}(z_m) - a$, при достаточно большом k. Но эта последняя функция или имеет в S_m' единственный нуль или вовсе не имеет там нулей; таким образом $\varphi_m(z_m)$ принимает в S_m' значение a не более одного раза. Это противоречит предположению, что функция $\varphi_m(z_m)$ [т. е. функция $F(Z)$ с преобразованным аргументом] принимает значение a в точках p' и p''. Из предшествующего вытекает, что функция

$$z = f(Z) \tag{49}$$

отображает бесконечно многолистную область Φ на некоторую однолистную область V плоскости z. Если мы теперь точку P_2 превратим во внутреннюю точку (при отображении она переходит в бесконечность), то граница V будет лежать в конечной части плоскости. Функция (49) отображает Φ_0 на область V_0, для которой 0 и ∞ являются внутренними точками и которая ограничена $2p$ кривыми (черт. 85).

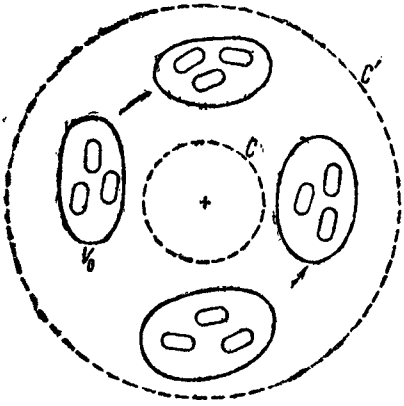
Копии поверхности F_0, прилегающие к Φ_0, переходят при отображении в области, прилегающие к V_0 и имеющие каждая по $2p$ граничных кривых. Бесконечное множество копий поверхности F_0, образующих Φ, переходит в бесконечное множество областей, которые примыкают друг к другу и образуют V.

Существует бесконечная группа конформных преобразований, переводящих поверхность Φ в самое себя, а именно группа, состоящая из преобразований, переводящих Φ_0 во все возможные копии F_0, из которых построена Φ. При преобразовании Φ в самое себя соответствующие точки на плоскости z подвергаются конформному, а следовательно, аналитическому преобразованию $z' = T_n(z)$, переводящему V в самое себя. V_0 фундаментальная область группы T_n. Обозначим через V_n область, в которую переходит V_0 посредством преобразования T_n. Области V_n являются образами копий F_0, они примыкают друг к другу и образуют область V.

Функция $Z = Z(z)$, обратная по отношению к $z = f(Z)$, и функция $W = F[Z(z)] = W(z)$ не изменяют своих значений, когда z

подвергается преобразованию T_n. В самом деле, точки поверхности Φ, которые соответствуют точкам z и $T_n(z)$, расположены одинаковым образом на двух копиях F_0 и, следовательно, в этих точках значения функций Z и W равны.

§ 104. Линейность преобразования T_n. В предшествующем мы для установления линейности T_n пользовались тем, что эта функция отображала или полную плоскость в самое себя, или плоскость без одной точки на плоскость без одной точки, или круг на круг. В настоящем случае положение вещей не столь просто; нам придется предварительно изучить области V_n.



Черт. 85.

Во-первых, докажем, что ряд

$$\sum |T_n'(0)|^2 \tag{50}$$

сходится. Пусть C круг с центром в начале координат, лежащий в области V_0, и пусть r радиус этого круга.

Рассмотрим область C_n, в которую преобразуется C посредством функции $T_n(z)$. Согласно следствию из теоремы 5 § 74 заключаем, что внутри C_n содержится круг радиуса $\frac{1}{4}|T_n'(0)|$. Поэтому площадь A_n области C_n удовлетворяет неравенству

$$A_n \geqslant \frac{\pi}{16} r^2 |T_n'(0)|^2.$$

Так как все области C_n лежат в конечной части плоскости, и не перекрываются друг с другом, то ряд $\sum A_n$ сходится. А поэтому сходится и ряд (50).

Рассмотрим бесконечное множество замкнутых кривых (черт. 85), образующих границы областей V_n. Пусть $l_1, l_2, \ldots$ последовательность длин этих кривых, каким-нибудь способом перенумерованных. Мы сейчас докажем, что ряд

$$\sum l_k^2 \tag{51}$$

сходится. Обозначим через C' круг с центром в начале координат содержащий все граничные кривые области V_0. И пусть V_0' часть области V_0, лежащая в C'.

V_0' может быть вложена в более широкую область и притом такую, которая при преобразовании посредством любой $T_n(z)$ переходит в однолистную область, не содержащую бесконечно удаленной точки.

В качестве такой области может быть взята, например, область V, если из нее удалить точки, конгруэнтные бесконеч-

ностн. Из теоремы искажения (теорема 8 § 76) следует (полагая $z_1 = z$ и $z_2 = 0$), что

$$|T_n'(z)| < M|T_n'(0)|,$$

где M постоянное число, не зависящее от n, а z любая точка, лежащая внутри или на границе V_0'. Пусть l' длина одной из кривых, ограничивающих V_0, и пусть l_n' длина кривой, в которую переходит l' посредством преобразования T_n. Получаем:

$$l_n' = \int_{l'} |T_n'(z)||dz| < M|T_n'(0)|l'$$

и

$$l_n'^2 < M^2 l'^2 |T_n'(0)|^2.$$

Отсюда заключаем, что ряд

$$\sum l_n'^2 \tag{52}$$

сходится [принимая во внимание, что ряд (50) сходится]. Сумма (52) распространена на все кривые, конгруэнтные l'. Но V_0 ограничена p неконгруэнтными друг другу кривыми, и ряд (51) сходится, так как он равен сумме p сходящихся рядов вида (52).

Доказательство линейности функции $T_n(z)$ будет основано на следующей теореме [1]):

Теорема 3. *Пусть дана область S с границей Γ, состоящей из конечного числа правильных кривых. Пусть $f(z)$ функция, аналитическая всюду в S за исключением некоторого множества точек Σ и непрерывная на Γ. Допустим далее, что как бы мало ни было наперед заданное положительное число δ, всегда можно окружить множество Σ замкнутыми кривыми, лежащими в S, и такими, что сумма квадратов их длин и сумма квадратов колебаний функции $f(z)$ на этих кривых меньше δ. Тогда функция $f(z)$ аналитична во всех внутренних точках области S, если ее подходящим образом определить в точках множества Σ.*

Колебанием функции $f(z)$ на кривой называется максимальное значение $|f(z_1) - f(z_2)|$, где z_1 и z_2 точки на кривой.

Пусть z — внутренняя точка области S, в которой $f(z)$ аналитична. Очевидно, что существует круг с центром в z, в котором нет ни одной точки множества Σ. Обозначим его радиус через d. Выберем какое-нибудь $\varepsilon > 0$. Окружим точки множества Σ кривыми $C_1, C_2, \ldots, C_m$, лежащими в S и не содержащими точки z. Обозначим длины кривых $C_1, C_2, \ldots, C_m$ соответственно через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и колебания функции $f(z)$ на этих кривых через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$. Кривые $C_1, C_2, \ldots, C_m$ согласно условиям теоремы могут быть выбраны так, чтобы имели место неравенства:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_m^2 < \pi \cdot d \cdot \varepsilon, \quad \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_m^2 < \pi \cdot d \cdot \varepsilon. \tag{53}$$

---

[1]) Koebe P., Math. Ann., т. 69, стр. 29, 1910.

Наконец, мы можем допустить, что кривые выбраны таким образом,—очевидно что такой выбор всегда возможен,—что они не содержат ни точек границы Γ, ни точек S, лежащих на расстоянии меньшем, чем $\frac{d}{2}$ от z. Пользуясь формулой Коши, получаем:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{C_k}\frac{f(t)\,dt}{t-z}. \tag{54}$$

Интегрирование производится в положительном направлении вдоль границы области, ограниченной кривыми Γ и C_k. Левая часть равенства (54) и первое слагаемое в правой части не зависят от выбора ε. А поэтому не зависит от выбора ε также и сумма, стоящая в правой части. Пусть ξ некоторая точка кривой C_k. Тогда

$$\int\limits_{C_k}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=f(\xi)\int\limits_{C_k}\frac{dt}{t-z}+\int\limits_{C_k}\frac{f(t)-f(\xi)}{t-z}\,dt.$$

Так как z лежит вне C_k, то первый интеграл в правой части равен нулю. Далее, так как $|f(t)-f(\xi)|\leqslant\Delta_k$ и $|t-z|\geqslant\frac{d}{2}$, то

$$\left|\int\limits_{C_k}\frac{f(t)\,dt}{t-z}\right|\leqslant\frac{2\Delta_k}{d}\int\limits_{C_k}|dt|=\frac{2\Delta_k\lambda_k}{d}\leqslant\frac{\Delta_k^2+\lambda_k^2}{d}$$

(последнее неравенство получаем, используя известное неравенство $2ab\leqslant a^2+b^2$). Применяя теперь неравенство (53), получим:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{C_k}\frac{f(t)\,dt}{t-z}\right|\leqslant\frac{\sum\lambda_k^2+\sum\Delta_k^2}{2\pi d}<\varepsilon.$$

Так как левая часть этого неравенства меньше любого наперед заданного числа ε и так как, с другой стороны, она от z не зависит, то она равна нулю. Таким образом согласно (54) получаем:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}. \tag{55}$$

Правая часть соотношения (55) аналитична всюду внутри S; таким образом получена формула для аналитического продолжения функции $f(z)$ на все внутренние точки S и теорема доказана.

Возвратимся теперь к рассмотрению $T_n(z)$. Эта функция аналитична всюду в V за исключением одной лишь точки p, которая посредством $T_n(z)$ переходит в ∞. $T_n(z)$ в точке p имеет полюс первого порядка. Обозначим через S область, лежащую внутри ранее построенного нами круга C' и вне круга C_2' с центром в p, лежащего в области V_n', которой принадлежит точка p. Обозначим через Σ множество точек плоскости, не являющихся внутрен-

ними точками V. Тогда очевидно, что $T_n(z)$ аналитична всюду внутри и на границе области S за исключением точек множества Σ. Отбрасывая конечное число кривых l_n (черт. 85), мы всегда сможем окружить точки множества Σ конечным числом кривых из оставшихся. (Условимся обозначать через l_n и кривые и их длины.) Посредством функции $T_n(z)$ кривая l_n переходит в кривую $l_{n'}$, также принадлежащую нашему множеству кривых. Поэтому колебание функции $T_n(z)$ на кривой l_n равно максимуму расстояния между двумя точками $l_{n'}$, который меньше, чем длина $l_{n'}$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Отбрасывая достаточно большое, но конечное число q членов последовательности $l_1, l_2, \ldots$ (первые q членов), можно добиться следующего: 1) чтобы были удалены все кривые, окружающие точку p; 2) чтобы для оставшихся кривых выполнялось условие:

$$\sum_{k=g}^{\infty} l_k^2 < \varepsilon$$

[это возможно ввиду сходимости ряда (51)]; 3) чтобы для кривых $l_{k'}$, в которые преобразуются посредством T_n оставшиеся кривые, также выполнялось неравенство:

$$\sum l^2_{k'} < \varepsilon.$$

Выберем из оставшихся кривых конечное число кривых l_{k_1}, $l_{k_2}, \ldots, l_{k_m}$, окружающих точки множества Σ. Из двух предшествующих неравенств вытекает, что

$$l_{k_1}^2 + l_{k_2}^2 + \ldots + l_{k_m}^2 < \varepsilon,$$

$$\Delta_{k_1}^2 + \Delta_{k_2}^2 + \ldots + \Delta_{k_m}^2 < l_{k_1'}^2 + l_{k_2'}^2 + \ldots + l_{k_m'}^2 < \varepsilon.$$

Таким образом выполняются условия теоремы 3, и следовательно, функция $T_n(z)$ аналитична всюду внутри области S.

Итак, функция $T_n(z)$ аналитична всюду в полной плоскости z за исключением точки p, где она имеет полюс первого порядка. Отсюда вытекает, что $T_n(z)$ линейная функция.

Группа преобразований T есть группа линейных преобразований. Униформизирующие функции $Z(z)$ и $W(z)$ являются автоморфными функциями. Каждая из них имеет в фундаментальной области V_0 конечное число полюсов, а именно в точках V_0, соответствующих точкам Φ_0, в которых $Z = \infty$ или $W = \infty$.

Полученная группа является группой типа Шоттки (§ 25). Таким образом нами доказана первая часть следующей теоремы:

Теорема 4. *Алгебраическая функция жанра $p > 0$ может быть униформизирована посредством автоморфных функций, принадлежащих группе типа Шоттки, и притом таким образом, чтобы в достаточно малой окрестности любой точки a области, в которой определены униформизирующие функции, соответствие между точками плоскости и точками римановой поверхности было взаимно-однозначно.*

Всякие другие униформизирующие функции этого рода могут быть получены из данных путем линейного преобразования переменного униформизации.

Допустим, что дана другая пара униформизирующих функций: $Z = Z_1(t)$ и $W = W_1(t)$, принадлежащих некоторой группе типа Шоттки. Пусть z_0 точка, лежащая в V, и пусть $Z_0 = Z(z_0)$. Обозначим через $t_0, t_1, \ldots$ значения переменного t, в которых $Z_1(t_i) = Z_0$. Из двух соотношений $Z = Z(z)$ и $Z = Z_1(t)$ можно выразить t через z: $t = \varphi_0(z)$, $t = \varphi_1(z), \ldots$, причем $t_i = \varphi_i(z_0)$. Каждая из этих функций, например $t = \varphi_0(z)$, может быть аналитически продолжена на всю область V и однозначна в V. Подобным же образом можно показать, что обратная ей функция однозначна в V', т. е. в области существования фуикции $Z_1(t)$. Таким образом $t = \varphi_0(z)$ отображает V на V'.

Обозначим через l_i' кривые, в которые переходят кривые l_i при отображении V на V'. Рассматривая новую группу Шоттки, находим непосредственно, что ряд $\sum l'^2_k$ сходится. Таким образом линейность функции $\varphi_0(z)$ доказывается в точности так же, как линейность функции $T_n(z)$.

Предельные точки группы, т. е. граничные точки области V образуют *дискретное* множество. Замкнутое множество называется дискретным, если в любой окрестности любой точки этого множества может быть проведена кривая, окружающая эту точку и не проходящая через другие точки множества. В каждой окрестности граничной точки области V кривая, окружающая эту точку и не проходящая через другие точки, может быть выбрана из числа l_n.

Если $p = 1$, то множество предельных точек группы сводится к двум точкам.

§ 105. Обобщение. Если допустить, что в некоторых точках поверхности отображение не является взаимно-однозначным, то можно весьма простым приемом построить иные автоморфные униформизирующие функции. Проведем на поверхности F_0 конечное число систем разрезов $L_1, L_2, \ldots, L_m$ одного из следующих видов: система L_i состоит или из пары разрезов, начинающихся в некоторой точке O_i и оканчивающихся в точках P_i и P_i', или из трех разрезов, начинающихся в O_i и оканчивающихся в точках P_i, P_i', P_i''; системы лежат внутри F_0 и не пересекаются друг с другом (черт. 86). В первом случае отнесем точкам P_i, P_i' два целых числа ν_i и ν_i', причем $\nu_i = \nu_i'$; во втором случае отнесем точкам P_i, P_i', P_i'' три целых числа ν_i, ν_i', ν_i'', таких что

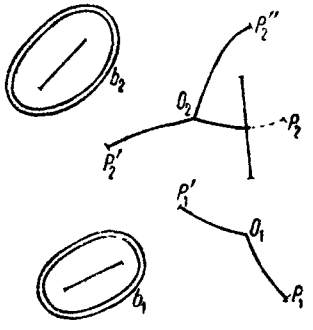
$$\frac{1}{\nu_i} + \frac{1}{\nu_i'} + \frac{1}{\nu_i''} > 1.$$

Обозначим полученную после проведения этих систем разрезов поверхность через F_0'. Построим теперь обычным методом из копий поверхности F_0' предельную поверхность Φ. Для этого к какой-нибудь исходной копии F_0' присоединяем вдоль всех ее сторон другие копии F_0' и т. д. Всякий раз, когда около точки P_i встречаются ν_i копий, замыкаем поверхность около этой точки,

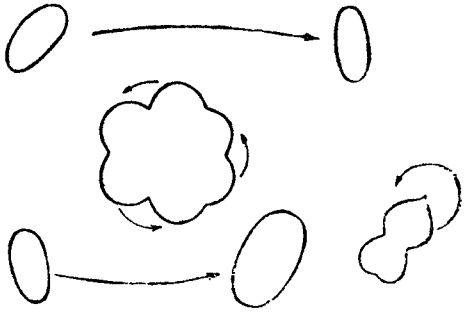
превращая P_i во внутреннюю точку. Как и в § 104, поверхность Φ отображается на некоторую область V на плоскости z и существует группа аналитических преобразований $z' = T_n(z)$, переводящих V в самое себя. Применяя без существенных изменений рассуждения § 104, можно доказать, что эта группа есть группа линейных преобразований. Сходимость ряда

$$\sum l_k^2 + \sum L_k'^2, \tag{56}$$

где вторая сумма распространяется на все кривые, в которые переходят посредством преобразований $T_n(z)$ кривые L_i, доказывается таким же образом, как и сходимость ряда (51). Как мы видели в § 95, стороны разрезов системы L_i на любой копии после присоединения конечного числа копий уже не будут входить в



Черт. 86.



Черт. 87.

границу конструируемой поверхности (их точки превратятся во внутренние точки поверхности). Присоединив достаточно большое число копий, можно достигнуть того, чтобы сумма (56), распространенная на все кривые, в которые переходят посредством преобразования $T_n(z)$ оставшиеся граничные кривые, оказалась сколько угодно малой. Следовательно, линейность функции T_n можно доказывать так же, как в § 104.

Представление о характере области, в которую переходит исходная копия F_0', т. е. фундаментальной области группы T_n, дает черт. 87. Полученная таким образом группа является комбинированной группой. Ее компонентами являются прежняя группа типа Шоттки и m конечных групп, соответствующих m системам разрезов $L_1, L_2, \ldots, L_m$. С другой стороны, группа Шоттки сама комбинирована из p циклических групп.

Возникает общий вопрос о возможности униформизации алгебраических функций посредством функций, автоморфных по отношению к комбинированным группам. Пусть риманова поверхность преобразована посредством данного конечного множества не пересекающихся друг с другом систем разрезов в область, подобную однолистной, и пусть процессом присоединения копий построена предельная поверхность Φ. Поверхность Φ может быть отображена на некоторую однолистную область V. С областью V связана группа аналитических преобразований, переводящих V

самое в себя. Эта группа является комбинированной группой; она составлена из групп, происходящих от различных систем разрезов, однако преобразования этой группы, вообще говоря, не линейны. Естественно поставить вопрос, можно ли поверхность Φ отобразить на однолистную область таким образом, чтобы эти преобразования оказались линейными. Оказывается, что да. Если конструирование поверхности Φ топологически возможно, то отображение поверхности Φ на однолистную область может быть сделано так, что преобразования группы будут линейны, а униформизирующие функции автоморфны. Исследование этой проблемы ввиду обширности материала не может быть здесь изложено. Мы отсылаем читателя к работам Кёбе, которые отмечены в приложенном в конце книги библиографическом указателе[1]).

§ 106. Отображение многосвязной области плоского характера на область, ограниченную полными окружностями. В заключение докажем теорему о конформном отображении многосвязной области.

Теорема 5. *Всякая область плоского характера, имеющая конечное число листов, конечное число точек ветвления и конечное число m граничных кривых, может быть конформно отображена на однолистную область, ограниченную m полными окружностями.*

Эта однолистная область определяется единственным образом, с точностью до линейного преобразования.

Отобразим сначала нашу область на область Φ_0 плоскости Z, ограниченную концентрическими разрезами с центром в начале координат, а затем отобразим Φ_0 на область указанного в настоящей теореме вида. Естественно здесь предположить $m > 1$, так как для $m = 1$ теорема была уже доказана.

Построим бесконечнолистную поверхность, содержащую Φ_0. Пусть b'_s — разрез, принадлежащий границе Φ_0. Произведем инверсию Φ_0 относительно b'_s. Полученную после инверсии область наложим на Φ_0 и скрепим эти области вдоль противоположных сторон разреза b'_s. Поверхность, полученную в результате такого присоединения новых листов вдоль сторон всех разрезов, ограничивающих Φ_0, обозначим через Φ_1.

Поверхность Φ_1 ограничена концентрическими разрезами, принадлежащими присоединенным листам. Пусть b''_s один из этих разрезов, принадлежащий листу F_i. Произведем инверсию F_i относительно b''_s и полученный таким образом лист присоединим к Φ_1 вдоль разреза b''_s. Обозначим через Φ_2 поверхность, получающуюся в результате такого рода присоединений новых листов вдоль сторон всех разрезов, ограничивающих поверхность Φ_1. Продолжая неограниченно этот процесс инверсий и присоединений, получим последовательность поверхностей:

$$\Phi_0, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots \quad \Phi.$$

[1]) В частности, „Über die Uniformisierung der Algebraischen Kurven III", Math. Ann., т. 72, стр. 437—516, 1912.

Рассмотрим предельную поверхность Φ. Каждая из поверхностей Φ_n может быть отображена на некоторую область с разрезами на плоскости z. Пусть функция $z_n = f_n(Z)$ производит отображение поверхности Φ_n так, что при этом точки 0 и ∞, принадлежащие Φ_0, переходят соответственно в 0 и ∞, и пусть, кроме того, $f_n'(0) = 1$ в области Φ_0, т. е. на первом листе. Нетрудно видеть, что в нашем случае выполняется условие (32).

В самом деле, посредством таких же рассуждений, как и прежде, здесь может быть выведена формула (47). Согласно теореме 2 из последовательности $f_n(Z)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность:

$$f_{n_1}(Z), \quad f_{n_2}(Z), \quad \ldots \quad f(Z).$$

Применяя обычным образом теорему Гурвица, приходим к заключению, что функция $z = f(Z)$ отображает поверхность Φ на однолистную область V плоскости z. Инверсия относительно любого из разрезов переводит поверхность Φ самое в себя, поэтому существует группа конформных преобразований попеременно первого или второго рода, переводящих поверхность Φ самое в себя. Преобразование этой группы есть конформное преобразование первого или второго рода в зависимости от того, составлено ли оно из четного или нечетного числа инверсий. Группа состоит из преобразований, переводящих Φ_0 во всевозможные листы, образующие поверхность Φ. Группе преобразований поверхности Φ соответствует на плоскости z группа конформных преобразований первого и второго рода, переводящих область V самое в себя.

Преобразования этой группы переводят область V_0, соответствующую Φ_0 на поверхности, во всевозможные области V_n, соответствующие различным листам поверхности Φ.

Каждая область V_n получается из области V_0 посредством конформного преобразования первого или второго рода. Выделим из нашей группы все конформные преобразования первого рода, т. е. аналитические преобразования, и обозначим их, как обычно, через $z_n = T_n(z)$. Рассуждая в точности таким же образом, как при доказательстве сходимости ряда (50), можно доказать, что ряд $\sum |T_n'(0)|^2$ сходится.

Пусть $l_1, l_2, \ldots$ кривые, ограничивающие различные V_n. Эти кривые соответствуют при отображении разрезам на поверхности Φ. Каждая из этих кривых отделяет область, получающуюся из V_0 путем конформного отображения первого рода от области, которая получается из V_0, путем конформного отображения второго рода. Поэтому все эти кривые могут быть получены из кривых, ограничивающих область V_0 посредством преобразований подгруппы T_n.

Таким же способом, каким сходимость (51) была выведена из сходимости (50), можно установить сходимость ряда

$$\sum l_k^2. \tag{57}$$

Рассмотрим теперь преобразование, переводящее область V_0 в область V_1, примыкающую к V_0 вдоль кривой l_1. Это преобразование может быть написано в виде

$$z' = U(t), \quad t = \bar{z},$$

где U—аналитическая функция переменного t и $\bar{z}$—величина, сопряженная z относительно действительной оси. (Как обычно, горизонтальной чертой мы отмечаем отражения областей, линий и т. п. относительно действительной оси.) Таким образом функция U отображает область $\bar{V}$ плоскости t на область V плоскости z'. Эта функция аналитична всюду в $\bar{V}$ за исключением точки p, которая переходит в ∞. Проведем в области $\bar{V}_0$ правильную кривую, окружающую все остальные области $\bar{V}_n$. Из области, ограниченной этой кривой, удалим небольшой кружок с центром в p (его всегда можно выбрать настолько малым, чтобы он принадлежал целиком области $\bar{V}_n$, в которой лежит точка p). Полученную после удаления кружка область обозначим через S. Пусть Σ множество всех точек плоскости, не являющихся внутренними точками области V. Тогда функция $U(t)$ аналитична всюду внутри и на границе области S за исключением точек, принадлежащих множеству $\bar{\Sigma}$.

Возьмем какое-либо $\varepsilon > 0$. Выбрасывая достаточно большое число кривых из последовательности $l_1, l_2, \ldots$, можно добиться того, чтобы 1): ни одна из кривых l_k, сопряженных с оставшимися кривыми последовательности, не окружала точку p; чтобы 2): $\sum \bar{l}_k^2 < \varepsilon$ и 3) чтобы: $\sum l_{k'}^2 < \varepsilon$, где через $l_{k'}$ обозначена кривая, в которую переходит $\bar{l}_k$ посредством функции U. (Суммирование в обоих случаях распространяется только на кривые, соответствующие оставшимся кривым последовательности.) Точки множества $\bar{\Sigma}$ могут быть окружены конечным числом кривых $\bar{l}_{k_1}, \bar{l}_{k_2}, \ldots, \bar{l}_{k_n}$, сопряженных с оставшимися кривыми последовательности.

Поэтому

$$\bar{l}_{k_1}^2 + \ldots + \bar{l}_{k_n}^2 < \varepsilon,$$

$$\Delta_{k_1}^2 + \ldots + \Delta_{k_n}^2 < \bar{l}_{k_1'}^2 + \ldots + l_{k'_n}^2 < \varepsilon.$$

Условия теоремы 3 таким образом выполняются, и поэтому функция $U(t)$ аналитична всюду в S, если ее должным образом определить в точках множества $\bar{\Sigma}$.

Функция $U(t)$ аналитична во всей плоскости переменного t за исключением единственной точки p, в которой она имеет полюс первого порядка; поэтому $U(t)$ линейная функция:

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Рассмотрим кривую l_i, точки которой остаются неизменными при конформном преобразовании второго рода $U(\bar{z})$. Обозначим через Q окружность, проходящую через какие-нибудь три точки α, β, γ кривой l_i. Если мы сначала выполним инверсию относительно Q, а вслед за ней преобразование U, то результирующее преобразование будет линейным. Далее, это линейное преобразование есть тождественное преобразование, так как оно оставляет неподвижными три точки α, β, γ.

Итак, два рассматриваемых преобразования обратны друг другу и, следовательно, преобразование U эквивалентно инверсии относительно окружности Q. Преобразование U оставляет на месте точки окружности Q, и поэтому каждая граничная кривая l_i есть полная окружность, что и требовалось доказать.

Вторая часть нашей теоремы непосредственно вытекает из следующей теоремы:

Теорема 6. *Если однолистная область, ограниченная конечным числом полных окружностей, отображается конформно на другую область такого же рода, то отображающая функция линейна.*

Пусть область V_0, ограниченная окружностями $l_1, l_2, \ldots, l_m$, переходит в область V_0', ограниченную окружностями $l_1', l_2', \ldots, l_m'$. Так как отображение непрерывно на границе области, то граничные окружности соответствуют друг другу. Пусть l_i' соответствует l_i.

Не нарушая общности, можно считать, что точки 0 и ∞ обе являются внутренними точками каждой из областей V_0 и V_0', так как этого можно всегда добиться, делая соответствующее линейное преобразование. Отображающая функция

$$z' = f(z)$$

аналитична всюду в области V_0 за исключением одной точки p, в которой $f(z)$ имеет полюс первого порядка.

Произведем инверсию области V_0 относительно окружности l_i и области V_0' относительно окружности l_i' и обозначим полученные области соответственно через V_i и V_i'. Тогда на основании теоремы 19 § 83 функция $f(z)$ может быть аналитически продолжена через l_i на всю область V_i и отображает V_i на V_i'. Продолжим функцию $f(z)$ таким же образом через каждую из окружностей, ограничивающих V_0.

Область, полученная в результате инверсии V_0 относительно всех l_i, ограничена полными окружностями и отображается на область, ограниченную полными окружностями. $f(z)$ можно продолжить точно таким же образом через каждую из новых окружностей и так до бесконечности. Предельная область V на плоскости z переходит посредством функции $f(z)$ в предельную область V' на плоскости z'. Область V остается инвариантной относительно группы линейных преобразований T_n, каждое из которых эквивалентно четному числу рассматриваемых здесь инверсий. Из тех же соображений, что и ранее, заключаем, что ряд $\sum |T_n'(0)|^2$

сходится и что сходится ряд $\sum l_k^2$, где через $l_1, l_2, \ldots$ обозначены длины окружностей, появившихся при неограниченном повторении инверсий.

Подобным же образом устанавливаем, что для соответствующих окружностей на поверхности z' сходится ряд $\sum l_{k'}^2$.

Пусть S внутренность правильной кривой в V_0, заключающая граничные окружности, но не содержащая точку p. Функция $f(z)$ аналитична всюду в S за исключением множества точек Σ, не принадлежащих V. Точки множества Σ могут быть окружены конечным числом окружностей $l_{k_1}, l_{k_2}, \ldots, l_{k_n}$, таких, что

$$l_{k_1}^2 + \ldots + l_{k_n}^2 < \varepsilon \text{ и } l_{k'_1}^2 + \ldots + l_{k'_n}^2 < \varepsilon.$$

Из теоремы 3 следует, что $f(z)$ аналитична всюду в области S, если ее подходящим образом определить в точках множества Σ.

Таким образом функция $f(z)$ аналитична всюду на плоскости z за исключением одной точки p, в которой она имеет полюс первого порядка. Следовательно, $f(z)$ линейная функция, что и требовалось доказать.

Глава XI

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 107. Связь с группами линейных преобразований. Рассмотрим линейное однородное диференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\eta}{dw^2} + P(w)\frac{d\eta}{dw} + Q(w)\eta = 0. \tag{1}$$

Пусть

$$\eta = \eta_1(w), \quad \eta = \eta_2(w) \tag{2}$$

два линейно-независимых интеграла (1). Общий интеграл (1) имеет вид:

$$\eta = A\eta_1 + B\eta_2, \tag{3}$$

где A и B постоянные. Сейчас мы покажем, какая связь существует между уравнением (1) и линейными преобразованиями; пусть $z = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ отношение двух интегралов, а $z' = \frac{\eta_1'}{\eta_2'}$ отношение двух других интегралов:

$$\eta_1' = a\eta_1 + b\eta_2, \quad \eta_2' = c\eta_1 + d\eta_2. \tag{4}$$

Тогда

$$z' = \frac{a\eta_1 + b\eta_2}{c\eta_1 + d\eta_2} = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{5}$$

Если последние два интеграла линейно-независимы, т. е. если их отношение не есть тождественное постоянное, то $ad - bc \neq 0$.

Если коэфициенты $P(w)$ и $Q(w)$ аналитичны в точке w_0, то все интегралы уравнения (1) аналитичны в w_0. Существует один и только один интеграл $\eta(w)$, такой, что $\eta(w)$ и $\frac{d\eta}{dw}$ принимают наперед заданные значения в точке w_0[1]).

В качестве пары линейно-независимых интегралов могут быть выбраны интегралы, удовлетворяющие условиям:

$$\eta_1(w_0) = 0, \quad \frac{d\eta_1(w_0)}{dw} = 1; \quad \begin{matrix} w_0 = 1 \\ \eta_2(w_0) = 1, \end{matrix} \quad \frac{d\eta_2(w_0)}{dw} = 0. \tag{6}$$

---

[1]) Доказательство этой известной теоремы см., например, Уайттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ч. I, гл. 10 или E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, ч. II.

В этом случае интеграл, определяемый уравнением (3), принимает в точке w_0 значение B, а его производная принимает в этой точке значение A.

Если коэфициенты аналитичны в некоторой области S плоскости w, то в случае когда S односвязна, все интегралы также аналитичны в S. В случае когда S неодносвязна, уравнение (1) может иметь интегралы неоднозначные в S; т. е., продолжая аналитически интеграл вдоль лежащей в S замкнутой кривой, окружающей точку, не принадлежащую S, мы можем возвратиться в исходную точку с новым значением интеграла.

Исследуем поведение линейно-независимых интегралов (2) в окрестности точки w_0, в которой $P(w)$ и $Q(w)$ аналитичны. Продолжим аналитически эти интегралы, отправляясь от точки w_0 вдоль замкнутой кривой C, не встречающей никаких особенностей $P(w)$ и $Q(w)$, и такой, что при аналитическом продолжении $P(w)$ и $Q(w)$ вдоль нее мы возвратимся в окрестность точки w_0 со старыми значениями $P(w)$ и $Q(w)$. При аналитическом продолжении $\eta_1(w)$ и $\eta_2(w)$ остаются интегралами уравнения (1), и, так как обход кривой C не приводит к изменению коэфициентов в окрестности точки w_0, то полученные в окрестности этой точки новые значения интегралов — обозначим их через $\eta_1'(w)$, $\eta_2'(w)$ — будут интегралами уравнения (1) со старыми коэфициентами.

Следовательно, $\eta_1'(w)$ и $\eta_2'(w)$ представляют собой линейные комбинации [вида (4)] интегралов $\eta_1(w)$ и $\eta_2(w)$. Конечно может случиться, что при обходе кривой C мы возвратимся к прежним значениям интегралов. Это безусловно произойдет в случае, если кривую C можно стянуть в точку, не задевая особых точек коэфициентов. Отношение интегралов $z = \frac{\eta_1(w)}{\eta_2(w)}$ подвергается линейному преобразованию (5), которое, в частности, может оказаться тождественным преобразованием. Заметим, что $ad - bc \neq 0$. В самом деле, $\eta_1'(w)$ и $\eta_2'(w)$ являются аналитическими продолжениями линейно-независимых функций и, следовательно, сами линейно-независимы.

Теорема 1. *Множество линейных преобразований отношения $z = \frac{\eta_1(z)}{\eta_2(z)}$, получающееся в результате аналитического продолжения интегралов уравнения* (1) *из точки w_0 вдоль всех возможных замкнутых кривых C, обладающих тем свойством, что $P(w)$ и $Q(w)$ возвращаются после обхода этих кривых к своим первоначальным значениям в окрестности w_0, представляет собой группу.*

Пусть C_i и C_j две кривые рассматриваемого типа и пусть $z_i = T_i(z)$, $z_j = T_j(z)$ преобразования z, связанные с обходом этих кривых. Обозначим через C кривую, описываемую точкой, проходящей сначала кривую C_i, а вслед за ней кривую C_j, и пусть $z = U(z)$ преобразование z, соответствующее кривой C. После обхода переменным w кривой C_i z переходит в z_i, далее после обхода кривой C_j z_i переходит в z'. Но после обхода кривой C_j z преобразуется в z_j; следовательно, z_i преобразуется в $T_j(z_i)$.

Поэтому $z' = T_j[T_i(z)]$ или $U = T_jT_i$. Таким образом преобразование, равносильное любой паре последовательно выполненных преобразований, принадлежащих рассматриваемому множеству, также принадлежит ему. Итак, второе свойство группы выполняется (§ 13). Пусть, далее, $z' = V(z)$ преобразование, которому подвергается z при обходе кривой C_i в обратном направлении. Очевидно, что при этом обходе z_i переходит обратно в z, т. е. $T_i[V(z)] = z$ или $V = T_i^{-1}$. Следовательно, преобразование, обратное любому из преобразований множества, также принадлежит множеству, т. е. первое свойство группы также выполняется.

Группа может состоять из одного только тождественного преобразования. Например, в случае когда коэфициенты целые функции, интегралы возвращаются к своим прежним значениям, при аналитическом продолжении вдоль всякой замкнутой кривой. С другой стороны, группа может содержать конечное число преобразований или бесконечно много преобразований. Она может быть разрывной, но может и не быть разрывной. Например, уравнение $\frac{d^2\eta}{dw^2} + \frac{1-m}{w}\frac{d\eta}{dw} = 0$ имеет интегралы $\eta_1(w) = w^m$, $\eta_2(w) = 1$. Если отношение $z = w^m$ будет продолжено вдоль кривой C, обходящей k раз начало координат в положительном направлении, то z перейдет в $z' = e^{m(\ln w + 2km\pi i)} = e^{2km\pi i} z$. Если m рациональное число, но не целое, то получается эллиптическая циклическая группа. Если m иррационально, то группа непрерывна.

Если мы воспользуемся иной парой независимых интегралов, то получим другую группу. Пусть z_1 отношение интегралов новой пары; на основании (5) имеем $z_1 = G(z)$, причем $G(z)$ линейное преобразование. Пусть в результате обхода некоторой кривой C мы получили: $z_1' = S(z_1)$ и $z' = T(z)$. Очевидно, что z_1 переходит в $G[T(z)]$ или, что то же, в $GTG^{-1}(z_1)$, т. е. $S = GTG^{-1}$. Таким образом группа преобразований S является преобразованной группой T (§ 15).

Нетрудно видеть, что если вместо точки w_0 будет использована в качестве исходной какая-нибудь другая точка w_1, то мы придем все же к старым группам. Линейные соотношения, связывающие различные значения частного z_1 двух интегралов в окрестности w_1, сохраняются при аналитическом продолжении функций вдоль кривой от w_1 до w_0. Получаемая при этом продолжении группа преобразований z совпадает с некоторой группой, связанной с парой интегралов, определенных в окрестности w_0.

При аналитическом продолжении интегралов $\eta_1(w)$ и $\eta_2(w)$ вдоль замкнутых кривых C, η_1 и η_2 подвергаются преобразованиям вида (4). Эти преобразования в соответствии с определением, сделанным в § 13, образуют группу, которую Пуанкаре назвал группой диференциального уравнения[1]).

---

[1]) Poincaré H., Sur les groupes des équations linéaires, Acta Math., т. 4, стр. 201—311.

Идея такой группы одинаково хорошо прилагается к линейным однородным уравнениям всех порядков. Возьмем уравнение:

$$\frac{d^p\eta}{dw^p}+P_1(w)\frac{d^{p-1}\eta}{dw^{p-1}}+\ldots+P_{p-1}(w)\frac{d\eta}{dw}+P_p(w)\eta=0.$$

Здесь мы имеем дело с p линейно-независимыми интегралами и с группой преобразований этих интегралов вида:

$$\eta_k'=a_{k_1}\eta_1+\ldots+a_{k_p}\eta_p,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ p.$$

Каждое диференциальное уравнение приводит только к одной группе, если условиться, что две группы не считаются различными, когда одна есть результат преобразования другой (в смысле определения, сделанного в § 15).

§ 108. Функция, обратная частному двух интегралов. Когда переменное w после обхода кривой C возвращается к своему первоначальному значению, отношение $z=\frac{\eta_1(w)}{\eta_2(w)}$ подвергается линейному преобразованию. Иначе говоря, обратная функция $w=w(z)$ не меняется при линейных преобразованиях переменного z. Таким образом функция $w(z)$ обладает первым важнейшим свойством автоморфной функции—она инвариантна по отношению к группе линейных преобразований. Однако, вообще говоря, $w(z)$ неоднозначная функция. Требование, чтобы $w(z)$ была однозначна, может быть высказано в геометрической форме. Отправляясь от элемента $z(w)$, определенного в окрестности некоторой точки w_0, мы продолжим эту функцию всеми возможными способами и построим ее риманову поверхность Φ над плоскостью w, считая при этом построении, как обычно, два листа совпадающими, если функции, определенные на этих листах, одинаковы. Риманова поверхность обратной функции, т. е. функции $w(z)$, расположена над плоскостью z, и ее точки находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками поверхности Φ. Эта вторая поверхность должна быть однолистной. Иначе говоря, $z(w)$ не должна принимать равных значений в различных точках поверхности Φ.

Теорема 2. *Если коэфициенты уравнения* (1) *аналитичны в точке* w_0, *то функция* $z=\frac{\eta_1(w)}{\eta_2(w)}$, *где* η_1 *и* η_2 *линейно-независимые интегралы, отображает окрестность* w_0 *на однолистную область.*

Во-первых, рассмотрим два интеграла, удовлетворяющих условиям (6):

$$\eta_1(w)=w-w_0+a_2(w-w_0)^2+\ldots$$
$$\eta_2(w)=1+b_2(w-w_0)^2+\ldots$$
$$z=w-w_0+a_2(w-w_0)^2+(a_3-b_2)(w-w_0)^3+\ldots \tag{7}$$

Обращая последний ряд, получим:

$$w-w_0=z-a_2z^2+\ldots \tag{8}$$

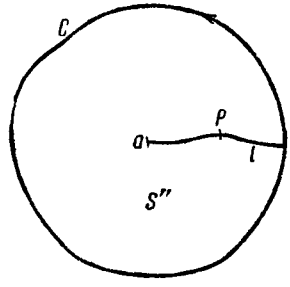
Таким образом $w(z)$ однозначная функция z в окрестности $z=0$, и этим самым для избранной пары интегралов теорема доказана. Но отношение любых двух линейно-независимых инте-

гралов (4) есть линейная функция z, которая переводит однолистную область на плоскости z в однолистную область на плоскости z'. Таким образом теорема доказана полностью.

Теорема 3. *Пусть коэфициенты уравнения* (1) *аналитичны в окрестности точки $w = a$ за исключением самой точки a. Пусть T преобразование, которому подвергается $z = \frac{\eta_1(w)}{\eta_2(w)}$ в результате аналитического продолжения этого частного [η_1 и η_2 попрежнему линейно-независимые интегралы уравнения* (1)*] вдоль замкнутой кривой C, окружающей точку a и не окружающей никаких других особенностей коэфициентов. Тогда, для того чтобы обратная функция $w(z)$ была однозначна в окрестности a, необходимо, чтобы T было или эллиптическим преобразованием с углом $\frac{2\pi}{p}$, где p целое число, или параболическим преобразованием.*

Предположим сначала, что преобразование (5) имеет две неподвижных точки, и пусть K множитель этого преобразования. Очевидно, что если обратная функция однозначна для какой-нибудь пары линейно-независимых интегралов, то она однозначна также для всех других пар. Выбирая соответствующим образом пару интегралов уравнения (1), можно добиться, чтобы преобразование имело вид:

$$z' = Kz, \qquad K \neq 1. \tag{9}$$



Черт. 88.

Для этого достаточно взять вместо η_1 и η_2 интегралы $\alpha\eta_1 + \beta\eta_2$, $\gamma\eta_1 + \delta\eta_2$, такие, чтобы преобразование $G = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ переводило неподвижные точки в 0 и ∞. Итак, допустим, что при обходе кривой C в направлении против часовой стрелки преобразование имеет вид (9).

Обозначим через S область, ограниченную кривой C (черт. 88), через S' ту же область без точки a и через S'' область, ограниченную кривой C и линией l, соединяющей a с какой-нибудь точкой C. Функция $z(w)$ не принимает в области S' значений 0 и ∞. В самом деле, если бы в какой-нибудь точке области S' было $z(w) = 0$ или $z(w) = \infty$, то вследствие (9) после обхода вдоль замкнутой кривой, окружающей точку a, в той же точке оказалось бы старое значение функции $z(w)$ (т. е. 0 или ∞). Но a является точкой ветвления римановой поверхности Φ функции $z(w)$, и поэтому в двух различных точках римановой поверхности Φ функция $z(w)$ принимала бы одинаковые значения, что невозможно, так как мы предполагаем, что обратная функция однозначна (нами доказывается необходимость условия). Так как $z(w)$ не принимает в S' ни 0, ни ∞, то $\ln z$ есть однозначная функция в S'', если мы будем иметь в виду какую-нибудь определенную ветвь логарифма.

Проведем в области S'' кривую, начинающуюся и оканчивающуюся в некоторой точке P, лежащей на l, и охватывающую точку a. Обозначим через q величину, на которую изменяется $\ln z$ в результате обхода переменным w этой кривой в направлении против часовой стрелки. q равно одному из логарифмов множителя K и не зависит от положения точки P. В самом деле, q есть приращение, которое получает ветвь $\ln z$ после обхода в направлении против часовой стрелки любой замкнутой кривой, лежащей в S' и окружающей точку a.

Рассмотрим теперь функцию [1]):

$$\tau(w) = e^{\frac{2\pi i}{q}\ln z} = z^{\frac{2\pi i}{q}}. \tag{10}$$

Значения функции $\tau(w)$ в точках кривой l не зависят от того с какой стороны мы к этим точкам приближаемся, и следовательно, $\tau(w)$ однозначная функция w в области S'. Далее, $\tau(w)$ не принимает одинаковых значений в различных точках области S'. Из (10) получаем:

$$z(w) = e^{\frac{q}{2\pi i}\ln \tau} = \tau^{\frac{q}{2\pi i}}. \tag{11}$$

Если $\tau(w_2) = \tau(w_1)$, где w_1 и w_2 различные точки S', то $\ln \tau(w_2) = \ln \tau(w_1) + 2n\pi i$, где n некоторое целое число. Тогда $z(w_2) = e^{nq} z(w_1) = K^n z(w_1)$, но это невозможно, так как функция $z(w)$ принимает значение $K^n z(w_1)$ в точке с координатой w_1, расположенной на одном из листов поверхности Φ, и так как, кроме того, в различных точках этой поверхности функция $z(w)$ по предположению принимает различные значения. Отсюда следует, что функция (10) отображает S' на однолистную область Σ на плоскости τ.

Функция (10) отображает кривую C на замкнутую кривую C' в плоскости τ. После обхода переменным w кривой C в направлении против часовой стрелки $\ln z$ возрастает на q, а $\arg \tau$ возрастает на 2π. Таким образом переменное τ, двигаясь по кривой C', делает один обход около начала координат в направлении против часовой стрелки. Когда τ описывает C', область Σ лежит слева и, следовательно, Σ есть внутренность C'. Функция $\tau(w)$ аналитична в окрестности точки a и, кроме того, ограничена там, так как значения τ лежат внутри C'. Таким образом $\tau(w)$ аналитична в точке a, если ее там соответствующим образом определить.

Пусть τ_0 точка, лежащая внутри C'. Когда w обходит против часовой стрелки кривую C, τ обходит C' и $\arg(\tau - \tau_0)$ получает приращение, равное 2π. Отсюда следует, что функция $\tau(w)$ принимает в области S значение τ_0 только один раз. Иначе говоря, функция $\tau(w)$ производит взаимно-однозначное отображение области S на внутренность кривой C'. Так как τ в точках области S'

---

[1]) Koebe P., Math. Ann., т. 67, стр. 157.

ие принимает значения нуль, то $\tau(w)$ имеет нуль первого порядка в точке a. Получаем:

$$\tau(w) = c_1(w-a) + c_2(w-a)^2 + \ldots, \qquad c_1 \neq 0 \tag{12}$$

и

$$w = a + \frac{1}{c_1}\tau + c_2'\tau^2 + \ldots \tag{13}$$

На основании (10)

$$w = a + \frac{1}{c_1} z^{\frac{2\pi i}{q}} + c_2' z^{\frac{4\pi i}{q}} + \ldots \tag{14}$$

Из (14) заключаем, что для того чтобы w была однозначной функцией z, необходимо, чтобы $\frac{2\pi i}{q} = p$ было целым числом. Тогда

$$K = e^q = e^{\frac{2\pi i}{p}}. \tag{15}$$

Итак, если преобразование T имеет две неподвижных точки, то оно эллиптическое преобразование с углом $\frac{2\pi}{p}$.

Если T имеет только одну неподвижную точку, то оно, конечно, параболическое преобразование. Заметим, что в разобранном случае риманова поверхность Φ имеет точку ветвления, в которой связываются p листов. Уравнение (14) может быть написано в виде:

$$w = a + \frac{1}{c_1} z^p + c_2' z^{2p} + \ldots \tag{16}$$

Соотношение между w и z в случае параболического преобразования может быть найдено аналогичным методом. Выберем пару интегралов, отношение которых подвергается преобразованию:

$$z' = z + b, \qquad b \neq 0, \tag{17}$$

когда w обходит C. Далее, рассмотрим функцию

$$\tau(w) = e^{\frac{2\pi i}{b} z}. \tag{18}$$

Эта функция обладает теми же свойствами, что и функция, определенная уравнением (10), и производит взаимно-однозначное отображение области S на внутренность замкнутой кривой C', окружающей начало координат на плоскости τ. Таким образом выполняются соотношения (12) и (13). Первое из них может быть написано в виде:

$$\tau = e^{\frac{2\pi i}{b} z} = c_1(w-a) + c_2(w-a)_2^2 + \ldots, \qquad c_1 \neq 0. \tag{19}$$

Исследуем теперь поведение коэфициентов диференциального уравнения в точке a. Для этого сначала упростим уравнение (1), пользуясь подстановкой

$$\eta = \zeta e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{w_0}^{w} P(w)dw}. \tag{20}$$

Получим:

$$\frac{d^2\zeta}{dw^2} + Q_1(w)\zeta = 0, \tag{21}$$

где

$$Q_1(w) = Q(w) - \frac{1}{2}\frac{dP(w)}{dw} - \frac{1}{4}P(w)^2. \tag{22}$$

Интегралы уравнения (1) получаются из интегралов уравнения (21) путем умножения последних на $e^{-\frac{1}{2}\int P(w)\,dw}$. Заметим, что введение этого множителя не меняет отношения двух интегралов.

Сейчас мы докажем следующую теорему:

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы* (3), *то функция* $Q_1(w)$ *имеет в точке* a *полюс второго порядка.*

Пусть $z = \frac{\zeta_1(w)}{\zeta_2(w)}$ отношение двух линейно-независимых интегралов. Продиференцируем это отношение три раза под-ряд и вставим полученные результаты в выражение для производной Шварца $D(z)_w$.

Принимая во внимание, что ζ_1 и ζ_2 удовлетворяют уравнению (21), получим:

$$\frac{1}{2}D(z)_w = \frac{2\frac{dz}{dw}\frac{d^2z}{dw^3} - 3\left(\frac{d^2z}{dw^2}\right)^2}{4\left(\frac{dz}{dw}\right)^2} = Q_1(w). \tag{23}$$

Обозначим через z', z'', z''', ζ_1',... производные по w соответствующих порядков. Исключая Q_1 из уравнений

$$\zeta_1'' + Q_1\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2'' + Q_1\zeta_2 = 0$$

и интегрируя, получаем:

$$\zeta_2\zeta_1'' - \zeta_1\zeta_2'' = 0, \quad \zeta_2\zeta_1' - \zeta_1\zeta_2' = \Delta = \text{const}.$$

Здесь $\Delta \neq 0$, так как интегралы линейно-независимы. Далее,

$$z' = \frac{\Delta}{\zeta_2^2}, \quad z'' = -\frac{2\Delta\zeta_2'}{\zeta_2^3},$$

$$z''' = -\frac{2\Delta\zeta_2''}{\zeta_2^3} + \frac{6\Delta\zeta_2'^2}{\zeta_2^4} = \frac{2\Delta Q_1}{\zeta_2^2} + \frac{6\Delta\zeta_2'^2}{\zeta_2^4}.$$

Вставляя эти значения в $D(z)_w$, получаем (23).

Предположим сначала, что T эллиптическое преобразование. Выберем пару интегралов, отношение которых $z = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ подвергается преобразованию (9), где K имеет значение (15). Принимая во внимание (10), получаем из (12):

$$z^p = c_1(w-a) + c_2(w-a)^2 + \ldots, \qquad c_1 \neq 0,$$

откуда

$$z = (w-a)^{\frac{1}{p}}\,[c_1 + c_2(w-a) + \ldots]^{\frac{1}{p}} = (w-a)^{\frac{1}{p}}\,\varphi_1(w). \qquad (24)$$

Через $\varphi_1(w)$, $\varphi_2(w)$ и т. д. мы будем обозначать функции, аналитические в точке a. Здесь $\varphi_1(a) \neq 0$. Теперь, для того чтобы определить поведение коэфициента $Q_1(w)$, продиференцируем уравнение (24) и воспользуемся (23). Мы используем, кроме того, второе выражение для производной Шварца $D(z)_w$, данное в формуле (9) § 44. Получим:

$$\frac{dz}{dw} = (w-a)^{\frac{1}{p}-1}\left[\frac{1}{p}\,\varphi_1(w) + (w-a)\frac{d\varphi_1(w)}{dw}\right] = (w-a)^{\frac{1}{p}-1}\cdot\varphi_2(w),$$

причем $\varphi_2(a) \neq 0$.

$$\ln\frac{dz}{dw} = \left(\frac{1}{p}-1\right)\ln(w-a) + \varphi_3(w),$$

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{dz}{dw} = \frac{\frac{1}{p}-1}{w-a} + \varphi_4(w),$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\frac{dz}{dw} = \frac{1-\frac{1}{p}}{(w-a)^2} + \varphi_5(w),$$

откуда

$$\frac{1}{2}D(z)_w = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\frac{1}{p}}{(w-a)^2} + \varphi_5(w)\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{\frac{1}{p}-1}{w-a} + \varphi_4(w)\right]^2$$

или

$$Q_1(w) = \frac{1-\frac{1}{p^2}}{4(w-a)^2} + \frac{c'}{w-a} + \varphi_6(w). \qquad (25)$$

Таким образом $Q_1(w)$ имеет в a полюс второго порядка.

Если T параболическое преобразование, то получаем из (19):

$$\frac{2\pi i}{b}\,z = \ln(w-a) + \ln[c_1 + c_2(w-a) + \ldots] = \ln(w-a) + \varphi_7(w),$$

$$\frac{2\pi i}{b}\,\frac{dz}{dw} = \frac{1}{w-a} + \frac{d\varphi_7(w)}{dw} = \frac{\varphi_8(w)}{w-a}, \quad \ln\frac{dz}{dw} = -\ln(w-a) + \varphi_9(w).$$

Диференцируя и делая такие же подстановки, как и раньше, получаем:

$$Q_1(w) = \frac{1}{4(w-a)^2} + \frac{c'}{w-a} + \varphi_{10}(w). \tag{26}$$

[То же самое можно было бы получить, полагая в формуле (25) $p = \infty$, так как выведенное нами здесь выражение для $\ln \frac{dz}{dw}$ получается из выведенного ранее при $p = \infty$.]

Итак, и в этом случае $Q_1(w)$ имеет в a полюс второго порядка.

Теорема 5. *Если $z(w)$ не меняется в результате аналитического продолжения вдоль кривой C, фигурирующей в теореме 3, и если $w(z)$ однозначная функция, то $Q_1(w)$ аналитична в точке a.*

Функция $z(w)$ аналитична всюду в S' за исключением, может быть, одной точки, в которой она может быть равна ∞. В самом деле, функция $z(w)$ может иметь лишь изолированную особенность в точке a. Однако точка a не может быть существенно особой, так как иначе $z(w)$ принимала бы одно и то же значение в окрестности a больше одного раза. Таким образом, когда w стремится к a, $z(w)$ стремится к определенному конечному пределу или к бесконечности. Мы можем считать, что этот предел равен нулю, так как это может быть всегда достигнуто посредством линейного преобразования z. Если мы теперь определим $z(w)$ в точке a, положив ее там равной нулю, то $z(w)$ будет аналитична в точке a. Так как $w(z)$ однозначна, то порядок нуля функции $z(w)$ в точке a равен единице. И, следовательно:

$$z = c_1(w-a) + c_2(w-a)^2 + \ldots, \qquad c_1 \neq 0.$$

Подставляя это выражение в (23), убеждаемся, что функция $Q_1(w)$ аналитична в a.

Бесконечно удаленная точка. Для исследования поведения интегралов в бесконечно удаленной точке делают обычное преобразование $w = \frac{1}{t}$. После этого преобразования уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(\frac{2}{t} - \frac{P}{t^2}\right)\frac{d\eta}{dt} + \frac{Q}{t^4}\eta = 0. \tag{27}$$

Для того чтобы функция, обратная по отношению к частному двух интегралов, была однозначна в окрестности бесконечно удаленной точки, диференциальное уравнение (27) должно удовлетворять условиям предшествующих теорем в точке $t = 0$.

§ 109. Правильные особые точки диференциального уравнения. Если коэфициенты уравнения (1) аналитичны в конечной точке a, то a называется „обыкновенной точкой" диференциального уравнения. В противном случае a „особая точка". Если a особая точка, но при этом $(w-a)P(w)$ и $(w-a)^2 Q(w)$ аналитичны

в a, то a называется „правильной особой точкой", т. е. в этом случае $P(w)$ или $Q(w)$ или обе вместе имеют в a полюс, причем порядок этого полюса для $P(w)$ не больше единицы, а для $Q(w)$ не больше двух. Бесконечно удаленная точка называется „обыкновенной точкой" или „правильной особой точкой" уравнения (1), если $t=0$ обыкновенная или правильная особая точка уравнения (27).

Если функция, обратная по отношению к частному двух интегралов, однозначна и если уравнение написано в виде (21), то всякая изолированная особая точка этого диференциального уравнения, в окрестности которой функция $Q_1(w)$ однозначна, есть правильная особая точка. Особая точка уравнения (1) может быть как правильной, так и неправильной; но это уравнение можно преобразовать в уравнение с правильной особой точкой, не изменив отношения интегралов. В случае если особая точка уравнения (1) правильная, то, как нетрудно видеть, правильна и особая точка уравнения (21).

Посредством очень простого приема можно получить выражения для двух линейно-независимых интегралов в окрестности правильной особой точки в виде рядов. Уравнение (1) может быть написано в виде:

$$\frac{d^2\eta}{dw^2}+\frac{p(w)}{w-a}\frac{d\eta}{dw}+\frac{q(w)}{(w-a)^2}\eta=0, \tag{28}$$

где $p(w)$ и $q(w)$ аналитичны в a:

$$\begin{aligned} p(w)&=p_0+p_1(w-a)+p_2(w)(w-a)^2+\ldots,\\ q(w)&=q_0+q_1(w-a)+q_2(w-a)^2+\ldots \end{aligned} \tag{29}$$

Будем искать интеграл (28) в виде:

$$\eta=(w-a)^\alpha\,[1+c_1(w-a)+c_2(w-a)^2+\ldots]. \tag{30}$$

Диференцируя (30) и подставляя в уравнение (28), которое может быть написано в виде:

$$\begin{aligned}(w-a)^2\frac{d^2\eta}{dw^2}+(w-a)\,[p_0+p_1(w-a)+\ldots]\frac{d\eta}{dw}+\\ +[q_0+q_1(w-a)+\ldots]\,\eta=0,\end{aligned} \tag{31}$$

получим:

$$\begin{aligned}(w-a)^\alpha\{f(\alpha)+[f(\alpha+1)c_1+\alpha p_1+q_1](w-a)+\\ +[f(\alpha+2)c_2+\varphi_2(c_1)](w-a)^2+\ldots\\ \ldots+[f(\alpha+n)c_n+\\ +\varphi_n(c_1,\ldots,c_{n-1})](w-a)^n+\ldots\}=0.\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$f(\alpha)=\alpha(\alpha-1)+p_0\alpha+q_0,$$

а $\varphi_n(c_1,\ldots,c_{n-1})$ целое рациональное выражение относительно $c_1,\ldots,c_{n-1}$, которое нет надобности писать в развернутом виде.

Формально выражение (30) будет решением, если

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0, \tag{33}$$

$$\left.\begin{array}{c} f(\alpha+1)c_1 + \alpha p_1 + q_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\alpha+n)c_n + \varphi_n(c_1, \ldots, c_{n-1}) = 0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{34}$$

Уравнение (33) называется „определяющим уравнением". Это уравнение имеет два корня α' и α'', которые, в частности, могут оказаться равными. Эти корни называются „показателями" диференциального уравнения в особой точке.

Положим в (33) и (34) $\alpha = \alpha'$. Тогда уравнение (33) удовлетворится, так как α' — его корень; далее, если ни одно из чисел $f(\alpha' + n)$ не равно нулю, то из уравнений (34) определяем $c_1, c_2, \ldots$ Для того чтобы $f(\alpha' + n)$ не равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha' + n \neq \alpha''$ для всех n. Последнее будет иметь место, если мы в качестве α' выберем корень с большей действительной частью. Итак, формально получаем решение:

$$\eta_1(w) = (w-a)^{\alpha'}[1 + c_1(w-a) + c_2(w-a)^2 + \ldots]. \tag{35}$$

Можно доказать, что ряд, стоящий в квадратных скобках, равномерно сходится в окрестности точки a и что функция $\eta_1(w)$ есть интеграл диференциального уравнения [1]).

Если $\alpha'' + n \neq \alpha'$ для всех целых положительных n, таким же образом, как раньше, получим:

$$\eta_2(w) = (w-a)^{\alpha''}[1 + c_1'(w-a) + c_2'(w-a)^2 + \ldots]. \tag{36}$$

Итак, исключая случаи, когда корни определяющего уравнения равны или отличаются на целое число, описаниым здесь методом получаем два независимых интеграла. Если $f(\alpha'' + n) = 0$ при $n = k \neq 0$, то метод остается в силе лишь при условии, что $\varphi_k(c_1, \ldots, c_{k-1}) = 0$. Если корни определяющего уравнения равны, то интегралы совпадают. Однако и в этих исключительных случаях второй интеграл может быть получен без труда, так как если известен один интеграл нашего диференциального уравнения, то второй определяется посредством квадратур. Полагая в уравнении (28)

$$\eta = \eta_1\zeta, \tag{37}$$

получим:

$$(w-a)^2\frac{d^2\zeta}{dw^2} + \left[2(w-a)^2\frac{\frac{d\eta_1}{dw}}{\eta_1} + (w-a)p(w)\right]\frac{d\zeta}{dw} = 0. \tag{38}$$

---

[1]) Уайттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ч. I, стр. 272, ГТТИ, 1933.

Разделим теперь на $(w-a)^2\frac{d\zeta}{dw}$ и проинтегрируем:

$$\ln\frac{d\zeta}{dw}=c-2\ln\eta_1-p_0\ln(w-a)-p_1(w-a)-\ldots,$$

$$\frac{d\zeta}{dw}=c'\eta_1^{-2}(w-a)^{-p_0}e^{-p_1(w-a)-\ldots}$$

Подставляя сюда вместо η_1 его выражение из (35), получим:

$$\frac{d\zeta}{dw}=c'(w-a)^{-p_0-2\alpha'}[1+c_1(w-a)+\ldots]^{-2}\cdot[1-p_1(w-a)+\ldots].$$

Пусть $\alpha'=\alpha''+\sigma$; из (33) следует, что $\alpha'+\alpha''=1-p_0$, откуда $-p_0-2\alpha'=-1-\sigma$; далее,

$$\frac{d\zeta}{dw}=c'(w-a)^{-1-\sigma}[1+k_1(w-a)+k_2(w-a)^2+\ldots]. \quad (39)$$

Наконец, интегрируя и умножая на η_1, получаем общий интеграл (28).

Допустим, что корни определяющего уравнения равны между собой. Тогда мы будем иметь:

$$\zeta=c''+c'[\ln(w-a)+k_1(w-a)+\ldots].$$

Полагая $c''=0$, $c'=1$, умножая на η_1, получим второй интеграл в виде:

$$\eta_3(w)=\eta_1(w)\ln(w-a)+$$
$$+(w-a)^\alpha[k_1(w-a)+k_2'(w-a)^2+\ldots]. \quad (40)$$

Здесь $\alpha'=\alpha''=\alpha$.

Наконец предположим, что корни определяющего уравнения отличаются на целое число. Тогда σ целое положительное число, и, следовательно:

$$\zeta=c''+c'\left[\frac{1}{-\sigma(w-a)^\sigma}+\ldots+k_\sigma\ln(w-a)+k_{\sigma+1}(w-a)+\ldots\right].$$

Выбирая опять $c''=0$ и $c'=1$ и умножая на η_1, получаем второй интеграл:

$$\eta_4(w)=k_\sigma\eta_1(w)\ln(w-a)+$$
$$+(w-a)^{\alpha''}\left[-\frac{1}{\sigma}+k_1(w-a)+\ldots\right]. \quad (41)$$

Если $k_\sigma=0$, то полученный интеграл не содержит члена с логарифмом.

Нетрудно показать обратное, т. е. что если диференциальное уравнение имеет интегралы рассмотренного здесь вида, то точка a является правильной особой точкой уравнения. В самом деле,

диференциальное уравнение, имеющее линейно-независимые интегралы $\eta_1(w)$, $\eta_2(w)$, может быть написано в виде:

$$\begin{vmatrix} \eta'' & \eta' & \eta \\ \eta_1'' & \eta_1' & \eta_1 \\ \eta_2'' & \eta_2' & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставив сюда вместо η_1 и η_2 выражения (35) и (36) и произведя упрощения, получим уравнение вида (28). Мы получим уравнения того же вида, используя η_1 и η_3 или η_1 и η_4.

Кроме того, важно отметить, что не существует интегралов рассматриваемого здесь вида со значениями a, отличными от a' и a''. В самом деле, если уравнение имеет интегралы (35) и (36), то невозможно подобрать постоянные в общем интеграле $\eta = A\eta_1 + B\eta_2$ так, чтобы было

$$\eta = (w-a)^m [1 + l_1(w-a) + \ldots],$$

где m отлично от a' и от a''. Аналогичные замечания справедливы и для остальных типов интегралов. Отсюда следует, что если каким-нибудь путем найдены интегралы рассматриваемого нами вида, то этим самым определены показатели уравнения.

§ 110. Поведение частного двух интегралов в окрестности правильной особой точки. Поведение частного двух интегралов в окрестности правильной особой точки зависит от корней определяющего уравнения (33). Если $\sigma (= a' - a'')$ не равно нулю и не равно целому числу, то интегралами являются (35) и (36). Отношение этих интегралов можно написать в виде:

$$z = \frac{\eta_1}{\eta_2} = (w-a)^\sigma [1 + h_1(w-a) + \ldots].$$

Отсюда получаем:

$$z^{\frac{1}{\sigma}} = (w-a)\left[1 + \frac{h_1}{\sigma}(w-a) + \ldots\right],$$

$$w - a = z^{\frac{1}{\sigma}} - \frac{h_1}{б} z^{\frac{2}{\sigma}} + \ldots$$

Таким образом $w(z)$ будет однозначной функцией в окрестности особой точки лишь в том случае, если $\frac{1}{\sigma}$ целое число. Мы имеем тогда $б = \frac{1}{p}$, где p целое число (которое в силу предположений, сделанных относительно корней определяющего уравнения, не равно единице) и

$$z = \frac{\eta_1}{\eta_2} = (w-a)^{\frac{1}{p}} [1 + h_1(w-a) + \ldots]. \tag{42}$$

Из (42) видно, что когда w описывает около a в положительном направлении замкнутую кривую, z подвергается эллиптическому преобразованию $z' = e^{\frac{2\pi i}{p}} z$.

Если корни определяющего уравнения равны ($\sigma = 0$), то

$$z = \frac{\eta_3}{\eta_1} = \ln(w-a) + k_1(w-a) + k_2''(w-a)^2 + \ldots; \tag{43}$$

$$\tau = e^z = (w-a)\, e^{k_1(w-a)+\cdots} = (w-a)\,[1 + k_1(w-a) + \ldots].$$

Отсюда w может быть выражено в виде степенного ряда по τ, представляющего собой однозначную функцию z. Когда w обходит около точки a вдоль замкнутой кривой, то в силу (43) z подвергается параболическому преобразованию: $z' = z + 2\pi i$.

Наконец когда σ целое положительное число, то

$$z = \frac{\eta_4}{\eta_1} = k_\sigma \ln(w-a) + \frac{1}{(w-a)^\sigma}\left[-\frac{1}{\sigma} + h_1' \cdot (w-a) + \ldots\right]. \tag{44}$$

Нетрудно видеть, что w не может быть однозначной функцией z, в случае если $k_\sigma \neq 0$.

Мы имеем:

$$e^{\frac{z}{k_\sigma}} = (w-a) \cdot e^{\frac{1}{(w-a)^\sigma}\left[-\frac{1}{\sigma k_\sigma} + \cdots\right]}.$$

Функция, стоящая в правой части, имеет в точке a существенную особенность, поэтому в окрестности a можно указать точки w_1 и w_2, в которых эта функция принимает одно и то же значение. Имеем:

$$\frac{z(w_2)}{k_\sigma} = \frac{z(w_1)}{k_\sigma} + 2n\pi i, \quad z(w_2) = z(w_1) + 2nk_\sigma \pi i,$$

где n некоторое целое число. Но функция $z(w)$ принимает в точке w_1 все возможные значения $z(w_1) + 2nk_\sigma \pi i$. В самом деле, из (44) видно, что любое из этих значений получаем после того, как переменное w соответствующее число раз обойдет около точки a. Таким образом двум различным w соответствует одно и то же z, т. е. $z(w)$ не однозначна.

Предположим, что $k_\sigma = 0$, и рассмотрим отношение

$$z = \frac{\eta_1}{\eta_4} = (w-a)^\sigma\,[-\sigma + k_1'''(w-a) + \ldots].$$

Рассуждая точно так же, как в начале этого параграфа, можно показать, что w будет однозначной функцией z тогда и только тогда, если σ равно единице; в самом деле, σ должно быть целым положительным числом и $\frac{1}{\sigma}$ также должно быть целым числом. Таким образом

$$z = (w-a)\,[-1 + k_1'''(w-a) + \ldots] \tag{45}$$

В этом случае z *не меняется*, когда w обходит вдоль замкнутого контура около a.

В этом последнем случае, преобразуя подходящим образом диференциальное уравнение, можно избавиться от особенности в точке a. Утверждение, что разность между корнями уравнения (33) равна единице, может быть написано в виде:

$$[(p_0-1)^2-4q_0]^{\frac{1}{2}}=1, \quad \text{откуда} \quad q_0=\frac{1}{4}p_0^2-\frac{1}{2}p_0. \qquad \text{(a)}$$

Посмотрим теперь, при каких условиях $k_1=0$. Значение коэфициента k_1, фигурирующего в уравнении (39), получаем из уравнения, предшествующего (39): $k_1=-p_1-2c_1$, где c_1 согласно первому из уравнений (34) определяется из уравнения:

$$f(\alpha'+1)c_1+\alpha' p_1+q_1=0.$$

Но

$$f(\alpha'+1)=f(\alpha')+f'(\alpha')+\frac{1}{2}f''(\alpha')=2\alpha'+p_0.$$

Воспользовавшись этими соотношениями для вычисления c_1, заключаем, что условие $k_1=0$ равносильно условию

$$q_1=\frac{1}{2}p_0p_1. \qquad \text{(b)}$$

Если мы теперь преобразуем уравнение (28) к виду (21), то в соответствии с формулой (22) получим:

$$Q_1(w)=\left[\frac{q_0}{(w-a)^2}+\frac{q_1}{w-a}+\varphi_1(w)\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{-p_0}{(w-a)^2}+\varphi_2(w)\right]-$$
$$-\frac{1}{4}\left[\frac{p_0^2}{(w-a)^2}+\frac{2p_0p_1}{w-a}+\varphi_3(w)\right].$$

Но если выполняются условия (a) и (b), то слагаемые в выражении для $Q_1(w)$, имеющие в точке a полюсы, взаимно уничтожаются, т. е. в этом случае функция $Q_1(w)$ аналитична в a.

Полученные результаты могут быть выражены следующим образом в терминах конформных отображений:

Теорема 6. *Для того чтобы функция $z(w)$, равная отношению двух независимых интегралов уравнения* (28), *отображала окрестность правильной особой точки a на однолистную область, необходимо и достаточно, чтобы корни определяющего уравнения* (33) *удовлетворяли одному из следующих условий:*

a) $\alpha'-\alpha''=\frac{1}{p}$, *где p — целое число, больше, чем единица;*

b) $\alpha'=\alpha''$;

c) $\alpha'-\alpha''=1$ *совместно с условием* $q_1=\frac{1}{2}p_0p_1$.

Когда переменное w совершает один обход около особой точки, то отношение интегралов подвергается в случае a) *эллиптическому преобразованию, в случае* b) *параболическому преобразованию и в случае* c) *тождественному преобразованию.*

В предшествующих рассуждениях мы пользовались в каждом случае парами интегралов специального вида, теорема, однако, справедлива в общем случае, так как отношение любой пары независимых интегралов получается из отношения пары использованных интегралов посредством линейного преобразования.

§ 111. Уравнения с рациональными коэфициентами. Сначала рассмотрим диференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\eta}{dw^2} + P(w)\frac{d\eta}{dw} + Q(w)\eta = 0$$

с рациональными коэфициентами, имеющее только правильные особые точки. Для того чтобы ∞ не оказалась неправильной особой точкой, коэфициенты должны удовлетворять некоторым условиям. Именно из (27) заключаем, что в ∞ они должны иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} P &= c_1 t + c_2 t^2 + \ldots = \frac{c_1}{w} + \frac{c_2}{w^2} + \ldots, \\ Q &= c_2' t^2 + c_3' t^3 + \ldots = \frac{c_2'}{w^2} + \frac{c_3'}{w_3} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Иначе говоря, коэфициент P должен иметь в бесконечности нуль первого или высшего порядка, а коэфициент Q должен иметь в бесконечности нуль второго или высшего порядка.

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ особые точки, расположенные на конечном расстоянии, и через $\alpha_1', \alpha_1''; \alpha_2', \alpha_2''; \ldots; \alpha_n', \alpha_n''$ соответствующие показатели. Далее обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ вычеты функции $P(w)$ относительно этих точек. Так как сумма вычетов $P(w)$ относительно всех особых точек равна нулю, то

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n - c_1 = 0.$$

На основании (33) имеем:

$$\alpha_i' + \alpha_i'' = 1 - p_i.$$

Далее, обозначая через α_∞' и α_∞'' показатели уравнения в бесконечно удаленной точке, получаем, пользуясь (27):

$$\alpha_\infty' + \alpha_\infty'' = 1 - (2 - c_1) = c_1 - 1.$$

Таким образом показатели удовлетворяют следующему соотношению:

$$\alpha_1' + \alpha_1'' + \ldots + \alpha_n' + \alpha_n'' + \alpha_\infty' + \alpha_\infty'' = n - 1. \qquad (47)$$

Если ∞ не есть особая точка, то соотношение (47) останется справедливым, если положим там $\alpha_\infty' = 1$, $\alpha_\infty'' = 0$. Но таковы показатели в обыкновенной точке, в чем можно убедиться, положив в (33) $p_0 = q_0 = 0$.

Произведения коэфициентов $P(w)$ и $Q(w)$ соответственно на $(w - a_1)\ldots(w - a_n)$ и $(w - a_1)^2\ldots(w - a_n)^2$ не имеют особых точек на конечном расстоянии и, следовательно, представляют собой полиномы. Таким образом имеем:

$$\begin{aligned} P(w) &= \frac{P_{n-1}(w)}{(w - a_1)\ldots(w - a_n)}, \\ Q(w) &= \frac{Q_{2n-2}(w)}{(w - a_1)^2\ldots(w - a_n)^2}, \end{aligned} \qquad (48)$$

где $P_{n-1}(w)$ полином степени не выше $n-1$ и $Q_{2n-2}(w)$ полином степени не выше $2n-2$. Эти степени можно определить точно из разложений (46) коэфициентов в бесконечно удаленной точке.

Разлагая $P(w)$ на простейшие дроби, получаем (так как все полюсы первого порядка):

$$P(w)=\frac{p_1}{w-a_1}+\ldots+\frac{p_n}{w-a_n}=\frac{1-\alpha_1'-\alpha_1''}{w-a_1}+\ldots+\frac{1-\alpha_n'-\alpha_n''}{w-a_n}. \quad (49)$$

Аналогичное выражение можно получить для $Q(w)$, рассматривая главные части функции $(w-a_1)\ldots(w-a_n)Q(w)$. В точке a_1 получим, если $n>1$:

$$(w-a_1)\ldots(w-a_n)Q(w)=(w-a_2)\ldots(w-a_n)\left[\frac{q_0}{w-a_1}+\varphi_1(w)\right]=$$
$$=\frac{q_0(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}{w-a_1}+\varphi_2(w).$$

Здесь $q_0=\alpha_1'\alpha_1''$ как свободный член определяющего уравнения в точке a_1.

Аналогичным образом получаются главные части в точках $a_2,\ldots,a_n$, откуда

$$Q(w)=\frac{1}{(w-a_1)\ldots(w-a_n)}\left[\frac{\alpha_1'\alpha_1''(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}{w-a_1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\alpha_n'\alpha_n''(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}{w-a_n}+Q_{n-2}(w)\right]. \quad (50)$$

В силу условий (46) полином $Q_{n-2}(w)$ имеет степень не выше $n-2$.

$$Q_{n-2}(w)=c_2'w^{n-2}+\ldots+kw+l=\alpha_\infty'\alpha_\infty''w^{n-2}+\ldots+l. \quad (51)$$

Сейчас мы введем два типа преобразований диференциального уравнения, при которых разность между показателями остается неизменной. Если мы сделаем следующую замену зависимой переменной

$$\xi=(w-a_i)^{l_i}\eta=\frac{1}{t^{l_i}}(1-a_it)^{l_i}\eta, \quad (52)$$

где $w=\frac{1}{t}$, то интегралы нового уравнения получим, умножая интегралы старого уравнения на $(w-a_i)^{l_i}$. Но при умножении на $(w-a_i)^{l_i}$ полученных нами интегралов (35), (36), (40) и (41) оба показателя α_i' и α_i'' возрастают на l_i. Показатели уравнения в точке a_j $(j\neq i)$ не меняются при этом умножении, так как множитель $(w-a_i)^{l_i}$ аналитичен в точке a_j и не обращается там в нуль. Наконец в бесконечно удаленной точке каждый показа-

тель убывает на l_i. Производя n преобразований такого рода, мы придем к показателям:

$$\alpha_1' + l_1,\ \alpha_1'' + l_1; \ldots;\ \alpha_n' + l_n,\ \alpha_n'' + l_n;$$
$$\alpha_\infty' - \sum l_i,\ \alpha_\infty'' - \sum l_i. \tag{53}$$

Числа l_i можно подобрать таким образом, чтобы в каждой конечной особой точке один из показателей имел наперед заданное значение. Если один из показателей в каждой конечной точке будет сделан равным нулю, то все слагаемые в квадратной скобке в формуле (50) за исключением полинома $Q_{n-2}(w)$ исчезнут. Этот метод позволяет также устранить исключительный случай с) теоремы 6. В самом деле, делая $\alpha' = 1$, $\alpha'' = 0$, получаем $p_0 = q_0 = q_1 = 0$. И, следовательно, точка a не будет особой.

Если мы сделаем линейное преобразование независимого переменного

$$w' = T(w) = \frac{Aw + B}{Cw + D}, \qquad AD - BC = 1, \tag{54}$$

то особые точки $P(w)$ и $Q(w)$ преобразуются посредством T.

Пусть точки a_i переходят в a_i', причем a_i и a_i' конечные точки. Тогда

$$w - a_i = \frac{-Dw' + B}{Cw' - A} - \frac{-Da_i' + B}{Ca_i' - A} = \frac{w' - a_i'}{(Cw' - A)(Ca_i' - A)}$$

и

$$w - a_i = (w' - a_i')[l_0 + l_1(w' - a_i') + \ldots], \qquad l_0 \neq 0.$$

Подставим теперь полученное выражение для $w - a_i$ в интегралы нашего уравнения вида (35) и т. д. Очевидно, что после подстановки получим интегралы с теми же показателями, как и до подстановки. Подобным же образом можно показать, что показатели не меняются, если первоначальная или преобразованная особенность находятся в бесконечности.

Предположим теперь, что конечные правильные точки $a_1, \ldots, a_n$ заданы и что показатели в них и в бесконечности имеют такие значения, что в окрестности каждой особенности функция $w = w(z)$, обратная отношению двух решений $z = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, однозначна. Мы располагаем тогда еще $n - 2$ коэфициентами полинома $Q_{n-2}(w)$ в (50). Возникает вопрос: можно ли этот полином выбрать так, чтобы $w(z)$ была повсюду однозначной и чтобы $w(z)$ была элементарной или фуксовой функцией? Мы докажем следующую теорему:

Теорема 7. *Пусть даны правильные особые точки и разности показателей, удовлетворяющие условию теоремы 6. Тогда существует только одно диференциальное уравнение, такое, что функция, обратная отношению двух его решений, есть элементарная или фуксова функция; так что если уравнение приведено к виду (21), то $Q_1(w)$ определяется единственным образом.*

Пусть от точки O к особым точкам проведены разрезы. Обозначим плоскость с разрезами через F_0. Для того чтобы $w(z)$ была однозначной функцией, необходимо, чтобы $z=\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=z(w)$ не принимала одинаковых значений в F_0, т. е. чтобы F_0 отображалась этой функцией на однолистную область S_0. Если $z(w)$ аналитически продолжить через границу F_0 и затем распространить аналитически на всю разрезанную плоскость, то F_0 должна отображаться посредством этого продолжения снова на однолистную плоскость S_i плоскости z, не перекрывающуюся с S_0. Если мы совершим p_i обходов около точки a_i ($\sigma_i=\frac{1}{p_i}$ есть разность показателей в точке a_i), то функция $z(w)$ возвратится к своему исходному значению, и таким образом p_i областей, в которые отображается при этом F_0, должны заполнить окрестность некоторой точки плоскости z, не перекрываясь.

Построим теперь, соединяя копии F_0 по методу, примененному при доказательстве теоремы 11 § 95, предельную поверхность Φ. Всякий раз в процессе этого построения последняя из p_i копий, заполняющих окрестность a_i, присоединяется вдоль двух следующих друг за другом ее сторон, и таким образом a_i превращается во внутреннюю точку. (Если разность показателей в a_i равна нулю, то a_i остается граничной точкой.) Функция $z(w)$ отобразит Φ на некоторую однолистную область.

Пусть $z_1=z_1(w)$ функция, использованная в связи с доказательством теоремы 11 для отображения Φ на однолистную область. Исключая w, получим функцию $z=T(z_1)$, которая отображает однолистную область плоскости z_1 на однолистную область плоскости z. Если $z_1=z_1(w)$ отображает поверхность Φ на полную плоскость или на всю конечную плоскость, то на основании теоремы 3 § 1 заключаем, что T—линейное преобразование. В случае если $w(z)$ фуксова функция, то функция $z(w)$ отображает Φ на круг, и таким образом $T(z_1)$ отображает круг Q_0 на некоторый круг, и, следовательно, T есть линейное преобразование. Функция $w=\varphi(z_1)$, обратная по отношению к $z_1(w)$, есть простая автоморфная функция и на основании теоремы 15 § 44 может быть представлена в виде частного двух интегралов диференциального уравнения:

$$\frac{d^2\eta}{dw^2}+F(w)\eta=0.$$

Пусть какое-либо диференциальное уравнение, удовлетворяющее условиям теоремы, преобразовано к виду (21). Тогда, пользуясь (23), а также инвариантностью производной Шварца относительно линейного преобразования (соотношение 11 § 44), получаем:

$$Q_1(w)=\frac{1}{2}D(z)_w=\frac{1}{2}D[T(z_1)]_w=\frac{1}{2}D(z_1)_w=F(w).$$

Итак, $Q_1(w)$ определяется единственным образом.

В соответствии с теоремой 11 § 95 автоморфная функция, происходящая от пары интегралов, будет полиэдральной, периодической или фуксовой функцией в зависимости от числа особых точек и от того, каковы разности показателей в особых точках. $\left(\text{В теореме 11 § 95 надо положить } v_i = \frac{1}{\sigma_i}.\right)$

§ 112. Уравнение с двумя особыми точками. Выполним прежде всего линейное преобразование, переводящее особые точки в 0 и ∞. Обозначим через α', α'' показатели в начале координат. Тогда, пользуясь соотношениями (49) и (48) и замечая, что в данном случае $Q_{s_{n-2}}(w)$ постоянное число, получаем:

$$\frac{d^2\eta}{dw^2} + \frac{1-\alpha'-\alpha''}{w}\frac{d\eta}{dw} + \frac{\alpha'\alpha''}{w^2}\eta = 0. \tag{55}$$

Это уравнение можно интегрировать в элементарных функциях. Если $\alpha' \neq \alpha''$, то интегралами будут:

$$\eta_1(w) = w^{\alpha'}, \quad \eta_2(w) = w^{\alpha''};$$

их отношение

$$z = \frac{\eta_1(w)}{\eta_2(w)} = w^{\alpha'-\alpha''} = w^{\sigma}.$$

Если

$$\sigma = \frac{1}{p},$$

то

$$z = w^{\frac{1}{p}}, \qquad w = z^p.$$

Эта последняя функция есть простая автоморфная функция по отношению к эллиптической циклической группе

$$z' = e^{\frac{2n\pi i}{p}} z.$$

Если $\alpha' = \alpha''$, то интегралами будут:

$$\eta_1 = w^{\alpha'}$$

и

$$\eta_2 = w^{\alpha'} \cdot \ln w.$$

Отношение интегралов равно:

$$z = \frac{\eta_2(w)}{\eta_1(w)} = \ln w; \qquad w = e^z.$$

e^z есть простая автоморфная функция относительно однопериодической группы $z' = z + 2n\pi i$.

§ 113. Гипергеометрическое уравнение. Пусть дано диференциальное уравнение с тремя правильными особыми точками. Прежде всего произведем линейное преобразование, переводящее эти точки в 0, 1, ∞. Обозначим разности показателей в этих точках соответственно через λ, μ, ν. Пользуясь преобразованием вида (52), можно добиться, чтобы показатели в точке 0 были: $\alpha_0' = \lambda$, $\alpha_0'' = 0$, а в точке 1: $\alpha_1' = \mu$, $\alpha_1'' = 0$.

На основании (50) $Q(w)$ будет иметь вид:

$$Q(w) = \frac{a'_\infty a''_\infty}{w(w-1)}.$$

Так как

$$a'_\infty - a''_\infty = \nu$$

и так как на основании (47)

$$a'_\infty + a''_\infty = 1 - \lambda - \mu,$$

то

$$a'_\infty \cdot a''_\infty = \frac{1}{4}[(1-\lambda-\mu)^2 - \nu^2],$$

и, следовательно, наше диференциальное уравнение можно написать в виде:

$$\frac{d^2\eta}{dw^2} + \left[\frac{1-\lambda}{w} + \frac{1-\mu}{w-1}\right]\frac{d\eta}{dw} + \frac{(1-\lambda-\mu)^2 - \nu^2}{4w(w-1)}\eta = 0. \qquad (56)$$

Это хорошо известное гипергеометрическое уравнение [1]):

$$w(1-w)\frac{d^2\eta}{dw^2} + [c - (a+b+c)w]\frac{d\eta}{dw} - ab\eta = 0, \qquad (57)$$

где

$$a = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu+\nu), \qquad b = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu-\nu), \qquad c = 1-\lambda.$$

К этому виду могут быть приведены также и другие уравнения, например уравнение Лежандра:

$$(1-w^2)\frac{d^2\eta}{dw^2} - 2w\frac{d\eta}{dw} + n(n+1)\eta = 0,$$

для которого точки 1,—1, ∞ являются правильными особыми точками с показателями, соответственно равными 0, 0; 0, 0; $n+1$, $-n$.

Для того чтобы функция, обратная по отношению к частному двух интегралов уравнения (56), была однозначна, каждое из чисел λ, μ, ν должно быть (теорема 6) или нулем, или числом вида $\frac{1}{p}$, где p целое число. Если эти условия выполняются, то коэфициенты уравнения (56) действительны. Мы можем предположить, что случай с) теоремы (6) не имеет места (так как в этом случае число особых точек сводится к двум) и что λ, μ, ν неотрицательны. Эти условия определяют диференциальное уравнение единственным образом; если уравнение будет преобразовано к виду (21), то определится $Q_1(w)$. Так как отсюда получается, что все диференциальные уравнения с тремя особыми точками

---

[1]) Задача, которой посвящены этот и следующий параграфы, рассматривалась Шварцем в его известной работе „Über diejenigen Fälle in welchen die Gaussische Hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt", Jour. fur Math., т. 75, стр. 292—335, а также Ges. Math. Adhandlungen, т. 2, стр. 211—259.

и с заданными разностями показателей в этих точках преобразуются в одно и то же уравнение вида (21), то по необходимости это уравнение будет тем, для которого частное интегралов $z = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = z(w)$ есть элементарная или фуксова функция.

Рассмотрим отображение верхней полуплоскости w посредством какой-нибудь ветви функции $z(w)$. Так как коэфициенты нашего уравнения действительны, то можно выбрать пару линейно-независимых интегралов, принимающих действительные значения на отрезке действительной оси от 0 до 1. Отношение этих интегралов z_1 также принимает действительные значения и отображает отрезок $[0, 1]$ на некоторый отрезок действительной оси. Так как z—линейная функция z_1, то каждая ветвь $z(w)$ отображает отрезок $[0, 1]$ на дугу некоторой окружности. Рассуждая подобным же образом, устанавливаем, что каждая ветвь $z(w)$ отображает отрезок $[1, +\infty]$ на дугу окружности и отрезок $[-\infty, 0]$ также на дугу окружности. В окрестности начала координат существует пара интегралов, частное которых [уравнение (42)] имеет вид:

$$z_0 = w^\lambda [1 + h_1 w + \ldots].$$

z_0 отображает принадлежащую верхней полуплоскости часть окрестности начала координат на внутренность угла, имеющего величину $\lambda\pi$. Отсюда следует, что z, будучи линейной функцией z_0, производит отображение указанной выше окрестности начала координат на внутренность угла, также имеющего величину $\lambda\pi$. Таким образом две окружности, в которые переходят при отображении части действительной оси справа и слева от начала координат, пересекаются под углом $\lambda\pi$. Так как те же рассуждения можно было бы повторить для точек 1 и ∞, то получаем следующий результат: *каждая ветвь функции $z(w)$ в верхней полуплоскости отображает эту полуплоскость на внутренность треугольника, сторонами которого являются дуги окружностей, а углы равны: $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$.*

Если мы продолжим аналитически ветвь функции $z(w)$, использованную для отображения верхней полуплоскости, через один из отрезков $[-\infty, 0]$, $[0, 1]$, $[1, +\infty]$ на всю нижнюю полуплоскость, то нижняя полуплоскость отобразится на треугольник, который может быть получен путем инверсии первого треугольника относительно одной из его сторон (теорема 19 § 83). При продолжении этого процесса различные ветви дадут отображения верхней и нижней полуплоскостей на конечную или бесконечную систему неперекрывающихся друг с другом и примыкающих друг к другу треугольников. Каждый из этих треугольников образован дугами окружностей и имеет углы $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Треугольник, получающийся путем инверсии любого треугольника, принадлежащего системе, относительно одной из его сторон, также принадлежит системе.

Если заштриховать все треугольники, на которые отображается верхняя полуплоскость, то никакие два из заштрихованных треугольников (или из незаштрихованных треугольников) не будут иметь общей стороны. Путем инверсии относительно стороны какого-нибудь из треугольников вся система треугольников переходит сама в себя, причем каждый заштрихованный треугольник переходит в незаштрихованный.

§ 114. Функции Римана-Шварц [1]. Функция $w = w(z)$, обратная по отношению к частному двух интегралов, автоморфна относительно группы линейных преобразований, переводящих какой-нибудь заштрихованный треугольник в любой другой заштрихованный треугольник. Каждое из преобразований группы эквивалентно последовательности инверсий относительно сторон треугольников.

Один заштрихованный и один незаштрихованный треугольник образуют фундаментальную область группы. Всякая простая автоморфная функция, принадлежащая группе, называется „функцией Шварца".

Функция $w(z)$ отображает всякие два треугольника, один из которых заштрихован, а другой не заштрихован, на полную плоскость w. Таким образом $w(z)$ принимает в фундаментальной области каждое значение один и только один раз. Отсюда следует, что любая функция Шварца является рациональной функцией от $w(z)$.

Функция $w(z)$, отображающая принадлежащий нашей системе треугольник на полуплоскость, ограниченную действительной осью, принимает действительные значения на границе любого треугольника и не принимает действительных значений внутри треугольника. В точках, сопряженных относительно стороны какого-нибудь треугольника, $w(z)$ принимает сопряженные комплексные значения (значения, сопряженные относительно действительной оси).

Из теоремы 11 § 95 следует, что $w(z)$ будет полиэдральной, периодической или фуксовой функцией в соответствии с тем, будет ли $\lambda + \mu + \nu > 1, = 1$ или < 1. Различие между этими тремя типами можно установить, непосредственно изучая треугольник.

Пусть две стороны треугольника, выходящие из общей вершины, вновь пересекаются в точке P. Выполним линейное преобразование, переводящее P в ∞; тогда обе упомянутые стороны перейдут в прямые линии.

На черт. 89 показано, какова будет третья сторона треугольника в каждом из трех случаев. Если рассматриваемые две стороны треугольника касаются в вершине, то точка A лежит в бесконечности, и полученные после линейного преобразования прямые параллельны.

---

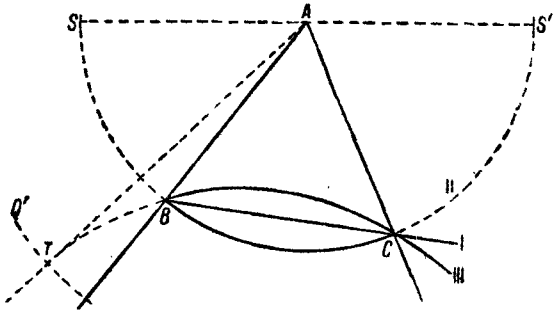
[1]) Riemann B., Vorlesungen über Hyperg. Reihe в его „Werke Nachträge"; Schwarz H. A., loc. cit.

Случай I. $\lambda+\mu+\nu=1$. Сумма углов треугольника равна π, и третья сторона прямая линия. В этом случае возможны четыре различных системы значений λ, μ, ν:

$$\text{a)}\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3};\quad \text{b)}\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4};$$

$$\text{c)}\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6};\quad \text{d)}\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0.$$

В случае a) получаем равносторонний треугольник, в случае b) прямоугольный равнобедренный треугольник, в случае c) прямоугольный треугольник с острыми углами 30 и 60°. Производя отражения треугольников относительно их сторон в каждом из этих трех случаев, можно покрыть всю конечную плоскость бесконечным множеством треугольников. В случае d) две стороны параллельны, а третья перпендикулярна им обеим. Производя отражения этой полуполосы, можно покрыть всю конечную плоскость бесконечным множеством ее копий.



Черт. 89.

Получающиеся здесь группы были уже изучены нами в § 60. Каждая из этих групп содержит периодическую подгруппу. Рассматриваемые здесь функции Шварца $w(z)$ могут быть с точностью до линейных преобразований отождествлены в случае a) с $\wp'(z)$, в случае b) с $[\wp(z)]^2$, в случае c) с $[\wp'(z)]^2$, в случае d) с $(\cos z)^2$ (§ 61).

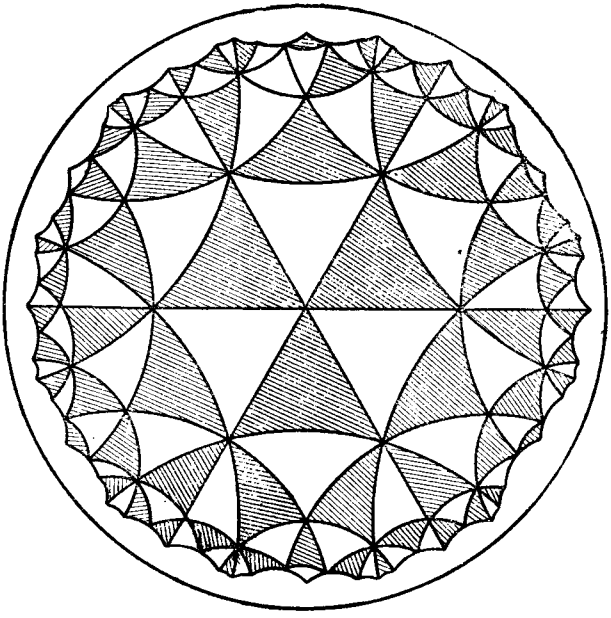
Случай II. $\lambda+\mu+\nu>1$. Сумма углов больше π, и третья сторона является дугой окружности, обращенной вогнутостью к точке A. A лежит внутри круга, ограниченного этой окружностью, так как в противном случае получаемый при инверсии относительно BC треугольник перекрывался бы с исходным. Проведем через точку A хорду SS' окружности, которой принадлежит третья сторона, перпендикулярную радиусу, проходящему через точку A (хорда SS' делится в точке A пополам).

Окружность Q с центром в A и радиусом AS пересекается с каждой стороной треугольника в точках, лежащих на противоположных концах диаметра.

Спроектируем стереографически плоскость на сферу, для которой окружность Q является экватором. Точки Q останутся при этом неподвижными. Стороны треугольника перейдут в три круговых дуги, лежащих на сфере, каждая из которых проходит через противоположные концы некоторого диаметра. Иначе

говоря, треугольник ABC перейдет в треугольник $A'B'C'$ на сфере, сторонами которого служат дуги больших кругов.

Инверсиям относительно сторон треугольника ABC соответствуют отражения относительно диаметральных плоскостей, содержащих стороны треугольника $A'B'C'$. Стороны треугольников, получающихся при таких отражениях, также являются дугами больших кругов, и поэтому всем инверсиям на плоскости соответствуют отражения относительно диаметральных плоскостей. Так как сфера покрывается конечным числом треугольников, то группа конечна.



Черт. 90.

Таким образом мы пришли к группам правильных многогранников, которые были изучены в гл. VI. Функции Шварца в этом случае являются полиэдральными функциями. Система треугольников, для которых λ, μ, ν имеют значения $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, представлена на черт. 38.

Случай III. $\lambda + \mu + \nu < 1$. Сумма углов треугольника меньше π, причем третья сторона обращена выпуклостью к точке A. Из точки A можно провести касательную AT к окружности, которой принадлежит третья сторона. Окружность Q' с центром в A, проходящая через точку касания T, ортогональна всем трем сторонам треугольника. При инверсии относительно любой из сторон треугольника окружность Q' переходит сама в себя. Стороны получающихся при этих инверсиях новых треугольников

ортогональны Q', поэтому окружность Q' остается неподвижной при инверсиях относительно сторон всех треугольников, получающихся путем последовательных инверсий из основного треугольника. Итак, в рассматриваемом случае группа является фуксовой.

Существует бесконечное множество значений λ, μ, ν, сумма которых меньше единицы. На черт. 90 изображена система треугольников для случая, когда λ, μ, ν имеют значения $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.

Эллиптические модулярные функции $I(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ являются функциями Шварца. Для $I(\tau)$ λ, μ, ν имеют значения $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 0, для $\lambda(\tau)$ — 0, 0, 0. Каждая из фундаментальных областей, изображенных на черт. 46 и 48, состоит из двух треугольников. На каждом из этих чертежей мнимая ось делит фундаментальную область на два составляющих ее треугольника.

§ 115. Уравнения с алгебраическими коэфициентами. Пусть дано уравнение:

$$\frac{d^2\eta}{dw^2} + P(W, w)\frac{d\eta}{dw} + Q(W, w)\eta = 0, \tag{58}$$

в котором P и Q рациональные функции, а W и w связаны соотношением $\Phi(W, w) = 0$, где Φ — полином.

В свое время (теорема 15 § 44) нами было доказано, что всякая простая автоморфная функция может быть представлена как функция, обратная частному двух интегралов уравнения такого вида.

Функция P и Q однозначны на римановой поверхности алгебраической функции $W = W(w)$. Они имеют только изолированные особые точки. Для того чтобы функция, обратная по отношению к частному двух интегралов, была однозначна в окрестности особенности, лежащей в обыкновенной точке римановой поверхности, должны быть выполнены требования теоремы 6. Если особенность расположена в бесконечно удаленной точке, принадлежащей одному листу, в конечной точке ветвления порядка m или наконец в бесконечно удаленной точке ветвления порядка m, то делаем замену переменного, в первом случае полагая $w = \frac{1}{t}$, во втором $w = a + t^m$, в третьем $w = \frac{1}{t^m}$, а затем применяем наши прежние теоремы к преобразованному уравнению в точке $t = 0$.

Мы не будем в этом случае вдаваться в детали. Заметим, однако, что если заданы правильные особые точки и соответствующие показатели, то здесь, как и в случае рациональных коэфициентов, в выражениях для коэфициентов остаются, вообще говоря, некоторые неопределенные постоянные, т. е. за исключением простейших случаев особые точки и показатели не определяют коэфициенты единственным образом.

Можно доказать теорему, аналогичную теореме 7, и притом теми же методами; т. е. может быть доказано, что можно по существу единственным способом выбрать эти постоянные так, чтобы функция, обратная по отношению к частному двух интегралов, была полиэдральной, эллиптической или фуксовой функцией.

Принадлежность функции к одной из этих категорий определяется числом особенностей, разностями показателей и жанром поверхности в соответствии с теоремами 9, 10, 11 гл. IX.

Пользуясь диференциальными уравнениями, мы приходим к таким же автоморфным функциям, как те, которые были нами получены методом конформных отображений. Однако диференциальное уравнение, в случае когда свободные постоянные могут быть в действительности определены, представляет собой аналитический инструмент большой силы для исследования свойств автоморфных функций.

БИБЛИОГРАФИЯ ПО АВТОМОРФНЫМ ФУНКЦИЯМ

Замечание. Многие частные классы функций, например, круговые функции, эллиптические функции и треугольные функции (включая эллиптические модулярные функции и полиэдральные функции), подвергались широкому изучению за много лет до создания общей теории автоморфных функций. Не приводя здесь библиографии этих ранних исследований, мы начинаем с работ, в которых Пуанкаре построил общую теорию. Упомянем, однако, два-три мемуара раннего периода, в значительной мере предвосхитившие общую теорию; в особенности:

Schwarz H. A., Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt, Crelle's J., **75**, S. 292, 1872.

Schottky F., Über die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Fläshen, Crelle's J., **83**, S. 300, 1877.

Fuchs L., Über eine Klasse von Funktionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coeffizienten entstehen, Crelle's J., **89**, S. 105, 1880.

Poincaré H., Sur les fonctions fuchsiennes, C. R., **92**, 333, 393, 859, 1198, 1274 1484, 1881; **93**, 301, 581, 1881.

Poincaré H., Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires, Math. Ann., **19**, 553 1882; **20**, 52, 1882.

Klein F., Über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich, Math. Ann., **19**, 565, 1882; **20**, 49 1882.

Poincaré H., Sur les fonctions fuchsiennes, C. R., **94**, 163, 1038, 1166, 1882; **95**, 626, 1882; **97**, 1485 1883.

Poincaré H., Théorie des groupes fuchsiens, Acta Math., **1**, 1, 1882.

Hurwitz A., Über eine Reihe neuer Functionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen bilden, Math. Ann., **20**, 125 1882.

Rausenberger O., Über eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden, Math. Ann., **20**, 187, 1882; **21**, 59 1883.

Schottky F., Über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich, Math. Ann., **20**, 293, 1882.

Fuchs L., Über Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, Gött. Nach., 81 1882.

Poincaré H., Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. Acta Math., **1**, 193 1882.

Picard É., Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions, Acta Math., **1**, 297, 1882.

Poincaré H., Sur un théorème de la théorie générale des fonctions, Bull. de la Soc. Math. de France, **11**, 112 1883.

Poincaré H., Mémoire sur les groupes kleinéens, Acta Math., **3**, 49, 1883.

Dyck W., Über die durch Gruppen linearer Transformationen gegebenen regulären Gebietseinteilungen des Raumes, Leipz. Ber., **61**, 1883.

Klein F., Neue Beiträge zur Riemannschen Functionentheorie, Math. Ann., **21**, 141, 1883.

Picard É., Mémoire sur les formes quadratiques binaires indéfinies, Ann. de l'Éc. Norm. (3), **1**, 9, 1884.

Poincaré H., Sur les groupes des équationes linéaires, Acta Math., **4**, 201, 1884.

Picard É, Sur un groupe des transformations des points de l'espace situés du même coté d'un plan, S. M. F. Bull., **12**, 43, 1884

Poincaré H., Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennens, Acta Math., **5**, 209, 1884.

Klein F., Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Leipzig 1884, English trans., G. G. Morrice, London 1888; 2nd ed., 1913.

Picard É., Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjugées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes, Acta Math., **5**, 121, 1884.

Poincaré H., Sur un théorème de M. Fuchs, Acta Math., **7**, 1, 1885.

Biermann O., Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen, Wien. Sitzungsber., **92**, 1137, 1885.

von Mangoldt H., Über ein Verfahren zur Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte nebst einer Ausdehnung dieses Verfahrens auf allgemeinere Functionen, Gött. Nach., 1, 1886.

Weber H., Ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Functionen, Gött. Nach., 359, 1886.

Poincaré H., Sur une transformation des fonctions fuchsiennes et la réduction des intégrales abéliennes, C. R., **102**, 41, 1886.

Poincaré H., Sur les fonctions fuchsienns et les formes quadratiques ternaires indéfinies. C. R., **102**, 735, 1886.

Humbert G., Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques. Liouville's J. (4), **2**, 239, 1886.

Schottky F., Über eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt, Crelle's J., **101**, 227, 1887.

Picard É., Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique, Acta Math., **11**, 1, 1887.

Humbert G., Sur le théorème d'Abel et quelques — unes de ses applications géométriques, Liouville's J. (4). **3**, 327, 1887.

Poincaré H., Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique, Liouville's J. (4), **3**, 405, 1887.

Stouff X., Sur la transformation des fonctions fuchsiennes, Ann. de l'Éc. Norm. (3), **5**, 219, 1888.

Stahl H., Über die Darstellung der eindeutigen Functionen, die sich durch lineare Substitutionen reproduzieren, durch unendliche Producte, Math. Ann., **33**, 291, 1888.

Bianchi L., Sulle superficie Fuchsiane, Lincei Rend, (4), 42, 161, 1888.

Picard É., Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées et les fonctions fuchsiennes, Am. J. Math., **11**, 187, 1888.

Schlesinger L., Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen, Crelle's J., **105**, 181, 1889.

de Brun F., Bevis för nagra teorem af Poincaré, Öfv. af K. Svenska Vet.-Ak. Förh., **46**, 677, 1889.

Schwarz H. A., Gesammelte mathematische Abhandlungen, 2 Bd., Berlin 1890.

Klein F. und Fricke R., Vorlesungen über die Theorie der Modulfunktionen, 2 Bd., Leipzig 1890—1892.

Hurwitz A., Über die Differentialgleichungen dritter Ordnung, welchen die Formen mit linearen Transformationen in sich genügen, Math. Ann., **33**, 345, 1889.

Stouff X., Sur certains groupes fuchsiens formés aves les racines d'équations binômes, Toulouse Ann., **4**, P, 1890.

Fricke R., Über eine besondere Klasse diskontinuiereicher Gruppen reeller linearer Substitutionen, Math Ann., **38**, 50, 461, 1890.

Klein F., Zur Theorie der Abelschen Functionen, Math. Ann., **33**, **36**, 1, 1890.

Biermann O., Über die Darstellung der Fuchs'schen Functionen erster Familie durch unendliche Producte, Monatshefte f. M., **1**, 49, 1890, **3**; 143, 1892.

Klein F., Zur Theorie der Laméschen Functionen, Gött. Nach., **85**, 1890.

Klein F., Über Normierung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Ann., **38**, 144, 1890.

Cassel G., Öfver en afhandling af H. Weber med titel „Ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Functionen", Bihang till Sv. Ak., **16**, Afd. I., N°. 2, 1891.

Cassel G., Sur un problème de représentation conforme, Acta Math., **15**, 33, 1891.

Painlevé P., Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre, Ann. de l'Éc. Norm. (3), **8**, 9, 103, 201, 267, 1891.

Burnside W., On a class of automorphic functions, Proc. L. M. S., **23**, 49, 281, 1892.

Ritter E., Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht Null, Gött. Nach., 283, 1892; Math. Ann., **41**, 1, 1892.

Klein F., Über den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereichs, Math. Ann., **40**, 130, 1892.

Fricke R., Weitere Untersuchungen über automorphe Gruppen solcher linearen Substitutionen einer Variabeln, deren Substitutionskoeffizienten Quadratwurzeln ganzer Zahlen enthalten, Math. Ann., **39**, 62, 1891.

Fricke R., Über discontinuierliche Gruppen, deren Substitutionscoefficienten ganze Zahlen eines biquadratischen Körpers sind, Gött. Nach., 268, 1892.

Fricke R., Über ein allgemeines arithmetischgruppentheoretisches Princip in der Theorie der automorphen Functionen, Gött. Nach., 453, 1892.

Schlesinger L., Sur la théorie des fonctions fuchsiennes, C. R., **114**, 1100, 1409, 1892.

Schlesinger L., Über die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufbietenden Primformen, Crelle's J., **110**, 130, 1892.

Burckhardt H., Über die Darstellung einiger Fälle der automorphen Primformen durch specielle Thetareihen, Math. Ann., **42**, 185, 1893.

del Pezzo P., Sui gruppi Kleineani a due variabili, Napoli Rend. (2), **7**, 123, 1893.

Ritter E., Die automorphen Formen von beliebigem Geschlechte, Gött. Nach., 121, 1893.

Fricke R., Zur gruppentheoretischen Grundlegung der automorphen Functionen, Math. Ann., **42**, 564, 1893.

Fricke R., Über indefinite quadratische Formen mit drei und vier Veränderlichen, Gött. Nach., **705**, 1893.

Picard É., De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée, Liouville's J. (4), **9**, 273, 1893.

Fricke R., Entwicklungen zur Transformation fünfter und siebenter Ordnung einiger specieller automorpher Functionen, Acta Math., **17**, 345, 1893.

Stäckel P., Über algebraiche Gleichungen zwischen eindeutigen Functionen, welche lineare Substitutionen in sich zulassen, Crelle's J., **112**, 287, 1893.

Burnside W., Note on linear substitutions, Mess. Math. (2), **22**, 190, 1893.

Burnside W., Note on the equation $y^2 = x(x^4 - 1)$, Proc. L. M. S., **24**, **17**, 1893.

Schoenflies A., Über Kreisbogenpolygone, Math. Ann., **42**, 377, 1893.

Pick G., Über das Formensystem eines kreisbogenpolygons vom Geschlecht Null, Math. Ann., **42**, 489, 1893.

Bianchi L., Sopra alcune classi di gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti complessi, Math. Ann., **43**, 101, 1893.

Kapteyn W., Een paar stellingen van Poincaré, Handel. v. h. 4de Nederl. Nat. Congres, **149**, 1893.

Forsyth A. R., Theory of Functions of a complex variable, Cambridge 1893, 2nd. ed., 1900.

Schoenflies A., Über Kreisbogendreiecke nud Kreishogenvierecke, Math. Ann., **44**, 105, 1894.

d'Ovidio E., Sulle funzioni Thetafuchsiane, Torino Atti, **29**, 741, 1894.

Ritter E., Die multiplicativen Formen auf algebraischen Gebilde beliebigen Geschlechtes, mit Anwendung auf die Theorie der automorphen Formen, Math. Ann., **44**, 261, 1894.

Fricke R., Über die Transformationstheorie der automorphen Functionen, Math. Ann., **44**, 97, 1894.

Ritter E., Die Stetigkeit der automorphen Functionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereichs, Math. Ann., **45**, 473, 1894; **46**, 200, 1895.

Fricke R., Eine Anwendung der Idealtheorie auf die Substitutionsgruppen der automorphen Functionen, Gött. Nach., 106, 1894.
Stouff X., Sur différents points de la théorie des fonctions fuchsiennes, Toulouse Ann., 8, D, 1894.
Cassel G., Kritiska studier öfver teorin för de automorfa funktionerna, Diss., Upsala 1894.
Fricke R., Die Kreisbogenvierseite und das Princip der Symmetrie, Math. Ann., 44, 565, 1894.
Klein F., Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, Autograph. Vorlesung, Göttingen 1894, Math. Ann., 46, 77, 1895.
Fricke R., Über die Discontinuitätsbereiche der Gruppen reeller linearen Substitutionen einer complexen Variabeln, Gött. Nach., 360, 1895.
Baker H. F., On a certain automorphic function, Cambr. Proc., 8, 322, 1895.
Ritter E., Über Riemannsche Formenschaaren auf einem beliebigen algebraischen Gebilde, Math. Ann., 47, 157, 1895.
Gordan P., Über unverzweigte lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung auf ebenen Curven vierten Grades, Math. Ann., 46, 606, 1895.
Schlesinger L., Handbush der Theorie der linearen Differentialgleichungen, 2 Bd., Leipzig 1895—1898.
Bagnera F., Sul teorema dell'esistenza delle funzioni Fuchsiane, Rivista di Mat., 5, 31, 1896.
Kempinski S., Über Fuchs'sche Functionen zweier Variabeln, Math. Ann., 47, 573, 1896; Bull. intern. de Cracovie, 288, 1895.
Fricke R., Notiz über die Discontinuität gewisser Collineationsgruppen, Math. Ann., 47, 557, 1896.
Fricke R., Über die Theorie der automorphen Modulgruppen, Gött. Nach., 91, 1896.
Fricke R., Die Theorie der automorphen Functionen und die Arithmetik, Papers published by the Amer. Math. Soc., 1, 72, 1896.
Viterbi A., Le equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici integrabili algebricamente, studiate in base alla teoria delle „funzione Fuchsiane" del Poincaré, Giornale di Batt., 35, 150, 1897; 36, 55, 1898.
Fricke R. and Klein F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, Leipzig, Teubner, 1897—1912.
Fricke R., Über den arithmetischen Charakter gewisser Netze von unendlich vielen congruenten Vierecken, Braunschw. Festschr., 85, 1897.
Baker H. F., Abel's theorem and the allied theory, Cambridge 1897.
Fricke R., Die Discontinuitätsbereiche der Gruppen reeller linearer Substitutionen einer complexen Veränderlichen, Deutsche Math. Ver., 4, 151, 1897.
Kluyver J. C. A special case of Dirichlet's problem for two dimensions Acta Math., 21, 265, 1897.
Poincaré H., Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, Palermo Rend., 11, 193, 1897.
Poincaré H., Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$, Liouville's J. (5), 4, 137, 1898; C. R., 126, 627, 1898.
Schlesinger L., Sur un problème de Riemann, C. R., 126, 723, 1898.
Fricke R, Über die Beziehungen zwischen der Zahlentheorie und der Theorie der automorphen Functionen, Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver., 6, 94, 1898.
Whittaker E. T., On the connexion of algebraic functions with automorphic functions, Phil. Trans., 192 A, 1, 1898.
Bagnera G., Un teorema relativo agli invarianti delle sostituzioni di un gruppo Kleinieno, Rendic. p. Lincei (5a), 7, 340, 1898.
Dixon A. C., Notes on the theory of automorphic functions, Proc. L. M. S., 31, 297, 1899.
Lindemann F, Zur Theorie der automorphen Functionen, Münch. Sitzungsber., 29, 423, 1899; 30, 493, 1900.
Wirtinger W., Zur Theorie der automorphen Functionen von n Veränderlichen, Wien. Ber., 108, 1239, 1899.
Fricke R., Zur Theorie der Poincaré'schen Reihen, Jahresb. d. Deutschen M. Ver., 9, 78, 1900.
Fricke R., Die automorphen Elementerformen, Gött. Nach., 303, 1900.

Fricke R., Die Rittersche Primform auf einer beliebigen Riemannschen Fläche, Gött. Nach., 314, 1900.

Wellstein J., Über Primformen auf Riemannschen Flächen, Gött. Nach., 380, 1900.

Dixon A. C., Notes on the theory of automorphic functions, Proc. L. M. S., 32, 353, 1900.

Dixon A. C., Prime functions on a Riemann surface, Proc. L. M. S, 33, 10, 1900.

Hilbert D. Mathematische Probleme, Gött. Nach., 253, 1900; Arch. d. M. u. P. (3), 1, 44, 213, 1901.

Fricke R., Über die Poincaré'schen Reihen der (—1)-ten Dimension, Dedekind Festschrift, 1901.

Hutschinson J. I., On a class of automorphic functions, Trans. Amer. M. S., 3, 1, 1902.

Alezais R., Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes et sur certaines substitutions linéaires qui s'y rapportent, Ann. de l'Éc. Norm., (3), 19, 261 (1902).

Whittaker E. T., Note on a function analogous to Weierstrass' sigmafunction, Mess. Math., 31, 145, 1902.

Fricke R., Über die in der Theorie der automorphen Funktionen auftretenden Polygoncontinua, Gött. Nach., 331, 1903.

Poincaré H, ur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes, Liouville's J. (5), 9, 139, 1903.

Blumenthal O., Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen, Math. Ann., 56 509, 1903; 58, 497, 1904.

Fubini G., Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e dei sistemi di tali forme, Atti d. Gioenia (4), 17, 1903

Blumenthal O., Über Thetafunctionen und Modulfunktionen mehrerer Veränderlichen, Deutsch. Math. Ver., 13, 120, 1904.

Fubini G., Sulla funzioni automorfe ed iperfuchsiane di più variabili indipendenti, Annali di Mat. (3), 10, 1, 1904.

Young J. W., On the group of the sign (0, 3; 2, 4, ∞) and the functions belonging to it, Trans. Amer. Math. Soc., 5, 81, 1904.

Fubini G., Sulla teoria dei gruppi discontinui, Ann. di Mat. (3), 11, 159, 1904.

Fricke R., Beiträge zum Continuitätsbeweise der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, Math. Ann., 59, 449, 1904.

Fubini G., Una questione fondamentale per la teoria dei gruppi e delle funzioni automorfe, Rend Lincei, 13, 530, 1904.

Fricke R, Neue Entwicklungen über den Existenzbeweis der polymorphen Funktionen, Heidelberg dritt. Math. Kongress 1904, 246.

Hutschinson J. I., On the automorphic functions of the group (0, 3; 2, 6, 6), Trans. Amer. Math. Soc., 5, 447, 1904.

Blumenthal O., Bemerkungen zur Theorie der automorphen Funktionen, Gött. Nach., 92, 1904.

Fuchs L., Gesammelte mathematische Werke, 3 Bd., Berlin 1904—1909.

Poincaré H., Sur les invariants arithmétiques, Crelle's J., 129, 89, 1905.

Hurwitz A., Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln, Math. Ann., 61, 325, 1905.

Morris R., On the automorphic functions of the group (0, 3, 1_1, 1_2, 1_3), Tr. Am. M. S, 7, 425, 1906.

Brodén T., Zur Theorie der mehrdeutigen automorphen Funktionen, Lunds Universitets Års-skrift, 40, 54, 1904.

Johansson S., Ein Satz über die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen auf den Einheitskreis, Math. Ann. 62, 177, 1906.

Johansson S., Beweis der Existenz linear-polymorpher Funktionen vom Grenzkreistypus auf Riemannschen Flächen, Math. Ann. 62, 174, 1906.

Hutschinson J. I., On automorphic groups whose coefficients are integers in a quadratic field, Trans. Am. M. S. 7, 530, 1906.

Levi E. E., Ricerche sulla teoria delle funzioni automorfe, Atti R. Acc. Lincei (5), 15, 632, 1906.

Fubini G., Sulla teoria delle funzioni automorfe, Atti R. Inst. Ven., 65, 1297, 1905.

Herglotz L., Über die Gestalt der auf algebraischen Kurven nirgends singularen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Ann., 62, 329, 1906.

Fubini G., Sulla construzione dei compi fondamentali di un gruppo discontinuo; Ann. d. Mat. (3), 12, 347, 1906.

Hutchinson J. I., A method for constructing the fundamental region of a discontinuous group of linear transformations, Tr. Am. M. S., 8, 261, 1907.

Koebe P., Über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven, Gött. Nach., 177, 1907.

Koebe P., Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Gött. Nach., 191, 633, 1907.

Fubini G., Nuove ricerche interno ad alcune classi di gruppi discontinui, Palermo Rend., 21, 177, 1906.

Fatou P., Sur les solutions uniformes de sertaines équations fonctionnelles, C. R., 143, 546, 1906.

Stahl H., Berechtigung einer Arbeit von Herrn E. T. Whittaker, Arch. d. M. u. P. (3), 10, 336, 1906.

Klein F., Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Ann., 64, 175, 1907.

Pick G., Über die zu einer ebenen algebraischen Kurvee gehörigen transzendenten Formen und Differentialgleichungen, Monatshefte f. M. u. P., 18, 219, 1907.

Koebe P., Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven, Gött. Nach., 410, 1907.

Fubini G., Sulla teoria delle funzioni automorfe e delle loro transformazioni, Ann. di Math. (3), 14, 33, 1907.

Poincaré H., Sur l'uniformisation des fonctions analytiques, Acta Math., 31, 1, 1907.

Schottky F., Über Beziehungen zwischen veränderlichen Grössen, die auf gegebene Gebiete beschränkt sind, Berlin Sitzungsber., 919, 1907, 119, 1908.

Klein F., Über die Zusammenhang zwischen dem sogenannten Oszilationstheorem der linear Differentialgleichungen und dem Fundamentaltheorem der automorfen Funktionen, Deutsch. Math. Ver., 16, 537, 1907.

Young J. W., On a class of discontinuous ζ-groups defined by normal curves of the fourth order, Palermo Rend., 23, 97, 1907.

Young J. W., A fundamental invariant of the discontinuous ζ-groups defined by the normal curves of order n in a space of n dimensions, Bull. Am. M. S. (2), 14, 363, 1908.

Rothe H., Über das Grundtheorem und die Obertheoreme der automorphen Funktionen im Falle der Hermite-Laméschen Gleichung mit vier singulären Puncten, Monat. Math. u. Phys., 19, 258, 1908.

Koebe P., Die Uniformisierung der algebraischen Kurven. Mitteilnng eines Grenzübergangs durch iterierendes Verfahren, Gött. Nach., 112, 1908.

Hilb E., Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann., 66, 215, 1908; 68, 24, 1909.

Garnier R., Sur les équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme, C. R., 147, 915, 1908.

Hilb E., Neue Entwicklungen über lineare Differentialgleichungen, Gött. Nach., 231, 1908; 230, 1909.

Poincaré H., Sur la réduction des intégrales abéliennes et les fonctions fuchsiennes, Rend. d. Circolo d. Palermo, 27, 281, 1908.

Caspar M., Über die Darstellbarkeit der homomorfen Formenscharen durch Poincaré'sche Zetareihen, Diss., Tübingen 1908.

Fubini G., Sulla discontinuità propria dei gruppi discontinui, Atti iv. congresso intern. matem. (Rome), voll. 11, 169, 1908.

Fubini G., Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe, Pisa 1908.

Koebe P., Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I, Math. Ann., 67, 145, 1909.

Richmond H. W., On automorphic functions in relation to the general theory of algebraic curves, Quart. Journ. M., 40, 258, 1909.

Young J. W., On the discontinuous ζ-groups defined bu rational normal curves in a space of n dimensions, Bull. Am. M. S. (2), 16, 363, 1909.

Hilb E., Über Kleinsche Theoreme ein der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann., 68, 24, 1901.

Poincaré H., Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, Leipzig 1910

Bierbach L., Zur Theorie der automorfen Functionen, Diss., Göttingen 1910

Craig C. F., On a class of hyperfuchsian functions, Trans. Math. Soc., **11**, 37, 1910.

Koebe P., Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe, Gött. Nach., **68**, 1909; 180, 1910.

Koebe P., Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II., Math. Ann., 69, 1, 1910.

Koebe P., Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Gött. Nach., **337**, 1908; 324, 1909.

Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Sechste Mitteilung, Gött. Nach., 355, 1910.

Koebe P., Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode, Gött. Nach., **59**, 1910.

Hecke E., Über die Konstruction der Klassenkörper reeller quadratischer Körper mit Hilfe von automorfen Funktionen, Gött. Nach., 619 (1910).

Prym F. und Rost G., Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung, Leipzig 1911.

Courant R., Über die Anwendung des Dirichletschen Prinzipes auf die Probleme den konformen Abbildung, Math. Ann., **71**, 145, 1911.

Chazy J., Sur l'indétermination des fonctions uniformes au voisinage de leurs coupures, C. R., **152**, 499, 1911.

Lilijeström A., Sur le fonctions fuchsiennes à multiplicateurs constants, Arkiv Matem. Astr. Fys., **6**, 18, 1910.

Koebe P., Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Crelle's J., **138**, 192, 1910; **139**, 251, 1911.

Hecke E., Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, Math. Ann., **71**, 1, 1911.

Fricke R., Zur Transformationstheorie der automorphen Funktionen, Gött. Nach., **518**, 1911; **240**, 1912.

Bianchi L., Sul gruppo automorfo delle forme ternarie quadratiche suscettibili di rappresentare lo zero, Atti Accad. Lincei (5), **21**, 305, 1912.

Johansson S., Zur theorie der Konvergenz der Poincaré'schen Reihen bei den Hauptkreisgruppen, Öfversigt af Einska Vetenskaps-Soc. Förhand., **53**, 15, 25, 1911.

Johansson S., Om konvergensen af de Poincaré'cka θ-serierna i hufvudcirkelfallet, 2d Congr. math. Scand. 1911, 181.

König R., Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Theorie der automorphen Funktionen, Math. Ann., **71**, 206, 1911.

Bieberbach L., $\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen, Gött. Nach., 599, 1912.

Brouwer L. E. J., Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitäts, beweises der Existenztheoreme eindeutig umkehrbarer polymorpher Funktionen auf. Riemannschen Flächen, Gött. Nach., 603, 1912.

Osgood W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig, 2nd. ed., 1912.

Brouwer L. E. J., Über die Singularitätenfreiheit der Modulmannigfaltigkeit, Gött. Nach., 803, 1912.

Klein F., Brouwer L. E. J., Koebe P., Bieberbach L und Hilb E., Zu den Verhandlungen betreffend automorfen Funktionen, Deut. Math. Ver., 21, 153, 1912.

Koebe P., Über die Uniformisierung ber algebraischen Kurven III, Math. Ann., **72**, 437, 1912.

Koebe P., Zur Begründung der Kontinuitätsmethode, Leipz. Ber., **64**, 59, 1912.

Gannier R., Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme, et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur donts l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Ann. de l'Éc. Norm. (3), **29**, 1, 1912.

Lilijeström A., Études sur la théorie du potentiel logarithmique, Arkiv Matem. Astro. Fys., **7**, 39, 56, 1912.

Plemelj J., Die Grenzkreisuniformisierung analytischer Gebilde, Monats f. M. u. P., **23**, 297, 1912.

Koebe P., Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung, Gött. Nach., 879 1912.

Osgood W. F., Existenzbeweis betreffend Funktionen, welche zu einer engetlich discontinuierlichen automorphen Gruppe gehören, Palermo Rend., **35**, 103, 1913.

Osgood W. F., On the uniformisation of algebraic functions, Ann. Math. Princeton (2), **14**, 143, 1913.

Fricke R., Automorphe Funktionen mit Einschluss der elliptischen Modulfunktionen, Encyclopädie der Math. Wiss., Bd. II. 2 Leipzig 1913.

Picard É., Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes, Ann. de l'Éc. Norm. (3), **30**, 483, 1913.

Koebe P., Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven IV, Math. Ann., **75**, 42, 1914.

Emch A., Two convergency proofs, Amer. M. S. Bull. (2), **20**, 358, 1914.

Emch A., On some geometric properties of circular transformations, Amer. Math. Monthly, **21**, 139, 1914.

Bieberbach L., Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Palermo Rend., **38**, 98, 1914.

Koebe P., Zur Theorie der Konformen Abbildung und Uniformisierung, Leipzig. Ber., **66**, 67, 1914.

Emch A., A certain class of functions connected with Fuchsian groups, Amer. M. S. Bull. (2), **22** 33, 1915.

Canen E., Sur les substitutions fondamentales du groupe modulaire, S. M. F. Bull., **43**, 69, 1915.

Ford L. R., An introduction to the theorie of automorphic functions, London Bell, 1915.

Bieberbach L., Einführung in die konforme Abbildung, Berlin, Sammlung Göschen, 1915.

Rey-Pastor J., Teoria de la representació conforme, Barcelona 1915.

Bieberbach L., $\Delta u = e^u$ und die automorphen Funktionen, Math. Ann., **77**, 173, 1916.

Picard É., Sur certains sous groupes hyperfuchsiens correspondant aux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées, C. R., **163**, 284, 1916.

Picard É., Sur les fonctions de deux variables complexes restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu, C. R., **163**, 317, 1916.

Picard É., Sur certains groupes discontinus correspondant aux formes quadratiques ternaires, Ann. de l'Éc. Norm. (3), **33**, 363, 1916.

Poincaré H., Oeuvres, t. II, Paris 1916.

Giraud G., Sur une classe de groupes discontinus de transformations birationelles quadratiques et sur les fonctions de trois variables indépendants restant invariables par ces transformations, Thèse. Paris 1916.

Myrberg P. J., Zur Theorie der Konvergenz der Poincaré'schen Reihen, Ann. Acad. Sc. Fennicae (A), **9**, No. 4; (A), **11**, No. 4, 1916.

Koebe P., Begründung der Kontinuitätsmethode in Gebiete der Konformen Abbildung und Uniformisierung, Gött. Nach., 226 1916; 57, 1918.

Koebe P., Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung: I. J. für Math., **145**, 177, 1915, II. Acta Math., **40**, 251, 1916; III. J. für Math., **147**, 67, 1917; IV. Acta Math., **41**, 305 1918; V. Math. Ztschr., **2**, 198, 1918.

Giraud G., Sur les groupes des transformations semblables arithmétiques, Ann. de l'É. Norm. (3), 33, 303, 1916.

Lichtenstein L., Die Methode des Bogenelementes in der Theorie der Uniformisierungstranszendenten mit Grenz- oder Hauptkreis (Vorläufige Mitteilung), Gött. Nach., 141, 426, 1919.

Hilb E., Zur Topologie der für die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung geltenden Obertheoreme, Gött. Nach., 112, 1917.

Falckenberg H., Zur Theorie der Kreisbogenpolygone, Math. Ann., **77**, 65, 1916; **78**, 23, 1917.

Koebe P., Zur Geometrie der automorphen Fundamentalgruppen, Gött. Nach., **54**, 1918.

Giraud G., Sur les fonctions hyperfuchsiennes et sur les systèmes d'équations aux différentielles totals, C. R., **164**, 386, 487, 1917; **166**, 24, 1918.

Timirnov T., Application du principe de convergence à la théorie d'uniformisation, Comm. Soc. Math. de Kharkov, **16**, 39, 1918.

Bieberbach L., Über die Einordnung des Hauptsatzes der Uniformisierung in die Weierstrassische Funktionentheorie, Math. Ann., **78**, 312, 1918.

Price H. F., Fundamental regions for certain finite groups in S_4, American J., **40**, 108, 1918.

Forsyth A. R., Functions of a complex variable 3rd Ed., Cambridge Univ, Press., 1918.

Lewickyj W., Einige Typen der zur Fuchs'schen Gruppe gehörigen Funktionen Sammelschrift der math.-nat.-ärzt. Lemberg, **18—19**, 103, 1919.

Van Vleck E. B., On the combination of non-loxodromic substitutions, Trans. Amer. Math. Soc. (4), **20**, 299, 1919.

Giraud G., Sur les fonctions automorphes d'un nombre quelconque de variables, Ann. de l'Éc. Norm. (3), **36**, 187, 1919.

Giraud G., Sur la classification des substitutions de certains groupes automorphes à n variables, et sur les relations algébriques qui existent entre $n+1$ fonctions quelconques correspondants à certains de ces groupes, C. R., **169**, 131, 1919.

Myrberg P. J., Ein Satz über die polymorphen Funktionen auf den eindeutig in sich tra sformierbaren Riemannschen Flächen, Ann. Acad. Sc. Fennicae. (A), **12**, No. 8, 1919.

Myrberg P. J., Über das identische Verschwinden der Poincaré'schen Reihen, Ann. Aacd. Sc. Fennicae, (A) **13**, No. 4. 1919.

Fueter R., Über die Konstruktion einer speziellen automorphen Funktion, Zurich Naturf. Ges., **64**, 1, 1919.

Humbert G., Sur la formation du domaine fondamental d'un groupe automorphe, C. R., **169**, 205, 1919.

Giraud G., Leçons sur les fonctions automorphes. Fonctions automorphes de n variables, fonctions de Poincaré, Paris 1920.

Giraud G., Réponse à une Note de M. Fubini sur les functionsautomorphes, C. R., **171**, 1365, 1920.

Birkhoff G. D., The work of Poincaré on antomorphic functions, Amer. M. S. Bull., **26**, 164, 1920.

Smirnoff V., Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéares du second ordre et des fonction automorphes, C. R., **171**, 510, 1920.

Myrberg P. J., Über die numerische Ausführung der Uniformisierung, Acta Soc. Sc. Fennicae, **48**, № 7, 1920.

Fubini G., Sur les fonctions automorphes, C. R., **171**, 156, 1920; **172**, 265, 1921.

Poincaré memoriale articles: Analyse de ses travaux scientifiques, lettres etc., Acta Math., **38**, 3, 1921.

Fuhr H., Zur Transformationstheorie der Fuschs'schen Funktionen, Mitt. des Math. Sem. d. Giessen, 1. H., 1921

Uhler A., Sur les séries zétafuchsiennes, Thèse, Lund, Gleerupska Univ.-Bokh., 1921.

Falckenberg H.. Ableitung der „Ergänzungsrelationen" aus den Formeln von Simon L'Huilier, Math. Ztschr., **10**, **17**, 1921.

Giraud G., Sur certains fonctions automorphes de deux variables, Ann. de l'Éc. Norm., **38**, 43, 1921.

Bieberbach L., Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variabeln, Encykl. d. math. Wiss., C 4, 379, 1921.

Giraud G., Sur les fonctions automorphes, C. R., **172**, 354, 1921.

Smirnoff V., Sur les équations différentielles linéaires du second ordre et la théorie des fonctions automorphes, Bull. des Sci. Math., (2) **45** 93, 126, 1921.

Klein F., Gesammelte mathematische Abhandlungen, 3, B-de, Berlin, Springer, 1921—1923.

Maurer L., Über die Schottkysche Gruppe von linearen Substitutionen, Tübinger naturwissensch. Abh., H. **3**, 1, 1921.

Myrberg P. J., Sur les fonctions automorphes de plusieurs variables indépendantes, C. R., **174**, 1402, 1922.

Myrberg P. J., Über die automorphen Funktionen zweier Veränderlichen, Acta Math., **43**, 289, 1922.

Myrberg P. J., Sur les singularités des fonctions automophes, C. R., **175**, 674, 809, 1922.

Falckenberg H., Zur Theorie der Kleinschen Ergänzungsrelationen, Math. Ann. **88**, 123, 1922.

Got Th., Questions diverses concernant certaines formes qnadratiques ternaires indéfinies et les groupes fuchsiens arithmétiques qui s'y rattachent, Ann. de Toulouse (3), 5, 1, 1922.

Axel H., Die elliptischen Funktionen als automorphe Funktionen die zu einer aus drei Drehungen der Euklidischen Ebene in 180° komponierten Gruppe gehören, Mitt. Matt. Sem. Giessen, 1, 1, 1922.

Poincaré H., Sur les fonction fuchsiennes. Extrait d'un mémoire inédit, Acta Math., 39, 58, 1923.

Correspondance d'Henri Poincaré et de Felix Klein, Acta Math., 39, 94, 1923

Sansone G., I sottogruppe del gruppo di Picard e due teoremi sui grupp finiti analoghi at teorema del Dyck, Palermo Rend., 47, 273, 1923.

Myrberg P. J., Über die Singularitäten der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen, 5 Kongress Skandinav. Math., 297, 1927.

Myrberg P. J., Uber die automorfen Funktionen mehrerer Veränderlichen Math. Ann., 93, 61, 1924.

Splesz O., Über automorphe Functionen mit rationalem Multikationstheorem, Math. Ann., 93, 98, 1924.

Myrberg P. J., Über die automorphen Funktionen bei einer Klasse Jonquières'scher Gruppen zweier Veränderlichen, Math. Ztschr., 21, 224, 1924.

Myrberg P. J., Über die wesentlichen Singularitäten der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen, Ann. Acad. Sc. Fennicae (A) 20, 1924.

Dalaker H. H., On the automorphic functions of the group (0, 3; 2, 4, 6), Ann. of Math. (2), 25, 241, 1924.

Schlesinger L., Automorphe Funktionen, Leipzig, W. de Gruyter, 1924.

Uhler A., Sur une généralisation des fonctions zétafuchsiennes, C R., 6 Congr., des Math. Scan., Copenhagen 489, 1925.

Myrberg P. J., Über diskontinuierliche Gruppen und automorphe Funktionen von mehreren Variabeln, C. R. 6 Congr. des Math. Scan., Copenhagen, 191, 1925.

Hecke E., Über einen neuen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen, Gött. Nach., 35, 1925.

Sansone G., La relazioni fondamentali fra le operazioni generaltrici del gruppo. modulare finito con coefficienti inleri del campo di Gauss, Palermo Rend., 49, 225, 1925.

Ford L. R., The fundamental region for a Fuchsian group, Amer. M. S. Bull., 31, 531, 1925.

Myrberg P. J., Sur les fonctions automorphes, C. R., 180, 1819, 1925.

Abramowicz C, Sur la transformation du p-ième degré d'une fonction automorphe, Ann. de Soc. Polonaise de Math., 3, 63, 1925.

Lewent L., Conformal Representation, trans. by R. Jones and D. H. Williams, Methuen 1925.

Sansone G., I sottogruppi del gruppo modulaire con coefficienti del corpo di Jacobi-Eisenstein e un theorema sui gruppi finiti, Annali di Math. (4), 3, 73, 1926.

Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie II, Berlin und Leipzig, Teubner, 1927.

Fueter R, Über automorphe Funktionen in Bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind, J. für Math., 157, 66, 1927.

Ford L. R., On the foundations of the theory of discontinuous groups of linear transformations, Proc. Natl. Acad. Sci., 13, 286, 1927.

Ford L. R., On the formation of groups of linear transformations by combination, Proc. Nat. Acad. Sci., 13, 289, 1927.

Koebe P., Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (konforme Abbildung und Uniformisierung), Acta Math., 50, 27, 1927.

Nevanlinna F., Über die Anwendung einer Klasse uniformisierenden Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen, Acta Math., 50, 159, 1927.

Hecke E., Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Ann., 97 210, 1927.

Fricke R., Transformation der elliptischen Funktionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade, Math. Ann., 101, 316, 1929.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
33	9 св	Из (42) следует	Из (41) следует
110	10 св.	$w =$	$u =$
122	5 сн.	$\int\limits_{h_{k'}} d \ln \left(\frac{c_k z + d_k}{z - P} \right) \Theta(z)$	$\int\limits_{h_{k'}} d \ln \left(\frac{c_k z + d_k}{z - P} \right) \cdot G(z)$
156	1 сн.	Пропущено (27)	
277	8 св.	$d \ln \psi(t)] C_s^- = d \ln \psi(t)] C_s^+$	$[d \ln \psi(t)]_{C_s^-} = [d \ln \psi(t)]_{C_s^+}$

Форд. Автоморфные функции 3100.