

Проф. Я. И. ФРЕНКЕЛЬ

Э Л Е К Т Р О Д И Н А М И К А

ТОМ I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСТВА



ОНТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1934 МОСКВА

ВВЕДЕНИЕ

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

А. Сложение, внутреннее и внешнее умножение векторов

§ 1. Различные физические величины разделяются обычно на два класса, именно на скаляры и векторы. Первые из них вполне определяются заданием их численного значения; для полного же определения вторых, кроме их численной величины, еще должно быть задано их направление в пространстве. Типичными скалярами являются время, масса тела и т. д., типичными же векторами — скорость, сила и т. д. Позже мы увидим, что векторы представляют частный случай величин более общего типа, так называемых тензоров.

Обычно мы будем обозначать векторные величины жирными латинскими буквами, а их численное значение — соответственным светлым шрифтом или же заключением векторного символа между двумя вертикальными чертами. Так, например, $|A| = A$ должно обозначать численное значение вектора A .

Прототипом векторных величин является прямолинейный отрезок, обыкновенно связанный с представлением о пространственном перемещении из какой-нибудь „начальной точки“ O в некоторую другую точку P , но, вообще говоря, служащий для графического представления всевозможных векторных величин. Перемещение OP может быть заменено совокупностью двух или более перемещений OA, AB, BC, CP , которые называются составляющими (геометрическое разложение). Обратная операция, сводящаяся к замене нескольких отрезков (векторов) $F_1, F_2 \dots F_n$ одним отрезком F , по отношению к которому они играют роль составляющих, называется геометрическим или векторным сложением. Операция геометрического сложения выражается символически равенством

$$F = F_1 + F_2 \dots + F_n = \sum_k F_k. \quad (1)$$

Нетрудно доказать, что геометрическая сумма не зависит от порядка слагаемых (т. е. от порядка, в котором они приставляются один к другому), так же как это имеет место для обыкновенной суммы. Вектор, равный B по величине, но противоположный по направлению, обозначается через $-B$. Сумма $A + (-B)$ пишется в виде $A - B$ и называется геометрической разностью векторов A и B

§ 2. Проекцией отрезка OP на прямую MN называется отрезок O_1P_1 , отсекаемый на этой прямой перпендикулярными к ней плоскостями, проходящими через концы OP (рис. 1).

Если при этом направление от O_1 к P_1 совпадает с положительным направлением прямой MN , то проекции приписывается положительный знак, в противоположном случае — отрицательный. Обозначая проекцию вектора A на направление вектора B через A_B , имеем, следовательно, $A_B = A \cos(A, B)$. Произведение $A_B B = AB \cos(A, B) = AB_A$ называется внутренним (скалярным) произведением векторов A и B и обозначается символом $A \cdot B = B \cdot A = (B \cdot A)$ или просто AB . Нетрудно показать, что проекция геометрической суммы нескольких отрезков (например OQ и QP , рис. 1) на любую прямую равна алгебраической сумме проекций составляющих. Таким образом $(A + B)_C = A_C + B_C$. Умножая это равенство на C , получаем

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C. \quad (2)$$

Эта формула непосредственно обобщается на произвольное число составляющих

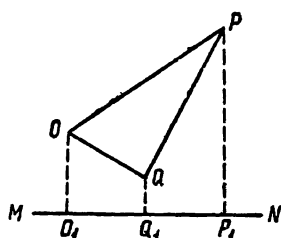


Рис. 1.

$$\left(\sum_p A_p \right) \left(\sum_q B_q \right) = \sum_p \sum_q A_p B_q. \quad (2a)$$

§ 3. Площадь всякой плоской фигуры S , произвольным образом ориентированной в пространстве, можно трактовать как векторную величину и изображать перпендикулярным к ней отрезком S пропорциональной длины. При этом, для определенности, на контуре σ , ограничивающем S , задается определенное направление обхода (или вращения), причем отрезок S , изображающий S , проводится в сторону поступательного движения обыкновенного „правого“ винта, вращаемого в заданном направлении на контуре σ (рис. 2). Проекцией площади S на какую-либо плоскость Q называется площадь S' , вырезаемая на плоскости Q перпендикулярными к ней прямыми, проходящими через точки контура σ . При этом, для определенности, на плоскости Q задается определенное положительное направление обхода. Если последнее совпадает с направлением обхода по контуру σ' , ограничивающему S' , то площадь S' считается положительной, в противном случае — отрицательной.

Численное значение ее равно, как нетрудно убедиться, произведению проектируемой площади S на косинус двугранного угла α между ней и плоскостью Q .

Изображая последнюю перпендикулярной к ней прямой MN , можно, следовательно, отождествить проекцию S на Q с проекцией отрезка S на MN .

Если контур σ состоит из прямолинейных отрезков, т. е. представляет собой замкнутый многоугольник, то рассма-

триваемая плоская фигура S может быть „разложена“ на совокупность нескольких плоских фигур, которые образуют многогранную поверхность, ограниченную σ . Эта многогранная поверхность эквивалентна S в том смысле, что проекция S' на любую плоскость равна алгебраической сумме проекций „составляющих“ ее плоских фигур, т. е. в том же смысле, в каком совокупность прямолинейных отрезков S_i , изображающих эти фигуры, эквивалентна результирующему отрезку S , изображающему S . Направление обхода по элементарным контурам σ_i , ограничивающим составляющие плоские фигуры, выбирается в соответствии с направлением обхода по внешнему контуру σ , при этом каждый из прямолинейных отрезков, разграничивающих две соседние фигуры, при обходе тех двух контуров,

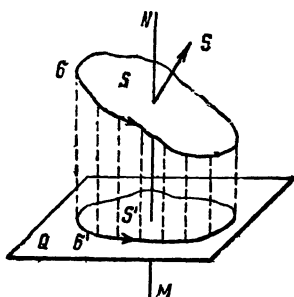


Рис. 2.

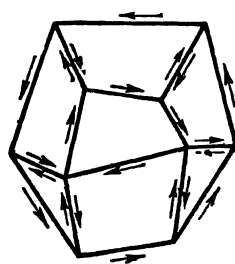


Рис. 3.

к которым он принадлежит, проходится в противоположных направлениях (рис. 3). Указанное разложение на плоские фигуры возможно и в том случае, если исходная фигура не является плоской, т. е. если контур σ имеет вид неплоского многоугольника. Изображая каждую из составляющих фигур перпендикулярным к ней отрезком соответствующей длины, мы можем рассматривать геометрическую сумму этих отрезков S_i как изображение исходной фигуры. Нетрудно убедиться, что это определение вполне однозначно, т. е., что отрезок S не зависит от способа подразделения контура σ на составляющие (плоские) контуры.¹ Хотя, таким образом, с контуром σ не связывается представление об определенной площади, тем не менее площадь S' , вырезаемая на любой плоскости Q проекцией σ' контура σ , остается попрежнему равной проекции отрезка S на прямую MN .

Этот отрезок или, вернее, изображаемый им вектор S , характеризующий размеры и форму замкнутого контура, называется геометрическим моментом этого контура. Это определе-

¹ Это непосредственно следует из рассмотрения проекций σ и σ_i ($i = 1, 2, \dots$) на какую-нибудь плоскость.

ние может быть распространено на произвольные криволинейные контуры, если рассматривать их как предельную форму замкнутых многоугольников с бесконечно малыми сторонами, а составляющие плоские фигуры заменить бесконечно малыми элементами произвольной (кривой) поверхности, стягиваемой самим контуром.

§ 4. Простейшей плоской фигурой является параллелограмм (или треугольник, который можно трактовать как половину параллелограмма). Момент параллелограмма, построенного на двух отрезках \mathbf{A} и \mathbf{B} , называется внешним или векторным произведением этих отрезков. Если при этом направление обхода таково, что отрезок \mathbf{A} приходится в положительном направлении, а \mathbf{B} в отрицательном, то внешнее произведение обозначается символом $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Отсюда следует, что $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Далее нетрудно показать, что в случае внешнего произведения, так же как и в случае внутреннего, имеет место распределительный закон:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}. \quad (3)$$

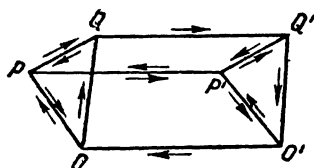


Рис. 4.

В самом деле, полагая $OP = O'P' = \mathbf{A}$, $PQ = P'Q' = \mathbf{B}$ и $OO' = PP' = \mathbf{C}$ (рис. 4), мы можем рассматривать векторы $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ и $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ как моменты параллелограммов $OPP'O'$ и $PQQ'P'$, которые совместно с треугольниками OQP и $O'Q'P'$ эквивалентны параллелограмму $OQQ'O'$. А так как моменты этих треугольников (ввиду противоположности направлений обхода) равны и противоположны, то отсюда следует, что геометрическая сумма моментов $OPP'O'$ и $PQQ'P'$ равна моменту $OQQ'O'$, т. е. внешнему произведению $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$.

Равенство (3) обобщается на любое число слагаемых

$$\left(\sum_p \mathbf{A}_p \right) \times \left(\sum_q \mathbf{B}_q \right) = \sum_p \sum_q \mathbf{A}_p \times \mathbf{B}_q. \quad (3a)$$

§ 5. Если \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} — три некопланарных (т. е. не лежащих в одной плоскости) отрезка, то комбинируемое (двойное) произведение $\mathbf{A} (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ представляет собой объем параллелепипеда, построенного на этих отрезках, со знаком $+$ или $-$. Нетрудно проверить, что это произведение остается неизменным при циклической (круговой) перестановке букв

$$\mathbf{A} (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (4)$$

Двойное внешнее произведение $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ может быть преобразовано по формуле

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (5)$$

которая явствует из того обстоятельства, что вектор $A \times B \times C$ лежит в плоскости векторов B и C и перпендикулярен к A . Таким образом внутреннее произведение его на A должно обращаться в нуль тождественно. Отсюда ясно, что он параллелен вектору $B(AC) - C(AB)$. Разлагая A, B и C на составляющие, нетрудно убедиться, что предыдущие векторы не только параллельны, но и равны (см. ниже).

Пользуясь формулами (4) и (5), нетрудно далее доказать тождество

$$(A \times B) (C \times D) = (AC) (BD) - (BC) (AD). \quad (6)$$

В самом деле, согласно (4), имеем

$$(A \times B) (C \times D) = C [D \times (A \times B)] = C [A (BD) - B (AD)]$$

§ 6. Представим себе прямоугольную систему координатных осей OX_1, OX_2, OX_3 , проведенных в направлении трех взаимно перпендикулярных единичных векторов e_1, e_2, e_3 , т. е. таким образом, чтобы

$$e_1 \times e_2 = e_3; e_2 \times e_3 = e_1; e_3 \times e_1 = e_2 \quad (7)$$

и, кроме того, конечно,

$$e_p \cdot e_q = \begin{cases} 1 & \text{при } p=q \\ 0 & \text{ " } p \neq q \end{cases} \quad (7a)$$

Обозначим составляющие радиуса-вектора r какой-либо точки P вдоль этих осей через $e_1 x_1, e_2 x_2, e_3 x_3$, т. е. положим

$$r = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3. \quad (8)$$

Составляя проекцию r на i -ую ось, т. е. внутреннее произведение re_i , получаем, в виду равенства (7a), $r_i = re_i =$

$$\left(\sum_k e_k x_k \right) e_i = \sum_k x_k (e_k e_i) = x_i. \text{ Таким образом в рассматри-}$$

ваемом случае составляющие вектора r , или вернее, их численные значения, т. е. координаты точки P , совпадают с соответствующими проекциями. Мы будем называть их прямоугольными компонентами. Аналогичным образом компоненты всякого другого вектора A определяются формулами

$$A_i = Ae_i. \quad (8a)$$

Компоненты геометрической суммы $A + B + \dots$ равны, очевидно, алгебраической сумме соответствующих компонент слагаемых. Полагая в случае внутреннего или внешнего умножения двух векторов

$$A = \sum A_i e_i \text{ и } B = \sum B_k e_k,$$

получаем, согласно (2а) и (3а),

$$\mathbf{AB} = \sum_i \sum_k A_i B_k (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k),$$

т. е., на основании (7а),

$$\mathbf{AB} = \sum_i A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \quad (9)$$

и точно так же

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_i \sum_k A_i B_k (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) = \sum_{i < k} (A_i B_k - A_k B_i) (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k),$$

т. е., согласно условиям (7),

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathbf{e}_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathbf{e}_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1), \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 &= A_2 B_3 - A_3 B_2; (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_2 = \\ &= A_3 B_1 - A_1 B_3; (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned} \quad (10a)$$

С помощью этих формул нетрудно установить тождества (4) и (5). Так, например, в случае (5) имеем, на основании (10а),

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_1 &= A_2 (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_3 - A_3 (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_2 = \\ &= A_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1) - A_3 (B_3 C_1 - B_1 C_3) = \\ &= B_1 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) = \\ &= B_1 (\mathbf{AC}) - C_1 (\mathbf{AB}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]_2 = B_2 (\mathbf{AC}) - C_2 (\mathbf{AB})$$

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_3 = B_3 (\mathbf{AC}) - C_3 (\mathbf{AB}).$$

В. Дифференциальные операции векторного исчисления

§ 7. Векторы, подобно скалярам, могут играть роль независимых и зависимых переменных по численному значению и направлению, т. е. роль аргументов и функций. Необходимо различать следующие четыре случая:

- 1) скалярная функция от скалярного аргумента $\alpha(t)$;
- 2) векторная функция от скалярного аргумента $\mathbf{A}(t)$;
- 3) скалярная функция от векторного аргумента $\varphi(\mathbf{r})$;
- 4) векторная функция от векторного аргумента $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Для наглядности мы будем подразумевать под t время, а под \mathbf{r} — радиус-вектор различных точек пространства по отношению к некоторой начальной точке O . Таким образом $\alpha(t)$ и $\mathbf{A}(t)$ суть функции времени, а $\varphi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — функции места, определяемого векторным аргументом \mathbf{r} .

Скалярную функцию места $\varphi(\mathbf{r})$ можно представить наглядно посредством построения семейства поверхностей

$$\varphi = c = \text{const}$$

для равноотстоящих значений c . При этом кривые, ортогональные к этим поверхностям, дают в каждой точке направление наиболее быстрого возрастания φ .

Векторные функции места $F(r)$ обычно представляют „векторными полями“, изображая их наглядно при помощи построения семейства линий („линий тока“, если F обозначает скорость, или „силовых линий“, если F — сила), которые в каждой точке проходят в направлении вектора F , соответствующего данной точке, и притом таким образом, чтобы „густота“ их (число линий на единицу перпендикулярной к ним поверхности) была пропорциональна величине F .¹

§ 8. Производной $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ соответствует в случае векторной функции $\mathbf{A}(t)$ „векторная производная“ $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$, определяемая как предел отношения

$$\frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

В случае скалярной функции от векторного аргумента r операция дифференцирования может быть определена следующим образом. Представим себе замкнутую поверхность, содержащую рассматриваемую точку P ($OP = r$). Проведем в каждой точке S вектор внешней нормали \mathbf{n} (численно = 1) и составим геометрическую сумму произведений векторов $\mathbf{n} dS$, где dS — бесконечно малый элемент рассматриваемой поверхности, на значение функции φ в одной из точек dS . Эта геометрическая сумма бесконечно малых векторов $\mathbf{n} \varphi dS$ при $dS \rightarrow 0$ дает векторную величину, которая обозначается

$$\oint \mathbf{n} \varphi dS$$

и называется **поверхностным интегралом** функции $\varphi(r)$.² Мы будем предполагать эти функции непрерывными во всем рассматриваемом объеме.³

Если разделить предыдущее выражение на объем V , ограниченный поверхностью S , и затем уменьшать эту поверхность, стягивая ее к рассматриваемой точке P , то в пределе $S \rightarrow 0$ мы получим некоторый вектор, не зависящий от формы S или ее изменения при предельном переходе⁴ и характеризующий быстроту и направление (быстрейшего) изменения функции $\varphi(r)$

¹ Если поверхность S не перпендикулярна к F , то число линий, пересекающих эту поверхность, рассчитанное на единицу площади, измеряется проекцией F на нормаль к S .

² Кружок на знаке интеграла обозначает, что поверхность замкнута.

³ Т. е. отношение разности $\varphi(r_2) - \varphi(r_1)$ для двух различных точек к расстоянию между этими точками ($r_2 - r_1$) должно всегда оставаться конечным.

⁴ Доказательство см. примечание к § 11.

„в точке P “. Этот вектор ввиду его полной аналогии с обыкновенной производной (по скалярному аргументу) можно было бы назвать производной φ по \mathbf{r} . Обычно его называют градиентом φ и обозначают символом $\text{grad } \varphi$ или $\nabla \varphi$.

Таким образом

$$\text{grad } \varphi = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \varphi dS. \quad (11)$$

Это определение операции дифференцирования по векторному аргументу легко распространяется на векторные функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. А именно, заменяя произведения $\mathbf{n} \varphi$ внутренним произведением $\mathbf{n} \mathbf{F}$ или внешним $\mathbf{n} \times \mathbf{F}$, мы получаем внутреннюю или внешнюю производные \mathbf{F} по \mathbf{r} , называемые соответственно „расхождением“ (divergentia) и „вращением“ или „вихрем“ (rotation или curl)

$$\text{div } \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \mathbf{F} dS, \quad (11a)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS. \quad (11b)$$

Расхождение можно назвать внутренним, а вращение внешним градиентом \mathbf{F} . Если ввести векторный оператор

$$\nabla = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} dS \quad (12)$$

и рассматривать его как символический вектор, то три операции (11), (11a) и (11b) можно символически выразить при помощи соответствующих операций умножения

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi, \\ \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \mathbf{F}, \quad \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}. \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

§ 9. Этот способ выражения, с одной стороны, очень удобен и очень ясен в отношении аналитических свойств различных дифференциальных операций; с другой стороны, при помощи обычных обозначений непосредственно выражается их наглядный геометрический смысл. В случае векторных величин $\text{grad } \varphi$ и $\text{rot } \mathbf{F}$ этот смысл можно выяснить надлежащим выбором формы поверхности S . Возьмем в качестве S поверхность бесконечно малого прямого цилиндра с основаниями S' и S'' и высотой h , и составим проекцию интеграла $\oint \mathbf{n} \varphi dS$ на направление образующей, проведенной от S' к S'' , т. е. в сторону внешней нормали \mathbf{n}'' основания S'' . Эта проекция равна внутреннему произведению $\mathbf{n}'' \oint \mathbf{n} \varphi dS$ или (ввиду постоянства \mathbf{n}'') $\oint (\mathbf{n}'' \mathbf{n}) \varphi dS$. Так как нормаль \mathbf{v} к боковой поверхности ци-

цилиндра Σ перпендикулярна к \mathbf{n}'' , то предыдущий интеграл сводится к сумме частей, соответствующим обоим основаниям, т. е. к разности

$$\int \varphi'' dS'' - \int \varphi' dS = (\varphi'' - \varphi') S'',$$

ибо $\mathbf{n}'' \nu = 0$ и $\mathbf{n}'' \mathbf{n}' = -1$ (\mathbf{n}' — внешняя нормаль к S'). Разделяя его на объем цилиндра $V = S' h$, в пределе $S' \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ получаем, согласно определению вектора $\text{grad } \varphi$, проекцию последнего на \mathbf{n}'' , т. е.

$$\mathbf{n}'' \text{grad } \varphi = \text{grad}_{\mathbf{n}''} \varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'' - \varphi'}{h} = \frac{d\varphi}{dh}. \quad (13)$$

Таким образом, проекция вектора $\text{grad } \varphi$ на любое направление равна быстрой его возрастания в этом направлении. Отсюда ясно, что вектор $\text{grad } \varphi$ направлен в сторону наиболее быстрого возрастания φ , следовательно, перпендикулярен к поверхности $\varphi = \text{const}$ и численно равен быстрой этого возрастания. Это соотношение вполне разъясняет геометрический смысл градиента.

Пользуясь той же поверхностью S , как и в предыдущем случае, в применении к (11b), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'' \text{rot } \mathbf{F} &= \frac{1}{S'' h} \oint \mathbf{n}'' (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) dS = \frac{1}{S'' h} \oint \mathbf{F} (\mathbf{n}'' \times \mathbf{n}) dS = \\ &= \frac{1}{S'' h} \oint \mathbf{F} (\mathbf{n} \times \nu) d\Sigma, \end{aligned}$$

ибо на основаниях цилиндра внешнее произведение $\mathbf{n}'' \times \mathbf{n}$ исчезает, а на боковой поверхности Σ обращается в единичный „касательный вектор“ τ , направленный по касательной к контуру σ , ограничивающему основания в сторону, „соответствующую“ \mathbf{n}'' (в смысле „правила винта“). Представляя элемент боковой поверхности $d\Sigma$ в виде произведения $h d\sigma$, получаем

$$\frac{1}{S'' h} \oint \mathbf{F} (\mathbf{n} \times \nu) d\Sigma = \frac{1}{S''} \oint \mathbf{F} \tau d\sigma,$$

и, следовательно,

$$\text{rot}_{\mathbf{n}''} \mathbf{F} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{S''} \oint \mathbf{F} \tau d\sigma. \quad (14)$$

Эту формулу можно рассматривать как новое определение вектора $\text{rot } \mathbf{F}$ через его проекции на различные направления. Что касается „внутренней“ производной, то специализация поверхности S не дает существенного упрощения общего ее определения.

Интеграл, стоящий в правой части, называется вообще крив-

во линейным интегралом вектора \mathbf{F} , в частности для замкнутой кривой (круг на знаке интеграла!) он называется циркуляцией этого вектора. Эта циркуляция только тогда отлична от нуля, когда линии, представляющие векторное поле \mathbf{F} , являются замкнутыми или винтообразными кривыми, так как в этом случае касательные проекции \mathbf{F} сохраняют один и тот же знак во всех точках замкнутой кривой. Это получается, например, в том случае, если \mathbf{F} обозначает скорость различных частиц вращающегося твердого тела или вращающейся жидкой массы. Те точки, в которых $\text{rot } \mathbf{F}$ отличен от нуля, называются вихревыми точками векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Эти вихревые точки образуют в общем непрерывные линии, так называемые вихревые линии (или вихревые нити), которые в случае жидкостей могут быть рассматриваемы как искривленные оси вращения.

При помощи формулы (14) можно легко показать, что при этом вектор $\text{rot } \mathbf{F}$ имеет одинаковое направление с осью вращения и по своей длине равен удвоенной скорости вращения. Этим объясняется название „вращение“.

Выражение (11a) для расхождения не может быть упрощено при помощи специализации поверхности S в виду скалярного характера этой дифференциальной величины. Но ее геометрический смысл становится непосредственно ясным, если для наглядности представить векторное поле \mathbf{F} соответственными „ \mathbf{F} -линиями“. Тогда произведение $F_n dS$ можно трактовать как число тех линий, которые проходят через элемент поверхности, и притом наружу, если F_n положительно, и внутрь, если F_n отрицательно. Интеграл $\oint F_n dS$, который, соответственно этой картине, называется „поток“ \mathbf{F} сквозь S ,¹ равен таким образом избытку числа линий, выходящих из S , над числом линий, входящих в S (само собой понятно, что этот избыток может оказаться как положительным, так и отрицательным). Если расхождение \mathbf{F} внутри S исчезает, то по (11a) полный поток вектора \mathbf{F} сквозь S также должен равняться нулю. Это означает, что линии, представляющие векторное поле \mathbf{F} , проходят сквозь область, ограниченную S , не начинаясь в ней и не оканчиваясь. Но если в некоторой точке или области $\text{div } \mathbf{F}$ отличен от нуля, то и поток \mathbf{F} сквозь поверхность, охватывающую эту точку, также должен быть отличным от нуля. Если, в частности, $\text{div } \mathbf{F} > 0$, то мы имеем внутри S „источник“ \mathbf{F} -линий, т. е. такое место, где они зарождаются и расходятся в различных направлениях. Этим обусловлено название „расхождение“. Отрицательным значениям $\text{div } \mathbf{F}$ соответствует „сток“ („отрицательный источник“) \mathbf{F} -линий, к которому они сходятся со всех

¹ Также и в том случае, если S не замкнута; при этом, как обычно, нормали \mathbf{n} следует проводить в том направлении, которое соответствует направлению обхода на ограничивающем контуре σ в смысле правила правого винта.

сторон (на этом основании величина — $\text{div } \mathbf{F}$ часто называется „схождением“).

§ 10. Мы должны еще упомянуть дифференциальную операцию, касающуюся векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и имеющую тесную аналогию с градиентом скалярной функции. Но эта операция может быть определена только при задании второго вектора или векторной функции \mathbf{A} , которая сама не дифференцируется, но определяет то направление в каждой точке, в каком производится дифференцирование рассматриваемой функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. При этом мы будем исходить из формулы (13) предыдущего параграфа; заменяя в ней φ на \mathbf{F} , получим операцию, которую будем обозначать символом $(\mathbf{n}'' \text{ grad})$

$$(\mathbf{n}'' \text{ grad}) \mathbf{F} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}'' - \mathbf{F}'}{h} = \frac{d\mathbf{F}}{dh}. \quad (15)$$

Обращая рассуждения, при помощи которых мы пришли от формулы (11) к (13), мы получим следующее определение новой операции, соответствующее формулам (11), (11a) и (11b),

$$(\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A}\mathbf{n}) \mathbf{F} dS,$$

причем \mathbf{A} , так же как и \mathbf{n}'' , сначала обозначает постоянный единичный вектор. Но мы можем тотчас же освободиться от этого ограничения, если \mathbf{A} под знаком интеграла будем определять как значение этого вектора в соответствующей точке (к которой должна стянуться поверхность S), т. е. вообще положим:

$$(\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A}\mathbf{n}) \mathbf{F} dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}} \quad (15a)$$

Вектор $(\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{F}$ таким образом равен частной производной от \mathbf{F} в направлении \mathbf{A} , умноженной на длину \mathbf{A} .¹ Если мы рассмотрим, например, две бесконечно близкие точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 и положим $\mathbf{A} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}$, то вектор $(d\mathbf{r} \text{ grad}) \mathbf{F}$ обозначает нечто иное, как векторную разность $d\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$, так же как $d\mathbf{r} \text{ grad } \varphi = d\varphi = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)$.

¹ В связи с (15a) можно определить две других операции того же самого типа, именно:

$$(\mathbf{A} \times \text{grad}) \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \mathbf{F} dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}}$$

$$(\mathbf{A} \times \text{grad}) \times \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{F} dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}}$$

Однако эти операции для практических применений векторного исчисления несущественны и к тому же они могут быть сведены к прежним, а именно, имеют место следующие тождества:

$$(\mathbf{A} \times \text{grad}) \mathbf{F} = (\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{F}) \text{ и } (\mathbf{A} \times \text{grad}) \times \mathbf{F} = \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{F} \mp (\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{F} - \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{F}.$$

Следует отметить, что скалярное произведение $\mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi$ может быть сведено к составной операции, определяемой формулой (15а), если в ней заменить векторную функцию \mathbf{F} скаляром φ . А именно

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \operatorname{grad}) \varphi &= \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \varphi dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}} = \\ &= \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint \mathbf{A} (\mathbf{n} \varphi) dS \right\}_{\mathbf{A}=\text{const}} = \\ &= \left(\mathbf{A} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \varphi dS \right) = \mathbf{A} \operatorname{grad} \varphi. \end{aligned}$$

Если же в (15а) считать постоянным не \mathbf{A} , а \mathbf{F} , то получится

$$\lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} dS \right\}_{\mathbf{F}=\text{const}} = \mathbf{F} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \mathbf{A} dS = \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Теперь легко доказать, что в общем случае, когда обе величины \mathbf{A} и \mathbf{F} рассматриваются как переменные, интеграл $\frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} dS$ в пределе равен сумме обоих вышеприведенных выражений.

Действительно, полагая $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \Delta \mathbf{A}$ и $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \Delta \mathbf{F}$, где \mathbf{A}_0 и \mathbf{F}_0 — значения \mathbf{A} и \mathbf{F} в рассматриваемой точке, получим

$$(\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} = (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 + (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \Delta \mathbf{F} + (\Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 + (\Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \Delta \mathbf{F}.$$

Далее

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 dS = 0;$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \Delta \mathbf{F} dS = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \mathbf{F} dS = (\mathbf{A} \operatorname{grad}) \mathbf{F};$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\Delta \mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 dS = \lim_{S \rightarrow 0} \oint (\mathbf{A}_0 \mathbf{n}) \mathbf{F}_0 dS = \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

и так как $\Delta \mathbf{F}$ и $\Delta \mathbf{A}$ — бесконечно малые величины (ввиду предполагаемой непрерывности функций \mathbf{F} и \mathbf{A})

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\Delta \mathbf{A} \mathbf{n}) \Delta \mathbf{F} dS = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{F} dS = (\mathbf{A} \operatorname{grad}) \mathbf{F} + \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (15b)$$

§ 11 Разделим объем V , ограниченный (не бесконечно малую) поверхностью S , на две части V_1 и V_2 и обозначим замкнутые поверхности, которые ограничивают эти объемы, через S_1 и S_2 .

На тех частях этих поверхностей, которые совпадают с S , внешние нормали \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 совпадают с \mathbf{n} ; что же касается внешних нормалей к перегородке $S_{1,2}$, отделяющей V_1 от V_2 , то они, очевидно, имеют противоположные направления, так что в этом случае можно положить $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Отсюда следует, что сумма интегралов

$$\oint \mathbf{n}_1 \varphi dS \text{ и } \oint \mathbf{n}_2 \varphi dS$$

равна исходному интегралу $\oint \mathbf{n} \varphi dS$ независимо от формы пограничной поверхности S_{12} (ибо интегралы $\oint \mathbf{n}_1 \varphi dS_{1,2}$ и $\oint \mathbf{n}_2 \varphi dS_{1,2}$ взаимно уничтожаются). Подразделяя аналогичным образом объемы V_1 и V_2 и продолжая подобное подразделение достаточно далеко, мы можем разбить объем V на множество сколь угодно малых элементов V_i , ограниченных сколь угодно малыми замкнутыми поверхностями S_i .

При этом сумма интегралов $\sum_i \oint \mathbf{n}_i \varphi dS_i$ для всей совокупности элементов V_i , должна оставаться равной интегралу $\oint \mathbf{n} \varphi dS$.¹

¹ Основываясь на этом положении, легко доказать справедливость высказанного нами в § 8 утверждения относительно независимости $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \varphi dS$ от формы поверхности S . Представим себе, что элементы V_i (S_i) имеют одинаковую форму и объем, за исключением пограничных элементов, относительное число которых и их доля в интеграле $\int \mathbf{n} \varphi dS$ с возрастанием числа N во всех элементах стремится к нулю. Если сама поверхность S бесконечно мала, а число N бесконечно велико, то на основании предполагаемой непрерывности функции φ все частичные интегралы $\oint \mathbf{n}_i \varphi_i dS_i$ с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка можно считать равными друг другу и, следовательно, положить

$$\oint \mathbf{n}_i \varphi_i dS_i \cong \frac{1}{N} \oint \mathbf{n} \varphi dS.$$

Так как в том же приближении $V_i = \frac{V}{N}$, то отсюда следует, что предельное значение $\frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \varphi dS$ для исчезающе малой поверхности S любой формы должно совпадать с предельным значением $\frac{1}{V_i} \oint \mathbf{n}_i \varphi_i dS_i$ для бесконечно малой поверхности, определенной, например кубической, формы, т. е., следовательно, не зависит от формы S .

Переходя к пределу $S_i \rightarrow 0$ и помня, что $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \oint \mathbf{n}_i \varphi dS_i = \text{grad } \varphi$, получаем

$$\oint \mathbf{n} \varphi dS = \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i \text{grad } \varphi_i V_i$$

или, заменяя сумму объемным интегралом,

$$\oint \mathbf{n} \varphi dS = \int \text{grad } \varphi dV. \quad (16)$$

Аналогичным образом из (8), (9) и (15b) получаются формулы преобразования

$$\oint \mathbf{F}_n dS = \oint \mathbf{n} \mathbf{F} dS = \int \text{div } \mathbf{F} dV, \quad (16a)$$

$$\oint \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS = \int \text{rot } \mathbf{F} dV, \quad (16b)$$

$$\oint (\mathbf{n} \mathbf{A}) \mathbf{F} dS = \int (\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{F} dV + \int \mathbf{F} \text{ div } \mathbf{A} dV. \quad (16c)$$

§ 12. Точно так же, разлагая произвольный замкнутый контур σ на бесконечно малые контуры σ_i , ограничивающие элементы S_i произвольной незамкнутой поверхности S , стягиваемой σ , и принимая во внимание, что сумма интегралов $\oint \tau_i \mathbf{F} d\sigma_i$ для всех этих контуров остается равной $\oint \tau \mathbf{F} d\sigma$ (ибо касательные вектора τ_i на каждой пограничной линии двух элементов поверхности S_i направлены в противоположные стороны), в пределе $S_i \rightarrow 0$ и $\sigma_i \rightarrow 0$ получаем на основании (14)

$$\oint \tau \mathbf{F} d\sigma = \sum_i \oint \tau_i \mathbf{F} d\sigma_i = \sum_i \mathbf{n}_i \text{rot } \mathbf{F}_i S_i,$$

т. е.

$$\oint \mathbf{F}_\tau d\sigma = \int \text{rot}_n \mathbf{F} dS, \quad (17)$$

где $\text{rot}_n \mathbf{F} = \mathbf{n} \text{rot } \mathbf{F}$, а \mathbf{n} — нормаль к dS , проведенная в положительную сторону (по отношению к касательному вектору τ , определяющему направление обхода вдоль σ).

Тождество (16a) называется обычно формулой Гаусса, а (17) — формулой Стокса, по имени установивших их ученых. Впрочем последние исходили при этом из координатного представления векторов и дифференциальных операций над функциями от векторного аргумента.

К формуле (17) можно добавить аналогичную формулу, получающуюся при замене векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ скалярной

функцией $\varphi(r)$. При этом, как и раньше, имеет место тождество

$$\oint \tau \varphi d\sigma = \sum_i \oint \tau_i \varphi_i d\sigma_i.$$

Преобразование криволинейного интеграла $\oint \tau_i \varphi_i d\sigma_i$, взятого вдоль бесконечно малой кривой σ_i , проще всего произвести следующим образом. Представим себе σ_i как образующую цилиндрической поверхности, которой мы уже пользовались раньше при выводе формулы (13), и составим вместо внутреннего произведения $\mathbf{n}'' \oint \mathbf{n} \varphi dS$ внешнее произведение $\mathbf{n}'' \times \oint \mathbf{n} \varphi dS$ (опуская пока индекс i). При этом так же, как при выводе формулы (14), мы получим

$$\mathbf{n}'' \times \oint \mathbf{n} \varphi dS = \oint \mathbf{n}'' \times \mathbf{n} \varphi dS = \int \mathbf{n}'' \times \nu \varphi d\Sigma = h \oint \tau \varphi d\tau,$$

и следовательно, по (11)

$$\mathbf{n}'' \times \text{grad } \varphi dS'' = \oint \tau \varphi d\tau,$$

или, вводя опять индекс i ,

$$\oint \tau_i \varphi_i d\sigma_i = \mathbf{n}_i \times \text{grad } \varphi_i S_i$$

Суммируя и переходя к пределу ($S_i \rightarrow 0$), получаем таким образом следующую формулу:

$$\oint \tau \varphi d\sigma = \int \mathbf{n} \times \text{grad } \varphi dS. \quad (17a)$$

§ 13. Применяя рассмотренные выше дифференциальные операции к функциям

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi; \quad \nabla \mathbf{F} = \text{div } \mathbf{F}; \quad \nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F},$$

которые соответствуют обычным производным первого порядка, мы получаем пять следующих производных второго порядка:

$$(\nabla \nabla) \varphi = \text{div grad } \varphi; \quad \nabla (\nabla \mathbf{F}) = \text{grad div } \mathbf{F};$$

$$\nabla \times \nabla \varphi = \text{rot grad } \varphi, \quad \nabla (\nabla \times \mathbf{F}) = \text{div rot } \mathbf{F}, \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \text{rot rot } \mathbf{F}.$$

Если бы дифференциальный оператор ∇ был не символическим, а настоящим вектором, то двойные „произведения“ $\nabla \times \nabla \varphi = (\nabla \times \nabla) \varphi$ и $\nabla (\nabla \times \mathbf{F})$ должны были бы исчезать тождественно (в отношении φ и \mathbf{F}), т. е. должны были бы существовать следующие тождества:

$$\text{rot grad } \varphi = 0 \quad (18)$$

$$\text{div rot } \mathbf{F} = 0. \quad (18a)$$

Легко показать, с помощью полученных выше формул преобразования, что это так и есть на самом деле.

Представим себе поверхность S в (17) и (17а) как замкнутую. Тогда ограничивающий контур σ стягивается в точку и соответствующий криволинейный интеграл исчезает.

Таким образом, получаются тождества

$$\oint \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{F} dS = 0; \quad \oint \mathbf{n} \times \operatorname{grad} \varphi dS = 0,$$

или, после преобразования по формулам (16а) и (16б),

$$\int \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} dV = 0; \quad \int \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi dV = 0.$$

Так как объем V , ограниченный S , совершенно произволен, то подинтегральное выражение в этом объемном интеграле должно обращаться в нуль тождественно, откуда и получаются формулы (18) и (18а).

Операцию $\nabla \nabla \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ обычно пишут в виде $\nabla^2 \varphi$, где $\nabla^2 = \nabla \nabla$ называется оператором Лапласа (его часто обозначают также символом Δ).

По определению div очевидно можно написать

$$\nabla^2 \varphi = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \operatorname{grad} \varphi dS$$

или, так как $\mathbf{n} \operatorname{grad} \varphi = (\mathbf{n} \operatorname{grad}) \varphi$,

$$\nabla^2 \varphi = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{n} \operatorname{grad}) \varphi dS. \quad (19)$$

Эта формула показывает, что операция ∇^2 может быть применена не только к скалярным, но также и к векторным функциям. А именно, заменяя в (19) φ на \mathbf{F} , получим

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{n} \operatorname{grad}) \mathbf{F} dS. \quad (19a)$$

Если вместо символа grad снова ввести символический вектор ∇ и рассматривать его как обычный множитель (который однако всегда должен стоять перед дифференцируемой функцией \mathbf{F}), то согласно алгебраическому тождеству (5), если положить в нем $\mathbf{A} = \mathbf{n}$, $\mathbf{B} = \nabla$ (или наоборот) и $\mathbf{C} = \mathbf{F}$, имеем

$$(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{F} = \mathbf{n} (\nabla \mathbf{F}) - \nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) = \nabla (\mathbf{n} \mathbf{F}) - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$

Так как

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} (\nabla \mathbf{F}) dS = \operatorname{grad} (\nabla \mathbf{F}) = \nabla \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \mathbf{F} dS$$

и

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{F}) dS = \operatorname{rot} \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS,$$

то из вышеприведенных уравнений получаем

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \text{rot rot } \mathbf{F} \quad (19b)$$

В следующем параграфе это тождество будет строго доказано посредством координатного представления векторных дифференциальных операций.

§ 14. Такое представление проще всего получается следующим образом.

Рассмотрим функцию $\varphi(\mathbf{r})$ как обычную скалярную функцию трех компонент x_1, x_2, x_3 векторного аргумента \mathbf{r} . При этом по (13) получается, если заменить вектор \mathbf{n} каким-либо одним из единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, определяющих координатные оси,

$$\mathbf{e}_i \text{ grad } \varphi = \text{grad}_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (i = 1, 2, 3). \quad (20)$$

Таким образом компоненты вектора $\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$ равны частным производным функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ по соответствующим координатам.

Отсюда следует, что оператор ∇ может быть определен совершенно независимо от свойств функции φ как (символический) вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$. Будучи написан в виде

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (20a)$$

он называется оператором Гамильтона и может быть применяем как к скалярным, так и к векторным функциям, если векторный аргумент \mathbf{r} этих функций заменить тремя скалярными аргументами x_1, x_2, x_3 . Таким образом получаются следующие выражения для $\text{div } \mathbf{F}$, $\text{rot } \mathbf{F}$ и $(\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{F}$:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} F_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} F_3 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \\ &= \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (21a)$$

т. е.

$$\text{rot}_1 \mathbf{F} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}; \quad \text{rot}_2 \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}; \quad \text{rot}_3 \mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \quad (21b)$$

и

$$(\mathbf{A} \text{ grad } \mathbf{F})_i = \mathbf{A} \text{ grad } F_i = A_1 \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial F_i}{\partial x_3} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (21c)$$

Эти формулы можно вывести также непосредственно из соответственных определений (11a), (11b) [или (14) и (15)], выбирая в качестве S поверхность бесконечно малого прямоугольного

параллелепипеда, ребра которого параллельны координатным осям. В случае $\operatorname{div} \mathbf{F}$, например, получаем, обозначая ребра параллелепипеда через Δx_i , а перпендикулярные к ним поверхности грани через S_i' , S_i'' ($i = 1, 2, 3$) (причем S_i' относится к точке x_i , а S_i'' — к точке $x_i + \Delta x_i$):

$$\oint \mathbf{n} \mathbf{F} dS = \sum_{i=1}^3 \left\{ \int (\mathbf{n}' \mathbf{F})_i \cdot dS_i' + \int (\mathbf{n}'' \mathbf{F}'')_i dS_i'' \right\}$$

или, так как $\mathbf{n}_i'' = \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{n}_i' = -\mathbf{e}_i$, т. е. $(\mathbf{n}'' \mathbf{F}'')_i = +F_i''$ и $(\mathbf{n}' \mathbf{F}')_i = -F_i'$

$$\oint \mathbf{n} \mathbf{F} dS = \sum_i \int (F_i'' - F_i') dS_i = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \Delta x_i S_i = \left(\sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) V,$$

где $V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ обозначает объем параллелепипеда.

Само собой понятно, что эти уравнения выполняются лишь приближенно, с точностью до величин того же порядка, как и произведения $V \Delta x_i$. Но если перейти к пределу $\Delta x_i \rightarrow 0$, то получим совершенно точное равенство

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \mathbf{F} dS = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i},$$

которое эквивалентно (21).

При помощи формул (20) и (21) получаем

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi. \quad (22)$$

Таким образом Лапласов оператор ∇^2 можно определить как квадрат оператора Гамильтона (18а):

$$\nabla^2 = (\nabla \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (22a)$$

Теперь легко убедиться, что то же самое выражение для ∇^2 получается на основании уравнения (19b). А именно, если мы составим проекцию правой части (19b) на какую-нибудь, например, первую ось (X_1), то получим, согласно (20), (21) и (21b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) = \\ = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2}, \end{aligned}$$

а это есть не что иное, как первая компонента вектора $\nabla^2 \mathbf{F}$, если при этом ∇^2 трактовать как скалярный множитель. Следует заметить, что проекция этого вектора на какое-нибудь направление \mathbf{n} равна $\operatorname{div} \operatorname{grad} F_n$, т. е.

$$|\nabla^2 \mathbf{F}|_n = \nabla^2 F_n \quad (22b)$$

§ 15. После того как мы в предыдущих параграфах определили и разъяснили дифференциальные операции векторного исчисления, мы должны как и в обычном дифференциальном исчислении, установить правила, которым подчиняются эти операции в применении к сумме, произведению и составным функциям.

„Производная“ по скалярному или векторному аргументу геометрической суммы нескольких векторов равна (так же как и в случае обыкновенного дифференцирования скалярных функций) сумме производных отдельных слагаемых. Далее нетрудно видеть, что в случае произведения скалярной функции $\varphi(t)$ на векторную $\mathbf{A}(t)$ или произведения двух различных векторных функций, имеют место формулы

$$\frac{d}{dt}(\varphi \mathbf{A}) = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{A} + \varphi \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (23a)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \quad (23b)$$

Так, например,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}) - \mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \times \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t} \Delta t \right\} = \\ &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \end{aligned}$$

Таким образом, производная по скалярному аргументу от произведения двух сомножителей равна сумме производных, соответствующих изменению каждого из сомножителей в отдельности в предположении постоянства другого.

Это правило легко распространяется на производные от двойных и более сложных произведений и притом, как по скалярному, так и по векторному аргументу.

Это утверждение для каждого типа дифференцирования можно доказать таким же образом, как это было сделано в § 10 для двух различных операций, входящих в выражение

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A}_n) \mathbf{F} dS.$$

В связи с координатным представлением векторных дифференциальных операций, его можно также рассматривать как непосредственное следствие соответствующего правила для скалярных аргументов.

В простейшем случае, ограничиваясь двумя сомножителями, мы должны различать следующие четыре типа произведений:

$$\varphi\psi, \varphi\mathbf{F}, \mathbf{E}\mathbf{F}, \mathbf{E}\times\mathbf{F},$$

где $\varphi, \psi, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ функции радиуса-вектора \mathbf{r} (или координат x_1, x_2, x_3), и соответственно этому шесть типов производных;

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi\psi) &= \text{grad}(\varphi\psi); \quad \nabla(\varphi\mathbf{F}) = \text{div}\varphi\mathbf{F}; \quad \nabla\times(\varphi\mathbf{F}) = \text{rot}\varphi\mathbf{F}; \\ \nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{F}) &= \text{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{F}); \quad \nabla\times(\mathbf{E}\times\mathbf{F}) = \text{rot}(\mathbf{E}\times\mathbf{F}) \quad \text{и} \quad \nabla(\mathbf{E}\mathbf{F}) = \text{grad}(\mathbf{E}\mathbf{F}). \end{aligned}$$

Считая последовательно один из сомножителей переменным (подлежащим дифференцированию), а другой постоянным, имеем

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi\text{grad}\psi + \psi\text{grad}\varphi, \quad (24)$$

далее

$$\nabla(\varphi\mathbf{F}) = \varphi\nabla\mathbf{F} + \nabla\varphi\mathbf{F}; \quad \nabla\times(\varphi\mathbf{F}) = \varphi(\nabla\times\mathbf{F}) + (\nabla\varphi)\times\mathbf{F},$$

т. е.

$$\text{div}\varphi\mathbf{F} = \varphi\text{div}\mathbf{F} + \text{grad}\varphi\mathbf{F}, \quad (24a)$$

$$\text{rot}(\varphi\mathbf{F}) = \varphi\text{rot}\mathbf{F} + \text{grad}\varphi\times\mathbf{F}. \quad (24b)$$

В последней формуле последовательность двух множителей во втором члене правой части может сначала вызвать сомнение. В этом и других аналогичных случаях для определения правильной последовательности необходимо обратиться к первоначальному определению соответствующей операции. Если \mathbf{F} считать постоянным, то на основании (11b) получим

$$\begin{aligned} \text{rot}(\varphi\mathbf{F}) &= \lim_{S\rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n}\times(\varphi\mathbf{F})dS = \lim_{S\rightarrow 0} \left[\frac{1}{V} \oint \varphi dS \right] \times \mathbf{F} = \\ &= \text{grad}\varphi\times\mathbf{F}, \end{aligned}$$

что согласуется с (24b).

Для вычисления производных от произведения двух векторных множителей, нужно преобразовать соответствующие выражения с помощью тождеств (4) и (5) таким образом, чтобы символический вектор ∇ стоял непосредственно перед одним из дифференцируемых сомножителей, а затем уже складывать результаты.

Так, например, рассматривая ∇ как обыкновенный вектор, имеем по формуле (4)

$$\left\{ \nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{F}) \right\}_{\mathbf{F}=\text{const.}} = \mathbf{F}(\nabla\times\mathbf{E}); \quad \left\{ \nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{F}) \right\}_{\mathbf{E}=\text{const.}} = -\mathbf{E}(\nabla\times\mathbf{F})$$

Первое из этих выражений соответствует постоянству вектора \mathbf{F} (который извлекается из-под знака производной), а вторая — постоянству \mathbf{E} . В общем случае производная $\nabla(\mathbf{E}\times\mathbf{F})$ равна следовательно сумме обоих выражений. Таким образом получаем следующую формулу

$$\text{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{F}) = \mathbf{F}\text{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\text{rot}\mathbf{F}. \quad (25)$$

С помощью тождества (5), если положить $\mathbf{A} = \nabla$, $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{C} = \mathbf{F}$, получается

$$\left\{ \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{F}) \right\}_{\mathbf{F}=\text{const}} = (\mathbf{F} \nabla) \mathbf{E} - \mathbf{F} (\nabla \mathbf{E}),$$

$$\left\{ \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{F}) \right\}_{\mathbf{E}=\text{const}} = \mathbf{E} (\Delta \mathbf{F}) - (\mathbf{E} \Delta) \mathbf{F},$$

следовательно

$$\text{rot} (\mathbf{E} \times \mathbf{F}) = (\mathbf{F} \text{grad}) \mathbf{E} - (\mathbf{E} \text{grad}) \mathbf{F} + \mathbf{E} \text{div} \mathbf{F} - \mathbf{F} \text{div} \mathbf{E}. \quad (26)$$

Таким же самым образом, при $\mathbf{A} = \mathbf{F}$, $\mathbf{B} = \nabla$, $\mathbf{C} = \mathbf{E}$ или $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \nabla$, $\mathbf{C} = \mathbf{F}$:

$$\left\{ \nabla (\mathbf{E} \mathbf{F}) \right\}_{\mathbf{F}=\text{const}} = (\mathbf{F} \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{E}),$$

$$\left\{ \nabla (\mathbf{E} \mathbf{F}) \right\}_{\mathbf{E}=\text{const}} = (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{F} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{F}),$$

т. е.

$$\text{grad} (\mathbf{E} \mathbf{F}) = (\mathbf{E} \text{grad}) \mathbf{F} + (\mathbf{F} \text{grad}) \mathbf{E} + \mathbf{E} \times \text{rot} \mathbf{F} + \mathbf{F} \times \text{rot} \mathbf{E}. \quad (27)$$

Если функции φ или \mathbf{F} зависят непосредственно не от \mathbf{r} , а от некоторой скалярной функции этого аргумента $f(\mathbf{r})$, то их векторные производные grad , div , rot , $(\mathbf{A} \text{grad})$ по \mathbf{r} сводятся так же, как в обычном дифференциальном исчислении, к соответствующим (обычным, внутренним, внешним) произведениям векторной производной, т. е. градиента от f на производную от φ или \mathbf{F} по скалярному аргументу f . Таким образом, имеют место следующие формулы:

$$\nabla \varphi(f) = \nabla f \frac{d\varphi}{df}; \quad \nabla \mathbf{F}(f) = \nabla f \frac{d\mathbf{F}}{df},$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(f) = \nabla f \times \frac{d\mathbf{F}}{df}; \quad (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{F}(f) = (\mathbf{A} \nabla f) \frac{d\mathbf{F}}{df},$$

или в обычном обозначении

$$\text{grad} \varphi(f) = (\text{grad} f) \frac{d\varphi}{df}, \quad (28)$$

$$\text{div} \mathbf{F}(f) = (\text{grad} f) \frac{d\mathbf{F}}{df}, \quad (28a)$$

$$\text{rot} \mathbf{F}(f) = (\text{grad} f) \times \frac{d\mathbf{F}}{df}, \quad (28b)$$

$$(\mathbf{A} \text{grad}) \mathbf{F}(f) = (\mathbf{A} \text{grad} f) \frac{d\mathbf{F}}{df}. \quad (28c)$$

Для разъяснения этих правил дифференцирования выведем подробнее формулу (28b). Подставляя в формулу

$$\text{rot} \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS$$

функцию \mathbf{F} в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \left(\frac{d\mathbf{F}}{df} \right)_0 \Delta f = \mathbf{F}_0 + \left(\frac{d\mathbf{F}}{df} \right)_0 (f - f_0),$$

где индекс 0 относится к рассматриваемой точке, и имея в виду, что

$$\oint \mathbf{n} \times \mathbf{F}_0 dS = 0 \text{ и } \oint \mathbf{n} \times \left(\frac{d\mathbf{F}}{df} \right)_0 f_0 dS = 0,$$

получаем

$$\oint \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS = \oint \mathbf{n} \times \left(\frac{d\mathbf{F}}{df} \right)_0 f dS = \left[\oint \mathbf{n} f dS \right] \times \left(\frac{d\mathbf{F}}{df} \right)_0.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-}{V} \left[\oint \mathbf{n} f dS \right] \times \left(\frac{d\mathbf{F}}{df} \right)_0 = \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} f dS \right] \times \\ &\times \left(\frac{d\mathbf{F}}{df} \right)_0 = (\operatorname{grad} f) \times \frac{d\mathbf{F}}{df}. \end{aligned}$$

§ 16. Предыдущие формулы позволяют свести дифференцирование сколь угодно сложных скалярных или векторных функций от векторного аргумента (\mathbf{r}) к дифференцированию простейших функций этого рода. Таковыми являются прежде всего радиус-вектор \mathbf{r} , затем его численное значение r или квадрат $(\mathbf{r}\mathbf{r}) = r^2$, а также линейные функции $\mathbf{k}\mathbf{r}$ и $\mathbf{k} \times \mathbf{r}$, где \mathbf{k} — произвольный постоянный вектор. Различные производные этих функций могут быть вычислены путем комбинации уже полученных общих формул друг с другом; однако, можно проще прийти к цели, если воспользоваться геометрическим значением этих функций и соответствующих операций или же исходить из их координатного представления.

Так, например, легко видеть, что интеграл $\oint \mathbf{r} dS$ равен утроенному объему, ограниченному поверхностью S (ибо dS является основанием наклонного конуса с высотой \mathbf{r}), откуда следует, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{r} dS = 3,$$

т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 3. \quad (29)$$

Еще проще получается тот же самый результат при помощи координатного представления. А именно, так как $r_i = x_i$, то по (21) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3.$$

Таким же образом получается формула

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = 0. \quad (29a)$$

Далее, так как $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, то

$$\operatorname{grad} r^2 = 2\mathbf{r}, \quad (29b)$$

или, имея в виду, что по (28) $\operatorname{grad} r^2 = 2r \operatorname{grad} r$,

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (29c)$$

Таким образом, градиент \mathbf{r} равен единичному вектору одинакового направления с \mathbf{r} . Этот результат без всякого вычисления следует из определения (13).

Так же легко получаются формулы:

$$\operatorname{grad} (\mathbf{k}r) = (\mathbf{k} \operatorname{grad}) r = \mathbf{k}, \quad (30)$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = 0, \quad (30a)$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{k}, \quad (30b)$$

$$(\mathbf{A} \operatorname{grad}) (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{A}). \quad (30c)$$

Так, например, по (21a) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_1 (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathbf{k} \times \mathbf{r})_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} (\mathbf{k} \times \mathbf{r})_2 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} (k_1 x_2 - k_2 x_1) - \frac{\partial}{\partial x_3} (k_3 x_1 - k_1 x_3) = 2k_1. \end{aligned}$$

Или иным путем по (26) и (27)

$$\operatorname{rot} (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = -(\mathbf{k} \operatorname{grad}) r + \mathbf{k} \operatorname{div} r,$$

$$\operatorname{grad} (\mathbf{k}r) = (\mathbf{k} \operatorname{grad}) r + \mathbf{k} \operatorname{rot} r = (\mathbf{k} \operatorname{grad}) r,$$

так что достаточно одной из формул (30), чтобы при помощи (29) и (29a) вывести формулу (30b) и вторую в (30).

Чтобы разъяснить изложенные правила дифференцирования, рассмотрим еще некоторые более сложные функции.

1. $\varphi = r^n$. По (28) и (29c) мы получаем

$$\operatorname{grad} r^n = nr^{n-1} \operatorname{grad} r = nr^{n-2} \mathbf{r}, \quad (31)$$

где n — совершенно произвольное число.

2. $\mathbf{F} = r^n \mathbf{r}$. По (24) и (24a) имеем

$$\operatorname{div} r^n \mathbf{r} = nr^{n-2} (\mathbf{r}\mathbf{r}) + 3r^n,$$

т. е.

$$\operatorname{div} r^n \mathbf{r} = (n + 3)r^n. \quad (31a)$$

Далее, на основании (29a)

$$\operatorname{rot} r^n \mathbf{r} = 0. \quad (31b)$$

Это уравнение представляет частный случай тождества (18), ибо по (31)

$$r^n \mathbf{r} = \text{grad} \frac{r^{n+2}}{n+2}.$$

Заметим, что при $n=2$ эта формула должна быть заменена формулой

$$\frac{\mathbf{r}}{r^2} = \text{grad} \lg r.$$

3. $\mathbf{F} = (\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r}$. По (24) и (30)

$$\text{div} (\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r} = 3 \mathbf{k}\mathbf{r} + \mathbf{r}\mathbf{k} = 4 \mathbf{k}\mathbf{r},$$

$$\text{rot} (\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r} = 0.$$

4. $\mathbf{F} = (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}$. По (26)

$$\begin{aligned} \text{rot} [(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}] &= (\mathbf{r} \text{ grad}) (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) - [(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \text{ grad}] \mathbf{r} + \\ &+ (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \text{ div} \mathbf{r} - \mathbf{r} \text{ div} (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

и далее, согласно (30) — (30с),

$$\text{rot} [(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}] = \mathbf{k} \times \mathbf{r} - \mathbf{k} \times \mathbf{r} + 3 \mathbf{k} \times \mathbf{r} = 3 \mathbf{k} \times \mathbf{r}.$$

Само собой понятно, что мы приходим к тому же самому результату, если $(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}$, согласно (5), заменим выражением $\mathbf{r}(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \mathbf{k}r^2$.

С. Преобразование координат и тензоры

§ 17. Если мы перейдем от одной прямоугольной координатной системы (X_1, X_2, X_3) к другой (X'_1, X'_2, X'_3) , тоже прямоугольной и с тем же началом O , но с другим направлением осей, то мы получим для координат данной точки P , т. е. для компонент ее радиус-вектора $OP = \mathbf{r}$ новые значения, определяемые формулами:

$$x'_k = r e'_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

где e'_1, e'_2, e'_3 — новые „координатные векторы“, соответствующие новым осям.

Если система (X') является подобно (X) „правой“, или положительной (что мы и будем предполагать в дальнейшем), то ее можно трактовать как результат поворота исходной системы в новое положение.

Соотношение между „старыми“ и „новыми“ компонентами радиуса-вектора или какого-либо другого вектора \mathbf{A} , т. е. между величинами $A_i = (\mathbf{A}e_i)$ и $A'_i = (\mathbf{A}e'_i)$ определяются величинами

$$\cos (X_i, X'_i) = e_i e'_i = a_{ii} \quad (i, i' = 1, 2, 3), \quad (32)$$

которые можно рассматривать как новые компоненты старых координатных векторов или же как старые компоненты новых.

А именно, полагая

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i \mathbf{e}_i = \sum_{i'} A_{i'} \mathbf{e}_{i'},$$

получаем

$$A_{i'} = \mathbf{A} \mathbf{e}_{i'} = \left(\sum_i A_i \mathbf{e}_i \right) \mathbf{e}_{i'} = \sum_i A_i (e_i c_{i'}^i),$$

т. е.

$$A_{i'} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ii'} A_i, \quad (32a)$$

и точно так же

$$A_i = \sum_{i'=1}^3 \alpha_{ii'} A_{i'}. \quad (32b)$$

Принимая во внимание, что согласно формулам (32)

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_i \alpha_{ii'} \mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i = \sum_{i'} \alpha_{ii'} \mathbf{e}_{i'}, \quad (32c)$$

мы приходим к заключению, что при повороте исходной системы координат компоненты любого вектора преобразуются таким же образом, как и соответствующие координатные векторы („когрэдиентно“ или „ковариантно“).¹ Само собою разумеется, что такие величины, как внутреннее произведение двух векторов $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ или в частности квадрат какого-либо вектора $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, остаются при этом неизменными или „инвариантными“, так что

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2.$$

Подставляя сюда выражения новых компонент через старые, по формулам (32a), получаем тождество

$$\sum_i A_i'^2 = \sum_{i'} \left(\sum_k \alpha_{ki'} A_k \right) \left(\sum_l \alpha_{li'} A_l \right) = \sum_k \sum_l A_k A_l \left(\sum_{i'} \alpha_{ki} \alpha_{li'} \right),$$

откуда в виду произвольности величин A_i , вытекают соотношения

$$\sum_{i'} \alpha_{ki} \alpha_{li'} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=l \\ 0 & \text{„ } k \neq l \end{cases}, \quad (33)$$

которые, впрочем, непосредственно явствуют из известной формулы

$$\sum_{i'} \alpha_{ki'} \alpha_{li'} = \sum_{i'} \cos (X_k, X_{i'}) \cos (X_l, X_{i'}) = \cos (X_k, X_l)$$

¹ Это справедливо лишь в случае прямоугольных координатных систем. В общем случае косоугольных координатных осей, когда составляющие вектора отличны от соответствующих проекций, лишь эти последние преобразуются ковариантно; составляющие же преобразуются контравариантно, т. е. новые составляющие находятся со старыми в таком соотношении, в каком старые координатные векторы — с новыми.

в связи с прямоугольностью обеих координатных систем; в виду этого обстоятельства, соотношения называются „условиями ортогональности“. Таким же путем получаются соотношения обратные (33)

$$\sum_i \alpha_{ik} \alpha_{ki'} = \begin{cases} 1 & \text{при } k' = i' \\ 0 & \text{„ } k' \neq i' \end{cases} \quad (33a)$$

При этом соотношения (33) и (33a) не независимы, а получаются непосредственно одни из других.

§ 18. В противоположность обыкновенным скалярным величинам, не зависящим от ориентации системы координат, компоненты вектора, являющиеся также скалярными величинами, не обладают определенным значением, не зависящим от этой ориентации. Таким образом при координатном представлении векторов мы должны различать два рода скалярных величин: с одной стороны, инвариантные скаляры, а с другой, — вариантыные, т. е. скаляры, преобразующиеся конвариантно с координатными векторами. Введение таких вариантных скаляров, которые, будучи собраны тройками, представляют вектор, позволяет нам продвинуться еще дальше в этом направлении и построить такие величины, которые относятся к обычным векторам так же, как эти последние к обыкновенным (инвариантным) скалярам.

Образуем, например, произведения из компонент векторов A и B , взятых по-два. Тогда в старой координатной системе (X) мы получим девять величин

$$\begin{aligned} A_1 B_1, A_1 B_2, A_1 B_3 \\ A_2 B_1, A_2 B_2, A_2 B_3 \\ A_3 B_1, A_3 B_2, A_3 B_3. \end{aligned}$$

а в новой координатной системе (X')—девять совсем других величин

$$\begin{aligned} A_1' B_1', A_1' B_2', A_1' B_3' \\ A_2' B_1', A_2' B_2', A_2' B_3' \\ A_3' B_1', A_3' B_2', A_3' B_3', \end{aligned}$$

которые однако соответствуют старым так же, как новые компоненты какого-нибудь вектора—старым компонентам того же самого вектора.

На этом основании величины $A_i B_k$ и $A_i' B_k'$ можно рассматривать как (скалярные) компоненты одной и той же составной величины относительно координатных систем (X) и (X'). Эта составная величина, которой мы пока не приписываем никакого наглядного геометрического смысла, является простейшим представителем так называемых тензорных величин или, точнее, тензором во второго ранга.

В общем случае тензор второго ранга определяют как вели-

чину 2T , которая может быть представлена посредством $3^3 = 9$ дивариантных скаляров, т. е. девятью скалярными величинами, значения которых зависят от выбора (ориентации) системы координат таким же образом, как и значения попарных произведений моновариантных, т. е. представляющих обыкновенный вектор, скаляров. ¹ Эти дивариантные скаляры называются компонентами тензора.

Если они известны для одной координатной системы (X) и равны T_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$), то для любой другой системы координат они могут быть вычислены по формулам преобразования [см. (32a)]:

$$T'_{i'k'} = \sum_i \sum_k \alpha_{ii'} \alpha_{kk'} T_{ik}. \quad (34)$$

Наоборот, старые компоненты 2T выражаются через новые посредством формул

$$T_{ik} = \sum_{i'} \sum_{k'} \alpha_{ii'} \alpha_{kk'} T'_{i'k'}. \quad (34a)$$

которые соответствуют формулам (32b) (понятно, их можно также получить непосредственным решением уравнений (34) относительно T_{ik}).

Совершенно аналогичным образом определяются тензоры третьего, четвертого и высших рангов. Тензор n -го ранга nT в координатном представлении изображается, таким образом, при помощи 3^n компонент, которые являются вариантными скалярами n -ой кратности, т. е. скалярами, преобразующимися при преобразованиях системы координат (вращение старой системы координат) как произведения компонент n векторов. При этом векторные компоненты можно рассматривать как моновариантные скаляры и соответственно этому как тензоры первого ранга; обычные инвариантные скаляры примыкают к этому ряду как тензоры „нулевого“ ранга.

§ 19. Рассмотрим сначала только „обыкновенные“ тензоры, т. е. тензоры второго ранга. В виду линейного характера уравнений преобразования (34) или (34a), можно тотчас же убедиться, что суммы (или разности) соответственных компонент двух различных тензоров образуют новый тензор. Этот новый тензор, соответствующий геометрической сумме (или разности) двух векторов, называется суммой (или разностью) обоих исходных тензоров 2P и 2Q и обозначается как ${}^2P + {}^2Q$ (или ${}^2P - {}^2Q$). В общем случае равенство

$${}^2T = {}^2P + {}^2Q + {}^2R + \dots \quad (35)$$

означает, что

$$T_{ik} = P_{ik} + Q_{ik} + R_{ik} + \dots \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

¹ В частности координат точки.

Каждому тензору 2T с компонентами T_{ik} можно сопоставить другой $\tilde{{}^2T}$, компоненты которого определяются условием

$$\tilde{T}_{ik} = T_{i5}. \quad (36)$$

Это условие означает, что компоненты $\tilde{{}^2T}$ получаются из схемы компонент тензора 2T

$$\begin{array}{ccc} T_{11}, & T_{12}, & T_{13} \\ T_{21}, & T_{22}, & T_{23} \\ T_{31}, & T_{32}, & T_{33} \end{array}$$

путем перестановки строки и столбцов. Легко видеть, что условие (36) инвариантно относительно преобразования координат, т. е. что новые компоненты соответствующих тензоров, полученные из T_{ik} и \tilde{T}_{ik} по формуле (34), удовлетворяют тому же самому условию

$$\tilde{T}'_{ik} = T'_{k'v}.$$

Это показывает, что величины \tilde{T}_{ik} действительно образуют тензор. Этот тензор называется транспонированным относительно 2T . Отметим в особенности следующие частные случаи:

1. $T_{ki} = T_{ik}$. Тензор 2T называется симметрическим и тождественен с транспонированным тензором $\tilde{{}^2T}$. Число различных компонент 2T равно 6.

2. $T_{ki} = -T_{ik}$. Тензор 2T называется кососимметрическим или антисимметрическим и равен своему транспонированному, взятому с обратным знаком (${}^2T + \tilde{{}^2T} = 0$). Так как в этом случае диагональные компоненты 2T , т. е. T_{11}, T_{22}, T_{33} , исчезают, то количество независимых друг от друга скалярных величин, определяющих 2T , сводится к трем, именно

$$T_{21} = -T_{32} = T_1; \quad T_{31} = -T_{13} = T_2; \quad T_{12} = -T_{21} = T_3. \quad (36a)$$

Отсюда следует, что антисимметрический тензор 2T должен быть совершенно эквивалентен некоторому вектору с компонентами T_1, T_2, T_3 .

Действительно, легко доказать, что величины (36a) можно считать с одинаковым успехом как дивариантными, так и моновариантными скалярами. Антисимметрический тензор очевидно всегда может быть построен посредством двух различных векторов A и B , компоненты которых в старой координатной системе удовлетворяют уравнениям

$$A_i B_k - A_k B_i = T_{ik} = -T_{ki}.$$

Но левая часть этих формул представляет собою не что иное, как компоненты вектора $\pm A \times B$, т. е. внешнего произведения векторов A и B . Таким образом, скаляры T_1, T_2, T_3 действительно являются компонентами вектора

$$T = A \times B.$$

Асимметрический тензор ${}^2\mathbf{T}$, т. е. такой тензор, который ни симметричен ни антисимметричен, всегда можно разложить на симметрическую и на кососимметрическую часть.

Действительно, положим

$${}^2\mathbf{P} = \frac{1}{2} ({}^2\mathbf{T} + \tilde{{}^2\mathbf{T}}), \text{ т. е. } P_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}) = P_{ki}$$

$${}^2\mathbf{Q} = \frac{1}{2} ({}^2\mathbf{T} - \tilde{{}^2\mathbf{T}}), \text{ т. е. } Q_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}) = -Q_{ki}.$$

Тогда получим

$${}^2\mathbf{T} = {}^2\mathbf{P} + {}^2\mathbf{Q}.$$

Так как на основании вышесказанного антисимметрический тензор ${}^2\mathbf{Q}$ эквивалентен некоторому вектору \mathbf{Q} , то в общем случае тензор (2-го ранга) можно свести к симметрическому тензору и вектору.

§ 20. Значение сведения тензора 2-го ранга к симметрическому прежде всего выявляется при умножении тензоров на векторы или на другие тензоры.

Составим выражения, соответствующие внутреннему произведению двух векторов

$$\sum_k T_{ik} F_k \text{ и } \sum_i T_{ik} F_i,$$

где F_1, F_2, F_3 — компоненты некоторого вектора \mathbf{F} . Замечая, что эти выражения по типу своего преобразования („вариантности“) совершенно эквивалентны выражениям, получающимся из них при подстановке $T_{ik} = A_i B_k$, т. е.

$$\sum_k A_i B_k F_k = A_i \sum_k B_k F_k = A_i \mathbf{B}\mathbf{F}$$

$$\sum_i A_i B_k F_i = B_k \sum_i A_i F_i = B_k \mathbf{A}\mathbf{F},$$

закключаем, что сумма $\sum_k T_{ik} F_k$ должна быть равной i -ой компоненте одного вектора, а сумма $\sum_i T_{ik} F_i$ — k -ой компоненте другого вектора.

Первый из этих векторов мы обозначим через ${}^2\mathbf{T}\mathbf{F} = \mathbf{F}{}^2\mathbf{T}$ и назовем произведением ${}^2\mathbf{T}$ и \mathbf{F} . Вторым вектором можно представить при этом как произведение $\tilde{{}^2\mathbf{T}}$ и \mathbf{F} , так что

$$\left. \begin{aligned} ({}^2\mathbf{T}\mathbf{F})_i &= \sum_k T_{ik} F_k, \\ (\tilde{{}^2\mathbf{T}}\mathbf{F})_k &= \sum_i T_{ik} F_i \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Если тензор ${}^2\mathbf{T}$ симметрический, то оба произведения совпадают. Полагая в общем случае ${}^2\mathbf{T} = {}^2\mathbf{P} + {}^2\mathbf{Q}$, где ${}^2\mathbf{P}$ — симметрическая часть, равная $\frac{1}{2} ({}^2\mathbf{T} + {}^2\tilde{\mathbf{T}})$, а ${}^2\mathbf{Q}$ — антисимметрическая, и пользуясь обозначениями

$$Q_{33} = -Q_{32} = Q_{11}; \quad Q_{31} = -Q_{13} = Q_2; \quad Q_{12} = -Q_{21} = Q_3,$$

получаем

$$({}^2\mathbf{T}\mathbf{F})_i = ({}^2\mathbf{P}\mathbf{F})_i + (\mathbf{F} \times \mathbf{Q})_i,$$

т. е.

$$\mathbf{F}^2\mathbf{T} = \mathbf{F}^2\mathbf{P} + \mathbf{F} \times \mathbf{Q}, \quad (37a)$$

и точно так же

$$\mathbf{F}^2\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^2\mathbf{P} - \mathbf{F} \times \mathbf{Q}.$$

Умножение тензора на вектор сводится таким образом к соответствующему умножению симметрической части этого тензора и внешнему умножению вектора, эквивалентного антисимметрической части, на рассматриваемый вектор.¹

Аналогичное положение имеет место в случае умножения двух тензоров ${}^2\mathbf{T}$ и ${}^2\mathbf{S}$ друг на друга. А именно, из компонент ${}^2\mathbf{T}$ и ${}^2\mathbf{S}$ можно составить две инвариантных скалярных величины

$$\sum_i \sum_k T_{ik} S_{ki} \quad \text{и} \quad \sum_i \sum_k T_{ik} S_{ik}.$$

В инвариантности этих величин относительно преобразований координат можно тотчас же убедиться при помощи подстановки $T_{ik} = A_i B_k$, $S_{ik} = C_i D_k$, ибо при этом первая из величин сводится к $(\mathbf{AD})(\mathbf{BC})$, а вторая — к $(\mathbf{AC})(\mathbf{BD})$. Первую из этих инвариантных величин мы будем обозначать символом ${}^2\mathbf{T}^2\mathbf{S}$ и называть скалярным произведением тензоров ${}^2\mathbf{T}$ и ${}^2\mathbf{S}$.

Таким образом имеем

$$\sum_i \sum_k T_{ik} S_{ki} = {}^2\mathbf{T}^2\mathbf{S} = {}^2\mathbf{S}^2\mathbf{T} \quad (38)$$

и аналогично

$$\sum_i \sum_k T_{ik} S_{ik} = {}^2\mathbf{T}^2\tilde{\mathbf{S}} = {}^2\tilde{\mathbf{T}}^2\mathbf{S}.$$

Если хотя бы один из тензоров ${}^2\mathbf{T}$ и ${}^2\mathbf{S}$ симметрический, то последнее произведение должно совпасть с (38). В общем случае

¹ Наряду с приведенной операцией, соответствующей внутреннему умножению, можно ввести другую операцию, аналогичную внешнему умножению двух векторов, которая, однако, дает тензор (см. ниже).

(2T и 2S оба асимметричны), обозначая через 2M симметрическую, а через 2N антисимметрическую часть тензора 2S , получаем

$${}^2T {}^2S = {}^2P {}^2M - 2QN \quad (38a)$$

и

$${}^2T \tilde{{}^2S} = {}^2P {}^2M + 2QN. \quad (38b)$$

Из компонент двух тензоров составлением произведений и простым суммированием (по одной паре индексов) можно получить не инвариантные, а дивариантные скаляры, т. е. компоненты нового тензора того же самого (2-го) ранга. При этом нужно различать следующие четыре ряда произведений:

$$\sum_l T_{il} S_{ik}; \quad \sum_l T_{il} S_{kl}; \quad \sum_l T_{il} S_{ki}; \quad \sum_l T_{il} S_{lk},$$

которые мы будем трактовать как компоненты (i, k) тензорного произведения

$${}^2T \times {}^2S; \quad {}^2T \times \tilde{{}^2S}, \quad \tilde{{}^2T} \times \tilde{{}^2S}; \quad \tilde{{}^2T} \times {}^2S$$

Таким образом, имеем

$$({}^2T \times {}^2S)_{ik} = \sum_l T_{il} S_{lk}. \quad (39)$$

Из этого определения¹ следует, что умножение тензоров вообще не коммутативно; эта операция коммутативна лишь в том случае, когда оба сомножителя симметричны.

Разлагая эти множители на их симметрические и антисимметрические части, по (39) получаем

$${}^2T \times {}^2S = {}^2P \times {}^2M + {}^2P \times {}^2N + {}^2Q \times {}^2M + {}^2Q \times {}^2N.$$

При этом

$${}^2P \times {}^2M = {}^2M \times {}^2P.$$

Что касается трех других слагаемых, то их непосредственно свести к выражениям, соответствующим векторам Q и N , нельзя. Для компонент ${}^2Q \times {}^2N$ получаются следующие выражения:

$$({}^2Q \times {}^2N)_{11} = Q_{11} N_{11} + Q_{12} N_{21} + Q_{13} N_{31} = -Q_3 N_3 - Q_2 N_2 = \\ = -(QN) + Q_1 N_1,$$

$$({}^2Q \times {}^2N)_{12} = Q_{11} N_{12} + Q_{12} N_{22} + Q_{13} N_{32} = -Q_2 N_1,$$

т. е.

$$({}^2Q \times {}^2N)_{ik} = \begin{cases} Q_k N_i - (QN) & \text{для } k = i \\ Q_k N_i & \text{для } k \neq i \end{cases} \quad (39a)$$

¹ Которое соответствует обычному определению произведения определителей или матриц.

Таким образом, тензор ${}^2\mathbf{Q} \times {}^2\mathbf{N}$ образован из обоих векторов \mathbf{Q} и \mathbf{N} путем умножения их компонент.¹

Далее имеем:

$$\begin{aligned} ({}^2\mathbf{P}{}^2\mathbf{N})_{11} &= P_{11}N_{11} + P_{12}N_{21} + P_{13}N_{31} = -P_{12}N_3 + P_{13}N_2, \\ ({}^2\mathbf{P}{}^2\mathbf{N})_{12} &= P_{11}N_{12} + P_{12}N_{22} + P_{13}N_{32} = P_{11}N_3 - P_{13}N_1. \end{aligned}$$

Эти выражения мы назовем компонентами внешнего произведения вектора \mathbf{N} и тензора ${}^2\mathbf{P}$ и обозначим через

$$({}^2\mathbf{P} \times {}^2\mathbf{N})_{ik} = (\mathbf{N} \times {}^2\mathbf{P})_{ik} = -(\mathbf{P}_i \times \mathbf{N})_k.$$

При этом \mathbf{P}_i обозначает вектор с компонентами P_{i1}, P_{i2}, P_{i3} .

В заключение этого параграфа заметим, что умножение тензоров на векторы или на другие тензоры, как оно было определено выше, подчиняется распределительному закону, подобно внутреннему и внешнему умножению векторов.

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= {}^2\mathbf{T}\mathbf{A} + {}^2\mathbf{T}\mathbf{B}, \\ ({}^2\mathbf{S} + {}^2\mathbf{T})\mathbf{A} &= {}^2\mathbf{S}\mathbf{A} + {}^2\mathbf{T}\mathbf{A}. \end{aligned}$$

и т. д.

§ 21. Путем внутреннего умножения вектора (${}^2\mathbf{T}\mathbf{A}$) на другой вектор \mathbf{B} получается инвариантная скалярная величина, которая в общем случае асимметрического тензора

$${}^2\mathbf{T} = {}^2\mathbf{P} + {}^2\mathbf{Q},$$

согласно (37а), может быть написана следующим образом:

$$({}^2\mathbf{T}\mathbf{A})\mathbf{B} = ({}^2\mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{Q}(\mathbf{B} \times \mathbf{A}).$$

В дальнейшем мы всегда будем полагать $\mathbf{Q} = 0$, т. е. рассматривать только симметрические тензоры. Тогда произведение величин ${}^2\mathbf{T}$, \mathbf{A} и \mathbf{B} не зависит от последовательности множителей, благодаря чему оно может быть обозначено через ${}^2\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{B}$.

Полагая в частности $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{r}$, имеем

$$\left. \begin{aligned} {}^2\mathbf{T}\mathbf{r}\mathbf{r} &= T_{11}x_1^2 + T_{22}x_2^2 + T_{33}x_3^2 + 2T_{23}x_2x_3 + \\ &+ 2T_{31}x_3x_1 + 2T_{12}x_1x_2. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Таким образом, мы получили квадратичную форму относительно координат x_1, x_2, x_3 , причем компоненты тензора ${}^2\mathbf{T}$ играют роль коэффициентов.

¹ Если радиус-вектор некоторой точки заменить соответствующим антисимметрическим тензором ${}^2\mathbf{r}$ с компонентами $r_{23} = -r_{32} = x_1$ и т. д., то сумма

$${}^2\mathbf{M} = - \sum m ({}^2\mathbf{r} \times {}^2\mathbf{r}),$$

где m — масса частицы, распространенная на все частицы твердого тела, определяет момент инерции и этого тела относительно любой оси. Момент же инерции этого тела относительно оси с направлением единичного вектора \mathbf{n} , равен внутреннему произведению ${}^2\mathbf{M}\mathbf{n}$.

Если этот тензор считать постоянным, а вектор \mathbf{r} , т. е. координаты x_1, x_2, x_3 переменными, то уравнение

$${}^2\text{Trr} = \text{const} \quad (40a)$$

определяет центральную поверхность второго порядка, причем таким образом, который совершенно не зависит от ориентации координатной системы. Эту поверхность (эллипсоид, гиперболоид) можно поэтому трактовать как геометрическое представление рассматриваемого тензора, не связанное с координатными осями.

Совершенно аналогичное представление можно ввести также и для векторов, рассматривая их как тензоры первого ранга. Вместо того чтобы изображать вектор \mathbf{A} посредством ему пропорционального и одинаково направленного отрезка, можно с таким же успехом воспользоваться перпендикулярной к нему плоскостью, т. е. поверхностью первого порядка, определяемой уравнением

$$\mathbf{A}\mathbf{r} = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = \text{const.}$$

Если эту константу положить равной 1, то расстояние плоскости от начала координат будет равно

$$\frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} = \frac{1}{A}.$$

т. е. обратно пропорционально числовому значению „тензора 1-го ранга“, представляемого этой плоскостью. Аналогичное положение имеет место при геометрическом представлении (симметрического) тензора 2-го ранга согласно уравнению (40a). При этом „численное значение“ тензора может быть определено выражением

$$|{}^2\mathbf{T}| = \sqrt{{}^2\mathbf{T}^2\mathbf{T}}.$$

Как известно, соответствующим поворотом системы координат уравнение поверхности (40a) может быть преобразовано к „главным осям“ или „осям симметрии“ последней, т. е. написано в форме

$${}^2\text{Trr} = T'_{11}x_1'^2 + T'_{22}x_2'^2 + T'_{33}x_3'^2 = \text{const} = 1. \quad (40b)$$

Соответствующие координатные оси называются главными осями тензора, определяющего эту поверхность (или определяемого ею); они, следовательно, характеризуются тем, что компоненты T'_{ik} при $i \neq k$ обращаются в нуль.

Отметим, что подобное „преобразование к главным осям“ точно так же, как и вышеприведенная геометрическая интерпретация, для асимметрического тензора невозможны.

§ 22. Главные оси тензора могут быть охарактеризованы тем их свойством, что векторы ${}^2\text{Tr}$, имеющие вообще направление, отличное от \mathbf{r} , в направлении главных осей совпадают с \mathbf{r} .

Действительно, вектор ${}^2\text{Tr}$ равен градиенту скалярной величины $\frac{1}{2} {}^2\text{Tgr}$, откуда следует, что он имеет направление внешней нормали к поверхности (40 а) в соответствующей точке, определяемой \mathbf{r} .

Если ввести некоторый, покамест неопределенный, скаляр λ , то главные оси тензора ${}^2\text{T}$ могут быть определены векторным уравнением

$${}^2\text{Tr} = \lambda \mathbf{r}, \quad (41)$$

или эквивалентными тремя скалярными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} (T_{11} - \lambda) x_1 + T_{12} x_2 + T_{13} x_3 &= 0 \\ T_{21} x_1 + (T_{22} - \lambda) x_2 + T_{23} x_3 &= 0 \\ T_{31} x_1 + T_{32} x_2 + (T_{33} - \lambda) x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (41a)$$

Отсюда для скаляра λ получается кубическое уравнение

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{13} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (41b)$$

корни которого, как легко убедиться, равны главным компонентам T'_{11} , T'_{22} , T'_{33} тензора ${}^2\text{T}$.¹ Если расположить это уравнение по степеням λ , то оно принимает следующий вид:

$$\lambda^3 - T^{(1)} \lambda^2 + T^{(2)} \lambda - T^{(3)} = 0, \quad (41c)$$

где

$$T^{(1)} = T_{11} + T_{22} + T_{33}, \quad (42)$$

$$T^{(2)} = T_{23}^2 + T_{31}^2 + T_{12}^2 - T_{22} T_{33} - T_{33} T_{11} - T_{11} T_{22} \quad (42a)$$

и

$$T^{(3)} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}, \quad (42b)$$

¹ Мы здесь не входим в доказательство этого положения, ибо вопросы преобразования поверхностей второго порядка к главным осям излагаются в курсах аналитической геометрии. Отметим только, что самым общим условием вещественности всех трех корней (41 b) является так называемое Эрмитово условие: T_{ik} = величине комплексно-сопряженной T_{ki} . Это обозначает, что если тензор ${}^2\text{T}$ комплексный и равен ${}^2\text{U} + \sqrt{-1} {}^2\text{V}$, то его вещественная часть ${}^2\text{U}$ должна быть симметрической, а мнимая часть ${}^2\text{V}$, напротив, антисимметрической.

Так как корни (41с) являются совершенно определенными, не зависящими от выбора координат величинами, то то же самое справедливо и относительно коэффициентов $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$. Поэтому они называются инвариантами, а именно линейным, квадратичным или кубическим инвариантами тензора 2T . Инвариантность $T^{(1)}$ тотчас же следует из того обстоятельства, что при $T_{ik} = A_i B_k$ получаем $T^{(1)} = AB$. Так же легко доказать инвариантность $T^{(2)}$, ибо

$$2T^{(2)} = {}^2T \cdot {}^2I - (T^{(1)})^2.$$

Напротив, непосредственное установление инвариантного характера (42b) потребовало бы специального исследования.

§ 23. Наряду с постоянными тензорами следует также рассмотреть переменные тензоры, являющиеся функциями времени и места, т. е. радиуса-вектора (тензорные функции, тензорные поля). Дифференциальная величина, соответствующая расхождению вектора, может быть при этом определена следующей формулой, аналогичной (11a):

$$\operatorname{div} {}^2T = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint {}^2Tn \, dS. \quad (43)$$

Так как произведение 2Tn представляет собой вектор,[†] то расхождение тензора также должно быть векторной величиной. Соответственной специализацией поверхности S (параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям) из (43) получается следующее координатное определение этой величины [ср. (21)]:

$$(\operatorname{div} {}^2T)_i = \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \quad (43a)$$

Ее можно определить также символически как произведение оператора Гамильтона ∇ на тензор 2T . Следует заметить, что расхождение асимметрического тензора, по (37a), можно разложить на расхождение его симметрической части 2P и на вихрь вектора Q , соответствующего антисимметрической части

$$\operatorname{div} {}^2T = \operatorname{div} {}^2P + \operatorname{rot} Q. \quad (43b)$$

[†] А именно такой вектор, направление которого совпадает с направлением внешней нормали к поверхности, представляющей тензор 2T , причем n играет роль радиуса-вектора.

Из (43) вытекает формула преобразования, соответствующая формуле Гаусса

$$\oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = \int \operatorname{div} \mathbf{T} dV. \quad (44)$$

При помощи символического вектора ∇ можно образовать два также символических тензора, а именно: симметрический с компонентами $\nabla_i \nabla_k = \frac{\partial^2}{\partial x_i \cdot \partial x_k}$ и антисимметрический ${}^2\nabla$, компоненты которого представляются схемой

$${}^2\nabla = \begin{vmatrix} 0, & \frac{\partial}{\partial x_3}, & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_3}, & 0, & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2}, & -\frac{\partial}{\partial x_1}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Первый из этих „тензоров“ является дифференциальным оператором второго порядка, тогда как второй есть оператор первого порядка, совершенно эквивалентный с ∇ и написанный лишь в ином виде. Применяя этот оператор к векторной функции, получаем по общим формулам умножения (37а) (причем ${}^2\mathbf{P} = 0$ и $\mathbf{Q} = \nabla$)

$${}^2\nabla \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{F}. \quad (45)$$

Точно также для скалярного произведения ${}^2\nabla$ на некоторую тензорную функцию имеем

$${}^2\nabla \mathbf{T} = 2\nabla \mathbf{Q} = 2 \operatorname{div} \mathbf{Q}, \quad (45a)$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{Q} = \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_{12}}{\partial x_3}.$$

Правая часть этого уравнения часто называется „вращением“ или вихрем антисимметрического тензора ${}^2\mathbf{Q}$ и обозначается $\operatorname{rot} {}^2\mathbf{Q}$ ($\operatorname{rot} {}^2\mathbf{Q} = \operatorname{div} \mathbf{Q}$).

Операция, соответствующая вихрю вектора, к тензорным функциям вообще не применяется.

Применяя оператор ∇ к произведению тензора на векторы или на другие тензоры, следует соблюдать такие же правила дифференцирования, как и при соответствующих операциях векторного исчисления. Однако здесь мы не будем входить более подробно в эти вопросы.

§ 24. В заключение добавим несколько слов о тензорах высшего ранга.

Общее определение тензора n -го ранга, ${}^n\mathbf{T}$, мы уже дали

в конце § 18. Такие тензоры можно образовать перемножением или дифференцированием компонент тензоров низшего ранга, включая и векторы. Можно также и наоборот понизить ранг тензора, суммируя компоненты с двумя одинаковыми индексами. Например, из тензора третьего ранга 3T с компонентами T_{ikl} получаются таким путем три вектора с компонентами

$$\sum_{k=1}^3 T_{ikk}; \quad \sum_{k=1}^3 T_{kik}; \quad \sum_{k=1}^3 T_{kkk} \quad (i=1, 2, 3).$$

Как уже известный случай подобной операции назовем **инвариантный скаляр**

$$T^{(1)} = \sum_{i=1}^3 T_{ii}.$$

В противоположность обычным тензорам асимметрические тензоры высшего ранга не могут быть расщеплены на совершенно симметрическую и совершенно антисимметрическую части. Такое расщепление приходится остановить на слагаемых, которые по отношению к одной паре индексов симметричны, а по отношению к другим — антисимметричны.

Совершенно симметрический тензор n -го ранга nT может быть изображен алгебраической поверхностью n го порядка.

$${}^nT_{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = \text{const.}$$

При этом произведение nTF обозначает некоторый тензор $(n-1)$ -го ранга с компонентами

$$\sum_{i_1=1}^3 T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} F_{i_1}.$$

Простейшими примерами симметрических тензоров n -го ранга могут служить тензоры

$$R_{i_1 i_2 \dots i_n} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \quad (46)$$

$$S_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} \quad (46a)$$

(φ — какая-нибудь скалярная функция от \mathbf{r}).

Умножая эти тензоры на инвариантные скаляры и складывая (понятно можно складывать лишь тензоры одного и того же ранга), из них можно построить более сложные симметрические тензоры.

Заметим, что n -вариантные скаляры (46) могут быть написаны в форме:

$$R(n_1, n_2, n_3) = x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \quad (n_1 + n_2 + n_3 = n) \quad (46b)$$

и что число компонент тензора ${}^n R$, равных $R(n_1, n_2, n_3)$, составляет

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$$

То же самое относится и к тензору (46a), причем $R(n_1, n_2, n_3)$ следует заменить выражением:

$$S(n_1, n_2, n_3) = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}.$$

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ В СВЯЗИ С ПРИНЦИПОМ ЭНЕРГИИ

§ 1. Электрические диполи. При изложении основ электростатики обычно исходят из представления о наэлектризованных телах, которые противопоставляются нейтральным телам, как телам, лишенным электрического заряда. Подобное противопоставление не вполне правильно, ибо на самом деле всякое нейтральное тело содержит в эквивалентных количествах электрические заряды двух противоположных сортов. При обычных условиях эти заряды распределены равномерно по всему объему тела, так что не только последнее в целом, но и каждый (не слишком малый) элемент его в отдельности представляется нейтральным. Однако, под влиянием различных причин, это нормальное распределение может нарушиться таким образом, что в одной части тела оказывается избыток зарядов одного сорта, а в другой — эквивалентный избыток зарядов противоположного сорта. Подобное пространственное разделение противоположных зарядов обнаруживается в виде электрических сил, оказываемых рассматриваемым телом на окружающие тела, где эти силы вызывают аналогичное разделение противоположных зарядов.

Тело (или часть тела), содержащее избыток зарядов того или иного сорта, называется наэлектризованным. Поскольку в нормальном состоянии все тела являются нейтральными, электризация одного из них всегда сопряжена с противоположной электризацией других тел, с которыми оно составляло вначале одно целое. Обратное, „нейтрализация“ данного тела, т. е. исчезновение связанного с ним избыточного электрического заряда, может иметь место лишь одновременно с нейтрализацией одного или нескольких других противоположно наэлектризованных тел. Таким образом, появление и исчезновение электрических сил обуславливается не „созданием“ или „уничтожением“ электрических зарядов, но лишь пространственным разделением или наоборот воссоединением (сближением) зарядов противоположного сорта. Электрический заряд не является следовательно случайным и изменчивым придатком материальных тел, но сла-

глется из элементов столь же неизменных и неразрушимых, как и сама материя. В виду неразрывной связи его с материальными телами мы должны себе представить, что электрический заряд является, подобно массе, неизменным и неотъемлемым свойством тех материальных частиц, из которых построены подобные тела. С этой точки зрения простейшие нейтральные частицы — атомы — должны состоять из еще более мелких частиц с противоположными зарядами эквивалентной величины.

Не углубляясь пока в дальнейшее развитие электронной теории, мы будем исходить при изложении общих основ электродинамики из принципа неразрушимости электричества и распределения его на попарно противоположные, т. е. взаимно нейтрализующиеся, заряды. Нейтральные системы, образованные двумя противоположными зарядами, называются электрическими диполями (дублетами). Изучение электрических сил мы начнем с рассмотрения действий, оказываемых друг на друга не отдельными зарядами, но именно подобными диполями. Небольшое усложнение теории, связанное с заменой отдельных зарядов как источников и объектов электрических сил парами противоположных зарядов, т. е. диполями, оправдывается рядом методологических преимуществ, которые выясняются ниже, а также отчасти и принципиальными соображениями: поскольку электричество складывается из попарно противоположных зарядов (или, вернее, материя — из противоположно заряженных частиц), всякий якобы „изолированный“ заряд следует рассматривать как конец некоторого диполя, противоположный конец которого находится на весьма большом (практически бесконечном) расстоянии.

§ 2. Момент электрического диполя. Электрический диполь характеризуется двумя параметрами, а именно: величиной образующих его зарядов, которые мы будем представлять себе сосредоточенными в двух точках P_1 и P_2 и расстоянием между ними, т. е. длиной отрезка $P_1P_2 = l$ (рис. 5,а).

При $l=0$ механический эффект диполя (измеряемый силами и парами сил, которые он оказывает на другие диполи или испытывает со стороны последних) обращается очевидно в нуль, так как действия образующих его зарядов в лимно уничтожаются. Отсюда следует, что в случае „элементарных“ диполей, т. е. диполей с достаточно малой (по отношению к их взаимным расстояниям) длиной, механический эффект можно считать с точностью до величин второго порядка малости прямо пропорциональным этой длине. Коэффициент пропорциональности, различный для различных диполей при одном и том же расположении их концов (и, следовательно, одной и той же длине), можно трактовать как меру величины образующих их зарядов. Само собою разумеется, что единица заряда устанавливается совершенно произвольным образом, как и всякая иная единица измерения — длины, массы и т. д.

При этом противоположным зарядам каждого диполя припи-

сывается одинаковое абсолютное значение (e), но противоположные знаки (\pm). Таким образом механический эффект различных элементарных диполей определяется произведением обоих параметров, которыми они характеризуются, т. е. абсолютной величины их зарядов e и длины l . Это произведение $el = p$ называется электрическим моментом диполя. Заметим, что последнее определение остается в силе для диполей неэлементарных, с той, однако, разницей, что в этом случае величина электрического момента оказывается недостаточной для характеристики механического эффекта.

Для иллюстрации предыдущих соображений представим себе два совершенно одинаковых элементарных диполя, одинаково ориентированных и расположенных в непосредственной близости друг к другу, т. е. на расстоянии, сравнимом с их собственной длиной и, следовательно, весьма малом в сравнении с расстоянием их до других диполей. При таких условиях механический эффект образуемой ими системы можно очевидно считать вдвое большим, нежели механический эффект каждого из них в отдельности, и притом совершенно независимо от их относительного расположения, поскольку ориентация их является одинаковой, а расстояние между ними — весьма малым. В частности мы можем сложить их вместе таким образом, чтобы соответствующие концы совпадали друг с другом (рис. 5, *b*), или же, чтобы отрицательный конец одного из них совпадал с положительным концом другого (рис. 5, *a*).

В первом случае мы получаем диполь ординарной длины (l), но имеющий вдвое больший заряд ($2e$), а во втором, в виду взаимного уничтожения эффектов совмещенных друг с другом противоположных зарядов — диполь с ординарными зарядами (e), но вдвое большей длины ($2l$). Отсюда видно, что удвоение заряда влияет на механический эффект диполя таким же образом как и удвоение длины, т. е. что этот эффект измеряется произведением обоих параметров (e, l). Если в предыдущем примере заменить одинаково ориентированные диполи диполями с противоположной ориентацией, то мы получим систему, механический эффект которой равен нулю.

В самом деле при совмещении концов обоих диполей (рис. 5а) соответствующие их заряды взаимно уничтожаются (или, вернее, нейтрализуются), так что мы получаем диполь длины l , но с зарядом $+e + (-e) = 0$. Отсюда следует, что при повороте электрического диполя на 180° силы и пары сил, оказываемые им на другие диполи или испытываемые со стороны последних, сохраняют свою величину, но изменяют направление на противоположное.

Рассматривая длину диполя как вектор l , проведенный

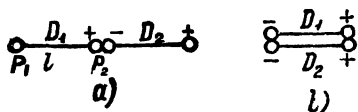


Рис. 5.

от отрицательного конца (P_1) к положительному (P_2), мы получаем соответствующее векторное определение его момента

$$\mathbf{p} = e\mathbf{l}. \quad (1)$$

§ 3. Системы элементарных диполей. Поскольку механический эффект элементарного диполя определяется его моментом, можно при сравнении нескольких диполей друг с другом заменять их другими с зарядами $e=1$ и длиной $l=p$. При этом каждый диполь можно передвигать параллельно самому себе в любое положение в пределах некоторой достаточно малой области пространства (линейные размеры которой сравнимы с размерами диполей). Если, следовательно, в подобной области расположены два элементарных диполя D_1 и D_2 с моментами $\mathbf{p}_1 = e_1 \mathbf{l}_1$ и $\mathbf{p}_2 = e_2 \mathbf{l}_2$, то их можно передвинуть таким образом, чтобы отрицательный конец одного совпал с положительным концом другого (рис. 6).

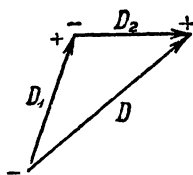


Рис. 6.

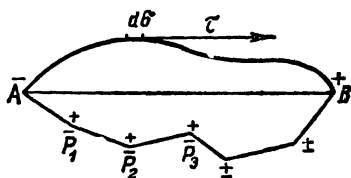


Рис. 7.

Так как соответствующие заряды ($+1$ и -1) при этом нейтрализуют друг друга, то в результате получается один диполь, отрицательный конец которого совпадает с отрицательным концом первого из „слагаемых“ диполей, а положительный конец с положительным концом второго. Отсюда следует, что совокупность двух элементарных диполей эквивалентна одному с моментом, равным геометрической сумме моментов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 .

Этот результат легко обобщается на случай любого числа элементарных диполей, расположенных в непосредственной близости друг к другу. Обратно, данный диполь с моментом \mathbf{p} можно заменить совокупностью нескольких „составляющих“ диполей с моментами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots$, удовлетворяющих равенству

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots = \mathbf{p}.$$

Заметим, что подобное разложение диполя на составляющие сохраняет смысл и в случае диполей неэлементарных. При этом, однако, составляющие диполи нельзя передвигать в пространстве независимо друг от друга.

Так, например, соединяя концы A и B произвольного (неэлементарного) диполя с моментом $e \cdot AB$ ломаной линией $AP_1P_2P_3 \dots P_nB_n$ и совмещая в точках P_1, P_2, \dots, P_n заряды $+e$ и $-e$, мы получаем эквивалентную ему цепь диполей с момен-

тами eAP_1 , eP_1P_2 , eP_2P_3 , ... eP_nB (рис. 7), геометрическая сумма которых равна $e AB$. Поскольку все эти составляющие диполи непосредственно связаны друг с другом, свобода их передвижения остается весьма ограниченной.

Зато мы ничем не ограничены в выборе ломаной AB . В частности, составляя последнюю из бесконечно малых и бесконечно мало наклоненных друг к другу отрезков, можно разложить данный диполь AB на совокупность элементарных диполей с моментами $dp = e\tau ds$, где ds — элемент дуги кривой, в которую обращается в пределе рассматриваемая ломаная линия, а τ — единичный вектор, определяющий направление касательной к этой кривой в соответствующей точке (касательный вектор). Последнее разложение позволяет свести определение взаимодействия произвольных диполей к взаимодействию диполей элементарных. При этом каждый элементарный диполь можно рассматривать просто как точку, так как важна не его длина, а лишь электрический момент; увеличением же заряда, при неизменном моменте, всегда можно сделать длину сколь угодно малой. Кинематическое описание элементарного диполя сводится, таким образом, к заданию его „положения“, т. е. радиуса-вектора r представляющей его точки, и его „ориентации“, т. е. направления его электрического момента (абсолютное значение которого мы будем считать постоянным).

§ 4. Статика элементарного диполя; напряженность электрического поля. При теоретическом изучении взаимодействия элементарных диполей мы будем трактовать последние как абсолютно твердые стержни, способные совершать двоякого рода движение: вращательное и поступательное. Соответственно этому механическое действие, испытываемое каждым из них со стороны остальных, мы будем представлять в виде вращательного усилия (т. е. пары сил) с моментом M и некоторой движущей силы F . Для определенности мы будем относить векторы M и F к середине соответствующего диполя (с таким же успехом можно было бы воспользоваться отрицательным или положительным концом).

Далее, мы будем предполагать, что силы взаимодействия между неподвижными диполями обладают консервативным характером, т. е. вытекают из существования некоторой потенциальной энергии $U(r, p)$, зависящей от относительного положения взаимодействующих диполей и определяющей своим уменьшением работу, которая совершается вращательными и двигательными силами при переходе диполей из одного расположения в другое. Это предположение, имеющее для дальнейшего фундаментальное значение, мы будем называть принципом энергии.

Представим себе, что середина рассматриваемого элементарного диполя D закреплена неподвижно в некоторой точке P , около которой он может свободно вращаться. При данном расположении всех остальных диполей (которое мы будем считать

неизменным) D стремится повернуться в вполне определенном направлении PQ (рис. 8), соответствующем положению устойчивого равновесия, т. е. минимуму потенциальной энергии, рассматриваемой как функция от p (при $r = \text{const}$). Вообще говоря, может быть несколько подобных устойчивых направлений.¹

Если, следовательно, момент диполя p направлен вдоль прямой PQ , то момент испытываемой им пары сил обращается в нуль.

Предположим теперь, что момент диполя образует с этим „равновесным“ направлением некоторый угол θ .

Разлагая p на составляющие $p_1 = p \cos \theta$ и $p_2 = p \sin \theta$, соответственно параллельную и перпендикулярную к PQ , мы можем заменить рассматриваемый диполь двумя другими D_1 и D_2 с моментами p_1 и p_2 . Так как согласно предыдущему D_1 не испытывает вращательного усилия, то вращательный момент M , действующий на D , совпадает с вращательным моментом M_2 , который действует на D_2 .

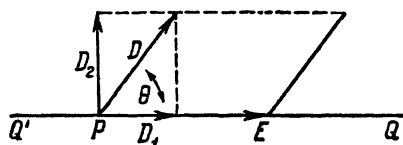


Рис. 8.

При достаточно малых значениях θ , D очевидно должен стремиться установиться в направлении PQ , т. е. вращательный момент M должен быть перпендикулярен к плоскости (D, PQ) — совершенно независимо от того, имеются ли еще другие положения равновесия или нет. Однако, на основании равенства $M_2 = M$, то же самое можно сказать и о вращательном моменте, действующем на D_2 . Но так как угол, образуемый D_2 с прямой $Q'PQ$, имеет максимальное значение, то мы тотчас же можем отсюда заключить, что PQ представляет собою единственное устойчивое равновесное направление, т. е. единственное направление, соответствующее условию $U(p) = \text{minimum}$.

Вращательный момент M_2 , очевидно, должен быть пропорциональным электрическому моменту D_2 , т. е. величине $p \sin \theta$.

Обозначая коэффициент пропорциональности через E , мы можем, следовательно, положить

$$M = Ep \sin \theta. \quad (2)$$

Таким образом, вектор M численно равен площади параллелограмма, построенного на моменте p и на отрезке E , проведенном в направлении прямой PQ . Рассматривая E как численное значение вектора E , определяемого этим отрезком, мы можем представить вращательный момент M , как внешнее произведение векторов p и E , т. е.

$$M = p \times E. \quad (3)$$

¹ Если бы не имелось ни одного направления, соответствующего равновесию, то работа, произведенная по возвращении диполя в первоначальное направление, была бы вообще отлична от нуля.

Работа, совершаемая против испытываемого диполем вращательного усилия при увеличении угла θ на $d\theta$, выражается произведением $Md\theta$. Приравнявая эту работу увеличению потенциальной энергии диполя dU , получаем

$$dU = Ep \sin \theta d\theta$$

и, следовательно,

$$U = -Ep \cos \theta + C,$$

где C — постоянная.

Поскольку мы ограничиваемся сравнением различных ориентаций диполя при данном положении его середины P , величина этой постоянной не имеет существенного значения. Желая однако определить зависимость энергии не только от угла θ , но и от положения точки P , мы должны учесть зависимость величины C (которая является постоянной лишь по отношению к θ) от радиуса-вектора $OP = r$, где O — произвольная „начальная“ точка. Для этого представим себе наряду с рассматриваемым диполем второй диполь с моментом той же величины, но противоположного направления, образующий следовательно с направлением вектора E угол $\theta + \pi$. Его энергия, согласно предыдущему, должна равняться $-Ep \cos(\theta + \pi) + C = +Ep \cos \theta + C$. Потенциальная энергия системы, образованной обоими диполями, сводится таким образом к $2C$. А так как подобная система не может испытывать каких-либо сил (см. выше), то отсюда следует, что $2C = \text{const}$ не только по отношению к θ , но и по отношению к r . Полагая $C = 0$, получаем

$$U = -Ep \cos \theta = -pE, \quad (4)$$

где pE обозначает внутреннее произведение векторов p и E . Таким образом, зависимость U от r всецело определяется зависимостью от r вектора E , характеризующего действие всей совокупности окружающих диполей в рассматриваемой точке P .

Зная эту зависимость, нетрудно вычислить движущую силу F , испытываемую диполем в данном положении. А именно, предположим, что центр диполя перемещается из точки P в соседнюю точку P' . Если при этом ориентация его остается неизменной, то уменьшение потенциальной энергии $-dU = d(pE)$ сводится к работе силы F , т. е. к произведению Fdr , где $dr = PP'$. Полагая $d(pE) = dr \nabla(p \cdot E)$ и сравнивая это выражение с предыдущим, получаем, в виду произвольности dr ,

$$F = \nabla(pE) = \text{grad}(pE) = (p \text{ grad})E + p \times \text{rot} E \quad (5)$$

[см. Введение, формула (27)].

Вектор E , определяющий механическое действие, которое испытывает произвольный элементарный диполь в рассматриваемой точке, называется электростатической напряженностью в этой точке. Точки, в которых вектор E имеет отличное от нуля значение, не являются конечно изолированными, но образуют некоторое электростатическое поле, характеризуемое векторной функцией $E(r)$. Имея в своем распоряжении

подвижный элементарный диполь, нетрудно определить направление и величину электрической напряженности в каждой точке. А именно, направление вектора \mathbf{E} есть то направление, в котором стремится установиться момент диполя; численное же его значение E равно максимальному вращательному моменту M , который действует на диполь в положении, перпендикулярном к равновесному, разделенному на электрический момент диполя p .

Заметим, что при $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}$ ($\theta = 90^\circ$) движущая сила, испытываемая диполем, обращается согласно (5) в нуль. Наоборот, при $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$ ($\theta = 0$ или 180°) вращательный момент M исчезает, тогда как движущая сила достигает максимальной величины. Если при этом направление \mathbf{p} совпадает с направлением \mathbf{E} ($\theta = 0$, устойчивое равновесие по отношению к ориентации $U = \text{minimum}$), то сила \mathbf{F} направлена в сторону наиболее быстрого возрастания электрической напряженности \mathbf{E} .

Наоборот, при противоположных направлениях \mathbf{p} и \mathbf{E} ($\theta = 180^\circ$, положение неустойчивого равновесия $U = \text{maximum}$) она направлена в сторону наиболее быстрого уменьшения \mathbf{E} . Поскольку напряжение электростатического поля увеличивается по мере приближения к его источникам, движущая сила имеет в первом случае притяжения, а во втором — отталкивания.

§ 5. Невихревой характер электрического поля и его действие на отдельные заряды (полюса). Силы, испытываемые в заданном электрическом поле произвольным неэлементарным диполем, могут быть вычислены путем разложения сго на диполи элементарные (§ 3).

Так как величиной, определяющей эти силы, является потенциальная энергия, то дело сводится к вычислению потенциальной энергии рассматриваемого диполя. Эта энергия равна очевидно сумме потенциальных энергий отдельных звеньев эквивалентной ему цепи элементарных диполей.¹ Представляя электрический момент одного из этих диполей $d\mathbf{p}$ в виде $e \tau d\sigma$, имеем, согласно (4),

$$dU = -d\mathbf{p}\mathbf{E} = -(\tau e d\sigma \mathbf{E}) = -e E_\tau d\sigma,$$

и, следовательно,

$$U = -e \int_A^B E_\tau d\sigma, \quad (6)$$

где A и B означают соответственно отрицательный и положительный концы рассматриваемого диполя.

Механическое действие, испытываемое диполем, можно, очевидно, разложить на сумму двух сил \mathbf{f}_A и \mathbf{f}_B , действующих на его концы. Предположим, что последние перемещаются из точек A и B

¹ Само собою разумеется, что при этом идет речь об их энергии относительно внешней электрической системы, а не относительно друг друга.

в соседние точки A' и B' . Совершаемая при этом работа выражается суммой $\mathbf{f}_A \delta \mathbf{r}_A + \mathbf{f}_B \delta \mathbf{r}_B$, где $\delta \mathbf{r}_A = AA'$ и $\delta \mathbf{r}_B = BB'$. С другой стороны, согласно принципу энергии, эта работа должна равняться уменьшению потенциальной энергии, т. е. разности

$$-\delta U = -(U' - U) = e \int_{A'}^{B'} E_{\tau} d\sigma' - e \int_A^B E_{\tau} d\sigma.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_{A'}^{B'} = \int_{A'}^A + \int_A^B + \int_B^{B'} = \int_A^B + \int_B^{B'} - \int_A^{A'}$$

(где подинтегральное выражение для краткости опущено), получаем

$$-\delta U = e \int_B^{B'} E_{\tau} d\sigma' - e \int_A^{A'} E_{\tau} d\sigma' = e(E_B \delta \mathbf{r}_B) - e(E_A \delta \mathbf{r}_A).$$

Из сравнения этого выражения с прежним

$$-\delta U = \mathbf{f}_B \delta \mathbf{r}_B + \mathbf{f}_A \delta \mathbf{r}_A$$

следует, в виду произвольности перемещений $\delta \mathbf{r}_A$ и $\delta \mathbf{r}_B$, что

$$\mathbf{f}_B = e \mathbf{E}_B; \quad \mathbf{f}_A = -e \mathbf{E}_A.$$

Вспоминая, что $e = e_B$ и $-e = e_A$, где e_A и e_B означают заряды концов диполя, мы можем заменить предыдущие равенства следующей общей формулой для силы \mathbf{f} , испытываемой произвольным зарядом $e \geq 0$ в данной точке:

$$\mathbf{f} = e \mathbf{E}. \quad (7)$$

Эта формула соответствует обычному определению вектора электрической напряженности как силы, действующей на единицу положительного заряда.

Энергия данного диполя (AB) представляет собой вполне определенную величину, совершенно не зависящую от способа разложения его на элементарные диполи, т. е. от вида кривой AB , по которой производится интегрирование в формуле (6). Соединяя две подобных кривых σ_1 и σ_2 в одну замкнутую кривую σ и интегрируя по σ_1 в положительном направлении (от A к B), а по σ_2 в отрицательном (от B к A), что соответствует вполне определенному направлению интегрирования по σ , мы, очевидно, получим нуль, какова бы ни была форма кривой σ . Таким образом, для всякой замкнутой кривой, проведенной в постоянном электростатическом поле, имеет место равенство

$$\oint E_{\tau} d\sigma = 0.$$

Следовательно, согласно формуле Стокса [Введение, формула (17)], во всем пространстве

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение, непосредственно вытекающее из принципа энергии, выражает основное свойство электростатического поля, а именно его невихревой или потенциальный характер. Вводя некоторую скалярную функцию $\varphi(\mathbf{r})$, называемую скалярным или электростатическим потенциалом, мы можем следовательно положить

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (9)$$

Физическое значение потенциала φ непосредственно явствует из формулы (6). Полагая в ней $E_{\tau} = -\operatorname{grad}_{\tau} \varphi = -\frac{d\varphi}{d\sigma}$, получаем

$$U = e(\varphi_B - \varphi_A) = e_B \varphi_B - e_A \varphi_A.$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия отдельного заряда $e \geq 0$ равна

$$U = e\varphi. \quad (10)$$

Таким образом, потенциал φ в какой-либо точке P представляет собой потенциальную энергию единицы положительного заряда ($e = +1$), находящегося в данной точке. Принимая во внимание, что сила \mathbf{f} , действующая на заряд e , должна равняться отрицательному градиенту его потенциальной энергии, получим далее $\mathbf{f} = -\operatorname{grad} U = -e \operatorname{grad} \varphi$ или, согласно (9), $\mathbf{f} = e \mathbf{E}$, т. е. формулу (7).

§. 6. Вывод действия диполей из действия отдельных полюсов. Заметим, что при обычном изложении электростатики, основываемся на рассмотрении взаимодействия отдельных зарядов, а не диполей, формула (7) является не конечной, но наоборот, исходной. Из нее с помощью принципа энергии непосредственно получается формула (9) и, следовательно, уравнение (8).

Механическое действие, испытываемое диполем, сводится, с этой точки зрения, к двум силам, действующим на его концы. В случае элементарного диполя с бесконечно малой длиной $P_1 P_2 = l$ и зарядами $e_2 = e$ и $e_1 = -e$, силы $\mathbf{f}_1 = -e \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{f}_2 = e \mathbf{E}_2$ можно считать приблизительно равными и противоположными, т. е. трактовать как пару сил с бесконечно малым моментом $\mathbf{M} = l \times e \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — электрическая напряженность в центре диполя P (рис. 9); таким образом

$$\mathbf{M} = e l \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E},$$

т. е. получаем формулу (3).

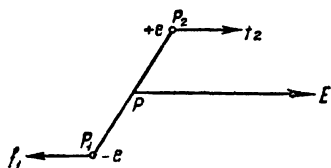


Рис. 9.

Принимая во внимание различие этих сил, получаем, далее, испытываемую диполем движущую силу

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = e(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1).$$

Разность $\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$ равна в первом приближении градиенту вектора \mathbf{E} вдоль AB , т. е. $(1 \text{ grad}) \mathbf{E}$ (Введение, § 10); таким образом

$$\mathbf{F} = e (1 \text{ grad}) \mathbf{E}$$

или окончательно

$$\mathbf{F} = (p \text{ grad}) \mathbf{E}. \quad (11)$$

Это выражение с внешней стороны несколько отличается от (5). Согласно, однако, условию (8) они оказываются тождественными.

Что касается потенциальной энергии элементарного диполя, то она сводится к сумме энергий его концов

$$U = e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2 = e(\varphi_2 - \varphi_1) = e(1 \text{ grad } \varphi) = - (p \mathbf{E}),$$

с точностью до величины первого порядка малости совпадает с формулой (4).

Хотя этот (обычный) способ рассмотрения несколько проще обратного, изложенного нами в предыдущих параграфах, все же последний обладает тем преимуществом, что его можно непосредственно перенести на взаимодействия между электрическими токами. При этом яснее проявляется аналогия и различие между обоими типами взаимодействий.



ГЛАВА II

ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИЕ (МАГНИТНЫЕ) ДЕЙСТВИЯ В СВЯЗИ С ПРИНЦИПОМ ЭНЕРГИИ

§ 1. Электрические токи. Всякое движение электричества в материальных телах, поскольку оно связано с изменением в относительном расположении противоположных зарядов, называется электрическим током. Электрический ток может следовательно обуславливаться или движением противоположных зарядов в противоположные стороны, или движением зарядов одного определенного сорта при неподвижности их „партнеров“, или каким-либо иным относительным движением зарядов обоих сортов. Соединяя эти заряды попарно в диполи, мы можем трактовать электрический ток как изменение электрического момента подобных диполей с течением времени, измеряя величину тока быстрой этого изменения. Обозначим радиусы-векторы концов P_1 и P_2 какого-либо диполя по отношению к некоторой неподвижной точке O через r_1 и r_2 . Так как $P_1P_2 = =l = r_2 - r_1$, то производная электрического момента этого диполя по времени, при неизменности его зарядов $e_1 = -e$ и $e_2 = +e$, может быть представлена в виде

$$\frac{dP}{dt} = e(v_2 - v_1) = e_1 v_1 + e_2 v_2, \quad (1)$$

где $v_1 = \frac{dr_1}{dt}$ и $v_2 = \frac{dr_2}{dt}$ — „абсолютные“ скорости обоих зарядов, $v_2 - v_1$ — их относительная скорость. Произведение заряда какой-либо частицы на ее скорость мы будем называть электрическим количеством движения (по аналогии с обыкновенным или механическим количеством движения, которое равно произведению массы на скорость). Таким образом производная электрического момента диполя по времени равна сумме количеств движения его концов. Электрическое количество движения, приходящееся на единицу объема тела вблизи некоторой точки, называется плотностью электрического тока в этой точке. Плотность тока J можно также определить как производную по времени от электрического момента, приходящегося на единицу объема, т. е. от геометрической суммы моментов всех заключенных в единице объема диполей. Обозначая эту сумму, или, вернее, отношение электрического момента весьма малого элемента объема к величине последнего через P , мы можем, следовательно, положить

$$J = \frac{dP}{dt}. \quad (2)$$

Заметим, что вектор \mathbf{P} называется поляризацией тела в рассматриваемой точке. Введение его имеет смысл лишь постольку, поскольку положительные и отрицательные заряды, находящиеся в каждом элементе объема тела, остаются все время в пределах этого объема, образуя неразрывно с ним связанные элементарные диполи. Тела с подобными связанными зарядами называются диэлектриками, или изоляторами. Наоборот, в проводниках электричества (например металлах или электролитах) отдельные заряды могут независимо друг от друга перемещаться по всему объему тела. В этом случае, чтобы сохранить понятие поляризации и вместе с ним соотношение (2), необходимо представить себе, что противоположные заряды, связанные между собою в элементарные диполи, время от времени могут меняться местами, причем их взаимные расстояния все время остаются малыми (по сравнению с размерами тела).

§ 2. Стационарные электрические токи. Если плотность тока остается неизменной в каждой точке тела (что, конечно, может иметь место лишь в случае проводников), то ток называется стационарным, или постоянным. В этом случае электрические заряды движутся по замкнутым линиям, причем на смену зарядам, выходящим из какого-либо элемента объема, непрерывно поступают новые с противоположной стороны. Представим себе, что в единице объема тела содержится N зарядов e , движущихся со скоростью v . Соответ-

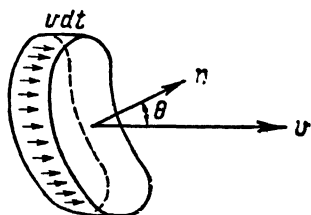


Рис. 10.

ствующая этим зарядам часть плотности тока равна очевидно $Ne v$. Примем во внимание бесконечно малую площадку dS , нормаль к которой \mathbf{n} образует с вектором \mathbf{v} некоторый угол θ (рис. 10).

Число зарядов рассматриваемого типа $d\nu$, которые проходят через dS за бесконечно малое время dt , равно очевидно произведению N на объем цилиндра с основанием dS и образующей $v dt$, т. е., следовательно, высотой $v dt \cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt = v_n dt$. Таким образом, считая это число положительным при $\theta < 90^\circ$ и отрицательным при $\theta > 90^\circ$, получаем

$$d\nu = N(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt.$$

Умножая $d\nu$ на e и складывая подобные произведения для всех зарядов, участвующих в движении с той или иной скоростью, мы получим общее количество электричества, проходящего за время dt через площадку dS

$$dQ = \sum Ne(\mathbf{v}\mathbf{n}) dS dt = \left(\sum Ne \mathbf{v} \right) \mathbf{n} dS dt.$$

Заметим, что доля положительных зарядов в этом потоке электричества через dS является положительной, если они движутся в сторону нормали \mathbf{n} (слева направо), и отрицательной, если

движение их происходит в противоположную сторону (справа налево). Наоборот, доля отрицательных зарядов является положительной во втором случае и отрицательной в первом.

Сумма $\sum Nev$ представляет собой, очевидно, не что иное, как плотность электрического тока \mathbf{J} . Общее количество электричества $\frac{dQ}{dt}$, проходящего в единицу времени через произвольную поверхность S , равное потоку вектора \mathbf{J} чрез эту поверхность называется силой электрического тока, проходящего через S . Обозначая его через I , получаем

$$I = \int J_n dS. \quad (3)$$

В случае замкнутой поверхности это выражение, согласно принципу сохранения электричества (гл. I, § 1), должно равняться алгебраическому уменьшению за единицу времени общего электрического заряда e' , содержащегося внутри поверхности S (если нормаль повсюду проведена изнутри наружу).

Обозначая электрический заряд, приходящийся на единицу объема, т. е. сумму $\sum e$, через ρ , имеем $e' = \int \rho dV$, где dV — элемент объема V , ограниченного S . Изменение e' за единицу времени может быть, следовательно, представлено в виде $\frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ (где частная производная под знаком интеграла указывает на то обстоятельство, что изменение ρ относится к данной точке пространства). Таким образом, принцип сохранения электричества выражается равенством

$$\oint \mathbf{J}_n dS = - \frac{d}{dt} \int \rho dV.$$

Согласно формуле Гаусса, имеем (в виду замкнутости S)

$$\int \operatorname{div} \mathbf{J} dV = - \frac{d}{dt} \int \rho dV,$$

так что предыдущее равенство может быть представлено в виде

$$\int \left(\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Так как поверхность S , а следовательно и объем V остаются совершенно произвольными, то отсюда следует, что для любой точки (или вернее любого бесконечно малого элемента объема тела) должно иметь место соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (4)$$

являющееся дифференциальным выражением принципа сохранения электричества.

В случае стационарного течения электричества $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$,
и следовательно

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (4a)$$

Это равенство показывает, что „линии тока“ (т. е. линии, проходящие через каждую точку в направлении вектора \mathbf{J}) не могут иметь источников, т. е. ни начала ни конца. Таким образом, если движение электричества происходит в ограниченном пространстве, то линии тока должны быть замкнутыми кривыми. Совокупность подобных кривых, проходящих через некоторую поверхность S , образует замкнутую трубку или „кольцо“, причем сила тока $I = \int J_n dS$ сохраняет одно и то же значение для любого сечения этого „кольца“. Всякое тело, в котором происходит стационарное движение электричества, может быть разделено на множество токовых трубок, или колец с бесконечно малыми сечениями, которые в отношении распределения постоянного электрического тока играют такую же роль, как элементы объема в отношении распределения электрических зарядов или диполей. Мы будем называть подобные кольцеобразные элементы (замкнутые трубки) линейными токами.

Само собой разумеется, что линейные токи в математическом смысле слова не существуют. Однако электрический ток, текущий в очень тонкой металлической проволоке, поскольку рассматривается его взаимодействие с другими подобными токами, можно считать, практически, линейным, подобно тому как в предыдущей главе мы считали оба полюса диполя точечными зарядами.

§ 3. Магнитный момент линейного тока. Действия, производимые и испытываемые электрическими токами, т. е. обусловленные движением электрических зарядов, называются электрокинетическими или магнитными. Они могут быть проще всего изучены, как теоретически, так и практически, если исходить из рассмотрения не отдельных движущихся зарядов, а постоянных линейных токов, играющих здесь ту же роль, как и электрические диполи при изучении электростатических действий. При этом элементарным диполям соответствуют элементарные линейные токи, характеризующиеся тем, что соответствующие линии тока (которые мы будем представлять себе как бесконечно тонкие, твердые провода) являются плоскими и бесконечно малыми по сравнению с их взаимными расстояниями.

Отметим прежде всего следующее совершенно очевидное обстоятельство. Если контур тока стягивается к точке, то его механический эффект обращается в нуль. То же самое имеет место и в том случае, когда он сохраняет конечную длину, но стягивается к „двойной линии“, т. е. линии, слагающейся из двух

практически совпадающих половин, так что сумма электрических количеств движения в каждом двойном элементе $d\sigma$ обращается в нуль (рис. 11). Отсюда непосредственно следует, что механическое действие, испытываемое или оказываемое электрическим током, циркулирующим в бесконечно малом плоском контуре, прямо пропорционально не длине этого контура, но стягиваемой им площади S .

Представим себе сначала два совершенно тождественных элементарных тока в виде прямоугольников, одинаково ориентированных и расположенных в непосредственной близости друг к другу (т. е. в области V , сравнимой с их собственными линейными размерами).

Совершенно очевидно, что механический эффект образуемой ими системы на внешние (удаленные) токи, независимо от того или иного расположения (в пределах достаточно малой области пространства V), будет вдвое больше, нежели механический эффект каждого из них в отдельности.

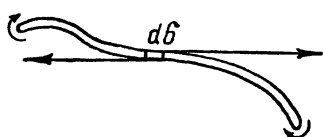


Рис. 11.

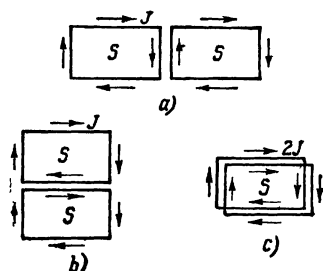


Рис. 12.

Если мы соединим оба контура таким образом, чтобы совпадение ограничивалось одной лишь стороной каждого прямоугольника (рис. 12, *a* и *b*), то в виду взаимного уничтожения эффектов, обусловленных совпадающими сторонами (с противоположными направлениями тока), мы получим фактически один контур с ординарной силой тока I , но с удвоенной площадью.

Таким образом доказано, что механический эффект элементарного линейного тока не зависит от его формы и пропорционален его площади.¹

Вместо того чтобы прикладывать рассматриваемые линейные токи, их можно наложить друг на друга так, как показано на рис. 12, *c*. При этом в действительности получается один двойной контур с площадью S , но с удвоенной силой тока $2I$.

Таким образом мы видим, что механический эффект элементарного линейного тока, испытываемый им со стороны внешних

¹ Это доказательство приведено здесь лишь для прямоугольных контуров, однако его обобщение на линейные токи произвольной формы не представляет никакого затруднения. А именно, каждый такой контур с током может быть разложен на прямоугольники и на прямоугольные треугольники (на краях); притом каждый треугольник (по своему эффекту) эквивалентен половине соответствующего прямоугольника.

(удаленных) токов или оказываемый им на последние, пропорционален обтекаемой им площади S и силе тока I , т. е. определяется произведением IS . Это произведение, соответствующее электрическому моменту (элементарного) диполя, называется магнитным моментом рассматриваемого линейного тока.

При исследовании взаимодействия электрических токов мы будем измерять силу последних в особых „электрокинетических“ единицах. Отношение этой новой „электрокинетической“ единицы к старой „электростатической“ обозначим через c и его численное значение оставим пока неопределенным. Тогда „электрокинетической“ силе тока I соответствует электрокинетическая сила тока i , определяемая соотношением

$$i = \frac{I}{c}. \quad (5)$$

Магнитный момент линейного тока определится, следовательно, формулой

$$m = iS. \quad (5a)$$

Так же как и в случае диполя, m можно трактовать как векторную величину, которую мы определим выражением

$$m = iS n, \quad (5b)$$

где n обозначает нормаль к плоскости тока. Направление этой нормали должно быть выбрано соответственно направлению тока в контуре σ в смысле правила правого винта.

Таким образом магнитный момент плоского линейного тока равен его геометрическому моменту nS (ср. Введение § 4), умноженному на силу тока i . Это определение допускает непосредственное обобщение на любые неплоские линейные токи (см. ниже § 4).

Заметим, что обращение направления тока при заданной ориентации контура σ очевидно приводит к тому же самому результату, как и обращение ориентации, а именно обращение направления сил и вращательных моментов, действующих на линейный ток или оказываемых им на другие токи. По (5b) этому соответствует изменение знака m . Отсюда видно, что магнитный момент элементарного линейного тока вполне определяет механический эффект последнего („пассивный“ и „активный“) как по величине, так и по направлению.

§ 4. Системы элементарных токов; неэлементарные токи. Пусть σ_1 и σ_2 будут два элементарных линейных тока с магнитными моментами m_1 и m_2 , расположенные в очень малой области пространства V . Так как форма этих линий (поскольку она не влияет на их площадь), сила тока a также относительное расположение в V несущественны для их механического эффекта, то их можно заменить двумя примыкающими друг к другу параллелограммами с одинаковыми силами тока $i_1 = i_2 = 1$. При этом мы

получаем картину, представленную на рис. 4 (Введение, § 4). Добавляя к обоим рассматриваемым „параллелограммным“ токам $PQQ'P'P$ и $OPP'O'O$ два „треугольных“ тока $PQOP$ и $P'Q'O'P'$, с противоположно направленными моментами, мы получаем один результирующий элементарный ток, представляемый параллелограммом $OQQ'O'O$. Магнитный момент этого тока \mathbf{m} очевидно равен геометрической сумме моментов составляющих параллелограммных токов, т. е.

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2.$$

Этот результат можно легко обобщить на любое число элементарных линейных токов, если только соответствующие линейные токи расположены достаточно близко друг к другу и на большом расстоянии от других токов, с которыми они находятся во взаимодействии.

Подобно тому как в предыдущей главе § 3, мы разлагали неэлементарный диполь в цепь элементарных диполей, можно и здесь неэлементарный линейный ток, т. е. линейный ток произвольной формы и размеров, заменить сеткой элементарных линейных токов. Эта замена или „разложение“ вполне соответствует рассмотренному уже во Введении (§ 3) „разложению“ замкнутой кривой или ограниченной ею поверхности. Мы только должны представить себе эти кривые носителями электрических токов одинаковой силы и определить направление обхода на каждой кривой при помощи направления тока.

Таким путем вопрос о механическом эффекте любого неэлементарного линейного тока сводится к вычислению соответствующего эффекта заменяющей его сетки элементарных токов. Эту сетку линейных токов можно провести на совершенно произвольной поверхности S , ограниченной контуром σ (рис. 13). При этом каждая линия сетки, за исключением σ , рассматривается как двойной линейный ток, так что механический эффект всей сетки токов всегда должен оставаться равным эффекту пограничной линии σ . Магнитный момент элементарного линейного тока, ограничивающего элемент поверхности dS с нормалью \mathbf{n} , согласно (5b), равен

$$d\mathbf{m} = i\mathbf{n}dS.$$

Геометрическая сумма всех этих моментов, т. е. интеграл

$$\mathbf{m} = i \int \mathbf{n}dS, \quad (6)$$

называется магнитным моментом рассматриваемого линейного тока i .

Этот вектор очевидно равен произведению силы тока i на геометрический момент кривой σ , определенный уже ранее (Введение, § 3). При достаточно малых размерах этой кривой механический эффект соответствующего тока вполне характеризуется вектором \mathbf{m} — даже и в том

случае, когда σ не представляет собой плоской кривой (когда, следовательно, ток не является „элементарным“ в собственном смысле слова). В противном случае для определения полного механического эффекта рассматриваемого тока необходимо вычислить соответствующие эффекты заменяющих его элементарных токов.

Так как вектор \mathbf{m} или $\int \mathbf{n} dS$ зависит только от σ , а не от формы поверхности S , то представляется естественным выразить его в виде криволинейного интеграла, взятого вдоль σ . Это преобразование осуществляется при помощи специализации поверх-

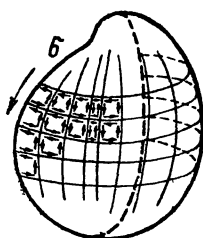


Рис. 13.

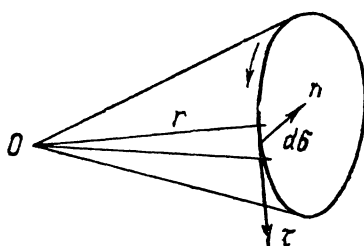


Рис. 14.

ности S . А именно, мы будем рассматривать S как поверхность конуса, вершина которого может находиться в произвольной точке O (рис. 14).

Так как во всех точках треугольника, определяемого точкой O и элементом $d\sigma$, нормаль \mathbf{n} сохраняет одно и то же направление, то за элемент поверхности dS можно взять площадь этого треугольника. Заметив далее, что \mathbf{n} имеет направление внешнего произведения $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}$, где \mathbf{r} обозначает радиус-вектор какой-нибудь точки σ (или $d\sigma$) и $\boldsymbol{\tau}$ — соответствующий касательный вектор, имеем

$$\mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} d\sigma$$

и следовательно, согласно (6),

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} id\sigma. \quad (6a)$$

Это выражение имеет очень простой физический смысл. Представим себе на мгновение линейный ток σ замененным очень тонкой нитью тока (проволокою) с поперечным сечением q . Тогда силу тока можно представить как произведение q на плотность тока $\mathbf{j} = \frac{1}{c} J$. Далее, так как направление \mathbf{j} сов-

падает с τ , а произведение qds обозначает объем dV соответствующего элемента нити тока, то мы получим

$$\tau id\sigma = j dV = \sum e \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad (6b)$$

т. е. „элемент тока“ $\tau id\sigma$ равен электрическому количеству движения содержащихся в этом элементе ($d\sigma$) зарядов, выраженному, подобно j , в электрокинетических единицах. Соответственно этому интеграл $\oint \mathbf{r} \times \tau i l \sigma$ можно определить как момент электрического количества движения рассматриваемого тока, что соответствует обычному определению механического момента количества движения, причем масса элементарных частиц здесь заменяется зарядом.

Как видно из приведенных соображений, этот момент электрического количества движения, определенный относительно произвольной точки O , не зависит от выбора этой точки.

Таким образом, магнитный момент линейного электрического тока равен половине результирующего момента электрического количества движения подвижных зарядов, образующих этот ток.

§ 5. Статика электрических токов; магнитное поле. Так как элементарный электрический ток в отношении взаимодействия с другими токами вполне определяется своим магнитным моментом, то это взаимодействие можно трактовать таким же самым образом, как и в случае элементарных электрических диполей. Точно так же, как и в случае последних, мы совершенно отвлечемся от размеров линейного тока, т. е. фактически будем его рассматривать как точку, характеризуемую кинематически своим положением (\mathbf{r}) и ориентацией связанного с ней вектора \mathbf{m} , а статически — действующей на нее движущей силой \mathbf{F} и вращательным моментом \mathbf{M} . Далее, мы будем предполагать, что и в этом случае оба типа сил можно также вывести из некоторой потенциальной функции $U(\mathbf{r}, \mathbf{m})$, которую мы будем называть магнитной энергией рассматриваемого элементарного тока по отношению к другим токам, с которыми он находится во взаимодействии. При таких обстоятельствах мы очевидно должны получить те же самые выражения для U , \mathbf{M} и \mathbf{F} , которые были установлены в предыдущей главе для элементарного диполя, если только вместо электрического момента p ввести магнитный момент \mathbf{m} , а вместо напряженности электрического поля \mathbf{E} — соответствующую магнитную векторную величину, так называемую напряженность магнитного поля \mathbf{H} . Таким образом, мы получаем следующие формулы, совершенно аналогичные уравнениям (4), (3) и (5) главы I:

$$U = -\mathbf{mH}, \quad (7)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}, \quad (8)$$

$$\mathbf{F} = \text{grad } (\mathbf{mH}). \quad (9)$$

Следует заметить, что при этом совершенно ничего не сказано об отношении между напряженностями электрического и магнитного поля как функциями r . Векторным полям $\mathbf{E}(r)$ и $\mathbf{H}(r)$ можно было бы приписать а priori совершенно различную структуру. Действительно, из принципа энергии легко можно вывести, что между обоими полями в этом отношении имеется известная противоположность. А именно, рассмотрим магнитную энергию неэлементарного тока по отношению к другим токам, в поле которых \mathbf{H} он находится. Эту энергию U очевидно можно определить как сумму бесконечно малых энергий

$$dU = -(\mathbf{H}d\mathbf{m}) = -i\mathbf{H}ndS = -iH_n dS,$$

соответствующих отдельным элементарным токам, которыми заменяется рассматриваемый ток (§ 4). Таким образом, имеем

$$U = -i \int H_n dS. \quad (10)$$

Поверхностный интеграл

$$\Phi = \int H_n dS \quad (10a)$$

обозначает „магнитный поток“ через какую-нибудь поверхность, ограниченную линией тока σ ; он играет ту же самую роль, как и криволинейный интеграл от напряженности электрического поля для энергии неэлементарного диполя [глава I, формула (6)].

Так как магнитная энергия данного тока не зависит от того способа, которым он разлагается на элементарные токи, и в частности от выбора поверхности S , на которой мы мысленно проводим сетку этих элементарных токов, то интеграл (10a) должен иметь одно и то же значение для двух различных поверхностей S' и S'' . Обращая направление нормали на одной из этих поверхностей, мы получаем таким образом

$$\int H_n \cdot dS' + \int H_n \cdot dS'' = 0,$$

т. е.

$$\oint H_n dS = 0,$$

где S обозначает замкнутую поверхность, образованную S' и S'' , а \mathbf{n} — соответствующую внешнюю (или внутреннюю) нормаль.

Тот же самый результат получается и в том случае, если представить себе, что линия тока σ стянута в одну точку; тогда поверхность S в (10) становится замкнутой и энергия U очевидно равна нулю.

Из того факта, что магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю, по формуле Гаусса

$$\oint H_n dS = \int \operatorname{div} \mathbf{H} dV$$

следует, что во всем пространстве магнитное поле должно удовлетворять условию

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (11)$$

Это условие является непосредственным следствием принципа энергии и соответствует условию $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ для случая электрического поля; оно обозначает, что магнитное поле не имеет источников, т. е. что „магнитные силовые линии“ представляют собою, вообще говоря, замкнутые кривые.

В виду тождественного характера уравнения (11) по отношению к \mathbf{r} , можно на основании тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ положить

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (12)$$

где \mathbf{A} является пока неизвестной векторной функцией. Эту векторную функцию, соответствующую скалярному потенциалу φ , мы будем называть векторным или электрокинетическим потенциалом.

Заметим, что векторный потенциал определяется напряженностью магнитного поля неоднозначно. Действительно, к \mathbf{A} можно прибавить градиент произвольной скалярной функции; так как его вихрь тождественно обращается в нуль, то \mathbf{H} при этом остается неизменным. Надлежащим выбором этой скалярной функции можно определить векторный потенциал так, чтобы он удовлетворял некоторому заданному скалярному условию, например, условию отсутствия источников

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (12a)$$

Подставляя (12) в (10), по формуле Стокса [Введение, (17)], получаем

$$U = -i \oint A_{\tau} d\sigma = -\oint \mathbf{A} \tau id\sigma. \quad (13)$$

При помощи этой формулы магнитная энергия рассматриваемой линии тока выражается как сумма частей, соответствующих отдельным элементам этой линии [а не заменяющим ее элементарным токам, как при первоначальном определении по формуле (10)]. Однако мы сейчас увидим, что такое расчленение, в противоположность соответствующему расчленению в случае электрического диполя, строго говоря, не допустимо.

§ 6. Действие магнитного поля на отдельные элементы тока и движущиеся заряды. Прежде всего мы попытаемся трактовать величину

$$dU = -\mathbf{A} \tau d\sigma \quad (13a)$$

как магнитную энергию элемента тока $d\sigma$ (напомним, что вектор $i\tau d\sigma$ представляет собою электрическое количество движения зарядов, находящихся в $d\sigma$). Тогда действующая на этот элемент тока сила выразится формулой $d\mathbf{F} = -\operatorname{grad} (dU)$, т. е.

$$d\mathbf{F} = \operatorname{grad} (i\tau d\sigma \mathbf{A}) = (i\tau d\sigma \operatorname{grad}) \mathbf{A} + i\tau d\sigma \times \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Полагая здесь $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$ и замечая, что вектор $(\tau d\sigma \text{ grad}) \mathbf{A}$ равен разности $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 = d\mathbf{A}$ для конечных точек отрезка $d\sigma$, можно вышеприведенную формулу написать следующим образом:

$$d\mathbf{F} = id\mathbf{A} + i\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{H} d\boldsymbol{\tau}. \quad (13b)$$

При интегрировании вдоль линии тока σ первый член с правой стороны (13b) отпадает, ибо очевидно, что $\oint d\mathbf{A} = 0$. Полная сила, действующая на этот контур, таким образом равна

$$\mathbf{F} = i \oint \boldsymbol{\tau} d\sigma \times \mathbf{H}.$$

Таким образом, поскольку мы рассматриваем эту полную силу, совершенно безразлично, будет ли соответствующая элементарная сила определяться посредством (13b) или же более простой формулой

$$d\mathbf{F} = i\boldsymbol{\tau} d\sigma \times \mathbf{H}. \quad (14)$$

Теперь мы попытаемся вывести эти элементарные силы из изменения полной энергии U , которое получается при очень малом смещении рассматриваемого контура в магнитном поле. При этом не нужно считать контур неизменяемым (как это мы делали в случае элементарных токов); напротив, его можно рассматривать как гибкую, растяжимую нить.

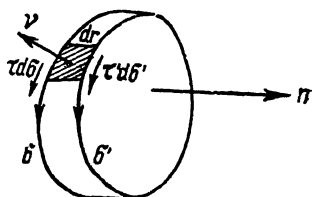


Рис. 15.

Обозначим „первоначальный“ и „смещенный“ контуры через σ и σ' (рис. 15), а соответствующие энергии — через U и U' . Далее, обозначим через S' произвольную поверхность, ограниченную σ' . Соответствующую поверхность для σ , которую можно выбрать совершенно произвольно, образуем добавлением поверхности Σ (причем $S = \Sigma + S'$), описанной контуром при перемещении из положения σ в σ' . Тогда по (10) получим

$$U' - U = \delta U = \int i\mathbf{H}, d\Sigma,$$

где $\boldsymbol{\nu}$ обозначает нормаль к $d\Sigma$. За элемент поверхности $d\Sigma$ мы возьмем поверхность, описанную элементом контура $d\sigma$, т. е. площадь параллелограмма со сторонами $\boldsymbol{\tau} d\sigma$ и $\delta \mathbf{r}$ (бесконечно малые смещения различных точек $d\sigma$ в первом приближении можно считать равными и одинаково направленными). Так как при этом $\boldsymbol{\nu} d\Sigma = \boldsymbol{\tau} d\sigma \times \delta \mathbf{r}$, то мы получаем

$$\mathbf{H}, d\Sigma = \mathbf{H} \boldsymbol{\nu} d\Sigma = \mathbf{H} (\boldsymbol{\tau} d\sigma \times \delta \mathbf{r}) = -\sigma \mathbf{r} (\boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{H}).$$

и, следовательно,

$$-\delta U = \oint (i\boldsymbol{\tau} d\sigma \times \mathbf{H}) \delta \mathbf{r}.$$

Это выражение, представляющее уменьшение энергии при рассматриваемом перемещении, должно очевидно равняться общей работе элементарных сил, действующих на отдельные элементы тока. Отсюда получается

$$\oint i \tau d\sigma \times \mathbf{H} \delta \mathbf{r} = \oint d\mathbf{F} \delta \mathbf{r}.$$

В этом уравнении $\delta \mathbf{r}$ следует рассматривать как очень малую, непрерывно меняющуюся вдоль σ векторную величину: помимо этого обстоятельства она совершенно произвольна, ибо перемещения различных (не соседних) точек σ , по нашему предположению, не зависят друг от друга. Поэтому в вышенаписанном интеграле отдельные элементы или, вернее, соответствующие множители при $\delta \mathbf{r}$ должны быть равными друг другу.

Таким образом, мы получаем

$$d\mathbf{F} = i \tau d\sigma \times \mathbf{H},$$

т. е. формулу (14). Прежняя формула (13b) оказывается, следовательно, неправильной; ¹ поэтому положенное в ее основу допущение о магнитной энергии отдельных элементов контура тока мы должны признать также неправильным.

Эта „нерасчленимость“ магнитной энергии замкнутого тока объясняется тем обстоятельством, что движение отдельных электрических зарядов, образующее ток, не представляет собою стационарного, т. е. не зависящего от времени, процесса. Электрическая же и магнитная энергии, в той форме, в которой они были определены выше, относятся только к таким явлениям которые не зависят явно от времени.

Таким образом, в случае отдельных элементов тока мы должны отбросить понятие энергии и рассматривать только соответствующие элементарные силы, определяемые формулой (14). Эти элементарные силы можно далее представить как сумму отдельных сил, которые соответствуют отдельным зарядам (электронам), образующим данный элемент тока. А именно, для частицы с зарядом e , движущейся в магнитном поле со скоростью \mathbf{v} , мы получаем, по (6b), следующую „магнитную“ или „электромагнитную“ силу

$$\mathbf{f} = e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}. \quad (14a)$$

Заметим, что эту силу можно трактовать как электрическую силу, которая обусловлена фиктивным электрическим полем с напряженностью

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}. \quad (14b)$$

Хотя сила (14a) не может быть строго выведена из представления об энергии, все же при вычислении полной энергии стационар-

¹ Легко видеть, что интеграл $\oint d\mathbf{A} \delta \mathbf{r}$, вообще говоря, отличен от нуля.

ного тока (линейного и нелинейного) отдельным движущимся зарядами (электронам) можно приписать фиктивную магнитную энергию [ср. (13а)]

$$u = -e \frac{v}{c} A. \quad (15)$$

Этой фиктивной энергии соответствует сила

$$\mathbf{f} = -\text{grad } u = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A},$$

т. е.

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{A} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (15a)$$

первая (неправильная) часть которой при суммировании по всем зарядам или даже только по зарядам, образующим какую-либо замкнутую линию тока, должна обращаться в нуль.



Г Л А В А III

СТРУКТУРА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В СВЯЗИ С ПРИНЦИПОМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

§ 1. Эквивалентность элементарных диполей и токов. В предыдущих главах мы изучали механическое действие диполей и токов только, так сказать, в „пассивном“ отношении; „активные“ же диполи и токи, от которых исходит соответствующее действие, учитывались лишь косвенно, через посредство вызванного ими электрического или магнитного поля.

Для решения нашей основной задачи, заключающейся в определении взаимодействия диполей или токов, т. е. покоящихся или движущихся зарядов, мы должны теперь исследовать вопрос о структуре создаваемых ими полей. Допущение, что упомянутое взаимодействие можно вывести из взаимной потенциальной энергии („принцип энергии“), дало нам возможность установить общие свойства этих полей — невихревой характер электрического и отсутствие источников для магнитного. Однако этим их определение еще не было закончено, а только сведено к более простой задаче — к определению скалярного потенциала φ и векторного потенциала \mathbf{A} .

Для дальнейшего продвижения вперед принцип энергии нам недостаточен, и поэтому мы должны дополнить его другим принципом. Однако, раньше чем формулировать этот принцип, мы в виде вступления сделаем некоторые замечания, несущественные для нашего изложения, но важные в историческом отношении.

Механическое действие, испытываемое элементарным электрическим током с моментом \mathbf{m} в магнитном поле \mathbf{H} , совпадает с тем действием, которое испытывал бы элементарный электрический диполь с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{m}$ в фиктивном электрическом поле $\mathbf{E} = \mathbf{H}$. Вместо фиктивного электрического поля можно представить себе фиктивный магнитный диполь, состоящий из двух противоположных „магнитных полюсов“ $\pm \mu$, расположенных на очень малом расстоянии друг от друга l , причем

$$\mu l = m,$$

что соответствует соотношению $e l = p$ в случае электрического диполя. Таким образом этот „элементарный магнитный диполь“ или „элементарный магнит“ (M) должен реагировать на действительное магнитное поле \mathbf{H} точно таким же образом, как и соответствующий электрический ток (S).

Согласно принципу энергии действие, испытываемое S , равно

и прямо противоположно действию, оказываемому им на ток S' , создающий „внешнее“ поле H (ибо оба действия получаются из одной и той же „взаимной“ потенциальной энергии). Если мы хотим применить принцип энергии также и к магниту M , заменяющему в пассивном отношении ток S , то мы должны утверждать, что эта замена сохраняется также и в активном отношении, т. е. что M создает такое же самое магнитное поле (H'), как и S .

В частности представим себе S' как некоторый также элементарный ток. Тогда вышеприведенное утверждение можно выразить следующим образом: взаимодействие элементарного магнита с элементарным током тождественно с взаимодействием двух элементарных токов или двух элементарных магнитов.

Напомним, что магнитные силовые действия впервые были открыты на так называемых „естественных магнитных телах“ или на „естественных магнитах“. При этом такие магниты сначала рассматривались как действительные магнитные диполи, свойства которых считались тождественными со свойствами электрических диполей (Кулон). Неразделимость противоположных „магнитных зарядов“ объяснялась так же, как и неразделимость противоположных электрических зарядов в диэлектриках, а именно при помощи допущения, что противоположные магнитные полюсы всегда вынуждены оставаться в одних и тех же молекулах данного тела. Согласно этой теории, восходящей к Веберу, естественный магнит следует рассматривать как систему элементарных „молекулярных“ магнитов.

Впоследствии, когда были открыты и изучены магнитные действия электрических токов, эти „молекулярные магниты“ Вебера были заменены Ампером эквивалентными „молекулярными токами“, которые теперь рассматриваются как обращающиеся электроны и называются магнетонами.

Таким путем магнитные полюсы и диполи были признаны чисто фиктивными математическими образами; несмотря на это даже и в настоящее время они сохраняют свое значение как очень полезное и даже почти необходимое пособие при изложении вопроса об электрокинетических взаимодействиях.

После этих исторических замечаний, не имеющих прямого отношения к нашему ходу мыслей, мы снова оставим без внимания фиктивные магнитные диполи и сформулируем следующий принцип эквивалентности между элементарными электрическими диполями и электрическими токами.

При надлежащем выборе отношения между электростатическими и электрокинетическими единицами, взаимодействие элементарных электрических диполей тождественно с взаимодействием элементарных электрических токов, находящихся в таком же самом относительном расположении и обладающих магнитными моментами, равными по величине и направлению электрическим моментам соответствующих диполей.

Так как „пассивная“ эквивалентность элементарных диполей

и токов в отношении их поведения в заданных внешних полях уже была установлена выше, то принцип эквивалентности означает, что магнитное поле элементарного электрического тока \mathbf{H} совершенно совпадает с электрическим полем \mathbf{E} некоторого элементарного диполя, имеющего одинаковое положение, ориентацию и численно равный момент ($\mathbf{m} = \mathbf{p}$). В особенности следует подчеркнуть асимптотический характер этого совпадения в том смысле, что оно справедливо лишь для достаточно удаленных точек пространства. Само собой понятно, что в непосредственной близости от обоих образов эта эквивалентность уже не имеет места. Однако, рассматривая эти образы (т. е. диполь и контур с током) как бесконечно малые, т. е. как точечные, можно распространить область применимости принципа эквивалентности на все пространство за исключением некоторых „особенных“ точек.

§ 2. Основные уравнения электрического и магнитного поля в пустом пространстве. Потенциальная энергия U элементарного диполя D по отношению к некоторым другим диполям $D', D'' \dots$ должна очевидно равняться сумме энергий $U', U'' \dots$ характеризующих в отдельности взаимодействие D с $D', D'' \dots$. Обозначим электрический момент D через \mathbf{p} , а напряженности электрических полей, исходящих от $D', D'' \dots$ в точке P , в которой находится D , через $\mathbf{E}', \mathbf{E}'', \dots$. Притом мы должны иметь равенства

$$U' = -(\mathbf{p}\mathbf{E}'); \quad U'' = -(\mathbf{p}\mathbf{E}''),$$

и следовательно

$$U = U' + U'' + \dots = -\mathbf{p}(\mathbf{E}' + \mathbf{E}'' + \dots).$$

С другой стороны эта результирующая энергия должна равняться (отрицательному) внутреннему произведению \mathbf{p} на напряженность результирующего поля \mathbf{E} . Отсюда получается (почти тривиальный) результат

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'' + \dots,$$

т. е. напряженность результирующего поля составляет векториально из напряженностей элементарных полей. Этот результат, разумеется, имеет место также и для напряженности магнитного поля.

Всякая система электрических диполей или токов может быть заменена системой элементарных, т. е. бесконечно малых по своим размерам диполей или токов, если только в рассматриваемой точке, для которой нужно определить результирующую (полную) напряженность поля, отсутствуют заряды или токи. Однако ее расстояние от подобных „критических“ или „особенных“ точек может быть сколь угодно мало, ибо линейные размеры элементарных диполей и токов можно представить себе как бесконечно малые по сравнению с этими расстояниями.

Таким образом, вне „особенных“ точек полную напряженность электрического или магнитного полей можно рассматривать как

геометрическую сумму бесконечно большого числа частей, зависящих от элементарных диполей или токов.

Из принципа энергии следует, что электростатическое и электромагнитное поля удовлетворяют уравнениям $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{H} = 0$, причем эти уравнения остаются в силе для всех точек пространства, включая и особенные точки. Пользуясь принципом эквивалентности, мы приходим к заключению, что на конечном расстоянии от элементарного диполя или тока, т. е. вне особенных точек, соответствующее электростатическое и электрокинетическое (магнитное) поля удовлетворяют уравнениям

$$\text{div } \mathbf{E} = 0; \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

которые получаются из предыдущих перестановкой векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Таким образом, вне особенных точек как электрическое, так и магнитное поле не имеют ни вихрей, ни источников. Легко однако показать, что для таких особенных точек вышенаписанные уравнения не выполняются, т. е. что особенные точки являются источниками электрического поля и вихрями магнитного.

Для доказательства мы прежде всего заметим, что на основании вытекающих из уравнений энергии формул

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \text{ и } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A},$$

уравнения (1) и (2) эквиваленты следующим уравнениям для потенциалов φ и \mathbf{A} :

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3)$$

(уравнение Лапласа) и

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0.$$

Последнее уравнение можно заменить уравнением того же вида, как и (3):

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0. \quad (4)$$

при условии [ср. гл. II, формула (12a)]

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (4a)$$

Рассмотрим теперь вектор $\varphi \mathbf{E} = -\varphi \text{grad } \varphi$. Так как $\text{div } \varphi \mathbf{E} = \varphi \text{div } \mathbf{E} + \mathbf{E} \text{grad } \varphi = -\varphi \nabla^2 \varphi - \mathbf{E}^2$ то, интегрируя по совершенно произвольному объему V и применяя теорему Гаусса, мы получаем

$$-\oint E_n dS = \int \varphi \nabla^2 \varphi dV + \int E^2 dV, \quad (5)$$

где S обозначает поверхность, охватывающую данный объем. Если мы удалим эту поверхность в бесконечность, т. е. распространим объемное интегрирование по всему пространству, то,

предполагая, что φ остается повсюду непрерывным и удовлетворяет уравнению (3), получаем

$$-\lim_{S \rightarrow \infty} \oint \varphi E_n dS = \int E^2 dV.$$

Допустим теперь, что в бесконечно удаленных точках φ , а следовательно и E исчезают, и притом так, что поверхностный интеграл $\oint \varphi E_n dS$ стремится к нулю, независимо от формы поверхности S . Так как S возрастает пропорционально квадрату расстояния (R), то это допущение должно выполняться, если потенциал φ убывает обратно пропорционально R (следовательно E — обратно пропорционально R^2) или еще быстрее (см. ниже § 3). Тогда объемный интеграл $\int E^2 dV$ должен также исчезать, и так как E^2 — не отрицательная величина, то она должна быть равна нулю тождественно, т. е. во всем пространстве. Таким образом существование неисчезающего электрического поля, при упомянутых предположениях относительно потенциала φ и его поведении в бесконечно удаленных точках, несовместимо с тождественным выполнением уравнения (3), а следовательно и уравнения (1). Но так как везде вне особенных точек эти уравнения удовлетворяются, то они и должны нарушаться только в этих точках.

Соответствующее доказательство для магнитного поля можно получить на основании уравнения (4) так же, как и в только что рассмотренном случае, если заменить φ отдельными компонентами A . К тому же результату можно прийти на основании тождества

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

А именно, заменяя $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ на \mathbf{H} и $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ на $-\nabla^2 \mathbf{A}$, получаем следующую формулу, совершенно аналогичную (5):

$$\oint (\mathbf{A} \times \mathbf{H})_n dS = \int \mathbf{A} (\nabla^2 \mathbf{A}) dV + \int H^2 dV, \quad (6)$$

откуда можно вывести то же самое заключение и притом при тех же условиях относительно векторного потенциала \mathbf{A} , как и в случае скалярного потенциала.

§ 3. Основные уравнения электромагнитного поля для особенных точек. Представим себе, что электрический заряд e сконцентрирован в небольшом объеме v , который можно свести к одной точке Q . Пусть E будет напряженностью электрического поля, обусловленного этим зарядом. Далее, обозначим через V произвольный объем, содержащий объем v (или точку Q), а через S — ограничивающую его поверхность.

Согласно формуле Гаусса имеет место соотношение

$$\oint E_n dS = \int \operatorname{div} E dV$$

или, так как $\mathbf{E} = 0$ вне v ,

$$\oint E_n dS = \int \operatorname{div} \mathbf{E} dv.$$

Отсюда следует, что электрический поток сквозь замкнутую поверхность, содержащую данный электрический заряд, не зависит от величины, формы и расположения этой поверхности (относительно v или Q). В пределе $v \rightarrow 0$, при заданном положении Q , в каждой точке поверхности S напряженность электрического поля должна иметь вполне определенное направление и величину, прямо пропорциональную e , так что мы можем положить

$$\oint E_n dS = C_1 e, \quad (7)$$

где C_1 обозначает коэффициент пропорциональности. Согласно предыдущему этот коэффициент не зависит от положения точки Q , поскольку последняя остается внутри S (S теперь рассматривается как вполне определенная поверхность).

Предположим теперь, что внутри S находится несколько точечных зарядов. Обозначая величины этих зарядов через $e', e'' \dots$, а соответствующую им напряженность поля через $\mathbf{E}', \mathbf{E}'' \dots$ и т. д., получаем:

$$\oint E_n' dS = C_1 e', \quad \oint E_n'' dS = C_1 e'',$$

где C_1 обозначает тот же самый коэффициент, как и в (7).

С другой стороны, очевидно, мы имеем для полного электрического заряда внутри S : $e = e' + e'' + \dots$ и для соответствующей результирующей напряженности поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'' + \dots$. Далее, так как $E_n' + E_n'' + \dots = E_n$, то, складывая написанные выше уравнения, мы получаем

$$\oint E_n dS = C_1 e,$$

т. е. формулу того же самого вида, как и (7), но имеющую более общее значение, поскольку заряд, находящийся внутри S , теперь может быть распределен по объему V совершенно произвольным образом.

В частности представим себе, что этот заряд распределен по объему непрерывным образом, т. е. так, что бесконечно малый элемент объема dV содержит бесконечно малый заряд $de = \rho dV$ (ρ — объемная плотность заряда). Тогда будем иметь

$$e = \int \rho dV,$$

и следовательно

$$\oint E_n dS = \int \operatorname{div} \mathbf{E} dV = C_1 \int \rho dV.$$

Отсюда, в виду произвольности V , получается следующее

дифференциальное уравнение электрического поля для особых точек:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\nabla^2 \varphi = C_1 \rho. \quad (8)$$

Это уравнение может быть рассматриваемо как обобщение уравнения (1) или (3). Оно остается справедливым также и тогда, когда ρ становится бесконечным, т. е. в случае прерывного распределения электричества в пространстве. Однако в этом случае полезнее оперировать не с (8), а с соответствующим интегральным уравнением (7).

Теперь мы перейдем к рассмотрению магнитного поля и сначала представим себе, что это поле \mathbf{H} создается очень тонкой нитью тока, которая может быть сведена к (замкнутой) линии σ . Применяя формулу Стокса к отличному от σ контуру σ' , охватывающему один раз σ , мы получаем уравнение

$$\oint H_{\tau'} d\sigma' = \int \operatorname{rot}_n \mathbf{H} ds,$$

причем s обозначает ту часть произвольной поверхности S , ограниченной σ' , которая вырезается из этой поверхности нитью тока (ибо вне этой нити тока $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$).

Так как через одно и то же поперечное сечение нити s можно провести множество поверхностей S , которые ограничены различными контурами σ' , и так как, с другой стороны, поверхности, ограниченные одним и тем же контуром σ' , могут пересекать рассматриваемую нить тока в различных местах, то из полученной выше формулы следует во-первых, что циркуляция вектора \mathbf{H} вдоль контура, охватывающего один раз нить тока, не зависит от величины, формы и положения (относительно σ) этого контура, и во вторых, что поток вектора $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ через различные поперечные сечения нити тока имеет одно и то же значение. Из первого следствия путем рассуждений, совершенно аналогичных тем, которые привели нас к установлению формулы (7) для случая произвольного распределения электрического заряда внутри замкнутой поверхности S , получается следующая формула, аналогичная (7)

$$\oint H_{\tau'} d\sigma' = C_2 i, \quad (9)$$

где C_2 обозначает новый коэффициент пропорциональности, а i — полную силу тока, проходящего сквозь σ' , т. е. алгебраическую сумму токов для различных охватываемых σ' нитей тока, со знаком $+$ или $-$ в зависимости от направления этих токов по отношению к направлению обхода на контуре σ' .

Если представить себе в частности непрерывное распределение токов с конечной пространственной плотностью \mathbf{j} , то получим

$$i = \int j_n dS,$$

т. е.

$$\oint H_{\tau'} d\sigma' = \int \operatorname{rot}_n \mathbf{H} dS = C_2 \int j_n dS,$$

и следовательно, в виду произвольности поверхности S ,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{A} = C_0 \mathbf{j}. \quad (9a)$$

Эту формулу можно рассматривать как обобщение формулы (2) или (4) для случая особенных точек магнитного поля.

Заметим, что уравнение (9), на основании (4а) главы II, совместно с тождеством $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, поскольку рассматриваемый ток является стационарным, что до сих пор все время и предполагалось. Вышеупомянутое второе следствие из формулы $\oint H_x d s' = \int \operatorname{rot}_x \mathbf{H} ds$ — независимость $\int \operatorname{rot}_x \mathbf{H} ds$ от выбора поперечного сечения нити тока s — соответствует равенству силы тока $i = \int j_x ds$ для различных поперечных сечений этой нити тока.

§ 4. Соотношение между постоянными C_1 и C_2 . Неэлементарные токи и двойные слои; неэлементарные диполи и соленоиды. Формулы (7) и (8) [или, что то же самое, уравнения (3) и (4)] непосредственно связаны друг с другом принципом эквивалентности. Поэтому одну из них можно вывести из другой. Подобный вывод показывает, между прочим, что коэффициенты C_1 и C_2 (при вышеуказанном выборе отношения между электрокинетическими и электростатическими единицами) должны иметь одно и то же численное значение.

До сих пор мы представляли себе элементарный диполь в виде двух противоположных зарядов, сосредоточенных в отдельных точках (или бесконечно малых элементах объема), а элементарный ток в виде плоского замкнутого контура. Как ни различны эти представления в геометрическом отношении, их можно однако свести к одной общей форме, а именно к цилиндру, основания которого при этом играют роль концов диполя, а боковая поверхность — роль контура тока. Уменьшая поперечные размеры цилиндра по отношению к высоте, т. е. придавая ему вид бесконечно тонкого стержня, мы вернемся к обычному представлению о диполе; наоборот, уменьшая высоту по отношению к поперечным размерам, т. е. придавая цилиндру вид бесконечно тонкого диска или так называемого „двойного слоя“, мы вернемся к обычному представлению элементарного электрического тока. Само собою разумеется, что, заменяя концы диполя основаниями цилиндра, мы тем самым предполагаем, что образующие его электрические заряды $-e$ и $+e$ не сосредоточены в отдельных точках, но равномерно распределены по поверхностям S' и S'' соответствующих оснований,

так что на единицу площади приходится заряд $\pm \eta = \pm \frac{e}{S}$ ($S = S' = S''$), который мы будем называть поверхностной плотностью электричества. Точно так же, заменяя контур тока боковой поверхностью цилиндра, мы должны себе представить, что рассматриваемый ток равномерно распределен

по всей этой поверхности, так что на единицу длины каждой из ее образующих приходится сила тока $k = \frac{i}{l}$, где l — высота цилиндра; величина k называется поверхностной плотностью электрического тока.

Электрический момент „цилиндрического“ диполя $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{p} = \eta S \mathbf{l} = i_p S \mathbf{n}, \quad (10)$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{l}}{l}$ — внешняя нормаль к положительно заряженному основанию цилиндра, а

$$i_p = \eta l. \quad (10a)$$

Формула (10) соответствует обычному выражению для магнитного момента элементарного тока силы i_p , обтекающего площадь S .

Точно так же магнитный момент „цилиндрического“ тока $\mathbf{m} = iS \mathbf{n}$ можно представить в виде

$$\mathbf{m} = k l S \mathbf{n} = e_m \mathbf{l}, \quad (11)$$

соответствующем обычному выражению для момента диполя длины l , образованного точечными зарядами

$$e_m = kS. \quad (11a)$$

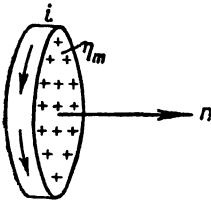


Рис. 16.

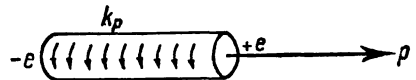


Рис. 17.

Отсюда следует что, рассматривая магнитное поле \mathbf{H} как электрическое, мы можем трактовать элементарный электрический ток с моментом $\mathbf{m} = iS \mathbf{n}$ как диполь, имеющий форму пластинки, ограниченной контуром тока и покрытой с противоположных сторон электрическими зарядами, поверхностная плотность которых $\pm \eta_m$ связана с толщиной пластинки соотношением $\eta_m l = i$ (рис. 16). Наоборот, рассматривая электрическое поле \mathbf{E} как магнитное, можно трактовать элементарный диполь с моментом $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$ как ток, циркулирующий в стержнеобразном соленоиде с длиной l и с бесконечно малым сечением S , связанным с поверхностной плотностью тока k_p соотношением

$$k_p S = e \quad (11b)$$

($\pm e$ суть „истинные“ электрические заряды рассматриваемого диполя); подобного вида ток (рис. 17) мы будем называть соленоидальным током или соленоидом.

Представим себе какой-либо неэлементарный линей-

ный ток с контуром σ и произвольную поверхность S , стягиваемую этим контуром. Заменяя рассматриваемый ток сеткой элементарных токов, расположенных на S , с магнитными моментами $dm = i n dS$, мы можем отождествить магнитное поле всех этих токов H с электрическим полем системы элементарных диполей „пластинчатой“ формы с основаниями dS' и dS'' , равными соответствующим элементам поверхности dS и сдвинутыми относительно последних в противоположные стороны на бесконечно малые отрезки $\frac{l}{2}$. Считая длину l одинаковой для всех диполей и соединяя их вместе, мы получим две бесконечно близкие поверхности S' и S'' , из коих одна (S'), сдвинутая относительно S в сторону положительной нормали n , покрыта положительным электричеством с плотностью $\eta_m = \frac{i}{l}$, а другая (S'') — отрицательным электричеством с плотностью $-\eta_m$. Подобная система называется двойным электрическим слоем. Совпадение электрического поля такого двойного слоя с магнитным полем H тока i , циркулирующего в граничном контуре σ , имеет место разумеется лишь во внешнем пространстве и не распространяется на точки, лежащие внутри двойного слоя.

Для определения поля внутри двойного слоя применим формулу (7), которой мы пользовались при выводе уравнения (3), к замкнутой поверхности S , содержащей небольшой участок одного из двух составляющих его слоев, например отрицательного S' (рис. 18). Обозначая часть этой поверхности, лежащую между поверхностями S' и S'' (и им параллельную) через s , а внешнюю часть (совершенно произвольную) через s' , имеем

$$\int E_n ds + \int E'_n ds' = -C_1 \eta_m s.$$

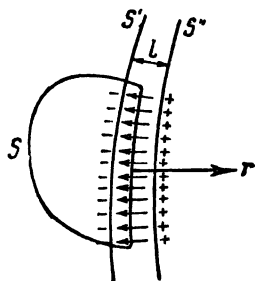


Рис. 18.

Заметим, что при бесконечно малой толщине двойного слоя, плотность η_m , — а вместе с ней и напряженность электрического поля внутри слоя — представляют собой бесконечно большую величину. А так как электрическое поле E' вне двойного слоя, будучи равно магнитному H , должно оставаться конечным, то в предыдущем равенстве второй член слева можно отбросить и просто положить

$$\int E_n ds = -C_1 \eta_m s,$$

или, следовательно, в виду произвольности s ,

$$E_n = -C_1 \eta_m.$$

Нетрудно убедиться, что внутри двойного слоя электрическое поле E параллельно нормали n' .

Действительно, в противном случае интеграл $\oint E dz'$ для замкнутого контура, проходящего частью внутри, частью вне двойного слоя, имел бы отличное от нуля значение, что противоречит принципу энергии.

Таким образом, мы приходим к заключению, что внутри двойного слоя напряженность электрического поля E параллельна нормали n и по величине равна

$$E = -C_1 \eta_m. \quad (12).$$

Отрицательный знак в этой формуле означает, что при $C_1 > 0$ вектор E направлен противоположно нормали; наоборот, при $C_1 < 0$ он направлен в одну сторону с нормалью.

Примем во внимание некоторый замкнутый контур σ' , охватывающий контур рассматриваемого тока σ , следовательно пересекающий (и притом только один раз) эквивалентный этому току двойной слой. Обозначая часть контура σ' , заключенную внутри двойного слоя, через σ_i , а остальную „внешнюю“ часть через σ'_a , имеем, согласно принципу энергии,

$$\oint E_{\sigma'} dz = \int E \tau'_a d\sigma'_a + \int E \tau'_i d\sigma'_i = 0 \quad (12a)$$

или, так как внутри слоя $E = -n C_1 \eta_m$,

$$\int E \tau'_i d\sigma'_i = -\eta_m C_1 \int n \tau'_i d\sigma'_i = \mp C_1 \eta_m l,$$

где верхний знак соответствует положительному направлению обхода σ' по отношению к σ , т. е. $n \tau'_i > 0$ (рис. 19), а нижний — отрицательному. Имея в виду положительное направление и принимая во внимание, что внешнее электрическое поле двойного слоя E совпадает с магнитным полем H окаймляющего его тока и что, далее, при бесконечной малости σ_i интеграл

$$\int H_{\sigma'} d\sigma'_i$$

представляет собою бесконечно малую величину, получаем окончательно

$$\oint H_{\sigma'} d\sigma'_i = C_1 i.$$

Сравнение этой формулы с формулой (9) показывает, что $C_2 = C_1$.

К тому же результату можно прийти обратным путем, а именно заменяя элементарный диполь $A' A''$ эквивалентным ему соленоидальным током. Представим себе какую-либо линию σ , проведенную от A' к A'' , и цепь элементарных диполей с моментами $d\mu = e\tau d\sigma$, расположенных вдоль этой линии.

Рассматривая эти диполи как цилиндры, осями которых служат отрезки $d\sigma$, мы можем отождествить электрическое поле каждого из них (во внешнем пространстве) с магнитным полем

элементарного тока, обтекающего боковую поверхность соответствующего цилиндра (перпендикулярно образующим), при условии, чтобы произведение поперечного сечения последнего S на поверхностную плотность тока k_p равнялось заряду концов диполя e . Сечение S , как в смысле величины, так и формы, мы будем считать одинаковым для всех цилиндров, что позволяет соединить их в одну трубку, обтекаемую электрическим током с постоянной поверхностной плотностью в направлении, соответствующем (по правилу правого винта) направлению касательного вектора τ .

Вне этой трубки или соленоида магнитное поле \mathbf{H} должно совпадать с электрическим полем \mathbf{E} рассматриваемого диполя. Что касается величины и направления поля \mathbf{H} внутри соленоида,

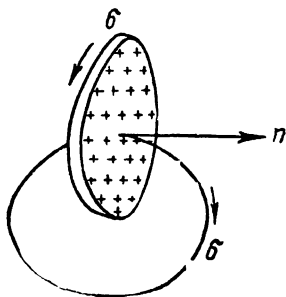


Рис. 19.

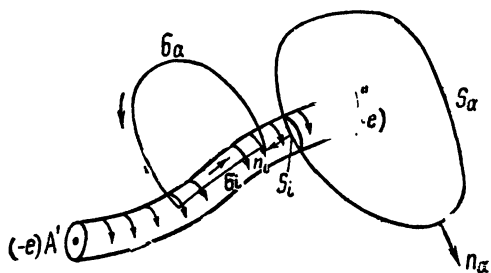


Рис. 20.

то оно может быть определено следующим образом. Представим себе замкнутый контур, часть которого σ_i проходит внутри соленоида (параллельно σ), а другая часть σ_a — снаружи. Тогда, согласно формуле (9), которую мы принимаем за исходную, будем иметь (если направление интегрирования на σ_i совпадает с положительным направлением σ)

$$\int H_{\tau_i} d\sigma_i + \int H_{\tau_a} d\sigma_a = C_2 k_p \sigma_i.$$

Так как вне соленоида поле \mathbf{H} , будучи тождественным с \mathbf{E} , имеет конечную величину, тогда как плотность тока

$$k_p = \frac{e}{S}$$

бесконечно велика, то предыдущее равенство сводится к

$$\int H_{\tau_i} d\sigma_i = C_2 k_p \sigma_i$$

или, в виду произвольности σ_i , $H_{\tau_i} = C_2 k_p$.

Если бы вектор \mathbf{H} имел составляющую, перпендикулярную к оси трубки (т. е. τ), то поток его через замкнутую поверхность,

проходящую частью внутри, частью вне соленоида (и в сечении плоскостью чертежа, изображаемую контуром $\sigma_i + \sigma_a$), должен был бы иметь отличное от нуля значение, что противоречит принципу энергии.

Отсюда следует, что вектор \mathbf{H} направлен внутри соленоида параллельно его оси, если $C_2 > 0$, или антипараллельно, если $C_2 < 0$, и имеет постоянное численное значение.

$$H = C_2 k_p. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь замкнутую поверхность S'' , охватывающую один из концов соленоида, например соответствующий положительному концу диполя. Обозначая внешнюю часть этой поверхности через S_a , а внутреннюю (вырезаемую соленоидом) через S_i , по принципу энергии получим

$$\int H_{n_i} dS_i + \int H_{n_a} dS_a = 0,$$

или, в виду того, что

$$\int H_{n_i} dS_i = -C_2 k_p S = -C_2 e$$

(поскольку внешняя нормаль к поверхности S_i противоположна осевой линии σ) и

$$\int H_{n_a} dS_a = \int E_{n_a} dS_a = \oint E_n dS'',$$

окончательно имеем

$$\oint E_n dS'' = C_2 e.$$

Эта формула совпадает с прежней формулой (7), если положить $C_2 = C_1$.

§ 5. Определение электрического поля из распределения зарядов. Предположим, что в некоторой точке P' сосредоточен заряд e' . Из соображений симметрии следует, что электрическое поле \mathbf{E} этого заряда должно иметь радиальную симметрию,¹ т. е. что вектор электрической напряженности в какой-либо точке P должен быть направлен по прямой $PP' = \mathbf{R}$ в положительную или отрицательную сторону, в зависимости от знака e . Применяя формулу (7) к поверхности шара с центром P' и радиусом R , получаем, в виду совпадения внешней нормали \mathbf{n} с направлением \mathbf{R} , $E_n = \pm E$, и, следовательно,

$$\pm E = \frac{C_1 e'}{4\pi R^2},$$

¹ Этот принцип симметрии означает равноценность или относительность различных пространственных направлений. Если бы электрическое поле заряда e' не было симметрично относительно P' , то различные направления нельзя было бы рассматривать как эквивалентные.

где верхний знак соответствует $C_2 e' > 0$, а нижний $C_2 e' < 0$. Вектор \mathbf{E} совпадает с силой, действующей на единицу положительного заряда в точке P . Опыт показывает, что при $e' > 0$ эта сила представляет собой отталкивание,¹ а при $e' < 0$ — притяжение. Отсюда следует, что коэффициент $C_1 = C_2$ имеет существенно положительное значение. Что касается его величины, то она остается совершенно произвольной, определяясь выбором единицы электрического заряда. Обычно полагают

$$C_1 = C_2 = 4\pi,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E} = \frac{e' \mathbf{R}}{R^3} = \frac{e' \mathbf{R}_0}{R^2}, \quad (14)$$

где $\mathbf{R}_0 = \frac{\mathbf{R}}{R}$ — единичный вектор, определяющий направление отрезка $P'P$. При таких условиях сила взаимодействия двух зарядов e и e' , сосредоточенных в точках P и P' , выражается формулой Кулона

$$f = \frac{e' e}{R^2}, \quad (14a)$$

причем случаю $f > 0$ соответствует взаимное отталкивание, а случаю $f < 0$ — взаимное притяжение.

В теоретических исследованиях часто полагают, следуя Лоренцу, $C_1 = C_2 = 1$; таким образом вместо обычных электростатических и электромагнитных единиц вводятся другие, так называемые „рациональные“ единицы. В дальнейшем мы будем пользоваться исключительно обычными единицами ($C_1 = C_2 = 4\pi$).

Представим себе произвольную неподвижную точку O ; пусть далее $OP' = \mathbf{r}'$ и $OP = \mathbf{r}$ — радиус-векторы точек P' и P относительно O . Радиус-вектор $P'P = \mathbf{R}$ очевидно представится тогда как геометрическая разность \mathbf{r} и \mathbf{r}'

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \quad (15)$$

При дифференцировании \mathbf{R} или какой-нибудь функции от \mathbf{R} каждый из векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' может играть роль аргумента; при этом другой рассматривается как постоянный параметр. Считая „источник“ P' (т. е. вектор \mathbf{r}') неподвижным, а „точку наблюдения“ P , т. е. вектор \mathbf{r} — переменным, мы получаем „производные в точке наблюдения“, которые мы будем обозначать вообще символом ∇ (grad, div, rot). Для обозначения соответствующих „производных в точке истока“ (\mathbf{r}' переменный, $\mathbf{r} = \text{const}$) мы будем пользоваться штрихованным символом ∇' (grad', div', rot'). При этом, очевидно, для любой функции \mathbf{R} и для каждого рода дифференцирования имеет место соотношение

$$\nabla' = -\nabla. \quad (15a)$$

¹ Т. е. что одноименные заряды отталкиваются.

Как легко видеть, вектор $\frac{\mathbf{R}}{R^3}$ равен градиенту „в точке наблюдения“ функции $-\frac{1}{R}$ ($\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\text{grad} \frac{1}{R}$). Отсюда, согласно (14), следует $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi$, где

$$\varphi = \frac{e'}{R}. \quad (16)$$

Эта формула представляет собой обычное выражение для электрического потенциала точечного заряда; при этом принимается, что в бесконечности ($R = \infty$) потенциал должен обращаться в нуль.

Произведение φ на величину заряда e , сосредоточенного в точке P , равно взаимной потенциальной энергии обоих зарядов

$$U = \frac{e'e}{R}. \quad (16a)$$

Отрицательный градиент этой величины по r или r' представляет собою силу, действующую на e со стороны e' или на e' со стороны e .

Согласно (15a) эти силы прямо противоположны и по своему численному значению равны $\frac{e'e}{R^2}$.

При наличии нескольких зарядов e'_1, e'_2, \dots в точках P'_1, P'_2, \dots напряженность результирующего электрического поля в рассматриваемой точке наблюдения P равна геометрической сумме векторов

$$\mathbf{E}_k = e'_k \frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3},$$

где $\mathbf{R}_k = P_k'P$, а результирующий потенциал равен алгебраической сумме соответствующих потенциалов

$$\varphi_k = \frac{e'_k}{R_k}.$$

Если при этом представить себе отдельные точечные заряды замеченными непрерывным пространственным распределением электричества и обозначить заряд de' , содержащийся в элементе объема dV , через $\rho' dV$, то для \mathbf{E} и φ получаются следующие интегральные выражения

$$\mathbf{E} = \int \rho' \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV', \quad (17)$$

$$\varphi = \int \frac{\rho'}{R} dV'. \quad (17a)$$

При интегрировании r рассматривается как постоянный параметр, а ρ' — как заданная функция векторного аргумента r' . Ин-

тегрирование должно быть распространено на все пространство; само собой разумеется, что места, в которых $\rho' = 0$, при этом не имеют значения. Легко убедиться, что интеграл (17) равен взятому по \mathbf{r} отрицательному градиенту интеграла (17a); это следует из того факта, что дифференцирование по вектору \mathbf{r} , точно так же, как и при обычном дифференцировании интеграла по скалярному параметру, может быть произведено под знаком интеграла.

Формула (17a) очевидно представляет собою решение дифференциального уравнения (8) $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$.

Действительно, ее можно получить непосредственным интегрированием этого уравнения, принимая во внимание пограничные условия.

Сначала представим себе, что плотность заряда ρ исчезает повсюду, за исключением некоторой определенной точки P' .

Так как $\text{grad } \varphi(R) = \frac{d\varphi}{dR} \frac{\mathbf{R}}{R}$ [Введение, (28)], то мы имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \text{div grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dR} \frac{1}{R} \text{div } \mathbf{R} + \mathbf{R} \text{ grad } \left(\frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dR} \right) = \\ &= \frac{3}{R} \frac{d\varphi}{dR} + R \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dR} \right), \end{aligned}$$

или, как легко проверить,

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R} \frac{d^2(R\varphi)}{dR^2}. \quad (18)$$

Полагая

$$\frac{d^2(R\varphi)}{dR^2} = 0 \quad (18a)$$

для всех точек, за единственным исключением P' ($R=0$), после двукратного интегрирования получаем

$$R\varphi = AR + B,$$

т. е.

$$\varphi = A + \frac{B}{R}. \quad (18b)$$

Первая из обеих постоянных интегрирования определяется из пограничного условия $\varphi = 0$ при $R = \infty$ ($A = 0$), вторая же — из условия — $\oint \text{grad}_n \varphi dS = 4\pi e'$, где e' означает сосредоточенный в P' заряд, а S — произвольную (например, бесконечно малую) поверхность, охватывающую этот заряд; само собой понятно, что при этом получается $B = e'$.

Если точка P находится на достаточно большом расстоянии от P' , то последнюю можно заменить бесконечно малым объемом с конечной плотностью электричества ρ' . В виду линейного характера уравнения $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$, его полное решение получается как сумма элементарных решений (18b), соответствующих

отдельным элементарным зарядам $B = de' = \rho' dV'$, т. е. в форме интеграла (17а). При этом предполагается, что точка P находится „в пустом пространстве“, т. е. вне заряженного объема. Однако легко показать, что при конечной объемной плотности электрического заряда это предположение несущественно. А именно, представим себе бесконечно малый объем v , содержащий рассматриваемую „точку наблюдения“ P . Если плотность электрического заряда ρ в v конечна, то потенциал в точке P , обусловленный всем содержащимся в объеме v зарядом ρv , должен быть порядка $\frac{v}{\sqrt{v}} = v^{1/2}$,

и следовательно, в пределе $v \rightarrow 0$ исчезает.

Аналогичный результат получается и в том случае, когда заряд распределен с конечной поверхностной плотностью η , так что потенциал выражается поверхностным интегралом

$$\varphi = \int \frac{\eta dS'}{R}.$$

При этом потенциал, обусловленный элементом поверхности s в некоторой точке этого элемента, будет порядка

$$\frac{s}{\sqrt{s}} = \sqrt{s} \rightarrow 0.$$

Однако предположение, что P находится в пустом пространстве, существенно в случае распределения заряда с конечной линейной плотностью. Потенциал заряженной линии не имеет определенного конечного значения в точках этой кривой, подобно тому, как и потенциал точечного заряда в точке, где он находится.

Если рассматриваемый заряд находится в ограниченной области пространства, то в весьма удаленных точках он действует как точечный заряд

$$e' = \int \rho' dV,$$

так что потенциал его приближенно выражается формулой

$\varphi = \frac{e'}{R}$. Этим выполняется условие, установленное нами выше (§ 2) для исчезновения электростатического поля при отсутствии зарядов. Тем самым доказывается то, что выражение (17а) является единственным решением уравнения $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$ для всего пространства, исчезающим в бесконечности как $\frac{e'}{R}$, ибо другое решение можно было бы получить только прибавлением поля, соответствующего отсутствию зарядов.

§ 6. Определение магнитного поля из распределения токов. Магнитное поле, порождаемое стационарным течением электри-

чества с конечной объемной плотностью \mathbf{j} , можно определить из уравнений

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Рассмотрим прежде всего второе из этих уравнений. В виду его полной аналогии с уравнением $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$ для скалярного потенциала, можно тотчас же написать его решение в форме (17а); при этом необходимо лишь заменить φ на \mathbf{A} , а ρ — плотность электрического заряда — плотностью электрического тока \mathbf{j} (в точке \mathbf{r}').

Однако для того чтобы полученное таким образом выражение

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{j}'}{R} dV' \tag{19}$$

представляло собой искомый векторный потенциал рассматриваемого электрического тока, оно должно еще удовлетворять условию $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Нетрудно убедиться, что это требование действительно выполняется. Так как div означает дифференцирование по \mathbf{r} , а \mathbf{j}' является функцией вектора \mathbf{r}' , то прежде всего мы имеем

$$\text{div } \mathbf{A} = \int \text{div} \frac{\mathbf{j}'}{R} dV' = \int \mathbf{j}' \text{grad} \frac{1}{R} dV'.$$

Далее, согласно (15а)

$$\mathbf{j} \text{grad} \frac{1}{R} = -\mathbf{j}' \text{grad}' \frac{1}{R} = -\text{div}' \left(\frac{\mathbf{j}'}{R} \right) + \frac{1}{R} \text{div}' \mathbf{j}'$$

и следовательно

$$\text{div } \mathbf{A} = - \int \text{div}' \left(\frac{\mathbf{j}'}{R} \right) dV' + \int \frac{\text{div}' \mathbf{j}'}{R} dV'.$$

В случае рассматриваемого нами стационарного электрического тока расхождение \mathbf{j} должно обращаться в нуль. Если пронизываемая током область пространства ограничена поверхностью S' , то вектор \mathbf{j}' или во всяком случае его нормальная составляющая $j_{n'}$ должна также обращаться на этой поверхности в нуль.

Таким образом имеем

$$\text{div } \mathbf{A} = - \int \text{div}' \left(\frac{\mathbf{j}'}{R} \right) dV' = - \int \frac{j'_{n'}}{R} dS' = 0.$$

Установив, что это условие является выполненным, мы можем теперь вычислить магнитную напряженность в точке P по формуле (19)

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \int \text{rot} \left(\frac{\mathbf{j}'}{R} \right) dV' = - \int \mathbf{j}' \times \text{grad} \frac{1}{R} dV',$$

т. е.

$$\mathbf{H} = \int \frac{\mathbf{j}' \times \mathbf{R}}{R^3} dV' = \int \frac{\mathbf{j}' \times \mathbf{R}_0}{R^2} dV', \quad (19a)$$

которая является полным аналогом формулы (17).

Произведение $\mathbf{j}' dV'$ представляет собой электрическое количество движения, заключенное в элементе объема dV' . В случае линейного тока электрическое количество движения, приходящееся на элемент $d\sigma'$ соответствующего контура, равно, как известно, $i' \tau' d\sigma'$, где i' —сила тока. Таким образом, в этом случае формула (19) принимает следующий вид

$$\mathbf{A} = i' \oint \frac{\tau' d\sigma'}{R}, \quad (20)$$

а формула (19a) сводится к

$$\mathbf{H} = i' \oint \frac{\tau' \times \mathbf{R}_0}{R^2} d\sigma'. \quad (20a)$$

Следует отметить, что формула (19) [а следовательно, и (19a)] или соответствующая формула для электрического тока, распределенного по поверхности, подобно тому как это имеет место в случае скалярного потенциала, справедлива также и для таких точек наблюдения, которые находятся внутри объемов или на поверхностях, пронизываемых током (предполагая, что объемная или поверхностная плотность тока имеет конечное значение). Формулы же (20) и (20a), напротив, справедливы лишь для „внешних“ точек, т. е. для точек, не лежащих на линии тока.

Пользуясь формулой (13) главы II, мы можем представить взаимную потенциальную энергию двух линейных токов i и i' (или, вернее, соответствующих контуров σ и σ') в следующем виде

$$U_m = -i' i \oint \oint \frac{(\tau' \tau)}{R} d\sigma' d\sigma = -i' i \oint \oint \frac{\cos \theta}{R} d\sigma' d\sigma, \quad (20b)$$

где θ —угол между $d\sigma$ и $d\sigma'$.

Симметрия этой формулы относительно штрихованных и нештрихованных величин соответствует тому факту, что потенциальная энергия σ относительно σ' (U_m) тождественна с энергией U_m' контура σ' относительно σ . Таким образом,

$$U_m = -i \int H_n dS = -i' \int H'_n dS' = U_m'. \quad (20c)$$

Элементы интегралов (20) и (20a), т. е.

$$\frac{i' \tau' d\sigma'}{R} \quad \text{и} \quad \frac{i' \tau' \times \mathbf{R}_0}{R^2},$$

можно трактовать как бесконечно малый потенциал (dA) и бесконечно малую напряженность (dH), обусловленные элементом

тока $i' \tau' d\sigma'$. Это представление приводит к известному закону Био-Савара

$$d\mathbf{H} = i' d\sigma' \frac{\tau' \times \mathbf{R}_0}{R^2}, \quad (21)$$

являющегося аналогом закона Кулона. Оба эти закона обычно полагаются в основу учения об электромагнитных явлениях как экспериментально установленные факты; здесь же мы их вывели теоретически, исходя из принципа энергии и принципа эквивалентности. Если заменить элемент тока зарядом e' , движущимся со скоростью \mathbf{v}' и обладающим, следовательно, электрическим количеством движения $e' \frac{\mathbf{v}'}{c}$, то для векторного потенциала и напряженности создаваемого им магнитного поля получаются следующие выражения

$$\mathbf{A} = \frac{e' \mathbf{v}'}{cR} = \frac{\mathbf{v}'}{c} \varphi, \quad (22)$$

$$\mathbf{H} = \frac{e' \mathbf{v}' \times \mathbf{R}_0}{c R^2} = \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{E}, \quad (22a)$$

где φ означает скалярный (электростатический) потенциал, а \mathbf{E} напряженность электрического поля, вызываемого в рассматриваемой точке наблюдения тем же самым зарядом.

Выражение (20b) для взаимной потенциальной энергии двух контуров с током очевидно равно сумме соответствующих выражений для различных пар зарядов

$$u_m = - \frac{e' \frac{\mathbf{v}'}{c} \cdot e \frac{\mathbf{v}}{c}}{R} = - \frac{\mathbf{v}' \mathbf{v}}{c^2} u_e, \quad (23)$$

где $u_e = \frac{e'e}{R}$ означает взаимную энергию рассматриваемых зарядов.

Соответственно этому величину u_m можно было бы рассматривать как их взаимную магнитную энергию.

Однако эта интерпретация, как уже было указано выше (глава II, § 6), оказывается неверной. А именно, изолированный заряд при своем движении создает магнитное поле, которое в каждой данной точке наблюдения меняется со временем, тогда как все наши рассуждения, связанные с принципом энергии и эквивалентности, покоились на неизменности во времени этих полей. Неприменимость принципа энергии для отдельных движущихся зарядов можно видеть уже из того факта, что расхождение от выражения (22) не исчезает. А именно

$$\operatorname{div} \left(e' \frac{\mathbf{v}'}{c} \frac{1}{R} \right) = e' \frac{\mathbf{v}'}{c} \operatorname{grad} \frac{1}{R} = - e' \frac{\mathbf{v}'}{c} \frac{\mathbf{R}_0}{R^2}.$$

Но эта неприменимость становится особенно ясной, если вы-

числить из (23) силы, с которыми оба заряда действуют друг на друга. По формулам

мы получаем

$$\mathbf{f} = -\text{grad } u_m = +\text{grad}' u_m = -\mathbf{f}'$$

$$\mathbf{f} = -\mathbf{f}' = -\frac{ee'}{R^2} \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2} \mathbf{R}_0. \quad (23a)$$

В действительности же сила, действующая на e со стороны e' , равна

$$\mathbf{f} = e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} = e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(e' \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \frac{\mathbf{R}_0}{R^2} \right),$$

т. е.

$$\mathbf{f} = \frac{ee'}{R^2} \frac{\mathbf{v}'(\mathbf{v}\mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0(\mathbf{v}\mathbf{v}')}{c^2}, \quad (23b)$$

и соответственно этому сила, действующая на e' со стороны e

$$\mathbf{f}' = -\frac{ee'}{R^2} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}'\mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0(\mathbf{v}\mathbf{v}')}{c^2}. \quad (23c)$$

Таким образом эти силы не удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия, который нужно рассматривать как непосредственное следствие принципа энергии. Они оказываются равными и противоположными лишь в том случае, когда скорости \mathbf{v} или \mathbf{v}' равны или перпендикулярны к линии \mathbf{R} , соединяющей оба заряда.

Если оба эти условия выполняются одновременно, то формулы (23b) и (23c) сводятся к (23a) и мы получаем

$$\mathbf{f} = -\mathbf{f}' = -\frac{v^2}{c^2} \frac{ee'}{R^2} \mathbf{R}_0.$$

В этом случае электромагнитная (или „электрокинетическая“) сила, вызываемая движением зарядов, противоположна соответствующей электростатической и равна произведению ее на отношение $\frac{v^2}{c^2}$.

Итак, мы видим, что два заряда (электрона), движущиеся с одной и той же скоростью \mathbf{v} перпендикулярно к соединяющей их прямой, действуют друг на друга с результирующей силой

$$\frac{ee'}{R^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

которую можно трактовать как „ослабленную“ электростатическую силу; при $v=c$ эта результирующая сила исчезает, т. е. электростатические и электрокинетические силы взаимно компенсируются.

Полученный результат показывает, что величина c , которую мы ввели раньше как отношение между электростатическими

и электромагнитными единицами, в связи с принципом эквивалентности диполей и токов, играет роль своего рода „критической“ скорости.

Фактическое определение отношения между электростатическими и электромагнитными единицами сила тока показывает, что $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек} = 300\,000 \text{ км/сек}$. Таким образом, критическая скорость — скорость c — в точности совпадает со скоростью распространения света. Это совпадение не является конечно случайным. Оно свидетельствует об электромагнитной природе света, с одной стороны, и о конечной скорости распространения электромагнитных действий, с другой. Эти вопросы мы будем рассматривать в следующем отделе. Здесь лишь укажем на то, что полученные выше формулы для отдельных зарядов, в которых не учитывается изменение полей со временем, следует рассматривать как приближенные формулы, справедливые только для малых скоростей $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$.

§ 7. Графическое представление электрического и магнитного поля. Линии, которые по своему направлению и густоте изображают графически электрическое поле, называются электрическими силовыми линиями; соответствующие линии для магнитного поля называются магнитными силовыми линиями.

Из невихревого характера электрического поля, т. е. из того факта, что во всем пространстве выполняется условие $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, следует, что электрические силовые линии являются незамкнутыми линиями (для замкнутой силовой линии интеграл

$$\oint E_n d\sigma = \int \text{rot}_n \mathbf{E} dS$$

имел бы значение, отличное от нуля). В виду этого они должны в некоторых точках начинаться и в других заканчиваться. Число электрических силовых линий, исходящих из некоторого объема V или сходящихся в этом объеме, пропорционально электрическому потоку через ограничивающую его поверхность S , т. е.

$$\oint E_n dS$$

(силовые линии, проходящие сквозь V , не сказываются на этом интеграле). Из уравнения $\oint E_n dS = 4\pi e$ или из эквивалентного ему уравнения $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ следует, что источники электрических силовых линий совпадают с положительными зарядами, а стоки — с отрицательными, и что число „расходящихся“ из какого-нибудь заряда или „сходящихся“ к этому заряду силовых линий пропорционально величине этого заряда e . В „пустом пространстве“ электрические силовые линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться

В непосредственной близости от точечного заряда электрическое поле определяется практически исключительно этим зарядом и не зависит от других удаленных зарядов. Поэтому здесь силовые линии должны идти лучеобразно, как и в случае „изолированного“ точечного заряда, и образовывать равномерный по всем направлениям „пучок лучей“. Однако на некотором расстоянии от e они искривляются в зависимости от положения других зарядов. Зарядам, противоположным по знаку и равным по абсолютному значению, соответствует равное число расходящихся или сходящихся линий. Поэтому в случае диполя силовые линии, выходящие из положительного конца, должны все собираться к отрицательному концу (рис. 21). В этом случае, подобно общему случаю произвольной нейтральной системы электрических зарядов, все электрические силовые линии остаются,

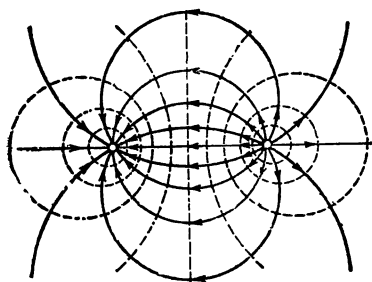


Рис. 21.

так сказать, „внутри“ этой системы: ни одна из них не теряется, уходя в бесконечность. Если общий заряд системы отличен от нуля, то некоторое число соответствующих этому заряду линий должно уходить в бесконечность (или приходить оттуда), причем таким же самым радиально-симметрическим образом, как если бы рассматриваемая система была бы стянута в точечный заряд. На самом деле подобные случаи не имеют места, ибо материя в целом нейтральна.

Для наглядного представления электрического поля, наряду с силовыми линиями, служат ортогональные к этим линиям эквипотенциальные поверхности, или поверхности уровня, т. е. поверхности $\varphi = \text{const}$. Расстояние между двумя такими поверхностями, соответствующими двум очень мало отличающимся значениям потенциала φ , очевидно обратно пропорционально электрической напряженности в соответствующих точках (в виду соотношения $E = -\frac{d\varphi}{dn}$, где dn обозначает длину нормали, заключенной между обеими поверхностями). Вблизи отдельных точечных зарядов поверхности уровня шарообразны; при увеличении расстояния они могут деформироваться произвольным образом, в зависимости от расположения других зарядов.

В противоположность электрическим силовым линиям магнитные силовые линии никогда не имеют ни начала ни конца, обычно являясь замкнутыми. Это непосредственно следует из отсутствия у магнитного поля источников, т. е. из того, что уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$ имеет силу во всем пространстве. Может случиться, что магнитные силовые линии идут из бесконечности в бесконечность,

т. е. замыкаются в бесконечно удаленной точке; поэтому специально останавливаться на этом случае не нужно. Далее, из соотношения $\oint H_r d\sigma = 4\pi i$ или $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$ следует, что магнитные силовые линии в случае стационарного электрического тока всегда охватывают линии тока, которые, в виду соотношения $\text{div } \mathbf{j} = 0$, также являются замкнутыми кривыми.

В противном случае интеграл $\int H_r d\sigma$ вдоль замкнутой силовой линии, не охватывающей линии тока, имел бы значение отличное от нуля, тогда как сила тока, протекающего сквозь эту линию, равна нулю. Таким образом, линии тока можно рассматривать как „вихревые оси“ магнитных силовых линий, т. е. как кольцеобразные оси, охватываемые силовыми линиями, подобно тому как одно кольцо в цепи охватывается соседним кольцом (рис. 22).

Непосредственно вокруг элемента $\Delta\sigma$ некоторого контура σ' , т. е. на таком расстоянии от $\Delta\sigma'$, которое очень мало по сравнению с длиной этого элемента и одновременно с его радиусом кривизны, этот элемент можно рассматривать как „прямолинейную вихревую ось“. Из соображений симметрии следует, что магнитные силовые линии должны быть здесь круговыми; таким образом мы получаем в качестве графического представления магнитного поля семейство коаксиальных окружностей. Эта цилиндрическая симметрия магнитного поля вокруг элемента тока соответствует шаровой симметрии электрического поля вокруг точечного заряда.

Интеграл $\oint H_r d\sigma$ для такой круговой линии с радиусом r очевидно равен $2\pi rH$ (направление интегрирования должно при этом соответствовать направлению тока в смысле правила правого винта). Отсюда следует $2\pi rH = 4\pi i'$, где i' обозначает силу тока, т. е.

$$H = \frac{2i'}{r}. \quad (24)$$

Таким образом, магнитная напряженность непосредственно вокруг линии тока обратно пропорциональна первой степени расстояния. Этот закон можно рассматривать как аналог закона Кулона для линий тока (на которые можно разложить стационарный ток).

Движение отдельных зарядов (электронов) не представляет собою стационарного процесса и закон Био-Савара, определяющий магнитное поле подобных зарядов или элементов тока, не принимая во внимание его изменения со временем, должен рассматриваться вследствие этого лишь как приближенный

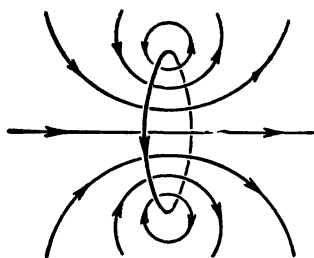


Рис. 22.

закон. Поскольку эти элементы тока соединяются в один стационарный линейный ток, геометрическая сумма соответствующих им по закону Био-Савара магнитных напряженностей должна точно равняться результирующей (неизменной во времени) магнитной напряженности.

Формула (24) может быть выведена из формулы Био-Савара (21) для бесконечно длинного (по сравнению с r) прямолинейного тока (рис. 23). Пусть PQ будет перпендикуляр из точки P на линию тока MN , так что согласно нашим обычным обозначениям $QP = r$; $QP' = r'$; $P'P = R$. Напряженность поля, обусловленного элементом $d\sigma'$, согласно (21) равна

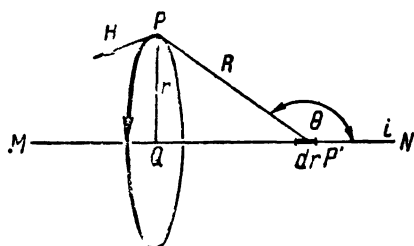


Рис. 23.

$$dH = i' d\sigma' \frac{\sin \theta}{R^2},$$

где θ означает угол $PP'N$. Так как направление dH для всех элементов тока одно и то же (в рассматриваемой точке оно перпендикулярно к плоскости рисунка и направлено к читателю), то геометрическое интегрирование сводится к обыкновенному:

$$H = \int dH.$$

Так как, далее,

$$R = \frac{r}{\sin \theta} \text{ и } r' = -r \operatorname{ctg} \theta,$$

то мы имеем

$$d\sigma' = dr' = \frac{r}{\sin^2 \theta} d\theta; \quad dH = \frac{i'}{r} \sin \theta d\theta,$$

и, следовательно,

$$H = \frac{i'}{r} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2i'}{r},$$

в согласии с (24).

Рассматриваемое магнитное поле соответствует некоторому векторному потенциалу следующего вида:

$$A = -2i \lg \frac{r}{a} = 2i \lg \frac{a}{r}, \quad (24a)$$

где i представляет собою вектор, совпадающий по величине и направлению с силой тока, r — расстояние точки наблюдения от рассматриваемой линии тока (a не от некоторой определенной его точки); a обозначает некоторую произвольную

постоянную. Действительно, из (24а), согласно общей формуле $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, получается

$$\mathbf{H} = -2i \times \text{grad } \lg \frac{r}{a} = 2i \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \frac{2i \times \mathbf{r}_0}{r}.$$

Этот вектор очевидно представляет рассмотренное выше цилиндрическое поле. Что касается линий, представляющих векторный потенциал, то они являются прямыми, параллельными оси цилиндра. Отсюда видно, что непосредственно вокруг линии тока совершенно произвольной формы линии и векторного потенциала образуют параллельные ей нити. Вообще же для наглядного представления магнитного поля эти линии непригодны.

§ 8. Поля и взаимодействия элементарных диполей и токов. Электростатический („скалярный“) потенциал φ произвольного диполя $P_1'P_2'$ в какой-либо точке P очевидно равен сумме потенциалов обоих его концов. Обозначая соответствующие заряды через $e_1 = -e'$ и $e_2 = +e'$ и полагая далее $P_1'P = R_1$, $P_2'P = R_2$, получаем

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = e' \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right).$$

В случае элементарного диполя, длина которого $P_1'P_2' = l'$ очень мала по сравнению с расстояниями R_1 и R_2 , имеем приближенно

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = l' \text{ grad}' \frac{1}{R},$$

и, следовательно,

$$\varphi = \mathbf{p}' \text{ grad}' \frac{1}{R} = -\mathbf{p}' \text{ grad} \frac{1}{R}, \quad (25)$$

где $\mathbf{p}' = e l'$ — электрический момент диполя, а R обозначает его расстояние от точки наблюдения. Вводя это расстояние, мы должны рассматривать оба конца диполя как одну „двойную точку“ $P' (= P_1'P_2')$.

Операции дифференцирования, обозначенные символами grad' и grad , относятся соответственно к векторам $\mathbf{r}' = OP'$ и $\mathbf{r} = OP$, где O представляет произвольную, неизменяющую точку пространства ($\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$).

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}'\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{p}'\mathbf{R}_0}{R^3} = \frac{p' \cos \theta}{R^2}, \quad (25a)$$

где θ — угол между \mathbf{p}' и \mathbf{R} ($\mathbf{R}_0 = \frac{\mathbf{R}}{R}$).

Далее, по формулам (30) и (31) (Введение) находим

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{1}{R^3} \mathbf{p}' + \frac{3}{R^5} \mathbf{R}(\mathbf{p}'\mathbf{R}),$$

т. е.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{R^3} \left\{ 3\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0\mathbf{p}') - \mathbf{p}' \right\} = \frac{1}{R^3} \left\{ \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{p}')}{R^2} - \mathbf{p}' \right\} \quad (26)$$

Из этой формулы легко видеть, что электрическая напряженность в точке P лежит в плоскости \mathbf{p}' , \mathbf{R} ; путем внутреннего и внешнего умножения (26) на \mathbf{R}_0 мы получаем радиальную и азимутальную компоненту вектора \mathbf{E} (последнюю в направлении возрастания угла θ):

$$E_R = \frac{2p'}{R^3} \cos \theta, \quad (26a)$$

$$E_\theta = \frac{p'}{R^3} \sin \theta. \quad (26b)$$

Отношение $\frac{E_\theta}{E_R} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$ очевидно равно тангенсу угла между

 \mathbf{E} и \mathbf{R} .

Если заменить в формулах (26), (26a) и (26b) \mathbf{E} на \mathbf{H} и \mathbf{p}' на \mathbf{m}' , то по принципу эквивалентности они будут определять магнитное поле элементарного тока с магнитным моментом \mathbf{m}' . Таким образом соответствующую магнитную напряженность \mathbf{H} можно рассматривать как (отрицательный) градиент некоторого скалярного магнитного потенциала

$$\varphi_m = \frac{\mathbf{m}\mathbf{R}_0}{R^2} = -\mathbf{m}' \operatorname{grad} \frac{1}{R}.$$

С другой стороны, напряженность магнитного поля должна выражаться формулой $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, где \mathbf{A} означает векторный потенциал соответствующего элементарного тока. При определении этого векторного потенциала можно исходить из того факта, что во всем пространстве, за исключением точек P' (где предполагается сосредоточенным ток), должно удовлетворяться дифференциальное уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = -\operatorname{grad} \varphi_m = \operatorname{grad} \left(\mathbf{m}' \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right).$$

Принимая во внимание формулы (26) и (27) (Введение), получаем, в виду постоянства \mathbf{m}' ,

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{m}' \times \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right) = -(\mathbf{m}' \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \frac{1}{R} + \mathbf{m}' \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{R}$$

$$\operatorname{grad} \left(\mathbf{m}' \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right) = (\mathbf{m}' \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \frac{1}{R} + \mathbf{m}' \times \operatorname{rot} \operatorname{grad} \frac{1}{R}.$$

Так как оба выражения $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \frac{1}{R}$ и $\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{R} = \nabla^2 \frac{1}{R}$

равны нулю: первое тождественно, а второе везде за исключением точки P' , то отсюда следует

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{m}' \times \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right) = - \operatorname{grad} \left(\mathbf{m}' \operatorname{grad} \frac{1}{R} \right).$$

Сравнивая это равенство с написанным выше выражением для \mathbf{A} , получаем

$$\mathbf{A} = - \mathbf{m}' \times \operatorname{grad} \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{m}' \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{m}' \times \mathbf{R}_0}{R^2}. \quad (27)$$

Само собою понятно, что эта формула может быть выведена также и из общей формулы (20) для векторного потенциала произвольного линейного тока. А именно пусть точка O находится вблизи элементарного тока σ' , и соответственно этому положим

$$\frac{1}{P'P} = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cong \mathbf{r}' \operatorname{grad}' \frac{1}{r} = - \mathbf{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r},$$

т. е., следовательно,

$$\mathbf{A} = - i' \oint d\sigma' \tau' \left(\mathbf{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right).$$

Прежде всего заметим, что $\tau' d\sigma' = d\mathbf{r}'$. Далее, так как вектор $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$ при интегрировании остается постоянным ($=\mathbf{k}$), то мы имеем

$$\oint d\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{k}) + \oint \mathbf{r}'(d\mathbf{r}'\mathbf{k}) = \oint d\{\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{k})\} = 0.$$

Отсюда получается

$$\begin{aligned} \oint d\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{k}) &= - \oint \mathbf{r}'(d\mathbf{r}'\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \oint \{d\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{k}) - \mathbf{r}'(d\mathbf{r}'\mathbf{k})\} = \\ &= \frac{1}{2} \oint \mathbf{k} \times (d\mathbf{r}' \times \mathbf{r}') = \mathbf{k} \times \frac{1}{2} \oint d\mathbf{r}' \times \mathbf{r}', \end{aligned}$$

т. е. по формуле (6а) главы II

$$\mathbf{A} = - i' \oint d\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{k}) = \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \frac{1}{2} \oint \mathbf{r}' \times i \tau' d\sigma' = \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{m}',$$

в согласии с (27).¹

¹ Эта формула получается еще проще при помощи тождества

$$\oint \tau' \psi d\sigma' = \int \mathbf{n}' \times \operatorname{grad}' \psi dS'$$

[см. Введение, формула (17а)]. А именно, полагая $\psi = \frac{1}{R}$, при σ' очень малом по сравнению с R , получаем

$$i \oint \frac{\tau'}{R} d\sigma' = i \int \mathbf{n}' \times \operatorname{grad}' \frac{1}{R} dS' \cong \operatorname{grad} \frac{1}{R} \times i \int \mathbf{n}' dS' = \operatorname{grad} \frac{1}{R} \times \mathbf{m}.$$

Теперь представим себе, что в точке наблюдения P находится второй элементарный диполь (или ток) с моментом \mathbf{p} (или \mathbf{m}). Его потенциальную энергию относительно первого диполя $U = -(\mathbf{p}\mathbf{E})$, согласно (26), можно написать в форме

$$U = \frac{1}{R^3} \{ (\mathbf{p}\mathbf{p}') - 3(\mathbf{R}_0\mathbf{p})(\mathbf{R}_0\mathbf{p}') \} = \frac{1}{R^3} \left\{ \mathbf{p}\mathbf{p}' - \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{p})(\mathbf{R}\mathbf{p}')}{R^2} \right\}, \quad (28)$$

симметричной относительно \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Следовательно, $U = -\mathbf{p}\mathbf{E} = -\mathbf{p}'\mathbf{E}'$, где \mathbf{E}' означает напряженность электрического поля в точке P' , обусловленную вторым диполем. Поэтому величину U мы можем называть просто взаимной потенциальной энергией рассматриваемых диполей.

Вращательный момент, испытываемый вторым диполем, можно вычислить непосредственно по формуле $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, что дает

$$\mathbf{M} = \frac{3(\mathbf{p} \times \mathbf{R}_0)(\mathbf{p}'\mathbf{R}_0) + \mathbf{p} \times \mathbf{p}'}{R^3}. \quad (28a)$$

Соответствующая сила выражается формулой

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \text{ grad}) \mathbf{E}, \text{ или } \mathbf{F} = -\text{grad } U.$$

Если в последнюю формулу подставить выражение (28), то после простых вычислений получаем

$$\mathbf{F} = \frac{3\mathbf{R}}{R^5} (\mathbf{p}\mathbf{p}') + \frac{3}{R^5} \mathbf{p} (\mathbf{R}\mathbf{p}') + \frac{3}{R^5} \mathbf{p}' (\mathbf{R}\mathbf{p}) - \frac{15\mathbf{R}}{R^7} (\mathbf{R}\mathbf{p})(\mathbf{R}\mathbf{p}'),$$

или

$$\mathbf{F} = \frac{3}{R^4} \left\{ \mathbf{R}_0 [\mathbf{p}\mathbf{p}' - 5(\mathbf{R}_0\mathbf{p})(\mathbf{R}_0\mathbf{p}')] + \mathbf{p} (\mathbf{R}_0\mathbf{p}') + \mathbf{p}' (\mathbf{R}_0\mathbf{p}) \right\}. \quad (28b)$$

Заменяя в (28a) вектор \mathbf{R} на противоположный вектор $\mathbf{R}' = \mathbf{p}\mathbf{p}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = -\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}_0' = -\mathbf{R}_0$), получаем выражения для вращательного момента \mathbf{M}' и силы \mathbf{F}' , испытываемых первым диполем со стороны второго. При этом в согласии с принципом равенства „действия и противодействия“, являющимся непосредственным следствием принципа энергии,¹ имеем $\mathbf{M}' = -\mathbf{M}$ и $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$.

Такой же самый результат получается и для взаимодействия элементарных токов; для этого в только-что выведенных формулах нужно лишь заменить электрические моменты \mathbf{p} и \mathbf{p}' магнитными \mathbf{m} и \mathbf{m}' .

Эти формулы остаются справедливыми в известном смысле даже и в том случае, если вместо элементарных токов рассматривать отдельные магнетоны, т. е. отдельные электроны, обра-

¹ Заметим, что, согласно (28a) и (28b), вращательный момент обратно пропорционален третьей, а сила — четвертой степени взаимного расстояния обоих диполей.

шающиеся вокруг некоторого центра. Магнитный момент такого магнетона, по (6a) и (6b) главы II, равен

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \frac{e}{c} \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (29)$$

где \mathbf{r} обозначает радиус-вектор орбиты, а $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — скорость.

Численная величина вектора $\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ равна секториальной скорости электрона, т. е. площади, описываемой радиусом-вектором в единицу времени. Если движение электрона происходит под влиянием притягивающей силы, направленной к центру атома O , то как секториальная скорость, так и плоскость орбиты должны оставаться неизменными. В этом случае ($\mathbf{m} = \text{const}$) „магнетон“ совершенно эквивалентен стационарному элементарному току. Необходимо только под A, H и т. д. понимать средние значения соответствующих величин для одного или нескольких оборотов электрона и не принимать во внимание колебаний, происходящих за время оборота (ср. глава VII, § 9).

§ 9. Скалярный потенциал неэлементарного линейного тока. Понятие скалярного магнитного потенциала, примененное нами выше к элементарному току, может быть распространено также и на случай неэлементарного линейного тока. Для этого мы должны прежде всего заменить рассматриваемый ток (i', σ') сеткой элементарных токов. Скалярный потенциал элементарного тока, с магнитным моментом $d\mathbf{m} = i' n' dS'$, по (25a), равен

$$d\varphi_m = i' \frac{\cos \theta}{R^2} dS',$$

где θ означает угол между нормалью и радиусом R , проведенным от dS' к точке наблюдения P . Произведение $dS' \cos \theta$ равно, следовательно, проекции элемента поверхности dS' на проходящую через этот элемент сферическую поверхность с центром в P . Поэтому отношение $\frac{dS' \cos \theta}{R^2}$ есть не что иное, как телесный угол, под которым виден из P элемент dS' . Интегрируя, мы получаем таким образом:

$$\varphi_m = i' \Omega'. \quad (30)$$

Следует заметить, что элемент $d\Omega'$ берется с положительным или отрицательным знаком, в зависимости от того, виден ли соответствующий элемент поверхности dS с положительной или с отрицательной стороны.

Величину Ω' можно определить, независимо от формы поверхности S' , как телесный угол, который образуется конусом лучей, исходящих от P к контуру с током σ' . Однако при этом следует иметь в виду, что такой конус в действительности выделяет

два дополнительных телесных угла, а именно Ω' и $(4\pi - \Omega')$. Для определения потенциала (30), в зависимости от того, лежит ли поверхность S' с одной или с другой стороны от точки P , можно пользоваться обоими углами, но с противоположными знаками. Таким образом, если заменить поверхность S' другой поверхностью S'' (рис. 24), то, угол $\Omega' > 2\pi$ нужно заметить на $\Omega'' = -(4\pi - \Omega') = \Omega' - 4\pi$. Это правило остается справедливым также и в том случае, если переместить точку наблюдения P с одной стороны данной поверхности S' на другую. При

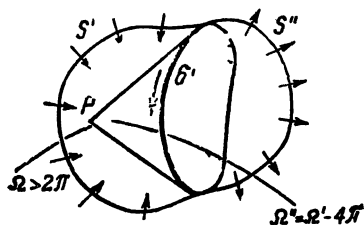


Рис. 24.

перемещении с отрицательной стороны на положительную Ω' возрастает сразу на величину 4π . Этому соответствует внезапное изменение потенциала φ_m на $4\pi i$. Если желают трактовать этот потенциал как непрерывную величину, то необходимо представлять себе проход сквозь поверхность S' закрытым. Тогда перейти с положительной стороны на отрицательную

можно лишь путем обхода по „почти“ замкнутой линии σ , которая охватывает линию тока один раз. Так как при этом

$$H_{\tau} d\sigma = -\text{grad}_{\tau} \varphi_m d\sigma = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial \sigma} d\sigma = -d\varphi_m,$$

то получаем

$$\int H_{\tau} d\sigma = \int d\varphi_m = 4\pi i'.$$

Этот результат уже встречался нам в § 3 и особенно в § 4, причем вместо магнитного поля данного тока мы рассматривали электрическое поле соответствующего электрического двойного слоя. Введенная выше „заградительная поверхность“ есть не что иное, как „двойная поверхность“ этого слоя.

По формуле (12) электрическая напряженность внутри такого двойного слоя равна $4\pi\eta$ (где η обозначает поверхностную плотность электрического заряда) и направлена от положительной стороны к отрицательной. Электрическое поле вне двойного слоя, согласно (30), получается из скалярного потенциала

$$\varphi = i_e' \Omega', \quad (30a)$$

где $i_e' = \eta l$ — электрический момент единицы поверхности этого слоя.

Электрический двойной слой не обязательно должен быть ограниченным замкнутой кривой σ' . Он может быть также замкнутым, т. е. состоять из двух вложенных друг в друга замкнутых поверхностей с противоположными зарядами. Этот случай очевидно можно рассматривать как предельный случай исчезающей пограничной кривой при исчезающей поверхности S' . Отсюда непосредственно следует, что вне замкнутого двойного

сложения электрическая напряженность должна обращаться в нуль. Что касается потенциала φ , то во внешнем пространстве он равен нулю, а внутри равен постоянной величине $\pm 4\pi i$; при этом верхний знак соответствует случаю положительно заряженной внутренней поверхности, а отрицательный знак—противоположному случаю.

§ 10. Электрическая и магнитная поляризации и поляризационные потенциалы. Нейтральную систему электрических зарядов, находящихся в некотором ограниченном объеме, можно представить себе замененной (вообще говоря, бесконечным числом способов) эквивалентной системой элементарных электрических диполей, заполняющих тот же самый объем. Ради простоты, мы примем, что электрические заряды в рассматриваемом объеме V и на ограничивающей его поверхности S распределены непрерывно с плотностью, соответственно равной ρ или η . Соответственно этому в эквивалентной системе диполей электрический момент должен быть распределен непрерывным образом. Объемная плотность этого момента называется электрической поляризацией. Если обозначить ее через \mathbf{P} , то произведение $\mathbf{P} dV$ обозначает результирующий момент элементарных диполей, находящихся в элементе объема dV .

Мы должны теперь установить соотношение между ρ и \mathbf{P} . Это можно сделать двумя способами, а именно: 1) сравнением действий, испытываемых обеими системами в заданном внешнем поле (\mathbf{E}'), и 2) сравнением полей (\mathbf{E}), обусловленных ими вне пространства V .

Действительную систему мы будем называть системой C , а заменяющую ее дипольную—системой D .

Потенциальная энергия системы C относительно внешнего поля выражается формулой.

$$U = \int \varphi' \rho dV + \oint \varphi' \eta dS,$$

где φ' есть потенциал этого поля. С другой стороны, для потенциальной энергии системы D мы имеем

$$U = - \int \mathbf{E}' \mathbf{P} dV.$$

Полагая здесь $\mathbf{E}' = -\text{grad } \varphi'$, согласно тождеству

$$\text{div } \varphi' \mathbf{P} = \varphi' \text{ div } \mathbf{P} + \mathbf{P} \text{ grad } \varphi',$$

получаем

$$U = \int \text{div } (\varphi' \mathbf{P}) dV - \int \varphi' \text{ div } \mathbf{P} dV = \oint \varphi' P_n dS - \int \varphi' \text{ div } \mathbf{P} dV.$$

Отсюда видно, что для эквивалентности систем C и D должны выполняться следующие соотношения

$$\rho = -\text{div } \mathbf{P} \tag{31}$$

$$\eta = P_n \tag{31a}$$

Теперь проверим, будут ли также эквивалентны поля, обусловленные C и D (вне S). Элемент объема dV' (с радиус-вектором \mathbf{r}'), рассматриваемый как диполь с моментом $\mathbf{P}' dV'$, в некоторой внешней точке с радиусом-вектором \mathbf{r} обуславливает потенциал $\mathbf{P}' dV' \text{grad}' \frac{1}{R}$, где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Полный потенциал системы D выражается, следовательно, интегралом

$$\varphi = \int \mathbf{P}' \text{grad}' \frac{1}{R} dV'.$$

При помощи тождества

$$\text{div}' \left(\frac{\mathbf{P}'}{R} \right) = \frac{1}{R} \text{div}' \mathbf{P}' + \mathbf{P}' \text{grad}' \frac{1}{R}$$

этот интеграл можно преобразовать к виду

$$\varphi = \oint \frac{P'_n}{R} dS' - \int \frac{\text{div}' \mathbf{P}'}{R} dV'.$$

Но согласно (31) и (31a) это выражение представляет собой не что иное, как потенциал системы C

$$\varphi = \oint \frac{\tau'_1 dS'}{R} + \int \frac{\rho' dV'}{R}.$$

Заменяя далее $\text{grad}' \frac{1}{R}$ на $-\text{grad} \frac{1}{R}$ и принимая во внимание, что вектор \mathbf{P}' зависит только от \mathbf{r}' , а не от \mathbf{r} , получаем

$$\mathbf{P}' \text{grad}' \frac{1}{R} = -\mathbf{P}' \text{grad} \frac{1}{R} = -\text{div} \frac{\mathbf{P}'}{R},$$

и, следовательно,

$$\varphi = - \int \text{div} \frac{\mathbf{P}'}{R} dV' = - \text{div} \int \frac{\mathbf{P}'}{R} dV'.$$

Вектор

$$\mathbf{Z} = \int \frac{\mathbf{P}'}{R} dV' \quad (32)$$

мы назовем электрическим поляризационным потенциалом (обычно его называют вектором Герца). Скалярный потенциал φ выражается через \mathbf{Z} таким же самым образом, как и ρ через \mathbf{P} , а именно

$$\varphi = - \text{div} \mathbf{Z}. \quad (32a)$$

Поляризационный потенциал элементарного диполя с моментом \mathbf{p} очевидно равен

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{p}}{R}. \quad (32b)$$

Совершенно аналогичные соображения и формулы получаются и для системы стационарных токов. Если заменить в предыдущем изложении ρ на \mathbf{j} (плотность тока в объеме V) и η на \mathbf{k} (плотность тока на поверхности S), то для потенциальной энергии рассматриваемой системы в некотором внешнем магнитном поле \mathbf{H}' с векторным потенциалом \mathbf{A}' получается выражение

$$U = - \int \mathbf{A}' \mathbf{j} dV - \oint \mathbf{A}' \mathbf{k} dS.$$

Теперь введем эквивалентную систему D , состоящую из элементарных магнитных диполей или элементарных токов и распределенную непрерывно в объеме V . Магнитную поляризацию, т. е. магнитный момент, отнесенный к единице объема, мы обозначим через \mathbf{M} . Тогда потенциальная энергия системы D должна выражаться формулой

$$U = - \int (\mathbf{H}' \mathbf{M}) dV.$$

С помощью тождества

$$\operatorname{div} (\mathbf{A}' \times \mathbf{M}) = \mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{A}' - \mathbf{A}' \operatorname{rot} \mathbf{M}$$

[Введение, формула (25)], имея в виду, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \mathbf{H}',$$

получаем

$$- \int (\mathbf{H}' \mathbf{M}) dV = - \int \operatorname{div} (\mathbf{A}' \times \mathbf{M}) dV - \int \mathbf{A}' \operatorname{rot} \mathbf{M} dV,$$

т. е.

$$U = - \int \mathbf{A}' \operatorname{rot} \mathbf{M} dV - \oint (\mathbf{A}' \times \mathbf{M})_n dS.$$

Таким образом эквивалентность систем C и D обеспечивается условиями

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{M} \tag{33}$$

и

$$\mathbf{k} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \tag{33a}$$

Последняя формула получается на основании тождества

$$(\mathbf{A}' \times \mathbf{M}) \mathbf{n} = \mathbf{A}' (\mathbf{M} \times \mathbf{n}).$$

Векторный потенциал элементарного тока (или магнитного диполя) с моментом $\mathbf{M}' dV'$ равен $\mathbf{M}' dV' \times \operatorname{grad}' \frac{1}{R}$. Магнитное поле нашей эквивалентной системы (вне поверхности S) определяется, следовательно, формулой

$$\mathbf{A} = \int \mathbf{M}' \times \operatorname{grad}' \frac{1}{R} dV'. \tag{34}$$

Эту формулу легко можно преобразовать к виду

$$\mathbf{A} = \oint \frac{\mathbf{M}' \times \mathbf{n}}{R} dS' + \int \frac{\text{rot } \mathbf{M}'}{R} dV', \quad (34a)$$

который, на основании (33) и (33a), находится в согласии с соответствующей формулой для системы токов C .

Выражение (34) для \mathbf{A} можно переписать следующим образом

$$\mathbf{A} = - \int \mathbf{M}' \times \text{grad } \frac{1}{R} dV' = \int \text{rot } \frac{\mathbf{M}'}{R} dV' = \text{rot } \int \frac{\mathbf{M}'}{R} dV'.$$

Если вектор

$$\mathbf{Z}^* = \int \frac{\mathbf{M}'}{R} dV' \quad (35)$$

определить как магнитный поляризационный потенциал данной системы токов, то обычный векторный потенциал можно определить формулой, совершенно аналогичной (33),

$$\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{Z}^*. \quad (35a)$$

Поляризационные потенциалы \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* очевидно удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla^2 \mathbf{Z} = -4\pi \mathbf{P}, \quad (36)$$

$$\nabla^2 \mathbf{Z}^* = -4\pi \mathbf{M}, \quad (36a)$$

Заметим, что, несмотря на сходство формул

$$\rho = -\text{div } \mathbf{P} \text{ и } \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{M}$$

с соответствующими уравнениями поля

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho \text{ или } \text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j},$$

напряженности \mathbf{E} и \mathbf{P} , вообще говоря, совершенно отличны от векторов $-4\pi \mathbf{P}$ и $4\pi \mathbf{M}$, хотя бы в виду того обстоятельства, что последние вне поверхности S исчезают, тогда как первые остаются отличными от нуля. Далее, \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям энергии $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ и $\text{div } \mathbf{H} = 0$, тогда как величины $\text{rot } \mathbf{P}$ и $\text{div } \mathbf{M}$ остаются неопределенными. Действительно, векторы \mathbf{P} и \mathbf{M} определяются только уравнениями $\text{div } \mathbf{P} = -\rho$, $\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{j}$ и пограничными условиями $P_n = \eta$, $\mathbf{M} \times \mathbf{n} = \mathbf{k}$. Поэтому к \mathbf{P} можно прибавить произвольный вектор вида $\text{rot } \mathbf{F}$, а к \mathbf{M} — произвольный невихревой вектор, поскольку эти пограничные условия нарушены не будут. Только в исключительных случаях, когда электрические и магнитные напряженности сами удовлетворяют на поверхности S условиям

$$\mathbf{E}\mathbf{n} = -4\pi\eta \text{ или } \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 4\pi \mathbf{k}, \quad (37)$$

можно внутри S отождествить \mathbf{P} и \mathbf{M} с соответствующими значениями величин $-\frac{\mathbf{E}}{4\pi}$ и $\frac{\mathbf{H}}{4\pi}$, т. е. положить

$$4\pi \mathbf{P} = -\mathbf{E} \text{ и } 4\pi \mathbf{M} = \mathbf{H}. \quad (37a)$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ МУЛЬТИПОЛЕЙ

§ 1. Определение мультиполя. До сих пор мы пользовались несколько неточным понятием элементарного диполя, предполагая длину такого диполя „малой“ по сравнению с его расстоянием от других диполей. Теперь мы заменим (или лучше дополним) это неточное физическое понятие следующим совершенно точным, но чисто математическим понятием.

Длина диполя (l) должна быть бесконечно малой, а заряды ($\pm e$) бесконечно большими так, чтобы его момент ($p = el$) имел конечное значение. Для отличия от действительных физических диполей, всегда обладающих конечной длиной и состоящих из зарядов конечной величины, мы будем называть подобный диполь математическим диполем.

Таким образом, математический диполь должен собственно рассматриваться как точечный образ, как двойная точка, подобно простому точечному заряду. Они отличаются друг от друга просто тем, что в последнем случае с рассматриваемой точкой связана скалярная величина (заряд), а в первом случае, наоборот, — векторная величина (момент).

Два (математических) диполя с равными и противоположно направленными бесконечно большими моментами, находящиеся на бесконечно малом расстоянии друг от друга, можно опять-таки трактовать как точку, а именно как четверную точку. Такая четверная точка называется квадруполем. Математический квадруполь состоит, следовательно, из 4 зарядов равной или равной и противоположной по знаку величины $\pm e$, которые расположены в вершинах параллелограмма с бесконечно малыми сторонами l_1, l_2 (рис. 25).

При этом предполагается, что произведение el_1, l_2 , соответствующее моменту диполя, имеет конечное значение.

Если в каком-нибудь квадруполе поменять местами положительные заряды с отрицательными, то получается противоположный квадруполь. Два противоположных квадруполя, смещенные один относительно другого на бесконечно малый отрезок l_3 так, что произведение $el_1l_2l_3$ остается конечным, образуют восьмикратную точку или октуполь. Таким образом, октуполь можно представить себе в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 26), в вершинах которого расположены заряды $\pm e$ (в чередующейся последовательности $+-+\dots$).

Повторяя вышеописанный процесс, получаем точки высшей кратности или мультиполи произвольно высокого по-

рядка. 2^n -кратную точку, т. е. полюс n -го порядка, в общем случае можно определить как quasi-точечную систему, состоящую из двух противоположных полюсов $(n-1)$ -го порядка на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Если разложить эти полюсы $(n-1)$ -го порядка на полюсы низшего порядка, то в конце концов мы получим 2^n бесконечно больших заряда $\pm e$, смещенные относительно друг друга на бесконечно малые отрезки $l_1, l_2 \dots l_n$; при этом произведение $el_1 l_2 \dots l_n$ должно сохранять конечное значение

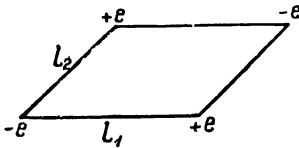


Рис. 25.

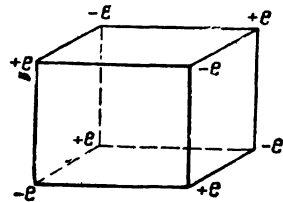


Рис. 26.

n векторов l_1, l_2, \dots, l_n вообще могут иметь произвольное направление в пространстве; в частности они могут быть расположены все в одной плоскости или даже на одной прямой. В последнем случае соответствующий мультиполь называется аксиальным.

Под моментом полюса n -го порядка подразумевают величину

$$p^{(n)} = \frac{1}{n!} (el_1 l_2 \dots l_n), \tag{1}$$

которая, как увидим, представляет численное значение некоторого тензора n -го ранга. Этот тензор можно рассматривать как обобщение векторного момента „полюса 1-го порядка“, т. е. диполя. Он определяется величиною $p^{(n)}$ и n единичными векторами $\frac{l_i}{l_i} = a_i$. Прямые, проведенные в направлении этих векторов, называются осями рассматриваемого полюса.

Точечный заряд можно определить как полюс „нулевого порядка“.

§ 2. Поле и энергия мультиполей. Пусть точка P' будет (кратным) источником электрического поля, а P — точка наблюдения, для которой вычисляется потенциал φ этого поля.

В случае простого полюса, т. е. точечного заряда e' , мы имеем

$$\varphi^{(0)} = \frac{e'}{R}.$$

Представим себе теперь, что этот заряд смещен в соседнюю точку P'_1 , тогда как в P' помещен противоположный заряд $-e'$. В пределе, когда $P' P'_1 = l'_1 = a'_1 l'_1 \rightarrow 0$, а $e' l'_1 = p^{(1)}$ остается конеч-

ным, мы получаем двойную точку, т. е. математический диполь, потенциал которого не приближенно, а совершенно точно выражается известной формулой

$$\varphi^{(1)} = (\mathbf{l}'_1 \text{ grad}') \varphi^{(0)} = (\mathbf{p}'^{(1)} \nabla') \frac{1}{R} = p^{(1)} (\mathbf{a}'_1 \nabla') \frac{1}{R}.$$

Если передвинуть этот диполь из P' в соседнюю точку P'_2 и одновременно поместить в P' противоположный диполь, то в пределе $P' P'_2 = \mathbf{l}'_2 = \mathbf{a}'_2 l'_2 \rightarrow 0$ при конечном значении $p^{(1)} l'_2 = \frac{1}{2} p^{(2)}$ получается четверная точка, т. е. квадруполь. Его потенциал в P получается из $\varphi^{(1)}$ тем же самым путем, как последний получается из $\varphi^{(0)}$, т. е. по формуле

$$\varphi^{(2)} = (\mathbf{l}'_2 \nabla') \varphi^{(1)} = \frac{p^{(2)}}{2} (\mathbf{a}'_2 \nabla') (\mathbf{a}'_1 \nabla') \frac{1}{R}.$$

Если вообще обозначить потенциал некоторого определенного полюса $(n' - 1)$ -го порядка $D^{(n'-1)}$ через $\varphi^{(n'-1)}$, то для потенциала $\varphi^{(n')}$ полюса n' -го порядка $D^{(n')}$, образованного путем смещения $D^{(n'-1)}$ на бесконечно малый отрезок $\mathbf{l}'_n = \mathbf{a}'_n l'_n$ и добавления противоположного полюса в P' , получаем выражение

$$\varphi^{(n')} = (\mathbf{l}'_n \nabla') \varphi^{(n'-1)}, \quad (2)$$

или, на основании (1),

$$\varphi^{(n')} = \frac{p^{(n')}}{n'!} (\mathbf{a}'_n \nabla') (\mathbf{a}'_{n-1} \nabla') \dots (\mathbf{a}'_1 \nabla') \frac{1}{R}. \quad (2a)$$

Из этой формулы непосредственно следует, что электрическое поле полюса n' -го порядка не зависит от последовательности отдельных бесконечно малых смещений $\mathbf{l}'_1, \mathbf{l}'_2 \dots \mathbf{l}'_n$; оно вполне определяется скалярным параметром $p^{(n')}$ и совокупностью n' единичных векторов $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_{n'}$ („осей“).

Если в точке P находится заряд e , то его потенциальная энергия по отношению к какой-либо системе электрических зарядов, обуславливающих в P потенциал, выражается произведением

$$U^{(0)} = e \varphi.$$

Смещением заряда на бесконечно малый отрезок \mathbf{l}_1 и добавлением противоположного заряда в P при $e \mathbf{l}_1 = \mathbf{p}_1 = p^{(1)} \mathbf{a}_1$ получаем диполь, энергия которого выражается формулой¹

$$U^{(1)} = (\mathbf{l}_1 \nabla) U^{(0)} = (\mathbf{p}_1 \nabla) \varphi = p^{(1)} (\mathbf{a}_1 \nabla) \varphi;$$

¹ Напомним, что $\nabla = \text{grad}$ обозначает дифференцирование по \mathbf{r} , а $\nabla' = \text{grad}'$ — дифференцирование по \mathbf{r}' , где $\mathbf{r}' = OP'$, $\mathbf{r} = OP$ и $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Так как $\nabla \varphi = -\mathbf{E}$, то это выражение может быть написано в обычном виде $U^{(1)} = -p_1 \mathbf{E}$.

Если в этом рассуждении заменить заряд e полюсом $(n-1)$ -го порядка, то вместо диполя получим полюс n -го порядка $D^{(n)}$ с потенциальной энергией

$$U^{(n)} = (\mathbf{1}_n \nabla) U^{(n-1)} \quad (3)$$

или

$$U^{(n)} = \frac{p^{(n)}}{n!} \left(\mathbf{a}_n \nabla \right) \left(\mathbf{a}_{(n-1)} \nabla \right) \cdot \cdot \cdot \left(\mathbf{a}_1 \nabla \right) \varphi_0, \quad (3a)$$

где $p^{(n)}$ обозначает момент этого полюса, $\mathbf{a}_1, \cdot \cdot \cdot \mathbf{a}_n$ — соответствующие «осевые векторы».

В частности для $\varphi = \varphi^{(n')}$, по (2a) и (3a), получаются следующие формулы для взаимной потенциальной энергии полюсов $D^{(n')}$ и $D^{(n)}$:

$$U^{(n',n)} = \frac{p'^{(n')}}{n'!} \frac{p^{(n)}}{n!} \left(\mathbf{a}'_1 \nabla' \right) \cdot \cdot \cdot \left(\mathbf{a}'_{n'} \nabla' \right) \left(\mathbf{a}_1 \nabla \right) \cdot \cdot \cdot \left(\mathbf{a}_n \nabla \right) \frac{1}{R}. \quad (4)$$

При этом справедливо соотношение

$$\nabla' = -\nabla, \quad (4a)$$

так что при фактическом вычислении выражения $U^{(n',n)}$ дифференциальные операции $(\mathbf{a}'_1 \nabla')$ и т. д. могут быть заменены на $-(\mathbf{a}'_1 \nabla)$ и т. д. [или $(\mathbf{a}'_1 \nabla)$ на $-(\mathbf{a}'_1 \nabla')$].

При $n' = n = 1$ мы получаем из (4) уже известное выражение (28) главы III для потенциальной энергии двух диполей. Оно отличается лишь знаком от потенциальной энергии точечного заряда относительно квадруполь (произведение $p_1 p'_1$ при этом должно быть заменено на $-p^{(2)} e'$ или $-p'^{(2)} e$).

При помощи формул

$$\nabla (\mathbf{a} \mathbf{R}) = \mathbf{a} (= \text{const}); \quad \nabla \mathbf{R}^{-n} = -n \mathbf{R}^{-(n+2)} \mathbf{R}$$

и общего правила для дифференцирования произведения нескольких сомножителей можно вычислить без затруднения выражения (2a) и (4) для произвольных n' и n . При этом для $\varphi^{(n)}$ получается формула вида

$$\varphi^{(n)} = p^{(n)} \frac{(-1)^n Y^{(n)}}{R^{n+1}}, \quad (5)$$

где $Y^{(n)}$ обозначает функцию, зависящую только от направления (а не от величины) вектора \mathbf{R} , т. е. только от единичного вектора $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}/R$.

Эта функция состоит из некоторого числа слагаемых, которые образованы исключительно из множителей типа $\mathbf{a}_i \mathbf{R}_j = \cos(\mathbf{a}_i, \mathbf{R}_j)$ или $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_k = \cos(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k)$. Относительно величин $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ $Y^{(k)}$ является симметрической однородной функцией n -ой

степени. Так, например, пользуясь сокращениями: $(\mathbf{a}_i \mathbf{R}_0) = \lambda_i$, $(\mathbf{a}_i \mathbf{a}_n) = \lambda_{ik}$, имеем,

$$Y^{(1)} = \lambda_1,$$

$$Y^{(2)} = \frac{1}{2} (3 \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}),$$

$$Y^{(3)} = \frac{1}{6} (15 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 3 \lambda_1 \lambda_{23} - 3 \lambda_2 \lambda_{31} - 3 \lambda_3 \lambda_{12}),$$

$$Y^{(4)} = \frac{1}{24} \left\{ 105 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 - 15 (\lambda_2 \lambda_3 \lambda_{14} + \lambda_3 \lambda_1 \lambda_{24} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{34} + \right. \\ \left. + \lambda_1 \lambda_4 \lambda_{23} + \lambda_2 \lambda_4 \lambda_{13} + \lambda_3 \lambda_4 \lambda_{12}) + 3 (\lambda_{14} \lambda_{23} + \lambda_{24} \lambda_{31} + \lambda_{34} \lambda_{12}) \right\}$$

и вообще

$$Y^{(n)} = \frac{1}{n!} \left\{ 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \lambda_1 \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n - \right. \\ \left. - 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) \sum \lambda_{12} \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_n + 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-5) \sum \lambda_{12} \lambda_{34} \lambda_5 \cdot \dots \cdot \lambda_n \dots \right\}, \quad (5a)$$

где $\sum \lambda_{12} \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ и т. д. означает сумму всех членов, получающихся из написанного перестановкой индексов. Доказательство (5a) можно получить непосредственно переходя, от $Y^{(n)}$ к $Y^{(n+1)}$ и принимая во внимание упомянутые свойства симметрии.

Число всех членов, получающихся из $\lambda_{12} \lambda_{34} \cdot \dots \cdot \lambda_{2k-1, 2k} \cdot \lambda_{2k+1} \lambda_{2k+2} \cdot \dots \cdot \lambda_n$ при различных перестановках чисел $1, 2 \cdot \dots \cdot 2k$, очевидно, равно $\frac{(2k)!}{2^k k!}$. Поэтому число членов в сумме

$$\sum \lambda_{12} \cdot \dots \cdot \lambda_{2k-1, 2k} \lambda_{2k+1} \cdot \dots \cdot \lambda_n \text{ равно} \\ \frac{(2k)!}{2k \cdot k!} \cdot \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}.$$

Таким образом в случае мультиполя с n совпадающими осями ($\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$; $\lambda_{ik} = 1$) для $Y^{(n)}$ получается следующее выражение:

$$Y^{(n)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

$$\sum_{k=0}^{2k \leq n} (-1)^k \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k (2n-1) \cdot \dots \cdot 2n-2k+1} \lambda^{n-2k}. \quad (5b)$$

Функции (5b) носят название полиномов Лежандра. Более общие функции (5a) обычно называются шаровыми функциями, или же гармоническими функциями n -го порядка. Однако, аргументами этих функций считаются не косинусы $\lambda_1, \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$, а углы θ и ψ , определяющие на-

правление радиуса-вектора \mathbf{R} относительно какой-либо сферической системы координат (θ — угол между \mathbf{R} и полярной осью, ψ — азимут меридианальной плоскости вектора \mathbf{R}). Обозначая соответствующие углы для осей рассматриваемого мультиполя через θ_i и ψ_i ($i=1, 2, \dots, n$), то по известным формулам сферической тригонометрии имеем

$$\lambda_i = \cos \theta_i \cos \theta + \sin \theta_i \sin \theta \cos (\psi - \psi_i),$$

$$\lambda_{ik} = \cos \theta_i \cos \theta_k + \sin \theta_i \sin \theta_k \cos (\psi_i - \psi_k).$$

§ 3. Представление произвольных электрических систем при помощи мультиполей. Рассмотрим систему электрических зарядов S' , находящихся внутри сферы K' с радиусом a' и центром в точке P' . Электрический потенциал φ системы S' в некоторой точке P , лежащей вне сферы, выражается в виде

суммы $S' \frac{e'}{Q'P}$, где $Q'P$ означает расстояние заряда e' от точки

наблюдения P (при этом мы пользуемся символом S' как знаком суммирования по зарядам рассматриваемой системы). Обозначая координаты e' относительно P' , т. е. компоненты вектора $P'Q'$ в некоторой совершенно произвольной системе координат, через ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 , а соответствующие координаты P и P через x'_1, x'_2, x'_3 и x_1, x_2, x_3 , получаем

$$(Q'P)^2 = \sum_{i=1}^3 (x'_i + \xi'_i - x_i)^2,$$

и, следовательно, по теореме Тейлора,

$$\frac{1}{Q'P} = \frac{1}{R} + \sum_i \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'_i} \xi'_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'_i \partial x'_k} \xi'_i \xi'_k +$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,k,l} \frac{\partial^3 \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'_i \partial x'_k \partial x'_l} \xi'_i \xi'_k \xi'_l + \dots,$$

где, как и ранее,

$$R = \sqrt{\sum_i (x'_i - x_i)^2}$$

обозначает расстояние $P'P$.

Подставляя это выражение в $\varphi = S' \frac{e'}{Q'P}$, мы получаем для φ следующий ряд

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots + \varphi^{(n)} + \dots, \quad (6)$$

$$\varphi^{(0)} = \frac{e'}{R}, \quad \varphi^{(1)} = \sum_i \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'_i} e'_i,$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{i, k} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'_i \partial x'_k} e'_{ik} \dots \quad (6a)$$

а коэффициенты e'_i, e'_i, e'_{ik} определены формулами

$$e' = S' \varepsilon'; \quad e'_i = S' \varepsilon' \xi'_i, \quad e'_{ik} = S' \varepsilon' \xi'_i \xi'_k, \dots \quad (6b)$$

Величины $\varphi^{(n)}$ называются потенциалами n -го порядка рассматриваемой системы; мы будем писать их в форме:

$$\varphi^{(n)} = \sum \frac{e'(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'^{n_1}_1 \partial x'^{n_2}_2 \partial x'^{n_3}_3} \quad (n_1 + n_2 + n_3 = n), \quad (7)$$

где

$$e'(n_1, n_2, n_3) = S' \varepsilon' \xi'^{n_1}_1 \xi'^{n_2}_2 \xi'^{n_3}_3. \quad (7a)$$

Для больших значений n этот способ написания значительно удобнее предыдущего (6a, 6b).

Так как точка P лежит вне сферы, охватывающей S' , т. е. расстояние $P'Q'$ меньше $P'P=R$, то ряд (6) должен сходиться абсолютно и равномерно. Этот ряд можно рассматривать как разложение φ по отрицательным степеням расстояния R . А именно, $\varphi^{(n)}$ обратно пропорционально $(n+1)$ -ой степени R .

Соответственно этому мы положим

$$\varphi^{(n)} = \frac{H_n}{R^{n+1}}, \quad (8)$$

где H_n уже не зависит от величины вектора $R=P'P$, а только от его направления. Эта зависимость выражается формулою

$$H_n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e'(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} [n_1, n_2, n_3], \quad (8a)$$

где

$$[n_1, n_2, n_3] = R^{n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'^{n_1}_1 \partial x'^{n_2}_2 \partial x'^{n_3}_3} \quad (8b)$$

является простейшей функцией рассматриваемого типа. Она может быть выражена непосредственно через косинусы

$$\lambda'_i = \frac{x_i - x'_i}{R}.$$

Параметры (6b) или (7a), определяющие электрические свойства рассматриваемой системы, можно назвать „электрическими моментами“ порядка $n = n_1 + n_2 + n_3$ (относительно заданной системы осей).

Момент нулевого порядка есть не что иное, как результирующий электрический заряд системы (e'); моменты первого порядка суть компоненты вектора, соответствующего моменту элементарного (математического) диполя в точке P' ; моменты второго порядка суть компоненты тензора, определяющего элементарный квадруполь; таким же самым образом моменты n -го порядка означают компоненты симметрического тензора n -го ранга, соответствующего мультиполю n -го порядка.

Каждое слагаемое в выражении (7), согласно (2a), представляет собою потенциал мультиполя n -го порядка с взаимно перпендикулярными осями и моментом, равным

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} e' (n_1, n_2, n_3).$$

Число этих слагаемых очевидно равно $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Однако, в силу тождества

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x_3'^2} = 0,$$

между функциями $\frac{\partial^n \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x_1'^{n_1} \partial x_2'^{n_2} \partial x_3'^{n_3}}$ или между $[n_1, n_2, n_3]$ должно

существовать $\frac{n(n-1)}{2}$ тождественных соотношений вида

$$\frac{\partial^{n-2} \nabla'^2 \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x_1'^{k_1} \partial x_2'^{k_2} \partial x_3'^{k_3}} = 0,$$

$$[k_1 + 2, k_2, k_3] + [k_1, k_2 + 2, k_3] + [k_1, k_2, k_3 + 2] = 0 \\ (k_1 + k_2 + k_3 = n - 2).$$

При помощи этих соотношений можно выразить $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ параметров $e' (n_1, n_2, n_3)$, определяющих $\varphi^{(n)}$ или H_n , через

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n + 1$$

независимых параметров, а именно, таким образом, что (7) принимает вид (5) (при $n' = n$), т. е., что H_n представляется в виде шаровой функции n -го порядка (5a), умноженной на подлежащим образом выбранный коэффициент ($e'^{(n)}$).

Действительно, число независимых параметров, определяющих потенциал мультиполя n -го порядка, в точности равно $2n + 1$ (по два параметра для каждой оси \mathbf{a}'_k , например углы θ_k, ψ_k , и результирующий момент $e'^{(n)}$).

Если, следовательно, положить

$$(\mathbf{a}'_k \nabla') = \alpha'_{k_1} \frac{\partial}{\partial x'_1} + \alpha'_{k_2} \frac{\partial}{\partial x'_2} + \alpha'_{k_3} \frac{\partial}{\partial x'_3},$$

где $\alpha'_{k_1}, \alpha'_{k_2}, \alpha'_{k_3}$ обозначают направляющие косинусы единичного вектора \mathbf{a}'_k , ($\alpha'^2_{k_1} + \alpha'^2_{k_2} + \alpha'^2_{k_3} = 1$), то всегда возможно определить эти направляющие косинусы и параметр $e'^{(n)}$ таким образом, чтобы существовало тождество

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e'(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'^{n_1}_1 \partial x'^{n_2}_2 \partial x'^{n_3}_3} = \frac{p'^{(n)}}{n!} (\mathbf{a}'_1 \nabla') (\mathbf{a}'_2 \nabla') \dots (\mathbf{a}'_n \nabla') \frac{1}{R},$$

т. е. вместо действительных электрических моментов $e'(n_1, n_2, n_3)$ можно ввести другие моменты, содержащие только $2n + 1$ независимых параметров и имеющие вид

$$p(n_1, n_2, n_3) = p'^{(n)} \sum \prod \alpha_{k_1, 1} \prod \alpha_{k_2, 2} \prod \alpha_{k_3, 3}.$$

Этот факт можно выразить еще следующим образом: электрическое поле произвольной системы электрических зарядов вне ограничивающей ее сферы совершенно тождественно с полем системы мультиполей различного порядка, сосредоточенных в центре этой сферы.

Фактическое определение мультиполей при помощи параметров $e'(n_1, n_2, n_3)$ в общем случае $n > 1$ является очень грудной задачей, на разрешении которой мы здесь остановиться не можем. Она легко разрешима лишь при $n = 0$ и $n = 1$. А именно, имеем $e = S' \epsilon'$ и, далее,

$$\varphi^{(1)} = \sum_i \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'_i} e'_i = \sum e'_i \nabla' \frac{1}{R} = (\mathbf{p}' \nabla') \frac{1}{R},$$

где \mathbf{p}' обозначает вектор с компонентами $e'_i = S' \epsilon' \xi_i$, откуда следует $p'^{(1)} = p'$ и $\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{p}'}{p'}$.

Заметим, что, согласно вышедшему положению, совокупность любых мультиполей одного и того же порядка, находящихся в одной и той же точке, может быть заменена одним

единственным „резльтирующим“ мультиполем. Это положение представляет собою обобщение соответствующего положения для элементарных диполей (глава 1, § 3); однако нельзя дать простого правила для определения осей и моментов результирующего мультиполя n -го порядка (при $n > 1$) по осям и моментам отдельных „составляющих“.

Далее, следует заметить, что электрический момент некоторой заданной системы определяется вообще не однозначно, а зависит от выбора центра сферы (P'). Момент n -го порядка не зависит от этого выбора только тогда, когда одновременно исчезают моменты всех низших порядков (т. е. параметры $p'^{(n-1)}, p'^{(n-2)}, \dots, p'^{(0)} = e'$).

Для потенциальной энергии произвольной электрической системы в заданном внешнем поле можно получить результаты, аналогичные тем, которые относятся к представлению поля подобной системы при помощи мультиполей различного порядка.

Рассмотрим систему S электрических зарядов (e), содержащуюся внутри сферы K . Система S' , создающая рассматриваемое поле, пусть находится вне K . Тогда потенциал этого поля внутри K должен удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$.

Потенциальная энергия S (относительно S') очевидно равна сумме соответствующих энергий для отдельных зарядов, т. е.

$$U = S \varepsilon \varphi(Q),$$

где $\varphi(Q)$ означает величину потенциала φ в точке Q , в которой находится заряд e . Если обозначить координаты Q относительно P (т. е. компоненты вектора PQ), через ξ_1, ξ_2, ξ_3 и разложить $\varphi(Q)$ в ряд по степеням ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то для U получается следующий ряд

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + \dots + U^{(n)}, \quad (9)$$

где

$$U^0 = e \varphi, \quad U^{(1)} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i, \quad U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} e_{ik} \dots \quad (9a)$$

и

$$e = Se, \quad e_i = Se \xi_i, \quad e_{ik} = Se \xi_i \xi_k \quad (9b)$$

или, при другом способе написания,

$$U^{(n)} = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}, \dots \quad (10)$$

где

$$e(n_1, n_2, n_3) = Se \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} \dots \quad (10a)$$

Параметры (9b) и (10a) суть те же самые электрические мо-

менты рассматриваемой системы, которые определяют ее собственное поле вне сферы K . В силу уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0,$$

между производными n -го порядка от φ по x_1, x_2, x_3 должно существовать ровно столько же соотношений, как и между соответствующими производными от $1/R$ по x'_1, x'_2, x'_3 (см. выше). Отсюда следует, что энергия n -го порядка $U^{(n)}$ может быть представлена в виде

$$U^{(n)} = \frac{P^{(n)}}{n!} (\mathbf{a}_1 \nabla) (\mathbf{a}_2 \nabla) \dots (\mathbf{a}_n \nabla) \varphi,$$

т. е. тождественна с потенциальной энергией мультиполя n -го порядка в центре сферы P , именно того самого мультиполя, который вне сферы K создает потенциал, тождественный с потенциалом n -го порядка системы S . Таким образом, резюмируя, мы можем утверждать следующее: произвольная система электрических зарядов, которая может быть отделена от других систем некоторой сферической поверхностью (содержащей данную систему и исключаяющей другие), по своему взаимодействию с другими системами совершенно эквивалентна некоторому числу мультиполей различного порядка, сосредоточенным в центре сферы.

Однако при действительном определении взаимодействия двух подобных систем является более целесообразным не вводить явно этих мультиполей, а оперировать с выражениями, определяющими потенциал одной системы (S') и потенциальную энергию других (S) как функцию компонент их электрических моментов $e'(n'_1, n'_2, n'_3)$ или $e(n_1, n_2, n_3)$ (ибо эти моменты можно рассматривать как известные величины).

Если в (10а), согласно (6) и (7), положить $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots$, то для U мы получаем двойной ряд

$$U = \sum U^{(n, n')}, \tag{11}$$

причем $U^{(n, n')}$ соответствует тому выражению, которое получается из $U^{(n)}$, если потенциал φ положить равным $\varphi^{(n')}$.

В виду соотношения

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x_1} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x'_1}$$

мы можем при помощи символов (8б) написать:

$$U^{(n, n')} = \frac{(-1)^{n'}}{R^{n+n'+1}} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n'_1+n'_2+n'_3=n'}} \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e(n_1, n_2, n_3) \cdot e'(n'_1, n'_2, n'_3)}{n_1! n_2! n_3! n'_1! n'_2! n'_3!} \cdot [n_1+n'_1, n_2+n'_2, n_3+n'_3]. \tag{11a}$$

Если в приведенном уравнении коэффициент при $R^{n+n'+1}$ обозначить через $H_{n, n'}$ и положить

$$\sum_{n+n'=k} H_{n, n'} = I_k, \quad (11b)$$

то получим

$$U = \frac{I_0}{R} + \frac{I_1}{R^2} + \frac{I_2}{R^3} + \dots \quad (11c)$$

Напомним, что U представляет собою не только энергию S , относительно S' , но одновременно и энергию S' относительно S (этому факту соответствует симметрия выражения (11a) относительно „штрихованных“ и „нештрихованных“ параметров). Эта взаимная энергия обеих систем по (11) представляется в виде ряда, расположенного по возрастающим отрицательным степеням их взаимного расстояния, точнее, расстояния между центрами заключающих их сфер. Коэффициенты этого ряда зависят от ориентации обеих систем относительно друг друга и относительно соединяющей их линии (R) (за исключением коэффициента I_0 , который просто равен произведению ee' результирующих зарядов систем S и S').

Коэффициенты $H_{n, 0}$, $H_{n', 0}$ тождественны введенным ранее шаровым функциям H_n или $H_{n'}$, [ср. формулу (5)].

§ 4. Гармонически сопряженные системы; электрический потенциал внутри шара. Две точки Q и Q' называются „гармонически сопряженными“ относительно поверхности шара K , если

они расположены по одну сторону от центра шара P на проходящей через этот центр P прямой таким образом, что

$$\rho' \rho = a^2, \quad (12)$$

где $\rho = PQ$, $\rho' = PQ'$ и a обозначает радиус шара.

Одна точка (например Q) должна, следовательно, находиться внутри, а другая (Q') — вне K

Обозначая точку пересечения прямой PQQ' с поверхностью шара через A_0 (рис. 27), можно написать (12) следующим образом:

$$\frac{PA_0}{PQ} = \frac{PQ'}{PA_0}.$$

Вычитая из обеих частей этого равенства единицу, мы получаем

$$\frac{PA_0 - PQ}{PQ} = \frac{PQ' - PA_0}{PA_0},$$

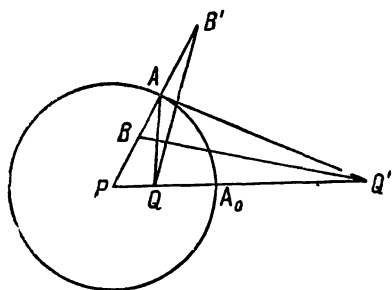


Рис. 27.

т. е.
$$\frac{QA_0}{PQ} = \frac{A_0 Q'}{PA_0},$$

или
$$\frac{QA}{Q'A_0} = \frac{\rho}{a}.$$

Теперь легко убедиться, что эта пропорция остается справедливой не только для точки A_0 , но и для любой другой точки A поверхности шара. Для доказательства рассмотрим треугольники PQA и $PQ'A$. Так как $PA = a$, то, согласно (12), имеем

$$\frac{PQ}{PA} = \frac{PA}{PQ'}.$$

Как как кроме того эти треугольники имеют общий угол (при P), то они должны быть подобны. Отсюда следует

$$\frac{QA}{PQ} = \frac{Q'A}{PQ'}.$$

т. е.
$$\frac{QA}{Q'A} = \frac{\rho}{a}. \quad (12a)$$

Таким образом, если мы представим себе в Q и Q' два одноименных электрических заряда ε и ε' , находящихся между собою в отношении

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\rho}{a} = \frac{a}{\rho'}, \quad (12b)$$

то их потенциалы $\frac{\varepsilon}{QA}$ или $\frac{\varepsilon'}{Q'A}$ во всех точках A поверхности шара должны быть равными друг другу.

Рассмотрим теперь две гармонически сопряженные точки B и B' на прямой PA . Из уравнений $PB \cdot PB' = a^2$ и $PQ \cdot PQ' = a^2$ получается

$$\frac{PB}{PQ'} = \frac{PQ}{PB'}.$$

Следовательно, треугольники PQB' и $PQ'B$, имеющие общий угол при P , должны быть также подобными. Таким образом $QB' : PB' = Q'B : Q'P$ и $QB' : PQ = Q'B : BP$, или, вводя обозначения $PB = R$, $PB' = R'$,

$$\frac{QB'}{Q'B} = \frac{R'}{\rho'} = \frac{\rho}{R}. \quad (13)$$

Обозначая далее электрический потенциал ε в B' и ε' в B через $\varphi' = \frac{\varepsilon}{QB'}$ и $\varphi = \frac{\varepsilon'}{Q'B}$, по (13) и (12b) имеем:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{R'}{a} = \frac{a}{R}. \quad (13a)$$

Эта формула показывает, что отношение $\varphi':\varphi$ не зависит от направления прямой PA_0 , на которой находятся „сопряженные заряды“, и от положения последних на этой прямой, поскольку выполняется соотношение (12). Таким образом, если рассматривать произвольную систему S зарядов e внутри шара K и соответствующую „сопряженную“ систему S' внешних зарядов e' , то потенциалы φ и φ' , обусловленные системой S' в B и системой S в B' , должны находиться между собою в таком же соотношении (13а), как и потенциалы отдельных сопряженных зарядов.

Согласно выводам предыдущего параграфа, потенциал φ' вне шара K можно развернуть в ряд

$$\varphi' = \frac{H_0}{R'} + \frac{H_1}{R'^2} + \frac{H_2}{R'^3} + \dots = \sum \frac{H_n}{R'^{n+1}},$$

где H_0, H_1, H_2, \dots зависят только от направления прямой PA . Соответственно этому, для φ мы получаем:

$$\varphi = \frac{H_0}{a} + H_1 \frac{R}{a^3} + H_2 \frac{R^2}{a^5} \dots = \sum H_n \frac{R^n}{a^{2n+1}}, \dots \quad (14)$$

т. е. ряд, расположенный по возрастающим положительным степеням R (причем $R < a$). Само собою разумеется, что для граничного случая $R = R' = a$ оба ряда совпадают.

Согласно (8а) шаровые функции H_n определяются электрическими моментами e' (n_1, n_2, n_3) = $S \varepsilon \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}$ „внутренней системы“ S . Однако они легко могут быть выражены через соответствующие параметры „внешней“ системы S' . Ибо, если ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 обозначают компоненты векторов ρ и ρ' , то по (12b) получается

$$S \varepsilon \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} = S' e' \frac{a}{\rho'} \left(\frac{a^2}{\xi'_1} \right)^{n_1} \left(\frac{a^2}{\xi'_2} \right)^{n_2} \left(\frac{a}{\xi'_3} \right)^{n_3},$$

т. е.

$$e' (n_1, n_2, n_3) = a^{2n+1} S' \frac{\varepsilon'}{\rho'} \xi_1'^{-n_1} \xi_2'^{-n_2} \xi_3'^{-n_3} \dots \quad (14a)$$

Если подставить эти выражения в формулу

$$H_n = \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = n} \frac{e' (n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} [n_1, n_2, n_3], \quad (14b)$$

то по (14) получим такое представление „внутреннего“ потенциала φ , которое зависит непосредственно от свойств обуславливающей его внешней системы, причем эти свойства (т. е. расположение и величина зарядов e') могут быть совершенно произвольными, ибо каждой внешней системе зарядов всегда можно сопоставить сопряженную ей внутреннюю систему.

Подставляя (14) в формулы (9) и (10), (причем S может обозначать совершенно произвольную внутреннюю систему), полу-

чаем новое выражение для взаимной потенциальной энергии обеих систем S и S' . Это новое представление энергии является более общим, чем прежнее, определявшееся формулами (11)—(11с), ибо ряд (11) сходится лишь в том случае, когда S и S' могут быть отделены друг от друга двумя непересекающимися сферическими поверхностями (сумма радиусов сфер $a + a'$ должна быть меньше расстояния между их центрами).

Напротив, новое представление не с одной сферической поверхностью остается справедливым даже и тогда, когда как внешние, так и внутренние заряды лежат сколь угодно близко к поверхности шара K .

Если вместо e' (n_1, n_2, n_3) ввести параметры

$$E' (n_1, n_2, n_3) = S' \frac{e'}{\rho'} \xi_1'^{-n_1} \xi_2'^{-n_2} \xi_3'^{-n_3} \dots \quad (15)$$

и функции H_n заменить на

$$h_n = H_n a^{2n+1} = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{E' (n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} [n_1! n_2! n_3!], \quad (15a)$$

то для φ получаем выражение

$$\varphi = h_0 + h_1 R + h_2 R^2 + \dots = \sum h_n R^n. \quad (15b)$$

Однако при этом расстояние R не должно превышать радиуса шара: ряд (15b) в общем случае сходится лишь в области $R \leq a$.

Коэффициенты этого ряда h_n суть шаровые функции n -го порядка, т. е. являются (5a) полиномы n -ой степени от направляющих косинусов λ вектора $R = PB$. Отсюда следует, что $h_n R^n$ есть целая однородная функция n -ой степени от компонент этого вектора, которые мы обозначим через x_1, x_2, x_3 . В этом факте можно убедиться непосредственно, если принять во внимание, что согласно определению

$$[n_1, n_2, n_3] = R^{n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}.$$

Так как производные $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}$ в (10) относятся к центру шара ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$), то φ можно заменить одним членом $h_n R^n$; другие же члены низшего и высшего порядка к производным n -го порядка ничего не добавляют. При этом, согласно (10) и (15a), получаем

$$U^{(n)} = \sum \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1'+n_2'+n_3'=n'}} \frac{e (n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \frac{E' (n_1', n_2', n_3')}{n_1'! n_2'! n_3'!} [n_1, n_2, n_3; n_1', n_2', n_3'], \quad (16)$$

где

$$[n_1, n_2, n_3; n'_1, n'_2, n'_3] = \left\{ \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n'_1} \partial x_2^{n'_2} \partial x_3^{n'_3}} \left(R^{2n+1} \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x_1^{n'_1} \partial x_2^{n'_2} \partial x_3^{n'_3}} \right) \right\}_{R=0} \quad (16a)$$

Приведенное представление энергии $U = U^{(0)} + U^{(1)} + \dots$ по сравнению с прежним имеет прежде всего тот недостаток, что в нем не находит своего выражения зависимость энергии от положения системы S , т. е. от центра охватывающей ее сферы. В том случае, когда рассматриваемую систему можно перемещать как целое внутри этой сферы (не наталкиваясь на внешнюю систему), эту зависимость можно выразить следующим образом.

Представим себе систему S заключенной в некоторой возможно малой сфере K . Центр этой сферы обозначим через P , а центр содержащей ее большой сферы — через Q . Если отнести координаты внешних зарядов попрежнему к O , а внутренних — к P , то параметры E' (n'_1, n'_2, n'_3) остаются неизменными, тогда как вместо постоянных параметров e (n_1, n_2, n_3) должны быть введены величины

$$S e (x_1 + \xi_1)^{n_1} (x_2 + \xi_2)^{n_2} (x_3 + \xi_3)^{n_3}.$$

Эти функции суть полиномы n -ой степени относительно x_1, x_2, x_3 , (координат P по отношению к O), коэффициенты которых с точностью до численного множителя равны новым (постоянным) значениям электрических моментов системы.

Как мы видели выше, „внутренняя система“ электрических зарядов может быть заменена совокупностью мультиполей, расположенных в центре сферы. Соответственно этому, сопряженную внешнюю систему S' можно заменить (в отношении поля, обуславливаемого ею внутри сферы) совокупностью бесконечно удаленных зарядов, которые являются гармонически сопряженными по отношению к обычным мультиполям. При этом мультиполю n -го порядка, который вне сферы K обуславливает поле

$$\varphi' = p^{(n)} (a_1 \nabla) (a_2 \nabla) \dots (a_n \nabla) \frac{1}{R'} = (-1)^n p^{(n)} \frac{Y_n}{R'^{n+1}},$$

соответствует система бесконечно удаленных зарядов, которые внутри K создают поле

$$\varphi' = (-1)^n p^{(n)} \frac{Y_n R^n}{a^{2n+1}}$$

Так, например, математическому диполю соответствуют два противоположных заряда, расположенные в бесконечности на продолжении одного и того же диаметра (в противоположных направлениях) и обуславливающие внутри сферы потенциал

$$\varphi = \frac{pR}{a^3}.$$

При этом p , как обычно, обозначает электрический момент диполя. Заметим, что этот потенциал соответствует однородному полю с напряженностью

$$E = -\frac{p}{a^3}.$$

§ 5. Эквивалентный поверхностный заряд. Из выводов двух последних параграфов необходимо особенно отметить следующее положение: определенное электрическое поле внутри или вне замкнутой поверхности может быть создано различным распределением зарядов внутри или вне этой замкнутой поверхности.

Эта теорема имеет место вообще для совершенно произвольных замкнутых (или бесконечных) поверхностей¹ и является непосредственным следствием закона Кулона или эквивалентного ему уравнения Лапласа. Далее, можно доказать, что для какого-нибудь (произвольного) распределения электрических зарядов с одной стороны от рассматриваемой поверхности K существует эквивалентное (т. е. создающее то же самое поле с другой стороны) распределение электричества на самой этой поверхности. Таким образом взаимная потенциальная энергия двух электрических систем S и S' , отделенных друг от друга поверхностью K , всегда может быть вычислена как взаимная энергия двух совпадающих с K наэлектризованных поверхностей.

В частном случае поверхности шара эта теорема может быть доказана совсем просто. Пусть S и S' будут две гармонически сопряженные системы (внутренняя и внешняя); тогда обуславливаемые ими потенциалы, внешний φ' и внутренний φ , на самой поверхности шара совпадают друг с другом. Таким образом можно сказать, что при прохождении сквозь поверхность эти потенциалы непрерывно переходят один в другой. Следовательно их можно трактовать как внешнее и внутреннее значения потенциала одной и той же системы электрических зарядов Σ . Далее, так как вне шара имеет место уравнение $\nabla^2\varphi' = 0$, а внутри $-\nabla^2\varphi = 0$, то эти заряды могут находиться только на пограничной поверхности K . Их присутствие должно проявляться в скачке нормальной (т. е. радиальной) компоненты напряженности электрического поля при прохождении сквозь K . Применим общую формулу $\oint E_n dS = 4\pi e$ к бесконечно малому цилиндру, который заключает в себе элемент поверхности шара dS и имеет перпендикулярную к нему боковую поверхность (рис. 28). Тогда при неизменном основании dS и при исчезающей высоте цилиндра мы получаем

$$E_n' - E_n = 4\pi\eta, \quad (17)$$

где $\eta = \frac{de}{dS}$ обозначает поверхностную плотность электричества

¹ Бесконечную поверхность, например плоскость, можно трактовать как поверхность, замыкающуюся на бесконечности.

на элементе dS , E' и E — напряженности электрического поля с внешней и внутренней стороны dS , а n — нормаль, проведенную изнутри наружу, т. е. в направлении радиуса-вектора R .¹

Так как $E = -\nabla' \varphi'$ и $E = -\nabla \varphi$, то формула (17) может быть переписана следующим образом

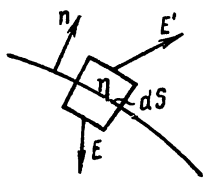


Рис. 28.

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - \frac{\partial \varphi'}{\partial R'} \right)_{R=R'=a}.$$

Подставляя сюда ряд (14) для φ и соответствующий ряд для φ' , получаем

$$\eta = \sum_n \frac{2n+1}{4\pi a^{n+2}} H_n. \quad (17a)$$

Это и есть искомое эквивалентное поверхностное распределение электрических зарядов для каждой из обеих сопряженных систем S и S' в соответствующей части пространства. В частности, для $n=0$, т. е. $H_0 = e$ (полюс нулевого порядка) получается

$\eta = \frac{e}{4\pi a^2}$, т. е. равномерное распределение заряда e . Мы полу-

чаем таким образом известный результат, что равномерно заряженная сферическая поверхность производит такое внешнее действие, как если бы весь заряд был сосредоточен в ее центре.² Для $n=1$ и $H_1 = p \cos \theta$ (диполь с моментом p ; θ — угол между p и R) подобным же образом имеем

$$\eta = \frac{3}{4\pi} \frac{p \cos \theta}{a^2}. \quad (17b)$$

При этом полный заряд $\oint \eta dS$ равен нулю.

Представим себе теперь, что системы S и S' не сопряженные, а совершенно независимые друг от друга, причем внутренняя характеризуется шаровой функцией H_n , а внешняя — H'_n . Тогда их взаимная энергия может быть представлена в виде

$$U = \oint \varphi \eta dS,$$

где интеграл распространен по поверхности сферы.

При помощи формул (17a) и $\varphi = \sum \frac{H'_n}{a^{n+1}}$ (для $R=a$) мы получаем

$$U = \frac{1}{4\pi a^2} \sum_n \sum_{n'} \frac{2n+1}{a^{n+n'+1}} \oint H_n H'_n dS. \quad (18)$$

¹ Ср. формулу (12) главы III для электрической напряженности внутри двойного слоя.

² При этом внешнему потенциалу $\varphi' = \frac{e}{R}$ соответствует внутренний $\varphi = \frac{e}{a} = \text{const.}$

Это представление энергии очевидно должно быть тождественно с представлением, приведенным в последнем параграфе [см. формулу (16)]. Отсюда между прочим следует, что двойной ряд (18) можно свести к простому ряду:

$$U = \frac{1}{4\pi a^2} \sum_n \frac{2n+1}{a^{2n+1}} \oint H_n H_n' dS, \quad (18a)$$

т. е., что при $n' \neq n$

$$\oint H_n H_n' dS = 0. \quad (18b)$$

Это соотношение, которое может быть легко проверено, выражает „свойство ортогональности“ шаровых функций различного порядка.

Если выбрать произвольную последовательность шаровых функций $H_0, H_1, H_2 \dots$, нормированных таким образом, чтобы

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int H_n^2 dS = 1, \quad (19)$$

то произвольное заданное распределение электричества на сфере η может быть развернуто в ряд по этим функциям, т. е. представлено в виде

$$\eta = \sum_0^\infty C_n H_n, \quad (19')$$

где коэффициенты C_n вычисляются по формуле

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int \eta H_n dS = \sum_0^\infty \frac{C_n}{4\pi a^2} \int H_n H_n' dS,$$

т. е.

$$C_n = \frac{1}{4\pi a^2} \int \eta H_n dS. \quad (19b)$$

Теперь мы перейдем к доказательству общей теоремы, формулированной в начале этого параграфа.

Рассмотрим замкнутую поверхность S и потенциал φ' , обусловленный вне S внутренней системой зарядов. Значение φ' на самой поверхности обозначим через φ .

Для того, чтобы φ' можно было рассматривать как потенциал некоторого распределения электричества на S с поверхностной плотностью η , должна существовать некоторая функция $\varphi(\mathbf{r})$, представляющая потенциал того же самого распределения зарядов внутри S . Эта функция очевидно должна удовлетворять следующим условиям:

1) Внутри S она вместе со своей первой производной ($\nabla\varphi =$ — отрицательной напряженности электрического поля) остается непрерывной, вторая же производная исчезает ($\nabla^2\varphi = 0$).

2) На поверхности S функция φ принимает заданное значение $\bar{\varphi}$ (т. е. соответствующее поверхностное значение φ').

Теперь можно доказать, что такая функция всегда (для любой формы S и любого значения $\bar{\varphi}$) может быть найдена и притом однозначным образом (принцип Дирихле).

Если в общей формуле $\oint F_n dS = \int \operatorname{div} F dV$ положить $F = -\psi \nabla \varphi$, то получим

$$\oint \psi \nabla_n \varphi dS = \int \psi \nabla^2 \varphi dV + \int \nabla \psi \nabla \varphi dV. \quad (20)$$

В частном случае $\psi = \varphi$ эта формула сводится к ранее известной формуле (5) главы III:

$$\int (\nabla \varphi)^2 dV = \oint \varphi \nabla_n \varphi dS - \int \varphi \nabla^2 \varphi dV, \quad (20a)$$

откуда получается, что при $\nabla^2 \varphi = 0$ и $\bar{\varphi} = 0$,

$$\varphi = 0$$

во всем объеме V .

Отвлечемся сперва от условия $\nabla^2 \varphi = 0$ и рассмотрим изменение ΔJ , которое претерпевает интеграл $J = \int (\nabla \varphi^2) dV$, когда функция φ заменяется на $\varphi + \delta \varphi$.

Из тождества

$$[\nabla(\varphi + \delta \varphi)]^2 = (\nabla \varphi)^2 + 2 \nabla \varphi \nabla \delta \varphi + (\nabla \delta \varphi)^2$$

следует

$$\Delta J = 2 \int \nabla \varphi \nabla \delta \varphi dV + \int (\nabla \delta \varphi)^2 dV,$$

или согласно (20) при $\psi = \delta \varphi$

$$\Delta J = \int (\nabla \delta \varphi)^2 dV - 2 \int \delta \varphi \nabla^2 \varphi dV + 2 \oint \delta \varphi \nabla_n \varphi dS. \quad (20b)$$

Если внутри поверхности S положить $\nabla^2 \varphi = 0$ и сравнивать с φ только такие функции $\varphi + \delta \varphi$, которые на S принимают такое же самое значение $\bar{\varphi}$, как и φ , т. е. для которых $\bar{\delta \varphi} = 0$, то для ΔJ получаем существенно положительное значение. Таким образом, условие $\nabla^2 \varphi = 0$, при помощи которого мы определили раньше искомую потенциальную функцию, совершенно эквивалентно следующему: функция φ должна обращать интеграл J в минимум. Что среди всех функций, принимающих на S заданное граничное значение $\bar{\varphi}$, вообще существует подобная функция, можно рассматривать как совершенно очевидный факт. В том, что имеется только одна такая функция, можно убедиться следующим образом: если $\varphi + \delta \varphi$ была бы другой функцией такого же свойства, то мы должны были бы иметь $\bar{\delta \varphi} = 0$ и $\nabla^2(\delta \varphi) = 0$; но отсюда согласно (20a) следовало бы (при замене φ на $\delta \varphi$), что $\nabla(\delta \varphi)$ и $\delta \varphi$ исчезают во всем объеме V .

Если функция φ найдена, то искомую поверхностную плотность на S можно определить формулой (17) подобно тому, как и в рассмотренном выше случае поверхности шара. Фактическое же определение этой функции в общем случае, т. е. для произвольной формы S и произвольных граничных значений φ , представляет собой очень трудную аналитическую задачу.

§ 6. Функция Грина. Однако эту задачу можно свести к более простой, а именно, к определению некоторой вспомогательной функции, зависящей только от формы поверхности S , но не от граничных значений φ . При помощи этой функции потенциал φ может быть представлен в виде поверхностного интеграла, распространенного по S .

Рассмотрим какую-либо точку P^* внутри S и очень малую поверхность Σ , заключающую эту точку.

Если обозначенное в формуле (20) объемное интегрирование распространить не на весь объем V , а только на часть V^* , лежащую между S и Σ , то слева в формуле (20) получается разность

$$\oint \psi \nabla_n \varphi dS - \oint \psi \nabla_n \varphi d\Sigma,$$

где ν означает внешнюю нормаль к поверхности Σ .

Меняя в (20) местами функции φ и ψ и принимая далее, что внутри V^* обе функции, а также их градиенты и вторые производные остаются конечными, посредством вычитания получаем

$$\begin{aligned} & \oint (\psi \nabla_n \varphi - \varphi \nabla_n \psi) d\Sigma = \\ & = \oint (\psi \nabla_n \varphi - \varphi \nabla_n \psi) dS - \int (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV^*. \end{aligned} \quad (21)$$

В частном случае, когда $\nabla^2 \varphi$ и $\nabla^2 \psi$ исчезают внутри V^* , имеем

$$\oint (\psi \nabla_n \varphi - \varphi \nabla_n \psi) d\Sigma = \oint (\psi \nabla_n \varphi - \varphi \nabla_n \psi) dS. \quad (21a)$$

Это уравнение остается справедливым и в том случае, когда как вспомогательная функция ψ , так и выражения $\nabla \psi$ и $\nabla^2 \psi$ внутри поверхности Σ становятся бесконечными. Мы можем, например, положить $\psi = \frac{1}{R}$, где R — расстояние точки P^* от какой-нибудь точки P объема V^* . На самом деле, если рассматривать ψ как функцию радиуса-вектора r точки P , то она и ее градиент $\nabla \psi$ остаются внутри V^* конечными, тогда как $\nabla^2 \psi = 0$. Переходя к предельному случаю, когда поверхность Σ стягивается к точке P^* , получаем

$$\lim \oint \psi \nabla_n \varphi d\Sigma = 0,$$

ибо Σ убывает как R^2 . Далее

$$\lim \oint \varphi \nabla_n \psi d\Sigma = \varphi^* \lim \oint \nabla_n \frac{1}{R} d\Sigma = -4\pi\varphi^*,$$

потому что $\frac{1}{R}$ можно рассматривать как потенциал единичного заряда в P .¹ Таким образом, по (21) мы получаем

$$\varphi^* = \oint \frac{1}{R} \frac{\nabla_n \varphi}{4\pi} dS - \oint \frac{\varphi}{4\pi} \nabla_n \frac{1}{R} dS. \quad (21b)$$

Первый член в правой части этой формулы представляет собою потенциал поверхностного заряда с плотностью $\frac{\nabla_n \varphi}{4\pi}$, а второй — потенциал двойного слоя, электрический момент которого, отнесенный к единице площади, равен $\frac{\varphi}{4\pi}$ (см. главу III, § 9). Легко видеть, что подобная система создавала бы во внешнем пространстве потенциал, равный нулю (соответствующий отсутствию электрического поля). Действительно, если вместо P^* взять точку P' , лежащую вне S , то функция $\psi = \frac{1}{R}$ (R = расстоянию $P'P$) остается конечной и непрерывной во всем объеме V , ограниченном S . Но в этом случае левая и правая части (21) исчезают, ибо интегралы $\oint \psi \nabla_n \varphi dS$ и $\oint \varphi \nabla_n \psi dS$ являются двумя эквивалентными преобразованиями объемного интеграла $\int (\nabla \varphi \nabla \psi) dV$. Этот факт можно также истолковать физически: при прохождении сквозь двойной слой с моментом κ (отнесенным к единице площади) потенциал претерпевает скачок величиною $4\pi\kappa$. Если же на внутренней стороне S

$$\varphi = \overline{\varphi} \text{ и } \kappa = \frac{\overline{\varphi}}{4\pi},$$

то на внешней стороне мы должны иметь $\varphi' = 0$.

Для представления потенциала φ внутри S формула (21a) не совсем пригодна, потому что наряду с граничным значением φ (которое должно быть равным соответствующему граничному значению внешнего потенциала φ') она содержит еще граничное значение градиента $\nabla \varphi$ внутри S , тогда как эти значения должны рассматриваться как заданные только вне S . Чтобы освободиться от этих неизвестных граничных значений, вводят в (21) вместо $\frac{1}{R}$ некоторую другую функцию ψ от обших аргументов r (радиус-вектор точки P) и r^* , которая для очень

¹ φ^* обозначает значение φ в точке P^* .

малых расстояний PP^* тождественна с $\frac{1}{R}$ (с точностью до несущественного конечного члена), для всех r удовлетворяет, подобно $\frac{1}{R}$, уравнению Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$, а для r , соответствующих точкам поверхности S , исчезает. Тогда вместо (21a) получается формула:

$$\varphi(r^*) = -\frac{1}{4\pi} \oint \bar{\varphi} \nabla_n \psi(r, r^*) dS, \quad (21c)$$

которая позволяет вычислить потенциал внутри S по его граничным значениям.¹ Определенная выше функция $\psi(r, r^*)$ называется функцией Грина для поверхности S . Легко показать, что она, подобно $\frac{1}{R}$, симметрична относительно аргументов r и r^* . Для доказательства рассмотрим интеграл

$$\int \nabla \psi(r, r_1^*) \cdot \nabla \psi(r, r_2^*) dV^*,$$

где r_1^* , r_2^* означают две точки, лежащие внутри S , а V^* представляет собою объем, ограниченный S , с одной стороны, и малыми поверхностями Σ_1 и Σ_2 , заключающими эти точки, с другой. Тогда посредством преобразования (20) получаем вместо (21) уравнение

$$\begin{aligned} \oint (\psi_1 \nabla_{v_1} \psi_2 - \psi_2 \nabla_{v_1} \psi_1) d\Sigma_1 + \oint (\psi_1 \nabla_{v_2} \psi_2 - \psi_2 \nabla_{v_2} \psi_1) d\Sigma_2 = \\ = \oint (\psi_1 \nabla_n \psi_2 - \psi_2 \nabla_n \psi_1) dS, \end{aligned}$$

где для сокращения положено $\psi_1 = \psi(r, r_1^*)$ и $\psi_2 = \psi(r, r_2^*)$. Стоящий справа интеграл исчезает в силу пограничного условия $\psi_1 = \psi_2 = 0$, а стоящий слева в пределе $\Sigma_1 \rightarrow 0$ и $\Sigma_2 \rightarrow 0$ сводится к разности $4\pi \psi_{2,1} - 4\pi \psi_{1,2} = 4\pi [\psi(r_2^*, r_1^*) - \psi(r_1^*, r_2^*)]$.

¹ В простейшем случае, когда внешний потенциал φ' обуславливается точечным зарядом e , находящимся в точке $P(r)$ внутри S , мы имеем $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}' = \frac{e}{R}$ ($R = PP^*$), так что формула (21) сводится к выражению

$$\varphi(r) = -\frac{e}{4\pi} \oint \frac{1}{R} \nabla_n \psi(r, r^*) dS.$$

Это соответствует поверхностному распределению электричества с плотностью $\eta = -\frac{e}{4\pi} \nabla_n \psi(r, r^*)$.

При этом, как легко видеть, полное значение эквивалентного поверхностного заряда

$$\oint \eta dS = -\frac{e}{4\pi} \oint \nabla_n \psi(r, r^*) dS$$

в точности равно e .

Таким образом имеет место соотношение

$$\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (21d)$$

В частном случае поверхности шара функция Грина имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{R} - \frac{a}{r_1} \frac{1}{R'},$$

где a обозначает радиус шара, \mathbf{r}_1 — радиус-вектор, проведенный из центра шара к точке P_1 , R — расстояние $P_1 P_2$, а R' — расстояние $P_1' P_2$, причем P_1' обозначает лежащую вне шара точку, сопряженную с P_1 . Действительно, если P_2 лежит на S , то согласно (12a), функция $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ должна обращаться в нуль (ибо $QA = P_1 P_2$, $Q'A = P_1' P_2$ и $\rho = r$). Далее, ψ как функция \mathbf{r}_2 удовлетворяет уравнению Лапласа ($\nabla^2 \psi = 0$) и при $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$ практически совпадает с $\frac{1}{R}$. Пользуясь соотношением $\mathbf{r}_1' = \frac{a^2}{r_1^2} \mathbf{r}_1$ [ср. (12b)], легко непосредственно убедиться в симметрии ψ относительно \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 .

В общем случае произвольной поверхности S определение функции Грина в виде замкнутого аналитического выражения невозможно. Однако, если она известна, то эффективную плотность зарядов на S можно вычислить при помощи формулы

$$\eta = \frac{1}{4\pi} (\nabla_n \varphi - \nabla_n \varphi') = -\frac{1}{(4\pi)^2} \oint \bar{\varphi} \nabla_n \nabla_n^* \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) dS - \frac{1}{4\pi} \nabla_n \varphi'.$$

Тогда потенциалы φ' и φ можно представить при помощи того же самого поверхностного интеграла $\oint \frac{\eta}{R} dS$.

В предыдущем мы предполагали внешний потенциал известным и пытались заменить создающую его внутреннюю систему зарядов эквивалентным поверхностным зарядом. В обратном случае, когда задан потенциал φ внутри S , а нужно заменить обуславливающие его внешние заряды эквивалентным поверхностным зарядом, необходимо прежде всего отыскать для внешнего пространства такую потенциальную функцию φ' , которая удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \varphi' = 0$ и на S тождественна с φ .

Эту задачу можно свести к рассмотренной раньше, если представить себе поверхность S охваченной очень большой внешней поверхностью S' , которая затем удаляется в бесконечность, тогда как поверхность Σ стягивается к рассматриваемой внешней точке P^* . Однако мы не можем входить здесь в более подробное рассмотрение этих вопросов.

§ 7. Эквивалентные поверхностные токи. В предыдущих параграфах мы говорили об электрических зарядах и электрических полях. Однако полученные результаты остаются справедливыми также и для магнитных полей, если представить себе, что последние создаются фиктивными магнитными полю-

сами. Но от этой фикции легко освободиться, если представить себе магнитные полюсы замененными эквивалентными электрическими токами.

В случае мультиполей достаточно, например, исключить полюсы „нулевого порядка“, а полюсы „первого порядка“, т. е. „математические диполи“, рассматривать как элементарные токи. При этом скалярный потенциал мультиполя n -го порядка $\varphi^{(n)}$ можно заменить эквивалентным векторным потенциалом $\mathbf{A}^{(n)}$. Если $\varphi^{(n)}$ может быть представлен в виде $\varphi^{(n)} = (\mathbf{a}_n \nabla) \varphi^{(n-1)}$, где $\nabla^2 \varphi^{(n-1)} = 0$, то получается просто

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{a}_n \times \nabla \varphi^{(n-1)}, \quad (22)$$

так как при этом

$$\text{rot } \mathbf{A}^{(n)} = -\nabla \varphi^{(n)}$$

(ср. § 8, главы III).

Однако введение векторного потенциала вместо скалярного обычно нецелесообразно.

При рассмотрении магнитного поля, создаваемого внутренней (или внешней) системой токов снаружи (или внутри) некоторой замкнутой поверхности S , вместо эквивалентного поверхностного распределения „магнитных зарядов“, можно ввести эквивалентные „поверхностные токи“. Поверхностную плотность подобного тока можно определить таким же самым образом, как и плотность поверхностного заряда. Применим общую формулу

$$\oint \mathbf{n} \times \mathbf{H} dS = \int \text{rot } \mathbf{H} dV = 4\pi \int \mathbf{j} dV$$

к бесконечно малому цилиндру, заключающему элемент dS рассматриваемой поверхности и имеющему основания, параллельные и равные этому элементу. Тогда в предельном случае цилиндра с исчезающе малой высотой получим.

$$4\pi \mathbf{k} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}' - \mathbf{H}). \quad (23)$$

При этом \mathbf{k} обозначает поверхностную плотность электрического тока (согласно соотношению $\int \mathbf{k} dS = \int \mathbf{j} dV$), а \mathbf{H}' и \mathbf{H} — напряженности магнитного поля с внешней и внутренней сторон элемента dS . Следует заметить, что соотношение между \mathbf{H}' и \mathbf{H} , лежащее в основе формулы (23), имеет совершенно иной характер, нежели соответствующее соотношение между электрическими напряженностями \mathbf{E}' и \mathbf{E} . Действительно, так как магнитное поле удовлетворяет во всем пространстве уравнению $\text{div } \mathbf{H} = 0$, то внутреннее произведение

$$\mathbf{n}(\mathbf{H}' - \mathbf{H}) = 0, \quad (23a)$$

т. е. нормальная компонента магнитного поля при прохождении сквозь поверхность S не может испытывать скачка. Напротив, для

электрического поля в этом случае имеет место уравнение (17), которое мы также можем записать в виде

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) = 4\pi\eta, \quad (23b)$$

и кроме того уравнение

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) = 0, \quad (23c)$$

которое соответствует исчезновению вихря вектора \mathbf{E} во всем пространстве и выражает тот факт, что тангенциальная компонента напряженности электрического поля не претерпевает разрыва непрерывности на S .

Таким образом, если мы хотим заданное внешнее поле \mathbf{H}' , создаваемое неизвестной внутренней системой токов, толковать как поле распределенного по S поверхностного тока, то поле внутри S должно быть определено так, чтобы выполнялось условие (23a).

Если внешнее поле можно представить при помощи скалярного потенциала φ' ,¹ то соответствующее „сопряженное“ внутреннее поле \mathbf{H} также можно вывести из скалярного потенциала φ . При этом φ внутри S должно удовлетворять уравнению Лапласа ($\nabla^2\varphi=0$), а на самой поверхности условию

$$\nabla_n\varphi = \nabla_n\varphi', \quad (24)$$

заменяющему теперь прежнее условие $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}'$. Далее, так как магнитное поле не имеет источников, то

$$\oint \nabla_n\varphi dS = 0. \quad (24a)$$

Что касается условия $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}'$, то в рассматриваемом случае оно не имеет места, так как на поверхности S потенциал должен претерпевать некоторый скачок

$$\bar{\varphi}' - \bar{\varphi} = 4\pi i_m, \quad (24b)$$

соответствующий магнитному двойному слою с плотностью (момент на единицу площади) i_m . Если бы эта величина была известна, то оба потенциала φ и φ' можно было бы представить при помощи интеграла

$$\oint i_m \nabla_n \left(\frac{1}{R} \right) dS. \quad (24c)$$

Мы разберем здесь для иллюстрации тот случай, когда S является поверхностью шара. Тогда φ' , т. е. потенциал вне шара, можно представить в виде

$$\varphi' = \sum_n \frac{H_n}{R^{n+1}}, \quad (25)$$

¹ Это всегда имеет место, если магнитные силовые линии не замыкаются вне S .

причем коэффициенты H_n считаются известными. Если соответственно этому положить для потенциала внутри шара

$$\varphi = \sum_n \frac{H_n'}{a^{2n+1}} R^n, \quad (25a)$$

то прежде всего можно определить неизвестные коэффициенты H_n' при помощи соотношения, вытекающего из (24),

$$\sum \frac{nH_n'}{a^{2n+1}} R^{n-1} = - \sum \frac{(n+1)H_n}{R'^{(n+2)}}$$

при $R' = R = a$, т. е.

$$H_n' = - \frac{n+1}{n} H_n. \quad (25b)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\bar{\varphi}' - \bar{\varphi} = - \sum_n \frac{2n+1}{n} \frac{H_n}{a^{n+1}}.$$

Если ряд (25) сводится к члену первого порядка, т. е.

$$\varphi' = \frac{mR'}{R'^3},$$

то по (25b) и (25a) мы имеем

$$\varphi = - \frac{2mR}{a^3},$$

так что

$$\bar{\varphi}' - \bar{\varphi} = - \frac{3m}{a^2} \cos \theta,$$

где θ — угол между \mathbf{m} и \mathbf{R} .

Этим потенциалом соответствует внутри шара однородное магнитное поле $\mathbf{H} = \frac{2\mathbf{m}}{a^3}$, тогда как вне его — поле

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{R'^2} [-\mathbf{m} + 3\mathbf{R}'(m\mathbf{R}')].$$

совпадает с полем элементарного диполя.

Скалярные потенциалы φ' и φ эквивалентны по (22) векторным потенциалам

$$\mathbf{A}' = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}'}{R'^3}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{a^3}.$$

Для поверхностной плотности \mathbf{k} тока в некоторой точке шара с радиус-вектором \mathbf{a} , согласно (23), получаем выражение

$$\mathbf{k} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{a}}{a^4}.$$

Эта формула показывает, что рассматриваемое поле может быть обусловлено вращением шаровой поверхности, в том случае, если она равномерно наэлектризована. На самом деле, если обозначить угловую скорость через \mathbf{o} , а (постоянную) поверхностную плотность электрических зарядов через η , то плотность тока в точке \mathbf{a} должна выражаться формулой

$$\mathbf{k} = \frac{\eta}{c} \mathbf{o} \times \mathbf{a}$$

(ибо $\mathbf{o} \times \mathbf{a}$ является линейной скоростью соответствующего элемента поверхности). Сравнивая эту формулу с предыдущей, получаем соотношение

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} a^4 \frac{\eta}{c} \mathbf{o},$$

которое выражает не что иное, как результирующий магнитный момент вращающегося заряженного шара. А именно, по определению имеем

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{a} \times \mathbf{k} dS,$$

что, в виду соотношений

$$\mathbf{k} = \frac{\eta}{c} \mathbf{o} \times \mathbf{a}$$

и

$$\mathbf{a} \times \mathbf{k} = \frac{\eta}{c} \{ \mathbf{o} a^2 - \mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{o}) \},$$

тождественно с приведенной формулой.

§ 8. Индуцированные электрические и магнитные моменты. В заключение этой главы мы должны еще вкратце рассмотреть вопрос об изменении, испытываемом действительными электрическими (или магнитными) системами под влиянием внешних полей. При этом под „действительной системой“ мы понимаем какое-либо материальное тело или частицы, состоящие из некоторого числа положительных и отрицательных элементарных зарядов. Как мы видели выше, такую систему всегда можно заменить совокупностью мультиполей различного порядка. До сих пор мы считали эти мультиполи „заданными“ или жесткими. Но так же, как действительные твердые тела не являются абсолютно твердыми в механическом отношении и под влиянием внешних сил могут претерпевать малые деформации, подобно этому и в электрическом (или магнитном) отношении они также не ведут себя как абсолютно твердые тела. Если какое-нибудь тело ввести во внешнее электрическое поле, то содержащиеся в этом теле противоположные заряды должны испытывать противоположно направленные силы. Эти силы должны вызывать небольшие смещения заряженных частиц до тех пор, пока возникающие при этом внутренние электрические силы (которые аналогичны упругим напряжениям) не уравновесят внешние.

Указанную „электрическую деформацию“ обычно называют поляризацией. Феноменологически ее можно охарактеризовать изменением электрических моментов тела e (n_1, n_2, n_3) или при помощи дополнительных мультиполей различного порядка, которые должны быть добавлены к „нормальным“ мультиполям, для того чтобы образовались измененные, или „деформированные“ мультиполи.

Обычно принимают во внимание лишь изменение моментов (или мультиполей) первого порядка. При этом, по аналогии с законом Гука для упругих деформаций, принимается, что дополнительные или „индуцированные“ электрические моменты пропорциональны электрической напряженности E внешнего поля в теле (если это поле однородно) или в некоторой средней точке тела.

Так как электрические моменты первого порядка e_1, e_2, e_3 представляют собой не что иное, как компоненты момента диполя, т. е. мультиполя 1-го порядка, то упомянутые дополнительные моменты, которые мы будем обозначать через p_1, p_2, p_3 , можно рассматривать как компоненты индуцированного дипольного момента p , определяющего электрическую поляризацию соответствующего тела. Простейшее линейное соотношение между p и E выражается формулой

$$p = \alpha E. \tag{26}$$

Эта формула означает, что p имеет одинаковое направление с вектором E и ему пропорционален. При этом предполагается, что „коэффициент поляризации“ α является существенно положительной величиной. Это означает, что положительные и отрицательные заряды смещаются в направлении действующих на них внешних сил.

Формула (26) соответствует закону Гука для обычного изотропного тела. Тело, для которого справедлива эта формула, называется „электрически изотропным“. В общем случае электрически анизотропного тела выражение (26) должно быть заменено формулой

$$p_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} E_k, \quad (i, k = 1, 2, 3), \tag{26a}$$

где α_{ik} суть компоненты так называемого „тензора поляризации“ ${}^2\alpha$ относительно рассматриваемой системы координат. Для неподвижной связанной с телом координатной системы эти компоненты следует рассматривать как постоянные, характерные для тела параметры. Тензор поляризации можно вообще рассматривать как симметрический. Соответственно этому всегда можно выбрать систему координат так, чтобы все недиагональные компоненты тензора ${}^2\alpha$ обращались в нуль (ср. Введение). При этом (26a) принимает вид

$$p_1 = \alpha_{11} E_1, \quad p_2 = \alpha_{22} E_2, \quad p_3 = \alpha_{33} E_3. \tag{26b}$$

Потенциальная энергия жесткого диполя с моментом \mathbf{p} по отношению к системе, обуславливающей поле \mathbf{E} , как известно, равна $-\mathbf{p}\mathbf{E}$. Если момент \mathbf{p} сам индуцирован полем, то нужно учесть еще работу, произведенную против внутренних сил. Так как внутренние силы возрастают с \mathbf{p} линейно и уравновешивают поле \mathbf{E} , то упомянутая работа выражается формулой ¹

$$U' = \frac{1}{2} \mathbf{p}\mathbf{E}.$$

Величину U' можно трактовать как внутреннюю энергию поляризованного тела; она соответствует внутренней упругой энергии механически деформированного тела. Дополнительный механический эффект, вызываемый поляризацией, определяется суммой „внешней“ энергии $-\mathbf{p}\mathbf{E}$ как при жестких диполях и внутренней энергии U' , т. е.

$$U = -\frac{1}{2} \mathbf{p}\mathbf{E} = -U'. \quad (27)$$

В этом можно убедиться и непосредственно, если исходить из справедливых также и здесь выражений для вращательного момента $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$ или силы $(\mathbf{p} \text{ grad}) \mathbf{E}$ и определить функцию энергии обычным способом, принимая во внимание пропорциональность между \mathbf{p} и \mathbf{E} . Если для простоты мы положим, согласно (26), $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$, то будем иметь

$$(\mathbf{p} \text{ grad}) \mathbf{E} = \alpha (\mathbf{E} \text{ grad}) \mathbf{E} = \frac{1}{2} \alpha \text{ grad } E^2 = -\text{grad } U,$$

откуда следует

$$U = -\frac{1}{2} \alpha E^2. \quad (27a)$$

Заметим, что в этом частном случае (электрическая изотропия) вращательный момент исчезает. В общем случае, когда главные компоненты тензора поляризации α_{11} , α_{22} , α_{33} отличны друг от друга, компоненты вращательного момента, согласно (26b), определяются выражениями

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{E})_1 = (\alpha_{22} - \alpha_{33}) E_2 E_3 \text{ и т. д.}$$

Для примера рассмотрим маленькую шарообразную частицу, все нормальные электрические моменты которой равны нулю. Пусть она находится на относительно большом расстоянии R

¹ Представим себе \mathbf{p} как длину диполя, состоящего из неподвижного отрицательного заряда -1 и из способного перемещаться положительного заряда $+1$. Внутренняя электрическая сила \mathbf{E} , действующая на заряд $+1$, пропорциональна смещению \mathbf{p} . Поэтому для работы, затраченной при поляризации, мы получаем

$$\int \mathbf{E} d\mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{E}\mathbf{p}.$$

от другой частицы, обладающей зарядом e . Тогда получаем $E = \frac{e}{R^2}$ и, следовательно,

$$U = -\frac{\alpha e^2}{2R^4}.$$

Этой энергии соответствует сила притяжения

$$f = -\frac{2\alpha e^2}{R^5},$$

которая обратно пропорциональна пятой степени расстояния. С подобными силами имеют дело в элементарных опытах с притяжением, оказываемым заряженным телом на соседние нейтральные частицы. Если поле E обусловлено телом, не имеющим заряда, а обладающим только естественным дипольным моментом m , то по формулам (26a) и (26b) главы III имеем

$$E^2 = \frac{m^2}{R^6} (1 + 3 \cos^2 \theta),$$

откуда следует

$$U = -\frac{\alpha m^2}{2R^6} (1 + 3 \cos^2 \theta).$$

В виду соотношения

$$m^2 \cos^2 \theta = (mR)^2 / R^2 = (m R_0)^2,$$

получаем

$$f = -\frac{3\alpha}{R^7} \left\{ R_0 m^2 + \frac{4}{3} R_0 (m R_0)^2 - m(R_0 m) \right\},$$

или окончательно

$$f = -\frac{3\alpha}{R^7} \left\{ m \times (R_0 \times m) + \frac{4}{3} R_0 (m R_0)^2 \right\}.$$

Таким образом, в этом случае, который осуществляется, например, при действии элементарного тока (или магнита) на железные опилки, мы имеем силу притяжения, обратно пропорциональную седьмой степени расстояния.

Заметим, что при любых свойствах системы, создающей данное поле, сила $f = \text{grad} \left(\frac{1}{2} \alpha E^2 \right)$ всегда соответствует притяжению в направлении наиболее быстрого возрастания E^2 (предполагая, что $\alpha > 0$). Это направление, вообще говоря, не совпадает с направлением радиуса-вектора R .

Формулу (26) можно написать в виде

$$p_i = -\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Представляется естественным обобщить это соотношение для

случая индуцированных моментов высшего порядка следующим образом

$$p(n_1, n_2, n_3) = -\alpha^{(n)} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}. \quad (28)$$

При этом стоящая справа производная от потенциала вычисляется для той точки P рассматриваемого тела, относительно которой определены моменты $e(n_1, n_2, n_3)$ и $p(n_1, n_2, n_3)$.

Однако это предположение едва ли допустимо, потому что индуцированные моменты различных порядков (подобно естественным) должны быть связаны между собою определенными соотношениями, зависящими от структуры рассматриваемой системы. Эти соотношения можно учесть при помощи более общей формулы

$$p(n_1, n_2, n_3) = - \sum_{n'_1, n'_2, n'_3} \alpha(n_1, n_2, n_3; n'_1, n'_2, n'_3) \frac{\partial^{n'} \varphi}{\partial x_1^{n'_1} \partial x_2^{n'_2} \partial x_3^{n'_3}}, \quad (28a)$$

где коэффициенты $\alpha(n_1, n_2, n_3; n'_1, n'_2, n'_3)$ образуют тензор поляризации, ранг которого равен $n + n' = n_1 + n_2 + n_3 + n'_1 + n'_2 + n'_3$.

Обоим выражениям (28) и (28a) для компонент „поляризации n -го порядка“ должна соответствовать энергия

$$U = \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{1}{2} p(n_1, n_2, n_3) \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}. \quad (28b)$$

Мы не можем заниматься здесь более подробно этим вопросом.

ОТДЕЛ II.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ

ГЛАВА V.

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

§ 1. Электромагнитная индукция в постоянном магнитном поле. Электрический заряд e , движущийся со скоростью \mathbf{v} в постоянном магнитном поле \mathbf{H} , испытывает со стороны последнего силу $\mathbf{f} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$. Эта электрокинетическая или электромагнитная сила, отнесенная к единице положительного заряда ($e = 1$), равна

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (1)$$

Мы видим, что сила \mathbf{f} перпендикулярна к скорости рассматриваемой заряженной частички и, следовательно, не может произвести никакой работы.

Этот факт, однако, противоречит выводу выражения для \mathbf{f} , произведенному нами в главе II.

Действительно, мы рассматривали там изменение потенциальной энергии линейного тока при бесконечно малом (виртуальном) перемещении линии тока и положили это изменение равным работе электромагнитной силы, действующей на элемент тока. Получившееся противоречие однако только кажущееся и легко разрешается при более подробном рассмотрении вопроса.

При движении контура тока σ скорость \mathbf{v} электрических зарядов, находящихся в данный момент в элементе $d\sigma$, складывается из двух частей: из их „относительной“ скорости \mathbf{v}' по отношению к $d\sigma$ и из „абсолютной“ скорости \mathbf{v} , с которой $d\sigma$ перемещается параллельно самому себе. В главе II при выводе элементарной электромагнитной силы мы принимали во внимание лишь скорость \mathbf{v}' , которая определяет силу тока i по формуле

$$\sum \frac{e \mathbf{v}'}{c} = i \tau d\sigma,$$

где суммирование распространено на все заряды, находящиеся в элементе $d\sigma$. Эта относительная, или продольная, скорость вызывает появление поперечных электромагнитных сил

$$\mathbf{f}' = \frac{e}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{H}.$$

Сумма последних дает нам знакомое выражение

$$\sum \mathbf{f}' = \sum \frac{e}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{H} = \left(\sum \frac{e}{c} \mathbf{v}' \right) \times \mathbf{H} = i \tau d\delta \times \mathbf{H}$$

для силы, действующей на элемент $d\sigma$ покоящейся линии тока.

Что же касается сил $\mathbf{f}'' = \frac{e}{c} \mathbf{v}'' \times \mathbf{H}$, происходящих от увлечения зарядов движущимся элементом контура тока $d\sigma$, то их результирующая для этого элемента, поскольку он электрически нейтрален, должна равняться нулю, так как скорость \mathbf{v}'' одинакова для положительных и отрицательных зарядов

$$\sum \mathbf{f}'' = \sum \frac{e}{c} \mathbf{v}'' \times \mathbf{H} = \left(\sum e \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{v}''}{c} \times \mathbf{H} \right) = 0.$$

При перемещении $\mathbf{v}'' dt$ элемента линии тока $d\sigma$ работа действующих на него поперечных сил выражается формулой

$$dA = \sum \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v}'' dt = (i \tau d\sigma \times \mathbf{H}) \mathbf{v}'' dt.$$

За то же время dt заряды, находившиеся первоначально в $d\sigma$, совершают продольное перемещение $\mathbf{v}' dt$, различное для положительных и отрицательных зарядов (в противном случае сила тока равнялась бы нулю). Этому продольному перемещению соответствует отличная от нуля работа dB сил \mathbf{f}'' (которые при поперечном или „переносном“ перемещении $d\sigma$ тоже продольны, т. е. параллельны $d\sigma$). Хотя полная сила $\sum \mathbf{f}'' = 0$, однако для результирующей работы получаем отличное от нуля выражение

$$dB = \sum \mathbf{f}'' \mathbf{v}' dt = \sum \frac{e}{c} (\mathbf{v}'' \times \mathbf{H}) \mathbf{v}' dt = \frac{1}{c} \left[(\mathbf{v}'' \times \mathbf{H}) \cdot \sum e \mathbf{v}' \right] dt,$$

т. е., согласно уравнению (1),

$$dB = (F'' c i \tau) d\sigma dt = c \cdot i F_{\tau}'' d\sigma dt, \quad (2)$$

где $F'' = \frac{1}{c} \mathbf{v}'' \times \mathbf{H}$ — слагающая электромагнитной силы \mathbf{F} , отнесенной к единице заряда, которая происходит от переносного движения $d\sigma$, а $F_{\tau}'' = F_{\tau}$ означает ее продольную проекцию на направление тока.

Сумма работ $dA + dB$ должна, очевидно, равняться полной работе электромагнитных сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}' + \mathbf{f}''$, действующих на отдельные заряды в $d\sigma$ при соответствующем полном перемещении $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{v}' dt + \mathbf{v}'' dt$.

Так как векторы \mathbf{f} и \mathbf{v} взаимно перпендикулярны, то следовательно $dA + dB = 0$.

Это соотношение может быть также выведено непосредственно из уравнения $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Полагая

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \text{ и } \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}'',$$

имеем

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{v} = \left\{ \frac{e}{c} (\mathbf{v}' + \mathbf{v}'') \times \mathbf{H} \right\} \cdot (\mathbf{v}' + \mathbf{v}'') = \frac{e}{c} (\mathbf{v}' \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v}'' + \\ + \frac{e}{c} (\mathbf{v}'' \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{v}'' + \mathbf{i}'' \cdot \mathbf{v}',$$

и, следовательно,

$$\sum \mathbf{i}' \cdot \mathbf{v}'' dt + \sum \mathbf{i}'' \cdot \mathbf{v}' dt = 0,$$

т. е.

$$dA + dB = 0.$$

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

При движении контура тока в постоянном магнитном поле возникает продольная электромагнитная сила F_{τ} , действующая на противоположные заряды в противоположных направлениях. Работа этой силы в любом элементе контура равна и противоположна по знаку работе поперечных электромагнитных сил, действующих на соответствующий элемент тока.

Работа продольных (или, как их еще часто называют, „электромоторных“) сил во всем контуре тока за единицу времени равняется $ci \oint F_{\tau} d\sigma$. Что же касается работы поперечных („пондеромоторных“) сил, то она измеряется уменьшением потенциальной энергии U рассматриваемого контура (при постоянной силе тока) по отношению к внешней системе, вызывающей поле \mathbf{H} . Так как по уравнению (10) главы II

$$U = -i \int H_n dS,$$

то, следовательно, из

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} = 0$$

вытекает

$$\oint F_{\tau} d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int H_n dS. \quad (3)$$

Это уравнение выражает собой закон электромагнитной индукции. Линейный интеграл $\oint F_{\tau} d\sigma$ называется электромоторной или электродвижущей силой, индуцированной благодаря движению контура в магнитном поле. Следует при этом отметить, что вектор \mathbf{F} играет здесь такую же роль, как обычная электрическая напряженность поля; интеграл $\int F_{\tau} d\sigma$, взятый вдоль незамкнутой линии, соответствует, следовательно, разности потенциалов между концами этой линии. Для замкнутой линии он должен был бы равняться нулю, в случае если бы \mathbf{F} соответствовала напряженности постоянного электрического поля.

„Электродвижущая сила“ (3) совершенно не зависит от силы

тока. Продольное движение электрических зарядов, определяющее силу тока, вызывает лишь поперечную компоненту F , в то время как продольная компонента F обусловлена исключительно (поперечным) „переносным движением“ линии тока.

При отсутствии тока ($i=0$) индуцированная электродвижущая сила стремится его вызвать; в общем же случае ($i \neq 0$) она стремится только изменить силу этого тока.

§ 2. Электромагнитная индукция в магнитном поле, меняющемся со временем; принцип относительности движения. До сих пор мы рассматривали магнитное поле H независимо от вызвавшего его источника. Таким источником может являть какой-либо другой, линейный же, ток i' (σ').

Представим себе, что оба контура тока σ и σ' участвуют в переносном движении, причем их относительное взаимное расположение остается неизменным. Опыт показывает, что при этом все происходит совершенно таким же образом, как и в состоянии покоя. Поперечные электромагнитные (пондеромоторные) силы остаются при таком движении неизменными, в то время как продольные (электромоторные) не появляются вовсе.¹

Из этого следует, что электродвижущие силы зависят только от относительного движения рассматриваемого контура тока σ по отношению к другим. Это положение мы назовем принципом относительности. Следует отметить, что мы имеем здесь дело с относительностью простейшей кинематической величины, именно скорости. Под скоростью v , определяющей по формуле (1) электродвижущую силу, индуцированную в σ , следует понимать не „абсолютную“ скорость элементов σ , а их относительную скорость в координатной системе, связанной линией тока σ' .²

Далее, следует принять, что магнитное поле контура тока σ' при движении последней переносится им вместе с собой без изменений. Иными словами, это магнитное поле в координатной системе, твердо связанной с σ' , не зависит от времени.³ С точки же зрения „покоящейся“ координатной системы напряженность магнитного поля в данной точке пространства будет конечно меняться с течением времени.

Мы считали в § 1 контур тока σ' покоящимся, а контур σ — движущимся.

На основании высказанного принципа индукционное воздействие на σ зависит только от относительного движения, и мы

¹ Представим себе, например, две катушки, вложенные одна в другую. Если во внешней из них течет постоянный электрический ток, то при движении внутренней катушки в последней возникает индуцированный ток. Такой же ток возникает и при движении внешней катушки в обратном направлении. При совместном движении обеих катушек никакого индуцированного тока не получается.

² Полная формулировка принципа относительности будет нами дана дальше в главе VIII.

³ Мы увидим далее, что это утверждение выполняется не совсем строго. Оно правильно только в предельном случае малых скоростей.

можем, не изменяя этого действия, переменить ролями оба контура тока, т. е. считать σ покоящимся, а σ' движущимся (с противоположной скоростью). При этом должна измениться только интерпретация электродвижущей силы (3). В рассматриваемом нами случае это есть электрическое поле, вызываемое движением σ' . Продольную составляющую E_{τ} этого „индуцированного“ поля следует отождествить с соответствующей компонентной нашей прежней электромагнитной силы, отнесенной к единичному заряду F_{τ} . Относительному характеру скорости соответствует, как мы видим, своеобразная относительность силы: одну и ту же силу можно трактовать как электрическую или как электромагнитную.

Изменение со временем какой-либо скалярной или векторной величины в неподвижной точке пространства мы будем в дальнейшем обозначать символом $\frac{\partial}{\partial t}$, т. е. частной производной по t . Символ же полной производной по времени, как например, в формуле (3), мы сохраним для случая движущейся точки или системы. Тогда вместо формулы (3) мы получим эквивалентную формулу

$$\oint E_{\tau} d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int H_n dS$$

или

$$\oint E_{\tau} d\sigma = -\int \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4)$$

Формула (4) показывает, что индуцированное электрическое поле непосредственно определяется изменением во времени соответствующего магнитного поля. Причины, определяющие это изменение, в формулу (4) не входят, и мы должны, повидимому, считать их несущественными. Поэтому формула (4) остается правильной даже в том случае, если изменение магнитного поля вызывается не движением одного или нескольких контуров тока при постоянной силе тока в них (как мы до сих пор это предполагали), а изменением силы тока в покоящихся или движущихся контурах. Будем передвигать контур тока σ , поддерживая каким-либо образом в нем ток постоянной силы i , а в σ' постоянный ток i' . При переходе σ из положения 1 в положение 2 поперечные электромагнитные силы, действующие на σ со стороны σ' , произведут работу $A = U_1 - U_2$, где

$$U = -i \int H_n dS = -i' \int H'_{n'} \cdot dS' = U'$$

есть взаимная потенциальная энергия обоих токов [ср. (20с), глава III]. Вместе с тем, действующие в σ продольные электромагнитные силы, вызывающие электродвижущую силу, производят, согласно § 1, противоположную работу $B = U_2 - U_1$, так что в сумме работа электромагнитных сил равна нулю.

Вследствие движения контура тока σ магнитное поле H' , вызываемое им в точках σ' , будет меняться со временем. Это изменение индуцирует в σ' электродвижущую силу V' . На основании высказанного нами принципа относительности эта электродвижущая сила статического характера совпадает с той „кинетической“ электродвижущей силой, которая появилась бы в σ' , если бы контур σ оставался неподвижным, а контур σ' двигался противоположным образом.

Работа этой силы, при постоянной силе тока i , должна равняться (алгебраическому) увеличению потенциальной энергии σ' относительно σ , т. е. разности $U_2' - U_1' = U_2 - U_1$ (вследствие равенства $U = U'$). Из этого следует, что в рассматриваемом нами случае — покоя σ' и движения σ — обе электродвижущие силы, кинетическая V в σ и статическая V' в σ' , производят одинаковую работу $U_2 - U_1$. В сумме это дает удвоенную работу $2(U_2 - U_1)$. Прибавляя сюда работу $A = U_1 - U_2$ поперечных сил, действующих на линию тока σ (соответственная работа для контура σ' вследствие его неподвижности равна нулю), мы получаем полную работу

$$2(U_2 - U_1) + (U_1 - U_2) = U_2 - U_1 = -A.$$

Этот результат легко обобщается на случай одновременного, но независимого движения обоих контуров тока.

Работа поперечных и продольных электромагнитных сил по-прежнему в сумме равна нулю. Работа же индуцированных электродвижущих сил, которые вызваны изменением во времени магнитных полей H и H' , не зависит от „абсолютного“ движения σ и σ' и остается всегда равной увеличению потенциальной энергии $U_2 - U_1$.

Энергией какой-либо системы мы называем такую величину, алгебраическое уменьшение которой, при переходе этой системы из одного состояния в другое, равняется работе сил, действующих между частями системы (в предположении, что эта работа не зависит от пути перехода). Следовательно, если мы хотим выразить полную работу сил, действующих в нашей системе линейных электрических токов, с помощью некоторой энергии T , мы должны определить последнюю таким образом, чтобы $T_1 - T_2 = U_2 - U_1$.

Полагая, что при бесконечном удалении обеих линий тока друг от друга энергии T и U равны нулю, мы получаем следующее простое соотношение между ними

$$T = -U. \quad (5)$$

Следует еще раз напомнить, что U есть потенциальная энергия только поперечных (пндеромоторных) электромагнитных сил. Энергия T играет ту же роль для статических (электрических) индукционных сил, вызываемых изменением магнитного поля со временем. Работа кинетических индукционных сил, как

мы видели, полностью компенсируется работой упомянутых поперечных сил и может поэтому не приниматься в расчет.

Величину T мы назовем электрокинетической, или проще, магнитной энергией рассматриваемых токов. Ее можно также определить как работу, затраченную какими-либо внешними источниками на поддержание постоянной силы тока в обоих контурах, при переходе последних из бесконечного расстояния в данное (относительное) расположение. При таком перемещении в обоих контурах появляются индуцированные электрические силы, на преодоление которых затрачивается работа T .

Эта работа зависит только от относительного движения обоих контуров, и, следовательно, мы можем себе представить, что один из них, например σ , покоится, а второй перемещается из бесконечности в данное место.

На движущийся контур σ' будут при этом действовать только „безработные“ электрокинетические силы, и вся работа T будет затрачена на поддержание постоянной силы тока i в σ . Далее, индуцированная в σ электродвижущая сила полностью опреде-

ляется изменением во времени магнитного потока $\int H_{\parallel} dS$, зависящего от контура σ' , вне зависимости от специальных обстоятельств, определяющих это изменение. Вследствие этого мы можем заменить движение контура σ' при постоянной силе тока простым возрастанием тока в нем от 0 до i' при неизменном расположении σ и σ' . В обоих случаях работа, потребная на поддержание постоянным тока i против индуцируемой в σ электродвижущей силы, одинакова и равна T . Она оказывается такой же самой, если оба контура σ и σ' поменять ролями, а также, как легко видеть, и в самом общем случае одновременного возрастания силы тока в σ и σ' от нуля до соответственных значений i и i' . При этом оба контура могут двигаться как угодно и только должны к концу процесса находиться в данном (относительном) взаимном расположении.

Резюмируя вышеизложенное, мы можем высказать следующее утверждение: работа, производимая электрическими и электромагнитными силами взаимодействия, при любом изменении положения обоих контуров и величины силы тока в них, всегда равняется алгебраическому уменьшению магнитной энергии T . Эта работа целиком определяется значениями T в начальном и конечном состояниях и не зависит от промежуточных состояний системы.

§ 3. Уравнения Максвелла для переменных электромагнитных полей. Формула (4) должна, очевидно, оставаться справедливой, если по кривой σ не протекает никакого тока, т. е. ее можно применять ко всякой замкнутой кривой и к ограничиваемой этой кривой поверхности. Преобразуя линейный интеграл $\int E_{\tau} d\sigma$ в формуле Стокса в поверхностный $\int \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{E} dS$, мы имеем

$$\int \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{E} dS = - \int \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \mathbf{n} dS.$$

Так как это равенство справедливо для любой произвольно выбранной поверхности S , то отсюда следует

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (6)$$

Это дифференциальное уравнение является обобщением полученного нами в главе I на основании принципа энергии дифференциального уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, которое мы до сих пор рассматривали как аналитическое выражение этого принципа. Мы видим, следовательно, что в общем случае переменных полей принцип сохранения энергии в своей обычной форме — по крайней мере для электрического поля, взятого в отдельности, — перестает быть справедливым.

Что касается магнитного поля, то соответствующее дифференциальное уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$ остается справедливым и в общем случае. Это следует из справедливости принципа сохранения энергии для переменных токов, правда в несколько видоизмененной форме (электрокинетическая энергия T вместо потенциальной U). Наше утверждение может быть доказано и непосредственным образом на основании уравнения (6). Применяя к обеим частям этого уравнения операцию div , мы получаем (на основании тождества $\text{div rot} \equiv 0$), что $\text{div } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$.

Вследствие независимости дифференцирования по координатам (div) и дифференцирования по времени $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ это равенство эквивалентно $\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{H} = 0$ и, следовательно, $\text{div } \mathbf{H} = \text{const}$. Далее, всегда можно себе представить, что в начальном или конечном состоянии магнитное поле остается в течение некоторого времени постоянным. А так как при этом $\text{div } \mathbf{H} = 0$, то уравнение

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (7)$$

должно оставаться в силе и в общем случае произвольного процесса.

В главе III, комбинируя принцип сохранения энергии и принцип эквивалентности, мы получили равенства

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{и} \quad \text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}.$$

Из второго из этих равенств следует тождество $\text{div } \mathbf{j} = 0$.

Это тождество, вместе с принципом сохранения электричества, являлось условием стационарности электрических токов, вызывающих поле \mathbf{H} [глава II, формула (4)]. В общем случае дестационарного электрического тока $\text{div } \mathbf{j}$ не равно нулю и ра-

венство $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$ не может иметь места, так как div его левой части равен нулю тождественно.

Из формулы (4) главы II (полагая $\mathbf{J} = c\mathbf{j}$) мы получаем следующее выражение для принципа сохранения электричества

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

С другой стороны, искомое обобщение уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$ для переменных полей должно иметь вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}, \quad (8a)$$

где \mathbf{G} есть некоторый вектор, зависящий от распределения электрических зарядов. Сравнивая это равенство с (8), мы получаем

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{G} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = \frac{4\pi\rho}{c}.$$

Принимая во внимание, что первое из приведенных выше уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (9)$$

должно оставаться справедливым и в общем случае переменных полей, аналогично соответственному равенству $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ для магнитного поля, мы приходим к заключению, что вектор \mathbf{G} равен $\frac{1}{c} \mathbf{E}$. При этом формула (8a) принимает следующий вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}. \quad (10)$$

Следует отметить, что в „пустом пространстве“, т. е. при $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$, уравнения (9) и (10) становятся вполне аналогичными уравнениям (7) и (6), за исключением противоположности знаков перед производными \mathbf{H} и \mathbf{E} по времени в формулах (6) и (10).

Таким образом мы видим, что переменное электрическое поле вызывает появление магнитного поля, совершенно аналогично тому, как электрическое поле индуцировалось переменным магнитным. При этом однако при равенстве индуцирующих полей — индуцированные оказываются противоположными.

Из формулы (10) мы получаем для полного потока вектора $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ через некоторую незамкнутую поверхность S следующее выражение:

$$\int \operatorname{rot}_n \mathbf{H} dS = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int E_n dS + 4\pi i,$$

где $i = \int j_n dS$ — полная сила тока, текущего через поверхность S . Преобразуя левую часть по формуле Стокса, получаем

$$\oint \mathbf{H}_\tau d\sigma = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int E_n dS + 4\pi i. \quad (10a)$$

Эта формула показывает, что производная по времени от „электрического потока“ ($\int E_n dS$), проходящего через поверхность S , деленная на $4\pi c$, в отношении возбуждения магнитного поля эквивалентна некоторому току.¹

Если мы представим векторы $\partial \mathbf{E}$ и $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ графически как совокупности параллельных прямых, то силовые линии индуцированных полей \mathbf{H} или \mathbf{E} представятся в виде колец, окружающих наши прямые, причем в первом случае они будут направлены в положительном, а во втором в отрицательном направлении (рис. 29 *a, b*).

Наряду с электрическими плотностями заряда и тока (ρ, \mathbf{j}) можно совершенно формальным образом ввести аналогичные магнитные величины ρ^* и \mathbf{j}^* , связанные друг с другом „уравнением сохранения“

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^* + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Это уравнение справедливо, так как магнитные полюсы неразделимы и, следовательно, $\rho^* = 0$ и $\mathbf{j}^* = 0$. Уравнения (7) и (6) принимают тогда вид, совершенно аналогичный уравнениям (9) и (10). Именно

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 4\pi \rho^*, \quad (11a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - 4\pi \mathbf{j}^*. \quad (11b)$$

Развивая эту аналогию, можно сопоставить полной силе

$$\mathbf{f} = e \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right), \quad (12)$$

¹ Этот факт был открыт Максвеллом, причем Максвелл интерпретировал вектор \mathbf{E} как упругое смещение в эфире, а интеграл $\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int E_n dS$ как „ток смещения“.

действующей на точечный заряд e , движущийся со скоростью v в электромагнитном поле E, H фиктивную силу

$$f^* = e^* \left(H - \frac{1}{c} [v \times E] \right), \quad (12a)$$

действующую на движущийся магнитный полюс e^* .

Эти совершенно фиктивные величины и понятия в некоторых случаях очень полезны для практического вычисления полей, вызываемых движением электричества.

§ 4. Дифференциальные уравнения для электромагнитных потенциалов. Общие дифференциальные уравнения электромагнитного поля обычно собирают в следующие две группы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} H &= 0, \\ \operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} E &= 4 \pi \rho, \\ \operatorname{rot} H - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} &= 4 \pi j. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Мы займемся сначала рассмотрением уравнений группы (I). Первое из этих уравнений показывает, что и в общем случае магнитное поле свободно от источников, или соленоидально. При этом, так же как и в частном случае стационарного электрического тока, поле H может быть представлено с помощью векторного или магнитного потенциала A по формуле

$$H = \operatorname{rot} A. \quad (13)$$

Подставляя это выражение во второе из наших уравнений, получаем

$$\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} A = \operatorname{rot} \left(E + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0.$$

Эта формула показывает, что сумма $E + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ представляет собой безвихревой вектор и, следовательно, может быть представлена в виде градиента некоторой скалярной величины $-\varphi$. Иными словами, можно положить

$$E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (14)$$

Для постоянных полей эта формула приводится к выведенному нами уже в главе I выражению $E = -\operatorname{grad} \varphi$. Из этого следует, что φ есть введенный нами раньше скалярный или электрический потенциал.

Подставляя выражения (13) и (14) в уравнения группы (II), мы получим

$$\operatorname{div} E \equiv -\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} A = 4 \pi \rho \quad (14a)$$

и

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 4 \pi \mathbf{j}.$$

Последнее равенство мы с помощью тождества

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

преобразуем к виду

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 4 \pi \mathbf{j}. \quad (14b)$$

Как мы уже видели в главе II, при рассмотрении постоянных электромагнитных полей, введенная нами по формуле (13) векторная функция \mathbf{A} не вполне определена этой формулой. Для устранения этой неопределенности нами было тогда [(12a), глава II] введено добавочное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Это равенство следует теперь обобщить и записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

вполне аналогичном соотношению (8) между правыми частями равенств (14a) и (14b). Полученное уравнение (15) позволяет нам отделить неизвестные функции φ и \mathbf{A} друг от друга в равенствах (14a) и (14b). Последние при этом сводятся к двум уравнениям совершенно одинаковой формы

$$-\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4 \pi \rho, \quad (16)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 4 \pi \mathbf{j}. \quad (17)$$

Эти два уравнения являются обобщением уравнений (8) и (9) главы III.

В диэлектриках положительные и отрицательные заряды соединяются в мельчайшие нейтральные частицы — молекулы. Если обозначить через \mathbf{P} электрический момент единицы объема диэлектрика, то плотность тока по формуле (2) главы II равняется производной от \mathbf{P} по времени. Применяя электромагнитные единицы плотности тока $\left(\mathbf{j} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \right)$, мы имеем

$$\mathbf{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (18)$$

При подстановке этого выражения в равенство (8) последнее принимает вид

$$\operatorname{div} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

или

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho) = 0.$$

Из этого следует, что объемная плотность электрических зарядов связана с вектором поляризации \mathbf{P} соотношением

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (13a)$$

Последнее было уже нами выведено в § 10 главы III из других соображений. Следует отметить, что формулы (18) и (18a) верны не только в случае связанных зарядов, но и в общем случае зарядов, движущихся как угодно. При этом вектор \mathbf{P} теряет указанный нами выше наглядный физический смысл и становится просто некоторой вспомогательной величиной, определяемой равенством (18) (§ 10 глава III).

Аналогичный вспомогательный вектор \mathbf{Z} можно ввести и для определения электромагнитных потенциалов \mathbf{A} и φ [в виду аналогии между равенствами (8) и (15)]. Тогда, в соответствии с равенствами (18) и (18a), мы положим:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Z} \quad (19)$$

и

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}. \quad (19a)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (16) и (17), получаем:

$$-\nabla^2 (-\operatorname{div} \mathbf{Z}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-\operatorname{div} \mathbf{Z}) = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}$$

и

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla^2 \mathbf{Z} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} 4\pi \mathbf{P}.$$

Отсюда следует, что вектор \mathbf{Z} — называемый вектором Герца или потенциалом электрической поляризации — определяется уравнением

$$-\nabla^2 \mathbf{Z} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = 4\pi \mathbf{P}. \quad (20)$$

Это уравнение имеет тот же вид, как и уравнения (16) и (17), и представляет собою обобщение уравнения (35) главы III.

Мы уже видели, что в случае стационарных электрических токов плотность тока может быть выражена через вектор магнитной поляризации \mathbf{M} , а векторный потенциал — через „потенциал магнитной поляризации“ \mathbf{Z}^* по формулам $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{M}$ и $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{Z}^*$.

Эти формулы не могут быть непосредственно применены к общему случаю, но, комбинируя их с предыдущими, мы можем представить \mathbf{j} в виде следующей суммы:

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (21)$$

Для \mathbf{A} получается аналитическое выражение

$$\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{Z}^* + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}. \quad (21a)$$

Само собой разумеется, что первоначальное определение электрической поляризации \mathbf{P} приходится при этом несколько видоизменить. Однако, именно это обстоятельство может быть использовано для замены действительной системы некоторой другой таким образом, чтобы можно было как можно легче определить электромагнитное поле в данной части пространства. Из (21) и (21a) совместно с предыдущими формулами следует

$$-\nabla^2 \mathbf{Z}^* + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^*}{\partial t^2} = 4\pi \mathbf{M}, \quad (22)$$

т. е. уравнения такого же вида как (20).

Уравнения этого типа носят название Даламберовых и являются обобщением Лапласова уравнения для случая переменных полей.

§ 5. Интегрирование общих дифференциальных уравнений электромагнитного поля; запаздывающие потенциалы. Представим себе, что плотность электрических зарядов ρ вне некоторой определенной точки P' равна нулю, и выполним интегрирование уравнения (16) для этого случая. Пусть в точке P' при этом сконцентрирован конечный и меняющийся со временем электрический заряд e

$$e = e(t).$$

Следует отметить, что подобное представление физически бессмысленно, так как оно противоречит принципу сохранения электричества. Однако, с математической точки зрения этот случай имеет преимущество наибольшей простоты. С помощью соответственного специального решения уравнения (17) можно будет, как мы увидим ниже, легко сконструировать и общее решение, в котором закон сохранения электричества будет выполняться.

Мы имеем, следовательно, во всем пространстве, за исключением точки P' , уравнение

$$-\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (23)$$

в самой же точке P правая часть этого уравнения обращается в бесконечность. Из соображений симметрии потенциал φ должен иметь во всех точках, одинаково удаленных от P' , в одно и то же время одинаковое значение. Иными словами, следует предположить, что

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(R, t),$$

где R есть расстояние рассматриваемой точки пространства P от P' ($P'P = R = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$; \mathbf{r} и \mathbf{r}' суть обычные радиусы-векторы

точек P и P' относительно некоторой определенной точки O . При этом, как мы знаем из (18) главы III, операция $\nabla^2 \varphi$ приводится к $\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R\varphi)$ и равенство (23) принимает вид

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial R^2} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

или, так как переменные R и t не зависят друг от друга,

$$-\frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial R^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial t^2} = 0. \quad (23a)$$

Вводя вместо R новую переменную $\tau = \frac{R}{c}$ и обозначая $R\varphi$ через f , мы можем переписать уравнение (23a) в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial f}{\partial \tau^2} = 0. \quad (23b)$$

Это уравнение удовлетворяется, если f есть любая функция от суммы $t + \tau$ или разности $t - \tau$. Общее решение его может быть при этом представлено в виде

$$f(t, \tau) = f_1(t - \tau) + f_2(t + \tau), \quad (24)$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — любые функции соответственных аргументов.

Это утверждение можно строго доказать, преобразуя (23b) к новым переменным

$$\xi = t - \tau \text{ и } \eta = t + \tau.$$

Из $t = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ и $\tau = \frac{1}{2}(\eta - \xi)$ следует:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau}$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) = 4 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Уравнение (23b) в новых переменных принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Отсюда следует, что производная $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ не зависит от ξ , но может быть любой функцией от η . Обратное, $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ есть любая функция от ξ , но не зависит от η . Отсюда вытекает, что функцию f можно представить в виде суммы двух произвольных функций, из которых одна зависит только от ξ , а другая — только от η .

Мы предположим сначала, что $f_2 = 0$. Тогда для потенциала $\varphi(R, t)$ получим следующую формулу:

$$\varphi = \frac{f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}. \quad (24a)$$

Для определения функции f_1 заметим, что при $c = \infty$ уравнение (23a) приводится к уже рассмотренному нами в главе III уравнению для обычного Кулонова потенциала. В этом случае

$$\varphi = \frac{e}{R},$$

где e есть величина заряда, сконцентрированного в точке P' . При дифференцировании этой формулы в главе III мы предполагали e постоянным. Ясно однако, что при условии $c = \infty$ эта формула останется верной и в том случае, если заряд e любым образом меняется со временем. Величина потенциала φ в данный момент времени t определяется при этом значением функции $e(t)$ в тот же самый момент времени.

Из этих рассуждений мы видим, что при $c = \infty$ формула (24a) должна сводиться к $\varphi(R, t) = \frac{e(t)}{R}$. Отсюда следует, что

$$f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) = e \left(t - \frac{R}{c} \right),$$

и, следовательно,

$$\varphi(R, t) = \frac{e \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}. \quad (25)$$

Согласно этой формуле значение потенциала φ в точках, находящихся на расстоянии R от заряда e , т. е. на поверхности сферы с радиусом R и центром в точке P' , в момент t определяется не одновременной величиной заряда, а его величиной в предшествующий момент $t' = t - \frac{R}{c}$.

Мы должны себе представить, что действие заряда e передается из точки P' в окружающее пространство не моментально, а с некоторым запаздыванием, пропорциональным расстоянию соответствующей точки P от P' . Иными словами, это действие распространяется в пустом пространстве в виде шаровой волны совершенно так же, как распространяются круговые волны на поверхности воды, вызванные местным возмущением или, еще лучше, как шаровые волны звука в воздухе.

В виду этого потенциал, определяемый по формуле (25), называют за запаздыванием.

Скорость распространения электромагнитного действия, согласно (25), равна c , т. е. той величине $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек, которая

была нами определена вначале как отношение электромагнитной единицы силы тока к электростатической, а потом (§ 6 главы III) как „критическая скорость“. Таким образом оказывается, что критической скоростью следует считать скорость распространения электромагнитных действий. Следует еще раз напомнить, что она в точности совпадает с экспериментально измеренной скоростью света.

Следует отметить, что формула (25) не является необходимым математическим следствием первоначального дифференциального уравнения (23а), представляя собой лишь частное решение последнего. С таким же успехом мы могли бы положить в общем решении этого уравнения (24) не $f_2=0$, а $f_1=0$, что дало бы для φ вместо (25) формулу

$$\varphi(R, t) = \frac{1}{R} \cdot e\left(t + \frac{R}{c}\right), \quad (25a)$$

определяющую так называемый опережающий потенциал.

Общая форма решения (24), совместная с физическими условиями нашей задачи, т. е. переходящая при $c = \infty$ в обычный Кулонов потенциал $\varphi(R, t) = \frac{e(t)}{R}$, является линейной комбинацией (25) и (25а)

$$\varphi(R, t) = \frac{1}{R} \left[\alpha' e\left(t - \frac{R}{c}\right) + \alpha'' e\left(t + \frac{R}{c}\right) \right], \quad (25b)$$

где α' и α'' — два численных коэффициента, сумма которых равна единице. Один из них может быть выбран совершенно произвольным образом.

Мы полагаем $\alpha' = 1$, а $\alpha'' = 0$, отбрасывая тем самым второе частное решение (25а) на том основании, что опережающий потенциал не имеет физического смысла. Действительно, уравнение (25а) выражает то обстоятельство, что действие, оказываемое зарядом e в точке P в момент времени t определяется величиной этого заряда в последующий момент

$$t'' = t + \frac{R}{c}.$$

Этот результат противоречит не только опытным фактам (например о распространении света), но и принципу причинности, так как он означает, что действие предшествует своей причине, вместо того, чтобы следовать за ней.

Следует, впрочем, заметить, что это — обычное — представление о хронологической последовательности причины и следствия не вполне правильно. Классическая механика, стоящая на точке зрения „мгновенного“ дальнего действия (т. е. моментальной передачи силы), предполагает, что ускорение материальной частицы совпадает во времени с действующей на нее силой, т. е. определяется одновременным положением всех остальных

частиц, являющихся источниками этой силы. Наше же представление о некотором отставании движения от силы, его вызывающей, обусловлено тем, что мы воспринимаем движение не как ускорение, а как скорость или, вернее говоря, как некоторое перемещение в пространстве. Для того же, чтобы заметить изменение скорости или перемещение с места на место, мы должны выждать некоторое конечное время.

Таким образом, в классической механике „причина“ и „действие“ считаются фактически одновременными.

Поскольку эта одновременность заменяется запаздывающим действием силы, т. е. поскольку мы нарушаем временное совпадение причины и следствия, становится логическим допустимым и представление об опережающем силовом действии. Это представление должно быть отвергнуто, если не по логическим соображениям, то на основании опытных фактов, которые ему противоречат.

Мы должны поэтому отбросить решение (25а) и считать, что действие покоящегося, но меняющегося со временем заряда выражается по формуле (25) запаздывающим потенциалом.

Переход от этого простейшего, но фиктивного случая к общему случаю произвольного распределения и движения электричества, удовлетворяющего принципу сохранения, совершается весьма просто. Вследствие линейности общего уравнения (16) относительно ρ и φ , потенциал φ может быть представлен в виде суммы элементарных потенциалов $d\varphi$, вызываемых бесконечно малыми зарядами $de' = \rho' dV'$, сконцентрированными в отдельных элементах объема dV' . Обозначим через \mathbf{r}' радиус-вектор любой точки P' элемента dV' , а через \mathbf{r} — радиус-вектор точки P , для которой мы хотим определить φ . Если расстояние $PP' = R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ достаточно велико или, что то же самое, если размеры элемента объема dV' бесконечно малы по сравнению с R , то заряд de' можно считать точечным и потенциал его в точке P вычислять по формуле (25). При этом изменение со временем величины заряда de' будет компенсироваться соответствующим изменением зарядов, находящихся в соседних элементах объема. Таким образом,

$$d\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{R} \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) dV',$$

и, следовательно,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R} \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) dV', \quad (26)$$

где интегрирование производится по всему пространству или фактически по тем точкам пространства \mathbf{r}' , которые были „заряжены“ в соответственный „эффективный момент“

$$t' = t - \frac{R}{c}. \quad (26a)$$

В специальном случае постоянного ρ (покоящиеся электрические заряды) формула (26) сводится к формуле (17а) главы III для Кулонова потенциала.

Формула (26) является решением дифференциального уравнения (16). Вследствие формального тождества уравнений (16) и (17) решение последнего должно выражаться формулой вида (26) с заменой скаляра φ вектором \mathbf{j} . Исходя из этого, мы получаем для векторного потенциала следующее выражение, определяющее его через функцию $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ распределения электрических токов

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R} \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV'. \quad (27)$$

Легко доказать, что потенциалы, определяемые по формулам (26) и (27), удовлетворяют равенству (15), поскольку выполняется соответствующее условие (8) для ρ и \mathbf{j} , т. е. принцип сохранения электричества.

Действительно, дифференцируя (26) по ct и принимая во внимание (26а), получаем, вследствие $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}\left(t' = t - \frac{R}{c}\right)$:

$$\frac{\partial \varphi}{c \partial t} = \int \frac{1}{R} \frac{\partial}{c \partial t'} \rho(\mathbf{r}', t') dV'$$

и далее, вводя сокращение $\mathbf{j}' = \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \int \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}'}{R} dV' = \int \left(\mathbf{j}' \operatorname{grad} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \operatorname{div} \mathbf{j}' \right) dV'.$$

При этом по формуле (28а) (Введения):

$$\operatorname{div} \mathbf{j}' = \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial t'} \operatorname{grad} t' = - \frac{\partial \mathbf{j}'}{c \partial t'} \operatorname{grad} R.$$

Мы заменим дифференцирование по \mathbf{r} соответствующим дифференцированием по радиус-вектору \mathbf{r}' , играющему роль независимого переменного в предыдущем интеграле. При этом, вследствие равенства $\nabla = -\nabla'$ (т. е. $\operatorname{grad} = -\operatorname{grad}'$),

$$\begin{aligned} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial t'} \operatorname{grad} R &= + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}'}{\partial t'} \operatorname{grad}' R = \\ &= - \{ \operatorname{div}' \mathbf{j}' - (\operatorname{div}' \mathbf{j}')_{t' = \text{const}} \}, \end{aligned}$$

где $(\operatorname{div}' \mathbf{j}')_{t' = \text{const}}$ соответствует некоторому постоянному значению t' . В результате имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \int \left\{ - \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}'}{R} + \frac{1}{R} (\operatorname{div}' \mathbf{j}')_{t' = \text{const}} \right\} dV'.$$

Преобразуем первую половину этого интеграла по формуле Гаусса

$$\int \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}'}{R} dV' = \int \frac{1}{R} \mathbf{j}'_n \cdot dS'.$$

На поверхности S' , замыкающей собою весь объем, в котором находится электричество и электрический ток в данный момент, вектор \mathbf{j}' (или во всяком случае его нормальная компонента) должен равняться нулю. Поэтому

$$\int \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}'}{R} dV' = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = \int \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + (\operatorname{div}' \mathbf{j}')_{t' = \text{const}} \right\} \frac{dV'}{R} = 0$$

на основании формулы (8).

Интегралы (26) и (27) определяют полное действие, производимое в данной пространственно-временной точке \mathbf{r} , t всеми зарядами, находящимися в окружающем пространстве. Это сходящееся со всех сторон в точку P действие можно себе геометрически представить как сферическую „поверхность действия“, стягивающуюся к своему центру P со скоростью c так, что в момент t ее радиус R равен нулю.

Интегралы (26) и (27) слагаются из отдельных элементарных частей, получающихся при делении содержимого (заряда или тока) элемента объема, заключенного между двумя бесконечно близкими „сферами действия“, на радиус сферы.

Рассмотрим бесконечно узкий конус с вершиной в точке P и телесным углом при вершине $d\Omega$. За бесконечно малый промежуток времени между моментами

$$t' = t - \frac{R}{c} \quad \text{и} \quad t' + dt' = t - \frac{(R + dR)}{c}$$

сжимающаяся сфера действия вырезает из этого конуса элемент объема $dV = R^2 d\Omega dR$. Соответственно этому формулы (26) и (27) могут быть переписаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \int d\Omega \int_0^{\infty} \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) R dR, \\ \mathbf{A} &= \int d\Omega \int_0^{\infty} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) R dR. \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

Следует помнить, что полученные формулы являются лишь частными и решениями дифференциальных уравнений (16) и (17). Самое общее решение этих уравнений может быть получено (как известно из теории линейных дифференциальных уравнений) прибавлением общих решений соответственных однородных уравнений

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0,$$

удовлетворяющих условиям (15). Подобные решения φ_0 , A_0 могут быть однако интерпретированы как запаздывающие потенциалы, вызываемые бесконечно удаленными и электрическими зарядами. Если мы предположим, что функции $\rho(\mathbf{r}', t')$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ известны нам для всех точек пространства, включая и бесконечно удаленные, и для всех времен от $-\infty$ до $+\infty$, то мы можем считать соответственные (с учетом бесконечно удаленных пространственных и временных точек) решения (26) и (27) полными.

Заметим, что при надлежащем выборе функций φ_0 и A_0 , удовлетворяющих однородным уравнениям (27а) и соотношению (15), можно заменить запаздывающие потенциалы (26) — (27) опережающими, не изменяя сумм $\varphi + \varphi_0$ и $\mathbf{A} + A_0$. Это положение, вытекающее из общей теории линейных дифференциальных уравнений, показывает, что вопрос о выборе между запаздывающими и опережающими потенциалами имеет до известной степени относительный характер.

То обстоятельство, что мы отдаем предпочтение запаздывающим потенциалам, обуславливается достаточностью их для описания электромагнитного поля во всех тех случаях, когда создающие его электрические заряды предполагаются отсутствующими вместе с самим полем вплоть до некоторого момента ($t=0$). При этом под „отсутствием“ электрических зарядов подразумевается полная нейтрализация зарядов противоположного знака (длящаяся от $t=-\infty$ до $t=0$). Как только эта нейтрализация прекращается, т. е. как только положительные и отрицательные заряды отделяются друг от друга (как это, например, имеет место при появлении электрического тока в проводнике), вокруг них появляется электромагнитное поле — сначала в непосредственной близости, а затем все дальше и дальше, в соответствии с формулами (26) — (27) для отстающих потенциалов. Заменяя отстающие потенциалы опережающими, мы вынуждены были бы прибавить к ним потенциалы φ_0 , A_0 , удовлетворяющие уравнениям (27а) и фактически равные разности отстающих и опережающих потенциалов, которые соответствуют одному и тому же (данному) распределению зарядов и токов. Легко видеть, что эти разности удовлетворяют однородным уравнениям (26) и (27).

Для того чтобы убедиться в необходимости и достаточности отстающих потенциалов для описания электромагнитного поля в указанном выше случае, вернемся к выводу формул (25), (25а) и (25б).

Согласно нашему предположению заряд $e(t)$, сосредоточенный в любой точке (вернее, элементе объема) равнялся нулю вплоть до момента $t=0$, также как и потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$. При таких условиях, мы можем утверждать, что при $t > 0$ этот потенциал φ должен зависеть только от расстояния r , — в виду эквивалентности всех направлений в пространстве („принцип симметрии“).

Это приводит нас к формуле (25b) и, следовательно, к формуле вида

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \alpha' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV' + \alpha'' \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t + \frac{R}{c}\right)}{R} dV',$$

как самому общему решению нашей задачи. При этом отношение коэффициентов α' и α'' может быть различным для разных элементов объема dV' .

Если, однако, мы желаем обеспечить совместное исчезновение плотности ρ и потенциала φ при $t < 0$, мы должны отбросить второй член, соответствующий опережающему действию (т. е. положить $\alpha'' = 0$ и $\alpha' = 1$), так как в подинтегральном выражении плотность $\rho\left(\mathbf{r}', t + \frac{R}{c}\right)$ может быть отлична от нуля при $t < 0$, если $\frac{R}{c} + t > 0$.

Мы получили бы противоположный результат, если бы выставили требование исчезновения заряда при $t < 0$, а поля при $t > 0$ (или наоборот).

В этом случае поле пришлось бы описывать опережающими потенциалами и трактовать не как „испускаемое“ данными зарядами, но как „поглощаемое“ ими в процессе их возникновения (т. е. пространственного разделения). С этой точки зрения, обращающей прежнее причинное соотношение между зарядами и полем, обычное представление о последовательности причины и следствия во времени сохраняется в неприкосновенности, так же как и в предыдущем случае, когда заряды являлись „причиной“, т. е. источниками поля.

Более полное исследование этого вопроса будет произведено ниже (§ 9).

§ 6. Электромагнитное поле элементарного колеблющегося диполя (осциллятора). Если нам известен вектор поляризации $\mathbf{P}(\mathbf{r}', t')$ для всех точек пространства и времени, то для определения электромагнитного поля может быть использован поляризационный потенциал Z , определяемый уравнением (22). Интегральное выражение этого потенциала получается подстановкой в (27) вектора $\mathbf{P}(\mathbf{r}', t')$ вместо плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$

$$Z(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t')}{R} dV', \quad (28)$$

где t' означает, как и раньше, „эффективное время“.

Мы рассмотрим простейший случай элементарного (математического) покоящегося диполя с электрическим моментом, меняющимся со временем. Этот момент очевидно не может монотонно возрастать или убывать, а должен колебаться около некоторого среднего значения. В противном случае диполь

не мог бы оставаться элементарным, т. е. обладать бесконечно малой длиной. Подобный диполь называют обычно осциллятором или вибратором. Всякую нейтральную электрическую систему весьма малых линейных размеров, обладающую переменным электрическим моментом первого порядка (например, атом или молекулу) можно трактовать в первом приближении как элементарный осциллятор.

Положим, что наш осциллятор сконцентрирован в некоторой точке P' , и обозначим его момент в функции от времени через $\mathbf{p}(t)$.

Так как $\int \mathbf{P}(\mathbf{r}', t') dV' = \mathbf{p}(t')$, то формула (28) примет вид

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}(t')}{R} \quad (28a)$$

[ср. (32b) главы III].

Для вычисления потенциалов φ и \mathbf{A} мы воспользуемся следующими формулами, получающимися при дифференцировании вектора $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(t')$, также как и любой другой векторной функции аргумента $t' = t - \frac{R}{c}$ [ср. Введение, (28) — (28c)].

$$\frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{p}' = \operatorname{grad} t' \cdot \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{p}' = (\operatorname{grad} t') \times \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}$$

$$(\mathbf{k} \operatorname{grad}) \mathbf{p}' = (\mathbf{k} \operatorname{grad} t') \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}$$

где \mathbf{k} произвольный вектор и

$$\operatorname{grad} t' = -\operatorname{grad} \frac{R}{c} = -\frac{1}{c} \operatorname{grad} R = -\frac{\mathbf{R}_0}{c}$$

Пользуясь обычным обозначением для производной от любой функции по времени t'

$$\frac{d\mathbf{F}(t')}{dt'} = \dot{\mathbf{F}}(t') = \dot{\mathbf{F}}'$$

мы получаем с помощью предыдущих формул:

$$\varphi = -\operatorname{div} \frac{\mathbf{p}'}{R} = -\mathbf{p}' \operatorname{grad} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \operatorname{div} \mathbf{p}'$$

т. е.

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}' \mathbf{R}_0}{R^2} + \frac{\mathbf{p}' \mathbf{R}_0}{cR} \quad (29)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{p}}'}{cR} \quad (29a)$$

В частном случае $\mathbf{p}' = \mathbf{p} = \text{const}$ формула (29) сводится к уже известному нам выражению электрического потенциала элементарного диполя. Формула (29а) соответствует формуле (22) главы III для векторного потенциала движущегося точечного заряда, с одним только, но очень существенным различием, которое заключается в том, что формула (29а) представляет не мгновенное, а запаздывающее действие.

По формуле $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ мы имеем далее

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \text{rot } \frac{\dot{\mathbf{p}}'}{cR} = \frac{1}{c} \text{grad } \frac{1}{R} \times \dot{\mathbf{p}}' + \frac{1}{cR} \text{rot } \dot{\mathbf{p}}' = \\ &= \text{grad } \frac{1}{cR} \times \dot{\mathbf{p}}' + \frac{1}{cR} \text{grad } t' \times \ddot{\mathbf{p}}', \end{aligned}$$

где

$$\ddot{\mathbf{p}}' = \frac{d^2 \mathbf{p}'}{dt'^2},$$

и окончательно

$$\mathbf{H} = \frac{\dot{\mathbf{p}}' \times \mathbf{R}_0}{cR^2} + \frac{\ddot{\mathbf{p}}' \times \mathbf{R}_0}{c^2 R}. \quad (30)$$

Для вычисления напряженности электрического поля $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ мы заменим единичный вектор \mathbf{R}_0 в (29) через $\frac{\mathbf{R}}{R}$. При этом мы получаем:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \text{grad } \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} + \text{grad } \frac{\dot{\mathbf{p}}' \cdot \mathbf{R}}{cR^2} = \\ &= \frac{1}{R^3} \text{grad } (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}) - 3 \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}}{R^4} \text{grad } R + \frac{1}{cR^2} \text{grad } (\dot{\mathbf{p}}' \cdot \mathbf{R}) - \frac{2(\dot{\mathbf{p}}' \cdot \mathbf{R})}{cR^3} \text{grad } R. \end{aligned}$$

Далее, по формуле (27) Введения, имеем

$$\begin{aligned} \text{grad } (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}) &= (\mathbf{p}' \text{ grad}) \mathbf{R} + \mathbf{p}' \times \text{rot } \mathbf{R} + (\mathbf{R} \text{ grad}) \mathbf{p}' + \mathbf{R} \times \text{rot } \mathbf{p}' = \\ &= \mathbf{p}' + (\mathbf{R} \text{ grad } t') \dot{\mathbf{p}}' + \mathbf{R} \times (\text{grad } t' \times \dot{\mathbf{p}}') = \mathbf{p}' - \frac{R}{c} \dot{\mathbf{p}}' - \frac{R}{c} \times (\mathbf{R}_0 \times \dot{\mathbf{p}}'), \end{aligned}$$

или, так как

$$\mathbf{R} \times (\mathbf{R}_0 \times \dot{\mathbf{p}}') = R_0 (\mathbf{R} \dot{\mathbf{p}}') - \dot{\mathbf{p}}' (R R_0) \quad \text{и} \quad R R_0 = R,$$

то

$$\text{grad } (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{p}' - \frac{R_0}{c} (R \dot{\mathbf{p}}').$$

Заменяя вектор \mathbf{p}' вектором $\dot{\mathbf{p}}'$, мы получим

$$\text{grad } (\dot{\mathbf{p}}' \cdot \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{p}}' - \frac{R_0}{c} (R \ddot{\mathbf{p}}').$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi = & \frac{1}{R^3} \left[\mathbf{p}' - \frac{R_0}{c} (\mathbf{R}\dot{\mathbf{p}}') \right] - 3 (\mathbf{p}'\mathbf{R}) \frac{R_0}{R^4} + \\ & + \frac{1}{cR^2} \left[\dot{\mathbf{p}}' - \frac{R_0}{c} (\mathbf{R}\ddot{\mathbf{p}}') \right] - 2 \frac{R_0}{cR^3} (\dot{\mathbf{p}}'\mathbf{R}) = \frac{1}{R^3} [\mathbf{p}' - 3R_0 (\mathbf{p}'\mathbf{R})] + \\ & + \frac{1}{cR^2} [\dot{\mathbf{p}}' - 3R_0 (\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{p}}')] - \frac{R_0}{c^2R} (\mathbf{R}_0\ddot{\mathbf{p}}'), \end{aligned}$$

и, следовательно, согласно определению \mathbf{E} , в связи с (29а):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \frac{1}{R^3} [3R_0 (\mathbf{R}_0\mathbf{p}') - \mathbf{p}'] + \frac{1}{cR^2} [3R_0 (\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{p}}') - \dot{\mathbf{p}}'] + \\ & + \frac{1}{c^2R} [R_0 (\mathbf{R}_0\ddot{\mathbf{p}}') - \ddot{\mathbf{p}}']. \end{aligned} \quad (30a)$$

При $\mathbf{p}' = \text{const}$ правая часть этой формулы сводится к первому члену, в полном согласии с формулой (26) главы III.

Этот первый член мы обозначим через $\mathbf{E}^{(0)}$. Второй член

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{cR^2} [3R_0 (\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{p}}') - \dot{\mathbf{p}}']$$

представляет собой электрическое поле такого же типа, как первый, причем напряженность поля обратно пропорциональна не третьей, а второй степени расстояния, и вместо электрического момента стоит его производная по времени, т. е. соответственное „электрическое количество движения“.

Третий член

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{c^2R} [R_0 (\mathbf{R}_0\ddot{\mathbf{p}}') - \ddot{\mathbf{p}}']$$

представляет собой электрическое поле, обратно пропорциональное первой степени расстояния и обусловленное второй производной момента по времени, т. е. ускорением зарядов (или одного из зарядов), образующих рассматриваемый диполь.

Вектор $R_0 (\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{p}}')$ представляет собой очевидно продольную компоненту $\dot{\mathbf{p}}'$, т. е. слагающую вектора $\dot{\mathbf{p}}'$ в направлении радиуса-вектора $P'P = \mathbf{R}$. Отсюда видно, что разность $\dot{\mathbf{p}}' - R_0 (\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{p}}')$ равна поперечной слагающей $\dot{\mathbf{p}}'$, или иными словами, проекции $\dot{\mathbf{p}}'$ на плоскость, перпендикулярную к \mathbf{R} .

Вектор $\mathbf{E}^{(2)}$ можно, следовательно, переписать в форме

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{\mathbf{R}_0 \times (\mathbf{R}_0 \times \ddot{\mathbf{p}}')}{c^2R}, \quad (31)$$

так как $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_0 = 1$.

Первый член формулы (30)

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{\dot{\mathbf{p}}' \times \mathbf{R}_0}{cR^2}$$

выражает закон Био-Савара с поправкой на запаздывание электромагнитного дальнего действия. Второй член

$$\mathbf{H}^{(2)} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}' \times \mathbf{R}_0}{c^2 R} \quad (32)$$

представляет магнитное поле такого же типа, как и $\mathbf{H}^{(1)}$, с той разницей, что электрическое „количество движения“ $\dot{\mathbf{p}}'$ заменено „ускорением“ $\ddot{\mathbf{r}}'$, а обратная пропорциональность второй степени расстояния обратной пропорциональностью R в первой степени, так же как в случае $\mathbf{E}^{(2)}$.

Формулы (31) и (32) показывают, что векторы $\mathbf{E}^{(2)}$ и $\mathbf{H}^{(2)}$ перпендикулярны друг к другу и к радиусу-вектору \mathbf{R} . При этом $\mathbf{E}^{(2)}$ лежит в образуемой векторами $\dot{\mathbf{p}}'$ и \mathbf{R} „меридиональной

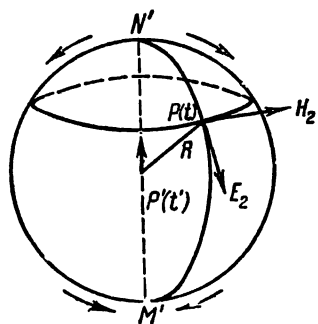


Рис. 30.

плоскости“, а вектор $\mathbf{H}^{(2)}$ перпендикулярен к ней. Электрические силовые линии можно, следовательно, представлять себе как меридианы, а магнитные — как параллельные круги на сфере, проходящей через точку P , причем центром этой сферы является осциллятор, а полярная ось $M'N'$ совпадает с направлением „вектора ускорения“ $\ddot{\mathbf{p}}'$ в соответственный эффективный момент $t' = t - \frac{R}{c}$ (рис. 30).

Далее, из (31) и (32) следует, что векторы $\mathbf{E}^{(2)}$ и $\mathbf{H}^{(2)}$ связаны между собой соотношениями

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)} \times \mathbf{R}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{E}^{(2)}. \quad (32a)$$

Из этих соотношений видно, что оба вектора имеют одинаковую абсолютную величину $|\mathbf{E}^{(2)}| = |\mathbf{H}^{(2)}|$ и ориентированы так, что векторное произведение $\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{H}^{(2)}$ направлено по радиусу-вектору \mathbf{R} .

Следует заметить, что на другой сфере, с другим радиусом R_1 электрические и магнитные силовые линии в тот же самый момент t могут иметь совсем другие направления, в зависимости от направления вектора ускорения в соответствующий эффективный момент $t_1' = t - \frac{R_1}{c}$.

Если обозначить угол между векторами \mathbf{R} и $\dot{\mathbf{p}}'$ через θ , то

абсолютная величина векторов $E^{(2)}$ и $H^{(2)}$ может быть выражена формулой:

$$E^{(2)} = H^{(2)} = \frac{|\vec{p}'|}{c^2 R} \sin \vartheta. \quad (32b)$$

В направлении полярной оси, т. е. в полюсах M' и N' , напряженности $E^{(2)}$ и $H^{(2)}$ равны нулю. Максимального своего значения они достигают на экваторе.

В непосредственной близости к осциллятору поле $E^{(0)}$ должно быть во много раз сильнее, чем остальные два ($E^{(1)}$ и $E^{(2)}$). Это поле, точнее говоря, эта часть электрического поля, однако, очень быстро спадает с расстоянием и на средних расстояниях главную роль должно играть уже не оно, а поле $E^{(1)}$ и связанное с ним Био-Саварово поле $H^{(1)}$.

На достаточно больших расстояниях можно не принимать в расчет и эти поля, спадающие обратно пропорционально квадрату расстояния. Главную роль на таких расстояниях будут играть рассмотренные выше электромагнитные поля $E^{(2)}$ и $H^{(2)}$, сстальными же составляющими практически можно будет пренебречь.

В итоге мы получаем следующую картину распространения действия от рассматриваемого нами осциллятора: в каждый момент в точке P' возникают новые бесконечно малые сферические поверхности действия, или волны, которые распространяются равномерно во все стороны со скоростью c , т. е. их радиусы увеличиваются в одну секунду на $3 \cdot 10^{10}$ см. Вначале структура электромагнитного поля на этих сферах постепенно изменяется, пока не достигнет структуры, изображенной на рис. 30. При дальнейшем расширении сферы структура поля не меняется, причем напряженность поля спадает обратно пропорционально радиусу сферы.

§ 7. Электромагнитные волны и природа света. Представим себе, что осциллятор совершает чисто синусоидальные или „гармонические колебания с периодом τ . Тогда в каждой точке пространства электрическая и магнитная напряженности должны колебаться с тем же периодом. Этой временной периодичности колебаний в заданной пространственной точке соответствует в каждый момент времени пространственная периодичность вдоль любого, выходящего из P' луча. А именно, на каждом из этих лучей в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии

$$\lambda = c\tau, \quad (33)$$

электрическая (и магнитная) напряженность имеет ту же самую фазу.

Если представлять электрическую напряженность в каждой точке графически посредством параллельного и пропорционального ей о. резка, то в том случае, когда осциллятор колеблется линейно в направлении определенной прямой MN , получится кар-

тина, представленная на рис. 31, т. е. кривая отличающаяся от обычной синусоиды только тем, что амплитуда колебаний вдоль луча медленно уменьшается с увеличением расстояния.

Когда осциллятор совершает колебание эллиптической формы, мы получим вместо вышеприведенной синусоиды винтообразную кривую с постоянным ходом винта λ и медленно убывающим периметром отдельных витков.

Вследствие аналогии описанных процессов с обычным волнообразным распространением механических колебаний в материальной среде (или на ее поверхности), здесь также принято говорить о „волнах“, а именно об электромагнитных волнах. Величину λ называют длиной волны рассматриваемых электромагнитных колебаний; эти последние при этом называют — поляризованными линейно, по кругу или эллиптически, смотря по виду кривой, которую описывает отрезок, представляющий электрический вектор в рассматриваемой точке. Тип поляризации колебаний остается, конечно, во всех точках одного и того же луча неизменным.

Нужно заметить, что указанная аналогия носит чисто формальный характер. Физически процесс распространения электромагнитных действий или „волн“ в пустом пространстве не имеет абсолютно ничего общего с распространением упругих волн в материальных телах. В этом последнем случае мы имеем процесс, основанный на действии соседних атомов (или молекул) друг на друга, причем в каждом месте происходит колебательное движение атомов. Напротив, распространение электромагнитных волн означает не что иное как запаздывающее дальное действие, оказываемое осциллятором на окружающие его частицы — дальное действие, которое может рассматриваться как „движение“ только тогда, когда в данной точке действительно находится способная колебаться частица или „резонатор“. Электромагнитные колебания отнюдь не представляют собой колебательное движение. Они являются силовыми колебаниями, волновой характер которых получается вследствие конечной скорости распространения исходящих от осциллятора действий, в связи с периодическим характером движения образующих его электрических зарядов. Необходимо резко отличать друг от друга колебательное движение и заряженной материальной частицы, создающей электромагнитное поле („электронные колебания“), и колебания напряженности поля в окружающем пространстве („силовые колебания“); эти два типа колебаний относятся друг к другу как причина и следствие.

Силовые колебания, вызванные определенным „первичным“ колебательным движением некоторой частицы, могут в свою очередь вызвать новые „вторичные“ электронные колебания другой частицы, если эта последняя находится по соседству с первой и способна колебаться. Эти вторичные электронные колебания должны вызвать новые, вторичные силовые колебания того же периода и длины волны, что и первичные, и так далее.

Это явление, т. е. появление вторичных электромагнитных волн, принято называть „рассеянием“ или отражением первичных волн.

Как выше уже указывалось, скорость распространения электромагнитных действий, определенная теоретически (из отношения электромагнитной единицы заряда к электростатической), в точности совпадает с измеренной на опыте скоростью света. Уже одного этого факта было бы достаточно для обоснования электромагнитной теории света, т. е. теории, в которой световые волны рассматриваются как электромагнитные волны весьма малой (определяемой на опыте) длины. Приведенным выше анализом электромагнитного поля элементарного осциллятора это предположение может считаться вполне обоснованным.

Действительно, существенный признак световых колебаний заключается, как известно, в их поперечности, которая экспе-

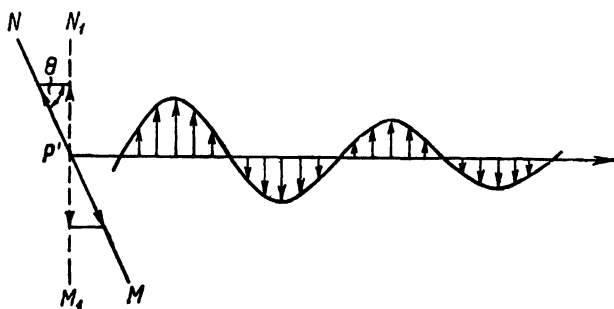


Рис. 31.

риментально вытекает из поляризационных явлений. Но мы только-что видели, что на достаточно большом расстоянии от осциллятора электрическая и магнитная напряженности перпендикулярны к соответствующему лучу. Нужно заметить, что эта поперечность электромагнитных силовых колебаний имеет в известной степени двойственный характер; она имеет место не только в отношении направления напряженности поля по отношению к лучу, но и в том смысле, что эти напряженности зависят только от проекции соответствующих электронных колебаний на плоскость, перпендикулярную к этому лучу (например, на прямую $M_1 N_1$ в случае рис. 31).

Так как, далее, векторы $E^{(2)}$ и $H^{(2)}$ обратно пропорциональны первой степени расстояния R , энергия электромагнитных силовых колебаний, которая, как мы ниже покажем, пропорциональна квадрату этих векторов (или их произведению), должна убывать обратно пропорционально квадрату R — в согласии с эмпирическим законом зависимости силы света от расстояния между его источником и рассматриваемой точкой.

Что касается источника света, то он, очевидно, может быть представлен в виде системы элементарных электрических осцилляторов, связанных с элементарными источниками света —

атомами и молекулами рассматриваемого тела. „Видимость“ материальных тел, т. е. способность их испускать свет (прямой или отраженный), представляет собой с этой точки зрения наиболее простое и непосредственное доказательство электрической природы материи, т. е. того факта, что мельчайшие частицы обычной нейтральной материи — атомы — составлены из еще более мелких частиц, которые имеют определенные электрические заряды; ибо все то, что видим о, будь то „первично“ — путем самосвечения, или „вторично“ — путем освещения посторонним светом, должно состоять из способных колебаться электрических частиц.

Видимый свет охватывает, как известно, лишь очень узкий участок длин волн, лежащий между $\lambda = 7,5 \cdot 10^{-5}$ см (красный свет) и $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ (фиолетовый свет). Вне этой спектральной области лежат „невидимые световые лучи“ — и именно, в сторону коротких волн ультрафиолетовые и рентгеновские (λ до 10^{-10} см), а по другую сторону инфракрасные лучи (почти до $\lambda = 10^{-2}$ см), к которым примыкают длинноволновые „электрические лучи“ радиотехники. В последнем случае, когда длина волны достигает нескольких сот метров, говорят обычно не о лучах, а о волнах. Лучи могут быть лишь формально определены как линии распространения волн. Напротив, в области коротких волн понятие луча получает, так сказать, физическую реальность, так как при этом можно из сколь угодно широкой волновой поверхности вырезать очень тонкий, почти линейный пучок лучей. Толщина такого лучевого пучка остается, однако, как показывает более точное исследование вопроса, все еще большой по сравнению с длиной волны.

§ 8. Переход от сферических к плоским волнам. Электрический момент гармонически колеблющегося осциллятора в функции времени представляется вещественной частью комплексной величины

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}; \quad (34)$$

при этом

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu, \quad (34a)$$

где ν — частота колебаний, т. е. их число в единицу времени. Амплитуда \mathbf{p}_0 , вообще говоря, является комплексным вектором, т. е. представляется в виде

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{a} - i\mathbf{b}, \quad (34b)$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} обычные (вещественные) векторы. Вещественная часть (34), подробно написанная, выражается таким образом (вследствие $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$) формулой

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t \quad (34c)$$

Оба члена правой стороны представляют линейное гармоническое колебание с амплитудами \mathbf{a} и \mathbf{b} и с одной и той же частотой ω . Наложением таких колебаний создается, как известно, эллиптическое колебание. Если рассматривать \mathbf{r} как радиус-вектор движущейся точки, например, положительного конца диполя (при неподвижности отрицательного), то эта частица должна по (34с) двигаться по эллипсу с сопряженными полуосями \mathbf{a} и \mathbf{b} (последние могут, в частности, совпадать с полуосями эллипса).

Из (34) получаем двукратным дифференцированием

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 \mathbf{p}_0$$

т., следовательно, по (31) и (32)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^{(2)} &= -\mathbf{R}_0 \times (\mathbf{R}_0 \times \mathbf{p}_0) \frac{\omega^2}{c^2 R} e^{i\omega(t-R/c)} \\ \mathbf{H}^{(2)} &= -(\mathbf{p}_0 \times \mathbf{R}_0) \frac{\omega^2}{c^2 R} e^{i\omega(t-R/c)}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

При этом величина

$$\psi = \omega(t - R/c) = 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{R}{\lambda} \right) \quad (36)$$

означает фазу электромагнитных колебаний на расстоянии R от осциллятора. Мы видим, таким образом, что длина волны $c\tau = \lambda$ по отношению к R играет ту же роль, что и период колебаний τ по отношению к времени t .

Что же касается типа („поляризации“) рассматриваемых силовых колебаний, то он для различных направлений R различен. Так, например, в направлениях, лежащих в плоскости колебаний \mathbf{p} , силовые колебания линейно поляризованы. Вообще же они воспроизводят проекцию \mathbf{p} на плоскость, перпендикулярную к \mathbf{R} . Нужно заметить, что электрическая напряженность \mathbf{E} в каждый момент t имеет то же направление, что и поперечная проекция \mathbf{p} в соответствующий эффективный момент $t - \frac{R}{c}$.

Поля $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(0)}$ колеблются в каждой точке аналогично $\mathbf{E}^{(2)}$ и $\mathbf{H}^{(2)}$, причем фаза их также определяется выражением (36). Что же касается их амплитуд, то из (30а), (30) и (34) следует, что они относятся друг к другу приблизительно следующим образом:

$$E^{(0)} : E^{(1)} : E^{(2)} \cong \frac{1}{R^3} : \frac{\omega}{cR^2} : \frac{\omega^2}{c^2 R}; \quad H^{(1)} : H^{(2)} \cong \frac{\omega}{cR^2} : \frac{\omega^2}{c^2 R},$$

т. е., вследствие $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \cong \frac{1}{\lambda}$,

$$E^{(0)} : E^{(1)} : E^{(2)} = 1 : \frac{R}{\lambda} : \frac{R^2}{\lambda^2}, \quad H^{(1)} : H^{(2)} \cong \frac{R}{\lambda} : \frac{R^2}{\lambda^2};$$

при этом нужно заметить, что $E^{(2)} = H^{(2)}$ и $L^{(1)} \cong H^{(1)}$.

Мы видим, таким образом, что в случае гармонически колеблющегося осциллятора длина волны может употребляться как единица длины для определения относительной силы трех частичных полей, зависящих от ρ , $\dot{\rho}$ и $\ddot{\rho}$. Именно, для „малых“ расстояний, т. е. малых по сравнению с λ , первое поле самое сильное. Напротив, для „больших“ расстояний—опять-таки по сравнению с длиной волны—можно учитывать только поле $E^{(2)}$, $H^{(2)}$. Эти соотношения можно иллюстрировать тем фактом, что соседние молекулы твердого или жидкого тела сильно притягиваются друг к другу, тогда как на удаленные молекулы других тел они оказывают только световое воздействие. Силы первого рода—так называемые силы сцепления—обуславливаются полем $E^{(0)}$ или соответствующим „статическим“ полем электрических моментов второго и высших порядков. Напротив, силы второго рода соответствуют полю $E^{(2)}$, $H^{(2)}$ (напомним, что длина волны видимого света порядка 10^{-5} , т. е. в 1000 раз больше молекулярных расстояний, но все же очень мала по сравнению с обычными расстояниями между различными „макроскопическими“ телами).

Та часть пространства, в которой электромагнитное поле практически сводится к „световому полю“ $E^{(2)}$ и $H^{(2)}$, называется волновой зоной рассматриваемого осциллятора. Эта волновая зона начинается, следовательно, на известном расстоянии от осциллятора, достаточно большом по сравнению с длиной волны, и простирается до бесконечности. В непосредственной близости осциллятора господствует, напротив, „электростатическое поле“ $E^{(0)}$; это поле от конечной скорости распространения электромагнитных действий практически не зависит (т. е. оно остается без существенного изменения, если положить и $c = \infty$).

Представим себе теперь, что осциллятор находится в бесконечно удаленной точке P' . В этом случае можно, очевидно, рассматривать испущенные им шаровые волны в конечной пространственной области как плоские, а соответствующие радиусы—т. е. исходящие из P' световые лучи—как параллельные друг другу прямые, направление которых может быть определено постоянным единичным вектором \mathbf{n} , который заменяет теперь единичный вектор \mathbf{R}_0 .

При этом мы получаем

$$R = RR_0 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} = r\mathbf{n} - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} = r\mathbf{n} + \text{const.}$$

причем \mathbf{r} , как и прежде, означает радиус-вектор рассматриваемой точки P по отношению к лежащей на конечном расстоянии и точке O .

Общее выражение поляризованного потенциала (28) в случае гармонического осциллятора принимает вид

$$Z(\mathbf{r}, t) = \frac{p_0}{R} e^{i\omega(t-R/c)}. \quad (37)$$

Расстояние R входит в это выражение дважды: один раз в фазовый множитель и другой—в амплитуду. Что касается фазового множителя, то в рассматриваемом случае ($R \rightarrow \infty$) его можно представить в виде

$$\text{const. } e^{i\omega(t-rn/c)}.$$

Что же касается амплитуды, то ее можно рассматривать как практически постоянную величину, так как при конечном значении $\frac{P_0}{R}$ для какой-либо точки, например, для O , разность $\Delta \frac{P_0}{R}$ для двух различных, лежащих в конечной области точек будет бесконечно мала (вследствие $\Delta \frac{P_0}{R} = -\frac{P_0}{R^2} \Delta R$).

Формула (37) сводится, таким образом, к

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Z}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (37a)$$

где

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \quad (37b)$$

есть вектор, определяющий как длину, так и направление распространения волн. Постоянный вектор \mathbf{Z}_0 представляет собой (комплексную) амплитуду поляризационного потенциала.

Легко убедиться в том, что формула (37a) удовлетворяет дифференциальному уравнению (20). В нашем случае (соответствующем отсутствию электрических зарядов на конечном расстоянии) последнее сводится к соответствующему однородному уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = 0.$$

Полагая для краткости $e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = \Phi$, получаем, согласно (37a)

$$\nabla^2 \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 \nabla^2 \Phi = \mathbf{Z}_0 \text{div grad } \Phi.$$

или, так как

$$\text{grad } \Phi = \Phi \text{ grad } i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) = -i \mathbf{k} \Phi \text{ и } \text{div } \mathbf{k} \Phi = \mathbf{k} \text{ grad } \Phi,$$

$$\nabla^2 \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 (-ik)^2 \Phi = -k^2 \mathbf{Z}_0 \Phi = -k^2 \mathbf{Z}.$$

С другой стороны мы имеем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{c^2 \partial t^2} = \mathbf{Z}_0 \frac{(i\omega)^2}{c^2} \Phi = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{Z},$$

т. е. по (37b)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{Z}.$$

Из (37a) получаются следующие выражения для потенциалов A, φ и напряженностей H, E :

$$A = \frac{1}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = i \frac{\omega}{c} Z = ikZ,$$

$$\varphi = -\operatorname{div} Z = -Z_0 \operatorname{grad} \Phi = ikZ = nA,$$

$$H = \operatorname{rot} A = ik \operatorname{rot} (Z_0 \Phi) = ik \operatorname{grad} \Phi \times Z_0 = k \Phi \mathbf{k} \times Z_0,$$

$$E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = -i(kZ_0) \operatorname{grad} \Phi - (ik)^2 Z = -(kZ_0) \mathbf{k} \Phi + k^2 Z = -(\mathbf{k}Z) \mathbf{k} + k^2 Z,$$

т. е.:

$$E = k^2 \mathbf{n} \times (Z \times \mathbf{n}),$$

$$H = k^2 \mathbf{n} \times Z. \quad (37c)$$

Эти формулы показывают, что векторы E и H перпендикулярны к вектору \mathbf{n} , т. е. к направлению распространения волн; далее они взаимно перпендикулярны и численно одинаковы. Эти соотношения выражаются следующими, легко получающимися из (37c), равенствами [ср. формулу (32a)].

$$H = \mathbf{n} \times E; \quad E = H \times \mathbf{n}.$$

Мы видим также, что в рассматриваемом случае (бесконечно удаленный гармонический осциллятор, плоские волны) поля типа $E^{(0)}$ и $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ исчезают; электромагнитное поле сводится к характерному для волновой зоны типу $E^{(2)}$, $H^{(2)}$, причем амплитуда силовых колебаний не зависит от расстояния.

Эти результаты легко обобщаются на плоские волны произвольного вида (не обязательно периодические). Для негармонического бесконечно удаленного осциллятора выражение (37a) нужно заменить формулой

$$Z(\mathbf{r}, t) = Z \left(t - \frac{n\mathbf{r}}{c} \right), \quad (38)$$

где $Z(t')$ совершенно произвольная функция аргумента $t' = t - \frac{1}{c}(n\mathbf{r})$, т. е. эффективного времени, определяемая характером колебаний осциллятора.

Эта формула получается непосредственно из (28a) при $R \rightarrow \infty$ и представляет простейшее решение уравнения

$$\nabla^2 Z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = 0, \quad (38a)$$

не содержащее никаких ограничений относительно зависимости электромагнитного поля от времени.

Формулы (37c) показывают, что электрическое и магнитное поле плоских волн зависит лишь от проекции вектора Z на пло-

скость этих волн. Этот результат легко доказывается и для плоских волн самого общего вида, определяемых формулой (38). Поэтому можно без ущерба для общности положить $Z_n = 0$, т. е. считать поляризационный потенциал плоских волн перпендикулярным к направлению их распространения. Отсюда следует, что то же самое предположение можно сделать и относительно векторного потенциала \mathbf{A} , причем скалярный потенциал φ обращается в нуль. Соответственно этому электромагнитное поле плоских волн может быть вычислено по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (39)$$

которые в частном случае синусоидальных волн сводятся к

$$\mathbf{E} = -ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = -ik \times \mathbf{A}. \quad (39a)$$

§ 9. Строгое решение задачи об определении электромагнитного поля при заданном распределении зарядов и токов; принцип Гюйгенса. Мы вернемся теперь к более строгому и полному решению основных дифференциальных уравнений (16) и (17). При этом мы будем считать известным распределение зарядов и токов, т. е. величины ρ и \mathbf{j} внутри некоторого объема V для всех значений времени (от $t = -\infty$ до $t = +\infty$). Кроме того мы будем считать известными значения электрической и магнитной напряженности на поверхности S , ограничивающей V (также для всех значений времени). При таких условиях задача об определении электромагнитного поля в любой точке объема V и для любого момента времени допускает вполне определенное однозначное решение.

Для нахождения этого решения рассмотрим сначала частный случай уравнения

$$-\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4\pi\rho,$$

соответствующий гармонической зависимости ρ и φ от времени. Полагая

$$\rho = \rho_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t},$$

где ρ_0 и φ_0 — некоторые функции положения, получаем

$$\nabla^2 \varphi_0 + k^2 \varphi_0 = -4\pi\rho_0, \quad (40)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$.

Обозначим, далее, через ψ простейшее решение уравнения этого вида, соответствующее точечному гармонически колеблющемуся заряду, т. е. положим

$$\psi = \psi_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t}, \quad \psi_0(\mathbf{r}) = \frac{e^{\mp ikR}}{R} \quad (40a)$$

где R представляет собой расстояние от точки $P^*(\mathbf{r}^*)$, в которой сосредоточен заряд до данной точки $P(\mathbf{r})$; верхний знак соответствует „отстающему“, а нижний — „опережающему“ потенциалу.

Воспользуемся теперь формулой Грина (21), выведенной в § 6 предыдущей главы (сохраняя прежние обозначения и лишь прибавив индекс 0 к φ и ψ . В виду того что вне точки P^* , т. е. внутри объема V^* , функция ψ удовлетворяет однородному уравнению $\nabla^2 \psi_0 + k^2 \psi_0 = 0$, получаем, согласно (40):

$$\oint (\psi_0 \nabla_n \varphi_0 - \varphi_0 \nabla_n \psi_0) dS = \oint (\psi_0 \nabla_n \varphi_0 - \varphi_0 \nabla_n \psi_0) dS + 4\pi \int \psi_0 \rho dV^*.$$

Выбирая в качестве Σ поверхность шара с центром в P^* и стягивая этот шар к точке P^* , мы получаем слева, так же как и в случае $\psi_0 = \frac{1}{R}$, рассмотренном ранее (§ 6 предыдущей главы), $+4\pi\varphi^*$. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем

$$\varphi_0^* = \int \rho_0 \psi_0 dV + \frac{1}{4\pi} \oint (\psi_0 \nabla_n \varphi_0 - \varphi_0 \nabla_n \psi_0) dS. \quad (41)$$

С помощью тождества

$$\psi_0 \nabla \varphi_0 - \varphi_0 \nabla \psi_0 = \frac{1}{R} \nabla (\varphi_0 e^{\mp ikR}) - \varphi_0 e^{\mp ikR} \nabla \frac{1}{R} \pm \frac{2ik}{R} R_0 \varphi^{\mp ikR}$$

где $R_0 = \nabla R = R/R$ это равенство, по умножении на $e^{i\omega t}$, можно переписать в следующем виде:

$$\varphi^*(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t \mp R/c)}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \oint dS \left[\frac{1}{R} \nabla_n \varphi(\mathbf{r}', t \pm R/c) - \varphi(\mathbf{r}', t \mp R/c) \nabla_n \frac{1}{R} \pm \frac{2R_0}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{r}', t \pm R/c) \right] \quad (41a)$$

где $\rho(\mathbf{r}', t \mp R/c) = \rho_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t \pm \frac{R}{c}}$.

Полученная формула, не содержащая явным образом никаких указаний на гармонический характер зависимости входящих в нее величин от времени, должна оставаться справедливой для произвольной зависимости от времени как значений ρ внутри S , так и значений φ на поверхности S . Для доказательства этого положения необходимо лишь вспомнить, что любая функция от времени $f(t)$ может быть представлена с помощью ряда или интеграла Фурье в виде суммы гармонически колеблющихся членов. Таким образом, зная распределение зарядов внутри объема, ограниченного поверхностью S , и значения потенциала на самой поверхности, оказывается возможным с помощью формулы (41a) вычислить потенциал в любой внутренней точке. Формула (41) показывает, между прочим, что при этом можно с одинаковым успехом пользоваться как отстающим, так и опережающим потенциалом — если только мы не налагаем никаких условий на граничные значения φ . Обычно предполагается, что в весьма удаленных точках потенциал φ исчезает и что при конечных значениях времени t он при этом убывает обратно пропорционально квадрату расстояния R или еще быстрее. Это предположение соответствует

представлению о том, что от $t = -\infty$ и вплоть до некоторого момента $t = 0$ заряды, образующие рассматриваемую систему, если и не нейтрализовали друг друга полностью, то во всяком случае не создавали радиационного (светового) поля (т. е. либо оставались неподвижными, либо двигались стационарным образом). Тем самым неявно предполагается, что они являются источниками запаздывающего действия, и что, следовательно, отодвигая поверхность S в бесконечность, можно отбросить поверхностный интеграл и представить результирующий потенциал в обычном „отстающем“ виде

$$\varphi^*(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV',$$

ибо применение опережающего потенциала привело бы к противоречию, — так же как в первом из двух частных случаев, рассмотренных в конце § 5.

Особый интерес представляет собой тот случай, когда внутри поверхности S никаких зарядов нет (не было и не будет!), и когда, следовательно, электромагнитное поле внутри нее полностью определяется поверхностным интегралом в формуле (41a). Этот случай представляет собой обобщение того, который уже был рассмотрен нами в предыдущей главе для электростатического поля. При этом было показано, что неподвижные заряды, находящиеся вне поверхности S , эквивалентны в отношении поля, создаваемого ими внутри S , электрическому заряду, распределенному по самой поверхности S , вместе с некоторым двойным электрическим слоем [ср. формулу (21b) § 6 гл. IV]. Этот результат, как показывает формула (41a), остается справедливым и в общем случае зарядов, движущихся произвольным образом вне поверхности S .

Мы рассмотрим этот случай еще раз с помощью несколько другого метода, не связанного с разложением ρ и φ в ряды или интегралы Фурье, но также базирующегося на применении формулы Грина (21) IV главы.

Эта задача решается проще всего, если вспомогательную функцию ψ положить, также как и в электростатическом случае, равной

$$\psi = \frac{1}{R},$$

Однако при этом потенциал φ для каждой точки P мы будем брать не для того же мгновения t , для которого ищется его значение φ^* в P^* , но для соответствующего „эффективного“ мгновения

$$t' = t - R/c,$$

причем R означает расстояние PP^* . Таким образом мы будем представлять себе, в соответствии с принципом Гюйгенса для световых волн, что каждая точка электромагнитного поля P яв-

ляется как бы вторичным источником электромагнитных колебаний, которые распространяются от нее к рассматриваемой точке P^* со скоростью c .

Для сокращения мы положим

$$\varphi' = \varphi(\mathbf{r}, t').$$

Тогда формула Грина может быть записана следующим образом:

$$\oint \left(\frac{1}{R} \nabla_n \varphi' - \varphi' \nabla_n \frac{1}{R} \right) d\Sigma = \oint \left(\frac{1}{R} \nabla_n \varphi' - \varphi' \nabla_n \frac{1}{R} \right) dS - \int \frac{1}{R} \nabla^2 \varphi' dV^*. \quad (42)$$

Наряду с операцией ∇ , которая означает полное дифференцирование по аргументу \mathbf{r} , введем теперь соответствующую операцию ∇' , означающую дифференцирование по \mathbf{r} при постоянном t' . Следовательно,

$$\nabla \varphi' = \nabla' \varphi' + \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \nabla t' \quad (42a)$$

и

$$\nabla^2 \varphi' = \operatorname{div} \nabla \varphi' = \operatorname{div}' (\nabla \varphi') + \frac{\partial}{\partial t'} (\nabla \varphi') \nabla t',$$

т. е., по предыдущей формуле,

$$\nabla^2 \varphi' = \nabla'^2 \varphi' + \operatorname{div}' \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \nabla t' \right) + \frac{\partial}{\partial t'} \nabla' \varphi' \nabla t' + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t'^2} (\nabla t')^2.$$

Далее, принимая во внимание формулы

$$\begin{aligned} \nabla t' &= -\frac{1}{c} \nabla' R = -\frac{1}{c} \nabla R, \quad (\nabla R)^2 = 1, \\ \operatorname{div}' \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \nabla t' \right) &= \nabla' \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \cdot \nabla t' + \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \operatorname{div}' \nabla t' = \\ &= -\nabla' \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} \nabla R - \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} \operatorname{div} \nabla R \end{aligned}$$

и

$$\operatorname{div} \nabla R = \operatorname{div} \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{2}{R},$$

получаем:

$$\nabla^2 \varphi' = \nabla'^2 \varphi' - \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} - 2 \nabla' R \cdot \nabla' \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} + \frac{c^2 \varphi'}{c^2 \partial t'^2},$$

или, так как φ' удовлетворяет уравнению

$$\nabla'^2 \varphi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t'^2} = 0,$$

$$\nabla^2 \varphi' = 2 \left\{ -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} - \nabla' R \nabla' \frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} + \frac{\partial^2 \varphi'}{c^2 \partial t'^2} \right\}. \quad (42b)$$

Дифференцирование по t' можно очевидно заменить частным дифференцированием по R , причем

$$-\frac{\partial \varphi'}{c \partial t'} = \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \varphi'}{c^2 \partial t'^2} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial R^2}.$$

Мы введем далее полную производную по R , по следующей формуле:

$$\frac{d \varphi'}{dR} = \frac{\partial \varphi'}{\partial R} + \nabla' \varphi' \cdot \nabla' R. \quad (43)$$

$\frac{d \varphi'}{dR} dR$ означает изменение φ' на бесконечно малом отрезке dR прямой P^*P при неизменном значении времени t .

Теперь (42b) перепишем в виде

$$\nabla^2 \varphi' = 2 \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi'}{\partial R} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial R^2} + \nabla' \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \cdot \nabla' R \right\}.$$

Заменяя в (43), φ' на $\frac{\partial \varphi'}{\partial R}$, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial R^2} + \nabla' \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \cdot \nabla' R = \frac{d}{dR} \frac{\partial \varphi'}{\partial R}.$$

Имеем, следовательно,

$$\nabla^2 \varphi' = \frac{2}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \right). \quad (43a)$$

Далее, входящий в (42) объемный интеграл

$$\int \frac{1}{R} \nabla^2 \varphi' dV^* = 2 \int \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \right) dV^*$$

можно преобразовать в поверхностный интеграл по S и Σ . Полагая $dV^* = R^2 dR d\Omega$, где $d\Omega$ — бесконечно малый телесный угол (с вершиной в P^*), получим

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \right) dV^* &= \int d\Omega \int_{R_1}^{R_2} \frac{d}{dR} \left(R \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \right) dR = \\ &= \int d\Omega \left\{ \left(R \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \right)_2 - \left(R \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \right)_1 \right\}; \end{aligned}$$

при этом индексы 1 и 2 относятся к ограничивающим поверхностям Σ и S . Введем теперь соответствующие угловому элементу $d\Omega$ элементы поверхности dS и $d\Sigma$. Так как очевидно $\cos(nR_2) = (\nabla_n R)_2$ и $\cos(vR_1) = (\nabla_v R)_1$, то:

$$R_2^2 d\Omega = dS (\nabla_n R)_2; \quad R_1^2 d\Omega = d\Sigma (\nabla_v R)_1.$$

Таким образом

$$\int \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \right) dV^* = \oint \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \nabla_n R dS - \oint \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \nabla_v R d\Sigma,$$

и, следовательно, по (42):

$$\oint \left(\frac{1}{R} \nabla_{\nu} \varphi' - \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \nabla_{\nu} R - \varphi' \nabla_{\nu} \frac{1}{R} \right) d \Sigma = \oint \left(\frac{1}{R} \nabla_{\nu} \varphi' - \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \nabla_{\nu} R - \varphi' \nabla_{\nu} \frac{1}{R} \right) d S.$$

С помощью формулы (42а), принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \nabla t' = \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \nabla R$$

и

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi'}{\partial R} \nabla R - \varphi' \nabla \frac{1}{R} = - \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi'}{\partial R} - \frac{1}{R^2} \varphi' \right) \nabla R = - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\varphi'}{R} \right) \nabla R,$$

последнюю формулу можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \oint \left(\frac{1}{R} \nabla_{\nu} \varphi' - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\varphi'}{R} \right) \nabla_{\nu} R \right) d \Sigma &= \\ &= \oint \left(\frac{1}{R} \nabla_{\nu} \varphi' - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\varphi'}{R} \right) \nabla_{\nu} R \right) d S. \end{aligned} \quad (43b)$$

Представим себе теперь, что внутренняя поверхность Σ стягивается к точке P^* . При этом, точно так же, как и прежде, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint \frac{1}{R} \nabla_{\nu} \varphi' d \Sigma &= 0; \quad \lim \oint \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\varphi'}{R} \right) \nabla_{\nu} R d \Sigma = \\ &= -\varphi^* \oint \frac{\nabla_{\nu} R}{R^2} d \Sigma = -4\pi \varphi^*, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\varphi^* = \oint \frac{\nabla_{\nu} \varphi'}{4\pi R} d S - \oint \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\varphi'}{4\pi R} \right) \nabla_{\nu} R d S. \quad (44)$$

Эта формула и есть искомое обобщение формулы (21b) гл. IV; она представляет потенциал в точке P^* как сумму двух частей, первая из которых обуславливается поверхностным зарядом с зависящей от времени плотностью $\frac{\nabla_{\nu} \varphi'}{4\pi}$, тогда как вторая соответствует двойному слою. Легко далее видеть, что точно так же, как и в статическом случае, правая сторона (44) для точки P^* , лежащей вне S , исчезает.

При рассмотрении поля вне S , создаваемого внутренними зарядами, нужно при вычислении потенциала ввести еще охватывающую поверхность S' и Σ поверхность S' , которую можно затем удалить в бесконечность. Если при этом можно принять, что в бесконечно удаленных точках имеется только статическое поле (т. е. что осцилляторы, лежащие внутри S , начали колебаться

лишь за конечное время до t), то интеграл по S' исчезает, и получается снова формула (44), причем однако \mathbf{n} должно означать уже внутреннюю, а не внешнюю нормаль к S .

Соответствующим выбором вспомогательной функции ψ можно точно так же, как и в статическом случае, выразить потенциал φ^* или только через пограничные значения φ или только через пограничные значения $\nabla_n \varphi$. На этом вопросе мы здесь однако не будем останавливаться.

§ 10. Электромагнитное поле осцилляторов (мультиполей) высшего порядка. Полученные в § 7 результаты относительно электромагнитного поля колеблющегося диполя легко обобщаются на мультиполи более высокого порядка с переменными во времени моментами.

Мы рассмотрим прежде всего простейший случай чисто гармонических (синусоидальных) колебаний и представим себе вместо отдельных колеблющихся точечных зарядов непрерывное распределение электричества внутри очень малой пространственной области, которая может быть ограничена сферической поверхностью Q радиуса a . Мы примем, следовательно, что в каждой точке K этой области плотность заряда и тока может быть представлена в функции времени формулами:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t}; \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t}, \quad (45)$$

причем соответствующие „амплитуды“ ρ_0 и \mathbf{j}_0 суть заданные функции положения, связанные между собою по закону сохранения электричества уравнением $\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, т. е. в нашем случае

$$ik\rho_0 + \operatorname{div} \mathbf{j}_0 = 0. \quad (45a)$$

При этом

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\tau c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (45b)$$

означает уже введенный в § 8 параметр. Мы примем далее, что радиус шара a (т. е. линейные размеры нашей системы) мал по сравнению с длиной волны.

При этих предположениях скалярный потенциал S в какой-либо внешней точке P можно разложить в сходящийся ряд, который вполне аналогичен ряду (6)–(7), § 3, гл. IV и может рассматриваться как непосредственное его обобщение. По (26) и (45) этот потенциал выражается формулой

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho_0(\mathbf{r}')}{R} e^{i(\omega t - kR)} dV.$$

Полагая, соответственно (42),

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t}, \quad (46)$$

получим

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \int \rho_0(\mathbf{r}') \Psi dV', \quad (46a)$$

где

$$\Psi = \frac{e}{R}. \quad (34b)$$

Формула (46a) имеет тот же вид, что и обычная формула для скалярного потенциала статического распределения заряда с постоянной во времени объемной плотностью ρ_0 ; при этом обратный радиус заменяется более общей функцией Ψ (для бесконечно медленных колебаний, т. е. для $k=0$, Ψ сводится к $\frac{1}{R}$). Разлагая эту функцию для произвольной точки Q , лежащей внутри K , по степеням ее координат ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 относительно центра шара O , получим точно так же, как в § 3 гл. IV,

$$\varphi_0 = \varphi_0^{(0)} + \varphi_0^{(1)} + \varphi_0^{(2)} + \dots + \varphi_0^{(n)} + \dots, \quad (47)$$

где

$$\varphi_0^{(0)} = e' \psi; \quad \varphi_0^{(1)} = - \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} e_{0i}; \quad \varphi_0^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} e'_{0ik}, \dots \quad (47a)$$

При этом ψ представляет значение Ψ в точке O , т. е.

$$\psi = \frac{e^{-i\omega r}}{r}, \quad (47b)$$

тогда как величины

$$e'_0 = \int \rho_0 dV'; \quad e'_{0i} = \int \rho_0 \xi'_i dV'; \quad e'_{0ik} = \int \rho_0 \xi'_i \xi'_k dV', \dots \quad (47c)$$

могут быть определены как амплитуды электрических моментов рассматриваемой системы.

Общий член ряда (47) может также быть представлен в виде

$$\varphi_0^{(n)} = (-1)^n \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{e_0(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \frac{\partial^n \psi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \quad (48)$$

где

$$e_0(n_1, n_2, n_3) = \int \rho_0 \xi'_1{}^{n_1} \xi'_2{}^{n_2} \xi'_3{}^{n_3} dV'. \quad (48a)$$

Как частный случай из (48) получается выражение

$$\varphi_0^{(n)} = \frac{(-1)^n p_0^{(n)}}{n!} (\mathbf{a}_1 \nabla) (\mathbf{a}_2 \nabla) \dots (\mathbf{a}_n \nabla) \psi, \quad (48b)$$

которое представляет амплитуду потенциала мультиполя n -го порядка с неподвижными осями $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ и с гармонически колеблющимся моментом $p^{(n)} = p_i^{(n)} e^{i\omega t}$.¹ Нужно заметить, что

¹ За исключением случая $n=0$, так как суммарный заряд системы e'_0 должен, очевидно, оставаться постоянным.

векторы \mathbf{a}_i могут рассматриваться также как комплексные величины. Это однако имеет непосредственный физический смысл только в том случае, когда один из них, например \mathbf{a}_1 , является комплексным, тогда как остальные вещественны. При этом произведение $\mathbf{a}_1 e^{i\omega t}$ представляет эллиптическое колебание, получающееся в результате вращения „первой“ оси мультиполя в определенной плоскости. Если другие осевые векторы также комплексны, то (48b) распадается на сумму частей, соответствующих некоторому числу мультиполей, с вращающимися осями.

Функция $\psi e^{i\omega t} = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$ удовлетворяет уравнению
$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \tag{49}$$

Тому же самому уравнению (которое является простейшим обобщением уравнения Лапласа $\nabla^2 \frac{1}{R} = 0$) должны удовлетворять и производные $\frac{\partial^n \psi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}$ и, следовательно, потенциалы (48).

Повторным применением уравнения $\nabla^2 \psi = 0$, справедливого для статических полей ($k=0$) можно свести число входящих в (48) параметров к $(2n+1)$, и тем самым выражение (48) привести к виду (48b). При $k > 0$ такое приведение, вообще говоря, невозможно, за исключением простейшего случая $n=1$. Хотя и в этом случае можно сказать, что система электрических зарядов, заключенных внутри шаровой поверхности, эквивалентна в отношении внешнего поля некоторому числу мультиполей в центре шара, однако вообще должны существовать несколько мультиполей одного и того же порядка, которые при $n > 1$ не сводятся к одному мультиполю.

Указанное выше предположение о том, что радиус шара мал по сравнению с длиной волны, столь же существенно для сходимости ряда (47), как и предположение, что точка P лежит вне поверхности шара. Действительно, при разложении функции Ψ в (46a) по координатам ξ_1', ξ_2', ξ_3' получаются члены вида

$$\frac{e^{-kr}}{r} \cdot \frac{\xi_1'^{n_1} \xi_2'^{n_2} \xi_3'^{n_3}}{r^{n-p} \lambda^p} \quad (n_1 + n_2 + n_3 = n, p = 0, 1, \dots, n).$$

Отсюда следует, что для сходимости соответствующего ряда длина волны λ играет роль равноправную с r .

Потенциал n -го порядка $\varphi^{(n)} = \varphi_0^{(n)} e^{i\omega t}$ можно очевидно представить в следующем виде:

$$\varphi^{(n)} = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \sum_{p=0}^n \frac{K_n^{(p)}}{r^{n-p} \lambda^p}, \tag{49a}$$

где коэффициенты $K_n^{(p)}$ зависят только от направления радиуса-вектора \mathbf{r} ; $K_n^{(0)}$ означает при этом обычную шаровую функцию n -го порядка для определенного этим направлением угла. Действительно, соответствующий „нулевой“ член (49) должен совпадать с (8) гл. IV с точностью до „фазового множителя“ $e^{i(\omega t - kr)}$, который в статическом случае равен 1.

Вычислим еще подробно n -й член в (49а), так как на больших расстояниях в волновой зоне потенциал $\varphi^{(n)}$ должен практически сводиться к этому члену (все остальные убывают значительно быстрее с возрастанием расстояния).

Опуская при дифференцировании ψ в (48), все члены, пропорциональные второй и высшим степеням $\frac{1}{r}$, получим по (47b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \psi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} &\cong (-ik)^n \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^{n_1} \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \right)^{n_2} \left(\frac{\partial r}{\partial x_3} \right)^{n_3} = \\ &= (-2\pi i)^n \frac{e^{-ikr}}{r \lambda^n} \cdot \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3}, \end{aligned}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ означают направляющие косинусы радиуса-вектора \mathbf{r} ; следовательно

$$\varphi^{(n)} \cong \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \frac{(2\pi i)^n}{\lambda^n} \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = n} \frac{e_0(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3} \quad (49b)$$

При $n=1$ (гармонически колеблющийся диполь) это выражение тождественно с соответствующим (вторым) членом правой стороны формулы (29). Действительно, (49b) при этом переписывается в виде

$$\varphi^{(1)} \cong \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} ik (\mathbf{p}_0 \mathbf{r}_0),$$

где \mathbf{p}_0 означает вектор с составляющими $e_0(100)$, $e_0(010)$, $e_0(001)$, или, полагая $\omega t - kr = \omega t'$ и $ik \mathbf{p}_0 e^{i\omega t'} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{p}}'$:

$$\varphi^{(1)} = \frac{\dot{\mathbf{p}}' \mathbf{r}_0}{cr}.$$

Заметим, что рассмотренный „главный член“ потенциала (48b) простого мультиполя n -го порядка выражается формулой

$$\varphi^{(n)} = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \frac{(2\pi i)^n}{n! \lambda^n} (\mathbf{a}_1 \mathbf{r}_0) (\mathbf{a}_2 \mathbf{r}_0) \dots (\mathbf{a}_n \mathbf{r}_0) e_0^{(n)} \quad (49c)$$

Векторный потенциал нашей системы

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')}{R} e^{i(\omega t - kR)} dV' = e^{i\omega t} \int \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \Psi dV' = \mathbf{A}_0 e^{i\omega t}$$

может быть также разложен в ряд совершенно аналогично скалярному потенциалу

$$A_0 = A_0^{(0)} + A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \dots + A_0^{(n)} + \dots \quad (50)$$

с общим членом

$$A_0^{(n)} = (-1)^n \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = n} \frac{J_0(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \cdot \frac{\partial^n \psi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}, \quad (50a)$$

причем векторный параметр

$$J_0(n_1, n_2, n_3) = \int j_0 \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dV, \quad (50b)$$

который мы назовем „электрокинетическим моментом“ рассматриваемой системы, играет ту же роль для A , что и электростатические моменты $e_0(n_1, n_2, n_3)$ для φ .

Из соотношения (48a) следует (индекс 0 и штрихи мы в дальнейшем опускаем):

$$\begin{aligned} e(n_1, n_2, n_3) &= \int \rho \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dV = -\frac{1}{ik} \int \operatorname{div} j \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dV = \\ &= -\frac{1}{ik} \int \operatorname{div} (j \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}) dV + \frac{1}{ik} \int j \nabla (\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}) dV. \end{aligned}$$

Так как на поверхности шара, ограничивающей объем V , $j_n = 0$, и, следовательно,

$$\int \operatorname{div} (j \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}) dV = \oint j_n \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dS = 0,$$

то, в виду

$$j \nabla (\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3}) = n_1 j_1 \xi_1^{n_1-1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} + n_2 j_2 \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2-1} \xi_3^{n_3} + n_3 j_3 \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3-1},$$

мы имеем

$$e(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{ik} \left\{ n_1 J_1(n_1 - 1, n_2, n_3) + n_2 J_2(n_1, n_2 - 1, n_3) + n_3 J_3(n_1, n_2, n_3 - 1) \right\}. \quad (51)$$

Подставляя эти выражения в формулу (49a), получаем

$$\varphi^{(n)} \cong \frac{e^i (\omega t - kr)}{r} \frac{(2\pi i)^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \sum_{n'_1 + n'_2 + n'_3 = n-1} \frac{r_0 J(n'_1, n'_2, n'_3)}{n'_1! n'_2! n'_3!} \gamma_1^{n'_1} \gamma_2^{n'_2} \gamma_3^{n'_3}.$$

С другой стороны, (50a) имеет для в волновой зоны ($r \gg \lambda$) вид

$$A^{(n)} \cong \frac{e^i (\omega t - kr)}{r} \frac{(2\pi i)^n}{\lambda^n} \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = n} \frac{J(n_1, n_2, n_3)}{n_1! n_2! n_3!} \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3}.$$

Следовательно, для волновой зоны имеем $\varphi^{(n)} = r_0 \mathbf{A}^{(n-1)}$ и поэтому, так как всегда можно полагать $\varphi^{(0)} = 0$,¹

$$\varphi = r_0 \mathbf{A}. \quad (51a)$$

Эта связь между обоими потенциалами совпадает с соотношением, которое мы нашли в § 9 для электромагнитного поля бесконечно удаленного осциллятора. Нужно заметить, что оно выполняется вообще для всех плоских (также и не синусоидальных) электромагнитных волн и может быть сразу выведено из соответствующего общего выражения (38) для поляризационного потенциала. Из (51a) получаются далее известные соотношения между напряженностями поля в волновой зоне и единичным вектором \mathbf{r}_0 , определяющим направление распространения волн [ср. (32a)]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{r}_0.$$

При этом эффект продольной (т. е. параллельной \mathbf{r}) составляющей \mathbf{A} компенсируется скалярным потенциалом φ , так что без ущерба для общности можно не принимать во внимание φ и определять электромагнитное поле исходя из поперечной (т. е. перпендикулярной к \mathbf{r}) составляющей \mathbf{A} .

Вместо того чтобы рассматриваемую систему характеризовать электрической плотностью заряда ρ и плотностью тока \mathbf{j} , можно конечно ввести для этой цели электрическую поляризацию \mathbf{P} и, соответственно этому, поляризационный потенциал

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Z}_0 e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \int \mathbf{P}_0(\mathbf{r}') \psi' dV'$$

разложить в ряд того же типа, что и введенный выше ряд для векторного потенциала \mathbf{A} . При этом вместо электрокинетических моментов (50b) войдут соответствующие „поляризационные“ моменты.

Приведенные результаты обобщаются на случай произвольных, негармонических колебаний плотности заряда и тока (или поляризации) в рассматриваемой системе, если только эти колебания не слишком быстры, так что средняя или эффективная длина волны остается большой по сравнению с радиусом шара. Этот случай можно свести к предшествующему, разлагая ρ или \mathbf{j} (или \mathbf{P}) в функции времени в ряд или в интеграл Фурье. Результирующее электромагнитное поле при этом представляется в виде суммы (или интеграла) элементарных составных частей, вызываемых отдельными гармоническими составляющими ρ и \mathbf{j} .

§ 11. Эквивалентные магнитные системы. Магнитный осциллятор. В гл. IV мы видели, что постоянное во времени магнитное поле, создаваемое вне замкнутой поверхности S заключен-

¹ Если рассматриваемая система не нейтральна, т. е. $\varphi^{(0)}$ имеет отличное от нуля значение, то это последнее не должно зависеть от времени и поэтому для электрического поля в волновой зоне не играет роли.

пой в ней системой стационарных токов, может быть описано тем же способом, что и электростатическое поле, причем упомянутые токи заменяются фиктивными магнитными зарядами (или полюсами).¹ Легко теперь видеть, что аналогичный „метод замены“ возможен также и в общем случае произвольного внешнего электромагнитного поля. Именно, можно ввести вместо электрических токов фиктивные магнитные заряды, а вместо электрических зарядов — фиктивные магнитные токи, распределенные внутри шара так, чтобы во внешнем пространстве господствовало рассматриваемое поле. Выражаясь математически, это означает следующее.

Вместо того чтобы определять поле основными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где ρ и \mathbf{j} заданные функции \mathbf{r} и t , удовлетворяющие условию $\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, можно исходить из „сопряженных“ уравнений

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 4\pi\rho^*, \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -4\pi\mathbf{j}^*, \end{aligned} \right\} \quad (52a)$$

причем магнитные плотности заряда и тока ρ^* и \mathbf{j}^* должны быть выбраны соответствующим образом, соблюдая условие

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}^* = 0 \quad [\text{ср. (11), (11a), (11b), § 3}].$$

При этом нужно только предполагать, что рассматриваемая система нейтральна, т. е. что объемный интеграл $\int \rho^* dV$, распространенный по всему ограниченному S объему, исчезает (точно так же, как $\int \rho^* dV = 0$). Вне S как ρ и \mathbf{j} , так ρ^* и \mathbf{j}^* , должны, конечно, равняться нулю. Сопоставление заданным функциям ρ и \mathbf{j} функций ρ^* и \mathbf{j}^* неоднозначно, что видно уже из того, что первые могут быть заменены определенным распределением зарядов и токов на поверхности S .

Посредством подстановок

$$\mathbf{E} = -\mathbf{H}^*, \quad \mathbf{H} = \mathbf{E}^* \quad (52b)$$

¹ Поверхность S должна быть односвязной, т. е. например, не быть кольцевой, чтобы магнитные силовые линии не могли замыкаться вне S .

из (52а) получаются уравнения

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}^* &= 4\pi\rho, \operatorname{rot} \mathbf{H}^* - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}^*, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}^* &= 0, \operatorname{rot} \mathbf{E}^* + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial t} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (52c)$$

формально совпадающие с первоначальными уравнениями (52). Соответственно этому они могут быть решены тем же способом, а именно, введением потенциалов φ^* , \mathbf{A}^* или поляризационного потенциала \mathbf{Z}^* и соответствующего вектора поляризации \mathbf{P}^* связанного с ρ^* и \mathbf{j}^* соотношениями

$$\rho^* = -\operatorname{div} \mathbf{P}^*; \quad \mathbf{j}^* = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial t}, \quad (53)$$

и через который \mathbf{Z}^* определяется уравнением

$$-\nabla^2 \mathbf{Z}^* + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^*}{\partial t^2} = 4\pi \mathbf{P}^*. \quad (53a)$$

Если потенциал \mathbf{Z} известен, то \mathbf{E} и \mathbf{H} могут быть вычислены по формулам

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi^* - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}^*$$

и

$$\varphi^* = -\operatorname{div} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^*}{\partial t},$$

т. е.

$$\mathbf{E}^* = \nabla \operatorname{div} \mathbf{Z}^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^*}{\partial t^2}, \quad \mathbf{H}^* = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^*}{\partial t}. \quad (53b)$$

Вектор \mathbf{Z}^* есть не что иное, как магнитный поляризационный потенциал, уже введенный нами в § 4; \mathbf{P}^* соответствует нашему прежнему \mathbf{M} . Смысл вышеприведенных формул заключается в том, что действительное распределение плотностей электрического заряда и тока внутри S может быть заменено фиктивным распределением бесконечно малых магнитов с переменными во времени моментами, результирующий момент которых, отнесенный к единице объема, равен \mathbf{P}^* . Это представление для многих целей удобно и позволяет вычислять совсем просто электромагнитное поле сравнительно сложной системы.

Представим себе, например, элементарный ток переменной со временем силы. Размеры контура тока (σ) должны при этом быть малы не только по сравнению с расстоянием до точки \mathbf{P} , но и по сравнению с длиной волны, которая соответствует частоте колебаний тока (или колебаний ориентации контура σ , если они имеют место). Такую систему называют магнитным осциллятором, так как в отношении внешних действий она, очевидно, должна быть тождественна с (фиктивным) магнитным

диполем, момент которого в каждое мгновение совпадает с магнитным моментом тока. Если, например, контур тока σ плоский и ограниченная им поверхность равна S , то, как известно, $m = iS$, где i означает силу тока в рассматриваемый момент.

Магнитный поляризационный потенциал рассматриваемого осциллятора должен, очевидно, зависеть от m точно так же, как электрический поляризационный потенциал зависит от электрического момента колеблющегося диполя; мы имеем, следовательно, по (28a)

$$Z^*(r, t) = \frac{m'}{R}, \quad (54)$$

где m' представляет значение m в эффективный момент $t' = t - R/c$. Отсюда для величин E^* и H^* получаются формулы, аналогичные выведенным нами в § 6 для электрического осциллятора. Чтобы получить соответствующие напряженности поля в рассматриваемом случае (магнитный осциллятор), мы должны согласно (52b) заменить в прежних формулах E ($=E^*$) на H , и H ($=H^*$) на $-E$ (и кроме того, само собой разумеется, p на m). Таким путем получим вместо (31) и (32) для электромагнитного поля в волновой зоне формулы

$$E = \frac{R_0 \times \ddot{m}'}{c^2 R}, \quad (54a)$$

$$H = \frac{R_0 \times (R_0 \times \ddot{m}')}{c^2 R}, \quad (54b)$$

откуда следует, что соотношения (32a), которые, как мы видели в § 10, являются характерными для волновой зоны, остаются справедливыми также и в рассматриваемом случае.

ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА (ЭЛЕКТРОНА)

§ 1. Электромагнитные потенциалы движущегося точечного заряда (электрона). Для вычисления по общим формулам (26) и (27) главы V электромагнитных потенциалов заданным образом движущегося электрона необходимо прежде всего составить себе определенное представление о структуре электрона, т. е. о пространственном распределении заряда, образующего этот электрон в покое состоянии. Далее необходимо найти выражение плотности заряда ρ и плотности тока \mathbf{j} для движущегося электрона через его покоящуюся плотность ρ_0 , а также скорость поступательного движения или угловую скорость. При этом электрон можно трактовать как твердое или как деформируемое тело; в последнем случае необходимо принять в рассмотрение и его деформацию.

Обычно электрон считают твердым шариком определенного радиуса a с зарядом e , равномерно распределенным по поверхности или в объеме этого шарика.

Подобному классическому представлению пространственно протяженного электрона могут быть противопоставлены серьезные физические и теоретико-познавательные возражения, которые мы рассмотрим подробно в дальнейшем (глава VII). В этой главе мы будем рассматривать электрон как точечный заряд, не касаясь упомянутых соображений, так же как мы это делали выше для случая статических полей. Мы поставим себе задачей найти обобщение простейшей формулы для скалярного потенциала $\varphi = \frac{e'}{R}$ покоящегося точечного заряда на случай заряда (постоянной величины), движущегося произвольным образом.

Далее мы заменим формулу для векторного потенциала движущегося заряда $\mathbf{A} = \frac{e'\mathbf{v}'}{cR}$, которая только приближенно верна, другой более полной и точной.

Для этой цели мы представим себе предварительно электрон как твердое образование весьма малых размеров, с объемом V_0 , в котором заряд электрона e' распределен равномерно с покоящейся плотностью $\rho = \frac{e'}{V_0}$. Интересующий нас случай точечного электрона получится отсюда в пределе при $V_0 \rightarrow 0$. Далее представим себе, что этот электрон движется

с поступательной скоростью v (без вращения), где v может меняться со временем.

В каждый данный момент движущийся электрон заполняет некоторый определенный объем $V = V_0$ (покоящийся объем), внутри которого плотность электрического заряда ρ равна ρ_0 , а вне которого $\rho = 0$. Плотность электрического тока \mathbf{j} , по своему определению (как пространственная плотность электрического количества движения) связана при этом с ρ соотношением

$$\mathbf{j} = \rho \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (1)$$

Для вычисления скалярного потенциала в некоторой точке P (с радиусом-вектором \mathbf{r}) мы воспользуемся первой из формул (27а) главы V и представлением сферы действия, сходящейся к точке P со скоростью c . Предположим, что эта сфера стянулась в точку P в момент t . Она настигнет электрон несколько ранее этого момента, в течение очень короткого времени τ' будет находиться с ним в соприкосновении или, точнее говоря, проходить сквозь электрон, и затем оставит его, сжимаясь к точке P . Исключением явится лишь тот случай, если электрон движется со скоростью $v = c$ к точке P . Этот случай мы исключим из рассмотрения. Для определенности мы положим далее, что

$$v < c, \quad (1a)$$

т. е., что электрон движется со скоростью, меньшей скорости света. При бесконечно малых размерах электрона должен быть бесконечно мал и эффективный интервал времени τ' , в течение которого из электрона высылается действие, доходящее до точки P в момент t . В течение этого интервала τ' можно считать скорость электрона постоянной ($= v'$).

Рассмотрим два момента времени, лежащие внутри интервала τ' :

$$t'_1 = t - \frac{R'_1}{c} \quad \text{и} \quad t'_2 = t - \frac{R'_2}{c} \quad (t'_2 > t'_1)$$

и сравним расстояние $R'_1 - R'_2$ между соответствующими положениями сфер действия в электроне с толщиной l пронизанного при этом слоя электрона. Обозначая радиальную скорость электрона (по направлению к точке P) через v'_R и принимая во внимание, что радиальная скорость элемента сферы S , пересекающей электрон, относительно электрона равна разности $c - v'_R$, мы получим равенство

$$\frac{R'_1 - R'_2}{c} = \frac{l}{c - v'_R} = t'_2 - t'_1,$$

откуда следует, что

$$dR = \frac{dl}{1 - \frac{v'_R}{c}}$$

и далее, по формуле (27а) глава V

$$\varphi = \frac{1}{1 - \frac{v'_R}{c}} \int \int \frac{\rho}{R} R^2 dl \cdot d\Omega = \frac{1}{R' \left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)} \int \rho \cdot dV_{\dots}$$

т. е.

$$\varphi = \frac{e'}{R' \left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)}. \quad (3)$$

Обусловленная движением электрона поправка к обычному Кулонову потенциалу покоящегося точечного заряда состоит, следовательно, из двух частей. Во-первых, одновременное, положение электрона заменяется его положением в предшествующий момент $t' = t - \frac{R'}{c}$. Во-вторых, вводится множитель $\frac{1}{1 - \frac{v'_R}{c}}$,

который может быть интерпретирован лишь в том случае, если считать электрон не точечным, а бесконечно малым. В последнем случае этот множитель есть относительное изменение эффективного объема или эффективного интервала времени, из которого или в течение которого от электрона исходит действие, достигающее точки P в момент t .

Векторный потенциал электрона мы получим при помощи соотношения (1), если заменим в формуле (3), заряд электрона его электрическим количеством движения $\frac{e v'}{c}$. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{e v'/c}{R' \left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)} \quad (4)$$

или

$$\mathbf{A} = \varphi \cdot \frac{\mathbf{v}'}{c}. \quad (4a)$$

Непосредственным дифференцированием выражений (3) и (4) легко убедиться, что они удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

а также дифференциальным уравнениям

$$-\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad -\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

во всех пространственных и временных точках за исключением той, в которой находится сам электрон и для которой $R' = 0$.¹

¹ Доказательство этого мы приведем ниже при новом выводе формул (3) и (4). Следует заметить, что эти формулы были впервые выведены Лиенаром и Вихертом указанным выше путем и носят название Лиенар-Вихертовских потенциалов

При этом эффективное расстояние $R' = R(t')$, как функция времени определяется равенством

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}, \quad (5)$$

в связи с рассматриваемым движением электрона, т. е. заданной зависимостью его радиус-вектора \mathbf{r}' от времени t' . По обычному определению

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'), \quad (5a)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, для которой определяется потенциал.

§ 2. Напряженность электрического и магнитного полей электрона. Прежде чем вычислять напряженности электрического и магнитного полей, соответствующие потенциалам (3) и (4), нам придется установить ряд вспомогательных формул, которые получаются при дифференцировании равенств (5) и (5a) по обем независимым переменным t и \mathbf{r} . Для сокращения мы введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{1 - \frac{v'_R}{c}} = \gamma, \quad (6)$$

или

$$R' \cdot \left(1 - \frac{v'_R}{c}\right) = R' - \frac{1}{c} R' \cdot \mathbf{v} = R^*, \quad (6a)$$

или

$$R' = \gamma \cdot R^*. \quad (6b)$$

Дифференцируя равенство (5a) по t' , имеем

$$\frac{dR'}{dt'} = - \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} = - \mathbf{v},$$

и так как

$$R' \frac{dR'}{dt'} = R' \frac{dR'}{dt'},$$

то, следовательно,

$$\frac{dR'}{dt} = - \frac{(R' \cdot \mathbf{v})}{R'} = - v'_R.$$

Дифференцируя равенство (5) по t и \mathbf{r} , мы получаем далее

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{dR'}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{v'_R}{c} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

и

$$\begin{aligned} \nabla t' &= - \frac{1}{c} \nabla R' = - \frac{1}{c} (\nabla R')_{t'=\text{const}} - \frac{1}{c} \frac{dR'}{dt'} \nabla t' = \\ &= - \frac{\mathbf{R}_0}{c} + \frac{v'_R}{c} \nabla t', \end{aligned}$$

где $\mathbf{R}_0 = \frac{\mathbf{R}'}{R'}$ — единичный вектор, направленный от электрона (в его эффективном положении) к точке P .

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma, \quad \nabla t' = -\frac{\gamma}{c} \mathbf{R}'_0, \quad (7)$$

и далее

$$\frac{\partial \mathbf{R}'}{\partial t} = -\gamma \mathbf{v}, \quad \nabla R' = \gamma \cdot \mathbf{R}'_0. \quad (7a)$$

Дифференцирование по \mathbf{r} при постоянном t' мы будем обозначать в дальнейшем знаком ∇' [$= (\nabla)_{t'=\text{const}}$].

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla \varphi = \nabla' \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \nabla t' = & -\frac{e'}{R'^{*2}} \left[\nabla' R' - \nabla' \left(\mathbf{R}' \cdot \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) \right] + \\ & + \frac{e}{R'^{*2}} \cdot \frac{\gamma \cdot \mathbf{R}'_0}{c} \left[-v'_R + \frac{v'^2}{c} - \frac{1}{c} \mathbf{R}' \cdot \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \right]. \end{aligned}$$

Применяя тождества $\nabla' \mathbf{R}' = \mathbf{R}'_0$, $\nabla' (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}') = \mathbf{v}'$ и обозначая ускорение электрона $\frac{d\mathbf{v}'}{dt'}$ через \mathbf{w}' , мы можем переписать предыдущую формулу в виде

$$\nabla \varphi = -\frac{e'}{R'^{*2}} \left\{ \mathbf{R}'_0 - \frac{\mathbf{v}'}{c} + \gamma \mathbf{R}'_0 \left[\frac{v'_R}{c} - \left(\frac{v'}{c} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \mathbf{R}' \cdot \mathbf{w}' \right] \right\} \quad (7b)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) = & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'} \frac{\mathbf{v}'}{c^2} + \frac{\varphi}{c^2} \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} = \\ = -\frac{e'}{R'^{*2}} \cdot \frac{\gamma}{c^2} \left[-v'_R + \frac{v'^2}{c} - \frac{1}{c} \mathbf{R}' \cdot \mathbf{w}' \right] + & \frac{e'}{c^2 R'^*} \gamma \mathbf{w}' \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot} \left(\varphi \cdot \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) = \text{rot}' \left(\varphi \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) + \nabla t' \times \frac{\partial}{\partial t'} \left(\varphi \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) = \\ = \nabla' \varphi \times \frac{\mathbf{v}'}{c} - \frac{\gamma}{c} \mathbf{R}'_0 \times \frac{\partial}{\partial t'} \left(\varphi \frac{\mathbf{v}'}{c} \right). \end{aligned}$$

Из этих формул мы получаем для $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, заменяя $\frac{1}{R'^*}$ через $\frac{\gamma}{R'}$, следующие выражения:

$$\mathbf{E} = \frac{e'}{R'^2} \gamma^3 \left(\mathbf{R}'_0 - \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) \cdot \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{w}'}{c^2} \right) - \frac{e' \mathbf{w}'}{c^2 R'} \gamma^2, \quad (8)$$

$$\mathbf{H} = \frac{e'}{R'^2} \gamma^3 \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{R}'_0 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{w}'}{c^2} \right) + \frac{e'}{c^2 R'} \mathbf{w}' \times \mathbf{R}'_0 \gamma^2. \quad (9)$$

Магнитная и электрическая напряженности оказываются, таким образом, связанными между собой простым соотношением

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}'_0 \times \mathbf{E}. \quad (9a)$$

Следует заметить, что это соотношение совпадает с одним из соотношений (32a) главы V. Оно показывает, что магнитная напряженность всегда направлена перпендикулярно к радиус-вектору, проведенному из эффективного местонахождения электрона в точку P , и по величине никогда не превосходит напряженности электрического поля. Второе из упомянутых соотношений ($\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)} \times \mathbf{R}'_0$) выполняется однако только в волновой зоне, т. е. для тех слагающих обоих полей, которые пропорциональны $\frac{1}{R'}$. Эти слагающие (8) и (9) равны

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{e'}{c^2 R'} \gamma^2 \left\{ \gamma \left(\mathbf{R}'_0 - \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) \left(\mathbf{R}'_0 \cdot \mathbf{w}' \right) - \mathbf{w}' \right\} \quad (10)$$

и

$$\mathbf{H}^{(2)} = \frac{e'}{c^2 R'} \gamma^2 \left\{ \gamma \left(\frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{R}'_0 \right) \left(\mathbf{R}'_0 \cdot \mathbf{w}' \right) + \mathbf{w}' \times \mathbf{R}'_0 \right\}. \quad (10a)$$

Умножая $\mathbf{H}^{(2)}$ векторно на \mathbf{R}'_0 , мы получим

$$\mathbf{H}^{(2)} \times \mathbf{R}'_0 = \frac{e'}{c^2 R'} \gamma^2 \left\{ \gamma \left(\mathbf{R}'_0 \frac{v'_R}{c} - \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) \left(\mathbf{R}'_0 \cdot \mathbf{w}' \right) + \mathbf{R}'_0 \left(\mathbf{R}'_0 \cdot \mathbf{w}' \right) - \mathbf{w}' \right\}.$$

В виду тождества

$$\gamma \mathbf{R}'_0 \frac{v'_R}{c} = \gamma \left(\mathbf{R}'_0 \frac{v'_R}{c} - \mathbf{R}'_0 \right) + \gamma \mathbf{R}'_0 = -\mathbf{R}'_0 + \gamma \mathbf{R}'_0,$$

выражение, стоящее в фигурных скобках, может быть представлено в виде

$$\gamma \left(\mathbf{R}'_0 - \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) \cdot \left(\mathbf{R}'_0 \cdot \mathbf{w}' \right) - \mathbf{w}',$$

т. е. совпадает с соответственным выражением в (10).

В этом случае выполняются оба равенства

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}^{(2)} &= \mathbf{R}'_0 \times \mathbf{E}^{(2)}, \\ \mathbf{E}^{(2)} &= \mathbf{H}^{(2)} \times \mathbf{R}'_0, \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

которые характерны для электромагнитного поля в волновой зоне.

Представим себе, что рассматриваемый электрон совершает правильные или неправильные колебания малой амплитуды около некоторого определенного среднего положения P' . Поместим в эту точку неподвижный заряд противоположного знака $-e'$. Мы получим таким образом элементарный осциллятор, поле

которого мы уже рассмотрели в § 6 предыдущей главы. В этом случае формулы (10) и (10а) очевидно должны совпадать с предыдущими формулами (31) и (32), что, как не трудно видеть, фактически выполняется. Именно, вследствие предполагаемой малости колебаний можно пренебречь величиной $\frac{v'}{c}$ (или $\frac{v'_R}{c}$) и положить $R' = R = P'P$ ($= \text{const}$). Тогда формулы (10) и (10а) примут вид

$$E^{(2)} = \frac{e'}{c^2 R} \left\{ R_0 (w' R_0) - w' \right\} = \frac{e'}{c^2 R} R_0 \times (R_0 \times w') \quad (11)$$

и

$$H^{(2)} = \frac{e'}{c^2 R} w' \times R_0. \quad (11a)$$

Эти выражения идентичны с (31) и (32) главы V, если принять во внимание, что в рассматриваемом случае $\ddot{p}' = e' w'_0$.

Формулы (11) и (11а) соответствуют крайнему случаю, когда скорость электрона мала сравнительно с его ускорением. Общие формулы (8) и (9) получают очень простой вид и в противоположном крайнем случае, когда ускорением электрона можно пренебречь по сравнению с его скоростью, т. е. если электрон движется (практически) прямолинейно и равномерно.

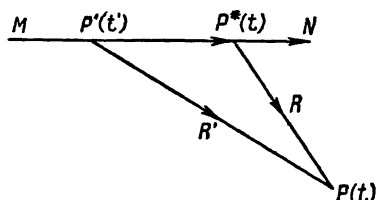


Рис. 32.

Изобразим путь электрона прямой MN (рис. 32). Его эффективное положение в момент $t' = t - \frac{R'}{c}$ будет P' . За время, в которое его действие, исходящее из точки P' , пройдет путь $P'P$ до точки P , сам электрон успеет переместиться из точки P' в точку P^* . Точка P^* представляет его положение в момент t . Из равенства $P'P^* = P'P - P^*P$, т. е.

$$v' (t - t') = R' - R,$$

в связи с $t - t' = \frac{R'}{c}$, получается

$$R = R' - \frac{v'}{c} \cdot R' = R' \left(R'_0 - \frac{v'}{c} \right). \quad (12)$$

Встречающийся в формуле (8) вектор $R'_0 - \frac{v'}{c}$ равен, следовательно, $\frac{R}{R'}$. Заменяя $\frac{\gamma}{R'}$ через $\frac{1}{R^*}$ и вводя для сокращения обозначение

$$\frac{v'}{c} = \beta', \quad (12a)$$

мы получим

$$\mathbf{E} = e' (1 - \beta'^2) \frac{\mathbf{R}}{R'^3}. \quad (13)$$

Из формулы (12) вытекает далее соотношение $\mathbf{v}' \times \mathbf{R}'_0 = \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{R}'}{R'} = \frac{1}{R'} \mathbf{v}' \times \left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{v}'}{c} \mathbf{R}' \right) = \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{R}}{R'}$. Подставляя его в формулу (9), мы получим

$$\mathbf{H} = e' (1 - \beta'^2) \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{R}}{cR'^3}. \quad (13a)$$

Весьма замечательным представляется тот факт, что в этих формулах вместо эффективного радиуса-вектора \mathbf{R}' стоит „мгновенный“ \mathbf{R} . Это означает, что электрическое и магнитное поле по виду своих силовых линий совершенно такое же, как если бы электромагнитное дальное действие происходило моментально. Так, например, электрические силовые линии являются прямыми, исходящими из P^* , также как и в случае заряда, покоящегося в точке P^* .

Густота этих линий, однако, в противоположность статическому случаю, не одинакова по всем направлениям и симметрична лишь относительно пути электрона MN .

Из (13) и (13a) мы получаем соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{E}, \quad (13b)$$

справедливее только при постоянной скорости электрона, в противоположность соотношению (9a), которые является универсальным. Само собою разумеется, что формулы от (13) до (13b) остаются приближенно правильными и в том случае, если скорость меняется сравнительно медленно (квази-стационарное движение).

§ 3. Специальное рассмотрение прямолинейного и равномерного движения электрона. Представим себе, что некоторый второй электрон с зарядом e движется с постоянной скоростью \mathbf{v} и в момент t находится в точке P .

Сила, действующая на этот электрон со стороны первого (e') определяется общей формулой

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right).$$

В нашем случае ($\mathbf{v}' = \text{const}$), подставляя сюда выражения (13) и (13a) или (13b), мы получаем

$$\mathbf{F} = \frac{e'e}{R'^3} (1 - \beta'^2) \left\{ \mathbf{R} \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{v}'}{c} \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right\} \quad (14)$$

[ср. приближенное выражение (23b) главы III для электромагнитной силы $\mathbf{f} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$].

Величины, характеризующие оба электрона, входят в эту формулу несимметрично, и поэтому о равенстве действия и противодействия при любых \mathbf{v} и \mathbf{v}' не может быть и речи. Исключение составляет случай, когда оба электрона движутся с одинаковыми скоростями, т. е. покоятся друг относительно друга. В этом случае ($\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, $\beta = \beta'$) формула (14) сводится к виду

$$\mathbf{F} = \frac{ee'}{R^{*3}}(1 - \beta^2) \left\{ \mathbf{R} (1 - \beta^2) + \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right\}. \quad (14a)$$

Величина R^* одинакова для обоих электронов; следовательно, сила \mathbf{F}' , действующая на первый электрон со стороны второго, получается из (14a) простой перестановкой знака у вектора \mathbf{R} , так что $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$.

Исходя из формулы (12) и принимая во внимание (6a), мы можем формулу (14a) несколько преобразовать.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(1 - \beta^2) + \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\mathbf{R} \frac{\mathbf{v}}{c} \right) &= \mathbf{R}'(1 - \beta'^2) - \\ - \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \left[R'(1 - \beta'^2) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}'}{c} + \frac{v'^2}{c^2} R' \right] &= \mathbf{R}'(1 - \beta'^2) - \frac{\mathbf{v}}{c} R^*. \end{aligned}$$

С другой стороны, по (7b) (при $\mathbf{w}' = 0$)

$$\nabla R^* = \mathbf{R}'_0 - \frac{\mathbf{v}'}{c} + \gamma \mathbf{R}'_0 \left(\frac{v'_R}{c} - \frac{v'^2}{c^2} \right)$$

и, следовательно, имея в виду, что $\gamma \cdot \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}'_0 = \mathbf{R}'$,

$$R^* \nabla R^* = - \frac{\mathbf{v}'}{c} R^* + \mathbf{R}' \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} \right).$$

Таким образом, при $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$

$$\mathbf{R}(1 - \beta^2) + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = R^* \nabla R^*,$$

так что формула (14a) приводится к следующему окончательному виду

$$\mathbf{F} = \frac{ee'(1 - \beta^2)}{R^{*2}} \nabla R^*,$$

или

$$\mathbf{F} = -e \nabla \psi, \quad (15)$$

где

$$\psi = \frac{e'(1 - \beta^2)}{R^*} = (1 - \beta^2) \varphi. \quad (15a)$$

Этот результат можно получить более простым образом, если с самого начала принять во внимание, что оба электрона движутся с одинаковой постоянной скоростью. В этом случае потенциалы φ и \mathbf{A} , определяющие взаимодействие заря-

дов e и e' не должны меняться со временем. Это следует из того, что эти потенциалы зависят только от скорости \mathbf{v} и взаимного положения обоих электронов (в один и тот же момент), т. е. от радиуса-вектора \mathbf{R} . В нашем же случае \mathbf{v} и \mathbf{R} постоянны.

Мы имеем, таким образом $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ и $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$. Символ $\frac{d}{dt}$ обозначает полную производную по времени, т. е. скорость изменения данной величины в точке, движущейся совместно с зарядом e . Обозначая символом $\frac{\partial}{\partial t}$ производную по времени в данной неподвижной точке, мы имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi \quad (16)$$

и аналогично

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}. \quad (16a)$$

Мы получаем, следовательно,

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla \right) \mathbf{A},$$

или, в виду соотношения

$$\mathbf{A} = \varphi \cdot \frac{\mathbf{v}}{c},$$

$$-\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla\varphi \right).$$

Таким образом

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla\varphi \right).$$

Так как далее

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla\varphi \times \frac{\mathbf{v}}{c},$$

то мы получаем для силы выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) &= e \left[-\nabla\varphi + \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla\varphi \right) + \right. \\ &\left. + \nabla\varphi \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 - \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\nabla\varphi \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right] = e \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \nabla\varphi. \end{aligned}$$

т. е. прежний результат.

Этот результат очевидно может быть обобщен на случай любой системы электронов, движущихся с общей постоянной поступательной скоростью \mathbf{v} . Взаимодействие электронов имеет при этом совершенно такой же характер, как и при абсолютном покое ($v=0$). Электрическая и электромагнитная силы объеди-

няются в одну общую силу F , которая может быть интерпретирована как обычная электрическая сила, соответствующая скалярному потенциалу ψ .

Этот потенциал называют обычно конвективным. Соответственно этому и силовое поле $-\nabla\psi$ называют конвективным силовым полем.

Линии вектора $-\nabla\psi$, в противоположность электрическим силовым линиям, не являются уже прямыми, так как поверхности уровня конвективного потенциала, т. е. поверхности, на которых $\psi = \text{const}$, имеют не сферическую, а сфероидальную форму.

Для того чтобы уяснить себе эту картину, введем прямоугольные координаты X_1, X_2, X_3 с началом в точке P^* (в которой находится электрон e' в данный момент). Ось X_1 этой системы направим вдоль прямой MN , т. е. по направлению движения.

Обозначим компоненты векторов R и R' , т. е. координаты точки P относительно P^* и P' , буквами x_k и x'_k ($k=1, 2, 3$).

Тогда векторное равенство (12)

$$R = R' - \frac{v}{c} R'$$

распадается на три скалярных

$$x_1 = x'_1 - \frac{v}{c} R'; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3. \quad (17)$$

В связи с формулой $R' = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$ отсюда следует

$$(x'_1 - x_1)^2 = \beta^2 \cdot (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

или

$$x_1'^2 (1 - \beta^2) - 2x_1 x'_1 + [x_1^2 - \beta^2 (x_2^2 + x_3^2)] = 0.$$

Решая это уравнение относительно x'_1 и принимая во внимание условие $x'_1 - x_1 = \beta R' > 0$, мы получим

$$x'_1 = \frac{x_1 + \beta \sqrt{x_1^2 + (1 - \beta^2)(x_2^2 + x_3^2)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (17a)$$

Далее, мы имеем

$$R^* = R' - \left(\frac{R' \cdot v}{c} \right) = R' - \beta x'_1$$

или, по (17a),

$$R^* = \frac{x'_1 - x_1}{\beta} - \beta x'_1 = \frac{x'_1 (1 - \beta^2) - x_1}{\beta},$$

так что, согласно (17),

$$R^* = \sqrt{x_1^2 + (1 - \beta^2)(x_2^2 + x_3^2)}. \quad (17b)$$

Мы видим отсюда, что поверхности $\psi = \text{const}$, так же как и поверхности $\varphi = \text{const}$ и $\mathbf{A} = \text{const}$, определяются уравнением

$$x_1^2 + (1 - \beta^2)(x_2^2 + x_3^2) = \text{const} = R^{*2}$$

или

$$\frac{x_1^2}{R^{*2}} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{R^*}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2} + \frac{x_3^2}{\left(\frac{R^*}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2} = 1.$$

Подобные поверхности суть сплюснутые эллипсоиды вращения, получающиеся из шара продольным сжатием в отношении

$$\sqrt{1-\beta^2}:1$$

(рис. 33). Соответственно этому линии эффективного силового поля ($-\nabla\psi$), так же как и электрические и магнитные силовые линии сгущаются вблизи экваториальной плоскости, в то время как сила поля в направлении, близком к направлению движения уменьшается.

Это сплющивание или „сжатие“ электромагнитного поля в направлении движения усиливается с увеличением скорости сначала медленно, а затем, по мере приближения к критической скорости c , очень быстро. В предельном случае, при $v = c$, поле электрона должно было бы целиком стянуться в экваториальную плоскость. Подобное обстоятельство мы должны рассматривать как доказательство того, что критическая скорость (скорость света) не может быть достигнута никогда. При $v > c$, т. е. $\beta > 1$, величина R^* , на основании (17b), вне конуса

$$x^2_1 = (\beta^2 - 1) \cdot (x^2_2 + x^2_3) \tag{17c}$$

становится мнимой, а вместе с нею становятся мнимыми потенциалы и напряженности поля.

Случай скоростей, превышающих скорость света, был нами исключен с самого начала [см. (1a)]. Легко убедиться, что при $v > c$ получаются те же самые формулы, что и при $v < c$. Мы должны различать при этом два случая, когда электрон пересекает сходящуюся к точке P сферу действия изнутри наружу или снаружи внутрь.¹

В первом случае ($v_R < 0$) все выводы § 1 остаются неизменными; во втором случае ($v_R > 0$) нам придется заменить в формуле (2) $c - v_R$ на $v_R - c$ и во всех последующих формулах, со-

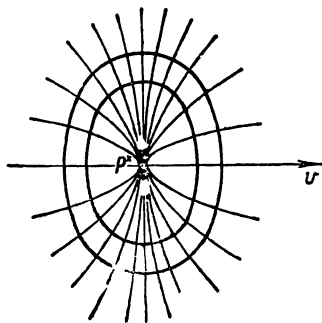


Рис. 33.

¹ Вообще говоря, оба случая могут иметь место одновременно. Действительно, если электрон движется с постоянной скоростью, превышающей скорость света, то он может сначала войти в сферу действия, а затем из нее выйти.

державших это выражение, переменить знак. Для электрона, движущегося равномерно и прямолинейно, при этом изменится знак у R^* (т. е. у φ и A), формулы же от (16) до (17с) останутся неизменными. Мы видим, что в обоих случаях потенциалы и напряженности поля внутри конуса (17с) действительно получают мнимые значения. Мы в праве отсюда сделать заключение, что движение со скоростью, большей скорости света, физически невозможно.

§ 4. Электроны как особенные точки в пространственно-временном континууме. Новый вывод выражений для электромагнитных потенциалов движущегося точечного заряда. Формулы (3) и (4) для потенциалов движущегося точечного заряда были нами выведены на основании формул (26) и (27) главы V, которые относились, строго говоря, к случаю покоящегося заряда переменной величины. Мы приведем другой более прямой вывод предыдущих формул с помощью метода интегрирования, который является обобщением метода, примененного нами при решении Лапласова уравнения для покоящегося точечного заряда.¹

Введем прямоугольную систему координат с началом в произвольной неподвижной точке O . Координаты точки P в этой системе обозначим через x_1, x_2, x_3 . Координаты электрона e' в некоторый произвольный момент t' (необязательно совпадающий с эффективным моментом) обозначим через x_1', x_2', x_3' .

Точку пространства и момент, в который она рассматривается, мы объединим вместе в пространственно-временную точку четырехмерного пространственно-временного континуума. Вместо точки $P(x_1, x_2, x_3)$ в момент t мы будем говорить о точке $P(x_1, x_2, x_3, t)$; аналогично этому положение электрона в момент t' мы будем трактовать как „источник“ $P'(x_1', x_2', x_3', t)$.

Электрический потенциал ψ и компоненты векторного потенциала A_1, A_2 и A_3 удовлетворяют во всем пространственно-временном континууме, за исключением источника P' , дифференциальному уравнению вида

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

которое в частном случае покоящегося точечного заряда приводится к уравнению Лапласа $\nabla^2 \psi = 0$. Вводя обозначение

$$x_4 = ict \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (18)$$

(и соответственно $x_4' = ict'$), мы преобразуем наше основное уравнение для потенциалов к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_4^2} = 0. \quad (18a)$$

¹ Этот вывод принадлежит Герглотцу.

Последнее уравнение совершенно аналогично Лапласову, но содержит симметричным образом не 3, а 4 переменные величины (пространственно-временные координаты x_1, x_2, x_3, x_4).

Мы должны далее принять во внимание, что потенциалы φ и A связаны друг с другом соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

которое в координатах имеет вид

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Последнее уравнение, если ввести еще обозначение

$$A_4 = i\varphi, \tag{19}$$

может быть переписано в более симметричной форме

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0. \tag{19a}$$

Мы видим, что в формулы (18) и (19a) вместо трех пространственных координат и времени входят четыре равноценные „координаты“, причем векторный потенциал \mathbf{A} и скалярный потенциал φ заменяются четырьмя компонентами четырехмерного векторного потенциала ($\psi = A_1, A_2, A_3, A_4$).

Уравнения движения электрона (предполагающиеся известными) мы запишем в виде

$$x'_1 = f_1(t'), \quad x'_2 = f_2(t'), \quad x'_3 = f_3(t'), \quad x'_4 = ict'. \tag{20}$$

Эти уравнения можно трактовать как параметрические уравнения некоторой линии в четырехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3, x_4) , а именно линии, являющейся „геометрическим местом“ источников электромагнитного поля, создаваемого нашим электроном. Мы назовем эту линию особенной (сингулярной) линией для функций A_k ($k = 1, \dots, 4$).

Рассмотрим сначала чисто фиктивную задачу. Будем искать функцию, симметричную относительно всех четырех координат x_1, x_2, x_3, x_4 , удовлетворяющую уравнению (18a), но имеющую только одну особенную точку P' (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4). С чисто формальной точки зрения эта задача вполне аналогична интегрированию обычного трехмерного Лапласова дифференциального уравнения для покоящегося электрона. Мы введем вместо обычного трехмерного расстояния

$$R = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$$

так называемое четырехмерное расстояние

$$S = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2} = \sqrt{R^2 - c^2(t - t')^2} \quad (21)$$

и будем считать ψ функцией от S .

Дифференцируя, мы получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{d\psi}{dS} \frac{\partial S}{\partial x_k} = \frac{d\psi}{dS} \frac{x_k - x'_k}{S},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} = \frac{d^2 \psi}{dS^2} \frac{(x_k - x'_k)^2}{S^2} + \frac{d\psi}{dS} \frac{S^2 - (x_k - x'_k)^2}{S^3},$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} = \frac{d^2 \psi}{dS^2} + \frac{3}{S} \frac{d\psi}{dS} = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi = \frac{\alpha}{S^2}. \quad (22)$$

Величина α есть произвольная константа интегрирования (вторую аддитивную константу интегрирования можно положить равной нулю).

С помощью этого „точечного“ решения уравнения (18а) мы попытаемся сконструировать такие функции A_k , которые удовлетворяли бы также и соотношению (19а). При этом мы отвлечемся от физического смысла этих функций и будем решать нашу задачу с чисто аналитической точки зрения.

Будем трактовать время t' (или t) не как чисто вещественную величину, а как комплексную переменную.

Предположим далее, что функции f_1 , f_2 и f_3 , которые мы сначала определили лишь для вещественных значений t' , аналитически продолжены на всю комплексную плоскость t' .

Проведем в нашей плоскости некоторую произвольную линию и объединим все отдельные точечные решения

$$dA_k = \frac{\alpha'_k dt'}{S^2},$$

соответствующие по уравнению (22) отдельным точкам этой линии (точнее говоря, отдельным бесконечно малым ее элементам dt') в „линейное“ решение

$$A_k = \int \frac{\alpha'_k dt'}{S^2}. \quad (22a)$$

Величины x'_k ($k = 1, \dots, 4$), входящие в S^2 , суть функции комплексного аргумента t' , определяемые равенствами (20) с помощью упомянутого аналитического продолжения. Коэффициенты α'_k , напротив, являются априори неопределенными функциями t' .

Мы должны выбрать эти функции и путь интегрирования таким образом, чтобы величины (22а), рассматриваемые как функции координат x_k ($k = 1, \dots, 4$), удовлетворяли соотношению (19а). Так как величины x_k входят в интеграл (22а) как параметры, то, на основании формулы (21):

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \int \alpha'_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{S^2} \right) dt' = - \int \alpha'_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(\frac{1}{S^2} \right) dt',$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = - \int \sum_{k=1}^{k=4} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(\frac{1}{S^2} \right) \alpha'_k dt'.$$

Для того чтобы интеграл, стоящий справа, обращался в нуль тождественно, т. е. независимо от вида функций f_1, f_2, f_3 , очевидно, необходимо и достаточно, во-первых, чтобы коэффициенты α'_k имели вид

$$\alpha'_k = \alpha \frac{dx'_k}{dt'}, \tag{22b}$$

где α есть некоторая константа, и во-вторых, чтобы в качестве пути интегрирования была выбрана некоторая замкнутая кривая. При этом

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(\frac{1}{S^2} \right) \alpha'_k dt' = \alpha \sum_{k=1}^{k=4} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(\frac{1}{S^2} \right) dx'_k = \alpha \cdot d \left(\frac{1}{S^2} \right),$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = - \alpha \oint d \left(\frac{1}{S^2} \right) \equiv 0.$$

Соответственно этому для потенциалов A_k получаются следующие выражения

$$A_k = \alpha \oint \frac{(dx'_k/dt')}{S^2} dt' = \alpha \oint \frac{dx'_k}{S^2}. \tag{23}$$

Если внутри кривой интегрирования нет ни одного полюса подинтегральной функции, т. е. корня функции S^2 , то

$$\oint \frac{dx'_k}{S^2} = 0.$$

Мы получаем при этом тривиальное решение уравнений (18а) и (19а), именно $A_k = 0$. Напротив, если внутри кривой интегри-

рования лежит корень $t' = t'_0$ функции S^2 , то, по известной теореме Коши,¹

$$\oint \frac{\alpha'_k}{S^2} dt' = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{\alpha'_k}{S^2} \right)_{t'=t'_0} = 2\pi i \left(\frac{d\alpha'_k}{dt'} \right)_{t'=t'_0}. \quad (23a)$$

По формуле (21)

$$\frac{dS^2}{dt'} = 2 \left[R \frac{dR}{dt'} + c^2(t-t') \right] \text{ и } R_0 = \pm c(t-t'_0),$$

откуда получается

$$\oint \frac{\alpha'_k}{S^2} dt' = \pi i \left[\frac{\alpha'_k}{cR \left(\frac{dR}{cdt'} \pm 1 \right)} \right]_{t'=t'_0} \quad (23b)$$

где при обходе в положительном направлении верхний знак соответствует уравнению

$$R - c(t-t') = 0, \quad (23c)$$

а нижний — уравнению

$$R + c(t-t') = 0. \quad (23d)$$

Если электрон движется со скоростью, меньшей скорости света, то эти уравнения имеют только один вещественный корень. При этом вещественный корень уравнения (23c) совпадает с эффективным временем t' , входящим в выражение запаздывающего потенциала. Легко видеть, что при этом значении корня t'_0 , компоненты потенциала A_k принимают найденные нами выше значения (3) и (4) (формулы Лиенара-Вихерта). Мы имеем в этом случае

$$\frac{dR}{c \cdot dt'} = -\frac{v'_R}{c}$$

и, на основании (23) и (23b),

$$A_k = \alpha \pi i \frac{\frac{dx'_k}{dt'}}{cR \left(1 - \frac{v'_R}{c} \right)}, \quad (t' = t'_0)$$

¹ В этом случае мы можем стянуть путь интегрирования в бесконечно малый круг с центром в точке t'_0 . На этом круге следует принять во внимание лишь два первые члена разложения S^2 по степеням разности $t' - t'_0$. Так как при этом $S_0 = 0$, то мы имеем $S^2 = \left(\frac{dS^2}{dt'} \right)_0 \cdot (t' - t'_0)$, и следовательно

$$\oint \frac{\alpha'_k dt'}{S^2} = \left(\frac{\alpha'_k}{\frac{dS^2}{dt'}} \right)_0 \cdot \oint \frac{dt'}{t' - t'_0} = 2\pi i \left(\frac{\alpha'_k}{\frac{dS^2}{dt'}} \right)_0$$

т. е.

$$A = \alpha \pi i \frac{\frac{v'}{c}}{R \left(1 - \frac{vR'}{c}\right)}$$

и, согласно (19),

$$\varphi = \frac{\alpha \pi i}{R \left(1 - \frac{vR'}{c}\right)},$$

Эти выражения совпадают с формулами (4) и (3), если положить в них

$$\alpha = \frac{e'}{\pi i}. \tag{24}$$

В частном случае покоящегося или движущегося равномерно и прямолинейно электрона уравнение $S^2 = 0$ не имеет мнимых корней. В этом случае мы можем деформировать путь интегрирования в любую замкнутую или бесконечную линию, проходящую между обоими вещественными корнями $t' = t'_0$ и $t' = t''_0$ снизу вверх (рис. 34). Простейшей из этих линий является прямая, проходящая параллельно мнимой оси через точку $t' = t$. Выбирая эту прямую за путь интегрирования, мы получим, для покоящегося электрона ($R = \text{const}$)

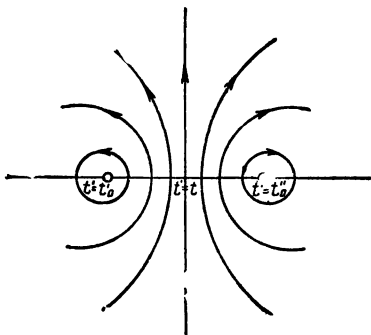


Рис. 34.

$$\varphi = \frac{A_4}{i} = -\frac{e'}{\pi} \int_{t'-t=-t_0}^{t'-t=t_0} \frac{ic \cdot dt'}{R^2 + (x'_4 - x_4)^2} = \frac{e'}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x'_4 - x_4)^2}{R^2 + (x'_4 - x_4)^2} = \frac{e'}{R},$$

т. е. известный Кулонов потенциал.

Если электрон движется в положительном направлении по оси X_1 со скоростью $v < c$, то, полагая

$$x'_1 = vt' = -i\beta x'_4, \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right), \quad x'_2 = x'_3 = 0 \text{ и } t = 0,$$

имеем

$$S^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2i\beta x_1 x'_4 + x_4^2 (1 - \beta^2) = \\ = (1 - \beta^2) \left(x'_4 + \frac{i\beta x_1}{1 - \beta^2}\right)^2 + \frac{x_1^2 + (1 - \beta^2)(x_2^2 + x_3^2)}{1 - \beta^2}.$$

Обозначая $x_1^2 + (1 - \beta^2)(x_2^2 + x_3^2)$ через R^{*2} , по (17b), и вводя вместо t' новую переменную

$$u = (1 - \beta^2) \cdot \left(x_4' + \frac{i\beta \cdot x_1}{1 - \beta^2} \right),$$

мы получим в согласии с предыдущими результатами

$$\varphi = \frac{e'}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{R^{*2} + u^2} = \frac{e'}{R^*}$$

и

$$\mathbf{A} = \varphi \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Следует отметить, что в этих случаях обычные запаздывающие потенциалы, соответствующие моменту $t' = t_0'$, совпадают с опережающими, которые получаются как отрицательный вычет по отношению к полюсу $t' = t_0'$.

В общем случае, когда электрон движется совершенно произвольным образом, опережающие потенциалы должны отличаться от запаздывающих, и мы их отбрасываем как физически бессмысленные. Мы могли бы ввести в рассмотрение еще ряд потенциалов, принадлежащих комплексным корням (23c) и (23d). Они будут зависеть от вида движения совершенно особым, сингулярным образом. Этим сингулярным потенциалам соответствует электрическое дальное действие, которое не является ни запаздывающим, ни опережающим, но которое, по всей вероятности, также не имеет физического смысла.

§ 5. Формальное сведение запаздывающих дальних действий к мгновенным. Формула (23) с значением α из (24) может быть преобразована с помощью тождества

$$\frac{1}{S^2} = \frac{1}{[R + c(t - t')][R - c(t - t')]} = \frac{1}{2R} \cdot \left[\frac{1}{R - c(t - t')} + \frac{1}{R + c(t - t')} \right]$$

к виду

$$A_k = \frac{e'}{2\pi i} \oint \frac{dx_k'}{R[R - c(t - t')]} + \frac{e'}{2\pi i} \oint \frac{dx_k'}{R[R + c(t - t')]} \quad (25)$$

Путь интегрирования (l') мы выберем таким образом, чтобы он содержал лишь один из корней уравнения $S^2 = 0$, именно то значение t_0' , которое соответствует запаздывающему потенциалу, и, кроме того, еще рассматриваемый нами момент $t' = t$, для которого мы вычисляем потенциал. Второй из интегралов формулы (25) при этом обращается в нуль, так как внутри нашего контура l' функция $\frac{1}{R[R + c(t - t_0)]}$ всюду регу-

лярна. Положим далее, что для всех точек (t'), лежащих на контуре l' , соблюдается неравенство

$$|R| < |c(t-t')|. \quad (25a)$$

Следует отметить, что это неравенство выполняется для обеих вещественных точек контура l' (т. е. тех точек, в которых он пересекается с вещественной временной осью), поскольку скорость электрона меньше скорости света [см. неравенство (1a)]. Поэтому мы можем предположить, что неравенство (25a) выполняется и для остальных комплексных точек l' .

При этом предположении (которое может быть однако и не выполняется) мы можем разложить функцию $\frac{1}{R-c(t-t')}$ (внутри и даже на кривой l') в сходящийся ряд по положительным степеням $\frac{R}{c(t'-t)}$.

Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{R[R-c(t-t')]} &= \frac{1}{Rc(t'-t) \left[1 + \frac{R}{c(t'-t)} \right]} = \\ &= \frac{1}{Rc(t'-t)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{R}{c(t'-t)} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R^{n-1}}{c^{n+1} (t'-t)^{n+1}}, \end{aligned}$$

и по формуле (25)

$$A_k = \frac{e'}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \oint \frac{\frac{dx'_k}{cdt'} R^{n-1} c \cdot dt'}{c^{n+1} (t'-t)^{n+1}},$$

Если $F(t')$ есть любая функция от t' , регулярная внутри кривой интегрирования, то мы имеем известную формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(t') dt'}{(t'-t)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n F(t')}{dt'^n} \right)_{t'=t} = \frac{F^{(n)}(t)}{n!}.$$

Применяя эту формулу, мы получаем для A_k следующий (так называемый Лагранжев) ряд

$$A_k = e' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{c^n dt'^n} \left(\frac{dx'_k}{cdt'} R^{n-1} \right), \quad \text{при } t' = t, \quad (26)$$

т. е. ряд

$$\varphi = e' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n (R^{n-1})}{c^n dt'^n}, \quad \text{при } t' = t \quad (26a)$$

для скалярного потенциала и

$$A = e' \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{c^n dt'^n} \left(\frac{v'}{c} R^{n-1} \right), \quad \text{при } t' = t \quad (26b)$$

для векторного потенциала.

В этих формулах величины v' и R , т. е. скорость электрона и его расстояние от данной точки $P(x_1, x_2, x_3) = P(\mathbf{r})$ относятся к тому же самому моменту $t' = t$, для которого вычисляется потенциал в точке P .

Формально мы рассматриваем это действие как мгновенное дальное действие, но фактически оно вполне эквивалентно запаздывающему дальному действию формул (3) и (4).

Проделанное нами формальное сведение фактического запаздывающего дального действия к фиктивному, мгновенному, очевидно возможно лишь при таком движении электрона, когда скорость его удовлетворяет не только условию (1a), но и требованию, чтобы все ее производные по времени были бы конечны и непрерывны.

Далее, даже при этом условии, ряды (26) безусловно сходятся лишь на достаточно малых расстояниях R . Для больших расстояний они расходятся или в лучшем случае сходятся условно (естественной единицей длины следует считать в случае периодического движения, как это уже разбиралось в главе V, длину волны). Это очевидно связано с тем, что наше предыдущее предположение о соблюдении неравенства (25a) на всей кривой интегрирования (охватывающей обе точки t'_0 и t) в общем случае не может быть выполнено.

Формулы (26a) и (26b) очень полезны при исследовании взаимодействия двух и большего количества электронов, если они находятся друг относительно друга на расстоянии, не превышающем радиуса сходимости этих рядов. Эти формулы позволяют нам рассматривать все электроны (как в обычной механике системы материальных точек) в один и тот же момент времени и не вводить для каждой пары электронов двух различных эффективных моментов. Мы можем применить их также для вычисления взаимодействия между различными элементами одного и того же электрона (если представлять себе последний пространственно протяженным).

Ограничиваясь первым двумя членами ряда (26b), мы получаем

$$A = \frac{e' v}{cR} - \frac{e' w}{c^3}. \quad (27)$$

Штрихи у v и $w = \frac{dv}{dt}$ мы отбрасываем, так как эти величины относятся к моменту t .

Второй член ряда (26а) очевидно равен нулю. Принимая во внимание следующий член, мы получаем

$$\varphi = \frac{e'}{R} + \frac{e'}{2} \frac{d^2 R}{c^2 dt^2}.$$

Далее

$$\frac{dR}{dt} = -v_R = -\frac{R\mathbf{v}}{R},$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{R\mathbf{w}}{R} - \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{R^2} \frac{dR}{dt} \right) \mathbf{v} = -R_0 \mathbf{w} + \frac{v^2 - (R_0 \mathbf{v})^2}{R}.$$

Окончательно получаем

$$\varphi = \frac{e'}{R} \left\{ 1 + \frac{v^2 - (R_0 \mathbf{v})^2}{2c^2} \right\} - \frac{e'}{2c^2} R_0 \cdot \mathbf{w}. \quad (27a)$$

Следует отметить, что вторые члены правых частей формул (26) и (27а) представляют собой такое (мгновенное) дальность действие, интенсивность которого совсем не зависит от расстояния. Отброшенные нами члены более высокого порядка в (26а) и (26б) дают нам, вообще говоря, дальность действие, не уменьшающееся, а увеличивающееся с расстоянием пропорционально положительным степеням R .

Совокупность этих мгновенных дальностей заменяет собой соответствующее запаздывающее дальность действие формул (3) и (4); каждый же член в отдельности представляет собой только некоторую математическую функцию и не имеет никакого физического смысла.

Из формул (27) и (27а) мы получаем, на основании общих уравнений $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ и $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, следующие выражения для магнитной и электрической напряженности

$$\mathbf{H} = \frac{e' \mathbf{v} \times R_0}{cR^2} \quad (28)$$

(закон Био-Савара) и

$$\mathbf{E} = \frac{e' R_0}{R^2} \left\{ 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{v} R_0)^2}{c^2} \right\} - e' \frac{\mathbf{w} + R_0 (R_0 \mathbf{w})}{2c^2 R} + \frac{e'}{c^3} \frac{d\mathbf{w}}{dt}. \quad (28a)$$

Эти приближенные выражения значительно отличаются от точных формул (8) и (9).

Последний член полученного для \mathbf{E} выражения

$$\mathbf{E}^{(3)} = \frac{e'}{c^3} \frac{d\mathbf{w}}{dt}, \quad (28b)$$

как мы увидим ниже, играет большую роль в теории излучения.

ГЛАВА VII

ЭНЕРГИЯ И КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ. ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНОВ

§ 1. Электрическая энергия системы покоящихся зарядов. Взаимная (или относительная) энергия двух покоящихся точечных зарядов e' и e выражается, как известно, формулой

$$U = \frac{e'e}{R}, \quad (1)$$

где R , как всегда, означает расстояние между соответствующими точками P' и P .

Так как $\frac{e'}{R} = \varphi$ представляет собою потенциал заряда e' в точке P и, точно так же, $\frac{e}{R} = \varphi'$ представляет собой потенциал заряда e в точке P' , то можно также положить

$$U = e\varphi = e'\varphi' = \frac{1}{2}(\varphi e + \varphi' e'). \quad (1a)$$

Эти формулы легко обобщаются на случай системы произвольного числа зарядов e_1, e_2, \dots, e_n . Пусть эти заряды первоначально расположены в точках P_1, P_2, \dots, P_n . Представим себе теперь, что они перемещаются из этих положений в новые P'_1, P'_2, \dots, P'_n . Произведенная при этом работа A , по определению, равна алгебраическому уменьшению взаимной потенциальной энергии соответствующих зарядов, т. е. электрической энергии образованной ими системы. Если обозначить значения этой энергии в начальном и конечном положении через U и соответственно через U' , то

$$A = U - U'.$$

Работа A очевидно складывается из отдельных частей, происходящих от действия каждого заряда на каждый другой заряд. Если, следовательно, обозначить через $A_{\alpha\beta}$ работу, которую совершает сила, действующая со стороны e_α на e_β , то

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\alpha \neq \beta} \sum A_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta} \sum (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}). \end{aligned}$$

Сумма $A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}$, очевидно, равна алгебраическому уменьшению взаимной энергии e_α и e_β , т. е. разности $U_{\alpha\beta} - U'_{\alpha\beta}$. Следовательно, имеем

$$U - U' = \sum_{\alpha < \beta} \sum U_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha < \beta} \sum U'_{\alpha\beta},$$

т. е.

$$U = \sum_{\alpha < \beta} \sum U_{\alpha\beta},$$

или по (1)

$$U = \sum_{\alpha < \beta} \sum \frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum \frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\alpha\beta}}. \quad (2)$$

Если мы теперь введем потенциал

$$\varphi_\beta^* = \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{e_\alpha}{R_{\alpha\beta}}, \quad (2a)$$

создаваемый в точке P_β , где находится β -ый заряд, всеми остальными зарядами, то энергия U сможет быть представлена в форме

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^n \varphi_\beta^* e_\beta. \quad (2b)$$

Это выражение энергии можно преобразовать к совершенно другому виду, имеющему основное значение для дальнейшего.

Обозначим через φ_α и \mathbf{E}_α потенциал и напряженность электрического поля, создаваемого зарядом α в какой-либо точке P , а через φ'_α и \mathbf{E}'_α — значения этих величин в той же точке для поля, создаваемого всеми остальными зарядами ($\varphi'_\alpha = \varphi - \varphi_\alpha$; $\mathbf{E}'_\alpha = \mathbf{E} - \mathbf{E}_\alpha$). В точке P_α , где находится заряд e_α , имеем $\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha^*$. Пусть далее S — поверхность, охватывающая все эти заряды. С помощью формулы

$$e_\alpha = \frac{1}{4\pi} \oint (\mathbf{E}_\alpha)_n dS$$

получаем

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^* e_\alpha &= \frac{1}{4\pi} \oint (\varphi_\alpha^* \mathbf{E}_\alpha)_n dS = \frac{1}{4\pi} \oint (\varphi'_\alpha \mathbf{E}_\alpha)_n dS - \\ &- \frac{1}{4\pi} \oint [(\varphi'_\alpha - \varphi_\alpha^*) \mathbf{E}_\alpha]_n dS. \end{aligned}$$

Последний интеграл преобразуем по формуле Гаусса

$$\begin{aligned} \oint [(\varphi'_\alpha - \varphi_\alpha^*) \mathbf{E}_\alpha]_n dS &= \int \operatorname{div} [(\varphi'_\alpha - \varphi_\alpha^*) \mathbf{E}_\alpha] dV = \\ &= \int (\varphi'_\alpha - \varphi_\alpha^*) \operatorname{div} \mathbf{E}_\alpha dV + \int \mathbf{E}_\alpha \operatorname{grad} (\varphi'_\alpha - \varphi_\alpha^*) dV. \end{aligned}$$

Так как везде, кроме точки P_α , $\operatorname{div} E_\alpha = 0$, а

$$\int \operatorname{div} E_\alpha dV = \oint (E_\alpha)_n dS = 4\pi e_\alpha$$

имеет конечную величину, то

$$\int (\varphi'_\alpha - \varphi_\alpha^*) \operatorname{div} E_\alpha dV = 0.$$

Далее имеем

$$\operatorname{grad} (\varphi'_\alpha - \varphi_\alpha^*) = \operatorname{grad} \varphi'_\alpha = -E'_\alpha$$

и, следовательно,

$$\int E_\alpha \operatorname{grad} (\varphi'_\alpha - \varphi_\alpha^*) dV = - \int E_\alpha E'_\alpha dV.$$

Итак, мы получаем следующую формулу

$$U = \frac{1}{2} \sum_\alpha \varphi_\alpha^* e_\alpha = \frac{1}{8\pi} \oint \left(\sum_\alpha \varphi'_\alpha E_\alpha \right)_n dS + \frac{1}{8\pi} \int \sum_\alpha E_\alpha E'_\alpha dV.$$

При удалении поверхности S в бесконечность поверхностный интеграл обращается в нуль (так как произведение $\varphi'_\alpha E_\alpha$ обратно пропорционально третьей или еще более высокой степени расстояния), так что предыдущая формула сводится к

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \sum_\alpha E_\alpha E'_\alpha dV = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{\alpha < \beta} E_\alpha E_\beta dV. \quad (3)$$

При приближении к каждой из точек P_α ($\alpha=1, 2, \dots$) соответствующая напряженность поля E_α становится бесконечной — обратно пропорционально квадрату расстояния l_α от P_α . Но так как величина очень маленького объема V_α , содержащего P_α , пропорциональна третьей степени его линейных размеров, то интеграл $\int E_\alpha dV_\alpha$ должен обращаться в нуль при $V_\alpha \rightarrow 0$. Действительно, вводя наряду с расстоянием l_α еще бесконечно малый телесный угол $d\Omega_\alpha$ с вершиной в P_α , имеем $dV = l_\alpha^3 d\Omega_\alpha dl_\alpha$ и

$$E_\alpha = \frac{e_\alpha}{l_\alpha^2},$$

откуда

$$\int E_\alpha dV_\alpha = e_\alpha \int \int dl_\alpha d\Omega_\alpha = e_\alpha [V_\alpha^{1/3}], \quad (3a)$$

где символ $[A]$ означает число, равное по порядку величины A . Следовательно, при $V_\alpha \rightarrow 0$, $\int E_\alpha dV_\alpha \rightarrow 0$. Этим объясняется то обстоятельство, что интеграл (3) имеет конечное значение, хотя величины E_α обращаются в отдельных точках в бесконечность.

Так как $E_{\alpha}' = E - E_{\alpha}$, то мы имеем далее

$$\sum_{\alpha} E_{\alpha} E_{\alpha}' = \left(\sum_{\alpha} E_{\alpha} \right) E^2 - \sum_{\alpha} E_{\alpha}^2 = E^2 - \sum_{\alpha} E_{\alpha}^2.$$

Соответственно этому можно было бы написать формулу (3) следующим образом

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV - \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha} \int E_{\alpha}^2 dV. \quad (4)$$

Это представление энергии не имеет однако смысла, так как интегралы $\int E^2 dV$ и $\int E_{\alpha}^2 dV$, в отдельности взятые, бесконечны. Так, например, по (3а)

$$\int E_{\alpha}^2 dV_{\alpha} = e_{\alpha}^2 \int \int \frac{dl_{\alpha}}{l_{\alpha}^2} d\Omega_{\alpha} = e_{\alpha}^2 \left[V_{\alpha}^{-\frac{1}{3}} \right] \rightarrow \infty. \quad (4a)$$

Представим себе теперь вместо системы точечных зарядов непрерывное распределение электричества внутри конечного объема V_0 с конечной объемной плотностью ρ . Если обозначить через E_{α} напряженность поля, создаваемого электрическим зарядом $e_{\alpha} = \int \rho dV_{\alpha} \cong \rho V_{\alpha}$, содержащимся в очень малом объеме V_{α} , то интеграл $\int E_{\alpha}^2 dV_{\alpha}$ при $V_{\alpha} \rightarrow 0$ должен становиться не бесконечно большим, а бесконечно малым. Действительно, если бы заряд e_{α} был сконцентрирован в одной точке P_{α} (что не вызвало бы заметного изменения интеграла $\int E_{\alpha}^2 dV$), то, стягивая объем V_{α} к точке P_{α} , мы получили бы по (4а)

$$\int E_{\alpha}^2 dV_{\alpha} = \rho^2 \left[V_{\alpha}^{\frac{5}{3}} \right] \rightarrow 0. \quad (4b)$$

По порядку величины интеграл $\int E_{\alpha}^2 dV_{\alpha}'$, распространенный на весь объем V_0 за исключением V_{α} ($V_{\alpha}' = V_0 - V_{\alpha}$), должен быть бесконечно малым еще более высокого порядка, чем (4b), так как

$$\int E_{\alpha}^2 dV_{\alpha}' = \rho^2 \left[V_{\alpha}^2 \right] \left[V_0^{\frac{1}{3}} \right].$$

Следовательно, имеем

$$\int E_{\alpha}^2 dV = \rho^2 \left[V_{\alpha}^{\frac{5}{3}} \right].$$

и если разделим объем V на элементарные объемы одинаковой величины (или одного и того же порядка величины) V_α , то

$$\sum_\alpha \int E_\alpha^2 dV = \rho^2 \left[\frac{V_0}{V_\alpha} \right] \left[V_\alpha^{\frac{5}{3}} \right] = \rho^2 V_0 \left[V_\alpha^{\frac{2}{3}} \right] \rightarrow 0. \quad (4c)$$

Тот же результат получается при распределении электричества на поверхности S_0 с конечной поверхностной плотностью η . Если разделить S_0 на бесконечно малые поверхностные элементы S_α , которые могут содержаться в бесконечно малых объемных элементах V_α , имеющих те же линейные размеры, то вместо (4b) получится

$$\int E_\alpha^2 dV_\alpha = \eta^2 \left[S_\alpha^2 \right] \left[V_\alpha^{-\frac{1}{3}} \right] = \eta^2 \left[V_\alpha^{\frac{4}{3}} \right] \left[V_\alpha^{-\frac{1}{3}} \right] = \eta^2 \left[V_\alpha \right] \quad (4d)$$

и вместо (4c)

$$\sum_\alpha \int E_\alpha^2 dV = \eta^2 \left[V_\alpha \right] \left[\frac{S_0}{S_\alpha} \right] = \eta^2 S_0 \left[V_\alpha^{\frac{1}{3}} \right] \rightarrow 0. \quad (4e)$$

Однако нужно отметить, что при распределении электричества вдоль линии σ_0 , с конечной линейной плотностью ζ ($\zeta = \frac{de}{ds}$) сумма $\sum_\alpha \int E_\alpha^2 dV$ при $\sigma_\alpha \rightarrow 0$ и $V_\alpha \rightarrow 0$ сохраняет конечное значение порядка $\zeta^2 \sigma_0$.

Итак, мы видим, что при непрерывном распределении электричества с конечной объемной или поверхностной (но не линейной!) плотностью, взаимная электрическая энергия бесконечно малых элементов заряда, находящихся в бесконечно малых объемных или поверхностных элементах рассматриваемой системы, выражается интегралом

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV. \quad (5)$$

Этот результат остается в силе и для бесконечно больших заряженных объемов V_0 или поверхностей S_0 , если полный заряд $\int \rho dV_0$ или $\int \eta dS_0$ конечен.

По формуле (5) электрическую энергию можно рассматривать как величину, локализуемую в пространстве, в том же смысле, как и электрический заряд (в случае объемного распределения). При этом можно себе представлять, что в элементе объема dV запасено количество энергии $\frac{E^2}{8\pi} dV$, т. е. что энергия распределена в пространстве с объемной плотностью

$$\xi = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (5a)$$

Эта „объемная плотность“ энергии в каждой точке определяется соответствующей результирующей напряженностью поля.

Преобразуем теперь формулу (5) „обратно“, т. е. приведем представленную ей энергию к виду, соответствующему нашей первоначальной формуле (2b) для взаимной энергии системы точечных зарядов.

Для этой цели выполним указанное в (5) интегрирование сначала для ограниченного объема (V). При этом ограничимся случаем объемного распределения. Тогда $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, и поэтому, вследствие тождества $\operatorname{div} \varphi \mathbf{E} = \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \varphi$ и соотношения $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$,

$$E^2 = \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} - \operatorname{div} \varphi \mathbf{E} = 4\pi\varphi\rho - \operatorname{div} \varphi \mathbf{E}.$$

Обозначая через S поверхность, ограничивающую объем V , мы имеем, следовательно,

$$\frac{1}{8\pi} \int_{(V)} E^2 dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \varphi\rho dV - \frac{1}{8\pi} \oint \varphi E_n dS.$$

Удалим теперь S на бесконечность; при этом поверхностный интеграл обращается в нуль (поскольку электрический заряд распределен в конечном объеме), так что по (5) получим

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi\rho dV. \quad (6)$$

Для поверхностного распределения электричества получаем после аналогичного преобразования выражения (5) с помощью уравнения (23b) главы IV

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi\eta dS. \quad (6a)$$

На первый взгляд эти формулы представляются вполне соответствующими формуле (2b). В действительности между ними имеется существенное отличие. Оно проявляется уже в том обстоятельстве, что энергия, определяемая (6) и (6a), должна быть всегда положительна, так как эти формулы тождественны с (5), тогда как энергия системы точечных зарядов, определяемая формулой (2b), оказывается положительной или отрицательной, смотря по тому, лежат ли ближе друг к другу одноименные или разноименные заряды.

Величина φ_a^* , входящая в формулу (2b), представляет собой потенциал в точке P_a всех зарядов, за исключением заряда e_a , находящегося в P_a . Величина же φ в формуле (6) или (6a) означает полную величину потенциала в рассматриваемой точке — следовательно, величину, зависящую не только от зарядов, расположенных „вдали“, но и от заряда, находящегося в этой точке. Вследствие предполагаемой конечности плотности заряда ρ (или η) этот заряд в действительности равен нулю. Точнее

говоря, та часть потенциала в некоторой точке P_α элемента объема V_α , которая обусловлена зарядом ρV_α (или ηS_α), находящимся внутри этого элемента объема, есть величина бесконечно малая порядка $V_\alpha^{\frac{2}{3}}$ (или $V_\alpha^{\frac{1}{3}}$). Следовательно, практически нет никакой разницы между полным значением φ потенциала в V_α и значением φ_α^* , обусловленным зарядами, лежащими вне V_α .

Формуле (2b) в рассматриваемом случае соответствует сумма

$$\frac{1}{2} \sum \varphi_\alpha^* \rho V_\alpha,$$

которая представляет взаимную энергию элементарных зарядов, находящихся в бесконечно малых элементах объема. В пределе $V_\alpha \rightarrow 0$ эта сумма совпадает с интегралом (6). Следовательно, этот интеграл можно определить как взаимную потенциальную энергию различных бесконечно малых элементов электрического заряда. Однако, его можно определить также и как полную электрическую энергию рассматриваемой системы, так как в него входит и исчезающая в пределе сумма „внутренних“ энергий отдельных элементов заряда (т. е. „взаимная“ энергия еще меньших элементов, из которых они состоят).

То обстоятельство, что энергия, представленная (6) и (6a), всегда положительна, объясняется тем, что близлежащие элементы электрического заряда, которые в наибольшей мере определяют „взаимную“ энергию всей системы, имеют вследствие (предполагаемой) непрерывности функции плотности ρ (или η) одинаковый знак. В случае системы точечных зарядов эти близлежащие элементы могут иметь как одинаковый, так и противоположный знак (см. выше).

Эти выводы показывают, что в отношении понятия энергии имеется существенная принципиальная разница между системами точечных зарядов („точечные электроны“), с одной стороны, и непрерывным распределением электричества с конечной объемной или поверхностной плотностью — с другой.¹

Эта разница имеет своим физическим основанием форму основного (Кулоновского) закона электростатических взаимодействий.

Если бы сила протяжения или отталкивания между двумя зарядами не была обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, а положим, например, прямо пропорциональна его первой степени, то между точечными системами и непрерывными распределениями не существовало бы принципиального различия.

Это различие выступает яснее всего в том обстоятельстве, что для системы точечных зарядов представление энергии в форме (5) невозможно; оно должно быть заменено первоначальным пред-

¹ Случай конечной линейной плотности мы в дальнейшем оставим без рассмотрения.

ставлением (3), в которое входят напряженности поля, зависящие от отдельных точечных зарядов, так что трактовка энергии как некоторой величины, связанной с результирующим полем, в этом случае невозможна.

Поэтому для дальнейшего построения учения об энергии чрезвычайно важно установить, следует ли рассматривать электроны как точечные заряды или как пространственно протяженные образования, например, маленькие шарики с поверхностным или объемным зарядом.

Мы выберем сначала второе представление, которое главным образом было развито Лоренцом и Абрагамом, причем не будем заниматься критикой его ни с физической, ни с теоретико-познавательной точки зрения. Этими критическими соображениями мы займемся лишь в конце этой главы, где попытаемся результаты, полученные на основе этого „классического“ представления, применить к представлению „точечного“ электрона.

Соответственно этому мы будем представлять электрическую энергию системы покоящихся электронов формулой (5). Эта энергия очевидно состоит из двух частей, а именно, из взаимной энергии различных электронов и из „внутренней“ энергии отдельных электронов, т. е. взаимной энергии бесконечно малых элементов каждого отдельного электрона. Первую энергию мы обозначим U^v , а вторую суммой $\sum_{\alpha} U_{\alpha}$, где значок $\alpha (= 1, 2, \dots)$ относится к отдельным электронам. Следовательно,

$$U = U^v + \sum_{\alpha} U_{\alpha}. \quad (7)$$

Введенному разделению „полной“ энергии соответствует, ввиду тождества

$$E^2 = \left(\sum_{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha} \right)^2 = \sum_{\alpha \neq \beta} \sum_{\beta} \left(\mathbf{E}_{\alpha} \mathbf{E}_{\beta} \right) + \sum_{\alpha} E_{\alpha}^2,$$

разделение интеграла (5) на следующие две части

$$\frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum_{\beta} \int \mathbf{E}_{\alpha} \mathbf{E}_{\beta} dV + \sum_{\alpha} \frac{1}{8\pi} \int E_{\alpha}^2 dV.$$

При этом, очевидно,

$$U^v = \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum_{\beta} \int \mathbf{E}_{\alpha} \mathbf{E}_{\beta} dV, \quad (7a)$$

$$U_{\alpha} = \frac{1}{8\pi} \int E_{\alpha}^2 dV. \quad (7b)$$

Формула (7a) по внешнему виду тождественна с нашей первоначальной формулой (3) для взаимной энергии системы точечных зарядов. В действительности однако элементарные напряженности поля \mathbf{E}_{α} должны, по крайней мере внутри электронов, отли-

чатся от обычных Кулоновских выражений для точечных зарядов.

Если считать электрон шариком радиуса a , на поверхности или в объеме которого равномерно распределен заряд электрона e (индекс α мы опускаем) с поверхностной плотностью $\eta = \frac{e}{4\pi a^2}$ или с объемной плотностью $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$, то можно утверждать следующее: вне электрона его поле совпадает с полем точечного заряда той же величины, сосредоточенного в его центре (ср. главу IV, § 5). Что же касается „внутренности“ электрона, то нужно различать оба упомянутые случая. Именно, в случае равномерного поверхностного распределения электрического поле внутри шарика исчезает. Если же заряд равномерно распределен во всем объеме шарика, то напряженность поля E на расстоянии r от центра зависит лишь от заряда, расположенного внутри сферы радиуса r . При этом заряд, очевидно, действует так, как если бы он был сосредоточен в центре сферы. Следовательно, в рассматриваемом случае для $r < a$

$$E = \frac{4\pi \rho r^3}{3 r^2} = \frac{4\pi}{3} \rho r = \frac{er}{a^3}.$$

Теперь мы можем вычислить „внутреннюю“ энергию нашего электрона по формуле (7b).¹

В случае поверхностного заряда получается

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_{r=a}^{\infty} \frac{e^2}{r^4} dV,$$

т. е. при $dV = 4\pi r^2 dr$

$$U = \frac{e^2}{2a}. \quad (8)$$

В случае объемного заряда

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_0^a \frac{e^2}{a^6} r^2 dV + \frac{1}{8\pi} \int_a^{\infty} \frac{e^2}{r^4} dV,$$

т. е.

$$U = \frac{3}{5} \frac{e^2}{a}. \quad (8a)$$

Гулко отметить, что собственная энергия электрона, т. е. взаимная энергия бесконечно малых элементов его электрического заряда, представляет собой работу, которую совершат силы взаимного отталкивания этих элементов, если последние разлетаются на бесконечно большое расстояние друг от друга, т. е., если электрон испытает нечто в роде взрыва. Поскольку, однако,

¹ Можно было бы, разумеется, применить формулы (6) или (6a).

подобного рода взрыв невозможен, и вообще поскольку структура электрона остается неизменной, его собственная энергия играет роль несущественной аддитивной постоянной в выражении (7) для полной энергии системы электронов. Таким образом, при исследовании электростатических явлений практически все равно, имеем ли мы дело с полной или с взаимной энергией электронов. Их собственная энергия не имеет физического значения. Мы увидим однако, что дело коренным образом меняется, когда мы от состояния покоя электронов переходим к движению их.

§ 2. Магнитная энергия электрических токов. В § 2 главы V мы ввели взаимную магнитную энергию T двух линейных токов, определив ее как величину, уменьшение которой при перемещении контуров или изменении силы токов равно полной работе, совершаемой поперечными („пондеромоторными“) и продольными („электродвижущими“) силами. Эта взаимная магнитная энергия выражается формулой

$$T = i \int H_n dS = i' \int H'_n dS' = T', \quad (9)$$

где \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, создаваемого током i' и $\int H_n dS = \Phi$ соответствующий магнитный поток через контур тока $\sigma(i)$.

Аналогичное значение имеют величины \mathbf{H}' и $\int H'_n dS' = \Phi'$ для второго тока $\sigma'(i')$. Если вместо напряженности магнитного поля ввести соответствующие векторные потенциалы \mathbf{A} и \mathbf{A}' , то энергию $T = T'$ можно по (20b) главы III привести к виду, симметричному относительно обоих токов, а именно

$$T = Li', \quad (9a)$$

где

$$L = \oint \oint \frac{\tau \cdot \tau'}{R} d\sigma d\sigma'. \quad (9b)$$

Формула (9a) совершенно аналогична формуле (1) для взаимной электрической энергии двух точечных зарядов. При этом силы токов играют роль зарядов (e и e'), а коэффициент L — роль величины, обратной их расстоянию друг от друга. Этот коэффициент, зависящий лишь от относительного положения обоих контуров с током, называется коэффициентом взаимной индукции. Согласно (9a) он может быть определен как взаимная магнитная энергия рассматриваемых контуров, когда сила обоих токов равна единице ($i = i' = 1$). Можно также определить его как магнитный поток, проходящий сквозь один из контуров, когда по другому контуру течет ток, равный единице. Действительно, для любой силы тока имеем по (9) и (9a)

$$\Phi = i' L, \quad \Phi' = i L. \quad (9c)$$

Нужно заметить, что формула (9) может быть написана в виде

$$T = i \Phi = i' \Phi' = \frac{1}{2} (i \Phi + i' \Phi');$$

отсюда видно [ср. (1a)], что магнитный поток в отношении магнитной энергии линейных токов играет ту же роль, какую скалярный потенциал играет в отношении электрической энергии точечных зарядов. Полученные результаты могут быть обобщены на систему любого числа линейных токов, таким же точно образом, как и в рассмотренном выше случае системы точечных зарядов. Вследствие установленной аналогии между электрическими и магнитными величинами мы можем прямо написать, соответственно формуле (2):

$$T = \sum_{\alpha < \beta} \sum L_{\alpha\beta} i_{\alpha} i_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum L_{\alpha\beta} i_{\alpha} i_{\beta}, \quad (10)$$

или, соответственно (2a) и (2b),

$$\Phi_{\beta}^* = \sum_{\alpha \neq \beta} L_{\alpha\beta} i_{\alpha}. \quad (10a)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^* i_{\alpha}. \quad (10b)$$

При этом Φ_{α}^* означает магнитный поток сквозь контур σ_{α} , обусловленный другими токами. Этот поток, очевидно, равен алгебраической сумме потоков $\Phi_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} i_{\beta}$, относящихся к отдельным токам. Коэффициенты взаимной индукции определяются формулами типа (9b) и удовлетворяют условиям симметрии

$$L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}.$$

Будем теперь вместо линейных токов, являющихся математической фикцией, рассматривать стационарные токи, циркулирующие внутри или на поверхности каких-либо тел (металлических проводников). Понятие энергии обобщается на этот случай следующим образом. Представим себе, что рассматриваемый поток электричества разделен на бесконечно тонкие замкнутые нити тска (что при стационарных токах всегда возможно). Эти элементарные нити мы будем рассматривать как линейные токи и определим полную магнитную энергию нашей системы токов как предел взаимной энергии этих линейных токов, определенной по (10b).

Магнитные потоки $\Phi_{\alpha}^* = \int \mathbf{H}_{\alpha}^* \cdot \mathbf{n}_{\alpha} dS_{\alpha}$ можно, введя соответствующие векторные потенциалы \mathbf{A}_{α}^* ($\mathbf{H}_{\alpha}^* = \text{rot } \mathbf{A}_{\alpha}^*$), представить в виде $\Phi_{\alpha}^* = \int \mathbf{A}_{\alpha}^* \cdot \boldsymbol{\tau}_{\alpha} d\tau_{\alpha}$. Далее, в случае распределения тока с конечной объемной плотностью \mathbf{j} можно заменить $i_{\alpha} \boldsymbol{\tau}_{\alpha} d\sigma_{\alpha}$ на $\mathbf{j}_{\alpha} dV_{\alpha}$, где

dV_α — элемент объема, соответствующий элементу $d\sigma_\alpha$ некоторой линии тока. Следовательно, по (10b), получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int \Lambda_{\alpha}^* j dV_{\alpha}.$$

В пределе при бесконечно малых сечениях элементарных нитей тока векторный потенциал каждой нити на самое себя, как легко видеть, равен нулю. Поэтому при указанном переходе к пределу можно „взаимный“ потенциал Λ_{α}^* , входящий в предыдущую формулу, заменить полным векторным потенциалом A в соответствующей точке. Так как при этом деление всего потока на элементарные нити теряет значение, и комбинация объемного интегрирования по одной нити $\int dV_{\alpha}$ и суммирования по всем нитям эквивалента интегрированию по всей обтекаемой области, то мы получаем

$$T = \frac{1}{2} \int A j dV. \quad (11)$$

В случае поверхностного распределения тока, получается точно таким же образом

$$T = \frac{1}{2} \int A k dS, \quad (11a)$$

где k (конечная) — поверхностная плотность тока. При этом векторный потенциал в каждой внешней или внутренней точке определяется, согласно формуле (20) главы III, выражением

$$A = \int j' \frac{dV'}{R}. \quad (11b)$$

или

$$A = \int \frac{k' dS'}{R}. \quad (11c)$$

Магнитную энергию рассматриваемого тока можно представить, следовательно, в виде двойного интеграла по области, в которой он течет, а именно:

$$T = \frac{1}{2} \int \int \frac{j j'}{R} dV dV' \quad (12)$$

для объемного тока и

$$T = \frac{1}{2} \int \int \frac{k k'}{R} dS dS' \quad (12a)$$

для поверхностного.

Эти выражения можно получить непосредственно применением выведенной в § 6 главы III формулы (23) для эффективной взаимной энергии двух движущихся точечных зарядов. Действительно, если изменить знак в этой формуле соответ-

ственно общему соотношению (5) главы V, то получим эффективную элементарную магнитную энергию соответствующих зарядов

$$T = \frac{1}{R} \frac{e' v'}{c} \cdot \frac{e v'}{c}. \quad (12b)$$

Эта энергия определяется как „эффективная“ взаимная энергия, в том смысле, что в случае стационарных или квазистационарных токов в форме замкнутых нитей сумма выражений (12b) для всех пар зарядов, находящихся в различных нитях, дает правильное выражение для взаимной магнитной энергии этих нитей. Напротив того, отдельные члены этой суммы типа (12b) не имеют непосредственного физического смысла, так как электромагнитные силы между двумя движущимися точечными зарядами не могут быть выведены из какой-либо функции энергии. Формула (12b) совершенно аналогична соответствующей формуле (1) для электростатической энергии. Ее обобщение на различные системы токов, в частности на непрерывное объемное и поверхностное распределение, может быть произведено таким же точно образом, как и соответствующее обобщение (1). Этим доказывается допустимость сделанной выше замены взаимного потенциала A_{α}^* полным A . Мы можем далее утверждать, что в случае линейных токов конечной силы, т. е. с конечной „линейной плотностью“ электрического количества движения, подобного рода замена невозможна.

В случае стационарного объемного тока, который может быть characterized соотношением $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$, формула (11) может быть преобразована таким же образом, как и соответствующая формула (6) для электрической энергии. А именно, мы имеем [по формуле (25) Введения]

$$\mathbf{A} \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \text{div} (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{A},$$

т. е., так как $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \text{div} (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \frac{1}{4\pi} H^2,$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \mathbf{j} dV = \frac{1}{8\pi} \oint (\mathbf{H} \times \mathbf{A})_n dS + \frac{1}{8\pi} \int_{(V)} H^2 dV.$$

Если удалить поверхность S в бесконечность и в соответствии с этим распространить объемное интегрирование на все пространство, то получается, так же как и в § 1,

$$T = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV. \quad (13)$$

Та же формула получается и из (11a) [с помощью соотношения (23) главы IV]. Нужно однако принять во внимание, что

в случае системы линейных токов она теряет всякий смысл, так же как и соответствующая формула (5) § 1 для непрерывного распределения электрического заряда с конечной линейной плотностью.

Для системы, состоящей из двух или многих разделенных друг от друга нитеобразных токов (например, в металлических проводах), энергия T распадается на взаимную магнитную энергию этих токов

$$T^{\nu} = \frac{1}{8\pi} \int \sum_{\alpha \neq \beta} \sum H_{\alpha} H_{\beta} dV = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{\alpha < \beta} \sum H_{\alpha} H_{\beta} dV \quad (13a)$$

и на сумму „внутренних“ или „собственных“ энергий каждого из них

$$T_{\alpha} = \frac{1}{8\pi} \int H_{\alpha}^2 dV. \quad (13b)$$

При этом выражение (13) верно также и для линейных токов, а выражение (13b) в этом случае становится бесконечным.

Так как элементарные поля H_{α} пропорциональны силам соответствующих токов, то T^{ν} можно написать в соответствии с формулой (10) в виде

$$T^{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum L_{\alpha\beta} i_{\alpha} i_{\beta}.$$

Коэффициенты взаимной индукции $L_{\alpha\beta}$ при этом зависят только от положения и вида нитей токов; можно легко убедиться, что в предельном случае бесконечно тонких нитей новое (общее) выражение коэффициентов взаимной индукции

$$L_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \int H_{\alpha} H_{\beta} dV \quad (i_{\alpha} = i_{\beta} = 1) \quad (14)$$

может быть приведено к первоначальному виду (9b). Мы можем теперь соответственно (14) ввести коэффициенты самодукции отдельных токов, или, точнее, отдельных проводников. А именно, если положить

$$L_{\alpha\alpha} = \frac{1}{4\pi} \int H_{\alpha}^2 dV \quad (i_{\alpha} = 1),$$

то для собственной энергии тока получается выражение

$$T_{\alpha} = \frac{1}{2} L_{\alpha\alpha} i_{\alpha}^2. \quad (14a)$$

Соответственно этому величину

$$\Phi_{\alpha\alpha} = L_{\alpha\alpha} i_{\alpha}$$

можно определить как магнитный поток рассматриваемого тока через его собственный контур. Так как однако последний никоим

образом, даже приблизительно, нельзя рассматривать как линейный, то это понятие теряет точность, свойственную его первоначальному определению, относящемуся к взаимной энергии линейных токов. Магнитный поток, определенный формулой

$$\Phi_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} i_{\beta} \quad (14b)$$

в связи с (14) и представляющий собой поток тока β через контур тока α , может быть представлен в форме поверхностного интеграла $\int \mathbf{H}_{\beta} \cdot \mathbf{n}_{\alpha} dS_{\alpha}$ лишь приближенно для исчезающе малого сечения этого контура.

Собственная энергия электрического тока $T = \frac{1}{2} Li^2$ (значок α мы в дальнейшем опускаем) по существу есть не что иное, как взаимная магнитная энергия бесконечно тонких нитей, на которые может быть разложен рассматриваемый ток. Согласно выводам § 2 главы V, эта энергия равна работе, которая должна быть совершена при возрастании тока от нуля до i против электродвижущих сил взаимной индукции, которые вызываются одновременным усилением элементарных токов в отдельных нитях. Эти элементарные силы индукции складываются в полную электродвижущую силу, которая в пределе дается выражением

$$\psi = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} L \frac{di}{dt}. \quad (15)$$

Она соответствует скалярной разности потенциалов той же величины (в электростатических единицах), так что для ее преодоления необходима работа $-\psi c i dt = L \frac{di}{dt} i dt = L i di$. Интегрирование этого выражения дает действительно магнитную энергию рассматриваемого тока $\frac{1}{2} Li^2$.

§ 3. Электромагнитная теория массы. Магнитная энергия контура тока, определенная выше, очевидно, весьма аналогична обыкновенной кинетической энергии материальной частицы. При этом сила тока соответствует скорости частицы v , и коэффициент самоиндукции — ее массе m ; электродвижущая сила самоиндукции (15) вполне аналогична „силе инерции“

$$-m \frac{dv}{dt} = -mv,$$

которая должна быть преодолена при ускорении частицы.

Эта аналогия превращается в тождество, если вместо замкнутого контура тока рассматривать поступательное движение тела, несущего на себе поверхностно или объемно распределенный заряд.

Представим себе, например, твердый, шарообразный электрон, движущийся прямолинейно и равномерно со скоростью v . Так

как это движение не стационарно, то, строго говоря, к рассматриваемому случаю нельзя применить понятие магнитной энергии. Если однако все же попытаться вычислить соответствующую магнитную энергию T , то мы получаем, на основании формулы (12b):

$$T = U \frac{v^2}{c^2},$$

где U означает электрическую энергию электрона в состоянии покоя. Это выражение тождественно с кинетической энергией частицы, масса которой равна

$$m = \frac{2U}{c^2}.$$

Однако необходимо принять во внимание, что формула (12b) наверное неприменима к этому случаю. Поэтому мы рассчитаем энергию T также посредством формулы (13) (которая, как мы позже увидим, верна в общем случае). Заметим для этого, что соотношение

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E},$$

которое по (13b) главы VI имеет место между напряженностью магнитного и электрического поля прямолинейно и равномерно движущегося электрического заряда, очевидно, остается справедливым и для соответствующих результирующих полей произвольной системы электрических зарядов, движущихся с одной и той же постоянной скоростью. Следовательно,

$$H^2 = \frac{1}{c^2} \left\{ E^2 v^2 - (\mathbf{E}\mathbf{v})^2 \right\},$$

и поэтому, по (13) и (5),

$$T = U \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{8\pi c^2} \int (\mathbf{E}\mathbf{v})^2 dV. \quad (16)$$

В рассматриваемом случае (электрон, заряд которого распределен с шаровой симметрией) электрическое поле в состоянии покоя, а также, приблизительно, и при малых скоростях движения ($v \ll c$), должно обладать радиальной симметрией. Если обозначить через θ угол между \mathbf{v} и радиусом-вектором \mathbf{r} элемента объема dV (относительно центра электрона), то $(\mathbf{E}\mathbf{v}) = E v \cos \theta$, и, следовательно,

$$\frac{1}{8\pi c^2} \int (\mathbf{E}\mathbf{v})^2 dV = \left(\frac{1}{8\pi} \int E^2 dv \right) \frac{v^2}{c^2} \overline{\cos^2 \theta}.$$

Здесь $\overline{\cos^2 \theta}$ означает среднее значение $\cos^2 \theta$ для всех направлений \mathbf{r} . В случае радиальной симметрии $\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{3}$, так что по (16)

$$T = \frac{2}{3} U \frac{v^2}{c^2}. \quad (16a)$$

Это выражение на одну треть меньше вычисленного ранее и соответствует электромагнитной массе

$$m = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2}, \quad (16b)$$

т. е. $m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2}$ в случае поверхностного заряда и $m = \frac{4}{5} \frac{e^2}{ac^2}$ в случае объемного заряда [ср. (8) и (8a)].

В правильности этих формул¹ можно убедиться непосредственно, вычисляя электродвижущую силу индукции, с которой электрон при ускоренном движении действует на самого себя. Мы видели в главе V § 2, что та часть электрического поля точечного заряда de' , которая зависит от его ускорения, определяется при малых скоростях выражением

$$d\mathbf{E}^{(2)} = -\frac{de'}{c^2 R} \left\{ \mathbf{w} - \mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \mathbf{w}') \right\}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что сила, с которой один бесконечно малый элемент электрона de' действует на другой элемент de , может быть представлена как произведение взаимной электрической энергии обоих элементов, деленной на c^2 , т. е. $\frac{de de'}{c^2 R}$, на вектор $-\{\mathbf{w} - \mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{w})\}$ (мы опускаем штрихи и считаем взаимодействие различных элементов электрона мгновенным, ср. ниже, § 3). Суммируя эти произведения для всех элементов de и de' , мы очевидно получим

$$-\frac{2U}{c^2} \left\{ \mathbf{w} - \overline{\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \mathbf{w})} \right\},$$

где $\overline{\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \mathbf{w})}$ означает среднее значение вектора $\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \mathbf{w})$ для различных направлений отрезка $\mathbf{R} \left(\mathbf{R}_0 = \frac{\mathbf{R}}{R} \right)$, проведенного от de' к de . Вследствие шаровой симметрии электрона перпендикулярная к \mathbf{w} составляющая вектора $\overline{\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \mathbf{w})}$ должна быть равна нулю. Для составляющей, параллельной \mathbf{w} , получим, обозначая через θ' угол между \mathbf{R}_0 и \mathbf{w} ;

$$\overline{\mathbf{R}_0 \cos \theta'} = w \overline{\cos^2 \theta'} = \frac{1}{3} w.$$

Искомая „сила самоиндукции“, обусловленная ускорением электрона, выражается, следовательно, формулой

$$\mathbf{F} = -\frac{4U}{3c^2} \mathbf{w}. \quad (17a)$$

Эта сила тождественна, по крайней мере формально,

¹ Для малых скоростей; более точные формулы, справедливые при любых скоростях, мы выведем ниже.

с обычной силой инерции частицы, масса которой определена формулой (16b).

Нужно отметить, что та часть электрического поля, которая не принята во внимание в предыдущем вычислении, так же как и сила, обусловленная магнитным полем, после (двойного) суммирования по всем элементам электрона ничего не прибавляют к результирующей силе, с которой электрон действует на самого себя. Следовательно, для прямолинейного и равномерно движущегося электрона эта сила должна исчезать. Найденные выше результаты¹ образуют основу так называемой электромгнитной теории массы. По этой теории массу электрона нужно считать не первичным его свойством, как, например, его заряд, а свойством, которое определяется величиной и пространственным распределением заряда электрона по формуле (16b).

Масса электрона может быть определена как его коэффициент самоиндукции.

Действительный физический смысл этого утверждения состоит в том, что при (ускоренном) движении электрона внешняя сила $F^{(a)}$, действующая на него, должна в каждый момент уравновешиваться соответствующей собственной силой F . Из этого принципа равновесия, или лучше принципа движения, сформулированного Лоренцом, можно вывести уравнение движения электрона в заданном внешнем электромагнитном поле.

Полагая

$$F + F^{(a)} = 0 \quad (17b)$$

и подставляя сюда выражение для F ($= -mw$), вытекающее из (17a) и (17), мы получаем известное уравнение движения Ньютона

$$mw = F^{(a)}. \quad (17c)$$

Так как приведенное выражение для собственной силы представляет собой только приблизительное ее значение для малых скоростей, то отсюда между прочим следует, что и вышенаписанное уравнение движения не точно и во всяком случае при больших скоростях должно быть заменено более сложным.

В виду того что заряд и масса электронов (и протонов) могут быть установлены экспериментально, то возможно при определенных предположениях относительно их „структуры“ (т. е. распределения заряда) вычислить их геометрические размеры.

При простейшем предположении, что электроны — твердые шарики с равномерно распределенным поверхностным или объемным зарядом, для радиуса этих шариков получается в случае электронов ($e = -4,77 \cdot 10^{-10}$, $m = 9,0 \cdot 10^{-28}$ г)

$$a \cong 2 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

а в случае протонов ($e = +4,77 \cdot 10^{-10}$, $m = 1,7 \cdot 10^{-24}$ г)

$$a \cong 10^{-16} \text{ см}.$$

¹ Которые впервые были установлены Дж. Дж. Томсоном.

В заключение нужно отметить, что масса какой-либо системы наэлектризованных частиц (электронов и протонов), например, атома или материального тела, вообще говоря, отличается от суммы масс этих частиц.

Действительно, в этом случае мы должны наряду с „собственной“ массой отдельных частиц принять в расчет также и их „взаимную“ массу. Эта взаимная масса различных частиц аналогична коэффициентам взаимной индукции различных токов. Она соответствует взаимной магнитной энергии или электродвижущим силам взаимной индукции, которые должны появиться, когда рассматриваемая система частиц движется, как целое, равномерно или ускоренно. По порядку величины она, согласно (16), равна ¹ взаимной электрической энергии различных электронов, деленной на c^2 , т. е. на квадрат скорости света. До тех пор пока расстояния электронов друг от друга остаются большими сравнительно с их размерами (радиусом), их взаимная масса должна быть мала в сравнении с суммой их собственных масс. Мы хотели бы еще раз подчеркнуть, что собственная масса электрона, согласно набросанной выше электромагнитной теории, представляет собой взаимную массу тех неотделимых друг от друга элементов, на которые электрон может быть мысленно разложен.

Следовательно, строго говоря, существует только взаимная масса, а не „собственная“. Понятие массы находится в простом и непосредственном отношении не к понятию материи, а к понятию энергии. А именно, материя есть не что иное, как совокупность электронов и протонов, последние следует рассматривать неразрушимыми и неизменяемыми. ² Масса же материального тела есть величина, частично изменяющаяся и при том не аддитивная, которая зависит от относительного положения образующих это тело элементарных заряженных частиц, а именно таким же самым образом, как и их взаимная электрическая энергия. Соответственно этому возникает вопрос о локализации массы. Этот вопрос очевидно должен решиться одновременно с вопросом о локализации энергии.

Поскольку электромагнитная энергия системы наэлектризованных частиц выражается как функция их взаимных расстояний

¹ Следует принять в расчет, что формула (16), так же как и лежащее в основе ее соотношение $H = \frac{1}{c} v \times E$, должна иметь место не только для отдельного электрона, но и для произвольных электрических систем, движущихся, как целое, прямолинейно и равномерно.

² В последнее время обнаружались факты, подрывающие эту концепцию, а именно, взаимное уничтожение отрицательных и положительных электронов („аннигиляция материи“) с выделением их полной энергии в виде электромагнитного излучения, а также обратный процесс образования „пар“ (+ и - электрон) за счет энергии излучения. Эти факты могут быть, однако, согласованы с принципом неразрушимости элементарных частиц материи, если, следуя Дираку, „положительные электроны“ считать „дырками“ в пространстве, насыщенном отрицательными электронами в состояниях с отрицательной энергией.

(и скоростей), о какой-либо ее локализации не может быть и речи. Однако мы видели выше, что в случае электрических и магнитных полей, не зависящих от времени, „полную“ энергию можно трактовать как своего рода „субстанцию“, распределенную во всем пространстве с объемной плотностью $\frac{1}{8\pi} E^2$ или $\frac{1}{8\pi} H^2$. Попробуем теперь обобщить это представление электромагнитной энергии как пространственно локализуемой величины на произвольные зависящие от времени явления.

§ 4. Электромагнитная энергия и излучение. Рассмотрим систему наэлектризованных частиц, которые могут двигаться совершенно произвольным образом, и охарактеризуем ее посредством некоторого, вначале произвольного пространственного распределения электрического заряда и количества движения с конечной объемной плотностью ρ и \mathbf{j} . При этом можно положить

$$\mathbf{j} = \rho \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (18)$$

(см. § 1 главы VI) и соответственно этому написать закон сохранения электричества в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (18a)$$

Чтобы получить наиболее общее определение энергии, мы должны вернуться к источнику этого понятия, т. е. рассмотреть работу, которая совершается электростатическими и электромагнитными силами. При этом мы будем принимать во внимание не только „внешние“ силы, действующие на электрон со стороны других электронов, но и соответствующие „собственные“ силы; другими словами, под силой $d\mathbf{F}$, действующей на заряд $de = \rho dV$, находящийся в элементе объема dV , мы будем понимать полную силу, включая и ту часть, которая зависит от близ лежащих элементов соответствующего электрода и принципиально также и от самого рассматриваемого элемента ρdV (однако последняя часть должна исчезать в пределе $dV \rightarrow 0$).

Соответственно этому, мы будем рассматривать полные электрические и магнитные поля, которые связаны с ρ и \mathbf{j} уравнениями

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}.$$

Сила, действующая на заряд $de = \rho dV$, выражается формулой

$$d\mathbf{F} = de \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right). \quad (18b)$$

Ее работу в течение времени dt мы получим путем внутреннего умножения $d\mathbf{F}$ на соответствующее перемещение $\mathbf{v} dt$ рас-

смаатриваемого элемента заряда. Эта работа, следовательно, равна

$$dFv dt = \rho Ev dV dt,$$

так как произведение $(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v}$ равно нулю (магнитная сила никогда не производит работы). Если обозначить работу, отнесенную к единице объема и времени, через l , то

$$l = \rho Ev,$$

или по (18)

$$l = cEj, \quad (19)$$

Зменим в этом выражении j через $\frac{1}{4\pi} \left(\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ и прибавим сюда сопряженное выражение

$$l^* = -\frac{c}{4\pi} \mathbf{H} \left(\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right), \quad (19a)$$

которое по (49a) главы V представляло бы работу магнитных сил при неравной нулю плотности „магнитного“ тока \mathbf{j}^* . В действительности \mathbf{j}^* , а следовательно и l^* , равны нулю, так что прибавление l^* ничего не изменяет (оно позволяет однако привести рассматриваемую работу к симметричному виду, который легко преобразуется желательным образом). Итак

$$l = l + l^* = \frac{c}{4\pi} \left\{ \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} \right\} - \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right),$$

т. е.

$$l = -\frac{c}{4\pi} \text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi}. \quad (19b)$$

Если умножить это уравнение на dV и проинтегрировать по объему V , ограниченному поверхностью S , то для всей работы, произведенной в этом объеме в единицу времени, $A = \int l dV$, получается формула

$$A = -\frac{dW}{dt} - \oint K_n dS, \quad (20)$$

где для сокращения положено

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV \quad (20a)$$

и

$$\mathbf{K} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (20b)$$

Величина W , согласно результатам предыдущего параграфа, может быть интерпретирована как электромагнитная энергия, заключенная в объеме V . Эта интерпретация вполне соответствует той роли, которую W играет в формуле (20). В самом деле, если мы представим себе на мгновение, что поверхностный

интеграл $\oint K_n dS$ обращается в нуль, то формула (20) означает, что работа A производится за счет величины W . Но это и есть основное свойство энергии.

Вообще говоря, интеграл $\oint K_n dS$ остается, как мы сейчас увидим, отличным от нуля даже при удалении поверхности S на бесконечность. Напротив, работа A должна обращаться в нуль для произвольной замкнутой поверхности, не пересекающей электронов и протонов, если движение отдельных частиц происходит так, что внешняя сила, действующая на каждую из них, уравнивается соответствующей собственной силой [см. (17b)] Если, следовательно, исходить из принципа движения Лоренца, то уравнение (20) сводится к

$$-\frac{dW}{dt} = \oint K_n dS. \quad (21)$$

Нужно заметить, что принцип Лоренца не имеет прямого отношения к уравнению (20). Это уравнение можно всегда привести к виду (21), если только внутри поверхности S нет никаких электрических зарядов.

Уравнение (21) совершенно аналогично уравнению

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = \oint c j_n dS$$

(глава II, § 2), которое выражает принцип сохранения электричества. При этом объемной плотности ρ соответствует плотность энергии

$$\xi = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2), \quad (21a)$$

а плотности тока $c \mathbf{j} = \mathbf{J}$ (в электростатических единицах) вектор \mathbf{K} . Поэтому становится возможным рассматривать электромагнитную энергию как род субстанции, а уравнение (21) — как выражение принципа сохранения этой субстанции. Соответственно этому вектор \mathbf{K} можно назвать плотностью потока энергии. Если бы аналогия между энергией и электричеством была полной, то между \mathbf{K} и ξ должно было бы иметься соотношение вида

$$\mathbf{K} = \xi \mathbf{C}. \quad (21b)$$

соответственно соотношению (18) между \mathbf{J} и ρ . При этом вектор \mathbf{C} имел бы смысл скорости течения энергии в данной точке. Такой вектор можно всегда определить просто как частное от деления \mathbf{K} на ξ . Спрашивается только, имеет ли он какой-либо физический смысл. В тесной связи с этим стоит также и вопрос о том, в какой мере допустимо представление электромагнитной энергии как субстанции.

Для решения этого вопроса вычислим вектор \mathbf{K} для простейшего случая электромагнитного поля элементарного осциллятора.

При этом рассмотрим сначала поле в волновой зоне, т. е. отождествим \mathbf{E} и \mathbf{H} с полями $\mathbf{E}^{(2)}$ и $\mathbf{H}^{(2)}$, определяемыми формулами (31) и (32) главы V. С помощью соотношений

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_j \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{R}_j \quad (22)$$

мы сразу получаем по (20b)

$$\mathbf{K} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{R}_0 E^2 = \frac{c}{4\pi} \mathbf{R}_j H^2 = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \mathbf{R}_j c. \quad (22a)$$

Отсюда, сравнивая с (21a) и (21b), получаем

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}_j c. \quad (22b)$$

Скорость \mathbf{C} в данном случае есть, следовательно, не что иное как скорость распространения электромагнитных волн в данной точке. Этот результат, очевидно, можно обобщить на любые системы электрических (или магнитных) осцилляторов и вообще на любые электрические системы, потому что на очень больших расстояниях всегда имеет место соотношение (22) (ср. главу V, § 8), характеризующее волновую зону.

Этим в самом общем виде решается, и именно в положительном смысле, поставленный выше вопрос для волновой зоны.

Однако, легко убедиться, что для других частей электромагнитного поля, которые играют главную роль на малых расстояниях („малых“, разумеется, по отношению к длине волны), скорость, определяемая формулой (21b), не имеет физического смысла. Представим себе, например, систему, состоящую из покоящегося заряда и элементарного тока. Для не слишком малых расстояний их можно представлять себе сосредоточенными в одной точке. Так как электрические силовые линии радиальны, а магнитные проходят в меридиональных плоскостях, определяемых магнитной осью тока, то линии, представляющие вектор $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, должны быть коаксиальными кругами (параллелями). Мы имеем, следовательно, в этом случае „поток энергии“, вращающийся вокруг оси электрического тока в направлении, зависящем от знака заряда, со скоростью [в смысле формулы (21b)], которая стремится к нулю при исчезающем заряде. Очевидно, что этот процесс есть фикция, так как заряд и ток, которые мы объединили в одну систему, совсем не влияют друг на друга.

В вышерассмотренном случае волновой зоны элементарного осциллятора плотность электромагнитной энергии определяется по (31) и (32) главы V выражением

$$\xi = \frac{|\dot{\mathbf{p}}' \times \mathbf{R}_j|^2}{4\pi c^4 R^2}.$$

Если обозначить через θ угол между \mathbf{R} и $\dot{\mathbf{p}}'$ (где штрих

означает, что вектор $\ddot{\mathbf{p}}$ относится к эффективному времени $t' = t - \frac{R}{c}$, то для вектора \mathbf{K} получаем по (22а) выражение

$$\mathbf{K} = \frac{R}{4\pi R^2} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}'|^2}{c^3} \sin^2 \theta. \quad (23)$$

Для полного потока энергии через поверхность сферы радиуса R отсюда получается формула

$$Q = \oint K_n dS = \frac{1}{c^3} |\ddot{\mathbf{p}}'|^2 \overline{\sin^2 \theta},$$

или, так как

$$\overline{\sin^2 \theta} = 1 - \overline{\cos^2 \theta} = \frac{2}{3},$$

$$Q = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}'|^2}{c^3}. \quad (23a)$$

Этот поток энергии не зависит от величины сферы, если рассматривать осциллятор в определенный эффективный момент времени. Таким образом, можно утверждать следующее: „ускоренное“ движение осциллятора в течение бесконечно малого промежутка времени от t' до $t' + dt$ обуславливает излучение определенного количества энергии Qdt' . Эта энергия распространяется в волновой зоне во все стороны со скоростью света и в каждый последующий момент оказывается локализованной в шаровом слое толщины $c dt'$, ограниченном двумя шаровыми поверхностями с радиусами $c(t-t')$ и $c(t-t'-dt')$.

В случае световых волн вектор \mathbf{K} в каждой точке определяет направление и вместе с тем интенсивность световых лучей. Поэтому его называют вектором излучения.¹

По формуле (21) излучение энергии через какую-либо замкнутую поверхность S должно происходить за счет запасенной внутри этой поверхности энергии. Если представить себе S как поверхность раздела между волновой зоной и „внутренней“ областью пространства, в которой главную роль играют поля $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{H}^{(1)}$, то вышеописанный процесс излучения энергии можно рассматривать как превращение энергии $W^{(0)} + W^{(1)}$, соответствующей упомянутым полям, в энергию $W^{(2)}$ электромагнитного поля $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$, которое господствует в волновой зоне и со временем распространяется все дальше во все стороны.

Энергия $W^{(0)} + W^{(1)}$ составляется из электрической и магнитной энергии наэлектризованных частиц, образующих осциллятор. При этом сумма собственных электрических энергий этих частиц остается постоянной и поэтому ее можно не принимать в расчет. Напротив, их взаимная электрическая энергия должна убывать.

¹ Или также вектором Пойнтинга, так как он впервые был введен Дж Пойнтингом.

Эта убыль частью может быть компенсирована ростом магнитной, т. е. кинетической энергии электронов (напомним, что магнитное поле $\mathbf{H}^{(1)}$ следует закону Био-Савара, следовательно, пропорционально скорости электронов). Этого вопроса мы здесь разбирать не будем. Приведенные соображения имеют лишь целью выяснить соотношение между энергиями $W^{(0)} + W^{(1)}$, с одной стороны, и $W^{(2)}$ — с другой.

Энергия $W^{(0)} + W^{(1)}$ соответствует обычной „механической“ энергии системы материальных частиц; ее можно было бы приблизительно представить как сумму потенциальной (электрической) и кинетической (магнитной) энергии электронов, причем первая зависит от их относительного положения, а вторая — от их скоростей (взаимная кинетическая энергия относительно очень мала). Величины же, соответствующей энергии $W^{(2)}$, в классической механике не существует. Эту энергию, обусловленную ускорением наэлектризованных частиц и распространяющуюся в бесконечность в виде электромагнитных волн, называют энергией излучения (или „лучистой энергией“). Следовательно процесс излучения энергии можно грубо определить как превращение механической энергии в энергию лучистую. Однако, нельзя забывать, что разделение электромагнитной энергии на механическую и лучистую не точно; точное разделение подобного рода принципиально невозможно.

Уменьшение количества механической энергии системы при излучении называют затуханием. Это затухание можно, по крайней мере формально, свести к силам того же рода, что и силы трения в обычной механике. Для простоты представим себе осциллятор, содержащий лишь один движущийся (по кругу или колеблющийся) электрон. Электрический момент p этого осциллятора можно положить равным $e\mathbf{r}$, где e — заряд движущегося электрона, а \mathbf{r} — его радиус-вектор по отношению к неподвижной точке (например, другому неподвижному заряду — e). Соответственно этому $\ddot{\mathbf{p}} = e \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{w}$ и следовательно, по (23а),

$$Q = \frac{2}{3} \frac{e^2 w^2}{c^3}. \quad (23b)$$

Это и есть энергия, которую движущийся электрон или, вернее, осциллятор теряет посредством излучения. Эту потерю энергии нужно приписать добавочной „силе трения“ \mathbf{f} (до сих пор не принимавшейся нами в расчет). Для определения этой силы нужно произведенную ей в промежутке (t_1, t_2) работу

$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \mathbf{v} dt$ положить равной по величине и противоположной по знаку излученной за этот промежуток времени энергии $\int_{t_1}^{t_2} Q dt$.

По (23b) получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \mathbf{v} dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^t \omega^2 dt. \quad (24)$$

Стоящий справа интеграл преобразуем интегрированием по частям. При этом получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{w} d\mathbf{v} = [\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \frac{d\mathbf{w}}{dt} dt.$$

Величина

$$[\mathbf{wv}]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} \right)_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} \right)_1$$

при стационарных или слабо затухающих колебаниях должна быть, очевидно, практически (в среднем) равна нулю, по крайней мере в сравнении с величиной $\int_{t_1}^{t_2} \omega^2 dt$. Поэтому для промежутков (t_1, t_2) , достаточно больших по сравнению с периодом колебаний (но помимо этого условия очень малых), можно положить

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega^2 dt \cong - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \frac{d\mathbf{w}}{dt} dt,$$

и соответственно этому, по (24),

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \mathbf{v} dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{v} dt,$$

или, наконец,

$$\mathbf{f} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d\mathbf{w}}{dt}. \quad (24a)$$

Эта сила трения, которая обычно называется сопротивлением излучения, ¹ представляет собой нерассмотренную в предыдущем параграфе часть „собственной силы“ \mathbf{F} , т. е. результирующей тех элементарных сил, с которыми действуют друг на друга бесконечно малые элементы (de, de') электрона. Она может быть получена, если при вычислении этой силы по формуле (17) принять во внимание запаздывание соответствующих элементарных силовых воздействий. Будем подразумевать под \mathbf{w}' ускорение электрона не в рассматриваемый момент t , а в предшествующий момент $t' = t - \frac{R}{c}$, где R означает расстояние „активного“ элемента заряда de' от „пассивного“

¹ Впервые была введена М. Планком.

de. При этом мы будем предполагать, что электрон движется как твердое тело, т. е. что различные элементы электрона в одинаковые моменты времени имеют одинаковую скорость и, следовательно, одинаковое ускорение.¹

Если разложить ускорение w' , как функцию t' , в ряд по степеням разности $t' - t$, то в первом приближении получим

$$w' = w + (t' - t) \frac{dw}{dt},$$

где w и $\frac{dw}{dt}$ относятся к моменту t , или так как $t' - t = -\frac{R}{c}$, то

$$w' = w - \frac{R}{c} \frac{dw}{dt} = w - \frac{R}{c} \dot{w}.$$

Подставляя это выражение в (17), имеем

$$E^{(2)} = -\frac{de'}{c^2 R} \left\{ w - R_0 (R_0 \dot{w}) \right\} + \frac{de'}{c^3} \left\{ w - R_0 (R_0 \dot{w}) \right\}.$$

откуда после умножения на de и двойного суммирования по различным элементам электрона (обладающего шаровой симметрией) получим [ср. вывод (17a)]

$$F = -m w + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{w}. \quad (24b)$$

Эту формулу следует рассматривать как исправление прежней формулы (17a) для собственной силы электрона. При этом мы ввели в выражение этой силы массу электрона m по (16b). Полная собственная сила складывается, следовательно, из двух частей: силы инерции — $m w$ и силы затухания или „радиационного трения“

$$f = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{w}.$$

В конце главы VI мы уже заметили, что при рассмотрении взаимодействия между различными частями системы электрических зарядов, обычным выражением для запаздывающих электромагнитных потенциалов и полей следует предпочесть соответствующие разложения в ряд, которые могут быть представлены как мгновенные дальние действия. Действительно, формулу (24b) можно было бы получить непосредственно из слегка исправленной формулы (28a) главы VI. При этом первому члену (28), пропорциональному квадрату $\frac{1}{R}$, не соответствует никакой соб-

ственной силы; второму члену, линейному относительно $\frac{1}{R}$, соответствует собственная сила

$$-\left\{ w + R_0 (w R_0) \right\} \frac{U}{c^2} = -\frac{4}{3} \frac{U}{c^2} w = -m w,$$

¹ Ср. ниже теорию деформируемого (Лоренцова) электрона.

в согласии с (17а), и, наконец, третьему члену, не зависящему от R , соответствует собственная сила

$$+ \frac{e^3}{c^3} \frac{d\mathbf{w}}{dt}.$$

В этом выражении нет множителя $\frac{2}{3}$, что объясняется неточностью формулы (28а). Если бы мы в рядах (27) и (27а) главы VI приняли во внимание еще один член, то рассматриваемая часть собственной силы получилась бы с правильным множителем.

В заключение укажем на следующее. Уравнение (21), которое можно рассматривать как интегральное выражение закона сохранения энергии, можно, подобно соответствующему уравнению для принципа сохранения электричества, заменить дифференциальным уравнением, которое, очевидно, гласит

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \text{div}' K = 0. \tag{25}$$

Это есть не что иное как уравнение (19b), в котором однако положено $l = 0$. Однако нужно принять в расчет, что последнее уравнение верно не всегда. В самом деле, из равенства нулю работы $\int l dV$ для всего электрона (по принципу движения Лоренца) еще нельзя заключать, что элементарные работы $l dV$ для каждого элемента электрона равны нулю.

Разбор этого вопроса невозможен без более глубоких соображений о структуре электрона.

§ 5. Преобразование электрических и магнитных сил; электромагнитное количество движения. Полная сила dF , действующая на элемент заряда $ce = \rho dV$, может быть представлена в виде $dF = \mathbf{f} dV$.

Вектор \mathbf{f} выражается, согласно (18b), формулой

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{H} \tag{26}$$

и может быть определен как сила, отнесенная к единице объема, или как импульс этой силы в единицу времени. При таком определении вектор \mathbf{f} соответствует скаляру l ; последний означает работу, относящуюся к единице объема, первый—соответствующий импульс.

Покажем теперь, что выражение (26) может быть преобразовано совершенно аналогично тому преобразованию, которому в предыдущем параграфе было подвергнуто выражение (19).

Рассмотрим сначала случай, когда электрическое и магнитное поля постоянны во времени. Тогда обе части (26) могут быть преобразованы в отдельности, одна независимо от другой.

На основании уравнений

$$\text{div } \mathbf{E} = 4 \pi \rho, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0$$

результатирующая электрическая сила

$$\mathbf{F}^{(e)} = \int \mathbf{E} \rho \cdot dV,$$

действующая на заряды, находящиеся в объеме V , может быть прежде всего написана в форме

$$\mathbf{F}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} dV.$$

Далее мы имеем по общей формуле (16с) Введения

$$\int \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \oint (\mathbf{E} \mathbf{n}) \mathbf{E} dS - \int (\mathbf{E} \operatorname{grad}) \mathbf{E} dV$$

и, по (27) (там же,) вследствие $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$,

$$(\mathbf{E} \operatorname{grad}) \mathbf{E} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} E^2.$$

Отсюда следует

$$\mathbf{F}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \oint (\mathbf{E} \mathbf{n}) \mathbf{E} dS - \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{grad} E^2 dV$$

и, наконец, по (16) Введения,

$$\mathbf{F}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \left(\oint \mathbf{E} E_n - \mathbf{n} \frac{E^2}{2} \right) dS. \quad (27)$$

Посредством этой формулы сила $\mathbf{F}^{(e)}$ представляется как равнодействующая особых напряжений, подобных упругим, которые действуют во всем электрическом поле (так же и там, где нет зарядов). При этом мы можем представить себе, что на каждый элемент поверхности dS действует определенная сила — $\mathbf{T}_n^{(e)} dS$, причем $\mathbf{T}_n^{(e)}$ — напряжение, отнесенное к единице поверхности, выражается формулой

$$\mathbf{T}_n^{(e)} = \mathbf{n} \frac{E^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{E} E_n}{4\pi}. \quad (27a)$$

Подобные напряжения или поверхностные силы рассматриваются в теории упругости, где они характеризуют взаимодействие двух частей тела, граничащих по рассматриваемой поверхности. В нашем случае эти напряжения — являются математическими фикциями, которые в очень удобной и наглядной форме представляют взаимодействие электрических зарядов, находящихся по разную сторону от поверхности S .

Если электрическое поле параллельно нормали \mathbf{n} к поверхности ($\mathbf{E} E_n = \mathbf{n} E^2$), то напряжение (27a) сводится к $\mathbf{n} \frac{E^2}{8\pi}$. Следо-

вательно, в этом случае мы имеем натяжение, действующее изнутри наружу; если, наоборот, векторы \mathbf{n} и \mathbf{E} перпендикулярны друг к другу, то мы получаем давление той же величины, действующее снаружи внутрь (вроде обычного гидростатического давления). Другими словами, можно представлять себе электрические силовые линии как напряженные нити, которые в продольном направлении подвергаются натяжению, а в поперечном—давлению; при этом упомянутые „главные напряжения“—продольное натяжение и поперечное давление, отнесенные к единице поверхности, равны объемной плотности электрической энергии (Максвелловы напряжения). Вектор напряжения $T_n^{(e)}$ с математической точки зрения можно трактовать, как внутреннее произведение определенной тензорной величины ${}^2T^{(e)}$, так называемого тензора электрических напряжений, на нормаль \mathbf{n} . Умножая T_n на какой-либо другой единичный вектор \mathbf{k} , получаем скалярную величину

$$T_{nk}^{(e)} = (\mathbf{nk}) \frac{E^2}{8\pi} - \frac{E_n E_k}{4\pi}, \quad (27b)$$

которую можно назвать компонентой тензора ${}^2T^{(e)}$ относительно обоих направлений \mathbf{n} и \mathbf{k} . Из того обстоятельства, что \mathbf{n} и \mathbf{k} входят в (27b) совершенно симметрично, нужно заключить, что тензор электрических напряжений является симметричным. Его компоненты относительно какой-либо прямоугольной координатной системы X_1, X_2, X_3 выражаются по (27b) (где \mathbf{n} и \mathbf{k} должны означать два координатных вектора) следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} T_{11}^{(e)} &= \frac{1}{8\pi} (-E_1^2 + E_2^2 + E_3^2), & T_{22}^{(e)} &= \frac{1}{8\pi} (-E_2^2 + E_3^2 + E_1^2), \\ T_{33}^{(e)} &= \frac{1}{8\pi} (-E_3^2 + E_1^2 + E_2^2), \\ T_{23}^{(e)} = T_{32}^{(e)} &= -\frac{E_2 E_3}{4\pi}, & T_{31}^{(e)} = T_{13}^{(e)} &= -\frac{E_1 E_3}{4\pi}, & T_{12}^{(e)} = T_{21}^{(e)} &= -\frac{E_1 E_2}{4\pi}. \end{aligned} \right\} (27c)$$

Совершенно аналогичные результаты получаются при преобразовании магнитной (или электромагнитной) силы

$$\mathbf{F}^{(m)} = \int \mathbf{j} \times \mathbf{H} dV,$$

в предположении, что электрический ток стационарен (и, следовательно, магнитное поле постоянно во времени). В этом случае мы имеем

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{i}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{j} \times \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}$, и поэтому, на основании тождества $\operatorname{grad} \frac{H^2}{2} = (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{H} + \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}$,

$$\int \mathbf{j} \times \mathbf{H} dV = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{H} dV - \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{grad} H^2 dV,$$

т. е.

$$\mathbf{F}^{(m)} = \frac{1}{4\pi} \left(\oint \mathbf{H} H_n - \mathbf{n} \frac{H^2}{2} \right) dS. \quad (28)$$

Эта формула идентична с (27). Поэтому об ее интерпретации можно не говорить. Вектор

$$\mathbf{T}_n^{(m)} = \mathbf{n} \frac{H^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H} H_n}{4\pi} \quad (28a)$$

можно определить, как нормальную компоненту тензора магнитных напряжений ${}^2\mathbf{T}^{(m)}$. Его прямоугольные компоненты выражаются формулами, совершенно аналогичными (27с):

$$\left. \begin{aligned} T_n^{(m)} &= \frac{1}{8\pi} (-H_1^2 + H_2^2 + H_3^2), & T_{22}^{(m)} &= \frac{1}{8\pi} (-H_2^2 + H_3^2 + H_1^2), \\ T_{33}^{(m)} &= \frac{1}{8\pi} (-H_3^2 + H_1^2 + H_2^2), \\ T_{23}^{(m)} &= T_{32}^{(m)} = -\frac{H_2 H_3}{4\pi}, & T_{31}^{(m)} &= T_{13}^{(m)} = -\frac{H_1 H_3}{4\pi}, \\ T_{12}^{(m)} &= T_{21}^{(m)} = -\frac{H_1 H_2}{4\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (28b)$$

Сумму

$${}^2\mathbf{T} = {}^2\mathbf{T}^{(e)} + {}^2\mathbf{T}^{(m)} \quad (28c)$$

называют тензором электромагнитных напряжений.

Перейдем теперь к нашей общей задаче: преобразованию выражения (26) или интеграла

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} dV,$$

для произвольных электрических систем, т. е. для переменных электромагнитных полей.

Напишем при этом основные уравнения электромагнитного поля в форме

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi\mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 4\pi\rho^*, & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -4\pi\mathbf{j}^*, \end{aligned} \quad (29)$$

где, разумеется, плотности магнитных зарядов и токов равны нулю ($\rho^* = 0, \mathbf{j}^* = 0$), и прибавим к выражению (26) выражение, соответствующее магнитным величинам [ср. (12а) главы V]

$$\mathbf{f}^* = \rho \mathbf{H}^* - \mathbf{j}^* \times \mathbf{E}.$$

При этом получится

$$\mathbf{f} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^* = \rho \mathbf{E} + \rho^* \mathbf{H} + \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \mathbf{j}^* \times \mathbf{E},$$

или, по (29),

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{H} + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \times \mathbf{E} \right\} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} - \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}) - \\ - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Вычитая друг из друга равенства

$$\oint (\mathbf{E}\mathbf{n}) \mathbf{E} dS = \int (\mathbf{E} \operatorname{grad}) \mathbf{E} dV + \int \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} dV$$

и

$$\oint \frac{E^2}{2} \mathbf{n} dS = \int \operatorname{grad} \frac{E^2}{2} dV = \int (\mathbf{E} \operatorname{grad}) \mathbf{E} dV + \int \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} dV,$$

получаем тождество

$$\int (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}) dV = \oint \left\{ (\mathbf{E}\mathbf{n})\mathbf{E} - \mathbf{n} \frac{E^2}{2} \right\} dS.$$

С помощью этого тождества и соответствующего тождества для \mathbf{H} мы получаем далее

$$\begin{aligned} \int \mathbf{f} dV = \frac{1}{4\pi} \oint \left\{ (\mathbf{E}\mathbf{n})\mathbf{E} + (\mathbf{H}\mathbf{n})\mathbf{H} - \mathbf{n} \frac{E^2 + H^2}{2} \right\} dS - \\ - \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} - \oint \mathbf{T}_n dS, \quad (30)$$

где

$$\mathbf{G} = \int \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{4\pi c} dV = \frac{1}{c^2} \int \mathbf{K} dV. \quad (30a)$$

\mathbf{K} означает вектор потока энергии (20b), а \mathbf{T}_n — нормальную компоненту тензора напряжений

$$-\mathbf{T}_n = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} E_n + \mathbf{H} H_n - \mathbf{n} \frac{E^2 + H^2}{2} \right). \quad (30b)$$

Формула (30) вполне аналогична формуле (20). При этом скалярам A (работа в единицу времени) и W (энергия) соответствуют векторы \mathbf{F} и \mathbf{G} ; вектору \mathbf{K} в (20) соответствует в (30) тензор ${}^2\mathbf{T}$. Из этого чисто формального соотношения между обоими выражениями следует, что они должны допускать соответствующую физическую интерпретацию. Действительно, если рассматривать вектор \mathbf{F} не как силу, а как импульс этой силы в единицу времени (см. выше), и воспользоваться обычным механическим соотношением между импульсом силы и результирующим изменением механического количества движения (которое вполне соответствует соотношению между работой и изменением кинетической энергии), то можно определить вектор \mathbf{G} как электромагнитное количество движения, запасенное в объеме V , а тензор ${}^2\mathbf{T}$ как объемную плотность потока этого количества движения.

Если бы импульс \mathbf{F} был отличен от нуля, то можно было бы сказать, что он произведен за счет электромагнитного количества движения. Так как, однако, для каждого отдельного электрона этот импульс равен нулю в силу принципа движения Лоренца, то формула (30), в случае если рассматриваемая поверхность не пересекает электронов, сводится к

$$-\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \int \mathbf{T}_n dS \quad (31)$$

и выражает закон сохранения электромагнитного количества движения.

Последнюю формулу можно заменить соответствующим дифференциальным уравнением

$$-\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \operatorname{div} {}^2\mathbf{T} = 0, \quad (31a)$$

где

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{K}}{c^2} \quad (31b)$$

означает объемную плотность электромагнитного количества движения. Нужно, однако, принять в расчет, что уравнение (31a) не имеет места внутри отдельных электронов.

Согласно приведенной интерпретации, электромагнитное количество движения, точно так же как и электромагнитная энергия, трактуется как нечто субстанциальное, что может быть локализовано в пространстве. Так как оно представляет собой величину векторную, то само по себе оно не может рассматриваться как субстанция. Однако, по аналогии с обычным определением механического количества движения (произведение массы на скорость), можно определить вектор \mathbf{G} как произведение скаляра μ , имеющего значение обычной плотности массы, т. е. обычной инертной массы в единице объема, на вектор, который должен представлять собой скорость движения этой массы.

Вспомним, что в предыдущем параграфе мы произвели аналогичное разложение вектора потока энергии \mathbf{K} . Подставляя соответствующее выражение (21b) в (31b), получим

$$\mathbf{g} = \mu \mathbf{C}, \quad (32)$$

где

$$\mu = \frac{\xi}{c^2}. \quad (32a)$$

Последнее уравнение выражает самое общее соотношение между плотностью массы и энергии. Оно соответствует соотношению (16b) между массой и энергией (электростатической) электрона, которое мы установили на основе электромагнитной теории массы. При этом масса электрона (или какой-либо системы электронов) оказывается свойством его электромагнитного поля, и должна быть локализована не в самом электроне, т. е. в пространстве, в котором представляется локализованным его заряд, а во всем пространстве, на которое простирается электромагнитное поле этого заряда. Далее из формулы (32a) следует, что масса определяется не только электрической, но также и магнитной энергией; иными словами, масса электрона должна возрастать при увеличении его скорости и принимать вычисленное выше значение лишь в предельном случае очень малых скоростей. Странным образом в общей формуле (32a) отсутствует множитель $\frac{4}{3}$, входящий в (16b). Это обстоятельство представляет для электромагнитной теории массы большое затруднение, к которому мы еще вернемся ниже.

Строго говоря, разложение (32), так же как и соответствующее разложение (21b), имеет физический смысл лишь в волновой зоне, где скорость \mathbf{C} по величине и направлению совпадает со скоростью распространения электромагнитных волн. В этом случае тензор 2T может быть представлен в форме, совершенно идентичной с той, какую он имел бы в обычной механике. А именно, если бы мы имели непрерывно распределенную субстанцию с плотностью μ , и скоростью движения \mathbf{C} , то компоненты тензора 2T — плотности потока вектора \mathbf{g} — выражались бы через компоненты \mathbf{C} и \mathbf{g} точно таким же образом, как компоненты вектора \mathbf{g} — плотности потока массы μ — выражаются через компоненты \mathbf{C} и скаляр μ . Следовательно, в этом случае, наряду с формулами $g_i = \mu C_i$ ($i = 1, 2, 3$), должны иметь место соответствующие формулы

$$T_{ik} = \mu C_i C_k. \quad (32b)$$

Легко однако убедиться, что в волновой зоне эти формулы совпадают с общими формулами

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-E_i E_k - H_i H_k + \delta_{ik} \frac{E^2 + H^2}{2} \right), \quad (33)$$

вытекающими из (30b); при этом δ_{ik} — компоненты единичного тензора

$${}^2\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (33a)$$

так что $\delta_{ik} = 1$, при $i = k$, и $\delta_{ik} = 0$, при $i \neq k$.

Представим себе, например, что первая ось направлена в сторону распространения волны, вторая — параллельно электрическому полю, и третья — магнитному полю. При этом мы получаем по (22) правовинтовую координатную систему, по отношению которой компоненты тензора (33) выражаются следующим образом:

$$T_{11} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \xi, T_{22} = -\frac{E^2 + H^2}{8\pi} = 0, T_{33} = \frac{E^2 - H^2}{8\pi} = 0, \quad (33b)$$

$$T_{23} = T_{31} = T_{12} = 0.$$

Тот же результат получается по формуле (32b), если под \mathbf{S} разуметь вектор скорости света и принять во внимание соотношение (32a) между плотностью массы и энергии.

Однако, необходимо подчеркнуть, что это совпадение имеет место лишь для волновой зоны. Вообще же говоря, вектора скорости \mathbf{S} , через который компоненты тензора (33) выражались бы в форме (32b), не существует, хотя бы уже потому, что, приравнявая (32b) и (33), мы получаем шесть уравнений для трех неизвестных (компоненты \mathbf{S}).

Итак, „субстанциальное“ представление электромагнитного поля как носителя энергии и массы безусловно возможно лишь для волновой зоны; вне ее разложение вектора потока энергии (или количества движения) и в особенности „тензора потока количества движения“ ${}^2\mathbf{T}$, по аналогии с классической механикой, не только не имеет физического смысла, но в последнем случае невозможно и математически. Отметим еще, что в той области пространства, где это разложение возможно, электромагнитная энергия вдвое больше, чем кинетическая (в смысле обычной механики) энергия массы (32a), движущейся со скоростью света.

Обе интерпретации тензора ${}^2\mathbf{T}$ — как плотности потока электромагнитного количества движения и как тензора напряжений — очевидно вполне эквивалентны друг другу. Выясним эту эквивалентность на следующем простом примере. Рассмотрим пучок световых лучей, т. е. ограниченный с боковых сторон ряд волн, который падает перпендикулярно на материальную пластинку и поглощается ею. При этом энергия и количество движения, переносимые этим пучком лучей, так сказать, входят в пластинку, где они принимают форму обычной кинетической или тепловой энергии и обычного „механического“ количества движения, которое может проявиться в движении пластинки в направлении

световых лучей. Отсюда следует, что пластинка под влиянием световых лучей испытывает определенное давление. Это так называемое световое давление, очевидно, равно количеству движения, переносимому на пластинку в единицу времени, т. е. (если давление отнесено к единице площади) равно произведению gc ; с другой стороны, оно должно быть равно вычисленной выше компоненте тензора напряжений $T_{11} = \xi$. Эти величины, однако, тождественны, так как из (32) и (32a) следует

$$g = \frac{\xi}{c}.$$

Мы можем, следовательно, сказать, что давление света на перпендикулярную к световым лучам поглощающую поверхность численно равно плотности электромагнитной энергии.

При наклонном падении лучей вызываемая ими поверхностная сила (напряжение) T_n не сводится к простому гидростатическому давлению. Проекция этой силы на какой-либо единичный вектор выражается по известным правилам тензорного исчисления [Введение (34)] формулой

$$({}^2T_n) \mathbf{k} = T_{nk} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 T_{\alpha\beta} n_{\alpha} k_{\beta}.$$

В частном случае координатной системы, к которой относятся формулы (33b), мы получаем

$$T_{nk} = \xi_{nk} = \xi \cos \theta \cos \theta', \quad (34)$$

где θ и θ' — углы между векторами \mathbf{n} и \mathbf{k} , с одной стороны, и лучами света — с другой. Давление, действующее нормально к поверхности, в рассматриваемом случае, следовательно, равно

$$T_{nn} = \xi \cos^2 \theta. \quad (34a)$$

§ 6. Поступательное движение Лоренцова электрона. Введенные в двух предыдущих параграфах формулы преобразования для работы (20) и в особенности для силы (30) позволяют нам вычислить новым способом силу, оказываемую произвольно движущимся электроном на самого себя, и таким образом установить точную форму уравнений движения электрона на основе принципа Лоренца. Для этого при вычислении электромагнитного количества движения (или энергии) необходимо принимать в расчет лишь поле, создаваемое самим электроном.

Разумеется, можно было бы прямо вычислить искомую силу как равнодействующую элементарных сил между различными элементами электрона, так же как мы это делали приблизительно в § 2 и § 3 [формула (21b)]. Однако, непрямым методом имеет пред прямым следующее преимущество: электромагнитное поле электрона в определенный момент t можно по формулам (26a) и (26b) главы VI представить в виде ряда, отдельные члены которого зависят от его скорости \mathbf{v} , ускорения \mathbf{w} и высших

производных \mathbf{v} по времени. При вычислении силы по прямому методу члены, зависящие только от скорости (первого порядка), не имеют значения; при этом оказывается необходимым рассмотреть члены второго порядка, дающие главную часть силы, именно силу инерции. Нужно отметить, что эти члены наряду с ускорением могут содержать и скорость; при упомянутых приближенных вычислениях мы ограничивались случаем малых скоростей и соответственно этому принимали во внимание только члены, линейные относительно \mathbf{w} , которые не зависят от \mathbf{v} . Члены третьего порядка определяют другую часть силы, действующей на электрон, соответствующую трению излучения; они могут наряду с $\frac{d\mathbf{w}}{dt}$ содержать также \mathbf{v} и \mathbf{w} ; однако, при вычислении силы затухания мы предполагали \mathbf{v} и \mathbf{w} сравнительно малыми. Аналогичные соображения можно применить к членам высшего порядка.

Наоборот, при непрямом методе, вследствие появления производных энергии и количества движения по времени в формулах (20) и (30) для вычисления силы, действующей на электрон при его движении, или ее работы, нужно принимать во внимание уже члены первого порядка, которые зависят только от скорости. Эти члены играют главную роль, так как из соответственного члена в выражении количества движения \mathbf{G} посредством дифференцирования по времени получаются члены, линейно зависящие от ускорения, т. е. определяющие силу инерции.

Коротко говоря, это соотношение можно формулировать следующим образом.

Члены n -го порядка в разложении электромагнитного поля в ряд дают ту же (n -ую) часть силы при непрямом методе, которую при прямом методе можно вычислить только из членов $(n+1)$ -го порядка.

Следовательно, если нужно точно вычислить „силу инерции“, т. е. ту часть полной силы, которая пропорциональна ускорению электрона, причем нужно принять также в расчет ее зависимость от скорости, то при пользовании непрямым методом достаточно вычислить электромагнитное поле электрона, движущегося с постоянной скоростью. При этом интегралы, входящие в (20) и (30),

$$\oint K_n dS \quad \text{и} \quad \oint \mathbf{T}_n dS$$

для бесконечно удаленной поверхности превращаются в нуль (так как электрическое и магнитное поля при прямолинейном и равномерном движении, так же как и при покое, убывают обратно пропорционально квадрату расстояния), так что эти формулы приобретают следующий простой вид

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{G}}{dt} \quad (35)$$

и

$$A = \mathbf{F}\mathbf{v} = -\frac{dW}{dt}. \quad (35a)$$

Интегралы (30а) и (20а), которые определяют \mathfrak{G} и \mathfrak{W} , при этом, разумеется, должны быть распространены на все пространство.

В главе VI мы показали, что электромагнитное поле точечного заряда de , движущегося прямолинейно и равномерно (со скоростью, меньшей скорости света), выражается формулами

$$d\mathbf{E} = (1 - \beta^2) de \frac{\mathbf{R}}{R^{*3}}, \quad d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times d\mathbf{E} \quad (36)$$

[ср. (13), (13а) и (13b) главы VI]. Мы можем бесконечно малые элементы de рассматриваемого электрона считать точечными зарядами и результирующие поля \mathbf{E} , \mathbf{H} определить просто интегрированием выражений (36).

Вспомним, что вектор \mathbf{R} означает радиус-вектор точки P , в которой мы определяем поле относительно одновременного (мгновенного) положения P^* элемента de , и что в прямоугольной координатной системе X_1, X_2, X_3 , начало которой находится в P^* и ось X_1 которой лежит в направлении движения, имеет место формула

$$R^* = \sqrt{x_1^2 + (1 - \beta^2)(x_2^2 + x_3^2)}, \quad (36a)$$

где x_1, x_2, x_3 — компоненты \mathbf{R} .

Введем теперь новую прямоугольную координатную систему X'_1, X'_2, X'_3 , с тем же началом и тем же расположением осей, но с другим масштабом для первой оси (параллельной скорости \mathbf{v}), по формулам:

$$x_1 = x'_1 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3. \quad (37)$$

При этом выражение для R^* может быть представлено в виде

$$R^* = \sqrt{1 - \beta^2} R', \quad (37a)$$

где

$$R' = \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3} \quad (37b)$$

имеет смысл расстояния P^*P в новой координатной системе. Вставляя эти выражения в формулу (36) для $d\mathbf{E}$, мы получим

$$d\mathbf{E} = \frac{de}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathbf{R}}{R'^3}$$

или для составляющих по координатным осям

$$dE_1 = \frac{de}{\sqrt{1 - \beta^2}} = de \frac{x_1}{R'^3}, \quad dE_2 = \frac{de}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{x'_2}{R'^3}, \quad (38)$$

$$dE_3 = \frac{de}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{x'_3}{R'^3}$$

Отсюда следует, что вектор $d\mathbf{E}'$, с компонентами

$$dE'_1 = dE_1; \quad dE'_2 = dE_2 \sqrt{1 - \beta^2}; \quad dE'_3 = dE_3 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (38a)$$

можно трактовать как электрическое поле точечного заряда de , покоящегося в начале координатной системы X' .

После суммирования по различным элементам заряда электрона из (38а) получаются формулы

$$E_1 = E_1', \quad E_2 = \frac{E_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_3 = \frac{E_3'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (38b)$$

При этом E_1' , E_2' , E_3' означают компоненты результирующего поля рассматриваемого электрона относительно координатной системы X' .

Заметим теперь, что эта система координат получается из первоначальной X по формулам преобразования (37) посредством растяжения в направлении движения в отношении $1:\sqrt{1-\beta^2}$. Если, следовательно, электрон в координатной системе X является шарообразным, то в преобразованной координатной системе он должен представлять собой эллипсоид вращения, продольная ось которого в отношении $1:\sqrt{1-\beta^2}$ больше поперечной оси, т. е. первоначального радиуса шара a . Полный заряд электрона при этом остается неизменным, так что плотность заряда ρ' (относительно X') уменьшается в том же отношении сравнительно с истинной плотностью заряда ρ (относительно X).

В приведенных соображениях мы молчаливо предполагали, что электрон движется как абсолютно твердое тело (в смысле обычной механики). Однако, это представление, предложенное Абрагамом, ни в коем случае не является наиболее естественным. Мы видели в главе VI, § 3, что взаимодействие между элементами прямолинейно и равномерно движущейся системы точечных зарядов может быть таким же самым образом определено из конвекционного потенциала ψ как взаимодействие тех же точечных зарядов в состоянии покоя системы из обычного скалярного потенциала φ . Мы видели далее, что поверхности $\psi = \text{const}$ для каждого точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью $v = c\beta$, представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения, причем сплюснутые в направлении движения в отношении $\sqrt{1-\beta^2}:1$. С точки зрения преобразованной координатной системы X' эти эллипсоиды представляются сферами.

Возникает следующий вопрос: почему движущийся электрон должен иметь ту же форму, что и покоящийся, несмотря на вызванное движением изменение взаимодействия его элементов?

В состоянии покоя, в предположении шаровой симметрии, это взаимодействие сводится к радиально направленному напряжению, которое каким-то образом уравнивается силами связи, действующими между элементами электрона (иначе электрон „взорвался“ бы). При этом внешняя поверхность электрона совпадает с поверхностью уровня $\varphi = \text{const}$; то же самое имеет место вообще для всех поверхностей постоянной плотности

заряда. Представляется теперь вполне естественным считать это совпадение поверхностей $\rho = \text{const}$ и поверхностей $\varphi = \text{const}$ действительным условием равновесия электрона, чем в частности определяется и его форма.

Обобщим теперь, согласно Лоренцу (и Фитц-Джеральду), этот принцип равновесия на случай прямолинейно и равномерно движущегося электрона, причем заменим скалярный потенциал конвекционным потенциалом (при $v=0$ имеем $\psi = \varphi$). Итак мы предположим, что в движущемся электроне поверхности $\rho = \text{const}$, в частности „свободная“ поверхность, должны совпадать с поверхностями $\psi = \text{const}$.

Конвекционный потенциал элемента de электрона выражается по (15a) главы VI формулой

$$d\psi = de \frac{(1 - \beta^2)}{R^*}, \quad (39)$$

или, вследствие (37a),

$$d\psi = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{R'} de. \quad (39a)$$

Следовательно, поверхности $d\psi = \text{const}$ являются в координатной системе X' сферическими. Отсюда следует, что для электрона, шарообразного в этой системе, т. е. для такого электрона, для которого поверхности $\rho' = \text{const}$ в X' являются концентрическими сферами, поверхности уровня результирующего конвекционного потенциала тоже должны быть сферическими (в X').

Интеграл $\int \frac{de}{R'} = \psi'$ в этом случае является тождественным со скалярным потенциалом покоящегося электрона, который, как известно, может быть представлен в форме $\frac{e'}{r'}$ (r' означает измеренное в X' расстояние между точкой, в которой определяется потенциал, и центром O электрона).

При этом

$$\psi = \sqrt{1 - \beta^2} \psi' = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{e}{r'}. \quad (39b)$$

Но для того чтобы рассматриваемый электрон обладал шаровой симметрией относительно координатной системы X' , он должен в действительности (т. е. относительно X) представлять собой эллипсоид вращения, сплюснутый в отношении $\sqrt{1 - \beta^2} : 1$.

Таким образом, мы приходим к следующей, так называемой контракционной, гипотезе Лоренца.

Прямолинейно и равномерно движущийся электрон должен сжиматься в направлении движения в отношении $\sqrt{1 - \beta^2} : 1$ (его поперечные размеры при этом остаются без изменения).

Этим предположением наша задача — вычисление количества движения — сильно упрощается, а именно, она сводится к уже решенной статической задаче. Объемная плотность электромагнитного количества движения

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

может быть прежде всего с помощью соотношения $\mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$ представлена в виде

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c^2} [\mathbf{v} E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{v}E)] \quad (40)$$

или в компонентах по координатным осям X_1, X_2, X_3 :

$$g_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{v}{c^2} (E_2^2 + E_3^2), \quad g_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{v}{c^2} E_1 E_2; \quad g_3 = -\frac{1}{4\pi} \frac{v}{c^2} E_1 E_3.$$

Если ввести вместо E_1, E_2, E_3 величины E'_1, E'_2, E'_3 по (38b), то

$$g_1 = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{v}{1-\beta^2} (E_2'^2 + E_3'^2); \quad g_2 = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} E'_1 E'_2; \\ g_3 = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} E'_1 E'_3.$$

Для вычисления полного количества движения $\mathbf{G} = \int \mathbf{g} dV$ заметим, что элементу объема $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ в X координатной системе соответствует в координатной системе X' , согласно (37), элемент объема

$$dV' = dx_1' dx_2' dx_3' = \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Следовательно,

$$dV = \sqrt{1-\beta^2} dV',$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \frac{v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \frac{1}{4\pi} \int (E_2'^2 + E_3'^2) dV', \\ G_2 &= -\frac{v}{c^2} \frac{1}{4\pi} \int E'_1 E'_2 dV', \\ G_3 &= -\frac{v}{c^2} \frac{1}{4\pi} \int E'_1 E'_3 dV'. \end{aligned} \right\} \quad (40a)$$

Так как в состоянии покоя электрон обладает шаровой симметрией и эта шаровая симметрия вследствие Лоренцова сокращения не нарушается и в движущейся координатной системе X' , то поле вектора E'_1, E'_2, E'_3 , определенное в этой коор-

динатной системе, должно быть тождественно с обычным электростатическим полем того же электрона в состоянии покоя относительно координатной системы X . Отсюда следует

$$\int \varepsilon_1' E_2' dV' = \int E_1' E_3' dV' = 0$$

и

$$\int E_1'^2 dV' = \int E_2'^2 dV' = \int E_3'^2 dV' = \frac{1}{3} \int E'^2 dV'$$

т. е.

$$\frac{1}{4\pi} \int (E_2'^2 + E_3'^2) dV' = \frac{4}{3} U_0.$$

При этом

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \int E'^2 dV'$$

означает обычную электрическую энергию электрона в состоянии покоя. Если определить покоящуюся массу электрона, соответственно (16b), формулой

$$m_0 = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}, \quad (41)$$

то, по (40a), получим

$$\mathbf{G} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m \mathbf{v}. \quad (41a)$$

Величина

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (41b)$$

представляет собой фактическую массу электрона при скорости $v = c\beta$.

Итак, мы видим, что в противоположность обычной механике, масса электрона не есть постоянная величина, а зависит от скорости и при том таким образом, что при $v \rightarrow c$ она становится бесконечной. Отсюда следует, что скорость света c есть предельная скорость, которая никогда не может быть достигнута под действием конечных сил.

В обычной механике определяют массу как отношение внешней силы \mathbf{F}^a к ускорению \mathbf{w} . Это определение теперь оказывается правильным только при малых скоростях. Действительно, если сила, возникающая при движении электрона и действующая на него самого, может быть представлена как $-\frac{d\mathbf{G}}{dt}$, то уравнение движения, согласно принципу Лоренца, принимает следующую общую форму

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}^a. \quad (42)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда величина скорости остается постоянной и только ее направление меняется со временем (этот случай соответствует, например, движению во внешнем магнитном поле). Тогда m тоже постоянно и формула (42) приводится к виду

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^a. \quad (42a)$$

В противоположном случае, когда направление скорости постоянно, а величина ее переменна, мы получаем, по (42) и (41b),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mv) &= m_0 \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \\ &= m_0 \frac{dv}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} = F^a. \quad (42b)$$

Масса определяемая как отношение силы к ускорению, оказывается в обоих случаях (42a) и (42b) различной.

Величину $\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ соответственно этому называют поперечной, а $\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ — продольной массой электрона. Однако, целесообразнее считать массу величиной, определяемой формулой (41b), и трактовать ее не как отношение силы к ускорению, а как коэффициент при векторе скорости в выражении количества движения (41a).

Путем внутреннего умножения силы \mathbf{F}^a на \mathbf{v} мы получаем работу A , произведенную этой силой в единицу времени. По формулам (42) и (41b)

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{F}^a \mathbf{v} = \mathbf{v} \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = v^2 \frac{dm}{dt} + m \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \\ &= \frac{m_0 \frac{v^2}{c^2}}{2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d(v^2)}{dt} + \frac{m_0}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d(v^2)}{dt} = \\ &= \frac{m_0}{2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d(v^2)}{dt} = m_0 c^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Итак мы видим, что работа, произведенная в течение произвольного промежутка времени, равна (алгебраическому) увеличению величины

$$W^* = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2, \quad (43)$$

так что разность

$$T^* = c^2(m - m_0) = c^2 m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad (43a)$$

которая исчезает при $v = 0$, играет роль кинетической энергии обычной механики. Если разложить $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ по степеням $\frac{v^2}{c^2}$, то получается ряд

$$T^* = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}, \quad (43b)$$

первый член которого действительно совпадает с обычным выражением кинетической энергии при постоянной массе.

Нужно отметить, что кинетическая энергия электрона, определяемая формулой (43a), отличается от его магнитной

энергии $T = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV$. Действительно, с помощью соотношения

$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}$, или в координатном представлении

$$H_1 = 0, \quad H_2 = -\frac{v}{c} E_3, \quad H_3 = +\frac{v}{c} E_2$$

мы получаем по (38b)

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \beta^2 (E_2^2 + E_3^2) = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} (E_2'^2 + E_3'^2),$$

и, следовательно,

$$T = \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1}{8\pi} \int (E_2'^2 + E_3'^2) dV' = \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{2}{3} U_0,$$

т. е.

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2} m v^2. \quad (44)$$

То обстоятельство, что эта величина не совпадает с кинетической энергией электрона, можно объяснить тем, что электри-

ческая энергия движущегося электрона отличается от соответствующей энергии покоя. Можно ожидать поэтому, что

$$T^* = T + U - U_0.$$

Но это тоже неверно. Вместо этого мы имеем, по (38b),

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int \left(E_1'^2 + \frac{E_2'^2 + E_3'^2}{1 - \beta^2} \right) V \sqrt{1 - \beta^2} dV' = \\ &= \frac{1}{8\pi} V \sqrt{1 - \beta^2} \int E_1'^2 dV' + \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V \sqrt{1 - \beta^2}} \int (E_2'^2 + E_3'^2) dV' = \\ &= \frac{1}{3} U_0 \left(\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{2}{V \sqrt{1 - \beta^2}} \right), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$W = U + T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (44a)$$

Разность $W - U_0$, следовательно, не равна T^* . В предельном случае очень больших скоростей, приближающихся к скорости света, электромагнитная энергия (44a) совпадает с определенной выше величиной W^* . Наоборот, при $v = 0$ мы получаем не $W^* = m_0 c^2$, а $W = \frac{3}{4} m_0 c^2$. Последняя формула тождественна с (41) (так как при $v = 0$, $W = U_0$). Согласно общему соотношению (32a) между массой и энергией электромагнитного поля следовало бы, однако, считать энергией электрона в состоянии покоя равной не U_0 , а $W^* = m_0 c^2$. Соответственно этому величина W^* , определяемая общим уравнением (43), должна была бы иметь значение полной энергии электрона при (постоянной) скорости v .

Эти несогласованности непосредственно связаны с лежащей в основе наших вычислений контракционной гипотезой, потому что предположение о том, что движущийся электрон сжимается в направлении движения, вводит своеобразную, не связанную с общими дифференциальными уравнениями электромагнитного поля зависимость этого поля от скорости электрона, как целого. К этому вопросу мы еще вернемся позже. Здесь нужно отметить, что уравнения (41b) и (42), установленные на основе принципа движения Лоренца и контракционной гипотезы, хорошо согласуются с опытными данными об отклонении свободно движущихся электронов (например, в катодных лучах) электрическими и магнитными силами. Наоборот, представление Абрагама об абсолютно твердом электроне приводит к такой зависимости массы от скорости, которая становится совершенно неверной при больших скоростях. Мы не будем заниматься теорией Абрагама, которая теперь имеет лишь историческое значение; но мы сейчас покажем, что формула Лоренца (41b) может быть выведена

из очень общих принципов, без каких-либо особых предположений о свойствах электрона.

Эти принципы сводятся, во-первых, к выражаемому формулой (32а) закону эквивалентности между массой и энергией и, во-вторых, к общей форме уравнения движения (42), т. е. к возможности представить количество движения как произведение массы на скорость. Так как работа внешней силы F^a должна быть равна увеличению энергии электрона, то из этих принципов следует:

$$\frac{d}{dt} (c^2 m) = v \frac{d(mv)}{dt},$$

т. е. при $v = c\beta$

$$dm = \frac{1}{2} m d(\beta^2) + \beta^2 dm,$$

или

$$\frac{dm}{m} = \frac{1}{2} \frac{d(\beta^2)}{1 - \beta^2}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

т. е. формулу Лоренца.

По приведенной теории, уравнение $\frac{d}{dt} (mv) = F^a$ следует рассматривать как приближенную форму более сложного уравнения движения, для предельного случая малых ускорений. Если бы мы при вычислении G приняли в расчет ускорение электрона, то мы получили бы уравнение, в котором наряду с силой инерции $-\frac{d}{dt} (mv)$ вошла бы сила затухания. Однако, чтобы точно определить эту силу, было бы необходимо сделать определенные предположения о зависимости формы электрона не только от скорости, но также и от ускорения. Такой путь для установления точного уравнения движения, представляется, однако, весьма ненадежным.

§ 7. Вращательное движение шарообразного электрона. Поскольку мы рассматриваем электрон как твердое или квазитвердое тело, постольку можно наряду с его поступательным движением исследовать также и принципиально возможное вращательное движение около некоторой свободной оси, проходящей через его центр, так же как и изменение, которое должно претерпевать это вращательное движение под действием внешних вращающих сил.

Вращение электрона, обладающего шаровой симметрией, около какой-либо свободной оси с постоянной угловой скоростью и представляет собой, очевидно, стационарный электрический ток. Если, следовательно, при этом не происходит никакого измене-

ния в распределения заряда электрона и, в частности, его форма остается неизменной, что мы в последующем всегда будем предполагать, то его электрическое поле должно оставаться неизменным, а его магнитное поле должно быть постоянным во времени и пропорциональным его угловой скорости. Отсюда следует, что эта угловая скорость может быть сколь угодно большой и что линейная скорость на экваторе электрона не должна быть ограничена скоростью света.

В общем случае произвольного распределения заряда магнитный момент электрона выражается формулой

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \rho \frac{\mathbf{v}}{c} dV$$

(\mathbf{r} — радиус-вектор элемента объема dV относительно центра O). Если положить здесь $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$, то получим

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \rho \{ \mathbf{u} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{u} \mathbf{r}) \} dV,$$

или, при распределении заряда с шаровой симметрией, вследствие

$$\overline{\mathbf{r}_0(\mathbf{u} \mathbf{r}_0)} = \overline{\mathbf{u} \cos^2(\mathbf{u}, \mathbf{r}_0)} = \frac{1}{3} \mathbf{u}$$

{ср. вывод (17a)},

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{u}}{3c} \int \rho r^2 dV. \quad (45)$$

В частности, в случае поверхностного распределения заряда получается уже известная формула (ср. § 7, глава IV)

$$\mathbf{m} = \frac{ea^2}{3c} \mathbf{u}, \quad (45a)$$

где a означает радиус электрона. При равномерно распределенном объемном заряде ($\rho = \text{const}$) мы получаем, полагая $dV = 4\pi r^2 dr$,

$$\mathbf{m} = \frac{ea^2}{5c} \mathbf{u}. \quad (45b)$$

Для простоты мы в последующем ограничимся случаем поверхностного заряда. При этом электрическое поле внутри электрона равно нулю, а снаружи — тождественно с полем точечного заряда, сосредоточенного в O ,

$$\mathbf{E} = \frac{e \mathbf{r}_0}{r^2}. \quad (46)$$

Магнитное поле во внешнем пространстве эквивалентно полю элементарного магнитного диполя в O

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r^3} \{ 3(\mathbf{m} \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0 - \mathbf{m} \}. \quad (46a)$$

Внутри электрона, наоборот, царит однородное поле

$$\mathbf{H} = \frac{2\mathbf{m}}{a^3} \quad (46b)$$

[ср. § 7, глава V].

Если рассматриваемый электрон находится во внешнем магнитном поле \mathbf{H}^a , напряженность которого внутри соответствующей очень малой области пространства можно считать постоянной, то он должен испытывать вращающую пару с моментом

$$\mathbf{M}^a = \mathbf{m} \times \mathbf{H}^a. \quad (47)$$

При очень неоднородном поле нужно также учитывать добавочную силу

$$\mathbf{F}^a = (\mathbf{m} \text{ grad}) \mathbf{H}^a. \quad (47a)$$

Переходим теперь к рассмотрению внутреннего вращательного усилия, обусловленного неравномерным вращением электрона. При этом мы используем для вычисления этого усилия косвенный метод¹, аналогичный соответствующему методу для определения силы, действующей на электрон при его поступательном движении. Сначала покажем, что этот метод действительно приложим к данному случаю.

Рассмотрим для этого момент силы $d\mathbf{F} = \mathbf{f} dV$, действующей на элемент объема dV , по отношению к какой-либо точке (например, центру электрона). По общей формуле (30) силу \mathbf{f} , отнесенную к единице объема, можно представить в форме

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \text{div}^2 \mathbf{T} \quad (48)$$

[ср. (31a), где положено $\mathbf{f} = 0$]. Внешним умножением этого уравнения на \mathbf{r} (радиус-вектор элемента dV) мы получаем соответствующий момент вращения

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = -\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \mathbf{r} \times \text{div}^2 \mathbf{T}.$$

Так как \mathbf{r} не зависит от t , то можно положить

$$\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} \times \mathbf{g}.$$

Далее, вследствие симметрии тензора \mathbf{T}

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \times \text{div}^2 \mathbf{T})_1 &= x_2 \text{div} T_3 - x_3 \text{div} T_2 = x_2 \left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right) - \\ &- x_3 \left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 T_{31}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2 T_{32}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 T_{33}) - \frac{\partial}{\partial x_1} (x_3 T_{21}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (x_3 T_{22}) - \frac{\partial}{\partial x_3} (x_3 T_{23}), \end{aligned}$$

¹ Также рассмотренный Абрагамом.

т. е.

$$(\mathbf{r} \times \operatorname{div} {}^2\mathbf{T})_1 = \operatorname{div}(\mathbf{r} \times {}^2\mathbf{T})_1.$$

Произведение $\mathbf{r} \times {}^2\mathbf{T}$ представляет собой асимметричный тензор ${}^2\mathbf{N}$ с компонентами

$$N_{11} = x_2 T_{31} - x_3 T_{21}; \quad N_{22} = x_3 T_{12} - x_1 T_{32}; \quad N_{33} = x_1 T_{23} - x_2 T_{13}; \\ N_{12} = x_2 T_{32} - x_3 T_{22}; \quad N_{21} = x_3 T_{11} - x_1 T_{31} \text{ и т. д.}$$

или вообще

$$N_{ik} = (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_k)_i \quad (49)$$

[\mathbf{T}_k есть вектор с компонентами $T_{k_1}, T_{k_2}, T_{k_3}$ (ср. Введение, § 20)].

Следовательно,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = -\frac{\sigma}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{g}) - \operatorname{div} {}^2\mathbf{N} \quad (49a)$$

и поэтому для произвольного объема

$$\int \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} dV - \int {}^2\mathbf{N} n dS. \quad (49b)$$

Можно было бы разложить тензор ${}^2\mathbf{N}$ на сумму симметричного и антисимметричного и последний заменить вектором; однако это незачем делать, так как в последующем нам этот тензор совсем не понадобится. Мы исследуем только ту часть „внутреннего“ вращательного момента, или „момента вращения на самого себя“, \mathbf{M} , которая зависит от углового ускорения электрона, т. е. только от первой производной вектора \mathbf{u} по времени (и кроме того от скорости \mathbf{v} поступательного движения). При этом мы можем по (49b) рассчитать величины \mathbf{g} и ${}^2\mathbf{T}$ для вращения электрона с постоянной угловой скоростью; так как, однако, в этом случае компоненты тензора T_{ik} убывают как квадраты электрического и магнитного поля, т. е. по (46) и (46a) по крайней мере обратно пропорционально 4-й степени расстояния и, следовательно, компоненты ${}^2\mathbf{N}$ — обратно пропорционально 3-й степени, то поверхностный интеграл в (49b) при удалении поверхности S на бесконечность исчезает и мы получаем следующее простое уравнение

$$\mathbf{M} = -\frac{d\mathbf{I}}{dt} \quad (50)$$

где

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} dV. \quad (50a)$$

Вектор \mathbf{I} называется электромагнитным моментом количества движения электрона или, вернее, создаваемого им поля. Это определение остается в силе для произвольного электромагнитного поля.

Для вычисления этого вектора заметим, что внутри элек-

трона вектор \mathbf{E} , а следовательно, и \mathbf{g} пропадают, а во внешнем пространстве, по (46) и (46а),

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi c} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_0}{r^3}. \quad (51)$$

Следовательно,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{g} = \frac{e}{4\pi c} \frac{\mathbf{m} - \mathbf{r}_0(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_0)}{r^4}$$

и, принимая во внимание уже несколько раз использованное обстоятельство, что среднее значение вектора $\mathbf{r}_0(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_0)$ для всех направлений единичного вектора \mathbf{r}_0 равно $\frac{1}{3} \mathbf{m}$, получим

$$\mathbf{I} = \frac{e \mathbf{m}}{4\pi c} \cdot \frac{2}{3} \int_a^\infty \frac{dV}{r^4} = \frac{2e \mathbf{m}}{3c} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2},$$

т. е.

$$\mathbf{I} = \frac{2}{3} \frac{e}{ca} \mathbf{m}. \quad (51a)$$

Если ввести здесь вместо радиуса электрона его покоящуюся массу m_0 по формуле

$$m_0 = \frac{2}{3} \frac{e}{c^2 a},$$

которая соответствует поверхностному заряду, то получается следующее соотношение

$$\mathbf{m} = \frac{e}{cm_0} \mathbf{I}. \quad (51b)$$

Простое вычисление показывает, что при равномерно распределенном объемном заряде $\mathbf{I} = \frac{4}{7} \frac{e}{ca} \mathbf{m}^1$ или, так как в этом

¹ Магнитное поле внутри электрона на расстоянии r от его центра складывается при этом из двух частей. Часть \mathbf{H}' , которая создается внутренним шариком радиуса r , выражается формулой (46а), причем полный магнитный момент \mathbf{m} нужно заменить моментом \mathbf{m}_r этого шарика; последний, однако, по (45b) равен $\frac{1}{5} \frac{e_r r^2}{c} \mathbf{u}$, где $e_r = e \frac{r^3}{a^3}$ означает заряд этого шарика. Вторая часть, относящаяся к внешнему шаровому слою, представляется по (45) и (46b) интегралом

$$\mathbf{H}'' = \int_r^a \frac{2 \mathbf{u}}{3cr^3} r^2 \cdot 4\pi \rho r^2 dr = \frac{2 \mathbf{u}}{3c} 4\pi \rho \int_r^a r dr = \frac{e \mathbf{u}}{a^3} (a^2 - r^2),$$

так что для суммы $\mathbf{H}' + \mathbf{H}''$ получается следующее значение

$$\mathbf{H} = \frac{e}{5ca^3} \{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{r} - \mathbf{u} r^2 + 5(a^2 - r^2) \mathbf{u}\} = \frac{1}{a^3} \{3(\mathbf{r} \mathbf{m}) \mathbf{r} + (5a^2 - 6r^2) \mathbf{m}\}.$$

Что касается электрического поля, то для $r < a$ оно определяется формулой

случае

$$m_0 = \frac{4}{5} \frac{e^2}{c^2 a},$$

$$m = \frac{7}{5} \frac{e}{c m_0} I.$$

Принимая во внимание формулу (45а), мы можем написать выражение (51а) для I в виде

$$I = \frac{1}{3} m_0 a^2 u. \quad (52)$$

Этому выражению соответствует „момент инерции“ электрона, равный $\frac{1}{3} m_0 a^2$.

Для сравнения заметим, что обыкновенный (механический) момент инерции полого шара той же массы (m_0) равен $\frac{2}{3} m_0 a^2$

Чтобы установить соотношение между обычными механическими и электромагнитными величинами, характеризующими вращательное движение, вычислим еще магнитную энергию электрона. Та часть этой энергии, которая локализована во внешнем пространстве, выражается интегралом

$$T' = \frac{1}{8\pi} \int \frac{1}{r^6} \{9(\mathbf{m}r_0)^2 r_0^2 - 6(\mathbf{m}r_0)^2 + m^2\} dV,$$

или, так как $r_0^2 = 1$ и среднее значение $(\mathbf{m}r_0)^2$ равно $\frac{1}{3} m^2$,

$$T' = \frac{1}{8\pi} 2m^2 \int_a^r \frac{4\pi r^2 dr}{r^6} = \frac{m^2}{3a^3}.$$

Магнитное поле внутри электрона прибавляет к его энергии величину

$$T'' = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2m}{a^3}\right)^2 \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{2}{3} \frac{m^2}{a^3}.$$

Следовательно,

$$T' + T'' = T = \frac{m^2}{a^3}, \quad (52a)$$

$E = \frac{e\Gamma}{a^3}$. Отсюда легко вычислить, что та часть момента количества движения, которая происходит от внутреннего электромагнитного поля электрона, равна $-\frac{2}{21} \frac{e}{ca} m$. Другая (внешняя) часть выражается очевидно формулой (51а). В сумме мы, следовательно, получаем

$$I = \left(\frac{2}{3} - \frac{?}{21}\right) \frac{e}{ca} m = \frac{4}{7} \frac{e}{ca} m.$$

или, по (45а),

$$T = \frac{1}{9} \frac{e^2 a^2}{c^2 a} u^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_0 a^2 \right) u^2. \quad (52b)$$

Итак, мы получаем обычное выражение кинетической энергии вращающегося тела с моментом инерции $\frac{1}{3} m_0 a^2$.

Вращательное движение электрона под действием внешнего вращательного условия с моментом M^a определяется по принципу движения Лоренца уравнением $M + M^a = 0$, т. е. по (50) формулой

$$\frac{dJ}{dt} = M^a, \quad (53)$$

в полном согласии с обычной механикой.

Это уравнение мы можем написать еще в форме

$$\frac{1}{x} \frac{d\mathbf{m}}{dt} = M^a, \quad (53a)$$

или

$$J \frac{d\mathbf{u}}{dt} = M^a, \quad (53b)$$

где

$$x = \frac{e}{cm_0}, \quad (54)$$

и

$$J = \frac{1}{3} m_0 a^2. \quad (54a)$$

Коэффициент x представляет собой при этом отношение магнитного момента электрона к механическому моменту, т. е. моменту его количества движения, а J означает момент инерции.

Если момент вращения M^a создается внешним магнитным полем H^a , то мы получаем по (47)

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = x \mathbf{m} \times H^a. \quad (55)$$

Путем внутреннего умножения обеих сторон этого уравнения на \mathbf{m} находим

$$\frac{d\mathbf{m}^2}{dt} = 0,$$

т. е.

$$|\mathbf{m}| = \text{const.}$$

Для постоянного во времени внешнего поля получается таким же образом

$$H^a \frac{d}{dt} \mathbf{m} = \frac{d}{dt} (\mathbf{m} H^a) = 0,$$

т. е. угол между векторами \mathbf{m} и \mathbf{H}^a тоже остается постоянным.

Можно легко показать, что движение электрона складывается в этом случае из „невозмущенного“ вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и равномерного вращения, или прецессии вектора \mathbf{u} около направления поля \mathbf{H}^a с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = -\kappa \mathbf{H}^a. \quad (56)$$

Действительно, производная по времени вектора \mathbf{u} должна быть при этом равна линейной скорости точки с радиусом-вектором \mathbf{u} , т. е. $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$. Точно также мы имеем $\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}$; это уравнение на основании (55а) совпадает с (55).

§ 8. Комбинация вращательного и поступательного движения. Исследуем теперь случай, когда вращающийся электрон одновременно движется с малой поступательной скоростью.

При наличии внешнего электрического поля \mathbf{H}^a он должен при этом испытывать еще добавочное внешнее вращательное усилие (и силу). Определим их сначала исходя из предположения, что вращающийся электрон в отношении его магнитных действий вполне эквивалентен магнитному диполю (ниже, глава IX, § 2, мы увидим, что это предположение в действительности оказывается неверным; соответственно этому, вытекающие из него формулы неправильны). Магнитный полюс μ , движущийся со скоростью \mathbf{v} , должен во внешнем поле \mathbf{H}^a , \mathbf{E}^a испытывать, по (12а) главы V, силу $\mu \left(\mathbf{H}^a - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}^a \right)$; следовательно, для замещающего электрон диполя получаются две равные и противоположно направленные силы, которые создают результирующее вращательное усилие с моментом $l \times \left[\mu \left(\mathbf{H}^a - \frac{\mathbf{v}}{c} \mathbf{E}^a \right) \right]$.

При этом l означает длину диполя (считая от отрицательного полюса $-\mu$ к положительному $+\mu$). Произведение μl есть не что иное как магнитный момент электрона \mathbf{m} . Следовательно, наряду с магнитным вращательным моментом (47) мы получаем еще электрический

$$\mathbf{M}^a = -\mathbf{m} \times \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}^a \right). \quad (57)$$

При очень неоднородном поле необходимо принять в расчет также и добавочную внешнюю силу

$$\mathbf{F}^a = \left[\mathbf{m} \text{ grad } \left(\mathbf{E}^a \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right] = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times [\mathbf{m} \text{ grad } \mathbf{E}^a]. \quad (57a)$$

Однако, в рассматриваемом случае появляется добавочная внутренняя сила и вращательное усилие, происходящие

от электромагнитного поля, вызванного комбинацией вращения и перемещения.

Сначала определим магнитное поле H^v , соответствующее чистому перемещению.

Это поле при постоянной скорости v связано с основным электрическим полем электрона E общим, уже много раз использованным соотношением

$$H^v = \frac{v}{c} \times E. \quad (58)$$

Внутри электрона это поле равно нулю, так же как и E , а вне его сводится, по (46), к магнитному полю заряда e , сосредоточенного в центре электрона.

К этому однако присоединяется добавочное электрическое поле E^m , которое происходит от комбинации обоих видов движения. Появление этого поля может быть объяснено тем обстоятельством, что электрический ток, образуемый „вращением“ электрона, утрачивает свой стационарный характер при наличии поступательного движения. Действительно, магнитное поле, вызванное вращением, должно при этом в каждой данной точке P пространства меняться со временем.

То же самое должно очевидно иметь место и для соответствующего векторного потенциала A , с которым H связано формулой $H = \text{rot } A$. Изменению же векторного потенциала со временем соответствует добавочное электрическое поле

$$E^m = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Так как в той точке пространства, которая движется вместе с электроном, и следовательно, относительно его остается неподвижной (если отвлечься от его вращения) напряженности поля и потенциалы остаются постоянными, то мы имеем, так же, как и в случае простого перемещения [ср. (16а) главы VI], следующее соотношение

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v \text{ grad}) A = 0,$$

т. е.

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = + \left(\frac{v}{c} \text{ grad} \right) A,$$

или, на основании тождества (27) Введения,

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = \text{grad} \left(\frac{v}{c} A \right) - \frac{v}{c} \times H.$$

Добавочное электрическое поле E^m складывается, следовательно, двух частей:

$$E' = -\frac{v}{c} \times H \quad (58a)$$

и

$$E'' = \text{grad} \left(\frac{v}{c} A \right). \quad (58b)$$

Формула (58a) вполне аналогична (58); она полностью соответствует „магнитным“ дифференциальным уравнениям (11a), (11b) главы V и получается из них так же, как и (58), если допустить существование магнитных полюсов [противоположные знаки в (58) и (58a) соответствуют противоположным знакам при j и j^* в (8a) и (11b) главы V]. Поскольку вращающийся электрон в отношении своих магнитных действий может быть заменен магнитным диполем, поступательное движение этого диполя должно создавать добавочное электрическое поле (58a) таким же точно образом, как перемещение заряда электрона создает добавочное магнитное поле (58).

Это симметричное (или „антисимметричное“) соотношение между электрическими и магнитными полями нарушается, однако, появлением второй части поля E^m , т. е. электрического поля E'' . Последнее можно трактовать как обычное электростатическое поле, происходящее от скалярного потенциала

$$\varphi'' = -\frac{v}{c} \cdot A. \quad (59)$$

В рассматриваемом случае векторный потенциал A определяется во внешнем пространстве ($r > a$) формулой

$$A = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_0}{r^2} \quad (59a)$$

[ср. (27) главы III]; а внутри электрона [ср. § 7, главы IV]

$$A = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{a^3}. \quad (59b)$$

Следовательно, при $r > a$, на основании равенства $\mathbf{v} (\mathbf{m} \times \mathbf{r}_0) = = \mathbf{r}_0 (\mathbf{v} \times \mathbf{m})$, имеем

$$\varphi'' = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}_0}{r^2}, \quad (60)$$

где

$$\mathbf{p} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m}. \quad (60a)$$

Отсюда следует, что φ'' (для $r > a$) представляет собой скалярный потенциал диполя с электрическим моментом \mathbf{p} , находящегося в центре электрона.

Внутри электрона получается таким же точно образом

$$\varphi'' = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{a^3}. \quad (60b)$$

Мы видели в главе IV, § 7, что потенциалы (60) и (60b) вне и внутри сферы радиуса a могут быть созданы поверхностным

зарядом, полная величина которого равна нулю и который распределен на поверхности сферы с плотностью

$$\eta = \rho \cos \theta, \quad (\theta = \angle \mathbf{p}, \mathbf{r}) \quad (60c)$$

Мы покажем ниже (глава X, § 2) на основании теории относительности, что в действительности поступательное движение вращающегося электрона должно сопровождаться небольшим изменением распределения заряда на его поверхности (или внутри него), которое эквивалентно появлению распределения заряда, прямо противоположного (60c). Это добавочное распределение заряда или поляризация электрона уничтожает поле \mathbf{E}'' и сводит добавочное электрическое поле \mathbf{E}'' к его первой части \mathbf{E}' .

Полное значение электромагнитного количества движения (на единицу объема)

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} + \mathbf{E}' + \mathbf{E}'') \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}^v)$$

складывается из ранее вычисленного вектора $\mathbf{g}^{(0)} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, добавочных членов первого порядка относительно $\frac{v}{c}$

$$\mathbf{g}^v = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^v; \quad \mathbf{g}' = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E}' \times \mathbf{H}; \quad \mathbf{g}'' = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}$$

и добавочного члена второго порядка $\frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E}' + \mathbf{E}'') \times \mathbf{H}^v$, которым мы можем пренебречь.

Член \mathbf{g}^v соответствует чистому перемещению без вращательного движения и уже рассматривался в предыдущих параграфах при вычислении силы инерции. Посмотрим теперь, что прибавляется к этой силе и, следовательно, к массе электрона, благодаря наличию \mathbf{g}' и \mathbf{g}'' (член \mathbf{g}^0 , соответствующий случаю, когда $\mathbf{v} = 0$, при этом не имеет значения). По (58a) имеем

$$\mathbf{g}' = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{H} \times \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) = \frac{1}{4\pi c^2} \{vH^2 - \mathbf{H}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H})\}.$$

Первый член в фигурных скобках дает при интегрировании по всему пространству величину $\frac{2\mathbf{v}}{c^2} T$, где $T = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV$ есть уже вычисленная величина (52a) (магнитная энергия при $\mathbf{v} = 0$). Для второго члена мы получаем, по (46a), при $r > a$ выражение

$$-\frac{1}{4\pi c^2} \frac{1}{r^3} \{9(\mathbf{m}\mathbf{r}_0)^2(\mathbf{v}\mathbf{r}_0)\mathbf{r}_0 - 3(\mathbf{m}\mathbf{v})(\mathbf{m}\mathbf{r}_0)\mathbf{r}_0 - 3(\mathbf{m}\mathbf{r}_0)(\mathbf{v}\mathbf{r}_0)\mathbf{m} + (\mathbf{m}\mathbf{v})\mathbf{m}\}.$$

Для вычисления средних значений входящих сюда величин по всем направлениям единичного вектора \mathbf{r}_0 отметим прежде

всего следующие формулы, имеющие место для прямоугольных составляющих вектора \mathbf{r}_0 , т. е. для его направляющих косинусов r_1, r_2, r_3

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1; \quad \overline{r_\alpha^2} = \frac{1}{3}; \quad \overline{r_\alpha r_\beta} = 0 \quad (\text{для } \alpha \neq \beta).$$

Далее

$$\left(\overline{\sum_\alpha r_\alpha^2} \right)^2 = 1 = 3\overline{r_\alpha^4} + 6\overline{r_\alpha^2 r_\beta^2}$$

и

$$\overline{r_\alpha \cdot r_\beta \cdot r_\gamma \cdot r_\delta} = 0,$$

если четыре знака $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не равны друг другу попарно. Для среднего значения r_α^4 мы получаем

$$\overline{r_\alpha^4} = \overline{\cos^4 \theta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \cos^4 \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} r_\alpha^4 dr_\alpha = \frac{1}{5},$$

следовательно,

$$\overline{r_\alpha^2 \cdot r_\beta^2} = \frac{1}{15}.$$

Далее

$$\overline{(\mathbf{m}\mathbf{r}_0)(\mathbf{v}\mathbf{r}_0)} = \sum_\alpha \sum_\beta m_\alpha v_\beta \overline{r_\alpha r_\beta} = \frac{1}{3} \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha = \frac{1}{3} (\mathbf{m}\mathbf{v}),$$

$$\overline{(\mathbf{m}\mathbf{r}_0) r_\alpha} = \sum_\beta m_\beta \overline{r_\beta r_\alpha} = \frac{1}{3} m_\alpha, \quad \text{т. е. } \overline{(\mathbf{m}\mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0} = \frac{1}{3} \mathbf{m},$$

$$\begin{aligned} \overline{(\mathbf{m}\mathbf{r}_0)^2 (\mathbf{v}\mathbf{r}_0) r_\alpha} &= \sum_\beta \sum_\gamma \sum_\delta m_\beta m_\gamma v_\delta \overline{r_\alpha r_\beta r_\gamma r_\delta} = \\ &= m_\alpha^2 v_\alpha \overline{r_\alpha^4} + \sum_{\beta \neq \alpha} m_\beta^2 v_\alpha \overline{r_\alpha^2 r_\beta^2} + 2 \sum_{\gamma \neq \alpha} m_\alpha m_\gamma v_\gamma \overline{r_\alpha^2 r_\gamma^2} = \\ &= \frac{1}{5} m_\alpha^2 v_\alpha + \frac{1}{15} (m^2 - m_\alpha^2) v_\alpha + \frac{2}{15} \{(\mathbf{m}\mathbf{v}) - m_\alpha v_\alpha\} m_\alpha = \\ &= \frac{1}{15} \{m^2 v_\alpha + 2(\mathbf{m}\mathbf{v}) m_\alpha\}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\overline{(\mathbf{m}\mathbf{r}_0)^2 (\mathbf{v}\mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0} = \frac{1}{15} \{m^2 \mathbf{v} + 2(\mathbf{m}\mathbf{v}) \mathbf{m}\}.$$

Вводя эти средние значения в вышенаписанное выражение, умножая на $4\pi r^2 dr$ и интегрируя от a до ∞ , мы получаем после простого вычисления

$$- \frac{1}{15c^2 a^3} \{3m^2 \mathbf{v} + (\mathbf{m}\mathbf{v}) \mathbf{m}\}.$$

Следовательно, для внешнего пространства ($r > a$)

$$\int_{r>a} \mathbf{g}' dV = \frac{2 \mathbf{v} m^2}{3c^2 a^3} - \frac{1}{15c^2 a^3} \{3 m^2 \mathbf{v} + (\mathbf{m} \mathbf{v}) \mathbf{m}\}.$$

Для внутренней области электрона ($r < a$) получается по (46b)

$$\frac{1}{4 \pi c^2} \mathbf{H}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}) = \frac{4 \mathbf{m}(\mathbf{m} \mathbf{v})}{4 \pi c^2 a^3},$$

так что соответствующая составляющая полного количества движения $\mathbf{G}' = \int \mathbf{g}' dV$ равна

$$\frac{4 \mathbf{v}}{3c^3} \cdot \frac{m^2}{a^3} - \frac{4}{3c^2 a^3} (\mathbf{m} \mathbf{v}) \mathbf{m}.$$

Окончательно

$$\mathbf{G}' = \frac{9 m^2}{5c^2 a^3} \mathbf{v} - \frac{7 (\mathbf{m} \mathbf{v})}{5c^2 a^3} \mathbf{m}. \quad (61)$$

Итак, мы видим, что рассматриваемое добавочное количество движения пропорционально, но, вообще говоря, не параллельно скорости. Первый член выражения \mathbf{G}' , параллельный вектору \mathbf{v} , можно рассматривать как обычное количество движения, которое попросту прибавляется к количеству движения, обусловленному зарядом электрона $\mathbf{G} = m_0 \mathbf{v}$. При этом мы получаем добавочную „магнитную“ массу

$$m' = \frac{9}{5} \frac{m^2}{c^2 a^3} = \frac{9T^2}{5c^2}, \quad (61a)$$

которая может и не быть малой в сравнении с „электрической“ массой

$$m_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2 a} = \frac{4 U}{3 c^2}$$

(см. ниже, § 9).

Заметим, что второй вектор в выражении для \mathbf{G} , параллельный вектору \mathbf{m} , равен нулю лишь тогда, когда магнитный момент электрона перпендикулярен к скорости его поступательного движения.

Количество движения $\mathbf{G}'' = \int \mathbf{g}'' dV$ можно определить совсем просто.

Именно, при $r > a$, по (60),

$$\mathbf{E}'' = \frac{1}{r^3} \{3 (\mathbf{p} \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0 - \mathbf{p}\},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'' &= \frac{1}{4 \pi c} \frac{1}{r^6} [3 (\mathbf{p} \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0 - \mathbf{p}] \times [3 (\mathbf{m} \mathbf{r}_0) \mathbf{r}_0 - \mathbf{m}] = \\ &= -\frac{1}{4 \pi c} \frac{1}{r^6} \{3 (\mathbf{p} \mathbf{r}_0) (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{m}) + 3 (\mathbf{m} \mathbf{r}_0) (\mathbf{p} \times \mathbf{r}_0) - (\mathbf{p} \times \mathbf{m})\}. \end{aligned}$$

Для вычисления среднего значения выражения, стоящего в скобках, помножим его (скалярно) на произвольный постоянный вектор \mathbf{l} и напишем произведение в виде

$$3(\mathbf{p}\mathbf{r}_0)[(\mathbf{m} \times \mathbf{l})\mathbf{r}_0] + 3(\mathbf{m}\mathbf{r}_0)[(\mathbf{l} \times \mathbf{p})\mathbf{r}_0] - (\mathbf{p} \times \mathbf{m})\mathbf{l}.$$

По формуле

$$\overline{(\mathbf{m}\mathbf{r}_0)(\mathbf{v}\mathbf{r}_0)} = \frac{1}{3} \mathbf{m}\mathbf{v}$$

(см. выше) для его среднего значения получается выражение

$$\mathbf{p}(\mathbf{m} \times \mathbf{l}) + \mathbf{m}(\mathbf{l} \times \mathbf{p}) - \mathbf{l}(\mathbf{p} \times \mathbf{m}) = \mathbf{l}(\mathbf{p} \times \mathbf{m}),$$

поэтому

$$\overline{\mathbf{g}''} = -\frac{1}{4\pi c} \frac{1}{r^6} (\mathbf{p} \times \mathbf{m}),$$

а для всего внешнего пространства

$$\int \mathbf{g}'' dV = \int \overline{\mathbf{g}''} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{p}}{3ca^3}.$$

Для внутренней области электрона ($r < a$) имеем, по (60b) и (46b),

$$\mathbf{E}'' = -\frac{\mathbf{p}}{a^3}$$

$$\mathbf{g}'' = \frac{2}{4\pi ca^6} \mathbf{m} \times \mathbf{p}, \quad \int \mathbf{g}'' dV = \frac{2}{3ca^3} \mathbf{m} \times \mathbf{p},$$

и, следовательно, в сумме

$$\mathbf{G}'' = \frac{2}{3ca^3} \mathbf{m} \times \mathbf{p}$$

или, по (60a),

$$\mathbf{G}'' = -\frac{2m^2}{3c^2a^3} \mathbf{v} + \frac{2}{3c^2a^3} (\mathbf{m}\mathbf{v}) \mathbf{m}. \quad (62)$$

Складывая (61) и (62), получаем

$$\mathbf{G}'' = \frac{17m^2}{15c^2a^3} \mathbf{v} - \frac{11(\mathbf{m}\mathbf{v})}{15c^2a^3} \mathbf{m}. \quad (62a)$$

В действительности, однако, \mathbf{G}'' в точности компенсируется количеством движения, обусловленным „поляризацией“ электрона, так что добавочное „магнитное“ количество движения и „магнитная“ масса выражаются формулами (61) и (61a).

Тому удивительному обстоятельству, что количество движения вращающегося или „магнитного“ электрона не параллельно скорости поступательного движения, соответствует вызванный этим движением „внутренний“ вращательный момент \mathbf{M} , действующий на электрон и стремящийся ориентировать магнитную ось перпендикулярно к направлению движения; при такой ориен-

тации количество движения совпадает по направлению со скоростью, и вектор \mathbf{M} исчезает.

Действительно, по общей формуле (50), имеем

$$\mathbf{M} = -\frac{d\mathbf{l}}{dt}.$$

Напомним, что радиус-вектор \mathbf{r} в выражении (50a) для \mathbf{l} относится к неподвижной точке. Следовательно, если мы хотим отнести дифференцирование по времени к точкам (объемным элементам), движущимся вместе с электроном, считая вектор \mathbf{G} постоянным, то нужно положить $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$. Следовательно, получим

$$\mathbf{M} = -\int \mathbf{v} \times \mathbf{g} dV = -\mathbf{v} \times \int \mathbf{g} dV,$$

т. е.

$$\mathbf{M} = \mathbf{G} \times \mathbf{v}. \quad (63)$$

Эта формула показывает, что вектор \mathbf{M} отличен от нуля лишь в том случае, если \mathbf{G} имеет составляющую, не параллельную \mathbf{v} . Если положить здесь $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$, то, по (61), получается

$$\mathbf{M}' = \frac{7}{5} \frac{(\mathbf{mv})(\mathbf{v} \times \mathbf{m})}{c^2 a^3}. \quad (63a)$$

Если бы выражение (62a) было правильным, то полное значение \mathbf{M} равнялось бы

$$\mathbf{M} = \frac{11}{15} \frac{(\mathbf{mv})}{c^2 a^3} (\mathbf{v} \times \mathbf{m}). \quad (63b)$$

§ 9. Магнетоны. Новейшие исследования в области оптических и магнитных свойств атомов подтвердили с несомненностью, во всяком случае для отрицательных электронов, уже не раз¹ высказанное предположение о том, что электроны имеют собственный механический и магнитный момент² так, как если бы они на самом деле представляли собой твердые шарики, вращающиеся вокруг собственной оси. Изложенная теория шарообразного электрона с поверхностным зарядом, как это ни странно, дает точное значение отношения $\kappa = \frac{e}{m_0 c}$ магнитного и механического момента отрицательного электрона. Заметим, что это значение вдвое больше того, которое соответствует поступательному движению электрона вокруг неподвижной точки. Дейст-

¹ В особенности Абрагамом и Комптоном.

² Этим мы обязаны Уленбеку и Гаудсмицу (1926), которые впервые обратили внимание на то, что магнитный электрон при движении в электрическом поле должен испытывать добавочную силу [см. формулу (57a)], существованием которой объясняются различные, до тех пор непонятные, оптические и магнитные свойства атомов.

вительно, мы видели в главе III, § 9, что магнитный момент линейного электрического тока относительно какой-либо точки складывается из величин

$$\mathbf{m}' = \frac{e}{2c} \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (64)$$

относящихся к отдельным электронам. С другой стороны, соответствующий механический момент выражается формулой

$$\mathbf{I}' = m_0 \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (64a)$$

Следовательно, в этом случае отношение $\mathbf{m} : \mathbf{I}$ равно

$$k' = \frac{e}{2cm_0}. \quad (64b)$$

Если электрон движется вокруг неподвижной точки O , к которой он притягивается центральной электрической силой, как это, например, приблизительно имеет место в атомах, то его механический момент (т. е. момент количества движения) должен оставаться постоянным по величине и направлению. Это следует непосредственно из уравнения движения $\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}^a$, если его умножить внешне на радиус-вектор электрона \mathbf{r} . Так как векторы \mathbf{F}^a и \mathbf{r} параллельны, то мы имеем

$$\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}^a = 0,$$

и, следовательно, в связи с тождеством

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}),$$

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{I} = \text{const.}$$

Этот результат, как видно из его вывода, остается в силе и в том случае, когда принимается в расчет зависимость массы от скорости.¹ В дальнейшем мы ограничимся малыми скоростями и положим $m = m_0 = \text{const.}$ Тогда из доказанного предложения следует, что магнитный момент электрона или, точнее говоря, траектории электрона (вокруг центра притяжения O) тоже должен оставаться постоянным.

На расстояниях, которые велики в сравнении с размерами траектории, обращение электрона около центра создает магнитное поле, которое в среднем за промежуток времени, большой в сравнении с периодом обращения (но могущий быть малым в сравнении с обычной единицей времени), тождественно с полем стационарного элементарного тока или элементарного

¹ Представляет собой, следовательно, обобщение обычного „интеграла площадей“ классической механики.

магнита (магнитного диполя) в точке O . Поэтому такой электрон, кружащийся внутри атома, называют магнетоном.¹

Было бы, однако, правильно говорить о двойном магнетоне, потому что наряду с обращением электрона вокруг центра имеется еще его вращение вокруг собственной оси (точно так же, как при вращении Земли вокруг Солнца), приводящее к появлению магнитного момента m . Следовательно, в отношении своих магнитных действий электрон эквивалентен системе двух элементарных магнитов m и m' (последние, разумеется, можно соединить в один единственный результирующий момент $m + m'$).

Эта эквивалентность относится не только к действиям, вызываемым электроном, но также и к действиям, которые он сам испытывает во внешнем магнитном поле H^a . Для случая вращательного движения этот вопрос был разобран уже выше (§ 6). Что касается обращения вокруг центра, то изменение вектора m' , вызванное внешним полем, и здесь можно характеризовать уравнением

$$\frac{dm'}{dt} = \kappa' m' \times H^a, \quad (65)$$

совершенно аналогичным (55). При этом горизонтальная черта над производной от m' по времени означает, что речь идет не о точном „мгновенном“ значении этой производной, но об ее среднем значении в том же самом смысле, что и при определении магнитного поля, созданного обращением электрона. Точная формула для скорости изменения момента количества движения $I' = \frac{m'}{\chi}$ имеет вид

$$\frac{dI'}{dt} = M^a,$$

где

$$M^a = r \times \frac{e}{c} (v \times H^a) \quad (65a)$$

есть момент магнитной силы, действующей на электрон. Этот момент в течение каждого обращения электрона должен испытывать определенные колебания, которые в среднем компенсируют друг друга и для среднего изменения I' не имеют значения.

Последнее, следовательно, определяется исключительно средним значением вектора M^a за период обращения (или за несколько оборотов, если движение не строго периодично). Это среднее значение при достаточно слабом внешнем поле практически (т. е. в первом приближении) тождественно со средним значением при невозмущенном движении $H^a = 0$.

Заметим теперь, что среднее значение производной по времени от какой-либо величины, которая при невозмущенном движении не испытывает систематического (монотонного) изме-

¹ Это название введено П. Вейссом.

нения, а колеблется около определенного среднего значения, должно равняться нулю, поскольку не принимается в расчет возмущение. В частности имеем ¹

$$\overline{\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{H}^a)]} = 0,$$

или, так как

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{H}^a)] = \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}^a) + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{H}^a),$$

$$\overline{\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}^a)} + \overline{\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{H}^a)} = 0. \quad (65b)$$

Принимая во внимание тождество

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}^a) + \mathbf{H}^a \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{H}^a \times \mathbf{r}) = 0 \quad (65c)$$

[ср. Введение (5a)], получаем

$$\overline{\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}^a)} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{H}^a. \quad (65d)$$

Черту над членом, стоящим на правой стороне уравнения, мы опустили потому, что при невозмущенном движении вектор $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ остается постоянным.

Мы получаем, следовательно, по (65a) и (65d),

$$\overline{\mathbf{M}^a} = \frac{e}{2c} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{H}^a = \mathbf{m}' \times \mathbf{H}^a, \quad (66)$$

и, наконец,

$$\frac{d\overline{\Gamma}}{dt} = \mathbf{m}' \times \mathbf{H}^a,$$

что совпадает с (65).

Возмущение вращательного движения электрона вокруг центра, обусловленное внешним магнитным полем, сводится, согласно этому уравнению, к прецессии вектора \mathbf{m}' вокруг направления поля с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}' = -\kappa' \mathbf{H}^a \quad (66a)$$

(так называемая прецессия Лармора).

Эта угловая скорость равна половине угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, с которой должен прецессировать около направления поля вектор \mathbf{m} , т. е. магнитная ось электрона.

Заметим, что такая независимая прецессия обоих векторов \mathbf{m} и \mathbf{m}' в действительности невозможна, так как они, так сказать, связаны друг с другом действием центрального электрического поля, удерживающего электрон вблизи точки O . Если,

¹ Чтобы избежать недоразумений, заметим, что нижеследующие средние величины представляют собой нулевое приближение (относительно \mathbf{H}^a), в то время как в (65) дано первое приближение.

например, принять, что при своем обращении вокруг центра электрон испытывает вращательный момент (57) и силу (57а), и положить $\mathbf{F}^a = e\mathbf{E}^a = e \cdot f \cdot \mathbf{r}$, где f есть скалярная функция расстояния, то получим, по (57),

$$\mathbf{M}^a = f \frac{e}{c} \mathbf{m} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 2f \mathbf{m} \times \mathbf{m}. \quad (67)$$

Этот вращательный момент соответствует очевидно виртуальному магнитному полю

$$\mathbf{H}' = 2f \mathbf{m}' = \frac{2|\mathbf{E}^a|}{r} \mathbf{m}', \quad (67a)$$

которое мы чисто формальным образом можем приписать магнетону, заменяющему вращение электрона вокруг центра. Добавочную силу (57а) можно с помощью формулы $(\mathbf{m} \text{ grad } f) \mathbf{r} = \mathbf{m} f + +^2(\mathbf{m} \text{ grad } f)$ написать в форме

$$-ef \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m} - e \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{r} \right) (\mathbf{m} \text{ grad } f) = +ef \mathbf{p} + 2p(\mathbf{m} \text{ grad } f) \cdot \mathbf{m}',$$

где \mathbf{p} означает дипольный момент, определяемый формулой (60а) Для вращательного момента этой силы, обуславливающего изменение вектора \mathbf{m}' , мы, следовательно, получаем

$$\mathbf{M}^a = ef \mathbf{r} \times \mathbf{p} + 2(\mathbf{m} \text{ grad } f) (\mathbf{r} \times \mathbf{m}). \quad (67b)$$

Это выражение совершенно отлично от (67).

Ниже (глава IX, § 2) мы увидим, что в действительности оба выражения, так же как и лежащие в основе их формулы (57) и (57а), не верны. Добавочная сила и вращательный момент обусловленные поступательным движением вращающегося электрона в электрическом поле, связаны не с заменяющим электрон магнитным диполем, а с электрической поляризацией электрона, т. е. с соответствующим электрическим диполем (с моментом \mathbf{p}), и приводят к вполне симметричному взаимодействию между \mathbf{m} и \mathbf{m}' , так что результирующий момент количества движения остается постоянным.

Наряду с внешним магнитным и электрическим вращательным моментом вращающийся электрон должен по (63а) и (63б) испытывать собственный или внутренний вращательный момент.

Однако, этот внутренний момент пропорционален квадрату отношения $\frac{v}{c}$ и поэтому им можно пренебречь при малых скоростях поступательного движения (которыми мы ограничились с самого начала).

„Собственный“ магнитный момент отрицательных электронов по данным опыта равен примерно

$$|\mathbf{m}| = 10^{-20}.$$

Полный магнитный момент атомов, который складывается векторно из моментов \mathbf{m} и \mathbf{m}' отдельных электронов, всегда равен целому кратному приведенного значения.

Если вставить его в формулу (45), то для экваториальной скорости отрицательного электрона при $a = 10^{-13}$ см и $e = 4,77 \times 10^{-10}$ получается примерно 10^{18} см/сек. Это обстоятельство, как уже было упомянуто выше, не следует считать возражением против приведенной теории.

Весьма существенное возражение возникает при попытке, однако, подсчитать добавочную массу, зависящую от вращения электрона. Эта „магнитная“ масса, по (61a), порядка $\frac{m^2}{c^2 a^3}$; при $m \cong 10^{-20}$ и $a \cong 10^{-13}$ она должна быть равна примерно 10^{-21} . В действительности, однако, масса электрона равна 10^{-27} , следовательно, в миллион раз меньше!

Напомним, что „радиус“ электрона был вычислен как раз из этого последнего значения в предположении, что масса электрона — чисто электрического происхождения, т. е. определяется формулой $m_0 = \frac{2e^2}{3c^2 a}$. Если же, наоборот, считать эту массу имеющей главным образом магнитное происхождение, то для радиуса электрона получается значение

$$r \cong \sqrt[3]{\frac{m}{c^2 m_0}} \cong 10^{-11}.$$

Это значение, однако, наверное слишком велико; данные о величине атомных ядер показывают, что даже обычное значение (10^{-13}) следует считать слишком большим.

§ 10. Критический разбор теории протяженных электронов. Мы рассматривали в этой главе электроны как пространственно протяженные образования с поверхностным или объемным зарядом и установили уравнения их движения на основе принципа Лоренца в согласии с опытом.

Теперь мы должны критически пересмотреть это представление. Так как электроны представляли собою последние неразрушимые и неделимые элементы, из которых составляются материальные тела, то представляется несколько наивным рассматривать их как маленькие твердые, или почти твердые тела. Вопрос о структуре материальных тел есть вопрос об их составлении из недискретных, отделимых друг от друга частей. Таким образом, приходим к молекулам, атомам и, наконец, к электронам. Так как однако электроны далее неделимы, то представляется бессмысленным говорить об „элементах“ одного и того же электрона. Заряд электрона (так же как и его масса в обычном представлении классической механики) есть не материя, а свойство. Так как однако это свойство инвариантно и, кроме того, аддитивно (при

соединении нескольких электронов), то является возможность считать это свойство представителем соответствующих частей (в этом смысле мы часто называли заряженную частицу просто ¹ „зарядом“) и локализовать его в той же области пространства.

При этом с одинаковым правом можно говорить о точке, линии, поверхности или объеме. Поскольку при этом речь идет о взаимодействии между различными электронами, наиболее простым и естественным является представление об электронах как о непротяженных точечных зарядах. Другие представления могут вводиться при этом как вспомогательные, как это мы сделали, например, при выводе электромагнитного поля движущегося точечного заряда в главе VI, §§ 1 и 2.

Поводом к рассмотрению электрического заряда как субстанции, распределенной непрерывно с конечной объемной плотностью, явилась вначале возможность заменить интегральные законы, определяющие дальние действия между различными электронами, дифференциальными уравнениями (означающими фиктивное „близодействие“) без особенных точек.

Однако решающим основанием для введения пространственно протяженных электронов является то обстоятельство, что только таким образом удастся построить изложенное в настоящей главе общее учение об энергии. Так как при этом с чисто математической точки зрения все равно, считать ли заряд электрона объемным, или поверхностным (см. § 1), то обе возможности трактуются как физически эквивалентные. Наоборот, представления об электроне как о линейном или точечном образовании были отвергнуты, потому что они оказались математически недопустимыми в смысле приведенной формулировки понятия энергии и других связанных с ней понятий.

Помимо этого обстоятельства, высшим аргументом в пользу протяженности электронов является наличие эффектов, которые могут быть истолкованы как результат вращения электрона вокруг собственной оси (так наз. „спина“). Впрочем, выше было показано, что количественная теория этих эффектов, в связи с электромагнитной теорией массы, наталкивается на непреодолимые затруднения в вопросе о размерах электрона.

Основные задачи электродинамики заключаются, во-первых, в определении взаимодействия различных электронов как функции их движения (и положения) и, во-вторых, в определении изменения этого движения (и положения) как функции их взаимодействия.

Первую задачу мы полностью решили в предыдущей главе.

¹ Точнее—локализовать положение материальных частиц по положению их зарядов, подобно тому как это делалось в отношении массы, когда последняя считалась инвариантным и аддитивным свойством материальных частиц. С точки зрения электромагнитной теории, масса утрачивает непосредственную связь с материей и связывается с электромагнитным полем; таким образом, право на представительство материальных частиц масса утрачивает, передавая его электрическому заряду.

Мы знаем электромагнитное поле, которое вызывается данным движением рассматриваемого электрона, и силу, которая действует на другой электрон, находящийся в этом поле.¹ Однако, чтобы получить замкнутую систему уравнений, достаточную для того чтобы проследить историю рассматриваемой системы электронов, мы должны определить еще движение электрона под действием заданных внешних сил. Одна возможность решить эту задачу на рациональной основе состоит в том, чтобы „раздуть“ электроны в шарики или другие пространственно протяженные образования с поверхностным или объемным зарядом и ввести действие электрона на самого себя, которое компенсировалось бы внешними силами.

Однако, это не есть единственная возможность и даже не наиболее разумная и простая. В природе мы можем наблюдать только „внешние“ силы, действующие на электрон со стороны других электронов. „Сила на самого себя“ представляет собой метафизическую фикцию, — помимо уже упомянутого выше обстоятельства, что с теоретико-познавательной и физической точки зрения бессмысленно подразделять электрон на „элементы“.

Во всяком случае мы в праве требовать, чтобы теория протяженного электрона последовательно рассматривала бы не только движение, но и равновесие электрона. Это, однако, ни в коем случае не имеет места. Принцип Лоренца требует равенства нулю полной силы для всего электрона, но не для его отдельных частей. Внутри электрона равновесия нет. Электрические силы отталкивания между его „элементами“ остаются некомпенсированными, во всяком случае силами электрической природы. Можно было бы, разумеется, предполагать, что они компенсируются другими силами, например, „упругими“. Это многократно высказанное и частично разработанное предположение означает, однако, крушение электродинамики как замкнутой физической теории. Автор придерживается мнения, что эту проблему, точно так же как и все проблемы и трудности, связанные с разделением электрона на элементы, следует считать фиктивной проблемой того же рода, как и многие другие схоластические проблемы, которыми занимались философы и теологи средних веков.

Отбрасывая эту проблему, мы должны трактовать электроны как точечные заряды или „силовые центры“ — в духе представлений, развивавшихся еще Лейбницем и Босковичем.

Но эта концепция, при всей ее соблазнительной простоте, приводит, как мы видели выше, к ряду трудностей. Одна из них заключается в истолковании тех эффектов, которые, с точки зрения обычного представления о шаровидном электроне, объясняются его осевым вращением или „спином“.

¹ Впрочем это знание является неполным, если трактовать электроны как протяженные частицы, поскольку при этом возникает вопрос о влиянии движения электрона на его форму, т. е. на распределение образующего его заряда.

Новейшее развитие теории квантов открыло, однако, новую возможность интерпретации этих явлений, при помощи представления об особом, непосредственно ненаблюдаемом дополнительном движении электрона; это так называемое „дрожащее движение“ (выведенное Шредингером исходя из теории Дирака) можно себе грубо представить как круговое движение по очень маленькой орбите, налагающееся на обычное поступательное движение электрона и превращающее прямолинейную траекторию в спираль (винтовую линию) с очень маленькими витками.

Другая более фундаментальная трудность связана с формулировкой законов движения электронов или, вернее, формулировкой учения об электромагнитной энергии, которое было положено нами в настоящей главе в основу учения о движении.

Конечно, для формулировки законов движения электронов нет необходимости вводить понятие об энергии, количестве движения и других механических свойствах электромагнитного поля. Можно, например, следуя Ньютону, определить это движение с помощью уравнения $m_0 w = F^a$, где m_0 — (постоянная) масса электрона, $w = \frac{dv}{dt}$ — его ускорение, а $F^a = e \left(E^a + \frac{v}{c} \times H^a \right)$ — действующая на него сила, обусловленная внешним электромагнитным полем.

Впрочем, это уравнение, как мы знаем, является неточным и совершенно непригодно при скоростях движения, близких к c . Ничто не мешает нам, однако, заменить его уравнением Лоренца

$$\frac{d}{dt}(mv) = F^a,$$

где $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$; рассматривая это уравнение как выражение опытных фактов и отбрасывая те теоретические соображения, связанные с действием протяженного электрона на самого себя, которые привели нас к нему. Заметим, что теория относительности Эйнштейна, отправляясь от ньютоновского уравнения, как приближения, соответствующего малым скоростям, приводит к уравнению Лоренца совершенно независимо от указанных соображений. Следует, однако, помнить, что уравнение Лоренца также не вполне точно, поскольку оно не учитывает силу радиационного трения. Конечно, последнюю можно было бы ввести в уравнение движения электрона чисто постулативным путем, так же как и силу инерции. Однако тот факт, что обе силы могут быть выведены из единого теоретического принципа, основанного на рассмотрении действия, которое электрон оказывает на самого себя, является убедительным доводом в пользу этого принципа.

Отказ от электромагнитного истолкования силы инерции, т. е. массы электрона, означал бы необходимость сохранения

обычного представления о кинетической энергии и количестве движения электрона как о величинах, связанных с ним самим, а не с его электромагнитным полем. Мы видели, однако, что в случае системы электронов оказывается необходимым дополнить эту „собственную“ энергию и „собственное“ количество движения отдельных электронов соответствующими „взаимными“ величинами, которые, впрочем, могут быть определены лишь приближенным образом, если отвлекаться от запаздывания электромагнитных дальнедействий. Последнее замечание относится также и к электростатическим силам, действующим между разными электронами: эти силы могут быть выведены из некоторой потенциальной функции лишь в том случае, если скорость распространения электрических сил считать равной бесконечности.

Таким образом, понятия о кинетической и потенциальной энергии, а также механического количества движения системы электронов утрачивают всякий смысл, если исходить из точных выражений для сил, с которыми разные электроны действуют друг на друга, и не связывать собственной энергии и собственного количества движения отдельных электронов с создаваемым ими электромагнитным полем.

Если мы желаем вообще сохранить понятия энергии, массы и количества движения, то нам остается лишь один выход — трактовать их как свойства не самих материальных частиц, а их электромагнитного поля, в соответствии с теорией, изложенной в предыдущих параграфах.

§ 11. Соотношение между полем и частицами; точечные электроны. Но как же быть в таком случае с протяженностью электронов, которая является как будто необходимой предпосылкой для этой теории? Для того чтобы ответить на этот вопрос, заметим прежде всего следующее.

При конструировании понятий электромагнитной энергии и электромагнитного количества движения мы исходили из понятия о полной силе, действующей на элемент электрического заряда, выставив, по Лоренцу, требование, чтобы в среднем для целого электрона эта сила (обусловленная суммой внешнего и собственного поля) равнялась нулю. Это требование позволило нам свести закон движения электронов к общему закону сохранения электромагнитной энергии (и количества движения), опять-таки не для каждого элемента объема в отдельности (поскольку при этом точная компенсация внешних и внутренних сил не имеет места), а для таких объемов, которые содержат целые электроны (а не части их), т. е., другими словами, в среднем для всего объема, занимаемого каждым электроном. Таким образом законы движения электрона могут быть записаны в форме уравнений:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d\xi}{dt}} + \overline{\operatorname{div} \mathbf{K}} &= 0, \\ \overline{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}} + \overline{\operatorname{div}^2 \mathbf{T}} &= 0, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (68)$$

{где черточки сверху обозначают усреднение по объему, содержащему электрон}, совершенно не содержащих понятия силы.

Последняя может быть вновь введена, если положить

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_i,$$

где индекс a относится к внешнему полю, а индекс i — к собственному полю, создаваемому рассматриваемым электроном, и соответственно этому

$$\xi = \xi_{aa} + \xi_{ai} + \xi_{ii},$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{aa} + \mathbf{K}_{ai} + \mathbf{K}_{ii},$$

где

$$\xi_{aa} = \frac{1}{8\pi} (E_a^2 + H_a^2), \quad \xi_{ai} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}_a \mathbf{E}_i + \mathbf{H}_a \mathbf{H}_i),$$

$$\xi_{ii} = \frac{1}{8\pi} (E_i^2 + H_i^2),$$

$$\mathbf{K}_{aa} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a, \quad \mathbf{K}_{ai} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_i + \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_a),$$

$$\mathbf{K}_{ii} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i)$$

и т. д.

Так как $\frac{\partial \xi_{aa}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{K}_{aa} = 0$ в рассматриваемом объеме (поскольку источники „внешнего“ поля находятся вне него), то уравнения (68) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \bar{\xi}_{ii}}{\partial t} + \overline{\text{div } \mathbf{K}_{ii}} = - \frac{\partial \bar{\xi}_{ai}}{\partial t} - \overline{\text{div } \mathbf{K}_{ai}}.$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{ii}}{\partial t} + \overline{\text{div } {}^2\mathbf{T}_{ii}} = - \frac{\partial \bar{g}_{ai}}{\partial t} - \overline{\text{div } {}^2\mathbf{T}_{ai}}. \quad (68a)$$

Правые части этих уравнений представляют собой не что иное как средние значения работы внешней силы (отнесенной к единице объема и времени), а также ее импульса (т. е. самой силы) в объеме, занимаемом электроном, а левые части приводятся к внутренней силе, т. е. к силе инерции и радиационного трения (в случае второго уравнения), или к изменению кинетической энергии (в случае первого уравнения) и излучению отнесенным к единице времени в объеме, занимаемом электроном.

Однако извлечение внешней (или внутренней) силы из уравнений сохранения (в среднем) энергии и количества движения электромагнитного поля (69) не имеет никакого принципиального смысла и значения. Эти уравнения можно рассматривать как

выражение основных законов электромагнитного поля; уравнения же Максвелла-Лоренца

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi \rho \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

как формулы, определяющие положение и движение электронов через связанное с ними поле.

Такая трактовка уравнений (68) и (69) представляет собой в известном смысле обращение того взаимоотношения между электронами и электромагнитным полем, которое развивалось нами до сих пор и в котором электроны, т. е. наэлектризованные частицы материи, трактовались как источники электромагнитного поля. В этой — прежней — точке зрения поле играло чисто вспомогательную роль, фигурируя лишь в качестве „посредника“ между разными электронами и облегчая описание тех сил, с которыми они действуют друг на друга. Без всякого ущерба для точности и полноты этого описания, мы могли бы совершенно упразднить представление о поле и рассматривать силу, испытываемую каждым электроном со стороны остальных, как результат действия на расстоянии, передающегося со скоростью c . Этим представлением о „запаздывающем дальнов действии“ мы, в сущности, и пользовались до сих пор.

Электромагнитное обоснование механики, т. е. законов движения, совершенно меняет положение. Из вторичного и производного фактора электромагнитное поле, после упразднения понятия силы, превращается в фактор первичный и основной. Не поле определяется положением и движением электронов, согласно уравнениям (69), но, наоборот, положение и движение электронов определяются полем — согласно тем же самым уравнениям, которые нужно лишь читать в обратном направлении — не справа (данное) налево (искомое), а слева направо.

Само же поле, вернее, изменение его в пространстве и времени, определяется „динамическими“ уравнениями (68), выражающими, в усредненной форме, законы сохранения энергии и количества движения, носителем которых является электромагнитное поле. С этой точки зрения материей, — в философском смысле этого слова — следует считать не совокупность наэлектризованных частиц, из которых слагаются материальные тела, а электромагнитное поле; что же касается материальных частиц, то их следует рассматривать лишь как узловые точки электромагнитного поля, положение и движение которых определяется законами изменения последнего в пространстве и времени.

При таких условиях единственной помехой представлению об электронах как о непротяженных частицах, т. е. точечных зарядах, является то обстоятельство, что связанное с ними поле (создаваемое ими — по старой концепции, или создающее

их — по новой) обращается в соответственных точках в бесконечность, вследствие чего обращается в бесконечность и масса этих частиц, определяемая через их электромагнитную энергию или количество движения.

Мы видим, следовательно, что для сочетания динамической теории электромагнитного поля (как носителя механических свойств) с представлением о непротяженности электронов необходимо видоизменить уравнения Максвелла-Лоренца (69) таким образом, чтобы, несмотря на концентрацию заряда электронов в одной точке, электромагнитное поле оставалось конечным на сколь угодно малом расстоянии от этой точки; при этом на несlišком малых расстояниях поле должно принимать обычный, соответствующий опытным данным, вид.

Подобная модификация уравнений Максвелла-Лоренца может быть осуществлена разными способами. Простейший из них, предложенный (в связи с совершенно другими соображениями) Эддингтоном в 1922,¹ и развитый независимо от него Борном в 1933 г.,² заключается в следующем.

В первых двух уравнениях (69), содержащих плотность заряда и тока, последние полагаются равными нулю — во всем пространстве, кроме отдельных „особенных точек“, в которых предполагаются сосредоточенными электроны. Далее в тех же уравнениях векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} заменяются соответственно через

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \mathbf{H}, \quad (70)$$

где

$$\epsilon = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}}. \quad (70a)$$

Здесь $E_0 = \frac{e}{r_0^2}$ представляет собой максимальное значение, которое может принимать электрическое поле в центре электрона, причем параметр r_0 играет роль эффективного „радиуса“ последнего. Таким образом уравнения (69) заменяются следующими:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Руководящей нитью при этом являются соображения, вытекающие из теории относительности (ср. гл. X), в связи с условием конечности \mathbf{E} и \mathbf{H} . В случае, например, покоящегося электрона, мы получаем из уравнения $\text{div } \mathbf{D} = 0$, в связи с $\oint D_n dS = 4\pi e$

¹ См. Эддингтон. Математическая теория относительности ГТТИ. 1934.

² М. Вопп. Proc. Roy. Soc. 1934

(для всякой замкнутой поверхности, содержащей рассматриваемый электрон) и $D = \frac{e}{r^2}$; следовательно, по (70) и (70а),

$$\frac{E}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}} = \frac{e}{r^2},$$

т. е.

$$E = \frac{e}{\sqrt{r_0^4 + r^4}}$$

Далее, необходимо принять во внимание то обстоятельство, что видоизмененным уравнениям Максвелла-Лоренца (71) соответствует видоизмененное определение динамических величин ξ , \mathbf{K} , \mathbf{g} и ${}^2\mathbf{T}$. Мы рассмотрим этот вопрос в следующем отделе, где мы дадим также более обоснованный вывод предыдущих результатов. Здесь для нас существенно отметить лишь то обстоятельство, что при переходе к точечным электронам „усредненные“ динамические уравнения (68а) заменяются точными

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{K} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \operatorname{div} {}^2\mathbf{T} &= 0, \end{aligned} \tag{71a}$$

которые, в противоположность уравнениям (71), не нарушаются даже в особенных точках, где находятся электроны.

Таким образом, задача о движении и взаимодействии произвольной системы точечных электронов может считаться в принципе решенной и притом без существенного изменения той динамической теории электромагнитного поля, которая была развита в этой главе.

Заметим, что изложенная теория, трактующая поле как „базис“ материи, а частицы (электроны) как ее „надстройку“, ни в какой мере не означает возврата к старым представлениям о материальной среде (эфире), якобы непрерывным образом заполняющей пространство. О подобной среде, построенной из дискретных частиц, по аналогии с обычными материальными телами, не может быть речи. Электромагнитное поле, как мы его себе мыслим, является бесструктурным континуумом, к которому категории движения неприменимы. Эти категории оказываются применимыми лишь к „особенным“ точкам электромагнитного поля (т. е. точкам, где $D = \infty$), перемещение которых определяется непрерывным изменением поля в пространстве и во времени, и которые представляют собой материю в ее обычном, корпускулярном аспекте.

ОТДЕЛ III

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ КАК СТАТИКА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА VIII

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. **Пространственно-временная симметрия электромагнитных уравнений.** В главе VI, § 4 мы видели, что если время, умноженное на $\sqrt{-1}c = ic$, присоединить к трем пространственным координатам x_1, x_2, x_3 как четвертую координату x_4 , а умноженный на i скалярный потенциал рассматривать как соответствующую компоненту четырехмерного вектор-потенциала, то дифференциальные уравнения для электромагнитных потенциалов могут быть написаны вполне симметрично относительно четырех индексов. При этом мы ограничивались случаем точечного заряда.

Рассмотрим теперь случай непрерывного распределения электрического заряда и тока с объемными плотностями ρ и \mathbf{j} .

Как известно, величины ρ и \mathbf{j} связаны между собою соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

которое выражает закон сохранения электричества. Если ввести произвольную прямоугольную координатную систему X_1, X_2, X_3 , то это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

или, с обозначениями

$$ict = x_4 \tag{1}$$

$$i\rho = j_4 \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial j_k}{\partial x_k} = 0. \tag{2a}$$

Это уравнение совершенно аналогично уравнению (19a) главы VI, которое еще раз мы напишем здесь для полноты. Полагая

$$i\varphi = A_4, \tag{3}$$

мы имеем

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0, \quad (3a)$$

Дифференциальные уравнения для электромагнитных потенциалов

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{j}, \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

могут теперь быть сведены к общему виду

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i^2} = -4\pi j_k \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (4)$$

По формулам

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

мы получаем далее следующие выражения для компонент электрического и магнитного поля

$$E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} = i^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - i \frac{\partial A_k}{\partial x_4} = i \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_4} \right) \quad (k = 1, 2, 3)$$

и

$$H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; \quad H_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; \quad H_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}.$$

Таким образом, шесть величин

$$\begin{aligned} H_1 = H_{23}, \quad H_2 = H_{31}, \quad H_3 = H_{12}, \\ -iE_1 = H_{14}, \quad -iE_2 = H_{24}, \quad -iE_3 = H_{34} \end{aligned} \quad (5)$$

можно рассматривать как компоненты четырехмерного антисимметричного тензора, которые получаются путем дифференцирования компонент потенциала по координатам, согласно формуле

$$H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} = -H_{lk} \quad (k, l = 1, 2, 3, 4). \quad (5a)$$

Заменим теперь компоненты электрической и магнитной напряженности поля в основных максвелловских уравнениях I и II § 3 главы V компонентами тензора H_{kl} .

Тогда первая группа уравнений

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

напишется в координатной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_1}{\partial t} &= i \left(\frac{\partial H_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{23}}{\partial x_4} \right) = 0, \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_2}{\partial t} &= i \left(\frac{\partial H_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{31}}{\partial x_2} \right) = 0, \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_3}{\partial t} &= i \left(\frac{\partial H_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_4} \right) = 0, \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} &= \frac{\partial H_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_3} = 0, \end{aligned}$$

т. е. в форме четырех уравнений одинакового вида:

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} = 0, \quad (6)$$

где i, k, l три различных числа из ряда 1, 2, 3, 4. Заметим, что уравнение (6) остается справедливым и тогда, когда два или все три эти числа равны между собой; например, для $k = l$

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{ki}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial H_{kk}}{\partial x_i} = 0,$$

так как $H_{ik} = -H_{ki}$ и $H_{kk} = 0$.

Аналогичным образом вторая группа максвелловских уравнений преобразуется к виду:

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_4} = 4\pi j_1 \quad \text{и т. д.} \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} &= -i \left(\frac{\partial H_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{43}}{\partial x_3} \right) = 4\pi \rho, \end{aligned}$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_{ki}}{\partial x_i} = 4\pi j_k \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (7)$$

Таким же образом можно представить формулы

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \rho = -\text{div } \mathbf{P}$$

[см. (21) и (19а) главы V]. При этом магнитная и электрическая поляризации играют такую же роль, как $\frac{\mathbf{H}}{4\pi}$ и $-\frac{\mathbf{E}}{4\pi}$.

Если, следовательно, положить

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= P_{23}, \quad M_2 = P_{31}, \quad M_3 = P_{12}, \\ iP_1 &= P_{14}, \quad iP_2 = P_{24}, \quad iP_3 = P_{34}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

то

$$j_k = \sum_{l=1}^4 \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l}. \quad (8a)$$

Величины $P_{kl} = -P_{lk}$ так же как $H_{kl} = -H_{lk}$, можно рассматривать как компоненты четырехмерного антисимметричного тензора. Заметим, что, несмотря на формальную аналогию и одинаковую размерность, эти величины совершенно различны, так как уравнения вида (6) не могут удовлетворяться величинами P_{kl} .

В виду того что векторы \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* (электрический и магнитный поляризаационный потенциал) связаны с векторным потенциалом \mathbf{A} и скалярным потенциалом φ совершенно так же, как \mathbf{P} и \mathbf{M} ($=\mathbf{P}^*$) с \mathbf{j} и ρ , то можно положить, аналогично (8) и (8a),

$$\left. \begin{aligned} Z_1^* &= Z_{23}, & Z_2^* &= Z_{31}, & Z_3^* &= Z_{12}, \\ iZ_1 &= Z_{14}, & iZ_2 &= Z_{24}, & iZ_3 &= Z_{34} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и

$$A_k = \sum_{l=1}^4 \frac{\partial Z_{kl}}{\partial x_l}. \quad (9a)$$

Компоненты Z_{kl} получающегося при соединении \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* электромагнитного поляризаационного потенциала удовлетворяют при этом, согласно (20) и (22) главы V, дифференциальным уравнениям

$$\sum_{h=1}^4 \frac{\partial^2 Z_{kl}}{\partial x_h^2} = -4\pi P_{kl}. \quad (9b)$$

По (9a) и (5a) компоненты электромагнитного тензора поля H_{kl} можно выразить через компоненты поляризаационного потенциала следующим образом

$$H_{kl} = \sum_{h=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{\partial Z_{lh}}{\partial x_k} - \frac{\partial Z_{kh}}{\partial x_l} \right). \quad (9c)$$

Эти выражения совпадали бы с (9b) лишь в том случае, если бы выполнялись соотношения $\frac{\partial Z_{lh}}{\partial x_k} - \frac{\partial Z_{kh}}{\partial x_l} = \frac{\partial Z_{lk}}{\partial x_h}$, или

$$\frac{\partial Z_{lh}}{\partial x_k} + \frac{\partial Z_{lk}}{\partial x_l} + \frac{\partial Z_{lk}}{\partial x_h} = 0.$$

Однако, в действительности эти соотношения не выполняются, так как, согласно (9b), такие же уравнения получались бы и для P_{kl} .

Компоненты полной силы, отнесенной к единице объема или отнесенного к единице объема и времени импульса $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{H}$

и соответствующая работа $l = c \mathbf{j} \mathbf{E}$ могут быть связаны вместе, как компоненты четырехмерного вектора. А именно,

$$f_1 = \rho E_1 + j_2 H_3 - j_3 H_2 = H_{12} j_2 + H_{13} j_3 + H_{14} j_4, \dots$$

$$\frac{l}{c} = j_1 E_1 + j_2 E_2 + j_3 E_3 = -i (H_{41} j_1 + H_{42} j_2 + H_{43} j_3),$$

или, введя обозначение

$$\frac{il}{c} = f_4, \quad (10)$$

$$f_k = \sum_{l=1}^4 H_{kl} j_l \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (10a)$$

Полагая здесь, согласно (7),

$$j_i = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^4 \frac{H_{in}}{\partial x_n},$$

имеем

$$f_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^4 \sum_{n=1}^4 H_{kl} \frac{\partial H_{ln}}{\partial x_n} = \frac{1}{4\pi} \sum_l \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} (H_{kl} H_{ln}) -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \sum_l \sum_n H_{ln} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n}.$$

Далее, путем перемены порядка суммирования, получаем

$$\sum_l \sum_n H_{ln} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n} = \sum_n \sum_l H_{nl} \frac{\partial H_{kn}}{\partial x_l},$$

или, так как

$$H_{ln} = -H_{nl} \text{ и } H_{kn} = -H_{nk},$$

$$\sum_l \sum_n H_{ln} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n} = \sum_n \sum_l H_{ln} \frac{\partial H_{nk}}{\partial x_l} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_n \sum_l H_{ln} \left(\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n} + \frac{\partial H_{nk}}{\partial x_l} \right)$$

и окончательно, согласно (6),

$$\sum_l \sum_n H_{ln} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_n} = -\frac{1}{2} \sum_l \sum_n H_{ln} \frac{\partial H_{ln}}{\partial x_k} =$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_l \sum_n H_{ln}^2 \right).$$

Таким образом

$$f_k = \frac{1}{4\pi} \sum_l \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n} (H_{kl} H_{ln}) + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_l \sum_n H_{ln}^2 \right).$$

Вводя обозначения

$$\Theta_{kn} = \delta_{kn}L + \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^4 H_{kl} H_{ln}, \quad (11)$$

где

$$L = \frac{1}{16\pi} \sum_l \sum_n H_{ln}^2 = \frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2), \quad (11a)$$

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=n \\ 0 & \text{при } k \neq n \end{cases} \quad (11b)$$

мы можем переписать предыдущее выражение в виде

$$f_k = \sum_{n=1}^4 \frac{\partial \Theta_{kn}}{\partial x_n} \quad (k=1, 2, 3, 4). \quad (12)$$

Легко убедиться, что найденная система идентична с формулами

$$\mathfrak{A} = -\frac{\partial \tau}{\partial t} - \operatorname{div} {}^2\mathbf{T}; \quad l = -\frac{\partial \xi}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{K},$$

которые мы вывели в §§ 3 и 4 предыдущей главы.

А именно, скаляр ξ , векторы \mathbf{g} и \mathbf{K} и трехмерный тензор ${}^2\mathbf{T}$ оказываются соединенными в один четырехмерный, симметричный тензор, компоненты которого определяются равенствами (11).

Мы имеем, таким образом (см. гл. VII §§ 3 и 4):

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= L - \frac{1}{4\pi} (H_{12}^2 + H_{13}^2 + H_{14}^2) = \frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2 - 2H_3^2 - 2H_2^2 + 2E_1^2) = \\ &= \frac{1}{8\pi} (H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 + E_1^2 - E_2^2 - E_3^2) = -T_{11}; \quad \Theta_{22} = -T_{22}, \quad \Theta_{33} = -T_{33}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= -\frac{1}{4\pi} (H_{13}H_{23} + H_{14}H_{24}) = -\frac{1}{4\pi} (-H_2H_1 - E_1E_2) = \\ &= -T_{12}; \quad \Theta_{23} = -T_{23}, \quad \Theta_{31} = -T_{31}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{14} &= -\frac{1}{4\pi} (H_{12}H_{42} + H_{13}H_{43}) = -\frac{1}{4\pi} (iE_2H_3 - iE_3H_2) = -\frac{i}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_1 = \\ &= -\frac{i}{c} K_1 = -icg_1; \quad \Theta_{24} = -\frac{i}{c} K_2 = -icg_2; \quad \Theta_{34} = -\frac{i}{c} K_3 = -icg_3, \end{aligned}$$

$$\Theta_{44} = \frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2) - \frac{1}{4\pi} (H_{41}^2 + H_{42}^2 + H_{43}^2) = \frac{1}{8\pi} (H^2 + E^2) = \xi.$$

Эти соотношения могут быть выражены схемой

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & \Theta_{34} \\ \hline \Theta_{41} & \Theta_{42} & \Theta_{43} & \Theta_{44} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} -{}^2\mathbf{T} & -ic\mathbf{g} \\ \hline \frac{1}{ic}\mathbf{K} & \xi \end{array} \right) \quad (12a)$$

Принимая во внимание эту схему, первые три уравнения (12) можно написать в виде

$$f_k = -\frac{\partial T_{k1}}{\partial x_1} - \frac{\partial T_{k2}}{\partial x_2} - \frac{\partial T_{k3}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_k}{\partial t} \quad (k = 1, 2, 3),$$

а четвертое — в виде

$$l = -icf_4 = -\frac{\partial K_1}{\partial x_1} - \frac{\partial K_2}{\partial x_2} - \frac{\partial K_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Рассмотренное выше представление основных величин и уравнений электромагнитного поля, впервые введенное Минковским, может быть интерпретировано следующим геометрическим образом.

Представим себе (в действительности не существующее) четырехмерное пространство, которое относится к обычному трехмерному пространству так, как последнее — к плоскости.

Представим себе далее в этом пространстве прямоугольную систему координат X , т. е. четыре перпендикулярные друг к другу оси X_1, X_2, X_3, X_4 . Аналитическое значение этой „ортогональности“ четырех осей мы поясним в последующих параграфах. Пока же заметим, что оно соответствует предполагаемой ортогональности трех пространственных осей X_1, X_2, X_3 в связи с симметрией приведенных уравнений относительно всех четырех индексов. При этом мы пользуемся четвертой осью для „графического изображения“ умноженного на ic времени; таким образом, четыре величины $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$ рассматриваются как прямоугольные компоненты четырехмерного вектора r , характеризующего место и время совершения некоторого события. Подобным же образом введем следующие четырехмерные векторы: j (четырёхмерный ток), \mathfrak{A} (четырёхмерный потенциал), f (импульс силы, отнесенный к единице объема четырехмерного пространства) и четырехмерные тензоры ${}^2\mathfrak{H}$ (антисимметричный тензор поля) и ${}^2\Theta$ (симметричный тензор энергии и количество движения). Наконец, определим четырехмерный оператор \square , соответствующий обычному оператору ∇ , как символический четырехмерный вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}$.

При этом основные уравнения электромагнитного поля можно написать в независимом от выбора координат виде, как соотношения между вышеуказанными четырехмерными векторами и тензорами

Уравнения (2а), (3а) и (4) могут быть написаны в форме

$$\left. \begin{aligned} \square j &\equiv \text{Div } j = 0, \\ \square \mathfrak{A} &\equiv \text{Div } \mathfrak{A} = 0, \\ \square^2 \mathfrak{A} &= -4\pi j, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

совершенно аналогичной соответствующим трехмерным уравнениям для постоянного во времени магнитного поля (и стационарного электрического тока).

Формулы (5а), (6) и (7) переписутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} {}^2\mathfrak{H} &= \square \times \mathfrak{A} \equiv \text{Rot } \mathfrak{A}, \\ \text{Rot } {}^2\mathfrak{H} &= 0 \\ \square {}^2\mathfrak{H} &\equiv \text{Div } {}^2\mathfrak{H} = 4\pi j. \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

Здесь аналогия с соответствующими (не включающими времени) трехмерными формулами нарушается тем, что антисимметричный четырехмерный тензор, в противоположность трехмерному, не эквивалентен вектору. Действительно, тензор ${}^2\mathfrak{H}$ определяется не четырьмя, а шестью независимыми величинами, из которых образуются его двенадцать не исчезающих попарно противоположных компонент $H_{ki} = -H_{ik}$. Его можно обозначать как „бивектор“, т. е. величину, эквивалентную совокупности двух обыкновенных векторов и определяемую своими проекциями не на четыре координатные оси, а на шесть координатных плоскостей ($X_2 X_3, X_3 X_1, X_1 X_2, X_1 X_4, X_2 X_4, X_3 X_4$).¹ Введенная в (13а) операция $\text{Div } {}^2\mathfrak{H}$ соответствует расхождению трехмерного тензора, т. е.

$$(\text{Div } {}^2\mathfrak{H})_k = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_{ki}}{\partial x_i}$$

(см. Введение, § 23).

Операция $\text{Rot } {}^2\mathfrak{H}$ соответствует Rot четырехмерного вектора в том смысле, что посредством ее из антисимметричного тензора 2-го ранга образуется тензор третьего ранга, не исчезающие компоненты которого стоят в левой части уравнений (6). Эти четыре величины могут рассматриваться как компоненты четырехмерного вектора, которому эквивалентен упомянутый тензор третьего ранга.

Если ввести симметричный тензор ${}^2\mathfrak{H}^*$ „дуальный“ или „взаимный“ по отношению к ${}^2\mathfrak{H}$, по схеме

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & 0 & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & 0 & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & H_{43}^* & H_{24}^* & H_{32}^* \\ H_{34}^* & 0 & H_{41}^* & H_{13}^* \\ H_{42}^* & H_{14}^* & 0 & H_{21}^* \\ H_{23}^* & H_{31}^* & H_{12}^* & 0 \end{array} \right\|,$$

то мы получаем

$$\frac{\partial H_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial H_{41}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{42}^*}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{43}^*}{\partial x_3} = (\text{Div } {}^2\mathfrak{H}^*)_4$$

$$\frac{\partial H_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{24}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_4} = \frac{\partial H_{12}^*}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{13}^*}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{14}^*}{\partial x_4} = (\text{Div } {}^2\mathfrak{H}^*)_3.$$

¹ Заметим, что в случае двух измерений антисимметричный тензор эквивалентен скаляру.

$$\frac{\partial H_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{34}}{\partial x_1} = \frac{\partial H_{23}^*}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{24}^*}{\partial x_4} + \frac{\partial H_{21}^*}{\partial x_1} = (\text{Div } {}^2\mathfrak{H}^*)_2,$$

$$\frac{\partial H_{21}}{\partial x_4} + \frac{\partial H_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_2} = \frac{\partial H_{34}^*}{\partial x_4} + \frac{\partial H_{31}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}^*}{\partial x_2} = (\text{Div } {}^2\mathfrak{H}^*)_3,$$

так что уравнение $\text{Rot } {}^2\mathfrak{H} = 0$ может быть заменено уравнением $\text{Div } {}^2\mathfrak{H}^* = 0$.

Аналогичные формулы получаются и для антисимметричных тензоров ${}^2\mathfrak{B}$ и ${}^2\mathfrak{Z}$, но мы не будем их выписывать.

Далее, по формулам (8а) для компонент четырехмерного импульса мы имеем

$$f = {}^2\mathfrak{H} j, \tag{14}$$

где внутреннее произведение тензора и вектора определяется как обобщение соответствующего произведения для трехмерных величин [Введение, (37)]. Таким образом уравнения (12) могут быть написаны в форме

$$f = \text{Div } {}^2\Theta, \tag{14a}$$

причем, согласно (9) и (9а),

$${}^2\Theta = {}^2\delta \frac{1}{8\pi} ({}^2\mathfrak{H} {}^2\mathfrak{H}) + \frac{1}{4\pi} ({}^2\mathfrak{H} \times {}^2\mathfrak{H}) \tag{14b}$$

[см. Введение, (39)].

Заметим, что при проектировании четырехмерных векторов на ось времени получаются обычные скалярные величины, при проектировании на обычное пространство—трехмерные векторы, тесно связанные физически с этими скалярами; точно так же компоненты четырехмерного тензора по „пространственным осям“ образуют обычные трехмерные тензоры, по одной из пространственных и по временной оси—обычные векторы, и по временной оси—скаляры [см. схему (12а)].

В дальнейшем мы будем преимущественно пользоваться координатным представлением электромагнитных величин и уравнений. Мы сформулировали их в независимом от координат виде, чтобы яснее показать их аналогию с обычными векторными уравнениями для постоянных во времени магнитного и электрического полей.

Эта формальная аналогия позволяет рассматривать зависящие от времени электромагнитные явления в обычном трехмерном пространстве, как статические, т. е. независящие от времени, в фиктивном четырехмерном пространстве.

§ 2. Преобразования Лоренца. Обычное евклидово пространство „изотропно“; это значит, что все направления в нем во всех отношениях являются равноправными. Это физическое равноправие различных направлений можно трактовать как их относительность, в том смысле, что всякое направле-

ние может быть определено лишь по отношению к некоторым другим наперед заданным направлениям. Каких-либо „абсолютно“ заданных направлений, характеризующихся особыми физическими свойствами, в евклидовом пространстве вообще не существует. Именно эта изотропность пространства и позволяет выражать все физические законы вообще, а в частности и законы электромагнитных явлений, в форме, не зависящей от системы координат, а именно в виде соотношений между векторными (а также скалярными и тензорными) величинами. Если бы какое-нибудь из направлений было отмечено какими-либо особыми физическими свойствами, то это направление пришлось бы учесть в формулировке упомянутых законов.

Само собой понятно, от формулировки физических законов, не зависящей от координат, можно переходить к иному их выражению, связанному с координатной системой. При этом каждый (трехмерный) вектор определяется совокупностью трех его проекций на три любым образом выбранные координатные оси. Эти три проекции мы определяли во Введении как варианты скаляры, т. е. такие, значение которых зависит от выбора координатной системы и меняется при переходе от одной координатной системы к другой.

В виду относительности направлений все координатные системы представляются равноправными, и поэтому не имеет смысла вопрос о том, какие именно значения компонент данного вектора считать „правильными“ или „истинными“. Две тройки чисел (A_1, A_2, A_3) или (A'_1, A'_2, A'_3) , представляющие компоненты одного и того же вектора \mathbf{A} в различных координатных системах X и X' , следует считать совершенно равноправными. Единственное, что нас может и должно интересовать, это соотношения между этими двумя тройками скаляров. Если считать известными величины (A_1, A_2, A_3) и косинусы $\alpha_{ii'}$ углов между осями системы X и системы X' , то величины (A'_1, A'_2, A'_3) должны как-то выражаться через A_i и $\alpha_{ii'}$. Иными словами, должны быть твердо установлены те формулы, по которым преобразуются компоненты вектора при любом изменении направления координатных осей.

При этом необходимо подчеркнуть следующее обстоятельство: компоненты различных векторов должны преобразовываться одинаковым образом (т. е. согласно одним и тем же формулам) или, иными словами: соответствующие компоненты различных векторов являются ковариантными скалярными величинами.

Это замечание кажется на первый взгляд совершенно тривиальным. В действительности же оно имеет весьма глубокий смысл, представляя собой аналитическое выражение принципа инвариантности физических законов. Физические законы выражаются уравнениями, которые связывают друг с другом различные векторные величины (а также инвари-

антные скаляры, тензоры). При координатном изображении векторов эти уравнения имеют вид

$$A_i = B_i,$$

где **A** и **B** суть два различных физически вектора.

Так, например, мы можем подразумевать под **A** ускорение некоторой частицы, умноженное на ее массу, а под **B**—внешнюю силу, действующую на эту частицу. Если бы компоненты ускорения и силы не были бы величинами ковариантными, то вышенаписанное равенство не могло бы оставаться независимым от выбора направлений координатных осей. Относительность этих направлений, их физическая равноправность и выражается аналитически ковариантностью соответствующих векторных компонент при преобразовании координат. Направления координатных осей относительны; компоненты векторов варианты; но физические законы, связывающие эти компоненты, должны быть абсолютны и инвариантны. Требование это удовлетворяется ковариантностью соответствующих компонент. Сказанное, само собой разумеется, относится не только к векторам, но и к тензорам любого ранга.

Мы будем ограничиваться в дальнейшем прямоугольной системой координат. В этом случае, в противоположность общему случаю косоугольных координат, составляющие вектора, как известно, совпадают с его проекциями на координатные оси так, что нет надобности отличать одни от других. Формулы преобразования векторных и тензорных компонент для этого случая были нами получены во Введении (§ 18). Эти формулы остаются справедливыми и тогда, когда мы фиксируем одну из осей и ограничиваемся преобразованием координат в плоскости (X_1, X_2). При этом компоненту с индексом 3 можно рассматривать как инвариантный скаляр, а компоненты со знаками 2 и 1 трактовать как компоненты двумерного вектора.

Мы сделаем один шаг в противоположном направлении и перейдем к фиктивному четырехмерному пространству, о котором мы говорили в предыдущем параграфе. Основываясь на совершенно аналогичных соображениях, мы будем рассматривать преобразования координат и связанные с ними преобразования векторных и тензорных компонент в этом четырехмерном пространстве, четвертую ось которого (ось времени) мы больше уже не будем считать закрепленной.

Итак, от первоначальной координатной системы $X (X_1, X_2, X_3, X_4)$ мы перейдем к новой координатной системе $X' (X'_1, X'_2, X'_3, X'_4)$ согласно формулам преобразования [см. Введение (32a) и (32b)]:

$$x'_{i'} = \sum_{i=1}^4 a_{ii'} x_i, \tag{15}$$

$$x_i = \sum_{i'=1}^4 a'_{ii'} x_{i'}, \tag{15a}$$

тождественно удовлетворяющим условию ортогональности

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (16)$$

Из этого условия получаются следующие соотношения между коэффициентами преобразования:

$$\alpha'_{i i'} = \alpha_{i i'} \quad (i, i' = 1, 2, 3, 4) \dots \quad (16a)$$

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} \alpha'_{k i'} = \delta_{i i'}, \quad \sum_{k=i}^4 \alpha_{k i} \cdot \alpha_{k i'} = \delta_{i i'}, \quad (16b)$$

где

$$\delta_{i i'} = \begin{cases} 1 & \text{при } i' = i \\ 0 & \text{при } i' \neq i. \end{cases} \quad (16c)$$

Коэффициенты эти, согласно тому наглядному геометрическому смыслу, который они приобретают в трехмерном пространстве, мы будем рассматривать как косинусы углов между старыми и новыми осями координат:

$$\alpha_{i i'} = \cos (X_i, X'_{i'}) = \alpha'_{i i'}.$$

Новую систему X' мы можем себе представлять образованной в результате поворота старых координатных осей в четырехмерном пространстве с сохранением при этом их ортогональности.

Следует заметить, что эти обозначения, соответствующие обозначениям обычной аналитической геометрии, в нашем случае являются только названиями, вовсе не имеющими геометрического смысла. Однако, основываясь на соответствующих трехмерных или даже двухмерных представлениях, мы сможем с большим успехом усваивать аналитические соотношения, а в некоторых случаях, быть может, даже и предвидеть их. Величины x_1, x_2, x_3, x_4 и x_1', x_2', x_3', x_4' , которые представляют собой старые и новые координаты точки в пространстве X , могут принимать при том любые комплексные значения (см. главу VI, § 4).

Эти координаты мы будем считать прямоугольными составляющими четырехмерного радиус-вектора r . При этом запомним, что компоненты различных четырехмерных векторов (i, \mathfrak{A}, j), введенных нами в § 1, преобразуются по тем же формулам (15) и (15а), что и компоненты вектора r , т. е. что они ковариантны. Что же касается компонент дифференциального оператора \square , то его ковариантность непосредственно следует из ортогональности преобразований, выражаемых этими формулами (совершенно так же, как в случае трехмерного пространства). Тензорные же компоненты H_{kl} и Θ_{kl} должны преобразовываться, как произведения соответствующих координат, т. е. они дважды ковариантны.

Легко показать, что основные уравнения электромагнитного поля (2а) — (10) остаются инвари-

антными относительно преобразований, выражаемых формулами (15) — (16с).

Это значит: если в старые уравнения на место первоначальных координат, а также компонент векторов и тензоров подставить их выражения через новые, то из них мы получим уравнения, подобные старым.

Рассмотрим, для примера, уравнения (2а) и (4). Так как символы $\square_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ и величины A_k преобразуются таким же образом, как и координаты x_k , то, согласно (16), получаем

$$\sum_{k=1}^4 \square_k A_k = \sum_{k'=1}^4 \square'_{k'} A'_{k'}$$

и, следовательно, в соответствии с (2а),

$$\sum_{k'=1}^4 \square'_{k'} A'_{k'} = 0.$$

При этом квадрат оператора \square , т. е. сумма $\sum_{k=1}^4 \square_k^2$ представляет собою инвариантный оператор второго порядка (четырёхмерный оператор Лапласа). Полагая в (4), согласно (15а),

$$j_k = \sum_{k'=1}^4 \alpha_{kk'} j'_{k'} \quad \text{и} \quad A_k = \sum_{k=1}^4 \alpha_{kk'} A'_{k'}$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^4 \square_h^2 A_k &= \sum_{l'=1}^4 \square_{l'}'^2 A_k = \\ &= \sum_{k'=1}^4 \alpha_{kk'} \sum_{l'=1}^4 \square_{l'}'^2 A'_{k'} = -4\pi \sum_{k'=1}^4 \alpha_{kk'} j'_{k'}. \end{aligned}$$

Эти четыре уравнения ($k=1, 2, 3, 4$) можно переписать в форме

$$\sum_{k'=1}^4 \alpha_{kk'} y_{k'} = 0$$

и четыре величины

$$y_{k'} = \sum_{l=1}^4 \square_{l'}'^2 A'_{k'} + 4\pi j_k$$

трактовать как четыре неизвестных. Так как определитель, составленный из коэффициентов $\alpha_{kk'}$, согласно условию (16b), ра-

вен 1, то все эти неизвестные должны равняться нулю, и мы получаем

$$\sum_{l=1}^4 \square_l'^2 A'_{k'} = -4 \pi j'_{k'}.$$

Утверждаемая инвариантность фундаментальных уравнений может быть доказана на основании также и других менее непосредственных, но более поучительных соображений, а именно, на основании симметричности этих уравнений относительно значков 1, 2, 3, 4, в связи с их инвариантностью по отношению к таким ортогональным преобразованиям, при которых четвертая ось остается неизменной и которые таким образом сводятся к обычному повороту пространственных осей. Эта „пространственная“ инвариантность есть непосредственное следствие и в то же время условие изотропности трехмерного пространства, или, что то же, относительности всех пространственных направлений. Поэтому пространственную инвариантность можно считать установленной a priori. Что же касается упомянутой симметричности уравнений (2a) — (10), то можно утверждать, что они остаются инвариантными и в том случае, когда ортогональное трехмерное преобразование мы применим к координатам x_2, x_3, x_4 (вместо x_1, x_2, x_3), а соответствующие компоненты векторов и тензоров будем при этом преобразовывать ковариантно. В результате двух последовательных ортогональных преобразований над тремя координатами мы получаем преобразование всех четырех координат, которое также оказывается ортогональным, т. е. удовлетворяет условию (16).

Выражаясь геометрическим языком, мы можем сказать, что фундаментальные уравнения электромагнитного поля остаются инвариантными по отношению ко всем поворотам осей четырехмерной координатной системы. Вместе с этим свойство изотропности, относительность направлений, могут быть перенесены с обычного пространства на пространство четырех измерений. В частности „четвертое“ направление, представляющее ось времени, мы должны рассматривать как относительное или неопределенное. При этом четвертые компоненты векторов i, j, \mathcal{H} и т. д., т. е. время, плотность заряда, скалярный потенциал, которые обычно трактовались нами как величины инвариантные, мы вынуждены теперь признать *вариантными*, совершенно так же, как пространственные компоненты обычных векторов. Абсолютные значения или квадраты этих векторов, например, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (квадрат пространственного отрезка), являются также величинами *вариантными*, и только сумма квадратов всех четырех компонент, которую мы определяем как квадрат соответствующего четырехмерного вектора, может считаться действительно инвариантной величиной.

Спрашивается, имеет ли какой-нибудь определенный физический смысл эта относительность четырехмерных направлений

и эти ортогональные четырехмерные преобразования, так просто выражаемые аналитически, или они лишены вовсе физического смысла?

Для того чтобы им можно было в действительности приписать физический смысл, оказывается необходимым (но, однако, недостаточным), чтобы преобразованные величины $t' = \frac{x_4'}{ic}$, $\rho' = \frac{j_4'}{i}$, $\varphi' = \frac{A_4'}{i}$ и т. д., так же, как и первоначальные, имели бы вещественные значения.

Четырехмерные ортогональные преобразования, удовлетворяющие этому условию, называют преобразованиями Лоренца.¹

Для выяснения поставленного выше вопроса мы рассмотрим одно весьма простое Лоренцово преобразование, при котором вторая и третья оси остаются неизменными и которое сводится, таким образом, к „повороту“ в плоскости $X_1 X_4$. Общие формулы преобразования (15) и (15а) принимают в этом случае следующий вид:

$$x_1' = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{41} x_4,$$

$$x_4' = \alpha_{41} x_1 + \alpha_{44} x_4,$$

или

$$x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{14} x_4',$$

$$x_4 = \alpha_{41} x_1' + \alpha_{44} x_4'$$

и $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$.

Представим себе на мгновение X_4 как обыкновенную перпендикулярную к X_1 ось и будем трактовать рассматриваемое преобразование как поворот на некоторый угол φ в направлении от X_2 к X_1 . Тогда мы будем иметь:

$$\alpha_{11} = \cos (X_1, X_1') = \cos \varphi,$$

$$\alpha_{14} = \cos (X_1, X_4') = \sin \varphi,$$

$$\alpha_{44} = \cos (X_4, X_4') = \cos \varphi,$$

$$\alpha_{41} = \cos (X_4, X_1') = -\sin \varphi,$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos \varphi - x_4 \sin \varphi, \\ x_4' &= x_1 \sin \varphi + x_4 \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1' \cos \varphi + x_4' \sin \varphi, \\ x_4 &= -x_1' \sin \varphi + x_4' \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Для того чтобы при $x_4 = ict$ координата x_1 оставалась вещественной, а x_4' — мнимой ($x_4 = icv'$, где v' — величина существенно-вещественная), необходимо угол φ считать чисто мни-

¹ В честь Г. А. Лоренца, который взял их впервые, хотя и в трехмерном написании.

мым. В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать не самый угол φ , а его тангенс. Положим, поэтому,

$$\operatorname{tg} \varphi = -i \beta = \frac{v}{ic}, \quad (17b)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$ есть величина вещественная (это значит: $\varphi = i\psi$, $\operatorname{tg} \psi = -\beta$). При этом, согласно (17),

$$x_1' = \cos \varphi (x_1 - vt); \quad ict' = \cos \varphi \left(ict - i \frac{v}{c} x_1 \right),$$

но

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

и поэтому

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t' = \frac{t - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (18)$$

Из (17a) совершенно аналогичным образом следует

$$x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t = \frac{t' + \frac{vx_1'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (18a)$$

[последние формулы можно получить из уравнений (18), решая их относительно x_1 и t].

Для обеспечения вещественности величин x_1' и t' остается еще положить $\beta < 1$, т. е. считать, что

$$v < c. \quad (18b)$$

Величина v , так же как и c , имеет, очевидно, смысл скорости. В предельном случае, когда v очень мало по сравнению с c (c —скорость света), формулы (18) сводятся к

$$x_1' = x_1 - vt; \quad t' = t, \quad (19)$$

т. е. к обычным формулам перехода от одной пространственной координатной системы (X_1, X_2, X_3) к другой (X_1', X_2', X_3'), ориентированной так же, как и первая, и движущейся относительно первой с постоянной скоростью v в положительном направлении оси X_1 . Начала координат O и O' обеих координатных систем в „начальный момент“, т. е. при $t = t' = 0$, должны при этом совпадать.

Соответственно вышеизложенному для компонент (1, 4) „четырёхмерного“ тока j и четырёхмерного потенциала \mathfrak{A} , мы получаем следующие выражения:

$$j_1' = j_1 - \frac{v}{c} \rho, \quad \rho' = \rho, \quad (19a)$$

$$A_1' = A_1 - \frac{v}{c} \varphi, \quad \varphi' = \varphi. \quad (19b)$$

Эти уравнения, полученные из принципа ковариантности, совпадают также с обычными формулами, соответствующими преобразованию (19).

Итак, мы видим, что в пределах рассматриваемого приближения поворот в четырехмерном пространстве „оси времени“ X_4 (и одной из „пространственных“ осей) на некоторый мнимый угол φ означает физически не что иное как переход пространственной координатной системы от состояния покоя к состоянию равномерного и прямолинейного движения.

Но так как каждая из осей X_4 и X'_4 с одинаковым правом может представлять собою время, то совершенно безразлично, будем ли мы считать „неподвижной“ систему $(X_1 X_2 X_3)$, а систему $(X'_1 X'_2 X'_3)$ „движущейся“ или, наоборот, систему $(X'_1 X'_2 X'_3)$ будем трактовать как „неподвижную“, а систему $(X_1 X_2 X_3)$ как движущуюся, но в противоположном направлении. Относительность направлений, и в частности направления оси времени, в четырехмерном пространстве выражает собою, следовательно, не что иное как относительность скоростей в обычном пространстве трех измерений.

Вспомним, что этот кинематический принцип относительности, правда, в несколько более узком смысле, был постулирован нами еще в главе V при обобщении „уравнения энергии“ $\text{rot } E = 0$ для случая переменного во времени поля. Правда, тогда он относился к двум контурам тока, движущимся друг относительно друга, в то время как принцип относительности скоростей, утверждаемый здесь, выражает собой тот факт, что электромагнитные явления разыгрываются совершенно одинаковым образом по отношению к двум координатным системам, движущимся прямолинейно и равномерно друг относительно друга, так что нет никакой возможности на основании наблюдения этих явлений указать, какая из этих двух систем движется „в действительности“ и какая покоится. Другими словами, величина скорости есть нечто столь же относительное, как и ее направление.

Однако, этот принцип относительности скоростей, соответствующий изотропности четырехмерного пространства, представляется справедливым лишь в некотором приближении, а именно только для предельного случая скоростей, достаточно малых по сравнению с „критической“ скоростью c . Если же пожелать рассматривать этот принцип как совершенно точный и общий физический закон, то мы при этом натолкнемся на следующие затруднения.

Прежде всего скорости v приходится ограничивать условием $v < c$, т. е. скорости, большие, чем скорость света, считать физически невозможными.

Чтобы, далее, электромагнитные явления подчинялись одним и тем же законам (т. е. одним и тем же уравнениям), с точки зрения обоих наблюдателей, движущихся с координатными си-

стемами $(X_1 X_2 X_3)$ и $(X'_1 X'_2 X'_3)$, значения длины в направлении движения и времени должны определяться не обычными, так называемыми галилеевскими, формулами преобразования (19), по формулам Лоренца (18). Таким образом, для наблюдателей X и X' время должно быть различно, и события, которые одному из них представляются одновременными, могут рассматриваться другим как неодновременные. Вообще временное расстояние между двумя определенными событиями является такой же неопределенной вариантной величиной, как и расстояние между двумя пространственными точками, в которых эти события происходят. При этом заметим следующее: неопределенность или вариантность такого пространственного расстояния для неодновременных событий — факт, давно известный и вполне естественный. Представим себе, например, камень, брошенный вперед с движущегося корабля. Расстояние между начальной и конечной точкой его пути представится наблюдателю, движущемуся вместе с кораблем, другим, нежели наблюдателю, находящемуся на берегу, который вводит в рассмотрение перемещение корабля за время полета камня. Этот случай вполне ясно выражается галилеевскими уравнениями преобразования (19).

Если мы обозначим пространственное и временное расстояния между указанными событиями (бросанием и падением камня) с точек зрения покоящегося и движущегося с кораблем наблюдателей через Δx_1 , Δt и, соответственно, $\Delta x'_1$, $\Delta t'$, то по вышеприведенным формулам

$$\Delta t' = \Delta t, \Delta x'_1 = \Delta x_1 - v \Delta t.$$

Но если дело идет о двух одновременных событиях в различных пространственных точках, то пространственное расстояние представляется обычно как вполне определенная инвариантная величина, не зависящая от относительной скорости ($\Delta t = 0$, $\Delta x'_1 = \Delta x_1$).

Напротив, по формулам Лоренца (18), пространственное расстояние между двумя событиями остается вариантной величиной и в случае „одновременности“. Очевидно, это происходит от того, что указанная „одновременность“ не имеет абсолютного значения вследствие относительности времени, соответствующей относительности направления оси времени в четырехмерном пространстве.

С этой относительностью или, точнее говоря, вариантностью времени должна быть связана, согласно преобразованиям Лоренца, вариантность таких величин, как плотность заряда, скалярный потенциал и т. д., или численное значение трехмерных векторов, т. е. таких величин, которые обычно рассматриваются как инвариантные скаляры.

§ 3. Принцип относительности Эйнштейна. Совершенно ясно, что движение есть понятие относительное, т. е. что движение каких-либо тел, или распространение какого-либо

действия, можно определять только относительно некоторой координатной системы, которая совершенно произвольно считается „покоящейся“.

Поэтому все характеризующие движение величины — скорость, ускорение и т. д. — варианты, т. е. зависят от выбора таких координатных систем. В прошлых главах мы умышленно отвлекались от этого положения и рассматривали скорость как величину, заданную „абсолютно“, т. е. брали за основу наших рассуждений координатную систему, которую считали покоящейся в абсолютном смысле этого слова.

Если бы все пространство было заполнено непрерывной материальной средой (как это думали прежде, да и нередко думают теперь, называя эту среду „эфиром“), частицы которой находятся в вечном покое одна относительно другой, то понятие покоя можно было бы физически однозначно определить как покой относительно этого „эфира“. Это не был бы „абсолютный“ покой в полном смысле этого слова, так как можно было бы считать „эфир“ движущимся в пространстве как целое относительно какого-либо другого объекта. Однако, такое движение не могло бы интересовать физика, и для него покой относительно „эфира“ являлся бы абсолютным покоем. В действительности, для заполнения пространства такой средой нет никаких разумных оснований. Материальный мир состоит из электронов, действующих друг на друга через пустое пространство. Это дальное действие в современной электронной теории отличается от „*actio in distans*“ классической механики только тем, что оно не мгновенно, но передается с конечной скоростью. Конечная скорость распространения электромагнитных действий дает повод считать их „ближкодействием в мировом эфире“, подобно распространению звука в воздухе или упругих колебаний в твердых телах.

Посмотрим, однако, каким образом трактуется это „ближкодействие“ в классической механике, к которой примыкает упомянутая теория „эфира“. Прежде всего тела рассматриваются не как непрерывная среда, но как система дискретных материальных точек (атомов), которые находятся друг от друга на конечном, хотя и весьма малом расстоянии. Взаимодействие этих точек, таким образом, рассматривается как дальное действие, и притом дальное действие мгновенное, так как сила, действующая на каждую частицу, определяется одновременно положением других, преимущественно соседних частиц.

Если положить, что изменение этой силы пропорционально относительному перемещению частицы, то отсюда известным путем получается конечная скорость распространения „нарушений“ в нормальном положении частиц. Производящийся после этого переход к бесконечно малым частицам и бесконечно малым расстояниям представляется только лишь математической фикцией.

Таким образом, „ближкодействие“ в классической механике

означает не что иное как „мгновенное дальноедействие“. То, что это последнее совершается на весьма малых расстояниях („малых“ сравнительно с нашими обычными, макроскопическими масштабами), принципиально несущественно.

Хотя запаздывающее дальноедействие современной „электро-механики“ может быть формально сведено к мгновенному удалнодействию (см. § 5 главы VI), однако, соответствующие ряды не имеют непосредственного физического смысла. Поэтому бессмысленно и бесполезно пытаться свести запаздывающее электромагнитное дальноедействие к чему-то другому.

Мы можем утверждать, что все физические силы, если только в конце концов они являются взаимодействием между различными электронами, могут рассматриваться как электромагнитные дальноедействия, распространяющиеся в пустом пространстве со строго определенной скоростью $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек

Эти факты следует принимать как основной принцип, не нуждающийся в „разъяснениях“ и отвергающий их, так как „разъяснять“ — значит сводить к чему-то более простому и фундаментальному. Подобное сведение для основных положений, очевидно, невозможно.

Так как пространство, за исключением (практически точечных) электронов представляет собой пустоту, то можно говорить только об относительном движении и относительном покое. Физические явления, исследуемые в двух, произвольно движущихся относительно друг друга координатных системах, должны подчиняться одним и тем же законам, т. е. выражающие эти законы уравнения между пространственными координатами и временем, с одной стороны, и различными вариантными величинами, являющимися компонентами определенных векторов и тензоров, с другой стороны, должны иметь в обеих системах идентичный вид. Мы ограничимся только такими системами, которые движутся относительно других прямолинейно и равномерно, так называемыми „инерциальными системами“. Общий принцип относительности движения обращается в этом случае в специальный принцип относительности движения. Этот „специальный“ принцип относительности был известен еще при Ньюtone. ¹ Приложение последнего к электродинамике и соответствующее преобразование ньютоновой механики является заслугой А. Эйнштейна. Как известно, ему удалось обобщить принцип относительности для любого движения на основе эквивалентности сил инерции, связанных с ускоренным движением, и гравитационных сил. В настоящей книге мы не будем останавливаться на этой общей теории, преимущественно занимающейся гравитационными действиями.

Существенная разница между классической и эйнштейновской теориями относительности заключается в том, что в последней принимается во внимание конечность скорости распространения

¹ Хотя сам Ньютон и говорил об абсолютно покоящемся пространстве.

электромагнитных дальнедействий, в то время как первая как бы считает эту скорость бесконечно большой.

А именно, из принципа относительности следует, что эта (конечная) скорость распространения имеет в двух различных инерциальных системах $S (X_1, X_2, X_3)$ и $S' (X'_1, X'_2, X'_3)$ одно и то же значение и, в частности для каждой системы, она имеет одно и то же значение по всем направлениям.

Если бы последнее требование не выполнялось, то можно было бы утверждать, что система (S), относительно которой свет распространяется во все стороны с одинаковой скоростью, „воистину“ покоится, тогда как другая система, относительно которой это условие не выполняется, „воистину“ движется, именно, в направлении, соответствующем наименьшему значению скорости света. Но так как обе системы S и S' совершенно равноправны, то распространение света должно происходить относительно обеих систем совершенно одинаковым образом, т. е. с одинаковой скоростью по всем направлениям.

Таким образом, мы видим, что хотя критическая скорость c , как и всякая другая скорость, имеет только относительный смысл, т. е. может определяться только относительно некоторой системы, которую мы считаем покоящейся, все же, несмотря на это, она должна рассматриваться как инвариантная величина.

Очевидно, что эта инвариантность критической скорости несовместима с нашими обычными пространственно-временными представлениями, связанными с классической механикой. Если в приводившемся выше примере с кораблем заменить брошенный камень световым или радио-сигналом, то он должен распространяться относительно корабля вперед, назад, направо и налево с той же самой скоростью c , как и относительно наблюдателя, стоящего на берегу. Очевидно, это может иметь место только в том случае, если длины и время различно измеряются в соответствующих системах и, в частности, если понятие одновременности имеет только относительное значение.—До тех пор пока думали, что механическое дальнедействие мгновенно и что при действии одного тела на другие все они могут быть как бы объединены во времени, если даже их пространственное удаление друг от друга весьма велико,—до тех пор возможность „релятивация“ понятия одновременности физически исключалась. Поскольку, однако, установлен запаздывающий характер дальнедействия, такая релятивация не только возможна, но и необходима, так как физически невозможно однозначно установить одновременность двух разделенных в пространстве событий (например, на планетах Марсе и Юпитере).

Мы привыкли не приписывать никакого абсолютного смысла пространственному совпадению двух неодновременных событий, но мы должны отказаться от абсолютного смысла временного совпадения двух пространственно-различных событий. Истинным

абсолютным совпадением может быть только совпадение в пространстве и во времени.

В предыдущих параграфах мы видели, что основные уравнения электродинамики только тогда согласуются с принципом относительности, когда пространственные координаты и время преобразуются не по галилеевским формулам (19), но по формулам Лоренца, которые в простейшем случае представляются в виде (18) или (18а). Приведенные рассуждения убеждают нас в физической допустимости этих формул преобразования. Заметим, что мы при этом ничуть не меняем наших пространственно-временных понятий, покуда мы относим их к одной определенной инерциальной системе. Преобразования Лоренца устанавливают по Эйнштейну только новую связь между этими обычными пространственно-временными величинами для двух различных инерциальных систем. При этом инвариантность критической скорости обеспечивается, так сказать, автоматически, так как в формулах, ее включающих, она играет роль постоянного параметра.

Мы покажем теперь, что преобразования Лоренца являются необходимым следствием этой инвариантности, т. е. что они могут быть выведены отсюда независимо от общих электродинамических законов, в связи с относительностью скорости (прямолинейного и равномерного движения).

Прямолинейное и равномерное движение частицы относительно инерциальной координатной системы, соответствующее отсутствию (или равновесию) внешних сил, выражается аналитически линейными уравнениями

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3} = \frac{t - t_0}{\alpha_0},$$

где α_1, α_2 и т. д.—постоянные величины.

В другой координатной системе S' , которая движется относительно S с постоянной скоростью, это „инерциальное“ движение остается прямолинейным и равномерным, т. е. также определяется линейными уравнениями

$$\frac{x_1' - a_1'}{\alpha_1'} = \frac{x_2' - a_2'}{\alpha_2'} = \frac{x_3' - a_3'}{\alpha_3'} = \frac{t' - t_0'}{\alpha_0'}.$$

Отсюда следует, что величины x_1, x_2, x_3, t , с одной стороны, и x_1', x_2', x_3', t' ,—с другой, выражаются одни через другие линейно.

Предположим, что в определенный момент $t = t' = 0$ начальные точки S и S' (O и O') совпадают, и представим себе, что из O (и соответственно из O') в этот момент посылается световой или радио-сигнал. Этот сигнал должен распространяться относительно S и S' в виде шаровой волны с одинаковой скоростью c , причем центр этой шаровой волны должен для наблюдателя, связанного с S , находиться в O , а для наблюдателя, связанного с S' , оставаться в O' .

Предположим теперь, что эта шаровая волна встречается некоторую частицу. Координаты и время этого события суть x_1, x_2, x_3, t в S и x_1', x_2', x_3', t' в S' ; при этом должны удовлетворяться уравнения

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 &= 0 \\ x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2,$$

или, обозначая $ict = x_4, ict' = x_4'$,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2. \quad (20)$$

Мы только что видели, что связь между старыми и новыми координатами (включая и четвертую) должна быть линейной, т. е. выражаться формулами

$$x'_k = \sum_{k=1}^4 \beta_{kk} x_k, \quad (k' = 1, 2, 3, 4), \quad (20a)$$

где $\beta_{kk'}$ — постоянные коэффициенты, зависящие от величины и направления скорости v системы S относительно S' , а также от относительного направления координатных осей обеих систем.

Отсюда следует, что обе суммы $\sum_{k=1}^4 x_k'^2$ и $\sum_{k=1}^4 x_k^2$ должны быть идентичны и тогда, когда они отличны от нуля, т. е. когда рассматриваемое событие является не встречей указанной выше волны с частицей, но что-либо другое, например, встречу двух различных частиц.

Действительно, подставляя выражение (20a) в $\sum_{k=1}^4 x_k'^2$, мы получаем квадратичную форму координат x_1, x_2, x_3, x_4 , которая обращается в нуль вместе с $\sum_k x_k'^2$. При этом также должна

обращаться в нуль, согласно (20), и квадратичная форма $\sum_k x_k^2$.

Поэтому обе формы могут отличаться только множителем пропорциональности.

Этот множитель A может зависеть только от величины, но не от направления относительной скорости v системы S относительно S' ; скорость же S относительно S' равна и противоположна по знаку скорости S' относительно S . Следовательно, если $\sum_{k'} x_k'^2 = A(v) \sum_k x_k^2$, то должно быть и $\sum_k x_k^2 = A(v) \sum_{k'} x_k'^2$, откуда $A(v) = 1$.

Таким образом доказано, что уравнение (20) остается справедливым для любых x_k и соответствующих x_k' . Мы приходим,

таким образом, к условию ортогональности для общих преобразований Лоренца.

Если присоединить к нему еще условие вещественности x'_1 , x'_2 , x'_3 и $t' = \frac{x'_4}{ic}$, то уравнения (20а) дадут обычное преобразование Лоренца.

Итак, вместо того чтобы выводить преобразования Лоренца из основных уравнений электромагнитного поля, как мы это делали, по Минковскому, в § 2, их можно получить непосредственно из принципа относительности в связи с запаздывающим характером электромагнитного дальнего действия (или, как это чаще говорят, — с постоянством скорости света). Таким путем они были получены Эйнштейном в 1905 г. Этому соответствует возможность „обратить“ исследование Минковского, т. е. вывести основные электродинамические уравнения из принципа относительности, или, по крайней мере, обосновать их с помощью этого принципа.

Принцип относительности может также быть использован для обобщения физических законов, установленных только для частного случая статических явлений, на случай явлений, зависящих от времени, как мы это уже проделывали в главе V, но более простым и систематичным путем. Если, например, рассматривать, как доказанное, уравнение для стационарного электрического тока $\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}$, то из принципа относительности следует, что обобщенное уравнение будет иметь вид

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^2} = -4\pi j_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Наконец, принцип относительности или преобразования Лоренца следует применять, вообще говоря, тогда, когда требуется установить влияние скорости (равномерного и прямолинейного) движения на некоторое явление, известное при покоящемся состоянии соответствующей электрической системы (или системы координат),

В дальнейшем мы изучим несколько таких методологических применений принципа относительности. Заметим, что его фундаментальное значение для физики и заключается именно в этом методологическом применении, а не в гносеологической критике обычных пространственных и временных понятий. Принцип относительности (в соединении с инвариантностью скорости света) начинает с „релятивации“ таких величин, которые до сих пор считались инвариантными скалярами (время, плотность заряда, величины обычных векторов и т. д.); далее, однако, он соединяет вместе эти варианты величины, трактуя их как компоненты (или проекции) четырехмерных векторов и тензоров и, наконец, показывает, каким образом из этих вариантов величин могут быть построены истинно инвариантные величины и урав-

нения, выражающие законы природы для переменных во времени явлений.

Центр тяжести теории относительности лежит в этой „конструктивной“ методологической части, а не в „деструктивной“ критической. Основные результаты заключаются не в вариантности обычных скаляров и пространственных векторов, но в возможности рассматривать их как „временные“ и „пространственные“ проекции инвариантных четырехмерных „пространственно-временных“ векторов.

В этом смысле можно с полным правом называть теорию относительности „теорией абсолютности“.

§ 4. Графическое изображение движения и новый вывод преобразований Лоренца. Прежде чем перейти к обсуждению формул преобразования (18), мы еще раз выведем их из эйнштейновского принципа относительности наглядным геометрическим путем, исходя из обычного графического изображения движения.

Движение частицы (или распространение действия) в плоскости $E (X_1, X_2)$, как известно, может быть изображено геометрически с помощью пространственной координатной системы X, Y, Z , причем плоскость E изображается координатной плоскостью XU , а время — третьей осью Z . Последняя вовсе не обязательно должна быть направлена перпендикулярно к плоскости XU , которую мы называем „горизонтальной“. Для простоты ограничимся прямолинейным движением, параллельным оси X (или, точнее, изображаемой этой осью прямой X_1), и оставим без внимания ось Y . Для того чтобы координаты x и z имели одинаковую размерность, положим $z = kt$, где k — некоторый, покамест совершенно произвольный коэффициент, имеющий размерность скорости.

Угол XOZ обозначим через ω (рис. 35). Движение частицы параллельно прямой X_1 изобразится графически линией на плоскости XZ . Равномерному движению со скоростью соответствует прямая линия

$$\frac{x - x_0}{v} = \frac{z - z_0}{k}$$

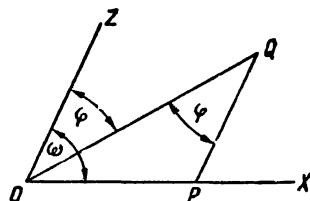


Рис. 35.

Координаты x и z будем рассматривать как составляющие (но не как проекции) радиуса-вектора OQ , проведенного из „нулевой точки“ $x = z = 0$ в рассматриваемую „пространственно-временную“ точку Q .

В случае, если $x_0 = z_0 = 0$,

$$\frac{v}{k} = \frac{x}{z} = \frac{OP}{PQ} = \frac{\sin \varphi}{\sin (\omega - \varphi)}$$

т. е.

$$v = k \frac{\sin \varphi}{\sin (\omega - \varphi)}, \tag{21}$$

где φ — угол наклона „кинематической прямой“ OQ , изображающей движение к оси времени OZ . Разумеется, эта формула остается справедливой и в том случае, когда указанная прямая не проходит через нулевую точку; все равномерные движения, имеющие одну и ту же скорость, изобразятся параллельными прямыми, причем наклон к оси Z возрастает с увеличением скорости. Указанное изображение движений в плоскости E , и в частности по прямой X_1 , соответствует определенной координатной системе, которая рассматривается как покоящаяся. С точки зрения другой, равномерно движущейся в направлении X_1 координатной системы S' (X_1', X_2'), то же самое движение относительно системы осей XYZ изобразится иначе. А именно, некоторое событие, изображающееся с точки зрения S точкой D , — в системе S' изобразится другой точкой D' . Если, например, система S' движется относительно S с той же скоростью, что и указанная выше частица, то прямую OQ следует заменить прямой OQ' , совпадающей с осью времени, OZ .

Легко показать, что одни и те же движения и события в плоскости E , изучаемые с различных кинематических точек зрения, S и S' могут изображаться в координатном пространстве XYZ одними и теми же линиями и точками, если для представления движущейся системы ввести новые оси X_1', X_2', X_3' , определенным образом наклоненные к старым и, вообще говоря, имеющие новые масштабы.

В самом деле, координаты пространственно-временной точки D (x, z), относящиеся к предыдущей координатной системе, и новые D' (x', z') ($y = y'$) связаны между собой линейными соотношениями, так как движение равномерное и прямолинейное в системе S должно оставаться таким же в S' (см. § 3). Эти линейные соотношения можно рассматривать как формулы преобразования, определяющие новые оси $X'Z'$, таким образом, чтобы координаты (x, z) и (x', z') соответствовали одной и той же точке.¹

Новая ось Z' , очевидно, должна совпадать с прямой OQ , изображающей движение системы S' относительно S . Наоборот, старая ось времени OZ изображает движение S относительно S' , т. е. движение со скоростью $v' = -v$ (в направлении X_1). Из этих соотношений между v' и v (которые, пожалуй, можно рассматривать как специальный „принцип связи“) получается, в связи с формулой (21), соотношение между координатными углами ω и ω' ($X'OZ'$). Если положить $\varphi' = -\varphi$, то по (21)

$$v' = k' \frac{\sin \varphi'}{\sin(\omega' - \varphi')} = -k' \frac{\sin \varphi'}{\sin(\omega' + \varphi)},$$

т. е., так как

$$v' = -v = -\frac{k \sin \varphi}{\sin(\omega' - \varphi)}, \quad \frac{k'}{k} = \frac{\sin(\omega' + \varphi)}{\sin(\omega' - \varphi)}.$$

Вообще говоря, такие преобразования называются аффинными.

Коэффициенты k и k' зависят от масштабов, вернее, от отношения масштабов, которые применяются в системах XZ и $X'Z'$ для единиц длины и времени. Но в силу полной равноправности „движущейся“ и „покоящейся“ систем, мы должны положить $k = k'$, что приводит к уравнению

$$\frac{\sin(\omega' + \varphi)}{\sin(\omega - \varphi)} = 1, \quad (21a)$$

которое имеет два и только два решения, а именно

$$\omega' = \omega - 2\varphi, \quad (21b)$$

$$\omega' = \omega = \frac{\pi}{2}. \quad (21c)$$

Таким образом, при повороте оси Z на угол φ мы должны повернуть ось X на такой же угол, в том же или в противоположном направлении; в первом случае и старая и новая координатные системы должны быть прямоугольными.

Остановимся на первом решении. Из него получается весьма наглядное соотношение между „кинематическим“ и „геометрическим“ принципом относительности, т. е. между относительностью скорости и относительностью направления. В начальной координатной системе XZ мы обозначали ось X как „горизонтальную“. Соответственно ось времени должна была изобразиться вертикальной прямой OZ . При этом вертикальное направление имеет значение покоя или „движения во времени“ при покое в пространстве. Переход от „покоящейся“ координатной системы X_1X_2 к „движущейся“ $X'_1X'_2$ выражается геометрически поворотом „вертикально-горизонтальной“ координатной системы XZ в „наклонное“ положение $X'Z'$.

Вопрос о том, которая из обеих систем S и S' действительно движется, является бессмысленным, так же как и вопрос о том, которая из систем XZ и $X'Z'$ действительно наклонная; новую ось времени OZ' мы можем также считать вертикальной, а OZ наклонной, как и наоборот. Это соотношение между понятиями „покоящийся“ и „движущийся“, с одной стороны, и „вертикальный“ и „наклонный“, с другой, означает, что мы можем рассматривать такие величины, как длина и промежуток времени, т. е. пространственное и временное расстояние между двумя событиями как относительные и вариантыные в том же смысле, как и горизонтальную и вертикальную проекции прямой, соединяющей две различные пространственные точки.

Представим себе какие-нибудь два события, например, бросание и падение камня в приведенном выше примере движущегося корабля.

Эти события графически изобразятся для покоящегося наблюдателя точками Q и Q_1 (рис. 36) относительно координатной системы XZ с горизонтальной осью длин OX и вертикальной осью времени OZ .

Пространственное расстояние между обоими событиями изобразится при этом отрезком $QC = \xi$ — „горизонтальным расстоянием“ между Q и Q_1 ; соответствующее временное расстояние τ , т. е. время полета камня, — умноженной на $\frac{1}{k}$ „высотой“ Q_1 над Q , т. е.

$$\frac{1}{k} CQ_1 = \frac{1}{k} \tau.$$

С точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с кораблем, эти величины должны иметь другие значения ξ' и τ' ; все представится ему при этом так, как если бы он рассматривал отрезок QQ_1 из другой точки земного шара, где вертикаль OZ наклонена к OZ' под углом φ в сторону направления движения.

Соотношения между ξ и τ , с одной стороны, и ξ' и τ' , с другой, имеют вид [см. (17) и (17a)]:

$$\xi' = \xi \cos \varphi - k\tau \sin \varphi, \quad k\tau = \xi \sin \varphi + k\tau \cos \varphi.$$

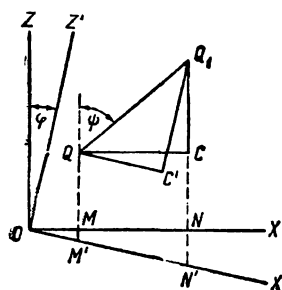


Рис. 36.

Но по (21), при $\omega = \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{k}.$$

Так как $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{k^2}}}$,

то эти соотношения могут быть переписаны в виде:

$$\xi' = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{k^2}}}, \quad \tau' = \frac{\tau + \frac{\xi v}{k^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{k^2}}}. \quad (22)$$

Скорость камня (или, вернее, ее горизонтальная проекция которую мы считаем постоянной) относительно покоящегося наблюдателя обозначим через $u = \frac{\xi}{\tau}$, а для движущегося вместе с кораблем — через $u' = \frac{\xi'}{\tau'}$. Разделя оба уравнения (22) друг на друга, получаем

$$\frac{\xi'}{\tau'} = \frac{\xi - v\tau}{\tau + \frac{v\xi}{k^2}} = \frac{\frac{\xi}{\tau} - v}{1 + \frac{v\xi}{k^2\tau}}$$

т. е.

$$u' = \frac{u - v}{1 + \frac{uv}{k^2}}. \quad (22a)$$

Это соотношение между обеими скоростями можно получить и непосредственно из (21), не пользуясь формулами преобразования (22).

Если обозначить угол наклона прямой QQ_1 к OZ через ψ и к OZ' через ψ' , то получается

$$\psi' = \psi - \varphi,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \psi \cdot \operatorname{tg} \varphi},$$

т. е. по (21)

$$\frac{u'}{k} = \frac{\frac{u}{k} - \frac{v}{k}}{1 + \frac{uv}{k^2}}.$$

Чтобы привести формулы (22) и (22a) в соответствие с обычными „классическими“ пространственно-временными представлениями, достаточно положить $k = \infty$; при этом они обращаются в обычные формулы $\xi' = \xi - v\tau$, $\tau' = \tau$, $u' = u - v$. Заметим, что коэффициент k представляет собой некоторую скорость. Предположение $k = \infty$ соответствует, следовательно, „классическому“ представлению о бесконечно большой скорости распространения механического дальнего действия. В действительности, однако, эта скорость (c) конечна и притом, по принципу относительности, — инвариантна. Если рассматривать вместо движения брошенного камня распространение светового или радио-сигнала, то должно быть $u = u' = c$.

Формула (22a) может быть на самом деле приведена в соответствие с этим условием инвариантности, если положить

$$k^2 = -c^2. \quad (22b)$$

При этом формулы (22) переписутся в виде

$$\xi' = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \tau' = \frac{\tau - \frac{\xi v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (23)$$

идентичном (18), в то время как формула (22a) примет вид

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \quad (23a)$$

Заметим, что мнимость коэффициента k тесно связана с принципом причинности (в его обычной формулировке). Хотя промежуток времени между двумя событиями является величиной вариантной, однако последовательность этих событий, в случае если одно из них можно рассматривать как причину другого, должна оставаться инвариантной. Если бы k было вещественной величиной, то при достаточно большой скорости второй инерциальной системы относительно первой можно было бы поменять последовательность любых двух событий. Например, если, при достаточно большом наклоне оси Z' к оси Z (на рис. 36), точка Q оказалась бы в системе $X'OZ'$ лежащей выше Q_1 то это означало бы, что падение камня предшествует его бросанию. Такая бессмыслица исключается мнимостью k . Если положить во второй формуле (23) $\xi = u\tau$, то легко видеть, что принцип причинности, выражающийся неравенством

$$\frac{\tau'}{\tau} > 0,$$

соблюдается в том и только в том случае, если выполняется неравенство

$$\frac{uv}{c^2} < 1.$$

Это значит, что обе скорости u и v должны быть по величине меньше инвариантной скорости c .

Тот факт, что скорость распространения электромагнитных действий или, короче говоря, скорость света, действительно имеет предельный характер, следует из эйнштейновского закона сложения скоростей, выражающегося формулой (23).

А именно, при сложении, или, вернее, „наложении“ двух скоростей, не превышающих скорости c , по формуле (23) получается результирующая скорость, также удовлетворяющая этому условию.

Если, например, положить в (23) $u = c$, то $u' = \frac{c-v}{1-\frac{cv}{c^2}} = c$.

Заметим, что в эйнштейновской теории относительности скорость не является аддитивной величиной, как в классической. Это становится ясным, если мы обратимся ко второму (непосредственному) выводу формулы (22а): там мы вычитаем углы, а не их тангенсы, пропорциональные скоростям.

Вследствие мнимости k предыдущие соотношения (22) и (22а) теряют свой наглядный геометрический смысл, из которого мы исходили при их выводе. Несмотря на это, мы можем чисто формально применять вышеуказанный геометрический метод; можно также пользоваться и соответствующими графическими изображениями, не обращая внимания на мнимость k , которую следует учитывать только в конечном результате (подставляя $k = ic$).

§ 5. Пространственные и временные расстояния в теории относительности. Вернемся к рис. 36 и заметим теперь, что

длина отрезка QQ_1 , которую мы определяли как кинематическое, или пространственно-временное расстояние между соответствующими событиями, является инвариантной величиной. Так как

$$QQ_1^2 = QC^2 + CQ_1^2,$$

то, следовательно,

$$s^2 = \xi^2 + k^2\tau^2,$$

т. е.

$$s^2 = \xi^2 - c^2\tau^2. \quad (24)$$

Отрезки QC и CQ_1 образуют горизонтальную и вертикальную компоненты (проекции) вектора QQ_1 ; соответственно можно сказать, что ξ и $ic\tau$ (или просто τ) являются пространственной и временной компонентами или проекциями пространственно-временного вектора τ .

При $s^2 < 0$ мы имеем всегда такую скорость $u < c$, что ξ может быть представлено как произведение $u\tau$; это — скорость прямолинейного, равномерного движения, которое, так сказать, соединяет рассматриваемые события, т. е. пространственно-временные точки Q и Q_1 .

Неравенство $s^2 < 0$ всегда выполняется в том случае, когда Q_1 является следствием Q ; в предельном случае $u = c$, который имеет место только при распространении электромагнитных действий, оно переходит в равенство $s^2 = 0$. Если положить в (23)

$v = u (< c)$, то

$$\xi' = 0, \quad \tau' = \tau \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Первое равенство означает, что с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе со второй системой, оба события находятся в одной и той же пространственной точке, — в согласии с нашими обычными представлениями. В противоположность этим представлениям, промежуток времени между рассматриваемыми событиями представляется уменьшенным в отношении $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$: 1. Таким образом, можно сказать, что временное расстояние между двумя событиями (которые причинно связаны или могут быть связаны друг с другом, является наименьшим в такой инерциальной системе, относительно которой эти события пространственно совпадают.

Если $s^2 > 0$, то ни о какой причинной связи между Q и Q_1 не может быть и речи. При этом невозможно и привести их к пространственному совпадению. Однако, в этом случае можно подобрать такую инерциальную систему, по отношению к которой оба события представляются одновременными. Эта система s' должна двигаться относительно первоначальной системы со скоростью, определяющейся из уравнения $\tau - \frac{\xi v}{c^2} = 0$.

Подставляя соответствующее значение v в (23), мы получаем

$$\xi' = \xi \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

как наименьшее возможное значение ξ . Очевидно, оно должно совпадать с s , так как из инвариантности s следует, что

$$\xi^2 - c^2 \tau^2 = \xi'^2 - c^2 \tau'^2,$$

а если $\tau = 0$, то $\xi' = s$. Напротив, в случае для $s^2 < 0$ τ' остается отличным от нуля, но можно положить $\xi' = 0$ и тогда получается $s = ic\tau'$. Эти соотношения можно свести к следующим формулам:

$$s = ic\tau \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = ic\tau_{\min} \quad (s^2 < 0)$$

$$s = \xi \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \xi_{\min} \quad (s^2 > 0). \quad (24a)$$

Таким образом, длины и промежутки времени должны рассматриваться как пространственные и временные проекции „пространственно-временных“ расстояний, т. е., следовательно, как варианты величины, зависящие от скорости движения наблюдателя таким же образом, как горизонтальная и вертикальная проекции отрезка зависят от вертикального направления наблюдателя.

В обоих случаях эта вариантность совершенно не зависит от выбора единиц. Два наблюдателя, связанные с различными координатными системами, могут пользоваться одними и теми же единицами длины и времени, т. е. одними и теми же масштабами и часами. Эти масштабы и часы ни в какой мере не зависят от относительного движения, так же как вращение вертикали не влияет на длину метра. И несмотря на это, измеренные одними и теми же приборами пространственные и временные расстояния между одними и теми же событиями могут быть не идентичны.

Следует совершенно ясно представлять себе, что здесь речь идет не об измерении длины определенного материального тела или хода определенных часов. В действительности вопрос ставится об определении расстояния между различными точками пустого пространства, в которых происходят известные события, и интервала между соответствующими временными точками.

Представим себе, для конкретизации, два события, происходящие одно на Юпитере, другое на Сатурне и наблюдаемые земным и марсианским астрономами. Задача состоит в определении следующих величин: во-первых, расстояния между пространственной точкой P , в которой Юпитер находился в момент T первого события, и точкой P_1 , в которой находился Сатурн в момент

T_1 , когда произошло второе событие; во-вторых,—интервала между временными точками T и T_1 .

Но такой вещи как „определенная пространственная точка“ не существует, и мы давно уже должны были бы к этому привыкнуть. Точка пространства может быть определена только относительно некоторой координатной системы, которая совершенно произвольно считается „покоящейся“. В астрономии обычно применяют координатную систему, связанную с Солнцем (или с центром тяжести солнечной системы). С точки зрения этой системы расстояние PP_1 должно представляться одинаковым и земному и марсианскому астроному, если они пользуются одними и теми же единицами длины. Однако, в силу принципа относительности, они могут с полным правом принять любую другую инерциальную систему и в ней исследовать рассматриваемые события, например, такую, в которой они сами покоятся (для простоты мы пренебрежем осевым вращением Земли и Марса и будем считать их поступательное движение неускоренным). Обозначим инерциальную систему Земли через S , а Марса—через S' . Расстояние PP_1 будет представляться различным в системах S и S' , если только оба события неодновременны даже с точки зрения классической теории относительности. Но представление что одновременность двух пространственно разделенных событий является чем-то определенным, относится к числу предрассудков прежнего механического мировоззрения. Выше мы видели, что этот предрассудок проистекает из представления о мгновенном дальном действии. На самом деле физическое дальное действие имеет запаздывающий характер. Его конечную скорость распространения, т. е. скорость света, мы рассматриваем по принципу относительности, как относительную и вместе с тем как инвариантную величину.

Чтобы определить время и место рассматриваемого события, земной и марсианский астрономы должны не только наблюдать, но и вычислять; в частности они должны учесть то обстоятельство, что наблюдаемые в данный момент на Юпитере и Сатурне события в действительности произошли раньше. Чтобы определить это запаздывание, они должны вычислить расстояния от эффективных пространственных точек P и P_1 до их телескопов. Если движение обеих планет (Юпитера и Сатурна) относительно инерциальных систем S и S' известно, то такое вычисление не представит никаких принципиальных трудностей (см. главу VI), но только в том в случае, если известна скорость света относительно S и S' . Из принципа относительности следует, что она идентична в системах S и S' . На основе этого принципа можно на самом деле определить пространственное и временное расстояния PP_1 и TT_1 . Не удивительно, что в обоих случаях, как для первого, так и для последнего, получаются различные результаты.

Время определенного события нельзя, таким образом, рассматривать как заданную величину; его можно определить

лишь на основе принципа инвариантности скорости света. Соответственно этому и длина промежутка времени между двумя пространственно-различными событиями может быть определена только лишь *a posteriori*.

Пространственное и временное расстояния между двумя событиями зависят друг от друга и инварианты только тогда, когда оба обращаются в нуль.

Эта взаимная связь между ними по существу аналогична взаимной зависимости между горизонтальными и вертикальными измерениями отрезка, например, какого-нибудь здания. Что называется „высотой“ башни? Часто ее пытаются определить как расстояние от основания до вершины. Однако ясно, что это определение неправильно, когда башня наклонена к вертикали. В этом случае ее высота определяется как проекция прямой, проведенной от основания до вершины на вертикаль. Но вертикаль не является абсолютным понятием. Уже для соседней точки земной поверхности вертикальное направление будет совсем другим. Поэтому высота башни, в точном смысле этого слова, — величина неопределенная и вариантия, так же как и длина ее проекции на горизонтальную плоскость. Конечно, можно принять за „естественную“ высоту башни ее наибольшую высоту, которая получится, если принять прямую, проведенную от основания до вершины, за вертикаль; при этом, разумеется, длина ее должна исчезнуть. В таком же условном смысле мы можем считать найденное выше, наименьшее временное расстояние между двумя причинно-несвязанными событиями „естественной“ мерой временного расстояния между ними. Эти естественные расстояния, по (24а), являются инвариантными пространственно-временными расстояниями, которые могут быть определены по формуле $s^2 = \xi^2 - c^2 \tau^2$ при соответствующем подборе инерциальной системы, так же как и „естественная“ высота наклонной башни может быть вычислена из ее действительной высоты и длины с помощью пифагоровой формулы.

Когда в древности думали, что Земля плоская и что вертикальное направление имеет абсолютный смысл, то высоту и горизонтальное расстояние можно было считать инвариантными величинами. Также и мы до 1905 г. заблуждались относительно временных и пространственных расстояний. В 1905 г. Эйнштейном впервые было указано, что эти представления являются заблуждением, и была установлена связь определений времени и пространства в различных инерциальных системах на основе принципа относительности (и инвариантности скорости света). Старая физика трехмерного пространства и одномерного времени перешла в новую физику четырехмерной пространственно-временной протяженности, или по Минковскому — четырехмерного мира.

Быше мы говорили, что определение пространственного расстояния в теории относительности относится к пустому пространству, а не к материальным предметам. Но как же измерять

длину стержня и как вообще определять ее? Общее определение гласит следующее: длина стержня есть расстояние между двумя пространственными точками, в которых находятся его концы в один и тот же момент. Но понятие одновременности относительно, и мы должны поэтому считать значение длины стержня в различных инерциальных системах различным.

Можно называть длину l стержня в той инерциальной системе, относительно которой он покоится, „естественной“ или „покоящейся“ длиной. Она удобна в том отношении, что при ее определении указанная условность понятия одновременности является несущественной, так как, если рассматривать два события, происходящие на концах стержня в разное время, то в этом случае пространственное расстояние между ними имеет всегда одно и то же значение. Это можно видеть из рис. 36, где указанные события изображаются точками Q и Q_1 ; стержень покоится в инерциальной системе, представленной осями XZ , так что движение его концов изобразится двумя прямыми (пунктирными), параллельными оси времени OZ . „Покоящаяся длина“ стержня равна MN (или QC). Его длина l' относительно другой инерциальной системы, представленной осями $X'Z'$, определится, согласно вышеизложенному, отрезком $M'N'$ новой оси X' (где M' и N' — точки ее пересечения с пунктирными прямыми).

Мы получаем, таким образом,

$$l' = \frac{l}{\cos \varphi},$$

и так как

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{k^2}}},$$

то

$$l' = l \sqrt{1 + \frac{v^2}{k^2}},$$

или, окончательно, полагая $k^2 = -c^2$,

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (25)$$

Стержень, движущийся со скоростью v , представляется, следовательно, укороченным в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$: 1 (на чертеже отрезок $M'N'$ больше MN , так как он соответствует вещественному значению k). Этот вывод находится на первый взгляд в полном согласии с контракционной гипотезой Лоренца (см. главу VII, § 6). В действительности, однако, это согласие имеет чисто формальный характер. Согласно этой гипотезе, движущийся (относительно чего?) электрон действительно укорачивается в направлении движения, тогда как по эйнштейновской

теории относительности это укорочение относится не к электрону (или стержню), но к „расстоянию между пространственными точками, в которых одновременно находятся его концы“.

Если вместо длины стержня рассматривать длительность некоторого явления, происходящего относительно представленной осями XZ инерциальной системы в определенной точке, например, на одном конце стержня, то из таких же геометрических соображений получается следующее соотношение между „покоящимся промежутком“ τ и соответствующим интервалом времени τ' для „движущейся“ координатной системы:

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (25a)$$

в согласии с первой формулой (24a), выведенной другим путем, а именно на основе уравнений преобразования (23).

Разумеется, таким же путем можно вывести и формулу (25), но мы предпочли геометрический метод ввиду его наглядности.

Недостаток этого метода заключается в мнимости коэффициента k . Существует, однако, второй графический метод, свободный от этого недостатка. Он соответствует второму решению уравнения (21a), именно $\omega' = \omega - 2\varphi$. Легко видеть, что при этом следует положить $k = c$.

Действительно, так как в этом случае оси X и Z поворачиваются в противоположные стороны, т. е. при положительном v навстречу друг другу, то при определенном граничном значении v они должны совпасть.

Если первоначальная система прямоугольная ($\omega = 90^\circ$), то это произойдет при $\varphi = 45^\circ$, откуда, по (21),

$$\frac{c}{k} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(90^\circ - 45^\circ)} = 1,$$

т. е.

$$k = c.$$

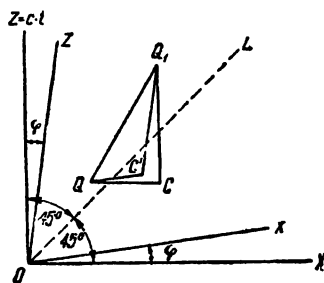


Рис. 37.

Пространственные и временные компоненты пространственно-временного расстояния между событиями Q и Q_1 (рис. 37) с точки зрения „движущейся“ инерциальной системы, представленной осями $X'Z'$, в этом случае связаны с компонентами отрезка QQ_1 формулами

$$\xi' = \frac{1}{\gamma} QC', \quad c\tau' = \frac{1}{\gamma} C'Q_1,$$

где γ является отличным от 1.

Но из чертежа следует:

$$QC = QC' \cos \varphi + C'Q_1 \sin \varphi; \quad CQ_1 = QC \sin \varphi + C'Q_1 \cos \varphi,$$

т. е.

$$\xi = \gamma \cos \varphi (\xi' + v\tau'); \quad \tau = \gamma \cos \varphi \left(\tau' + \frac{\xi'v}{c^2} \right),$$

ввиду

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sin (90^\circ - \varphi)} = \frac{v}{c}.$$

Так как эти формулы идентичны формулам преобразования (23) или, вернее, обратным им

$$\xi = \frac{\xi' + v\tau'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \tau = \frac{\tau' + \frac{v\xi'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

то, очевидно, следует положить

$$\gamma \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

или, так как в рассматриваемом случае

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}},$$

то

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (26)$$

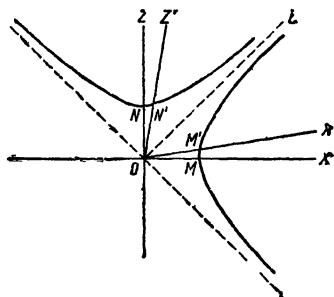


Рис. 83.

Этот коэффициент определится графически как длина отрезков $OM' = ON'$ (рис. 38), отсекаемых на новых осях X' гиперболой $x^2 - z^2 = \pm 1$. (26а)

Решая это уравнение в связи с уравнением оси X'

$$z = \frac{v}{c} x,$$

мы получаем для координат точки пересечения M'

$$x'^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad z'^2 = \frac{v^2}{c^2} x'^2$$

и следовательно,

$$OM'^2 = x'^2 + z'^2 = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2.$$

При изображении событий с помощью осей $X'Z'$, соответствующих „движущейся“ инерциальной системе, мы должны таким образом, определять единицу длины отрезком OM' , а единицу времени — отрезком $\frac{ON'}{c} = \frac{OM'}{c}$.

Условие, определяющее изменение масштаба при переходе от „покоящейся“ к движущейся инерциальной системе в рассматриваемом графическом методе, аналитически идентично с условием, выразившим инвариантность этого масштаба в предыдущем методе. В самом деле, если заменить в (26a) $z = ct$ через $z = ict$, то это уравнение принимает вид

$$x^2 + z^2 = 1, \quad (26b)$$

т. е. определяет окружность.

Заметим, что когда отрезок QQ_1 на рис. 37 наклонен к оси Z меньше чем биссектриса (или асимптота) OL , то можно расположить ось Z' параллельно QQ_1 ; это значит, что с „кинематической“ точки зрения оба события происходят в одной и той же пространственной точке. Если, наоборот, угол между QQ_1 и OZ больше, чем LOZ , то можно выбрать параллельное QQ_1 направление оси X' , т. е. инерциальную систему, в которой эти события представляются как одновременные.

Приведенные графические изображения легко обобщить на случай непрямолинейного движения в плоскости. Но мы не будем останавливаться на этом вопросе и перейдем к наиболее общему случаю „четырёхмерного мира“.



ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ К ЭЛЕКТРО-
МАГНИТНЫМ ЯВЛЕНИЯМ

§ 1. Преобразование векторов. Формулы (13) и (18а) предыдущей главы представляют частный случай преобразований Лоренца. Общий случай соответствует некоторому движению пространственной координатной системы $S'(X_1', X_2', X_3')$ относительно „покоящейся“ системы $S(X_1, X_2, X_3)$ в произвольном направлении, причем эти системы могут быть различно ориентированы одна относительно другой. 16 коэффициентов этого общего преобразования могут, очевидно, быть определены путем соединения частного преобразования (18) с обычным пространственным преобразованием, означающим поворот „движущейся“ системы относительно „покоящейся“.

Однако проще и целесообразнее представить указанное частное преобразование в несвязанном с координатами виде как соотношение между временами t и t' и пространственными радиус-векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' , компоненты которых равны соответственно x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' .

Напомним, что \mathbf{r} и t (или ict) могут рассматриваться как пространственная и временная проекции четырехмерного пространственно-временного вектора \mathbf{r} ; при этом \mathbf{r}' и t' (ict') означают указанные проекции того же пространственно-временного вектора в „движущейся“ или, выражаясь точнее „стрихованной“ инерциальной системе. Далее следует заметить, что и „нулевые точки“ обеих систем O и O' и начальные моменты $t=0$ и $t'=0$ надо выбрать таким образом, чтобы при $t=t'=0$ точки O и O' совпадали. Скорость системы S' относительно S обозначим через \mathbf{v} ; следовательно, скорость системы S относительно S' равна $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$.

Направление этой скорости мы будем определять посредством единичного вектора $\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{v}}{v}$.

Формула

$$t' = \frac{t - \frac{x_1 v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

представится, очевидно, в виде

$$t' = \frac{t - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

так как произведение $x_1 v$ означает, в предположении, что \mathbf{v} совпадает по направлению с осью x_1 , не что иное как внутреннее произведение векторов \mathbf{r} и \mathbf{v} .

Чтобы получить соотношение между \mathbf{r} и \mathbf{r}' , мы должны к формуле

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

присоединить формулы

$$x_2 = x'_2 \text{ и } x_3 = x'_3.$$

Так как, очевидно, $x_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0$ и $x'_1 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}_0$, то продольные (т. е. параллельные скорости \mathbf{v}) компоненты \mathbf{r} и \mathbf{r}' равны соответственно

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 \text{ и } (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0.$$

а. поперечные компоненты

$$\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) \text{ и } \mathbf{r}' - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}_0).$$

Таким образом, написанные выше уравнения для координат могут быть заменены векторными уравнениями

$$(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 - \mathbf{v} t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\mathbf{r}' - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0.$$

Путем сложения их получается искомое соотношение

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 - \mathbf{v} t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

или, после небольшого преобразования,

$$\mathbf{r}' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) \times \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v} t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1a)$$

причем вектор $(\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0) \times \mathbf{v}_0$ представляет собой перпендикулярную к \mathbf{v}_0 компоненту \mathbf{r} . Проектируя это векторное уравнение на „покоящуюся“ или „движущуюся“ систему осей, легко получить

соотношения между координатами. Если в частности обе координатные системы одинаково ориентированы, то мы получаем

$$x_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \left\{ \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{v^2} v_1 - x_1 \right\} + \frac{x_1 - v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и т. д.

Уравнения преобразования, обратные (1) и (1a), получаются путем простой перемены знака при \mathbf{v} .

Согласно принципу ковариантности, пространственные и временные проекции других четырехмерных векторов, например \mathbf{j} и \mathcal{A} , должны преобразовываться по подобным же формулам. Заметим, что время t в случае „четырёхмерного тока“ заменяется деленной на c плотностью заряда ρ , а в случае „четырёхмерного потенциала“ — также деленным на c скалярным потенциалом; таким образом, вместо выражений (1) и (1a) имеем:

$$\rho' = \frac{\rho - \mathbf{j} \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{j}' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) (\mathbf{j} \times \mathbf{v}_0) \times \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{j} - \rho \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2a)$$

и точно так же

$$\varphi' = \frac{\varphi - \mathbf{A} \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3)$$

$$\mathbf{A}' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) (\mathbf{A} \times \mathbf{v}_0) \times \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{A} - \varphi \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3a)$$

Следует заметить, что скорость частицы, т. е. производная $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ не может считаться пространственной проекцией четырехмерного вектора. Действительно, $d\mathbf{r}$ и dt преобразовываются, очевидно, таким же образом, как \mathbf{r} и t ; поэтому для преобразованной скорости $\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}$, согласно (1) и (1a), получаем выражение

$$\mathbf{u}' = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_0) \times \mathbf{v}_0 + \mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^2}{c^2}}. \quad (4)$$

Эта формула совершенно отлична от (1а), (2а) и (3а); она представляет собой обобщение простой формулы (23) главы VIII для наложения двух параллельных скоростей.

Возводя в квадрат и складывая величины (\mathbf{r}, ict) , $(\mathbf{j}, i\rho)$, $(\mathbf{A}, i\varphi)$, мы получим квадраты образуемых ими четырехмерных векторов, которые являются инвариантными скалярами. Эти инварианты имеют, таким образом, следующий вид

$$r^2 = r^2 - c^2 t^2, \quad (5)$$

$$\mathbf{j}^2 = j^2 - \rho^2, \quad (5a)$$

$$\mathfrak{A}\mathbf{j}^2 = A^2 - \varphi^2. \quad (5b)$$

Из двух векторов \mathbf{j} и \mathfrak{A} можно образовать третью инвариантную величину, а именно внутреннее произведение

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathbf{j} &= A_1 j_1 + A_2 j_2 + A_3 j_3 + A_4 j_4, \\ \mathfrak{A}\mathbf{j} &= A j - \varphi \rho. \end{aligned} \quad (5c)$$

Эту величину, в случае постоянного во времени поля, можно рассматривать как разность магнитной (кинетической) и электрической (потенциальной) энергии, отнесенной к единице объема.

Она играет важную роль в релятивистской, т. е. основанной на теории относительности, механике электрона (см. главу X). Оба другие внутренние произведения, которые можно образовать из четырехмерных векторов \mathbf{r} , \mathbf{j} и \mathfrak{A} не имеют никакого физического значения.

Величину $(r) = \sqrt{r^2 - c^2 t^2} = \sqrt{r'^2 - c^2 t'^2}$ мы уже определяли (для частного случая $r = x_1$) как „пространственно-временное“ расстояние. В рассматриваемом случае речь идет о „расстоянии“ между событием, характеризующимся координатами (\mathbf{r}, t) или (\mathbf{r}', t') , и событием, заключающимся в совпадении начал обеих систем координат $(\mathbf{r} = \mathbf{r}' = 0$ при $t = t' = 0)$. Четырехмерное расстояние между двумя любыми пространственно-временными точками (\mathbf{r}_1, t_1) и (\mathbf{r}_2, t_2) выражается формулой

$$s = \sqrt{R^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2}, \quad (6)$$

где

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \quad (6a)$$

— обычное пространственное расстояние.

Мы видели выше, что следует различать два случая, именно $s^2 < 0$ и $s^2 > 0$. В первом случае вектор \mathbf{r} называется „временнообразным“, так как существует инерциальная система S' , в которой его пространственная проекция исчезает. Во втором случае такой системы быть не может, но существует система, при переходе к которой исчезает временная проекция r' ; поэтому в этом случае вектор \mathbf{r} называется пространственно-образным.

В пограничном случае $s = 0$, который соответствует распространению электромагнитных сил, обе проекции \mathbf{r} — простран-

ственная и временная, могут быть порознь обращены в нуль; это значит, что оба события (например, отправление и прием светового сигнала) совпадают в пространстве и времени. Однако, при этом новая координатная система должна двигаться относительно первоначальной со скоростью света, что физически неосуществимо.

Приведенные соображения остаются, разумеется, справедливыми для любого четырехмерного вектора. В частности мы должны были бы различать пространственно-образные и временно-образные четырехмерные ток и потенциал, т. е. такие, которые, при соответствующем выборе системы, обращались бы в свою пространственную или временную проекцию. Необходимо, однако, заметить следующее: плотность тока \mathbf{j} в случае движущегося электрона с объемным зарядом можно положить равной $\rho \frac{\mathbf{u}}{c}$. Если речь идет о чисто поступательном движении со скоростью \mathbf{u} , то, так как $\mathbf{u} < c$, мы должны иметь $j^2 < \rho^2$. Следовательно, в этом случае вектор \mathbf{j} — временно-образный и может быть сведен к своей временной проекции. Это, очевидно, будет иметь место в той системе S' , относительно которой электрон в данный момент покоится, т. е. которая движется относительно первоначальной системы со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{u}$. Соответствующая „покоящаяся плотность“ заряда ρ_0 определяется, очевидно, уравнением $\rho_0^2 = \rho^2 - j^2$, т. е.

$$\rho_0 = \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (7)$$

Она является, таким образом, наименьшим возможным значением ρ .

§ 2. Преобразование бивекторов. Перейдем теперь к рассмотрению четырехмерных тензоров, и, прежде всего, займемся антисимметричным тензором поля, или „бивектором“ ${}^2\mathcal{F}$. Его компоненты в инерциальных системах S и S' связаны друг с другом соотношениями:

$$H'_{k'l'} = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \alpha_{kk'} \cdot \alpha_{ll'} \cdot H_{kl}. \quad (8)$$

Частные преобразования Лоренца, определяемые формулами (18) главы VIII, могут быть переписаны следующим образом, если обозначить t и t' соответственно через $\frac{x_4}{ic}$ и $\frac{x_4'}{ic}$ и положить для краткости

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (8a)$$

$$x_1' = \gamma \left(x_1 - \frac{v}{ic} x_4 \right); \quad x_2' = x_2; \quad x_3' = x_3; \quad x_4' = \gamma \left(x_4 + \frac{v}{ic} x_1 \right).$$

Таким образом, коэффициенты $\alpha_{kk'}$ образуют в этом случае следующую схему:

$$(\alpha_{kk'}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\frac{v}{ic} \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{ic} \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (8b)$$

Подставляя эти выражения в (8), мы получим, принимая во внимание антисимметричный характер ${}^2\mathfrak{H}$ ($H_{kk}=0$):

$$H'_{23} = H_{23}, \quad H'_{31} = \gamma \left(H_{31} - \frac{v}{ic} H_{34} \right), \quad H'_{12} = \gamma \left(H_{12} - \frac{v}{ic} H_{42} \right),$$

$$H'_{14} = H_{14}, \quad H'_{24} = \gamma \left(\frac{v}{ic} H_{21} + H_{24} \right), \quad H'_{34} = \gamma \left(\frac{v}{ic} H_{31} + H_{34} \right),$$

и, следовательно, согласно схеме (5) главы VIII,

$$\begin{pmatrix} H_{23} & H_{31} & H_{12} & H_{14} & H_{24} & H_{34} \\ H_1 & H_2 & H_3 & -iE_1 & -iE_2 & -iE_3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} H'_1 &= H_1; & H'_2 &= \gamma \left(H_2 + \frac{v}{c} E_3 \right), & H'_3 &= \gamma \left(H_3 - \frac{v}{c} E_2 \right), \\ E'_1 &= E_1; & E'_2 &= \gamma \left(E_2 - \frac{v}{c} H_3 \right), & E'_3 &= \gamma \left(E_3 + \frac{v}{c} H_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Так как скорость \mathbf{v} в рассматриваемом случае имеет направление первой оси, то величины $\frac{v}{c} E_3$ и $-\frac{v}{c} E_2$ являются второй и третьей компонентами внешнего произведения $\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{v}}{c}$ а величины $-\frac{v}{c} H_3$, $\frac{v}{c} H_2$ — соответствующими компонентами внешнего произведения $\frac{v}{c} \times \mathbf{H}$. Если ввести, так же как и при преобразовании вектора \mathbf{r} , продольные и поперечные компоненты векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и соответствующих им \mathbf{E}' , \mathbf{H}' , то соотношения (9) представляются в следующем, независимом от выбора координат виде:

$$(\mathbf{H}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0; \quad \mathbf{H}' - (\mathbf{H}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 = \gamma [\mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0] - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E},$$

$$(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0; \quad \mathbf{E}' - (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 = \gamma [\mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0] + \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H},$$

откуда, складывая, получаем:

$$\mathbf{H}' = (1 - \gamma) (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \left(\mathbf{H} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right), \quad (9a)$$

$$\mathbf{E}' = (1 - \gamma) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right). \quad (9b)$$

Обратные формулы, определяющие переход от системы S' к S , получаются простой перестановкой величин со штрихами и без штрихов и перемены знака при \mathbf{v} .

В предельном случае малых скоростей $\left(\frac{v}{c} \ll 1 \right)$ вышеприведенные формулы обращаются в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}' &= \mathbf{H} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}, \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (9c)$$

Заметим, что подобные формулы уже приводились и неоднократно применялись в предыдущих главах. В частности мы видели, что прямолинейно и равномерно движущаяся система зарядов создает магнитное поле \mathbf{H} , которое связано с электрическим полем \mathbf{E} следующим совершенно точным соотношением

$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}$. Это соотношение получается из первой формулы (9c), если мы примем, что рассматриваемые заряды покоятся относительно системы S' , т. е. не создают в этой системе никакого магнитного поля. Тот же результат следует и из точных формул (9a) и (9b).

При $\mathbf{H}' = 0$ обратные формулы принимают вид

$$\mathbf{H} = \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}'; \quad \mathbf{E} = (1 - \gamma) (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \mathbf{E}'.$$

Таким образом, $\mathbf{v} \times \mathbf{E} = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{E}'$ и, следовательно,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}.$$

Так же получается и соотношение $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}$ для случая, когда $\mathbf{E}' = 0$.

Формулы (9a) и (9b) могут быть соединены в одну формулу, если одну из них, например вторую, умножить на $i = \sqrt{-1}$ и прибавить к первой. Тогда

$$\mathbf{H}' + i\mathbf{E}' = (1 - \gamma) [(\mathbf{H} + i\mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}_0] \mathbf{v}_0 + \gamma [\mathbf{H} + i\mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\mathbf{H} + i\mathbf{E})]. \quad (10)$$

Полагая для краткости $\mathbf{H} + i\mathbf{E} = \mathbf{F}$, возводя в квадрат и замечая, что

$$\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{F} = \frac{v}{c} (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{F}) \quad \text{и} \quad [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{F}]^2 = \mathbf{F}^2 - (\mathbf{v}_0 \mathbf{F})^2,$$

получаем:

$$F'^2 = (1 - \gamma)^2 (F\mathbf{v}_0)^2 + \gamma^2 \left[F^2 - \frac{v^2}{c^2} (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{F})^2 \right] + 2(1 - \gamma) \gamma (F\mathbf{v}_0)^2 = \\ = (1 - \gamma)^2 (F\mathbf{v}_0)^2 + \gamma^2 \left[F^2 - \frac{v^2}{c^2} F^2 + \frac{v^2}{c^2} (\mathbf{v}_0 \mathbf{F})^2 \right],$$

откуда, согласно (8а),

$$F'^2 = F^2 + (F\mathbf{v}_0)^2 \left(1 - \gamma^2 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right) = F^2,$$

или окончательно

$$(\mathbf{H}' + i\mathbf{E}')^2 = (\mathbf{H} + i\mathbf{E})^2. \quad (10a)$$

Таким образом, мы нашли новый инвариант электромагнитного поля. Отделяя вещественную и мнимую части, его можно разбить на два инварианта, а именно:

$$H'^2 - E'^2 = H^2 - E^2 \quad (10b)$$

и

$$\mathbf{H}' \cdot \mathbf{E}' = \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}. \quad (10c)$$

Заметим, что эти инварианты могут быть найдены значительно проще. А именно, образуя квадрат тензора ${}^2\mathfrak{H}^*$ и учитывая его кососимметричный характер

$${}^2\mathfrak{H}^2 = \sum_k \sum_l H_{kl}^2 = 2 (H_{23}^2 + H_{31}^2 + H_{12}^2 + H_{14}^2 + H_{24}^2 + H_{34}^2),$$

т. е.

$${}^2\mathfrak{H}^2 = 2 (H^2 - E^2).$$

Отсюда видно, что эта величина является инвариантным скаляром. Так как далее ${}^2\mathfrak{H}$ — антисимметричный тензор, то согласно (14а) главы VIII, внутреннее произведение его на дуальный тензор ${}^2\mathfrak{H}^*$

$${}^2\mathfrak{H} \cdot {}^2\mathfrak{H}^* = 4 (H_{23} H_{14} + H_{31} H_{24} + H_{12} H_{34}) = -4 i (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E})$$

является инвариантом.

Инвариантность величин $H^2 - E^2$ и $\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}$ показывает, что характерные свойства электромагнитного поля в волновой зоне — равенство и ортогональность электрической и магнитной составляющих поля — во всех инерциальных системах остаются неизменными.

Таким образом, волновую зону вообще можно характеризовать исчезновением инвариантов (10b) и (10c).

Если оба они отличны от нуля, то всегда можно выбрать такую инерциальную систему, в которой поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в рассматриваемой пространственно-временной точке параллельны между собой. Но в этом случае невозможно сделать одно из них равным нулю или перпендикулярным другому. Электромагнитное поле можно называть „магнитно-образным“, или „электро-образным“, в зависимости от того, имеет ли инвариант $H^2 - E^2$ положитель-

ное или отрицательное значение; чисто-магнитным, или чисто-электрическим оно может быть только при условии $\mathbf{H} \mathbf{E} = 0$.

Деленный на 8π скаляр (10b) дает разность между плотностью магнитной и электрической энергии. Таким образом, он соответствует скаляру (7).

Аналогичные формулы и рассуждения могут быть приведены для векторов \mathbf{P} и \mathbf{M} , из которых образуется бивектор электромагнитной поляризации ${}^2\mathfrak{P}$, и для компонент \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* поляризационного потенциала ${}^2\mathfrak{Z}$. Следует только помнить, что векторам \mathbf{P} и \mathbf{Z} соответствует не величина \mathbf{E} , но $-\mathbf{E}$. Поэтому вместо (9a) и (9b) мы получаем следующие формулы преобразования:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= (1 - \gamma) (\mathbf{M} \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma (\mathbf{M} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{P}), \\ \mathbf{P} &= (1 - \gamma) (\mathbf{P} \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma (\mathbf{P} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{M}) \end{aligned} \quad (11)$$

и идентичные формулы для \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* .

Следует напомнить, что при рассмотрении постоянного во времени поля электрическая и магнитная поляризации представлялись совершенно независимы друг от друга (см. § 10 главы III), так же как и электрическое и магнитное поле. Позднее (§ 4 главы V), изучая переменные во времени поля, мы связали векторы \mathbf{P} и \mathbf{M} чисто внешним образом через сумму $\text{rot } \mathbf{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ в общем выражении для плотности тока \mathbf{j} .

Принцип относительности показывает, что если векторы \mathbf{P} , \mathbf{M} заданы в определенной системе координат, то при переходе к другой инерциальной системе их следует рассматривать как тесно связанные между собой величины, преобразующиеся по формулам (11). Если, например, в „защитрихованной“ системе (S') вектор $\mathbf{M}' = 0$, а \mathbf{P}' отличен от нуля, то по отношению к системе S вектор \mathbf{M} должен быть отличен от нуля и связан с электрической поляризацией соотношением

$$\mathbf{M} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{P}. \quad (11a)$$

Если, наоборот, $\mathbf{P}' = 0$ и $\mathbf{M}' \neq 0$, то

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{M}. \quad (11b)$$

Оба эти соотношения остаются в силе для любой величины относительной скорости \mathbf{v} ($< c$). Если, например, мы имеем в системе S' покоящийся электрический диполь или покоящийся равномерно поляризованный шар с электрическим моментом \mathbf{p}' , то с точки зрения системы S этот шар приобретает и магнитную поляризацию с моментом $\mathbf{m} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{p}$; при этом вектор

\mathbf{p} в первом приближении совпадает с \mathbf{p}' , они отличаются, согласно (11), только величинами второго и высших порядков относительно $\frac{v}{c}$. Перестановкой заштрихованных и незаштрихованных величин и переменной знака при v в (11), мы получаем для случая $M' = 0$

$$\mathbf{P} = (1 - \gamma) (\mathbf{P}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \mathbf{P}'.$$

Аналогичным образом шар, покоящийся относительно S' и имеющий с точки зрения S лишь магнитную поляризацию с моментом \mathbf{m}' ($\mathbf{P}' = 0$), с точки зрения наблюдателя, связанного с системой S , приобретает электрическую поляризацию с моментом $\mathbf{p} = \frac{v}{c} \times \mathbf{m}$. При этом должно быть, соответственно (10b),

$$p'^2 = p^2 - m^2 \text{ и } m'^2 = m^2 - p^2; \quad (11c)$$

внутреннее произведение $\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}$ остается в обоих случаях равным нулю, в виду инвариантности выражений вида (10c)

Итак, резкое разграничение между электрическим диполем и элементарным током или заменяющим его магнитным диполем, как источниками электромагнитного поля, возможно только в соответствующих покоящихся „системах“.

Подобно тому, как электрическое поле при движении возбуждающего его электрического диполя частично переходит в магнитное, так же и электрический момент этого диполя частью переходит в магнитный и обратно. Вследствие относительности скорости, понятия „магнитный“ и „электрический“ также относительны, как, например, понятия „пространственный“ и „временной“.

Эти рассуждения, очевидно, можно применить к рассмотренному в главе VII § 8 случаю вращающегося электрона. При этом введение электрической поляризации в „покоящейся“ системе S' , в которой электрон имеет только вращательное движение, невозможно или, вернее, нецелесообразно, так как электрон не является нейтральной системой. Поэтому его следует сперва нейтрализовать зарядом противоположного знака в любой точке, например, в его центре. В последнем случае внутри электрона возникает электрическая поляризация с результирующим электрическим моментом, равным нулю. Вращательное движение электрона можно заменить однородной (в случае поверхностного заряда) или неоднородной (при объемном заряде) магнитной поляризацией, с моментом \mathbf{m} , вычисленным в главе VII. Как уже упоминалось там, подобный магнитный электрон, если он движется относительно наблюдателя с поступательной скоростью v , должен казаться электрически поляризованным с моментом $\mathbf{p} = \frac{v}{c} \times \mathbf{m}$. Этому дополнительному моменту соответствует, согласно формуле (59) главы VIII, дополнительный скалярный

потенциал $+\mathbf{A}\frac{\mathbf{v}}{c}$. Но это есть как раз то значение, которое получается из формулы преобразования (3), если положить в ней $\varphi' = 0$.

Упомянутый дополнительный электрический момент вращающегося электрона можно также вычислить, не вводя магнитной поляризации, а именно с помощью формулы преобразования (2) для электрической плотности. Если пренебречь релятивистским „сжатием“ электрона, т. е. ограничиться величинами первого порядка относительно $\frac{v}{c}$, то, согласно (2),

$$\rho = \rho' + \mathbf{j} \frac{\mathbf{v}}{c} \cong \rho' + \mathbf{j}' \frac{\mathbf{v}}{c}$$

причем

$$\mathbf{j}' = \frac{\rho'}{c} (\mathbf{o} \times \mathbf{r}),$$

где \mathbf{o} представляет собой угловую скорость электрона системе S' .

Отсюда по определению электрического момента получаем

$$\mathbf{p} = \int \rho \mathbf{r} dV = \int \varphi' \mathbf{r} \left[\frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{o} \times \mathbf{r}) \right] dV,$$

так как

$$\int \rho' \mathbf{r} dV = 0.$$

Далее мы имеем

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{o} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} (\mathbf{v} \times \mathbf{o}),$$

и, следовательно, в среднем для различных направлений \mathbf{r} :

$$\overline{\mathbf{r} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} (\mathbf{o} \times \mathbf{r}) \right]} = \overline{\mathbf{r} [\mathbf{r} (\mathbf{v} \times \mathbf{o})]} = \frac{1}{3} r^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{o}).$$

Таким образом,

$$\mathbf{p} = \frac{1}{3} \left(\frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{o} \right) \int \rho' r dV = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \frac{\mathbf{o}}{3} \int \rho' r^2 dV,$$

т. е., согласно (45) главы VII,

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m}.$$

Заметим, что угловая скорость \mathbf{o} в теории относительности должна трактоваться, подобно магнитному моменту, как составляющая некоторого бивектора. Чтобы быть последовательным, следует рассматривать вращательное движение совсем другим путем, чем поступательное. Представляется сомнительным, может ли вообще существовать вращательное движение в обычном смысле этого слова. Вращение обыкновенного материаль-

ного тела может быть в основном сведено к поступательному движению составляющих его элементарных частиц; возможность же говорить в таком же смысле о вращении отдельного электрона еще стоит под вопросом.

Как уже указывалось в главе VII § 8, приведенные там выражения (57) и (57а) для вращательного момента и дополнительной силы, возникающих при соединении поступательного движения и вращения, неправильны и должны быть заменены следующими выражениями:

$$\mathbf{M}^a = \mathbf{p} \times \mathbf{E}^a = \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m} \right) \times \mathbf{E}^a$$

и

$$\mathbf{F}^a = (\mathbf{p} \text{ grad}) \mathbf{E}^a = \left[\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m} \right) \text{ grad} \right] \mathbf{E}^a.$$

Подобным же образом мы должны заменить формулы (67) и (67b) главы VII, характеризующие взаимодействие между обоими магнитными моментами „вращающегося“ электрона, формулами

$$\mathbf{M}^a = f (\mathbf{p} \times \mathbf{r})$$

и

$$\mathbf{M}'^a = \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \text{ grad}) f \mathbf{r} = -f (\mathbf{p} \times \mathbf{r}),$$

где $[\mathbf{r} \times \mathbf{r} (\mathbf{p} \text{ grad} f)] = 0$. Таким образом, оба вращательных момента равны и противоположно направлены, откуда следует, что результирующий момент количества движения электрона должен оставаться постоянным. На этом вопросе мы еще остановимся в конце настоящей книги.

§ 3. Преобразование тензора энергии; сила и вращательный момент. Различные составляющие тензора энергии ${}^2\Theta$ [см. схему (14а) главы VIII] преобразуются довольно сложным образом. Поэтому мы ограничимся рассмотрением плотности энергии ξ и количества движения \mathbf{g} .

Что касается первой, то в случае преобразования (8b)

$$\xi' = \Theta'_{44} = \sum_k \sum_l \alpha_{k4} \alpha_{l4} \Theta_{kl} = \alpha_{14}^2 \Theta_{11} + 2\alpha_{14} \alpha_{44} \Theta_{14} + \alpha_{44}^2 \Theta_{44}$$

и, согласно (12а) главы VII и (8b) главы IX,

$$\xi' = \gamma^2 \left(-\frac{v^2}{c^2} \frac{H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 + E_1^2 - E_2^2 - E_3^2}{8\pi} - 2vg_1 + \xi \right),$$

или, так как

$$\xi = \frac{H^2 + E^2}{8\pi} \quad \text{и} \quad \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1,$$

то

$$\xi' = \xi + 2\gamma^2 \left(\frac{v^2}{c^2} \frac{H_2^2 + H_3^2 + E_2^2 + E_3^2}{8\pi} - vg_1 \right).$$

Далее, если скорость \mathbf{v} имеет направление оси X_1 , то $vg_1 = \mathbf{v}\mathbf{g}$ и

$$(H_2^2 + H_3^2 + E_2^2 + E_3^2) \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)^2.$$

Таким образом, формула преобразования для плотности энергии в бескоординатной (векторной) форме имеет вид

$$\xi' = \xi + \gamma^2 \left[\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})^2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^2}{4\pi c^2} - 2\mathbf{v}\mathbf{g} \right]. \quad (12)$$

Заметим, что второй член, в случае $v \ll c$, соответствует классическому преобразованию кинетической энергии.

Если рассматривать частицу с массой m , движущуюся в системе S со скоростью \mathbf{u} , с точки зрения второй координатной системы S' , то обычная механика дает для ее энергии выражение

$$T' = \frac{1}{2} m u'^2 = \frac{1}{2} m (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 = \frac{1}{2} m u^2 - m \mathbf{u}\mathbf{v} + \frac{1}{2} m v^2,$$

или приближенно, при $v \ll u$

$$T' = T - (m \mathbf{u}) \mathbf{v};$$

$m \mathbf{u}$ является количеством движения рассматриваемой частицы относительно S . В § 3 главы VII уже указывалось, что плотность электромагнитной энергии ($\xi = \mu c^2$) соответствует удвоенной кинетической энергии в обычной механике.

Что касается преобразования электромагнитного количества движения, то для первой его компоненты имеем

$$-icg_1' = \theta'_{14} = \sum_k \sum_l \alpha_{k1} \alpha_{l4} \theta_{kl} = \alpha_{11} \alpha_{14} \theta_{11} + \alpha_{11} \alpha_{44} \theta_{14} + \\ + \alpha_{41} \alpha_{14} \theta_{41} + \alpha_{41} \alpha_{44} \theta_{44},$$

т. е., согласно (8b),

$$g_1' = \frac{\gamma^2}{-ic} \left\{ -icg_1 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{v}{ic} \left(\frac{H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 + E_1^2 - E_2^2 - E_3^2}{8\pi} - \xi \right) \right\},$$

или

$$g_1' = \gamma^2 \left\{ \left(\frac{1 + v^2}{c^2} \right) g_1 - \frac{2v}{c^2} \xi + \frac{v}{c^2} \frac{E_1^2 + H_1^2}{4\pi} \right\}. \quad (12a)$$

Для второй компоненты получаем

$$-icg_2' = \theta'_{24} = \sum_k \sum_l \alpha_{k2} \alpha_{l4} \theta_{kl} = \sum_l \alpha_{l4} \theta_{2l} = \alpha_{14} \theta_{21} + \alpha_{44} \theta_{24},$$

т. е.

$$g_2' = \gamma \left\{ g_2 + \frac{v}{c^2} \frac{E_1 E_2 + H_1 H_2}{4\pi} \right\},$$

и также для третьей

$$g'_3 = \gamma \left\{ g_3 + \frac{v}{c^2} \frac{E_1 E_3 + H_1 H_3}{4\pi} \right\}.$$

Эти формулы не могут быть записаны в простой векторной форме. Приведем еще следующую формулу для линейного инварианта тензора ${}^2\mathfrak{M}$:

$$\sum_{k=1} \theta_{kk} \equiv 0;$$

она получается из (11) главы VIII.

В § 7 главы VII мы вводили, наряду с вектором \mathbf{g} , также вектор $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$, который определяли как плотность электромагнитного момента количества движения. С точки зрения теории относительности эта величина должна рассматриваться как составная часть некоторой сложной четырехмерной величины. Обыкновенные компоненты вектора $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$, т. е. величины $x_k g_i - x_i g_k$, образуют три (или шесть) компонент, частью симметричного и частью антисимметричного четырехмерного тензора третьего ранга, с компонентами

$$x_k \theta_{in} - x_i \theta_{kn}.$$

Четырехмерное обобщение обычного трехмерного вращательного момента $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ выражается антисимметричным тензором, или бивектором, ${}^2\mathfrak{M}$ с компонентами

$$M_{ki} = x_k f_i - x_i f_k \quad (13)$$

При этом первая, вторая и третья компоненты вектора равны M_{23} , M_{31} , M_{12} . Они относятся к тензору вращательного момента ${}^2\mathfrak{M}$ как напряженность магнитного поля к тензору поля ${}^2\mathfrak{H}$. Соответствующая напряженности электрического поля часть ${}^2\mathfrak{M}$ является вектором с компонентами

$$i M_{14}, i M_{24}, i M_{34},$$

Принимая во внимание, что $f_4 = \frac{il}{c}$, мы получаем для нее выражение

$$\mathbf{r} \frac{l}{c} - c \mathbf{f}. \quad (13a)$$

В дальнейшем мы еще вернемся к этому вектору и вообще к тензору ${}^2\mathfrak{M}$. Он играет существенную роль в теории вращательного движения. Формулы преобразования векторов $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ и $\frac{l}{c} \mathbf{r} - c \mathbf{f}$ совпадают с формулами преобразования для \mathbf{H} и \mathbf{E} .

Наконец, следует еще заметить, что компоненты „четырехмерной“ силы (или „четырехмерного импульса“) \mathbf{f} преобразуются так же, как компоненты всех остальных четырехмерных векторов

(см. § 1). Поэтому мы не будем специально заниматься этим вопросом. Однако, не лишне подчеркнуть, что в теории относительности обобщенная сила \mathbf{f} не только по направлению, но и по величине вариантна, так же как, например, пространственное расстояние между двумя пространственно-временными точками. Разность же

$$f^2 - \frac{l^2}{c^2} = f^2$$

может рассматриваться как инвариантная величина.

Из условия, что $u < c$, следует, что вектор \mathbf{f} пространственно-образный и что величина

$$f_0 = \sqrt{f^2 - \left(\mathbf{f} \frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} \quad (13b)$$

является его „покоящимся значением“ — наименьшим из всех возможных. Относительность силы есть непосредственное следствие относительности скорости, так как последняя входит в выражение силы по формуле

$$\mathbf{f} = \rho \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right).$$

§ 4. Приложение релятивистских формул преобразования к прямолинейному и равномерному движению электронов и осцилляторов и к распространению световых волн. В § 2 мы уже указывали, каким образом при посредстве теории относительности определяется влияние поступательного движения с постоянной скоростью на свойства вращающегося электрона. Мы вычислим таким же путем электромагнитное поле электрона, сперва без магнитного момента, и затем — поле произвольного осциллятора (магнитный электрон получается как частный случай последнего). При этом для простоты будем рассматривать и электрон и осциллятор как точечные.

Разумеется, поле такой частицы относительно координатной системы S' , в которой она покоится, должно быть заданным.

Скорость системы S' относительно S будем, как всегда, обозначать через \mathbf{v} .

а) Электрон (точечный заряд). Электромагнитные потенциалы в системе S'

$$A' = 0, \quad \varphi' = \frac{e}{R'}.$$

Отсюда для системы S , согласно (3) и (3а) (причем заштрихованные величины должны поменяться местами с незаштрихованными, с переменной знака при \mathbf{v}).

$$\mathbf{A} = \varphi \frac{\mathbf{v}}{c}; \quad \varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e}{R' \sqrt{1-\beta^2}} \left(\beta = \frac{v}{c} \right). \quad (14)$$

Нам остается лишь выразить через „незаштрихованные“ величины расстояние R' . Положим, что в момент $t=t'=0$ электрон находится в общем начале (О или O') обеих координатных систем S и S' . Тогда надо найти для произвольно заданной в системе S пространственно-временной точки $Q(\mathbf{r}, t)$ соответствующую величину R' . Радиус-вектор электрона в системе S обозначим через \mathbf{r}^0 . Так как, очевидно, $\mathbf{r}^0 = OO' = \mathbf{v}t$, то расстояние рассматриваемой точки $P(\mathbf{r})$ от электрона в момент t (в S) равно численному значению вектора $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}^0$.

Если ввести координатные оси X_1, X_2, X_3 и X'_1, X'_2, X'_3 , то по формуле преобразования Лоренца

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_1 - x_1^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3$$

и

$$R^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = \frac{(x_1 - x_1^0)^2 + (1 - \beta^2)(x_2^2 + x_3^2)}{(1 - \beta^2)} = \frac{R^{*2}}{1 - \beta^2}. \quad (14a)$$

Отсюда, в связи с (14), получаем

$$\varphi = \frac{e}{R^*} \quad (14b)$$

в согласии с результатами главы VI.

Электрическая и магнитная напряженности получатся из этих формул дифференцированием по координатам x_1, x_2, x_3 и времени.

Однако их можно получить и непосредственно из соответствующих выражений для системы S' по формулам преобразования (9a) и (9b) или по обратным формулам. Мы имеем

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}, \quad \mathbf{H}' = 0, \quad (15)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = (1 - \gamma) (\mathbf{E}' \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \mathbf{E}' = \\ &= \frac{e}{R'^3} \left\{ (1 - \gamma) (\mathbf{R}' \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \mathbf{R}' \right\}. \end{aligned}$$

Далее, вводя координатные оси, имеем

$$\mathbf{R}' \mathbf{v}_0 = x'_1 = \frac{x_1 - x_1^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (x_1 - x_1^0) = \gamma (\mathbf{R} \mathbf{v}_0).$$

Таким образом, первая (параллельная \mathbf{v}_0) компонента вектора $(1 - \gamma) (\mathbf{R}' \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \mathbf{R}'$ равняется

$$(1 - \gamma) \gamma \mathbf{R} \mathbf{v}_0 + \gamma^2 \mathbf{R} \mathbf{v}_0 = \gamma \mathbf{R} \mathbf{v}_0.$$

Так как остальные компоненты \mathbf{R} и \mathbf{R}' соответственно равны,

$$\text{то} \quad (1 - \gamma) \gamma (\mathbf{R}' \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \mathbf{R}' = \gamma \mathbf{R} \quad (15a)$$

и, согласно (14а),

$$E = (1 - \beta^2) e \frac{R}{R^{*3}}, \quad (15b)$$

что совпадает уже с известной формулой (13) главы VI.

б) Осциллятор. Будем рассматривать осциллятор как „двойной“ электромагнитной диполь, электрический и магнитный моменты которого задаются в „покоящейся“ системе S' векторами \mathbf{p}' и \mathbf{m}' .

Эти векторы могут быть любыми (известными) осциллирующими функциями времени t' . Их можно соединить в один антисимметричный тензор ${}^2p'$ с компонентами (относительно S')

$$\begin{aligned} p'_{23} &= m'_1, & p'_{31} &= m'_2, & p'_{12} &= m'_3, \\ p'_{14} &= i p'_1, & p'_{24} &= i p'_2, & p'_{34} &= i p'_3. \end{aligned}$$

Электромагнитное поле рассматриваемого двойного осциллятора в системе S' определяется известными выражениями для электрического и магнитного поляризационного потенциала

$$\mathbf{Z}' = \frac{\mathbf{p}'(t' - R'/c)}{R'}, \quad \mathbf{Z}^* = \frac{\mathbf{m}'(t' - R'/c)}{R'} \quad (16)$$

[см. (28а) главы V, где t' соответствует разности $t' - R'/c$ в выражениях (16)]. Преобразованные выражения этих потенциалов (в системе S) получаем по формулам, обратным (11); заменяя при этом \mathbf{P} и \mathbf{M} через \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* , получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= (1 - \gamma) (\mathbf{Z}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \left(\mathbf{Z}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{Z}^* \right), \\ \mathbf{Z}^* &= (1 - \gamma) (\mathbf{Z}^* \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \gamma \left(\mathbf{Z}^* - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{Z}' \right), \end{aligned}$$

или, вводя вышеприведенные выражения и принимая во внимание, что $R' = \gamma R^*$,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{1}{R^*} \left[(\gamma^{-1} - 1) (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \mathbf{p}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m}' \right], \\ \mathbf{Z}^* &= \frac{1}{R^*} \left[(\gamma^{-1} - 1) (\mathbf{m}' \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + \mathbf{m}' - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{p}' \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

В этих формулах \mathbf{p}' и \mathbf{m}' рассматриваются как заданные функции, и нам надо найти только их аргумент, т. е. выразить отнесенное к S эффективное время

$$\tau' = t' - R'/c,$$

которое играет роль фазы, через t и r (или \mathbf{R}). Пользуясь соотношениями $R' = \gamma R^*$ и

$$t' = \frac{t - \mathbf{r}\mathbf{v}/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{c^2} \right),$$

получаем

$$\tau' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} - \frac{R^*}{c} \right) = \gamma \tau, \quad (16b)$$

где τ имеет в системе S значение, соответствующее значению τ' в S' . С помощью этой формулы можно получить из (16a) дифференцированием по x_1, x_2, x_3, t потенциалы A, φ и напряженности поля E и H . Однако мы уже указывали, что гораздо проще получать искомые величины, например E и H [с помощью формул, обратных (9) и (9a)] непосредственно из соответствующих „заштрихованных“ величин. Заметим, что в случае волновой зоны напряженности поля (в системе S'), согласно (31), (32), (51a) и (51b) в главы V, выражаются формулами:

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{R}'_0 \times (\mathbf{R}' \times \dot{\mathbf{p}}') + \mathbf{R}'_0 \times \ddot{\mathbf{m}}}{c^2 R},$$

$$\mathbf{H}' = \frac{\dot{\mathbf{p}}' \times \mathbf{R}'_0 + \mathbf{R}'_0 \times (\mathbf{R}'_0 \times \ddot{\mathbf{m}})}{c^2 R}.$$

Мы не будем, однако, останавливаться на этом вычислении и органичимся замечанием, что относительно S электрическая и магнитная напряженности поля должны быть равны по величине и направлены перпендикулярно друг к другу так же, как и относительно S' [по (10b) и (10c)]. Отсюда следует, что вектор излучения $\mathbf{K} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$, так же как и \mathbf{K}' , представляется в виде произведения плотности энергии на скорость света. Направление распространения света оказывается при этом различным для S и S' .

с) Распространение световых волн. Соотношение между векторами \mathbf{K} и \mathbf{K}' может быть получено непосредственно из формулы преобразования (12a) и ее следствий. Однако, проще найти изменение обоих множителей ξ и \mathbf{C} (последнего, разумеется, только по направлению) отдельно. Для простоты положим, что излучаемый свет „неполяризован“, т. е. колебания осциллятора равномерно распределены по всем направлениям и соответственно векторы \mathbf{H}' и \mathbf{E}' имеют в среднем одну и ту же абсолютную величину во всех направлениях, перпендикулярных к волновой нормали $\mathbf{p}' (= \mathbf{R}/R')$. Поэтому их средние значения $\bar{\mathbf{E}}$ и $\bar{\mathbf{H}}$ должны обращаться в 0. Для среднего значения их квадратов мы имеем, по уравнению

$$\frac{E'^2 + H'^2}{8\pi} = \xi',$$

$$\overline{E'^2} = \overline{H'^2} = 4\pi \xi'.$$

Средние значения $(\mathbf{v} \times \mathbf{H}')^2$ и $(\mathbf{v} \times \mathbf{E}')^2$, очевидно, равны между собой. Чтобы определить их, положим $\mathbf{H}' = \mathbf{p}' \times \mathbf{E}'$ (или $\mathbf{E}' = \mathbf{H}' \times \mathbf{p}'$);

тогда $\mathbf{v} \times \mathbf{H}' = \mathbf{v} \times (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}') = \mathbf{n}' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}') - \mathbf{E}' (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v})$, и следовательно,

$$\overline{(\mathbf{v} \times \mathbf{H}')^2} = \overline{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}')^2} + \overline{E'^2 (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v})^2} \quad (\text{так как } \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n}' = 0),$$

или, в виду того, что $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}')^2 = v^2 E'^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{E}')^2$,

$$\overline{(\mathbf{v} \times \mathbf{H}')^2} + \overline{(\mathbf{v} \times \mathbf{E}')^2} = v^2 \overline{E'^2} (1 + \cos^2 \Theta'),$$

где $\Theta' = (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}_0)$ означает угол между волновой нормалью (т. е. лучом \mathbf{R}') и скоростью \mathbf{v} .

Таким образом, мы получаем, по (12), после перестановки штрихованных и нештрихованных величин и принимая во внимание соотношение

$$\mathbf{v} \mathbf{g}' = \frac{v \xi'}{c} \cos \Theta'$$

формулу

$$\xi = \xi' \left\{ 1 + \gamma^2 \left[\frac{v^2}{c^2} (1 + \cos^2 \Theta') + 2 \frac{v}{c} \cos \Theta' \right] \right\}.$$

Если положить здесь $\frac{v}{c} = \beta$ и $\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$, то после небольшого преобразования получается

$$\xi = \xi' [\sin^2 \Theta' + \gamma^2 (\cos \Theta' + \beta)^2] = \xi' \gamma^2 (\beta \cos \Theta' + 1)^2.$$

Изменение направления лучей света (волновых нормалей) при переходе от координатной системы S' к S получается совсем просто из формулы (16b) для „фазы“, выраженной как функция \mathbf{r} и t . В самом деле, волновые поверхности можно определять как поверхности постоянной фазы при постоянном значении времени. С точки зрения координатной системы S' , в которой осциллятор, или, вернее, его средняя точка O' „покоится“, поверхности постоянной фазы τ' для $t' = \text{const}$ определяются уравнением $R' = \text{const}$. Из изложенного следует, что они являются концентричными сферами. С точки же зрения системы S они определяются уравнением

$$\psi = \frac{r\mathbf{v}}{c} + R^* = \text{const}. \quad (17)$$

Направление волновой нормали определяется, очевидно, градиентом ψ .

Но

$$\text{grad } \psi = \frac{\mathbf{v}}{c} + \text{grad } R^*,$$

или, в координатном виде,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \beta + \frac{x_1 - x_1^0}{R^*}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = (1 - \beta^2) \frac{x_2}{R^*}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = (1 - \beta^2) \frac{x_3}{R^*},$$

и, следовательно, по известным формулам

$$x_1 - x_1^0 = \frac{1}{\gamma} x'_1; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3; \quad R^* = \frac{R'}{\gamma}; \quad 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \beta + \frac{x'_1}{R'}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{x'_2}{\gamma R'}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{x'_3}{\gamma R'}.$$

Если обозначить углы волновой нормали с направлением \mathbf{v} в системах S и S' соответственно через θ и θ' , то очевидно будем иметь

$$\cos \theta = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{|\text{grad } \psi|}; \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right)^2}}{|\text{grad } \psi|},$$

с одной стороны,

$$\cos \theta' = \frac{x'_1}{R'}; \quad \sin \theta' = \frac{\sqrt{x'^2_2 + x'^2_3}}{R'},$$

с другой.

Отсюда следует, что

$$\text{tg } \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\cos \theta' + \beta)}. \quad (18)$$

Представим себе, например, что S — координатная система, связанная с Землей, а некоторую „неподвижную звезду“ будем рассматривать как чрезвычайно удаленный осциллятор.

Эта „неподвижная звезда“ должна двигаться относительно S с периодически меняющейся скоростью (вследствие кругового движения Земли вокруг Солнца). При этом должно меняться наблюдаемое на Земле направление ее лучей или, другими словами, ее (кажущееся) положение на небе. В этом заключается открытое Брэдлеем явление аберрации неподвижных звезд. Обычно рассматривают не направление луча света, но противоположное ему направление наблюдения, и не движение звезды относительно Земли, а движение Земли относительно звезды. В соответствии с этим надо изменить знаки θ (угол наблюдения) и β (скорость Земли, деленная на скорость света), причем формула (18) остается неизменной.

Напомним, что в действительности может наблюдаться только изменение угла θ , происходящее вследствие кругового движения Земли вокруг Солнца. При этом, между θ и θ' должна, вообще говоря, сохраняться постоянная разность, проистекающая от относительного поступательного движения звезды и солнечной системы. Эти соотношения изображены схематически на рис. 39.

Здесь B означает Землю и A' — так называемое истинное положение звезды; A — „кажущееся“ положение (с точки зрения системы S), BC — направление движения Земли в данный момент

(с точки зрения S'). Разность $\alpha = \theta' - \theta$ носит название угла абберации.

Тангенс этого угла, согласно (18), равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta' - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta' \operatorname{tg} \theta} = \sin \theta' \frac{(\gamma - 1) \cos \theta' + \beta}{\gamma \cos \theta' (\cos \theta' + \beta) - \sin^2 \theta'}.$$

Скорость Земли относительно звезды (а нас интересует только относительная скорость) очень мала по сравнению со скоростью света. Поэтому можно положить $\gamma = 1$ и вообще пренебречь всеми величинами второго порядка относительно β . Тогда вышеприведенная формула примет следующий простой вид:

$$\alpha \cong \beta \sin \theta' \cong \beta \sin \theta.$$

До сих пор мы не делали никаких предположений о характере световых колебаний. Положим теперь, что эти колебания гармонические (монохроматический свет). Их частоту в покоящейся системе S' („истинную“ частоту) обозначим через ν' . Зависимость колебаний осциллятора от времени выражается, в системе S' , фазовым множителем $\cos 2\pi\nu' t'$, а соответствующая зависимость для световых колебаний — множителем $\cos 2\pi\nu' \tau'$, т. е. с точки зрения координатной системы S (земного астронома) множителем

$$\cos 2\pi\nu' \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}}{c^2} - \frac{R^*}{c} \right).$$

Для закрепленной в S точке (телескоп) \mathbf{r} остается постоянным. Поэтому величина R^* должна медленно меняться. Для не слишком большого промежутка времени можно ее зависимость от времени выразить формулой:

$$\left(\frac{dR^*}{dt} \right)_0 (t - t_0).$$

Но $\frac{dR^*}{dt} = \frac{(x_1^0 - x_1)}{R^*} \frac{dx_1^0}{dt} = -\frac{R\mathbf{v}}{R^*}$. Вышеуказанный фазовый множитель принимает, таким образом, следующий вид:

$$\cos \left\{ 2\pi\nu' \gamma \left(1 + \frac{R}{R^*} \frac{\mathbf{v}}{c} \right) (t - t_0 + \text{const}) \right\},$$

т. е. наблюдаемые в системе S световые колебания оказываются также гармоническими, но имеют отличную от ν' частоту

$$\nu = \nu' \gamma \left(1 + \frac{R}{R^*} \frac{\mathbf{v}}{c} \right), \quad (19)$$

или приближенно, для очень больших расстояний,

$$\nu = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta). \quad (19a)$$

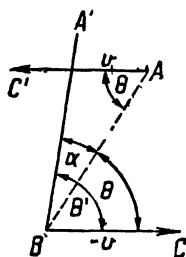


Рис. 39.

Эта формула выражает известный принцип Допплера-Физо, но в уточненной форме: к „линейному“ эффекту Допплера, пропорциональному β и пропадающему при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (движение перпендикулярно направлению наблюдения), присоединяется еще „квадратичный“ эффект, соответствующий различию в измерении времени в S и S' и определяющийся множителем $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

В случае встречающихся в природе скоростей как для звезд, так и для отдельных испускающих свет атомов этим членом можно пренебрегать.

Последние результаты, характеризующие изменение направления и частоты света при относительном движении источника света и наблюдателя, могут быть выведены совсем просто, если считать источник света (осциллятор) бесконечно удаленным и соответственно этому световые волны — плоскими. Зависимость электромагнитного поля такой волны от времени и места, как известно, определяется фазовым множителем вида $\Phi = e^{i\psi}$, где фаза ψ связана с радиусом-вектором \mathbf{r} и временем t линейной зависимостью [см. (37a) и (37b) § 8 главы V] по формуле

$$\psi = 2\pi (-vt + \mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (20)$$

Вектор \mathbf{k} численно равен обратному значению длины волны $\frac{v}{c} = \frac{1}{\lambda}$ и совпадает по направлению с волновой нормалью \mathbf{n} .

Выражение (20) относится к координатной системе S . Его численное значение не должно зависеть от выбора координатной системы. Другими словами, фаза ψ инвариантна относительно преобразований Лоренца. Но, так как \mathbf{r} и t образуют пространственную и временную проекцию четырехмерного вектора \mathbf{r} , то \mathbf{k} и v также должны рассматриваться, как соответствующие проекции некоторого определенного четырехмерного вектора \mathbf{k} , так что фаза ψ равна внутреннему произведению этих четырехмерных векторов (умноженному на 2π)

$$\psi = 2\pi \mathbf{k}\mathbf{r} = 2\pi \sum_{k=1}^4 k_k x_k. \quad (21)$$

С другой стороны, ψ выражается в координатной форме следующим образом:

$$\psi = 2\pi (+k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - vt).$$

Сравнивая это выражение с (21), мы получаем $-vt = k_4 x_4 = k_4 ict$, т. е.

$$k_4 = \frac{i}{c}v = \frac{i}{\lambda}. \quad (21a)$$

Таким образом частоту (умноженную на $\frac{i}{c}$) можно рассматривать как четвертую компоненту четырехмерного вектора \mathfrak{f} волнового вектора. Квадрат этого четырехмерного вектора тождественно равен нулю

$$\mathfrak{f}^2 = \sum_{k=1}^4 k_k^2 = 0. \quad (21b)$$

В действительности это значит, что распространение действия происходит со скоростью света.

Из вышеизложенного следует, что пространственная и временная проекции \mathfrak{f} преобразуются так же, как соответствующие проекции \mathfrak{r} . Таким образом, мы имеем, согласно (1) и (1a) (где \mathfrak{r} заменяется через \mathbf{k} и t через $\frac{v}{c^2}$):

$$v' = \gamma (v - \mathbf{k}\mathbf{v}) \quad (22)$$

и

$$\mathbf{k}' = \gamma \left(\mathbf{k} - \frac{v\mathbf{v}}{c^2} \right) + (1 - \gamma) (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{k}) \times \mathbf{v}_0. \quad (22a)$$

Заметим, что произведение $(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{k}) \times \mathbf{v}_0$ есть не что иное как проекция вектора \mathbf{k} на плоскость, перпендикулярную к \mathbf{v} .

Введем теперь координатные оси $X_1, X_2, X_3, X_1', X_2', X_3'$ и положим, что вектор \mathbf{k} лежит в плоскости $X_1 X_2$ и образует с \mathbf{v} угол Θ . Тогда (22) примет вид

$$v' = \gamma v \left(1 - \frac{v}{c} \cos \Theta \right).$$

Эта формула, при замене в ней v на $-v$, совпадает с (19a) т. е. с формулой принципа Допплера. Проектируя (22a) на первую и вторую оси, найдем

$$k' \cos \Theta' = \gamma \left(k \cos \Theta - \frac{v v}{c^2} \right) = \gamma k (\cos \Theta - \beta),$$

$$k' \sin \Theta' = \gamma k \sin \Theta + (1 - \gamma) k \sin \Theta = k \sin \Theta$$

откуда следует

$$\operatorname{tg} \Theta' = \frac{\sin \Theta}{\gamma (\cos \Theta - \beta)},$$

т. е., опять-таки при замене v на $-v$, формула (18) для Бродлеевской абберации.

§ 5. Электромагнитное поле произвольно движущегося осциллятора. С помощью преобразований Лоренца из (заданного) поля покоящегося осциллятора можно определить поле осциллятора, движущегося прямолинейно и равномерно. Теперь мы решим такую же задачу для любого поступательного движения. При этом будем трактовать осциллятор как точку.

Заметим, что он может представлять собой как источник света (произвольного характера колебаний), так и „вращающийся“ электрон с переменным во времени магнитным моментом.

Искомое решение получается простейшим образом с помощью метода, изложенного в § 4 главы VI при нахождении потенциала движущегося точечного заряда. Теперь мы заменим этот заряд рассматриваемым осциллятором и соответственно этому четырехмерный потенциал \mathfrak{A} — потенциалом поляризации \mathfrak{Z} .

Так как последний, удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению $\square^2 \mathfrak{Z} = 0$, что и \mathfrak{A} , причем осциллятор является только особенной точкой, то можно написать точечное решение, соответствующее отдельной пространственно-временной особенной точке $Q'(r)$ в форме

$${}^2\mathfrak{Z} = \frac{{}^2p}{S^2},$$

где $S^2 = (x - x')^2$ — четырехмерное расстояние между Q' и рассматриваемой точкой $Q(x)$. Возникает вопрос, как из такого точечного решения получить „линейное решение“, отвечающее истинному поступательному движению осциллятора и его истинному (переменному во времени) электромагнитному моменту?

Так как между компонентами поляризационного потенциала не существует тождественного соотношения (как, например, $\square \mathfrak{A} = 0$), то для ответа на поставленный вопрос надо искать другой исходный пункт.

Прежде всего ясно, что в частном случае покоящегося осциллятора общее решение переходит в уже известное решение

$Z_{kl} = \frac{p'_{kl}}{R}$, где p'_{kl} — компоненты поляризационного тензора для эффективного момента p'_{kl} . Это частное решение можно представить в форме

$$Z_{kl} = \frac{c}{\pi i} \oint \frac{p'_{kl}}{S^2} dt',$$

причем интеграл должен быть взят по замкнутой кривой в комплексной плоскости t' , вокруг корня уравнения $S^2 = 0$, соответствующего запаздывающему действию (см. выражение кулоновского потенциала в § 4 главы VI).

При попытке распространения этой формулы на общий случай, мы наталкиваемся, с точки зрения теории относительности на следующую трудность: величины Z_{kl} и p_{kl} ковариантны, S^2 — инвариант, напротив, dt' является не инвариантным скаляром, но деленной на ic четвертой компонентой четырехмерного вектора dx' , который соответствует бесконечно малому перемещению осциллятора вдоль его четырехмерной „мировой линии“.

Заметим, что этот четырехмерный вектор, согласно условию $v < c$ (v — поступательная скорость осциллятора), имеет пространственно-образный характер. Поэтому представляется

естественным вариантный промежуток времени dt' заменить инвариантным промежутком $d\tau'$, который получается, если осциллятор рассматривается с точки зрения такой инерциальной системы, в которой он мгновенно покоится, т. е. которая движется относительно предыдущей системы с такой же скоростью v , как и осциллятор в рассматриваемой пространственно-временной точке. Этот „естественно“ минимальный промежуток времени выражается по (24а) главы VIII формулой

$$d\tau' = dt' \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}. \tag{23}$$

Соответствующее пространственно-временное расстояние между „точками“ r и $r + dr$, которое мы обозначим через ds' , равно

$$\begin{aligned} ds' &= \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2} = \\ &= icdt' \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx_1'}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dx_2'}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dx_3'}{dt'} \right)^2 \right]}, \end{aligned}$$

т. е.

$$ds' = icd\tau'. \tag{23a}$$

ds' называют элементом дуги четырехмерной „мировой линии“, описываемой осциллятором.

Таким образом, общая ковариантная формула для Z_{kl} имеет вид

$$Z_{kl} = \frac{c}{\pi i} \oint \frac{p'_{kl} \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}{S^2} dt'. \tag{24}$$

Составляя вычет относительно „запаздывающего полюса“, т. е. корня S , соответствующего запаздывающему действию, получаем, так же как в § 4 главы VI:

$$Z_{kl} = \left[\frac{p'_{kl} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v_R}{c}\right) R} \right]_{t'_0 = t - R/c}. \tag{24a}$$

Таким образом, первоначально поставленная задача может считаться разрешенной. Метод, которым мы пользовались, служит иллюстрацией методологического использования теории относительности.

Мы вычислим еще из Z_{kl} обычные электромагнитные потенциалы A, φ . Это оказывается гораздо более удобным сделать с помощью четырехмерной формулы (24), чем из трехмерной формулы (24а). Вообще всегда удобнее производить переход к трехмерному пространству только в конечном результате, во всех же промежуточных вычислениях пользоваться четырехмерным представлением.

Согласно § 1 главы VIII, мы имеем

$$A_k = \sum_l \frac{\partial Z_{kl}}{\partial x_l} = \frac{c}{\pi i} \oint \sum_l p'_{kl} \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{1}{S^2} \right) dt',$$

или, вводя сокращение

$$p_{kl}^* = p'_{kl} \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \quad (25)$$

и принимая во внимание, что $\frac{\partial S}{\partial x_l} = \frac{x_l - x'_l}{S}$ и $p_{kl} = -p_{lk}$,

$$A_k = \frac{2c}{\pi i} \oint \frac{\sum_l p_{lk}^* (x_l - x'_l)}{S^4} dt'. \quad (25a)$$

При $t' \rightarrow t'_0$ имеем далее $S^4 = a_2 (t' - t'_0)^2 + a_3 (t' - t'_0)^3 + \dots$,

где

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2(S^4)}{dt'^2} \right)_0, \quad a_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{d^3(S^4)}{dt'^3} \right)_0 \text{ и т. д.}$$

т. е., следовательно,

$$\frac{1}{S^4} = \frac{1}{a_2 (t' - t'_0)^2} \left\{ 1 - \frac{a_3}{a_2} (t' - t'_0) + \dots \right\}$$

и, согласно (25a):

$$A_k = \frac{4c}{a_2} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_k(t')}{(t' - t'_0)^2} dt' - \frac{4a_3 c}{a_2^2} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_k(t') dt'}{t' - t'_0},$$

где для краткости положено $F_k(t') = \sum_l p_{lk}^* (x_l - x'_l)$

Так как функция $F_k(t')$ для $t' = t'_0$ остается конечной, то (см. главу VI, § 5)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_k(t') dt'}{(t' - t'_0)} = F_k(t'_0) \text{ и } \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_k(t') dt'}{(t' - t'_0)^2} = \left\{ \frac{d}{dt'} F_k(t') \right\}_{t=t'_0}$$

Далее элементарные вычисления дают

$$a_2 = 4R^2 c^2 \left(1 - \frac{v'_z}{c} \right)^2,$$

$$a_3 = -4Rc^3 \left(1 - \frac{v'_R}{c} \right) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{R}}{c^2} \right).$$

Отсюда следует

$$A_k = \frac{1}{\left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)^2} \sum_{i=1}^4 \left\{ \frac{x_i - x'_i}{cR^2} \frac{dp_{ik}^*}{dt'} - \frac{p_{ik}^*}{cR^2} \frac{dx'_i}{dt'} + \right. \\ \left. + \frac{1 - v'^2/c^2 + \frac{w'R}{c^2}}{1 - v'_R/c} \frac{p_{ik}(x_i - x'_i)}{R^3} \right\}_{v=v_0} \quad (26)$$

Теперь мы можем разделить четырехмерный вектор \mathfrak{A} на его пространственную и временную составляющие. При этом заметим, что для $k=1$

$$\sum_i p_{ik}(x_i - x'_i) = p_{21}R_2 + p_{31}R_3 + p_{41}R_4 = \\ = m_2R_3 - m_3R_2 - ip_1ic(t - t'_0) = (\mathbf{m} \times \mathbf{R})_1 + p_1R$$

далее

$$\frac{1}{c} \sum_i p_{i1}^* \frac{dx'_i}{dt'} = \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \left\{ (\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{v}'}{c})_1 + p_1 \right\}$$

и

$$\sum (x_i - x'_i) \frac{dp_{i1}^*}{dt'} = \left[\frac{d}{dt'} (\mathbf{m} \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}) \times \mathbf{R} \right]_1 + R \frac{d}{dt'} (p_1 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}).$$

Аналогичные формулы можно написать для $k=2$ и $k=3$, в случае же $k=4$, получаем

$$\sum_i p_{i4}(x_i - x'_i) = i(p_1R_1 + p_2R_2 + p_3R_3) = i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R} \text{ и т. д.}$$

Векторный потенциал \mathbf{A} и скалярный потенциал $\varphi = \frac{A_4}{i}$ выражаются поэтому, согласно (26), следующим образом:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)^2} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{v'}{c} + \frac{w'R}{c^2}\right) \mathbf{m}' \times \mathbf{R} + \mathbf{p}R}{\gamma(1 - v'_R/c) R^3} - \frac{\left(\mathbf{m}' \times \frac{\mathbf{v}'}{c}\right) + \mathbf{p}'}{\gamma R^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{cR^2} \left(\frac{d}{dt'} \frac{\mathbf{m}'}{\gamma}\right) \times \mathbf{R} + \frac{1}{cR} \frac{d}{dt'} \frac{\mathbf{p}'}{\gamma} \right\}, \quad (26a)$$

$$\varphi = \frac{1}{\left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)^2} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{w'R}{c^2}\right) \mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}}{\gamma(1 - v'_R/c) R^3} - \frac{\mathbf{p}' \cdot \left(\frac{\mathbf{v}'}{c}\right)}{\gamma R^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{cR^2} \mathbf{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{p}'}{\gamma}\right) \right\} \quad (26b)$$

с обычным обозначением

$$\gamma = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

В этих формулах скорость поступательного движения осциллятора рассматривается как заданная функция времени. Что касается электромагнитных моментов \mathbf{p}' и \mathbf{m}' , то они могут рассматриваться непосредственно как функции времени только в соответствующей покоящейся системе. Эти известные „покоящиеся значения“ \mathbf{p}^0 и \mathbf{m}^0 связаны с относящимися к выбранной инерциальной системе величинами \mathbf{p}' и \mathbf{m}' формулами:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}^0 &= (1 - \gamma)(\mathbf{m}' \cdot \mathbf{v}_0') \mathbf{v}_0' + \gamma \left(\mathbf{m}' + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{p}' \right), \\ \mathbf{p}^0 &= (1 - \gamma)(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}_0') \mathbf{v}_0' + \gamma \left(\mathbf{p}' - \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{m}' \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(см. формулы (11) § 2; в них заштрихованные величины соответствуют нашим \mathbf{p}^0 и \mathbf{m}^0 ; теперь штрих означает, что аргументом служит не время t , а эффективное время $t'_0 = t - \frac{R_0}{c}$).

Разумеется, можно выразить \mathbf{p}' и \mathbf{m}' через \mathbf{p}^0 и \mathbf{m}^0 посредством обратных формул.

Для „вращающегося“ или, выражаясь осторожнее и физически правильнее, для магнитного электрона электрический момент в покоящейся системе равен нулю. В этом случае мы имеем, таким образом

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{m}', \quad (27a)$$

так что второй член в выражениях (26a) и (26b) тождественно обращается в 0. Магнитный момент \mathbf{m}' выражается при этом через соответствующий покоящийся момент по формуле

$$\mathbf{m}' = (1 - \gamma)(\mathbf{m}^0 \cdot \mathbf{v}_0') \mathbf{v}_0' + \gamma \mathbf{m}^0.$$

Если положить, что вектор \mathbf{m}^0 всегда перпендикулярен к направлению движения, т. е. к вектору скорости \mathbf{v} (что согласно (63a) главы VII означает исчезновение внутреннего вращательного момента, то получается просто

$$\mathbf{m}' = \gamma \mathbf{m}^0. \quad (28)$$

При этом формулы (26a) и (26b) принимают следующий вид:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\left(-\frac{v'_R}{c} \right)^2} \left\{ \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{\mathbf{w}'R}{c^2}}{1 - \frac{v'_R}{c}} \cdot \frac{\mathbf{m}^0 \times \mathbf{R}_0 + \frac{\mathbf{v}}{c} \mathbf{m}^0}{R^2} + \frac{\dot{\mathbf{m}}^0 \times \left(\mathbf{R}_0 - \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) + \frac{\dot{\mathbf{v}}'}{c} \times \mathbf{m}^0}{cR} \right\} \quad (28a)$$

$$\varphi = \frac{1}{\left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)^2} \left\{ \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{w'R}{c^2}}{1 - \frac{v'_R}{c}} \cdot \frac{\left(\frac{v'}{c} \times m^0\right) R_0}{R^2} + \frac{R_0 \left(\frac{v'}{c} \times m^0 + \frac{\dot{v}'}{c} \times m^0\right)}{cR} \right\}. \quad (28b)$$

Точки над m и v означают соответствующие производные по времени t' для момента $t = t'_0$. К этим потенциалам следует, разумеется, присоединить еще и те, которые происходят от заряда электрона.

Для определения электрической и магнитной напряженностей поля мы должны вернуться к первоначальным четырехмерным выражениям, так как уравнение $t'_0 = t - \frac{R}{c}$, определяющее эффективное время, следует применять только к конечному результату, а не к промежуточным вычислениям.

Мы разъясним это обстоятельство на примере потенциалов, обусловленных зарядом электрона

$$\varphi = \frac{e}{\left(1 - \frac{v'_R}{c}\right) R}, \quad \mathbf{A} = \varphi \frac{v'}{c}.$$

Определение напряженности поля обычным путем, т. е. посредством формул $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, уже было приведено в § 2 главы VI.

Мы заменим теперь эти формулы четырехмерными $H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}$ и воспользуемся для A_k интегральным выражением (23) главы VI

$$A_k = \frac{e}{\pi i} \oint \frac{dx'_k}{S^2} = \frac{e}{\pi i} \oint \frac{dx'_k}{dt'} \frac{1}{S^2} dt'.$$

Тогда

$$H_{kl} = \frac{2e}{\pi i} \oint \left\{ \frac{dx'_k}{dt'} (x_l - x'_l) - \frac{dx'_l}{dt'} (x_k - x'_k) \right\} \frac{dt'}{S^4}.$$

Это выражение приводится таким же путем, как и (25а), к виду

$$H_{kl} = \frac{e \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{w'R}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)^2 R^3 c} \Phi_{kl}(t'_0) + \frac{e}{\left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)^2 R^2 c^2} \left\{ \frac{d}{dt'} \Phi_{kl}(t') \right\}_{t=t'_0},$$

где

$$\Phi_{ik}(t') \equiv \frac{dx_k'}{dt'}(x_i - x_i') - \frac{dx_i'}{dt'}(x_k - x_k'),$$

откуда получаются уже приведенные в § 2 главы VI формулы для **E** и **H**.

§ 6. Вывод основных уравнений электромагнитного поля из вариационного принципа. В § 5 главы IV мы показали, что дифференциальное уравнение $\nabla^2 \varphi = 0$ для скалярного потенциала, внутри ограниченной части пространства, представляет собой условие минимума интеграла

$$I = \int (\nabla \varphi)^2 dV \quad (29)$$

при заданных значениях функции φ на ограничивающей рассматриваемую часть пространства поверхности S . Это положение можно перевернуть и рассматривать дифференциальное уравнение $\nabla^2 \varphi = 0$ как следствие вариационного уравнения

$$\delta I = 0 \quad (29a)$$

при заданных граничных значениях φ . При этом величина δI означает так называемую первую вариацию интеграла I , т. е. ту часть изменения этого интеграла, которая зависит линейно, а не квадратично, от бесконечно малого изменения или вариации исследуемой функции $\varphi(\mathbf{r})$. Таким образом, уравнение (29a) следует рассматривать лишь как первое приближение для соответствующего изменения I .

В § 5 главы IV мы принимали во внимание и квадратичные относительно $\delta \varphi$ члены и показали, что соответствующая им вторая вариация I ($\delta^2 I$) остается существенно положительной величиной при исчезновении $\nabla^2 \varphi$.

В общем случае, т. е. когда под знаком интеграла в (29) стоит любое дифференциальное выражение, уравнение (29a) является только необходимым, но недостаточным условием минимума интеграла I , это уравнение может соответствовать и максимуму I или же ни минимуму, ни максимуму, но так называемому стационарному значению, которое в первом приближении остается постоянным при бесконечно малом изменении функции φ .

Дифференциальное уравнение $\nabla^2 \varphi = 0$ имеет место при отсутствии электричества в рассматриваемом объеме V . Однако, легко показать, что и общее уравнение

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho,$$

которое соответствует заданному, постоянному во времени, распределению заряда с конечной объемной плотностью, также эквивалентно некоторому вариационному уравнению $\delta I = 0$, причем в этом случае интеграл I выражается формулой:

$$I = \int \left\{ \frac{(\nabla \varphi)^2}{8\pi} - \varphi\rho \right\} dV$$

или

$$I = \int \left(\frac{E^2}{8\pi} - \varphi \rho \right) dV. \quad (30)$$

Здесь $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ означает напряженность электрического поля; упомянутое пограничное условие ($\delta\varphi=0$) при этом остается неизменным, а плотность заряда ρ — заданной ($\delta\rho=0$).

В самом деле первая вариация (30) равна

$$\delta I = \int \left(\frac{\mathbf{E} \delta \mathbf{E}}{4\pi} - \delta \varphi \rho \right) dV.$$

Далее, так же как и в § 6 главы IV, имеем:

$$\mathbf{E} \delta \mathbf{E} = -\mathbf{E} \nabla \delta \varphi = -\operatorname{div}(\delta \varphi \mathbf{E}) + \delta \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \delta \varphi \mathbf{E} + 4\pi \rho \delta \varphi$$

и, следовательно,

$$\delta I = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}(\delta \varphi \mathbf{E}) dV = \frac{1}{4\pi} \oint \delta \varphi E_n dS = 0.$$

Заметим, что распространенный по всему пространству интеграл $\int \frac{E^2}{8\pi} dV$ равен полной энергии электрических зарядов, создающих поле \mathbf{E} . Та же самая энергия выражается, как известно, формулой

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV.$$

Следовательно, в нашем случае

$$I = -U.$$

Пограничное условие $\delta\varphi=0$ в случае бесконечно удаленной поверхности можно заменить обычным условием для скалярного потенциала в бесконечности $\varphi=0$.

Аналогичным путем можно установить, что дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j},$$

которое определяет векторный потенциал заданного стационарного распределения электрического тока, совершенно эквивалентно вариационному уравнению $\delta K=0$, где

$$K = \int \left(\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \mathbf{A} \mathbf{j} \right) dV$$

и $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ — напряженность магнитного поля. Пограничное условие, так же как и в предыдущем случае, выражается формулой $\delta \mathbf{A} = 0$ (на поверхности S); при бесконечном удалении ограничивающей поверхности, его можно оставить без внимания, причем в этом случае интеграл K равен отрицательному значению магнитной энергии.

Для доказательства составим первую вариацию от K

$$\delta K = \int \left(\frac{\mathbf{H} \delta \mathbf{H}}{4\pi} - \mathbf{j} \delta \mathbf{A} \right) dV$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \delta \mathbf{H} &= \mathbf{H} \operatorname{rot} \delta \mathbf{A} = \operatorname{div} (\delta \mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \delta \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &= \operatorname{div} (\delta \mathbf{A} \times \mathbf{H}) + 4\pi \mathbf{j} \delta \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta K = \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} (\delta \mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV = \frac{1}{4\pi} \oint (\delta \mathbf{A} \times \mathbf{H})_n dS = 0.$$

Эти результаты, справедливые только для постоянных во времени полей, можно¹ — и притом всего проще с помощью теории относительности — обобщить на случай любого поля, соответствующего переменному во времени распределению зарядов и токов. Общие уравнения поля в четырехмерном виде имеют вид:

$$\square^2 \mathfrak{A} = -4\pi \mathbf{j} \quad \text{и} \quad {}^2 \mathfrak{S} = \operatorname{Rot} \mathfrak{A}.$$

Для определения интеграла S в соответствующем вариационном уравнении $\delta S = 0$, мы имеем следующие основания: 1) в частном случае постоянного во времени поля, уравнение $\delta S = 0$ должно сводиться к двум уравнениям $\delta I = 0$ и $\delta K = 0$; 2) S должно быть инвариантным скаляром.

В §§ 1 и 2 мы видели, что величины $\mathbf{A}\mathbf{j}$ и $\varphi\rho$, с одной стороны, и H^2 и E^2 , с другой, могут быть соединены друг с другом в инвариантные величины

$$\mathbf{A}\mathbf{j} - \varphi\rho = \mathfrak{A}\mathbf{j}$$

и

$$H^2 - E^2 = \frac{1}{2} {}^2 \mathfrak{S}^2.$$

Отсюда следует, что искомый интеграл S должен иметь подинтегральную функцию

$$\mathbf{A}\mathbf{j} - \varphi\rho - \frac{H^2 - E^2}{8\pi} = \mathfrak{A}\mathbf{j} - \frac{(\operatorname{Rot} \mathfrak{A})^2}{16\pi}. \quad (31)$$

Что касается области интегрирования, то она должна быть четырехмерной, вследствие равноправности пространственных и временных координат. Чтобы освободиться от какого бы то ни было пространственно-временного ограничения, мы можем распространить наш интеграл по всей пространственно-временной протяженности, т. е. по всему четырехмерному „миру“. Если обозначить элемент объема „мира“ через $d\Omega$, то

$$S = \int \left(\mathfrak{A}\mathbf{j} - \frac{(\operatorname{Rot} \mathfrak{A})^2}{16\pi} \right) d\Omega, \quad (32)$$

¹ Как впервые показал К. Шварцшильд.

или в координатном виде

$$S = \int \int \int \int \left[\sum_k A_k j_k - \frac{1}{16\pi} \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \quad (32a)$$

Мы должны еще проверить то обстоятельство, что введенное таким образом выражение для объема четырехмерной „мировой области“

$$\int d\Omega = \int \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int \int ic dV dt \quad (33)$$

действительно инвариантно относительно преобразований Лоренца (в противном случае вариационное уравнение $\delta S = 0$ не имело бы смысла).

Если перейти от рассматриваемой координатной системы X к другой, прямолинейно и равномерно движущейся относительно ее системе X' , то интеграл (33) преобразуется, согласно известной теореме Якоби для кратных интегралов, в

$$\int \int \int \int D dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4,$$

где D — функциональный определитель с элементами $\frac{\partial x_k}{\partial x'_l} = \alpha_{kl}$.

Этот определитель, вследствие ортогональности преобразований Лоренца, равен 1, чем и доказывается инвариантность $d\Omega$, или, точнее, $\int d\Omega$.

Величина S соответствует функции Лагранжа (или точнее — функции действия) в классической механике, т. е. разности между кинетической (магнитной) и потенциальной (электрической) энергией.

Мы воспользуемся этим обстоятельством позже, при выводе уравнений движения электрона.

Теперь мы займемся нахождением вариации δS и убедимся, что уравнение $\delta S = 0$ действительно эквивалентно предыдущим уравнениям поля. При этом, разумеется, мы должны рассматривать компоненты четырехмерного тока j как заданные, не варьируемые функции четырех координат. Таким образом, $\delta(A_{j/k}) = = j_k \delta A_k$ и далее

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right)^2 &= 2 \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \delta A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial \delta A_l}{\partial x_k} \right) = \\ &= 2H_{lk} \left(\frac{\partial \delta A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial \delta A_l}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{lk} \left(\frac{\partial \delta A_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \delta A_l}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_l} (H_{lk} \delta A_k) - \frac{\partial}{\partial x_k} (H_{lk} \delta A_l) - \delta A_k \frac{\partial H_{lk}}{\partial x_l} + \\ &+ \delta A_l \frac{\partial H_{lk}}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

При суммировании этого выражения по обоим значкам k и l последние, очевидно, можно поменять местами, так, например,

$$\sum_k \sum_l \frac{\partial}{\partial x_k} (H_{kl} \delta A_l) = \sum_k \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (H_{kl} \delta A_k).$$

Принимая во внимание, что $H_{kl} = -H_{lk}$, мы получим

$$\begin{aligned} \delta \left[\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right)^2 \right] &= 4 \sum_k \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (H_{lk} \delta A_k) + 4 \sum_k \sum_l \delta A_k \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l} = \\ &= 4 \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_k H_{kl} \delta A_k \right) + 4 \sum_k \delta A_k \sum_l \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

Сумму $\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_k H_{kl} \delta A_k \right)$ можно рассматривать как четырехмерное расхождение четырехмерного вектора с компонентами $\sum_k H_{kl} \delta A_k$ ($l = 1, 2, 3, 4$). При интегрировании по всему „миру“ эта сумма дает, следовательно, нуль. Таким образом, мы получаем

$$\delta S = \int \int \int \int \sum_k \delta A_k \left(j_k - \frac{1}{4\pi} \sum_l \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Для того чтобы этот интеграл исчезал при любых (бесконечно малых) значениях δA_k , должно выполняться равенство

$$\sum_l \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_l} = - \sum_l \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_l^2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_l \frac{\partial A_l}{\partial x_l} = 4\pi j_k.$$

Но это есть не что иное как уравнение (7) главы VIII. Из него следует, что

$$4\pi \sum_k \frac{\partial j_k}{\partial x_k} = - \sum_l \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \sum_k \frac{\partial A_k}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \sum_l \frac{\partial A_l}{\partial x_l} = 0,$$

т. е. закон сохранения электричества. Далее мы получаем соотношение

$$\sum_{l=1}^4 \frac{\partial A_l}{\partial x_l} = 0$$

и обычные уравнения поля:

$$\square \varepsilon A_k = - 4\pi j_k.$$

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 1. Элементарная теория поступательного движения. При изучении движения материальной частицы, в классической механике время выбирается в качестве независимого переменного, т. е. пространственные координаты x_1, x_2, x_3 определяются как функции времени t . С точки зрения теории относительности время, вследствие его вариантного характера, также мало подходит для роли независимого переменного, как и сами координаты. При „графическом“ изображении события, т. е. пространственно-временной точки, точкой в четырехмерном пространстве, время, умноженное на ic , является просто четвертой координатой, равноправной с другими тремя. Кинематика, т. е. учение о движении в обычном трехмерном пространстве, сводится формально к чистой геометрии четырехмерного пространства. При этом только должно выполняться уже приведенное в последней главе (§ 5) условие временно-образного характера всех четырехмерных линий, изображающих движение частицы (электрона, осциллятора). Такие временно-образные четырехмерные линии обычно называют „мировыми линиями“ соответствующих частиц. Представляется удобным определять положение рассматриваемой частицы на ее мировой линии не посредством времени, но длиной s этой мировой линии, отсчитываемой от некоторой определенной начальной точки до данной точки. Элемент длины мировой линии ds и соответствующий наименьший возможный интервал времени $d\tau$ определяются, как мы уже видели, формулой

$$ds = ic d\tau = ic dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1)$$

Если движение частицы в некоторой координатной системе задано как функция времени, соответствующего этой системе, то инвариантное „собственное время“ этой частицы $\tau = \int d\tau$, и, следовательно, длина дуги $s = ic\tau$, найдется по формуле

$$\tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (1a)$$

Путем деления четырехмерного вектора $d\mathbf{r}$, определяющего элементарное пространственно-временное перемещение, на его абсолютное значение $ds = |d\mathbf{r}|$ получается единичный вектор

с компонентами $\frac{dx_k}{ds}$. С точки зрения „мировой геометрии“ этот вектор определяет направление касательной к мировой линии рассматриваемой частицы, с кинематической точки зрения — величину и направление ее скорости. В самом деле,

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \frac{v_1}{ic \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{dx_2}{ds} = \frac{v_2}{ic \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\frac{dx_3}{ds} = \frac{v_3}{ic \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{dx_4}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обычно бывает удобнее применять в качестве независимого переменного не длину дуги, а собственное время.

Величины

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{v_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{v_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{v_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\frac{dx_4}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

образуют компоненты четырехмерного вектора \mathbf{v} , который мы будем называть четырехмерной скоростью. Его пространственная и временная проекции равны

$$\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

При $v=0$ первая исчезает, а вторая приобретает постоянное значение ic ; это значит, что частица, покоящаяся в выбранной инерциальной системе, перемещается во времени, т. е. в направлении четвертой оси, с постоянной скоростью ic . Если отношение $\frac{v}{c}$ мало по сравнению с единицей, то пространственная проекция \mathbf{v} практически обращается в обычную скорость \mathbf{v} . Прямолинейное и равномерное движение в трехмерном пространстве изобразится „мировой прямой“; при этом четырехмерный вектор \mathbf{v} остается постоянным, т. е. не зависит от τ или s . Каждому нарушению равномерности или прямолинейности движения соответствует искривление мировой линии. Это искривление определяется изменением вектора $\frac{dx_k}{ds}$ (направление касательной)

относительно s , т. е. вторыми производными координат по s . Эти вторые производные образуют компоненты четырехмерного вектора кривизны, который определяет с кинематической точки зрения величину и направление ускорения частицы. Четырехмерное ускорение w определяется как производная v по τ (или как вторая производная r по τ); его компоненты равны, следовательно,

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{v_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{d^2x_2}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{v_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{v_3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{d^2x_4}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Пространственная проекция этого четырехмерного вектора может быть отличной от обычного ускорения $w = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ в том случае, когда отношение $\frac{v}{c}$ очень мало, если при этом значение w весьма велико.

При дифференцировании уравнения $\sum \left(\frac{dx_k}{ds}\right)^2 = 1$ по s получается

$$\sum_k \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{d^2x_k}{ds^2} = 0. \quad (2)$$

Это значит геометрически, что векторы $\frac{dv}{ds}$ и $\frac{d^2v}{ds^2}$ перпендикулярны друг к другу. Если заменить s через τ , то получаются уравнения $v^2 = -c^2$ и

$$v_1 \frac{d}{dt} \frac{v_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + v_2 \frac{d}{dt} \frac{v_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + v_3 \frac{d}{dt} \frac{v_3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= c^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

или, в обычных векторных обозначениях,

$$\mathbf{v} \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt} \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2a)$$

Это уравнение выражает, следовательно, то обстоятельство, что значение четырехмерной скорости всегда остается равным ic .

Полученные результаты образуют математическую основу для построения механики материальной частицы, т. е. для установления уравнений, которые определяли бы ее поступательное движение под действием внешних заданных сил. Мы не будем говорить о внутренних силах, с которыми оперирует теория Лоренца, даже тогда, когда они действительно существуют, — например силы взаимодействия между различными электронами в движущемся атоме (если последний трактовать как элементарную частицу).

В качестве исходной точки, мы воспользуемся классическим ньютоновским уравнением движения

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f},$$

которое можно считать справедливым в предельном случае очень малых скоростей. m_0 означает массу частицы (в обычном смысле) и \mathbf{f} — внешнюю силу.

С точки зрения теории относительности, закон Ньютона можно рассматривать только как приближенную и неполную форму закона движения, устанавливающего связь между двумя четырехмерными векторами. Чтобы, не меняя уравнения Ньютона в основных чертах, заменить его таким четырехмерным уравнением, которое в предельном случае $v \rightarrow 0$ обращалось в $m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}$, очевидно надо сделать следующее: 1) заменить трехмерное ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ четырехмерным $\frac{d\mathbf{v}}{d\tau}$ и 2) трехмерную силу \mathbf{f} заменить четырехмерным вектором импульса и работы \mathfrak{F} , причем эти величины должны быть отнесены не к единице обычного времени, а к единице инвариантного собственного времени. Таким путем мы получаем следующее релятивистское уравнение движения

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathfrak{F}. \quad (3)$$

Пространственная проекция \mathfrak{F} равна импульсу силы \mathbf{f} за единицу собственного времени, т. е.

$$\mathbf{f} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Соответствующая проекция вектора $\frac{d\mathbf{v}}{d\tau}$ равна

$$\frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{f}. \quad (3a)$$

Временная проекция уравнения (3) равна

$$m_0 \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dt}{d\tau} \frac{i}{c} l.$$

где l — работа силы \mathbf{f} за единицу обычного времени, т. е.

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l.$$

Справедливость указанного определения l легко проверить с помощью уравнения (2a). А именно, если умножить это последнее на m_0 , то, принимая во внимание (3a), получается

$$l = \mathbf{f} \mathbf{v}.$$

Уравнение (3a), полученное Эйнштейном из ньютоновского путем приложения теории относительности, совпадает с уравнением (42) главы VII, которое было выведено для электрона на основе принципа Лоренца. Мы видим, что уравнение Эйнштейна гораздо более общее и применимо не только к электрону, но к любой материальной частице (атом, молекула, или небесное тело); в предельном случае $\frac{v}{c} \ll 1$ из него получается закон Ньютона, — совершенно независимо от каких-либо гипотез о происхождении массы или силы инерции.

Трехмерный вектор

$$\mathbf{G} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \mathbf{v} \quad (4)$$

представляет собой механическое количество движения частицы (которое мы раньше определяли как электромагнитное количество движения электрона), а коэффициент

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4a)$$

ее массу. Величина

$$W = mc^2 \quad (4b)$$

обычно рассматривается как полная внутренняя энергия частицы. При этом покоящейся частице приписывается энергия $m_0 c^2$.

Количество движения (4) и умноженная на $\frac{i}{c}$ энергия (4b) образуют пространственную и временную проекции четырехмерного вектора

$$\mathfrak{G} = m_0 v \left(G_k = m_0 \frac{dx_k}{d\tau} \right), \quad (5)$$

который соответствует обычному количеству движения (или „импульсу“) и называется вектором количества движения и энергии. С помощью этого четырехмерного вектора можно переписать уравнения движения (3) в виде

$$\frac{d}{d\tau} \mathfrak{G} = \mathfrak{F}. \quad (5a)$$

При изучении поступательного движения электрона на основе принципа Лоренца мы вводили наряду с $\frac{d}{dt} (m v)$ еще пропорциональную второй производной v по t „силу трения“ и указывали, что в обычное выражение собственной силы, а, следовательно, и в точное уравнение движения, должны входить производные v еще более высоких порядков. Формальный характер теории относительности не дает никаких оснований для решения вопроса о необходимости дополнить простое уравнение (3) [или (3a)] подобными членами. Теория относительности утверждает только то, что все эти члены должны быть четырехмерными векторами (или их пространственными проекциями). Предположим, например, в соответствии с уравнением (24b) главы VII, что при очень малых скоростях электрона его уравнение движения имеет вид

$$m_0 \frac{d v}{d t} - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2 v}{d t^2} = f; \quad (6)$$

тогда по теории относительности можно заключить, что точное, т. е. справедливое и для больших скоростей, уравнение движения должно иметь следующий вид:

$$m_0 \frac{d v}{d \tau} - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2 v}{d \tau^2} = \mathfrak{F}, \quad (6a)$$

или, если взять его пространственную проекцию и умножить на $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$\frac{d}{d t} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d}{d t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{d t} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = f. \quad (6b)$$

Но это уравнение может быть и неправильным; и есть много оснований считать, что в случае единственного электрона обычно справедливо простое уравнение (3a).

§ 2. Теория поступательного движения электрона в заданном электромагнитном поле. Мы оставляли до сих пор открытым вопрос о силе, действующей на электрон. Если последний движется в заданном внешнем электромагнитном поле \mathbf{E} , \mathbf{H} (\mathbf{E} и \mathbf{H} могут быть непостоянными во времени), то внешняя сила выражается формулой (Лоренца):

$$\mathbf{f} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right). \quad (7)$$

Если умножить силу \mathbf{f} на

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

то мы получим пространственную проекцию четырехмерного вектора \mathfrak{F} . Первая его компонента (в какой-либо координатной системе) равна

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{e}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (v_2 H_3 - v_3 H_2 + cE) = \\ &= \frac{e}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (v_2 H_{12} + v_3 H_{13} + ic H_{14}), \end{aligned}$$

т. е.

$$F_1 = \frac{e}{c} \left(H_{12} \frac{dx_2}{d\tau} + H_{13} \frac{dx_3}{d\tau} + H_{14} \frac{dx_4}{d\tau} \right).$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для других компонент. Таким образом,

$$F_k = \frac{e}{c} \sum_l H_{kl} \frac{dx_l}{d\tau}, \quad (7a)$$

или в векторной форме

$$\mathfrak{F} = \frac{e}{c} {}^2\mathfrak{F} \frac{dx}{d\tau}.$$

Заметим также следующее выражение

$$F_k = \frac{e}{m_0 c} \sum_l H_{kl} G_l, \quad (7b)$$

которое получается из (7a), если заменить $\frac{dx_l}{d\tau}$ через $\frac{1}{m_0} G_l$ согласно (5).

Формула (7a) соответствует формуле (10a) главы VIII для компонент четырехмерного вектора импульса и работы, отнесенных к единицам объема и времени. Первую легко получить из последней, если представить себе электрон не как точку,

но как бесконечно малое тело. Обозначим его объем V , а плотность заряда через ρ . Плотность тока можно положить равной $\rho \frac{\mathbf{v}}{c}$. Затраченная в элементе объема электрона dV в течение промежутка времени dt работа и импульс (первая — умноженная на $\frac{i}{c}$) выражаются четырехмерным вектором с компонентами

$$\sum_l H_{kl} j_l dV dt = \sum_l H_{kl} \rho dV \frac{v_l}{c} dt$$

(причем $v_4 = ic$).¹ Интегрирование этих выражений по объему электрона представляет большие принципиальные трудности, вследствие того, что промежутки времени могут иметь различные значения для различных элементов объема электрона. В рассматриваемом предельном случае, когда электрон считается бесконечно малым, эти затруднения отпадают и мы получаем для полного импульса (и соответственно работы) за время dt просто

$$\frac{e}{c} \sum_l H_{kl} v_l dt,$$

откуда, по разделении на

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

получается

$$\frac{e}{c} \sum_l H_{kl} \frac{v_l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{c} \sum_l H_{kl} \frac{dx_l}{d\tau},$$

т. е. выражение (7а).

Таким образом, общий закон движения электрона в заданном внешнем электромагнитном поле, согласно (3) и (7а), выражается следующими уравнениями:

$$\frac{d^2 x_l}{d\tau^2} = \kappa \sum_l H_{kl} \frac{dx_l}{d\tau}, \quad (8)$$

$$\frac{dG_k}{d\tau} = \kappa \sum_l H_{kl} G_{ls} \quad (8a)$$

где для сокращения положено

$$\kappa = \frac{e}{m_0 c}. \quad (8b)$$

¹ Заметим, что произведения $dVdt$ и ρdV — инвариантные величины, означающие первое — элемент мировой протяженности и второе — элемент заряда электрона $d\epsilon$.

Если в уравнениях (8) выразить компоненты тензора поля через компоненты потенциала по формулам $H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}$, то они принимают вид

$$\frac{d^2 x_k}{d\tau^2} = \kappa \left[\sum_l \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \frac{dx_l}{d\tau} - \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \frac{dx_l}{d\tau} \right] = \kappa \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_l A_l \frac{dx_l}{d\tau} \right) - \frac{dA_k}{d\tau} \right],$$

т. е.

$$\frac{d}{d\tau} \left(m_0 \frac{dx_k}{d\tau} + \frac{e}{c} A_k \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{e}{c} \sum_l A_l \frac{dx_l}{d\tau} \right). \quad (9)$$

Составляя пространственную и временную проекции этих уравнений (в векторной форме) и возвращаясь от собственного времени τ к обыкновенному времени t , получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \nabla \left(\mathbf{A} \cdot \frac{e\mathbf{v}}{c} - e\varphi \right), \quad (9a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m c^2 + e\varphi \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(e\varphi - \mathbf{A} \cdot \frac{e\mathbf{v}}{c} \right), \quad (9b)$$

где

$$\left(m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Заметим, что символ $\frac{d}{dt}$ (т. е. полная производная по времени) характеризует скорость изменения какой-либо величины в точке движущейся системы координат, связанной с электроном, тогда как символ $\frac{\partial}{\partial t}$ (частная производная по времени) относится к неподвижной точке.

В виду этого обстоятельства, в применении к скорости электрона \mathbf{v} , которая не может быть отнесена к неподвижной точке, символ $\frac{\partial}{\partial t}$ дает нуль, так же как и символ ∇ . Таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}.$$

В случае движения электрона в постоянном электромагнитном поле равенство (9b) сводится к виду

$$\frac{d}{dt} (m c^2 + e\varphi) = 0,$$

т. е. выражает закон сохранения энергии. В общем случае последнее выражение может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt} (m c^2) + e \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = - \frac{e}{c} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}(m c^2) = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v},$$

где $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ — напряженность электрического поля.

Так как магнитная сила $e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}$ не совершает работы, то $e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$; предыдущее равенство совпадает, следовательно, с (3b). Аналогичным образом от уравнения (9a) можно вернуться к уравнению (3a), причем $\mathbf{f} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)$.

В уравнении (9b) $m c^2$ представляет собой собственную энергию электрона (т. е. его кинетическую энергию плюс энергию покоя $m_0 c^2$), а $e \varphi$ — его потенциальную энергию.

В уравнении (9a) собственной энергии электрона соответствует его „собственное“ количество движения $m \mathbf{v}$, а потенциальной энергии — вектор $\frac{e}{c} \mathbf{A}$; последний поэтому представляется естественным трактовать как потенциальное количество движения (или „потенциальный импульс“) электрона. Таким образом, полное количество движения электрона, так же как и его полная энергия, складывается из двух частей — собственной или кинетической, т. е. зависящей от его скорости, и потенциальной, т. е. зависящей от положения. С точки зрения теории относительности введение понятия потенциального количества движения является необходимым следствием допущения понятия потенциальной энергии: вектор $\frac{e}{c} \mathbf{A}$ и скаляр $e \varphi$ являются пространственной и временной проекциями четырехмерного вектора потенциального количества движения и энергии $\frac{e}{c} \mathcal{A}$.

В заключение необходимо отметить следующее обстоятельство. В предыдущем параграфе было показано, что четырехмерный вектор ускорения перпендикулярен к четырехмерному вектору скорости. Этому условию должен удовлетворять и четырехмерный вектор силы (импульс-работы), поскольку он пропорционален и параллелен ускорению. Таким образом, из уравнений движения

$$m_0 \frac{d^2 x_k}{d\tau^2} = F_k$$

[ср. (3)] вытекает соотношение

$$\sum_k F_k \frac{dx_k}{d\tau} = 0. \quad (10)$$

Этим соотношением мы уже отчасти воспользовались в предыдущем параграфе при истолковании четвертой компоненты

вектора \mathfrak{F} (как работы силы за единицу собственного времени). Легко убедиться, что оно на самом деле выполняется в случае электромагнитных сил, определяемых формулой (7а) в связи с антисимметричным характером тензора H_{kl} . А именно:

$$\sum_k F_k \frac{dx_k}{d\tau} = \frac{e}{c} \sum_k \sum_l H_{kl} \frac{dx_k}{d\tau} \frac{dx_l}{d\tau} = \frac{e}{2c} \sum_k \sum_l (H_{kl} + H_{lk}) \frac{dx_k}{d\tau} \frac{dx_l}{d\tau} = 0.$$

Обратно, исходя из условия (10), можно было бы основать выражение (7а) для силы (импульс-работы) и прежде всего установить тот факт, что сила, действующая на электрон, должна зависеть не только от его положения, но и от скорости; в противном случае условие (10), как содержащее скорость явным образом, не могло бы быть выполнено. В простейшем предположении о линейной зависимости силы от скорости мы получаем, совершенно однозначным образом, формулу

$$F_k = \sum_l M_{kl} \frac{dx_l}{d\tau},$$

где M_{kl} — компоненты некоторого тензора, зависящего лишь от положения электрона. Подставляя это выражение в соотношение (10), мы приходим к условию антисимметричности тензора M_{kl} . Таким образом, остается лишь отождествить последний с тензором электромагнитного поля (умноженным на $\frac{e}{c}$). Если бы понятие электромагнитного поля было нам неизвестно, то именно таким путем, т. е. исходя из релятивистского уравнения движения, его можно было бы ввести. Этот способ в смысле краткости и изящества, конечно, предпочтительнее тех довольно громоздких рассуждений, которыми мы пользовались в начале этой книги (главы I и II). Он имеет однако тот недостаток — с дидактической точки зрения, — что предполагает знакомство с теорией относительности. Вместо того чтобы выводить последнюю из электродинамики, как это было сделано нами выше, мы могли бы обосновать электродинамику — так же как и механику — с помощью теории относительности. Само собою разумеется, что речь идет лишь об обосновании, а не о строгом выводе, для которых теория относительности не дает достаточных предпосылок.

Одной из таких дополнительных предпосылок может служить принцип сохранения электричества, выражаемый в дифференциальной форме уравнением

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

где

$$\mathbf{j} = \rho \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Полагая $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $ict = x_4$ и $j_x = j_1$, $j_y = j_2$, $j_z = j_3$, $ip = j_4$ мы можем переписать его в виде

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial j_k}{\partial x_k} = 0. \quad (11)$$

Это уравнение будет удовлетворено тождественным образом, если положить

$$j_k = \sum_i \frac{\partial N_{ki}}{\partial x_i},$$

где N_{ki} — компоненты произвольного антисимметрического тензора. Для получения основных уравнений электромагнетизма оказывается необходимым отождествить его с тензором H_{ki} (разделенным на 4π , при обычном определении электрических единиц) и положить

$$H_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}$$

в соответствии с антисимметричностью тензора H_{ki} , а также с тем обстоятельством, что четырем компонентам вектора плотности тока j_k должны соответствовать четыре компоненты некоторого вектора A_k , характеризующего соответствующее силовое поле.

Соотношению (11) соответствует при этом аналогичное соотношение

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0$$

между компонентами вектора A_k .

Вместо только что указанного, быть может, слишком формального пути, можно было бы воспользоваться наряду с соотношением (11) законом Кулона, являющимся простейшим частным случаем общих законов электромагнитного поля.

Теория относительности позволяет осуществить переход от этого частного закона к общему следующим весьма простым и однозначным образом.

Закон Кулона можно записать в виде уравнений:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (11a)$$

и

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho. \quad (11b)$$

В виду того обстоятельства [вытекающего из соотношения (11)], что ip представляет собой четвертую компоненту вектора плотности тока, величины iE_x , iE_y , iE_z оказывается необходимым трактовать как компоненты H_{41} , H_{42} , H_{43} , некоторого тензора.

В противном случае (т. е. в том случае, если бы эти величины являлись пространственными компонентами четырехмерного вектора) левая сторона уравнения (11b), дополненная членом вида $\frac{1}{c} \frac{\partial E_t}{\partial t}$, представляла бы собой скаляр, т. е. величину инвариантную.

Переписывая (11b) в виде

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial H_{4i}}{\partial x_i} = 4\pi j_4,$$

мы можем тотчас же заключить, что, во-первых, левую сторону этого уравнения следует дополнить членом $\frac{\partial H_{44}}{\partial x_4}$ и что далее к исправленному таким образом уравнению следует присоединить еще три уравнения того же вида

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_{ki}}{\partial x_i} = 4\pi j_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Отсюда между прочим сразу же следует антисимметричность тензора H_{ki} . Что же касается возможности представления его в виде

$$H_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i},$$

то оно непосредственно вытекает из уравнений (11a), которые являются частным случаем предыдущих при $k=4$ и независимости поля от времени (т. е. $\frac{\partial}{\partial x_4} = 0$).

§ 3. Вариационная теория поступательного движения электрона в заданном электромагнитном поле. В § 5 предыдущей главы было показано, что общие уравнения электромагнитного поля могут быть получены как следствие вариационного уравнения Шварцшильда:

$$\delta S \equiv \delta \int \left[\sum_k A_k j_k - \frac{1}{16\pi} \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right)^2 \right] d\Omega = 0,$$

если считать в этом последнем четырехмерный потенциал (A_k) неизвестной функцией координат и времени, а компоненты тока (j_k) известными величинами. Из того же вариационного принципа можно вывести и уравнения движения электрона в заданном внешнем электромагнитном поле, характеризуемом компонентами потенциала A_k , если считать эти компоненты известными функциями координат (и времени), а плотность тока (j_k) — искомой функцией, соответствующей движению электрона. По

этом $\delta A_k = 0$ во всем пространстве (и для всякого времени), так что вышенаписанное вариационное уравнение обращается в

$$\delta S^* = 0, \quad (12)$$

где

$$S^* = \int \sum_k A_k j_k d\Omega,$$

или, опуская множитель ic , несущественный в этом случае,

$$S^* = \int \int \sum_k A_k j_k dV dt. \quad (12a)$$

Если рассматривать электрон как бесконечно малый (пространственно), то при интегрировании по объему множитель $A_k dt$ можно считать постоянным. Интеграл $\int j_k dV$ мы уже находили выше, он равен $\frac{e}{c} v_k = \frac{e}{c} \frac{dx_k}{dt}$.

Таким образом, получаем

$$S^* = \frac{e}{c} \int \sum_k A_k dx_k = \frac{e}{c} \int \sum_k A_k \frac{dx_k}{d\tau} d\tau, \quad (12b)$$

причем собственное время электрона служит независимым переменным. Интегрирование производится по любому отрезку мировой линии электрона; однако эту линию следует выбирать так, чтобы при бесконечно малом изменении ее вида (характера движения) интеграл (12b) оставался в первом приближении постоянным. Другими словами, координаты электрона x_k ($k=1, 2, 3, 4$) должны определяться как функции параметра τ так, чтобы при бесконечно малой вариации этих функций первая вариация (12b) исчезала. Следует заметить при этом, что координаты x_k не совсем независимы друг от друга, но должны тождественно (для всех τ) удовлетворять уравнению

$$\sum_k \left(\frac{dx_k}{d\tau} \right)^2 = -c^2. \quad (12c)$$

Если бы мы не производили объемного интегрирования в (12a), то мы должны были бы заменить это уравнение эквивалентным ему дифференциальным уравнением

$$\sum \frac{\partial i_k}{\partial x_k} = 0,$$

выражающим закон сохранения электричества.

Как уже было упомянуто, компоненты четырехмерного потенциала являются известными функциями четырех координат x_k . Их значения в (12b) относятся к пространственно-временной точке, лежащей на мировой линии электрона. При вариирова-

нии этой линии они должны следовательно претерпевать изменение

$$\delta A_k = \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \delta x_l,$$

так же как и при перемещении электрона по определенной мировой линии; в последнем случае мы имеем

$$\frac{dA_k}{d\tau} = \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \frac{dx_l}{d\tau}.$$

Вариация (12b) равна

$$\delta S^* = \frac{e}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_k \left(\delta A_k \frac{dx_k}{d\tau} + A_k \delta \frac{dx_k}{d\tau} \right) d\tau$$

или, вследствие коммутативности операций δ и d ,

$$\delta S^* = \frac{e}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_k \left(\delta A_k \frac{dx_k}{d\tau} + A_k \frac{d\delta x_k}{d\tau} \right) d\tau.$$

Но

$$\sum_k \delta A_k \frac{dx_k}{d\tau} = \sum_k \sum_l \delta x_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \frac{dx_k}{d\tau}$$

и

$$\sum_k A_k \frac{d\delta x_k}{d\tau} = \sum_k \frac{d}{d\tau} (A_k \delta x_k) - \sum_k \delta x_k \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \frac{dx_l}{d\tau}.$$

Меняя местами индексы k и l в двойной сумме, получаем

$$\sum_k A_k \frac{d\delta x_k}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\sum_k A_k \delta x_k \right) - \sum_k \sum_l \delta x_l \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau}$$

и, следовательно,

$$\delta S^* = \left[\sum_k \frac{e}{c} A_k \delta x_k \right]_{\tau_1}^{\tau_2} + \frac{e}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_k \sum_l \delta x_l \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right) \frac{dx_k}{d\tau} d\tau.$$

Полагая здесь

$$\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right) = H_{kl}; \quad \frac{e}{c} \sum_k H_{kl} \frac{dx_k}{d\tau} = F_l, \quad (12d)$$

получаем

$$\delta S^* = \int \sum F_l \delta x_l d\tau + \frac{e}{c} \left[\sum_k A_k dx_k \right]_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (13)$$

Если бы вариации четырех координат δx_k были независимы друг от друга, то условие исчезновения δS^* сводилось бы к равенствам

$$F_l = 0 \text{ и } \delta x_l^{(1)} = \delta x_l^{(2)} = 0.$$

В действительности, однако, x_k связаны между собою соотношением (12с).

Это обстоятельство можно учесть следующим образом, согласно известному методу Лагранжа. Прежде всего образуем вариацию (12с). При этом получается уравнение

$$\sum_l \frac{dx_l}{d\tau} \delta \frac{dx_l}{d\tau} = \sum_l \frac{dx_l}{d\tau} \frac{d\delta x_l}{d\tau} = 0.$$

Умножим это уравнение на неопределенный множитель μ , могущий быть любой функцией от τ , и прибавим к подынтегральной функции в выражение (13)

$$\sum_l \mu \frac{dx_l}{d\tau} \frac{d\delta x_l}{d\tau} = \sum_l \frac{d}{d\tau} \left(\mu \frac{dx_l}{d\tau} \delta x_l \right) - \sum_l \delta x_l \frac{d}{d\tau} \left(\mu \frac{dx_l}{d\tau} \right).$$

Тогда вместо (13) получится

$$\begin{aligned} \delta S^* = & \int \sum_l \delta x_l \left[F_l - \frac{d}{d\tau} \left(\mu \frac{dx_l}{d\tau} \right) \right] d\tau + \\ & + \left[\sum_l \left(\frac{e}{c} A_l + \mu \frac{dx_l}{d\tau} \right) \delta x_l \right]_{\tau_1}^{\tau_2}. \end{aligned} \quad (13a)$$

Граничные условия для x_l и $\frac{dx_l}{d\tau}$ всегда можно подобрать таким образом, чтобы второй член в (13а) обращался в 0. Итак, если

$$\left[\sum_l \left(\frac{e}{c} A_l + \mu \frac{dx_l}{d\tau} \right) \delta x_l \right]_{\tau_1}^{\tau_2} = 0, \quad (13b)$$

то необходимое и достаточное условие исчезновения δS^* сводится к четырем дифференциальным уравнениям

$$F_l - \frac{d}{d\tau} \left(\mu \frac{dx_l}{d\tau} \right) = 0. \quad (14)$$

Произвольность функции $\mu(\tau)$ можно использовать для того, чтобы, несмотря на соотношение (12с) между четырьмя вариациями δx_l считать их независимыми произвольными величинами (в этом и заключается смысл метода Лагранжа). Окончательно функция μ должна быть определена таким образом, чтобы вытекающие из (14) выражения для $\frac{dx_l}{d\tau}$ на самом деле удовле-

творяли бы условию (12с). Для этой цели умножим (14) на $\frac{dx_l}{d\tau}$ и просуммируем по l . Тогда

$$\sum_l F_l \frac{dx_l}{d\tau} - \mu \sum_l \frac{dx_l}{d\tau} \frac{d^2 x_l}{d\tau^2} - \frac{d\mu}{d\tau} \sum_l \left(\frac{dx_l}{d\tau} \right)^2 = \quad (14a)$$

Первая сумма должна тождественно обращаться в 0, согласно определению величин F_i по формуле (12d); вторая сумма также равна нулю, а третья сумма постоянной величине $-c^2$.

Отсюда следует

$$\frac{d\mu}{d\tau} c^2 = 0, \text{ т. е. } \mu = \text{const.}$$

Дифференциальное уравнение (14) при $\mu = m_0$ совпадает с вышеприведенным уравнением движения (8); таким образом из вариационного принципа Шварцшильда мы получили эйнштейново уравнение движения вместе с выражением (12d) для четырехмерной электромагнитной силы F_i , которые мы прежде находили совсем другим путем.

Мы видим, что обе группы основных электродинамических уравнений, с одной стороны, определяющих электромагнитное поле движущегося электрона, с другой стороны, движение электрона в заданном внешнем электромагнитном поле, могут быть сведены в одно единственное уравнение, а именно вариационное уравнение

$$\delta S = 0.$$

Следует помнить, однако, что это сведение не является логически безукоризненным, так как в одном случае (при выводе уравнений поля) мы оперируем с полным полем, а в другом (при выводе уравнений движения) — с внешним полем. Мы еще вернемся к этому вопросу в конце этой книги.

§ 4. Трехмерная форма вариационного принципа. Вариационное уравнение $\delta S^* = 0$, с добавочным условием

$$\sum_k \left(\frac{dx_k}{d\tau} \right)^2 = -c^2,$$

можно заменить аналогичным уравнением, в котором роль независимого переменного (т. е. переменной интегрирования) играет не собственное время, а обыкновенное время t , причем пространственные координаты x_1, x_2, x_3 трактуются как функции последнего. Выше приведенное добавочное условие при этом, естественно, отпадает. Его оказывается однако необходимым заменить введением дополнительного члена в подинтегральной функции выражения (12b) для S^* .

Переход от τ к t , поскольку он касается интеграла (12b), представляется совсем простым: а именно мы полагаем

$$S^* = \frac{e}{c} \int \sum_k A_k dx_k = \int \sum_k \frac{e}{c} A_k \frac{dx_k}{dt} dt,$$

т. е. в обычной трехмерной форме

$$S^* = \int \left(\frac{e\mathbf{v}}{c} \mathbf{A} - e\varphi \right) dt.$$

Легко видеть, однако, что приравнивание нулю вариации этой функции приводит не к уравнению движения электрона, но к уравнению $\mathbf{f} = 0$ для действующей на электрон внешней силы

$$\mathbf{f} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right)$$

Мы покажем сейчас, что уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \quad (15)$$

получается не из интеграла (12b), но из интеграла

$$V = \int \left(-m_0 c^2 + \frac{e}{c} \sum_k A_k \frac{dx_k}{d\tau} \right) d\tau. \quad (15a)$$

Поскольку мы принимаем за независимое переменное τ , т. е. полагаем $\delta d\tau = 0$, вариационное уравнение $\delta V = 0$ является эквивалентным $\delta S^* = 0$. Но если ввести в качестве аргумента вместо τ обычное время t , то $\delta t = 0$ и $\delta dt = 0$, но

$$\delta d\tau = \delta dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \neq 0,$$

так что уравнение $\delta V = 0$ в этом случае существенно отличается от $\delta S^* = 0$.

При этом интеграл (15a) принимает вид

$$V = \int \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A} - e\varphi \right) dt \quad (15b)$$

и отличается от S^* добавочным членом $-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, который и дает левую часть уравнения движения (15).

Предельные условия могут быть выбраны весьма просто (вследствие независимости вариаций $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$). Допустим, что начальная и конечная точки пути электрона определены в пространстве и времени; тогда вариация его радиуса-вектора $\delta \mathbf{r}$ должна обращаться в нуль на пределах интеграла (15b) ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, при $i = t_1$, и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$, при $t = t_2$). Для нахождения вариации (15b) воспользуемся следующими формулами:

$$\delta \varphi = \delta \mathbf{r} \nabla \varphi; \quad \delta \mathbf{A} = (\delta \mathbf{r} \nabla) \mathbf{A}; \quad \frac{d}{dt} \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \nabla \right) \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A},$$

далее

$$\begin{aligned} \delta (\mathbf{v} \mathbf{A}) &= \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{A} + \mathbf{v} (\delta \mathbf{r} \nabla) \mathbf{A} = \left(\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \right) \mathbf{A} + \mathbf{v} (\delta \mathbf{r} \nabla) \mathbf{A} = \\ &= \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r} \mathbf{A}) - \delta \mathbf{r} \frac{d}{dt} \mathbf{A} + \delta \mathbf{r} \nabla (\mathbf{A} \mathbf{v}) \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned}
 -m_0 c^2 \delta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= \frac{m_0 \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \mathbf{v} \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} = \\
 &= \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r} \cdot m \mathbf{v}) - \delta \mathbf{r} \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \delta V = \left[\delta \mathbf{r} \left(m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]_1^2 + \int \delta \mathbf{r} \left\{ -\frac{d}{dt} \left(m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \right. \\
 \left. + \nabla \left(\frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A} - e \varphi \right) \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Вследствие произвольности вариации $\delta \mathbf{r}$ внутри пределов интегрирования и исчезновения ее на этих пределах, необходимым и достаточным условием обращения в нуль δV является дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(m \mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \nabla \left(e \frac{\mathbf{v}}{c} \mathbf{A} - e \varphi \right), \quad (15c)$$

которое уже было выведено нами в § 2 [формула (9a)] путем преобразования исходных уравнений движения (8).

§ 5. Функция действия и дифференциальное уравнение Гамильтона-Якоби. Вариационное уравнение $\delta V = 0$ дает уточненную форму Гамильтонова принципа классической механики для случая одного электрона; интеграл V является так называемой функцией действия, подинтегральная функция

$$L^* = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A} - e \varphi \quad (16)$$

называется Лагранжевой функцией. Последняя определяется как разность между кинетической и потенциальной энергией. Для предельного случая весьма малых скоростей мы получаем

$$-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2,$$

и, следовательно,

$$L^* + m_0 c^2 \cong L \cong \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A} - e \varphi. \quad (16a)$$

При $\mathbf{A} = 0$, т. е. при отсутствии внешнего магнитного поля, L полностью соответствует обычному определению функции Лагранжа. Если же существует магнитное поле, то величину $\frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}$ следует или прибавить к кинетической энергии, или вычесть из потенциальной. Другими словами, если считать (взаимную) магнитную энергию потенциальной (как, например, мы это

делали в первой части), то она равна $-\frac{e}{c} \mathbf{vA}$; если же рассматривать ее как кинетическую, то надо полагать ее равной $+\frac{e}{c} \mathbf{vA}$. На самом деле, как мы сейчас увидим, „магнитной энергии“ не существует вовсе, и полная энергия складывается из кинетической (собственной) mc^2 и потенциальной $e\varphi$.

Как известно, производные Лангранжевой функции по составляющим скорости:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k} \quad \left(\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) \quad (17)$$

называются „обобщенными импульсами“.

В рассматриваемом случае эти импульсы равны

$$p_k = m v_k + \frac{e}{c} A_k,$$

т. е. совпадают с компонентами полного количества движения

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (17a)$$

Заметим, что обеим Лангранжевым функциям L и L^* соответствуют одни и те же импульсы.

Выраженная через координаты и импульсы функция

$$H = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial L}{\partial v_k} v_k - L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L \quad (18)$$

называется функцией Гамильтона. В случае Лагранжевой функции (16a) она равна

$$H = \frac{1}{2} m_0 v^2 + e\varphi, \quad (18a)$$

т. е. сумме кинетической и электрической энергии, причем магнитная энергия не входит в выражение для H . Это соответствует тому факту, что магнитная сила не производит работы. Функция, стоящая в правой части (18a), еще не является Гамильтоновой функцией, так как последняя должна, как уже было только что указано, выражаться не через компоненты скорости, но через „импульсы“. В рассматриваемом приближении эти импульсы равны

$$p_k = m_0 v_k + \frac{e}{c} A_k. \quad (19)$$

Таким образом, Гамильтонова функция (18a) в присутствии магнитного поля принимает вид

$$H = \frac{1}{2m_0} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (19a)$$

Но это выражение справедливо только для малых скоростей электрона ($\frac{v}{c} \ll 1$).

Лагранжевой функции (16) соответствует Гамильтонова функция $H^* = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) - L^*$, равная

$$H^* = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi = mc^2 + e\varphi = -ic\mathbf{p}_4^*. \quad (19b)$$

Она отличается от четвертой компоненты четырехмерного вектора \mathbf{p} только множителем $\frac{i}{c}$. Обычно из нее вычитают „покоящуюся энергию“ электрона $m_0 c^2$ и определяют формулой

$$H^* - m_0 c^2 \equiv H = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) + e\varphi, \quad (19c)$$

т. е. так же, как и в классической механике, как сумму кинетической энергии $m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$ (в предельном случае $\frac{v}{c} \ll 1$ она совпадает с $\frac{1}{2} m_0 v^2$) и электрической энергии $e\varphi$. Чтобы выразить H^* как функцию импульсов $p_k = G_k^*$, мы должны воспользоваться уравнением (17a).

Из этого уравнения следует

$$\frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{c^2 m_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - c^2 m_0^2 = c^2 m^2 - c^2 m_0^2,$$

или

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}. \quad (20)$$

Таким образом, согласно (19b),

$$H^* = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\varphi. \quad (20a)$$

Дифференцируя H^* по одной из компонент вектора \mathbf{p} , получаем

$$\frac{\partial H^*}{\partial p_k} = \frac{c \left(p_k - \frac{e}{c} A_k \right)}{\sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}} = \frac{cm v_k}{cm} = v_k = \frac{dx_k}{dt},$$

а дифференцируя по одной из координат (при $\mathbf{p} = \text{const}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^*}{\partial x_k} &= \frac{e \partial \varphi}{dx_k} - \frac{c \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_k}}{\sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}} = \frac{e \partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{e \mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_k} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{e \mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} - e \varphi \right) = - \frac{dp_k}{dt} \end{aligned}$$

[согласно (20)].

Уравнения

$$\frac{dp_k}{dt} = - \left(\frac{\partial H^*}{\partial x_k} \right)_p, \quad \frac{dx_k}{dt} = \left(\frac{\partial H^*}{\partial p_k} \right)_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

называются обычно каноническими уравнениями или уравнениями Гамильтона.

Заметим, что формула (20a) непосредственно следует из соотношений $p_k - \frac{e}{c} A_k = m_0 \frac{dx_k}{d\tau}$ в связи с $\sum_{k=1}^4 \left(\frac{dx_k}{d\tau} \right)^2 = -c^2$ и (19b)

Выражение $L^* dt$, стоящее под знаком интеграла в формуле (15b), может быть переписано в виде

$$L^* dt = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dt - H^* dt,$$

т. е.

$$L^* dt = \sum_{k=1}^3 p_k dx_k - H^* dt = \sum_{k=1}^4 p_k dx_k, \quad (21)$$

где $p_4 = \frac{i}{c} H^*$. Мы получаем, таким образом,

$$V = \int_{x'}^{x''} \sum_{k=1}^4 p_k dx_k. \quad (21a)$$

Пределы интегрирования x' (x_1', x_2', x_3', x_4') и x'' ($x_1'', x_2'', x_3'', x_4''$) соответствуют определенному начальному и конечному положению электрона в пространстве и времени. Промежуточные положения (в четырехмерном пространстве) могут быть определены, как мы знаем, из вариационного уравнения $\delta V = 0$, в связи с граничными условиями $\delta x' = \delta x'' = 0$.

Формула (21a) показывает, что для этого во всех промежуточных положениях электрона должны иметь место равенства

$$p_k = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad (22)$$

где Φ — некоторая функция от четырех координат x .

Мы получаем при этом

$$V = \int_{x'}^{x''} d\Phi = \Phi(x'') - \Phi(x')$$

и, следовательно (в виду условий $\delta x' = \delta x'' = 0$), $\delta V = 0$.

Физический смысл равенств (22) раскрывается наиболее простым и наглядным образом, если ввести представление о „континууме экземпляров“ рассматриваемой частицы (электрона), т. е. представить себе последнюю в виде бесчисленного множества экземпляров, распределенных непрерывным образом в пространстве и во времени. При этом вместо одной мировой линии мы получим систему мировых линий, подобную тем системам линий, которые служат для графического изображения векторных полей в трехмерном пространстве (например, электрических или магнитных силовых линий). Эти мировые линии могут также рассматриваться как графическое изображение некоторого (четырёхмерного) векторного поля, а именно поля вектора с компонентами p_k , т. е. полного количества движения электрона.

С этой точки зрения, равенства (22) могут быть интерпретированы как выражение того обстоятельства, что рассматриваемое векторное поле должно иметь потенциальный характер (подобно электростатическому полю в трехмерном пространстве). Функция Φ играет при этом роль (скалярного) потенциала по отношению к вектору полного количества движения (напомним, что четвертой компонентой последнего является энергия).

Само собой разумеется, что этим требованием потенциального характера поля вектора p_k вопрос об определении вида мировых линий—и в частности той мировой линии, которая проходит через две заданные точки x' и x'' —еще не решается. Оно позволяет лишь освободиться от специальных условий движения, связанных с тем или иным специальным выбором начального и конечного положения (в пространстве и времени). Что же касается общих условий движения, то они сводятся к уравнению

$$\sum_{k=1}^4 \left(p_k - \frac{e}{c} A_k \right)^2 = -m_0^2 c^2,$$

которое уже рассматривалось нами выше и которое в силу формул (22) сводится к следующему дифференциальному уравнению в частных производных для функции Φ :

$$\sum_{k=1}^4 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{e}{c} A_k \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0. \quad (22a)$$

При интегрировании этого уравнения вводятся произвольные постоянные, в количестве, равном числу переменных, причем

одна из них является аддитивной вследствие того, что уравнение (22а) не содержит самой функции Φ , а лишь ее производные. Обозначая эти постоянные через α ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$), мы получаем, таким образом, для так называемого полного интеграла уравнения (22а) выражение вида

$$\Phi(x, \alpha) = \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \alpha_4. \quad (23)$$

Изменение параметров α соответствует изменению формы и положения мировой линии, в связи с изменением тех точек x' и x'' , через которые она проходит (без нарушения закона движения!). Бесконечно малое изменение этого рода мы будем обозначать символом δ („вариация“), в отличие от символа d (дифференциал) или $\frac{d}{d\tau}$ (производная по собственному времени), который относится к определенной мировой линии.

Составим вариацию функции Φ , т. е. $\delta\Phi = \sum_{l=1}^4 \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_l} \delta\alpha_l$ и возь-

мем дифференциал ее или производную по τ .

Мы получим при этом

$$\frac{d}{d\tau} \delta\Phi = \sum_{\kappa} \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \delta\Phi = \sum_{\kappa} \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \sum_l \delta\alpha_l \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_l},$$

или, меняя порядок дифференцирования по x_{κ} и по α_l , и принимая во внимание равенства (22):

$$\frac{d}{d\tau} \delta\Phi = \sum_{\kappa=1}^4 \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \sum_{l=1}^4 \frac{\partial p_{\kappa}}{\partial\alpha_l} \delta\alpha_l = \sum_{\kappa=1}^4 \left(\delta p_{\kappa} \right) \frac{dx_{\kappa}}{d\tau}.$$

Так как $p_{\kappa} = m_0 \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} + \frac{e}{c} A_{\kappa}$ и так как далее слагающие потенциала A_{κ} зависят только от координат x и не содержат параметров α , то

$$\delta p_{\kappa} = m_0 \delta \frac{dx_{\kappa}}{d\tau}.$$

Мы имеем, таким образом,

$$\frac{d}{d\tau} \delta\Phi = m_0 \sum_{\kappa=1}^4 \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \delta \frac{dx_{\kappa}}{d\tau} = \frac{m_0}{2} \sum_{\kappa=1}^4 \delta \left(\frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \right)^2 = \frac{m_0}{2} \delta \sum_{\kappa=1}^4 \left(\frac{dx_{\kappa}}{d\tau} \right)^2$$

т. е.

$$\frac{d}{d\tau} \delta\Phi = 0.$$

Это равенство показывает, что любая вариация функции Φ представляет собой постоянную или „интеграл“ движения. Трём

независимым вариациям, получаемым при дифференцировании Φ по одному из трех параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, соответствуют три независимых интеграла движения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_l} = \beta_l = \text{const.} \quad (l = 1, 2, 3) \quad (23a)$$

Что касается четвертого равенства $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_4} = \beta_4 (= 1)$, то оно является тривиальным и никакого значения не имеет.

Исключая четыре „импульса“ p_1, p_2, p_3, p_4 из семи уравнений (22) и (23a), мы получаем три соотношения между четырьмя координатами x_1, x_2, x_3, x_4 , содержащие шесть произвольных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Эти три соотношения определяют некоторую „мировую линию“ частицы.

Путем надлежащего подбора значений параметров α, β эту линию можно заставить пройти через любые две точки трехмерного пространства x'_1, x'_2, x'_3 и x''_1, x''_2, x''_3 при заданных граничных значениях времени t' и t'' . Изменять совместно все четыре координаты каждой из граничных „мировых точек“ мы, очевидно, не в праве, так как располагаем всего лишь шестью параметрами. Поэтому две из восьми координат этих точек (не обязательно четвертые координаты, т. е. времена!) должны сохранять фиксированные значения. В частности, например, мы, очевидно, не можем положить $t' = t''$.

Если силовое поле, определяемое компонентами потенциала A_μ , не зависит от одной из координат, то начальное значение этой координаты не играет роли и может служить в качестве дополнительной (седьмой) постоянной типа β (но отнюдь не типа α).

Если подставить функцию (23) в равенства (22) и, рассматривая эти равенства как уравнения по отношению к параметрам α , выразить последние через координаты x и импульсы p , то мы получим четыре так называемых „первых“ интегралов движения

$$\alpha(x, p) = \text{const.}$$

[Сюда относится в частности интеграл энергии в том случае, когда движение происходит в постоянном поле сил (см. ниже)]. Параметры β , выраженные в функции координат и импульсов, т. е. функции

$$\beta(x, p) = \text{const.}$$

называются „вторыми“ интегралами движения (эни, вообще говоря, определяют его „фазу“, например, начальный момент t_0).

Изложенная теория представляет собой обобщение и усовершенствование (в смысле учета требуемой теорией относительности зависимости массы от скорости) теории, которая была развита сто лет тому назад Гамильтоном на основе ньютоновского закона движения, а затем дополнена Якоби. В обычном

пространственно-временном представлении уравнения (22) и (22а) принимают следующий вид:

$$\mathbf{p} = \nabla \Phi, \quad H = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (24)$$

$$\left(\nabla \Phi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + e\varphi \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0. \quad (24a)$$

Последнее уравнение может быть записано в форме

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial t} = e\varphi + c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\nabla \Phi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}, \quad (25)$$

внешне сходной с вторым уравнением (24). Это внешне сходство переходит в фактическое тождество в том случае, если „Гамильтонову функцию“, т. е. энергию H , определить формулой

$$H = e\varphi + c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\nabla \Phi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} \quad (25a)$$

в согласии с (20а). При этом условии уравнение (24а) становится излишним, заменяясь вторым уравнением (24а) в форме (24b). Именно это уравнение, или вернее то приближенное уравнение, в которое оно превращается в предельном случае $v \ll c$, и называется обычно уравнением Гамильтона-Якоби. Принимая во внимание, что в этом случае $\left(\nabla \Phi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = m_0^2 v^2 \ll m_0^2 c^2$, получаем с точностью до величины второго порядка малости относительно $\frac{v}{c}$:

$$\sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\nabla \Phi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} \cong m_0 c \left[1 + \frac{1}{2m_0^2 c^2} \left(\nabla \Phi - \frac{e}{c} \right)^2 \right],$$

т. е., следовательно,

$$- \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = m_0 c^2 + e\varphi + \frac{1}{2m_0} \left(\nabla \Phi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2. \quad (26)$$

Постоянный член $m_0 c^2$ в этом уравнении может быть устранен если положить $\Phi = \Phi^* - m_0 c^2 t$.

Мы получаем при этом уравнение

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial t} = e\varphi + \frac{1}{2m_0} \left(\nabla \Phi^* - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = H, \quad (26a)$$

которое превращается в обычное уравнение Гамильтона-Якоби в частном случае $A = 0$.

Если силовое поле, в котором движется электрон, не зависит от времени, то в уравнении (24b) можно положить

$$\Phi = \Phi_0(x, y, z) - w^*t. \quad (27)$$

При этом оно сводится внешним образом к обычному уравнению сохранения энергии $H^* = W^*$. В действительности, однако, оно превращается в дифференциальное уравнение с частными производными, служащее для определения функции Φ_c .

Мы не будем останавливаться на более подробном рассмотрении этого вопроса. Заметим лишь, что функция $\Phi_0(x, y, z)$ обычно называется „механическим действием“; часто впрочем это название присваивается функции Φ .

§ 6. Простейшие примеры движения свободного электрона. Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров движения электрона, определяемого релятивистским уравнением движения. В качестве первого примера мы рассмотрим простейший случай движения электрона в электромагнитном поле постоянном в пространстве и времени.

При этом, согласно (8),

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \mathbf{r} = \kappa^2 \mathfrak{H} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (\kappa^2 \mathfrak{H} \mathbf{r}),$$

откуда следует

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{r} = \mathbf{v} = \kappa^2 \mathfrak{H} \mathbf{r} + \mathbf{a}, \quad (28)$$

где \mathbf{a} — постоянный четырехмерный вектор.

Умножая скалярно (28) на \mathbf{r} , мы получаем, в виду того, что вследствие антисимметричного характера тензора ${}^2\mathfrak{H}$, произведение $({}^2\mathfrak{H} \mathbf{r}) \mathbf{r}$ обращается в 0

$$\mathbf{r} \frac{d}{d\tau} \mathbf{r} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} r^2 = \mathbf{a} \mathbf{r}. \quad (28a)$$

В частном случае, когда произведение $\mathbf{a} \mathbf{r}$ равно нулю, $r^2 = \text{const}$, т. е.

$$r^2 - c^2 t^2 = \text{const}. \quad (29)$$

При этом \mathbf{r} и t должны удовлетворять еще условию

$$\mathbf{a} \mathbf{r} = a_t \cdot t, \quad (29a)$$

где \mathbf{a} — пространственная, а $\frac{i}{c} a_t$ — временная проекция четырехмерного вектора \mathbf{a} . Это уравнение означает, что проекция скорости электрона на направление \mathbf{a} остается постоянной $\left(= \frac{a_t}{|\mathbf{a}|} \right)$.

Различные виды движения можно проще всего систематизировать с помощью инвариантов $H^2 - E^2$ и \mathbf{HE} . Очевидно, мы должны различать четыре случая, соответствующие $H^2 - E^2 \geq 0$,

при $HE=0$ или $HE \neq 0$ (случай $H=E$ для постоянного поля можно оставить без внимания).

Первый случай. $E^2 - H^2 > 0$, $HE=0$. С помощью соответствующим образом выбранного преобразования Лоренца можно магнитное поле свести к нулю. Новая система S' должна при этом двигаться (согласно § 2 главы IX) со скоростью, определяемой формулой $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}$. Так как, далее, \mathbf{H} перпендикулярно к \mathbf{E} , то эта добавочная скорость должна лежать в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{E} и \mathbf{H} и иметь значение $c \cdot \frac{H}{E}$. Таким образом нам остается только рассмотреть движение электрона в постоянном электрическом поле E' .

Для простоты мы будем опускать значки, указывающие на „движущуюся“ координатную систему S' . Пространственная проекция уравнения (28) обращается при $H=0$ в

$$m\mathbf{v} = eE\mathbf{t} + \mathbf{a}. \quad (30)$$

Если $\mathbf{a}=0$, то мы имеем, согласно (29), $\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - c^2t = 0$, т. е. $rv = c^2t$ и, следовательно, так как $mrv = eEr t$,

$$mc^2 = \frac{m_0 c^3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = eEr.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения энергии $mc^2 + e\varphi = \text{const}$.

Если положить $r = x_1 - x_1^0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, то, согласно (29), для x_1 получается уравнение

$$(x_1 - x_1^0)^2 - c^2t^2 = b^2,$$

где b^2 существенно положительная постоянная (так как в противном случае r будет мнимым при достаточно малых значениях t). Определяемое этим уравнением движение называется гиперболическим, так как графически оно представляется веткой гиперболы. Оно соответствует равномерно-ускоренному движению в обычной механике, например, движению камня, брошенного вверх (в отрицательном направлении оси X_1) под действием силы тяжести. Разница заключается только в зависимости массы от скорости. При возрастании t от $-\infty$ до $t=0$, x_1 убывает от $+\infty$ до $(x_1^0 + b)$ и затем снова возрастает до $+\infty$. При удалении электрона его скорость асимптотически приближается к предельному значению c . Вблизи точки поворота ($x = x_1^0 + b$) его движение приближается к обычному равномерно ускоренному движению. Действительно, при $ct \ll b$

$$x_1 - x_1^0 = \sqrt{b^2 + c^2t^2} \cong b \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{ct}{b} \right)^2 \right] = b + \frac{1}{2} \omega t^2,$$

где $\omega = \frac{c^2}{b}$ означает ускорение. Так как, очевидно, ускорение

$$\omega = \frac{eE}{m_0}, \text{ то для параметра } b \text{ получаем значение } b = \frac{m_0 c^2}{eE}.$$

Если вектор \mathbf{a} отличен от нуля и имеет направление, отличное от \mathbf{E} , то получается несколько более сложное движение, которое мы здесь рассматривать не будем.

Второй случай. $H^2 - E^2 > 0$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$. В этом случае можно устранить электрическое поле, вводя постоянную дополнительную скорость, равную $c \cdot \frac{E}{H}$. Таким образом, остается рассмотреть движение в однородном магнитном поле. Уравнение (28), которое в этом случае приводится к виду

$$m \mathbf{v} = \frac{e}{c} \mathbf{r} \times \mathbf{H},$$

показывает, что (при $\mathbf{a} = 0$) скорость электрона всегда остается перпендикулярной к радиусу-вектору и к напряженности магнитного поля. Следовательно, электрон должен двигаться по кругу, лежащему в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} , и с центром в точке $r = 0$.

Если обозначим угловую скорость через \mathbf{O} , то $\mathbf{v} = \mathbf{O} \times \mathbf{r}$, т. е.

$$\mathbf{O} = -\frac{e}{cm} \mathbf{H} = -\chi \mathbf{H}. \quad (31)$$

Эта скорость вдвое больше скорости прецессии, возникающей под действием поля \mathbf{H} при движении электрона вокруг некоторого центра притяжения (ларморова прецессия, глава VII, § 9). Если вектор \mathbf{a} отличен от нуля, то вследствие постоянства скорости, а следовательно и массы, можно положить $\mathbf{a} = m \mathbf{v}_0$, откуда получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{O} \times \mathbf{r}.$$

Таким образом, наиболее общим типом движения электрона в постоянном магнитном поле является комбинация из рассмотренного выше движения по кругу и прямолинейного равномерного движения.

Третий и четвертый случаи. $\mathbf{H} \cdot \mathbf{E} \neq 0$. Электрическая и магнитная напряженности поля остаются отличными от нуля во всех инерциальных системах. Однако существует такая „каноническая“ система, в которой они параллельны друг другу. Если электрон движется в этом особом направлении, то он „не чувствует“ магнитного поля, и мы получаем уже разобранный раньше гиперболическое движение. Пока масса электрона остается постоянной—т. е. при малых скоростях—электрон движется, вообще говоря, по винтовой линии с постоянной скоростью вращения вокруг общего направления \mathbf{E} и \mathbf{H} с равномерно-возрастающей (или убывающей) скоростью $\left(\frac{e}{m_0} E t \right)$ в этом направлении.

При больших скоростях движение значительно усложняется.

Мы не будем анализировать его и удовлетворимся указанием на общее решение уравнения движения (28). Так как это уравнение, если рассматривать τ как аргумент, линейно, то легко определить \mathbf{r} как функцию собственного времени τ . Написанное в координатной форме уравнение (28) эквивалентно системе уравнений

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \chi \sum_i H_{ki} x_i + a_k, \quad (32)$$

которые, как известно, решаются формулами вида

$$x_k = \sum_{i=1}^4 \xi_{ki} e^{\alpha_i \tau} + a_k \tau, \quad (32a)$$

причем функции $\xi_{ki} e^{\alpha_i \tau}$ являются различными решениями однородной системы уравнений, которая получается из (32) при $\alpha = 0$. Коэффициенты α суть корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} H_{11} - \alpha & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} - \alpha & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} - \alpha & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} - \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} -\alpha & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & -\alpha & H_1 & -iE_2 \\ +H_2 & -H_1 & -\alpha & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & -\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

или, по вычислении детерминанта

$$\alpha^4 + (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) \alpha^2 - (\mathbf{E}\mathbf{H})^2 = 0. \quad (32b)$$

Корни этого уравнения простым образом выражаются через оба инварианта $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$. Действительные корни соответствуют „гиперболо-образному“, асимптотическому движению, обусловливаемому электрическим полем; мнимые — периодическому круговому движению, зависящему от магнитной силы.

Каждому корню α_i соответствует система решений, даваемых формулой $x_k = \xi_{ki} e^{\alpha_i \tau}$. Коэффициенты ξ_{ki} с точностью до произвольного множителя определяются из уравнений

$$\alpha_i \xi_{ki} = \chi \sum_{n=1}^4 H_{kn} \xi_{ni}.$$

Если мы захотим в качестве аргумента взять не собственное время, а обычное, то нам придется решить трансцендентное

уравнение ($x_4 = f(\tau)$), что возможно сделать только приближенно, при очень больших или очень малых значениях скорости.

В качестве второго примера, рассмотрим движение электрона в электромагнитном поле плоской световой волны, т. е. в волновой зоне любой электрической системы. В этом случае оба инварианта $H^2 - E^2$ и $\mathbf{E}\mathbf{H}$ равны нулю, почему он и представляется особенно простым с точки зрения теории относительности. Мы не будем делать никаких ограничивающих предположений о характере колебаний и будем характеризовать их фазовым множителем

$$\Phi(t') = \Phi\left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{c}\right), \quad (33)$$

где \mathbf{n} — нормаль к волне и t' — „фазовое время“, т. е. величина, определяющая фазу колебания волны в рассматриваемом месте. В частном случае гармонических колебаний этот фазовый множитель принимает вид

$$e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{c}\right)}$$

причем показатель

$$\nu \left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{c}\right)$$

может быть также представлен в форме

$$-\mathfrak{k}\mathbf{r} = -\sum_{i=1}^4 k_i x_i$$

здесь \mathfrak{k} означает рассматривавшийся в § 4 главы IX волновый вектор.

Интегрирование уравнений движения представляется весьма элементарным; именно, вследствие того, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{E}\mathbf{n} = 0,$$

мы имеем

$$\frac{d}{dt} m \mathbf{v} = e \mathbf{E} + e \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} = e \left(1 - \frac{v_n}{c}\right) \mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{n} (\mathbf{E}\mathbf{v}). \quad (33a)$$

Далее, путем внутреннего умножения на единичный вектор \mathbf{n} получаем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{n} m \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} (m v_n) = \frac{e}{c} \mathbf{E}\mathbf{v}.$$

Величина $e \mathbf{E}\mathbf{v}$ представляет работу электрической силы за единицу времени. Следовательно,

$$e \mathbf{E}\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (c^2 m),$$

согласно общему соотношению между энергией и массой. Окончательно имеем

$$mv_n = cm + \text{const.}$$

Если отсчитывать время от момента $t=0$, когда электрон находится в покое, то

$$mv_n = c(m - m_0) = \frac{T}{c}. \quad (34)$$

где

$$T = c^2(m - m_0) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

— кинетическая энергия электрона. Проекция механического количества движения электрона $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ на волновую нормаль оказывается, следовательно, существенной положительной величиной, пропорциональной кинетической энергии (сообщенной электрону волной).

Можно, следовательно, сказать, что электрон испытывает некоторого рода световое давление, под действием которого он приобретает скорость, параллельную световому лучу и равную

$$v_n = \frac{c(m - m_0)}{m} = c(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right).$$

Это соотношение между скоростью по нормали и полной скоростью может быть также написано следующим образом

$$\sqrt{1 - \beta^2} = 1 - \frac{v_n}{c}. \quad (34a)$$

По определению собственного времени τ , мы имеем $\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{d\tau}{dt}$; с другой стороны, по определению „фазового времени“ t'

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} \right) = 1 - \frac{v_n}{c}.$$

Таким образом, из (34a) следует, что t' и τ в рассматриваемом случае идентичны:

$$t' = t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} = \tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (35)$$

С помощью этой формулы уравнение (33a) можно привести к виду

$$\frac{d}{dt} \left(m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \right) = e\mathbf{E} \frac{dt'}{dt} + \mathbf{n} \frac{e}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})$$

или

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt'^2} = \frac{e}{m_0} \mathbf{E} + \mathbf{n} \frac{e}{m_0 c} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \right). \quad (36)$$

При проектировании этого уравнения на волновую плоскость и волновую нормаль, если принять для краткости $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{n}r_n$, получаем

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{e}{m_0} \mathbf{E}(t') \quad (36a)$$

и, следовательно, так как

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ и } \mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}}{dt'} = \mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

$$\frac{d^2 r_n}{dt'^2} = \frac{e}{m_0 c} \left(\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \right) = \frac{e}{m_0 c} \mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}. \quad (36b)$$

Полагая для краткости

$$\mathbf{E}^{(-1)} = \int_0^t \mathbf{E}(t') dt' \text{ и } \mathbf{E}^{(-2)} = \int_0^{t'} \mathbf{E}^{(-1)}(t') dt', \quad (37)$$

согласно (36a), имеем

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{e}{m_0} \mathbf{E}^{(-1)} \text{ и } \mathbf{r}' = \frac{e}{m_0} \mathbf{E}^{(-2)}. \quad (38)$$

Далее

$$\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{e}{m_0} \mathbf{E} \mathbf{E}^{(-1)} = \frac{e}{m_0} \mathbf{E}^{(-1)} \frac{d\mathbf{E}^{(-1)}}{dt'} = \frac{e}{2m_0} \frac{d}{dt'} (\mathbf{E}^{(-1)})^2$$

и, следовательно, согласно (36b)

$$r_n = \frac{e^2}{2m_0 c} \int_0^{t'} \mathbf{E}^{(-1)^2} dt'. \quad (38a)$$

Окончательно мы получаем следующее выражение для радиуса-вектора электрона

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m_0} \left[\mathbf{E}^{(-2)} + \mathbf{n} \frac{e}{2m_0 c} \int_0^{t'} \mathbf{E}^{(-1)^2} dt' \right]. \quad (38b)$$

Первый член представляет действие электрической поперечной силы, второй — ее совместное действие с магнитной силой, которое может рассматриваться как световое давление.

Формулой (38b) определяется зависимость радиуса-вектора от собственного или фазового времени. Чтобы представить \mathbf{r} как функцию обыкновенного времени, следует исключить t' из (38b) и из уравнения

$$t = t' + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} = t' + \frac{e^2}{2m_0^2 c^2} \int_0^{t'} \mathbf{E}^{(-1)^2} dt.$$

§ 7. Система электронов; теорема вириала и дефект массы. Общая проблема движения системы материальных частиц представляет уже в классической механике весьма большие трудности.

Можно сказать, что в классической механике просто и полностью разрешается только проблема движения двух материальных точек. Но уже знаменитая „проблема трех тел“ не имеет до сих пор полного решения. В механике теории относительности положение вещей еще хуже, так как здесь даже „проблема двух тел“ не может быть разрешена полностью. К сложностям, происходящим от переменного характера массы, присоединяются в этом случае еще более существенные осложнения, обусловливаемые запаздывающим характером электромагнитного дальнего действия.

Мы ограничимся здесь выяснением одного важного общего положения, относящегося к движению любого числа электронов, и рассмотрением частного случая проблемы двух тел, который примыкает к рассмотренным выше простым проблемам.

Представим себе некоторое число заряженных частиц, частью положительных, частью отрицательных, образующих замкнутую систему, т. е. движущихся под действием сил взаимодействия (при отсутствии каких бы то ни было „внешних“ сил), причем так, что они всегда остаются на конечных расстояниях друг от друга. Разумеется, при этом силы притяжения между частицами разного знака должны превосходить силы отталкивания, действующие между одноименно заряженными частицами.

Отвлечемся пока от упомянутых выше осложнений, возникающих в релятивистской механике. Ошибка при этом не будет слишком велика, пока скорость электронов мала по сравнению со скоростью света и расстояния между ними малы сравнительно с длиной волны излучаемого света. Соответственно этому мы будем считать только с электростатическими силами.

Взаимная потенциальная энергия нашей системы, согласно § 1 главы VII, равна

$$U = \sum_{\alpha < \beta} \sum_{\alpha\beta} \frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{R_{\alpha\beta}}.$$

При этом уравнения движения одного электрона (в рассматриваемом нами приближении) имеет вид

$$m^{(\alpha)} \frac{d^2 x_k^{(\alpha)}}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial x_k^{(\alpha)}} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (39)$$

Для простоты мы опустим значки α и k и суммирование по ним будем просто обозначать символом \sum . Из уравнения (39) при умножении на x (т. е. $x_k^{(\alpha)}$) следует,

$$m x \frac{d^2 x}{dt^2} = - x \frac{\partial U}{\partial x},$$

или после образования левой части и суммирования

$$\frac{d}{dt} \left(\sum m x \frac{dx}{dt} \right) - \sum m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = - \sum x \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (39a)$$

Сумма $\sum m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ равна удвоенной кинетической энергии всей системы (2Т). Далее легко показать, что сумма $\sum \frac{\partial U}{\partial x} x$ равна просто потенциальной энергии со знаком минус. Действительно, если складывать попарно члены, выражающие взаимодействие двух электронов (α) и (β), принимая во внимание, что

$$R_{\alpha\beta}^2 = \sum_{k=1}^3 (x_k^\alpha - x_k^\beta)^2,$$

то

$$\begin{aligned} e_\alpha e_\beta \sum_{k=1}^3 \left(x_k^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_k^{(\alpha)}} \frac{1}{R_{\alpha\beta}} + x_k^{(\beta)} \frac{\partial}{\partial x_k^{(\beta)}} \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \right) &= \\ = -e_\alpha e_\beta \frac{\sum [x_k^{(\alpha)}(x_k^{(\alpha)} - x_k^{(\beta)}) + x_k^{(\beta)}(x_k^{(\beta)} - x_k^{(\alpha)})]}{R_{\alpha\beta}^3} &= \\ = -e_\alpha e_\beta \frac{\sum (x_k^{(\alpha)} - x_k^{(\beta)})^2}{R_{\alpha\beta}^3} = -\frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$-\sum \frac{\partial U}{\partial x} x = +U.$$

Уравнение (39а) можно поэтому переписать следующим образом:

$$2T = -U + \frac{d}{dt} Q.$$

где Q означает сумму $\sum mx \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dr} \sum \frac{mx^2}{2}$. Так как, согласно нашему предположению, электроны всегда находятся на конечных расстояниях друг от друга, то координаты их x могут только колебаться в конечных пределах, но не изменяться монотонно. Следовательно, среднее значение $\frac{d}{dt} Q$ для достаточно длинного по сравнению с продолжительностью таких колебаний промежутка времени (который тем не менее весьма мал, если, например, речь идет о движении электронов в атоме или молекуле) должно обращаться в нуль.

Таким образом, соответствующие средние значения кинетической и потенциальной энергии связаны между собой формулой

$$2\bar{T} = -\bar{U} \quad (40)$$

(теорема вириала).¹

¹ Для общего случая произвольных консервативных сил теорема вириала была впервые выведена Клаузиусом.

Чтобы рассматриваемая система действительно могла существовать, ее потенциальная энергия должна быть отрицательной, т. е. действие сил притяжения должно превосходить действие сил отталкивания.

При стягивании системы, т. е. при уменьшении всех расстояний (с сохранением конфигурации) потенциальная энергия должна (алгебраически) убывать и кинетическая увеличиваться (вследствие возрастания сил взаимодействия), но на величину вдвое меньшую. Полная энергия системы

$$W = T + U = \bar{T} + \bar{U}, \quad (40a)$$

согласно (40), равна среднему значению кинетической энергии, взятому с обратным знаком.

$$W = -\bar{T}. \quad (40b)$$

Иллюстрируем это замечательное соотношение следующим примером.

Когда материальное тело переходит из газообразного состояния в твердое или жидкое (при той же температуре), то оно теряет конечную часть своей внутренней энергии (скрытая теплота).

На основании формулы (40b) мы можем заключить, что кинетическая энергия электронов в атомах или молекулах этого тела при этом увеличивается на такую же величину. Если механическая энергия атома или материального тела теряется излучением (см. главу VII, § 3), то кинетическая энергия электронов должна возрастать на ту же величину.

Мы видели, что по теории относительности масса любого материального тела пропорциональна его энергии. Опуская вопрос о сущности энергии покоящегося электрона, будем определять ее просто как произведение $m_0 c^2$. Можно, однако, утверждать, что взаимной потенциальной энергии всех электронов U соответствует добавочная взаимная „электромагнитная“ масса $\frac{U}{c^2}$, так же как кинетической энергии — добавочная масса, равная $\frac{T}{c^2}$.

Общая масса материального тела, молекулы или атома, таким образом, равна сумме „покоящихся масс“ всех наэлектризованных частиц, из которых состоит это тело, молекула или атом, увеличенной на величину $\frac{T+U}{c^2} = \frac{W}{c^2}$, которая определяет добавочную массу — эквивалент механической энергии этого тела. Эта добавочная масса всегда отрицательна, так как энергия W , согласно (40b), равна $-\bar{T}$. Противоположная по знаку величина

$$\mu = \frac{\bar{T}}{c^2} = -\frac{W}{c^2} \quad (41)$$

называется дефектом массы, рассматриваемой материальной системы. Этот дефект массы, умноженный на c^2 , равен работе, которую надо затратить, чтобы полностью расчленил систему, т. е. чтобы удалить все наэлектризованные частицы друг от друга и привести их в состояние покоя. Так как механическая энергия такой расчлененной системы равна нулю, то увеличение энергии при расчленении (=затраченной работе) равно $0 - W = -W = \bar{W}$.

Приведенное рассуждение о дефекте массы может показаться несколько непоследовательным, так как мы связывали с кинетической энергией увеличение массы, тогда как при выводе уравнения (40) это увеличение массы упускалось из виду. Однако, легко показать, что в первом приближении предыдущие результаты остаются справедливыми. Если заменить классические уравнения движения релятивистскими (вернее, полурелятивистскими, так как мы отказались от соответствующего выражения силы и принимали во внимание только зависимость массы от скорости)

$$\frac{d}{dt}(m_\alpha v_\alpha) = -\nabla_\alpha U \left(m_\alpha = \frac{m_{0\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}}} \right), \quad (42)$$

то аналогичным предыдущему путем получается

$$\sum \mathbf{r} \frac{d}{dt}(m \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \left(\sum m \mathbf{r} \mathbf{v} \right) - \sum m v^2 = - \sum \mathbf{r} \cdot \nabla U = + \bar{U}$$

или, если перейти к средним значениям,

$$\sum \overline{m v^2} = - \bar{U}. \quad (42a)$$

В рассматриваемом случае величина $\frac{1}{2} m v^2$ несколько отличается от кинетической энергии одного электрона, но, как легко видеть, членами порядка $\left(\frac{v}{c}\right)^2$. Написанная в форме

$$m v^2 = m_0 \frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c^2 m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \quad (42b)$$

величина $m v^2$ может быть определена как сумма энергии электрона $\frac{c^2 m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ и соответствующей части его Лагранжевой функ-

ции $\left[L^* = -c^2 m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \text{ см. (17) § 3} \right]$.

Точные и полные уравнения движения электронов нашей системы, согласно (15) § 3, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \frac{e_\alpha}{c} \mathbf{A}_\alpha \right) = - \nabla_\alpha \left(e_\alpha \varphi - \frac{e_{(\alpha)}}{c} \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \right),$$

где \mathbf{A}_α и φ_α — потенциалы, создаваемые внешними источниками, а также всеми остальными электронами в данной пространственно-временной точке.¹

Положим

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha^0 + \varphi_\alpha', \quad \mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^0 + \mathbf{A}_\alpha',$$

где φ_α^0 и \mathbf{A}_α^0 характеризуют поле внешних источников, а φ_α' и \mathbf{A}_α' — поле остальных электронов. Пренебрегая запаздыванием электромагнитных действий, имеем:

$$\varphi_\alpha' = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{e_\beta}{R_{\alpha\beta}}, \quad \mathbf{A}_\alpha' = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{e_\beta \mathbf{v}_\beta}{c R_{\alpha\beta}}. \quad (43)$$

Введя взаимную электрическую энергию электронов

$$U = \frac{1}{2} \sum_\alpha e_\alpha \varphi_\alpha' = \sum_{\alpha < \beta} \sum \frac{e_\alpha e_\beta}{R_{\alpha\beta}}$$

и ее магнитный аналог

$$T' = \frac{1}{2} \sum_\alpha \frac{e_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{c} \cdot \mathbf{A}_\alpha' = \sum_{\alpha < \beta} \sum \frac{e_\alpha e_\beta}{c^2 R_{\alpha\beta}} \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\beta, \quad (43a)$$

получаем

$$\nabla_\alpha \left(e_\alpha \varphi_\alpha - e_\alpha \frac{\mathbf{v}_\alpha}{c} \cdot \mathbf{A}_\alpha \right) = \nabla_\alpha (U - T^*),$$

где

$$U = U' = \sum e_\alpha \varphi_\alpha^0$$

полная потенциальная энергия

$$T^* = T' + \sum_\alpha \frac{e_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{c} \cdot \mathbf{A}_\alpha^0. \quad (43b)$$

Уравнения движения принимают при этом обычную форму уравнений Лагранжа

$$\frac{d p_\alpha}{dt} = \nabla_\alpha (T^* - U) \quad (44)$$

¹ Заметим, что дифференцирование по времени должно относиться также к положению и скорости этих электронов, поскольку от них зависит векторный потенциал \mathbf{A}_α .

с „кинетическим потенциалом“ $T^* - U$ и импульсами

$$\mathbf{p}_\alpha = m\mathbf{v}_\alpha + \frac{e_\alpha}{c} \mathbf{A}_\alpha.$$

Соответствующая Лагранжева функция, определяемая из условия $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}$ (т. е. $p_{\alpha x} = \frac{\partial L}{\partial v_{\alpha x}}$ и т. д.), равна, как легко убедиться,

$$L = \sum c^2 m_{\alpha\beta} (1 - \sqrt{1 - v_\alpha^2/c^2}) + T^* - U. \quad (44a)$$

Отсюда для энергии $H = \sum \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha - L$, выраженной в функции координат и скоростей, получается формула

$$H = \sum_\alpha c^2 m_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_\alpha^2/c^2}} - 1 \right) + T' - U, \quad (44b)$$

интересная в том отношении, что она содержит на равных правах с собственной кинетической энергией электронов и их взаимную кинетическую энергию T' , тогда как вторая часть величины T^* (аналогичной полной потенциальной энергии), соответствующая действию внешнего поля и линейная по отношению к скоростям \mathbf{v}_α , отпадает. Это обстоятельство объясняется тем, что T' является квадратичной функцией скоростей электронов так же как и собственная кинетическая энергия в обычном приближении. Ограничиваясь этим приближением, можно переписать формулу (44b) в виде

$$H = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_{\beta} m_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\beta = U, \quad (45)$$

где коэффициент

$$m_{\alpha\beta} = \frac{e_\alpha e_\beta}{c^2 R_{\alpha\beta}} \quad (45a)$$

представляет собой как бы „взаимную массу“ соответствующих частиц. При этом

$$\mathbf{p}_\alpha = \sum_\beta m_{\alpha\beta} \mathbf{v}_\beta + \frac{e}{c} \mathbf{A}_\alpha^0. \quad (45b)$$

Для того чтобы получить Гамильтонову функцию, необходимо разрешить эти уравнения относительно \mathbf{v}_α и подставить соответствующие выражения в (45). При этом для H получается весьма громоздкая формула; любопытной чертой их является то обстоятельство, что в эту формулу, так же как и в случае одного электрона, входят не полные „импульсы“ \mathbf{p}_α , но лишь разности $\mathbf{p}'_\alpha = \mathbf{p}_\alpha - \frac{e}{c} \mathbf{A}_\alpha^0$, играющие роль „собственных импульсов“.

При отсутствии внешних электрических и магнитных сил, т. е. в случае $U = U'$ и $T^* = T'$ (замкнутая система частиц — как, например, атом) мы имеем, очевидно,

$$\sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \nabla_{\alpha} (U - T^*) = - (U - T^*).$$

Отсюда, согласно (44), получаем (опуская индексы α)

$$\sum \mathbf{r} \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \sum \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - \sum \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = U - T^*,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} \sum (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - \sum m v^2 = U + T^*,$$

или для средних значений

$$\sum \overline{m v^2} = -\bar{U} + \bar{T}^*. \quad (45c)$$

В предельном случае малых скоростей можно снова положить $\frac{1}{2} \sum \overline{m v^2} = \bar{T}$ и, следовательно, если определять полную механическую энергию W как сумму $T + T^* + U$, то

$$\bar{W} = -\bar{T}.$$

§ 8. Движение электрона по замкнутой орбите. Разберем теперь проблему двух тел в упрощающем предположении, что масса одной частицы значительно больше массы другой. Это соответствует действительному положению вещей в материальном атоме, который, как известно, состоит из тяжелого, положительно заряженного ядра и некоторого числа легких, вращающихся вокруг него отрицательных электронов. Мы рассмотрим случай одного электрона, отвлекаясь от движения ядра. Тогда проблема двух тел фактически обращается в проблему одного тела, и при этом весьма простую, так как покоящееся ядро создает постоянное электростатическое поле. Если заряд ядра обозначим через $-Ze$, то скалярным потенциалом этого поля будет

$$\varphi = -\frac{Ze}{r}$$

($+e$ = заряду электрона).

Уравнение движения электрона гласит:

$$\frac{d}{dt} m \mathbf{v} = -\text{grad} (e\varphi) = -\frac{Ze^2}{r^3} \mathbf{r}_0 \left(\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (46)$$

Отсюда следует, что момент количества движения его

$$\mathbf{J} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

постоянен во времени (как известно, это положение распростра-

няется на все движения под действием центральной силы, см. главу VII, § 9).

Если ввести полярные координаты r, θ на плоскости движения (θ — угол между r и неподвижной осью OX), то величина J может быть написана в форме $mr^2 \frac{d\theta}{dt}$.

Тогда

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = J = \text{const.} \quad (46a)$$

Далее, мы имеем выражение для энергии

$$c^2 m - \frac{Ze^2}{r} = H = \text{const}, \quad (46b)$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

При скалярном умножении (46) на единичный вектор r_0 , мы получаем, принимая во внимание, что $\left| \frac{dr_0}{dt} \right| = \frac{d\theta}{dt}$, $v \cdot r_0 = \frac{dr}{dt}$ и $v \cdot \frac{dr_0}{dt} = r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ (вектор $\frac{dr_0}{dt}$ перпендикулярен к r , а $r \frac{d\theta}{dt}$ является соответствующей азимутальной компонентой скорости):

$$\frac{d}{dt} (m v r_0) - m v \frac{dr_0}{dt} = -\frac{Ze^2}{r^2},$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \right) - mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{Ze^2}{r^2}.$$

Если положить здесь, согласно (46a), $\frac{d(\cdot)}{dt} + \frac{J}{mr^2} \frac{d(\cdot)}{d\theta}$, то

$$\frac{J}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \frac{J}{r^2} \frac{dr}{d\theta} - \frac{J^2}{mr^2} = -\frac{Ze^2}{r^2},$$

т. е., полагая $\frac{1}{r} = \sigma$,

$$\frac{d^2 \sigma}{d\theta^2} + \sigma = \frac{Ze^2}{J^2} m$$

или окончательно, так как по (46b) $m = \frac{1}{c^2} (H + Ze^2 \sigma)$,

$$\frac{d^2 \sigma}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{Ze^2}{J^2 c^2} \right) \sigma = \frac{Ze^2 H}{J^2 c^2} = \frac{1}{p}. \quad (47)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано. По общей теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами мы можем положить

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \left(1 + \varepsilon \cos \sqrt{1 - \frac{Z^2 e^4}{J^2 c^2}} \theta \right), \quad (47a)$$

где ε — пока неопределенная постоянная интегрирования.

Если параметр

$$\alpha = \frac{Z e^2}{J c} \quad (47b)$$

весьма мал по сравнению с единицей, то вышеприведенная формула практически обращается в известное уравнение конических сечений.

$$r = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

причем ε является эксцентриситетом.

Таким образом, траектория, определяемая уравнением (46a), при $\alpha < 1$, отличается от обычной эллиптической или гиперболической траектории небесной механики, так как в ней вместо полярного угла θ входит произведение $\theta \sqrt{1 - \alpha^2}$.

При $\varepsilon < 1$ электрон описывает эллипсообразную траекторию, которая получается из обычного эллипса при добавочном вращении (прецессия в плоскости траектории). Полное колебание r (от минимального значения $\frac{\rho}{1 + \varepsilon}$ до максимального $\frac{\rho}{1 - \varepsilon}$ и опять до минимума) происходит, следовательно, при возрастании θ не на 2π , но на $\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$. Большая ось эллипса перемещается при

каждом обороте на угол $2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} - 1 \right)$, или приблизительно, при $\alpha \ll 1$, на $\pi \alpha^2$. Эксцентриситет траектории легко определить

из уравнений $J = m r_{\min} v$ и $H = c^2 m - \frac{Z e^2}{r_{\min}}$, соответствующих прохождению через перигелий (при этом v перпендикулярна к \mathbf{r} и, следовательно, $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = r v$). Если из этих равенств исключить массу m и скорость (с помощью соотношения $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$)

и принять во внимание, что $r_{\min} = \frac{\rho}{1 + \varepsilon}$, то получим

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2 J^2 (H - m_0 c^2)}{m_0 Z^4 e^4}}. \quad (47c)$$

Итак рассмотренное эллипсообразное движение получается только при $H - m_0 c^2 < 0$, т. е. при отрицательном значении механической энергии электрона, что совершенно ясно из предыдущего.

Напротив, при $H - m_0 c^2 > 0$ электрон должен двигаться гиперболообразно из бесконечности в бесконечность (это движение не следует смешивать с прямолинейным „гиперболическим“ движением § 5).

Эти два вида движения получаются только тогда, когда параметр $\alpha < 1$. Заметим, что в простейшем случае кругового движения $\varepsilon = 0$ этот параметр равен отношению скорости электрона к скорости света. Если же $\alpha > 1$, то вид движения должен быть совершенно другой. Действительно, вместо тригонометрической функции, мы получаем в (47а) экспоненциальную функцию по формуле

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} = \left(1 + \varepsilon c \sqrt{\alpha^2 - 1} \theta \right).$$

Это уравнение спирали, которая все время приближается к нулевой точке. Скорость электрона непрерывно возрастает и стремится к предельному значению $v = c$.

Более детальное обсуждение полученных результатов с физической точки зрения здесь неуместно. Однако, на примере кругового движения электрона мы проиллюстрируем релятивистское преобразование понятий момента количества движения (J) и вращательного момента (M). До сих пор мы считали ядро покоящимся. Но мы можем перейти от предыдущей координатной системы S к другой S', которая движется относительно S со скоростью v'. Как представится круговое движение электрона, если его рассматривать с точки зрения системы S', в которой весь „атом“ (ядро и электрон) движется с поступательной скоростью — v'? Чтобы ответить на этот вопрос, введем координаты ядра и электрона и обозначим их x_k^0 и x_k для системы S и $x_k'^0$ и x_k' для системы S'. В предыдущей системе мы не делали разницы между четвертыми координатами x_4^0 и x_4 , т. е. оперировали с „одновременными“ положениями электрона и ядра. Однако, теперь мы должны учесть, что понятие одновременности не имеет никакого абсолютного смысла, так как в силу преобразований Лоренца, определяющих переход от S к S', при $x_4^0 = x_4$ мы получаем, вообще говоря, различные значения для $x_4'^0$ и x_4' . С этим перемещением временных точек, отображающих ядро и электрон, тесно связано изменение вектора J при переходе от S к S'. В классической механике этот вектор, как и всякий другой трехмерный вектор, рассматривается как инвариантная величина.

В релятивистской механике его следует трактовать, как и всякий другой трехмерный вектор, как вариантную величину,

а именно, как пространственную часть бивектора. Действительно, компоненты \mathbf{J} в S выражаются формулами

$$J_1 = m [(x_2 - x_2^0) v_3 - (x_3 - x_3^0) v_2] = \\ = m \left[(x_2 - x_2^0) \frac{dx_3}{dt} - (x_3 - x_3^0) \frac{dx_2}{dt} \right].$$

Если ввести вместо обычного времени собственное время τ электрона $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{m_0}{m} dt$, то для трех компонент \mathbf{J} получаем

$$J_{kl} = m_0 \left\{ (x_k - x_k^0) \frac{dx_l}{d\tau} - (x_l - x_l^0) \frac{dx_k}{d\tau} \right\} (k, l = 1, 2, 3 \dots) \quad (48)$$

Эти три величины, очевидно, образуют три пространственные компоненты четырехмерного антисимметричного тензора $J_{kl} = -J_{lk}$; другие компоненты получаются, если наряду с первыми тремя индексами ввести четвертый. Итак, мы можем положить

$$\left. \begin{aligned} J_1 = J_{23}, \quad J_2 = J_{31}, \quad J_3 = J_{12} \\ iJ_2^* = J_{14}, \quad iJ_3^* = J_{24}, \quad iJ_1^* = J_{34} \end{aligned} \right\} \quad (48a)$$

где J^* обозначает соответствующую $2\mathbf{J}$ временную часть.

Согласно (48) мы имеем, вследствие условия $x_4^0 = x_4$:

$$J_{k4} = m_0 (x_k - x_k^0) \frac{icdt}{d\tau} = icm (x_k - x_k^0) \quad (k = 1, 2, 3),$$

т. е., полагая $x_k - x_k^0 = R_k$,

$$\mathbf{J}^* = cm \mathbf{R}. \quad (48b)$$

При переходе к системе S' мы должны, очевидно, преобразовать векторы \mathbf{J} и \mathbf{J}^* по тем же формулам, как магнитную и электрическую поляризацию, т. е. по формулам (11) главы IX.

Для малых скоростей, справедливы приближенные формулы

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{J}^*, \quad \mathbf{J}^{*'} = \mathbf{J}^* - \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{J}. \quad (49)$$

Заметим, что при упомянутом ограничении $\left(\frac{v'}{c} \ll 1\right)$ массу электрона можно считать постоянной и его магнитный момент (т. е. магнитный момент, создаваемый движением по орбите)

$\mathbf{m} = \frac{e}{2c} \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ определять по формуле

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{J}}{c'} \left(c' = \frac{e}{2m_0 c} \right). \quad (49a)$$

При этом для соответствующего электрического момента получается выражение

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} e \mathbf{R}. \quad (49b)$$

Если ядро имеет заряд $-e$ ($Z=1$), то оно образует с электроном диполь с моментом $e \mathbf{R}$, т. е. вдвое большим чем (49b); если же Z отлично от 1, то на основании обычного определения момента диполя представляется невозможным приписывать системе ядро-электрон определенный электрический момент, так как эту систему можно с одинаковым успехом представить как комбинацию диполя с моментом $e \mathbf{R}$ и с результирующим зарядом ядра $-(Z-1)e$ или как комбинацию диполя с моментом $eZ \mathbf{R}$ и результирующего заряда $-(Z-1)e$.

Эта неопределенность электрического момента, очевидно, тесно связана с произвольностью, с которой выше устанавливалось понятие одновременности для ядра и электрона. А priori неясно, да и действительно не может быть обосновано, почему уравнение $x_4 = x_4^0$ должно удовлетворяться в системе S и не удовлетворяться в системе S' . Изменение \mathbf{J} и \mathbf{J}^* , определяемое (49) (такие же формулы, разумеется, справедливы и для \mathbf{p} и \mathbf{m}), происходит непосредственно из определяемого преобразованием Лоренца изменения пространственного и временного расстояний между „событиями“, заключающимися в наличии ядра и электрона в рассматриваемых пространственно-временных точках. Легко показать, что изменение \mathbf{J} (или \mathbf{m}) преимущественно обуславливается изменением пространственного расстояния; напротив, изменение \mathbf{J}^* (или \mathbf{p})—изменением временного расстояния.

Такие же трудности возникают при попытке сформулировать четырехмерным образом, учитывая относительность времени, понятие вращательного момента системы, состоящей из двух, или большего числа электронов. Если электрон подвергается действию внешней силы \mathbf{f} , а ядро не испытывает никакой силы (как, например, это бывает в случае внешнего магнитного поля), то момент этой силы относительно ядра

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{f}$$

можно считать пространственной частью бивектора с компонентами

$$M_{ik} = R_i F_k - R_k F_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

где \mathfrak{F} означает соответствующий этой силе четырехмерный вектор импульс—работы (отнесенный к единице собственного времени электрона). Но в определении временной части тензора M_{ik} есть такая же произвольность, как и в случае тензора ${}^2\mathfrak{T}$.

Итак, при строгом и последовательном изучении проблемы двух или большего числа тел на основе теории относительности, следует рассматривать движение каждого электрона в отдельности, вводя остальные только постольку, поскольку они яв-

ляются источниками действующего на данный электрон внешнего поля.

При этом относительность одновременности не нарушает картины, вследствие инвариантности электродинамических уравнений.

§ 9. Вращательное и поступательное движения магнитного электрона. Рассматривавшиеся в предыдущем параграфе трудности при определении момента количества движения и вращательного момента системы из двух или нескольких электронов отпадают, когда эти величины относятся к единственному электрону. При этом ненужно и бесцельно разделять электрон на элементы и сводить его „вращательное движение“ к движению этих последних по орбитам вокруг определенной, проходящей через центральную точку электрона, оси. Электрон можно рассматривать просто как точку, свойства которой характеризуются конечными скалярными, векторными и тензорными величинами. Если принять для предельного случая весьма малой поступательной скорости справедливость обычных механических соотношений между пространственными проекциями этих величин, то теория относительности позволяет установить точные соотношения, справедливые для любой поступательной скорости, без всяких предположений о „структуре“ электрона.

Собственный магнитный момент электрона \mathbf{m} должен представлять собой пространственную часть некоторого антисимметричного тензора $\mu_{\alpha\beta} = -\mu_{\beta\alpha}$

$$\begin{pmatrix} \mu_{23} & \mu_{31} & \mu_{12} & \mu_{14} & \mu_{24} & \mu_{34} \\ m_1 & m_2 & m_3 & ip_1 & ip_2 & ip_3 \end{pmatrix}$$

где p_1, p_2, p_3 — пространственные компоненты связанного с электроном электрического момента. Этот электрический момент мы определим из условия исчезновения его в координатной системе S' , в которой электрон мгновенно покоится ($\mathbf{p}' = 0$). Тогда (см. главу IX, § 2) для любой координатной системы S' , относительно которой электрон имеет поступательную скорость \mathbf{v} , получается

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m}. \quad (50)$$

Этот результат можно также вывести следующим путем. Обозначим через x_α координаты электрона и умноженное на ic время ($ict = x_4$) в системе S . Образуем из $\mu_{\alpha\beta}$ и $\dot{x}_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau}$, где

$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ — собственное время электрона, четырех-

мерный вектор $\sum_{\beta=1}^4 \mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta$, или проще $\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta$ (в дальнейшем мы

всегда будем опускать знак суммирования для пары одинаковых

индексов). В „покоящейся системе“ S' компоненты этого вектора $\mu'_{\alpha\beta} \dot{x}'_{\beta}$ должны исчезать, так как $\dot{x}'_1 = \dot{x}'_2 = \dot{x}'_3 = 0$ и согласно нашему предположению, $\mu'_{11} = \mu'_{22} = \mu'_{33} = 0$.

Отсюда следует, что и для любой другой координатной системы S должно выполняться уравнение

$$\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_{\beta} = 0, \tag{50a}$$

выражающее исчезновение вышеуказанного вектора. Подставляя вместо $\mu_{\alpha\beta}$ и \dot{x}_{β} соответствующие трехмерные выражения, получаем для $\alpha = 1, 2, 3$ пространственные компоненты вектора

$$\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m} - \mathbf{p} \right),$$

тогда как для $\alpha = 4$

$$\mu_{4\beta} \dot{x}_{\beta} = - \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}).$$

Из равенства нулю первого выражения, т. е. из уравнения (50a), следует обращение в нуль второго.

Как известно, с помощью компонент тензора $\mu_{\alpha\beta} = -\mu_{\beta\alpha}$ можно образовать следующие две инвариантные величины:

$$m^2 - p^2 = \frac{1}{2} \mu_{\sigma\beta} \mu_{\alpha\beta}$$

и

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{p} = i (\mu_{23} \mu_{14} + \mu_{31} \mu_{24} + \mu_{12} \mu_{34}).$$

При этом, на основании (50) (т. е. вследствие того, что $\mathbf{p}' = 0$) получаем:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{m}' \cdot \mathbf{p}' = 0$$

и

$$m^2 - p^2 = m^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m} \right)^2 = m'^2. \tag{51}$$

Последнее уравнение определяет зависимость магнитного момента электрона от его поступательной скорости \mathbf{v} . Его можно записать в форме

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \tag{51a}$$

где v_{\perp} означает перпендикулярную к \mathbf{m} компоненту \mathbf{v} ; $m' = \mu$ — значение магнитного момента в „покоящейся системе“.

Введем теперь четырехмерные величины, соответствующие магнитной энергии $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{H} = -m_{\nu} \cdot H_{\alpha}$ и магнитному враща-

тельному моменту $\mathbf{m} \times \mathbf{H}$, т. е. антисимметричному трехмерному тензору с компонентами $m_\alpha H_\beta - m_\beta H_\alpha$. Четырехмерным „расширением“ функции энергии, очевидно, является скалярная величина

$$U = -\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} = -(\mathbf{mH}) - (\mathbf{pE}). \quad (52)$$

Соответствующее „расширение“ вращательного момента представляется, как легко видеть, антисимметричным четырехмерным тензором (бивектором)

$$M_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma} \quad (53)$$

с пространственной частью

$$(M_{23}, M_{31}, M_{12}) = \mathbf{m} \times \mathbf{H} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

и временной частью

$$-i (M_{14}, M_{24}, M_{34}) = -\mathbf{m} \times \mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{H}.$$

Момент количества движения электрона (вокруг собственной оси) мы определим как пространственную часть тензора $\frac{1}{\kappa} \mu_{\alpha\beta}$,

$$\text{где } \kappa = \frac{e}{cm_0}.$$

Простейшее четырехмерное „обобщение“ обычного дифференциального уравнения для изменения $\mu_{\alpha\beta}$ во времени принимает при этом следующий вид

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\kappa} = M_{\alpha\beta}, \quad (54)$$

т. е.

$$\frac{\dot{\mathbf{m}}}{\kappa} = \mathbf{m} \times \mathbf{H} + \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (54a)$$

и

$$\frac{\dot{\mathbf{p}}}{\kappa} = \mathbf{p} \times \mathbf{H} - \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (54b)$$

причем точка означает дифференцирование по собственному времени. Уравнения (54a) и (54b) могут совместно выполняться только в том случае, когда векторы \mathbf{m} и \mathbf{p} независимы друг от друга (а priori). В действительности же между этими векторами существует соотношение (50), с которым уравнения (54a) и (54b) несовместимы. Легко однако так преобразовать объединяющее их уравнение (54), чтобы условие (50a) выполнялось. Для этой цели введем покамест неопределенный четырехмерный вектор a_α и образуем инвариантный скаляр

$$-\mu_{\alpha\beta} a_\alpha \dot{x}_\beta = -\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} (a_\alpha \dot{x}_\beta x_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha) \quad (55)$$

который обращается в нуль согласно (50а). Этот скаляр мы присоединим к „функции энергии“ U , т. е. мы заменим последнюю через

$$U' = -\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} (H_{\alpha\beta} + a_{\alpha} \dot{x}_{\beta} - a_{\beta} \dot{x}_{\alpha}) = -\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H'_{\alpha\beta}. \quad (55a)$$

Соответственно этому заменим тензор $M_{\alpha\beta}$ через

$$M'_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma} H'_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H'_{\alpha\gamma}, \quad (55b)$$

т. е.

$$M'_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + a_{\gamma} (\dot{x}_{\alpha} \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_{\beta} \mu_{\alpha\gamma}), \quad (55c)$$

а уравнение движения (54) через

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{x} = M'_{\alpha\beta} \quad (56)$$

или, выписывая его полностью,

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{x} = \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma} + a_{\gamma} (\dot{x}_{\alpha} \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_{\beta} \mu_{\alpha\gamma}). \quad (56a)$$

Теперь определим вектор a_{α} таким образом, чтобы привести это уравнение в согласие с (50а). Из (56а) находим, принимая во внимание (50а) и тождественное соотношение

$$\dot{x}_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} = -c^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{x} \dot{x}_{\beta} &= -\frac{1}{x} \mu_{\alpha\beta} \ddot{x}_{\beta} = \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} \dot{x}_{\beta} - a_{\gamma} \mu_{\alpha\gamma} \dot{x}_{\beta} \dot{x}_{\beta} = \\ &= \mu_{\alpha\gamma} (H_{\beta\gamma} \dot{x}_{\beta} + a_{\gamma} c^2), \end{aligned}$$

или

$$\mu_{\alpha\beta} \left(\frac{\ddot{x}_{\beta}}{x} + H_{\beta\gamma} \dot{x}_{\beta} + a_{\gamma} c^2 \right) = 0.$$

Отсюда следует

$$a_{\gamma} = \frac{1}{x c^2} (x H_{\gamma\beta} \dot{x}_{\beta} - \ddot{x}_{\gamma}). \quad (57)$$

Независимо от этого выражения для a_{γ} , из (56а) получается, в связи с (50а),

$$\frac{1}{x} \mu_{\alpha\beta} \dot{\mu}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - \mu_{\alpha\beta} \mu_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma} = 2 \mu_{\alpha\beta} \mu_{\alpha\gamma} H = 0$$

(вследствие антисимметричного характера $H_{\beta\gamma}$), т. е.

$$\frac{d}{d\tau} \mu^2_{\alpha\beta} = 0,$$

или

$$\frac{1}{I} \mu^2_{\alpha\beta} = m^2 - p^2 = \mu^2 = \text{const.} \quad (58)$$

Уравнения движения немагнитного электрона, как известно, имеют вид [см. (8) § 2]

$$m_0 \ddot{x}_\alpha = \frac{e}{c} H_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta,$$

или, полагая

$$\begin{aligned} \frac{e}{m_0 c} &= \kappa \\ \ddot{x}_\alpha &= \kappa H_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta \end{aligned} \quad (58a)$$

Если пренебречь обусловливаемой магнитным моментом силой в сравнении с силой $e(E + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H})$, соответствующей четырехмерному вектору $\frac{e}{c} H_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta$, то, согласно (58a) и (57), получается

$$a_\gamma \cong 0. \quad (58b)$$

В этом приближении, т. е. пренебрегая вызываемым магнитной силой возмущением поступательного движения электрона, его „вращательное движение“, т. е. изменение во времени вектора \mathbf{m} , можно определять простыми уравнениями (54) или (54a).

Если положить в (54a), согласно (50), $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m}$, то

$$\frac{\dot{\mathbf{m}}}{\kappa} \cong \mathbf{m} \times \mathbf{H} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m} \right) \times \mathbf{E}. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь случай, когда электрон движется вокруг ядра в слабом внешнем магнитном поле \mathbf{H} . Тогда, в еще более грубом приближении (опуская величины второго и высшего порядка относительно $\frac{v}{c}$), можно положить

$$\mathbf{E} \cong \frac{m_0}{e} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (59a)$$

При этом второй член в правой части (59) принимает вид

$$\frac{m_0}{ec} \left(\mathbf{v} \times \mathbf{m} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Найдем среднее значение этого выражения для невозмущенного движения.

Мы имеем в этом случае (см. § 9 главы VII)

$$\overline{\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{v}} = \overline{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}} + \overline{\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{m} \right) \times \mathbf{v}} = 0.$$

Отсюда, в связи с тождеством

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \left(\mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \times \mathbf{v} + \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} \right) \times \mathbf{m} &= 0, \\ \overline{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}} &= \frac{1}{2} \overline{\mathbf{m} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} \right)}. \end{aligned}$$

или по (59а)

$$\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m}\right) \times \mathbf{E} \cong \frac{1}{2c} \mathbf{m} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{m} \times \overline{\mathbf{H}'}. \quad (59b)$$

Среднее изменение вектора \mathbf{m} определяется, следовательно, в указанном приближении, уравнением

$$\frac{1}{x} \frac{d\overline{\mathbf{m}}}{dt} \cong \mathbf{m} \times \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{m} \times \overline{\mathbf{H}'}, \quad (60)$$

где $\mathbf{H}' = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' \cong -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$ означает напряженность магнитного поля в системе S' , в которой электрон мгновенно покоится; $\overline{\mathbf{H}'}$ — среднее значение \mathbf{H}' .

Множитель $\frac{1}{2}$ во втором члене правой части уравнения (60) можно интерпретировать как выражение того обстоятельства, что вращательное действие электрического поля \mathbf{E} на дипольный момент электрона \mathbf{p} , а следовательно, и соответствующая этому действию „эффективная“ энергия должны быть уменьшены вдвое по сравнению с обычными выражениями $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$ и $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, которыми определяется действие электрического поля на частицу с постоянным дипольным моментом. Магнитный электрон ведет себя, следовательно, по отношению к электрическому полю таким образом, как если бы его электрический момент индуцировался этим полем. В действительности, согласно формуле (50), он индуцируется тем движением, которое вызывается электрическим полем; магнитное поле \mathbf{H} играет при этом роль возмущающего фактора.

При движении электрона в радиального симметричном поле $\mathbf{E} = \mathbf{r} f(r)$, где f — некоторая функция расстояния (например, $\frac{Ze^2}{r^3}$ в случае Кулонова поля)

$$\mathbf{H}' = -\frac{1}{c} f \mathbf{v} \times \mathbf{r} = \frac{f(r)}{m_0 c} m_0 \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

или

$$\mathbf{H}' = \frac{f(r)}{m_0 c} \mathbf{l}, \quad (60a)$$

где $\mathbf{l} \cong m_0 \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ — момент количества движения электрона, соответствующий его поступательному движению вокруг притягивающего центра.

Мы имеем, таким образом, согласно (60), при отсутствии магнитного поля ($H=0$)

$$\frac{1}{x} \frac{d\overline{\mathbf{m}}}{dt} = \frac{f(r)}{2m_0 c} \mathbf{m} \times \mathbf{l}. \quad (60b)$$

Вектор \mathbf{i} не остается постоянным, так как поступательное движение электрона искажается действием возмущающей силы, зависящей от его собственного магнитного момента.

Сила эта равна $(\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} = f \mathbf{p} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}$, так что момент ее (относительно ядра) сводится к $f \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{E} \times \mathbf{p}$. Таким образом, этот момент оказывается равным и противоположным тому, который действует на „собственное вращение“ электрона. Обозначая соответствующий момент количества движения $\frac{1}{c} \mathbf{m}$ через \mathbf{l} и складывая уравнение $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ [которое получается из (54a), если положить $H=0$ и отождествить собственное время τ с обычным временем t] с уравнением $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{E} \times \mathbf{p}$, определяющим изменение вектора $\mathbf{l} = m_0 \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, получаем $\frac{d}{dt} (\mathbf{i} + \mathbf{l}) = 0$, т. е. $\mathbf{i} + \mathbf{l} = \text{const}$.

Уравнение (60b) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{xf(r)}{2m_0c} \mathbf{l} \times (\mathbf{l} + \mathbf{i})$$

и истолковать как выражение того обстоятельства, что изменение вектора \mathbf{i} сводится в среднем к прецессии его вокруг неизменного вектора $\mathbf{l} + \mathbf{i}$ с угловой скоростью $\frac{xf}{2m_0c} (\mathbf{l} + \mathbf{i})$.

Отсюда следует, что к той же самой прецессии сводится также и среднее изменение вектора \mathbf{l} . Численные значения обоих векторов, равно как и угол между ними, остаются при этом в среднем неизменными (в чем нетрудно убедиться непосредственно, составляя производные по времени от $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}$ и $\mathbf{l} \cdot \mathbf{i}$ в связи с формулой $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = -\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = \frac{f}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{m} \times \mathbf{r})$.

Заметим, что рассматриваемому возмущенному движению электрона соответствует дополнительная энергия

$$\begin{aligned} U' &= -\frac{1}{2} \overline{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}} = -\frac{\bar{f}}{2c} (\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{r} = -\frac{f}{2m_0c} (m_0 \mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{m} = \\ &= -\frac{\bar{f}}{2m_0c} \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}, \end{aligned}$$

т. е.

$$U' = -\frac{xf}{2m_0c} \mathbf{l} \cdot \mathbf{i}. \quad (60c)$$

Изложенная выше теория может быть значительно упрощена, если отбросить добавочное условие $\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta = 0$, т. е. $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m}$,

и заменить его релятивистски инвариантным условием „самодуальности“ бивектора $\mu_{\alpha\beta}$, т. е. совпадения его с дуальным бивектором $\mu^*_{\alpha\beta}$. Это условие в трехмерной форме сводится к уравнениям

$$\mathbf{p} = i \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = -i \mathbf{p}$$

(вытекающим друг из друга) и связано с введением комплексных значений для электрического и магнитного момента электрона. Условие $\mathbf{p} = 0$ при $\mathbf{v} = 0$ можно при этом заменить условием вещественности \mathbf{m} и, следовательно, мнимости \mathbf{p} при $\mathbf{v} = 0$. Полагая в общем случае $\mathbf{m} = \mathbf{m}' + i \mathbf{m}''$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + i \mathbf{p}''$, мы получаем следующие соотношения между вещественными и мнимыми частями обоих векторов:

$$\mathbf{p}' = -\mathbf{m}'' \quad \text{и} \quad \mathbf{p}'' = \mathbf{m}'.$$

Общие формулы преобразования теории относительности в случае комплексных величин должны быть применимы в отдельности к их вещественным и мнимым частям. Так как $\mathbf{p}' = \mathbf{m}'' = 0$ при $\mathbf{v} = 0$, то отсюда получаем при $\mathbf{v} \neq 0$

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{m}' \quad \text{и} \quad \mathbf{m}'' = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{p}''.$$

Таким образом вещественная часть самодуального бивектора \mathbf{m}, \mathbf{p} совпадают с тем бивектором \mathbf{m}, \mathbf{p} , который мы определили выше с помощью условия $\mu_{\alpha\beta} x_\beta = 0$.

§ 10. Применение вариационного метода к теории магнитного электрона (с собственным вращением). Уравнение (56) для „собственного вращения“ электрона может быть выведено из вариационного принципа, представляющего собой обобщение принципа Гамильтона-Шварцшильда; применяя этот обобщенный принцип, мы вместе с тем получим точные дифференциальные уравнения для поступательного движения элемента, а также обобщенные уравнения электромагнитного поля, учитывающие магнитный и электрический момент электрона как источник этого поля.

Положим, как обычно (см. § 3),

$$\delta \int L d\tau = 0 \tag{61}$$

с добавочными условиями

$$\dot{x}_\alpha^2 = -c^2 \tag{61a}$$

$$\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta = 0. \tag{61b}$$

При этом напомним Лагранжеву функцию в форме

$$L = \frac{e}{c} A_\alpha \dot{x}_\alpha + T^* + \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}, \tag{62}$$

где T^* — „кинетическая энергия“ вращательного движения.

Эту энергию мы будем рассматривать, в соответствии с обыкновенной трехмерной механикой, как функцию „вращательной скорости“, характеризующейся антисимметричным тензором $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$.

При этом мы положим, в соответствии с обычной механикой вращающегося тела,

$$\delta T^* = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2} \delta \omega_{\alpha\beta}. \quad (62a)$$

Чтобы определить вариацию $\mu_{\alpha\beta}$, обратимся сперва к соответствующей операции в обыкновенной механике. Работа, совершенная магнитной вращательной силой $\mathbf{m} \times \mathbf{H}$ при виртуальном, бесконечно малом вращении $\delta \mathbf{o}$ равна внутреннему произведению $\delta \mathbf{o} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{H})$. С другой стороны, она должна равняться уменьшению магнитной энергии $-\delta(-\mathbf{mH}) = \delta \mathbf{mH}$. Следовательно, $\delta \mathbf{mH} = \delta \mathbf{o} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{H})$, или $\delta \mathbf{mH} = (\delta \mathbf{o} \times \mathbf{mH})$, и значит

$$\delta \mathbf{m} = \delta \mathbf{o} \times \mathbf{m}.$$

Соответствующая четырехмерная вариационная формула должна получиться таким же путем, как формула (53) получается из трехмерного выражения для вращательного момента $\mathbf{m} \times \mathbf{H}$. Таким образом, если ввести четырехмерный, антисимметричный „тензор вращения“ $\delta \Omega_{\alpha\beta}$, пространственная часть которого равна $\delta \mathbf{o}$, то

$$\delta \mu_{\alpha\beta} = \delta \Omega_{\alpha\beta} \mu_{\beta\gamma} - \delta \Omega_{\beta\gamma} \mu_{\alpha\gamma}. \quad (62b)$$

Величины $\delta \Omega_{\alpha\beta}$ (также как и $\delta \mathbf{o}$), разумеется, не являются полными дифференциалами, т. е. не существует „угловых координат“ $\Omega_{\alpha\beta}$, соответствующих x_α (неголономная система).

Тем не менее, предположим, что наряду с соотношениями

$$\delta \dot{x}_\alpha = \frac{d}{d\tau} \delta x_\alpha \quad (63)$$

справедливы также соответствующие соотношения для $\delta \Omega_{\alpha\beta}$ и $d \Omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} d\tau$, т. е.

$$\delta \omega_{\alpha\beta} = \frac{d}{d\tau} \delta \Omega_{\alpha\beta}.$$

С помощью вышеприведенных формул и частично уже применявшихся уравнений

$$\begin{aligned} \delta A_\alpha &= \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma} \delta x_\gamma; \quad \dot{A}_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma} \dot{x}_\gamma, \\ \delta H_{\alpha\beta} &= \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta x_\gamma; \quad \dot{H}_{\alpha\beta} = \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \dot{x}_\gamma, \end{aligned}$$

мы получаем

$$\delta L = \frac{e}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma} \dot{x}_\alpha \delta x_\gamma - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\gamma} \dot{x}_\gamma \delta x_\alpha + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{e}{c} A_\alpha \delta x_\alpha \right) - \frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{2\chi} \delta \Omega_{\alpha\beta} + \\ + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\chi} \delta \Omega_{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \delta x_\gamma + \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} (\delta \Omega_{\alpha\gamma} \mu_{\beta\gamma} - \delta \Omega_{\beta\gamma} \mu_{\alpha\gamma}),$$

или, так как

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} = H_{\beta\alpha}, \\ \delta L = \left(\frac{e}{c} H_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \right) \delta x_\alpha + \\ + \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\chi} + \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma} \right) \delta \Omega_{\alpha\beta} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{e}{c} A_\alpha \delta x_\alpha + \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\chi} \delta \Omega_{\alpha\beta} \right).$$

Далее, согласно (61a) и (61b), вводя Лагранжевы неопределенные множители λ и a_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), имеем

$$\lambda \dot{x}_\alpha \delta \dot{x}_\alpha = -\delta x_\alpha \frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\alpha) + \frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\alpha \delta x_\alpha) = 0$$

и

$$a_\alpha \delta (\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta) = \frac{1}{2} [a_\alpha \delta (\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta) - a_\beta \delta (\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha)] = \frac{d}{d\tau} (a_\alpha \mu_{\alpha\beta} \delta x_\beta) - \\ - \delta x_\alpha \frac{d}{d\tau} (\mu_{\alpha\beta} a_\beta) + \frac{1}{2} (a_\alpha \dot{x}_\beta a_\beta \dot{x}_\alpha) (\delta \Omega_{\alpha\gamma} \mu_{\beta\gamma} - \delta \Omega_{\beta\gamma} \mu_{\alpha\gamma}) = 0,$$

или, так как $\dot{x}_\beta \mu_{\beta\gamma} = \dot{x}_\alpha \mu_{\alpha\gamma} = 0$,

$$a_\alpha \delta (\mu_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta) = \frac{d}{d\tau} (a_\alpha \mu_{\alpha\beta} \delta x_\beta) - \delta x_\alpha \frac{d}{d\tau} (\mu_{\beta\alpha} a_\beta) + \frac{1}{2} \delta \Omega_{\alpha\beta} a_\gamma (\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}) = 0.$$

Из (61), (61a) и (61b) следует, при обычном предположении, что на пределах интеграла (61) вариации δx_α , $\delta \Omega_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль (путем сложения вышенайденных выражений и приравнивания нулю коэффициентов при δx_α и $\delta \Omega_{\alpha\beta}$):

$$\frac{d}{d\tau} (\lambda \dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha} a_\beta) = \frac{e}{c} H_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \quad (64)$$

и

$$\frac{1}{\chi} \dot{\mu}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma} + a_\gamma (\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}).$$

Последнее уравнение совпадает с (56a); первое является обобщением обыкновенного уравнения движения (58a) для случая немагнитного электрона.

Соответственно этому положим

$$\lambda = m_0 + \lambda', \quad (64a)$$

где λ' — добавочный член, зависящий от магнитного момента электрона. При выполнении дифференцирования в левой части уравнения (64) мы получаем, согласно (57)

$$\lambda' \ddot{x}_\alpha + \lambda' \dot{x}_\alpha + \mu_{\alpha\beta} \dot{a}_\alpha + \dot{\mu}_{\beta\alpha} a_\alpha = \kappa m_0 c^2 a_\alpha + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}.$$

Отсюда следует, путем умножения на \dot{x}_α и в связи с соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_\alpha^2 &= -c^2, \quad \dot{x}_\alpha \ddot{x}_\alpha = 0 \quad \text{и} \quad a_\alpha \dot{x}_\alpha = 0: \\ -c^2 \dot{\lambda}' &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2} \dot{\mu}_{\alpha\beta} (H_{\alpha\beta} + c_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta x_\alpha). \end{aligned}$$

По (55a), (55b) и (56), мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\mu}_{\alpha\beta} (H_{\alpha\beta} + a_\alpha \dot{x}_\beta - a_\beta \dot{x}_\alpha) &= \frac{1}{2} \dot{\mu}_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mu_{\alpha\gamma} H'_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H'_{\alpha\gamma}) H'_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{\kappa}{2} (\mu_{\alpha\beta} H'_{\gamma\beta} H'_{\alpha\gamma} - \mu_{\beta\alpha} H'_{\gamma\alpha} H'_{\gamma\beta}) = \kappa \mu_{\alpha\beta} H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\gamma} = 0, \end{aligned}$$

вследствие антисимметричного характера тензора $\mu_{\alpha\beta}$. Следовательно,

$$\lambda' = -\frac{1}{2c^2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}. \quad (64b)$$

Итак, увеличение массы m_0 равно „относительной“ магнитной энергии электрона (по отношению к ядру, или другим частицам, создающим поле $H_{\alpha\beta}$), деленной на квадрат скорости света.

Выражение $\mu_{\alpha\beta} a_\alpha$ в (64) можно рассматривать как α -компоненту добавочного импульса, соответствующего абсолютной энергии электрона, т. е. кинетической энергии его вращения.

Подставляя (64a) в (64), получаем, вследствие (57),

$$\frac{d}{d\tau} (\lambda' \dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha} a_\alpha) = c^2 m_0 \kappa a_\alpha + \frac{1}{2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}. \quad (65)$$

Это уравнение можно применить для приближенного определения $a_{\alpha i}$. А именно, в первом приближении, если пренебречь левой частью (65), получаем

$$a_\alpha = -\frac{1}{2m_0 \kappa c^2} \mu_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}. \quad (65a)$$

Из уравнения (64) следует

$$\begin{aligned} x_\alpha \frac{d}{d\tau} (\lambda' \dot{x}_\beta + \mu_{\gamma\beta} a_\gamma) - x_\beta \frac{d}{d\tau} (\lambda' \dot{x}_\alpha + \mu_{\gamma\alpha} a_\gamma) &= \\ = \frac{e}{c} (H_{\beta\gamma} x_\alpha \dot{x}_\gamma - H_{\alpha\gamma} x_\beta \dot{x}_\gamma) + \frac{1}{2} \mu_{\rho\gamma} \left(x_\alpha \frac{\partial H_{\rho\gamma}}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial H_{\rho\gamma}}{\partial x_\alpha} \right), \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \lambda (x_\alpha \dot{x}_\beta - x_\beta \dot{x}_\alpha) + a_\gamma (x_\alpha \mu_{\gamma\beta} - x_\beta \mu_{\gamma\alpha}) \right\} = \frac{e}{c} (H_{\beta\gamma} x_\alpha \dot{x}_\gamma - H_{\alpha\gamma} x_\beta \dot{x}_\gamma) + \frac{1}{2} \mu_{\alpha\gamma} \left(x_\alpha \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \right) - a_\gamma (\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}) \quad (66)$$

Это уравнение можно рассматривать как обобщение „закона площадей“, т. е. обычной формулы для изменения момента количества движения при поступательном движении, причем этот момент количества движения заменяется антисимметричным тензором

$$I_{\alpha\beta} = \lambda (x_\alpha \dot{x}_\beta - x_\beta \dot{x}_\alpha) + a_\gamma (\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}), \quad (66a)$$

пространственная часть которого в первом приближении совпадает с $m_0 \mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Заметим далее, что второй член в правой части (66a) равен по величине и противоположен по знаку соответствующему добавочному члену в формуле (56a) для изменения момента количества вращательного движения.

Если положить

$$\frac{\mu_{\alpha\beta}}{x} = i_{\alpha\beta},$$

то для суммы обоих моментов получается формула

$$\frac{d}{d\tau} (i_{\alpha\beta} + I_{\alpha\beta}) = \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma} + \frac{e}{c} (H_{\beta\gamma} x_\alpha \dot{x}_\gamma - H_{\alpha\gamma} x_\beta \dot{x}_\gamma) + x_\beta \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - x_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\beta}, \quad (66b)$$

где U — „относительная энергия“

$$U = -\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha}.$$

До сих пор мы ограничивались изучением вопроса о влиянии оказываемом магнитоэлектрическим моментом электрона на его движение. Мы исследуем теперь вкратце вопрос о влиянии этого момента на создаваемое электроном электромагнитное поле. Несколько более общий вопрос об электромагнитном поле произвольно движущегося „осциллятора“ уже рассматривался нами в § 5 гл. IX с помощью метода комплексного интегрирования, соответствующего представлению о запаздывающем дальном действии точечного магнитоэлектрического момента переменной величины. Этот вопрос может быть решен в столь же общей форме с помощью вариационного метода, путем весьма простого обобщения выражения для Лагранжевой функции, которое фигурирует в вариационном принципе Шварцшильда и которое учитывает лишь заряд электрона.

В случае точечного электрона эта функция, без учета членов,

относящихся к одному лишь полю, сводится к $\frac{e}{c} A_\alpha \dot{x}_\alpha$. Для определения поля необходимо исходить из непрерывного распределения заряда и тока и заменить предыдущее выражение интегралом $\int A_\alpha j_\alpha dV$ (распространенным по объему электрона). Влияние магнитоэлектрического момента электрона на его движение учитывается прибавлением к функции $\frac{e}{c} A_\alpha \dot{x}_\alpha$ члена $\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$ и кинетической энергии собственного вращения T^* . При переходе к непрерывному распределению электрического заряда необходимо аналогичным образом распределить и магнитоэлектрический момент, введя тензор магнитоэлектрической поляризации $M_{\alpha\beta}$, связанной с тензором магнитоэлектрического момента формулой $\mu_{\alpha\beta} = \int M_{\alpha\beta} dV$. Мы получаем при этом вместо $\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$ объемный интеграл $\frac{1}{2} \int H_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} dV$. Что же касается энергии T^* , то для определения поля она роли не играет (так как выражение ее не зависит от компонент поля); при определении поля, создаваемого электроном, ее можно поэтому не принимать во внимание.

Таким образом, определение поля, создаваемого магнитным (вращающимся) электроном, сводится к вариационному уравнению $\delta S = 0$, где [ср. (32a) § 5, гл. IX]

$$S = \int d\Omega \left[A_\alpha j_\alpha + \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \frac{1}{16\pi} H_{\alpha\beta}^2 \right], \quad (67)$$

причем

$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

($H_{\alpha\beta}^2$ обозначает двойную сумму $\sum_\alpha \sum_\beta H_{\alpha\beta}^2$). Здесь неизвестными являются компоненты потенциала A_α , тогда как компоненты вектора тока j_α и бивектора (антисимметрического тензора) поляризации $M_{\alpha\beta}$ считаются известными.

Так как вариация выражения S без второго члена уже была нами вычислена, то нам остается составить лишь вариацию интеграла $\int H_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} d\Omega$. Мы получаем при этом:

$$\delta \int M_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} d\Omega = \int d\Omega M_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \delta A_\alpha}{\partial x_\beta} \right) = \\ \int d\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(M_{\alpha\beta} \delta A_\beta \right) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(M_{\alpha\beta} \delta A_\alpha \right) \right] - \int d\Omega \left(\delta A_\beta \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} - \delta A_\alpha \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \right).$$

При интегрировании по всему „миру“ первый интеграл обращается в нуль (так как подинтегральная функция представляет собой четырехмерное „расхождение“). Замечая, что

$$\delta A_{\beta} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} = \delta A_{\alpha} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial x_{\beta}} = -\delta A_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \quad (M_{\beta\alpha} = -M_{\alpha\beta}),$$

мы получаем, таким образом,

$$\delta \int \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} \delta \Omega = \int \delta A_{\alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} d\Omega.$$

Для нахождения уравнений электромагнитного поля мы должны прибавить это выражение к $\int \delta A_{\alpha} j_{\alpha} d\Omega$. В результате к вектору плотности тока j_{α} прибавляется вектор

$$j'_{\alpha} = \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}}, \quad (67a)$$

причем уравнения электромагнитного поля сохраняют свой обычный вид

$$-\frac{\partial^2 A_{\alpha}}{\partial x_{\beta} \partial x_{\beta}} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x_{\beta}} = 4\pi (j_{\alpha} + j'_{\alpha})$$

Заметим, что формула (67a) совпадает с формулой (8a) § 1 гл. VIII, отличаясь от нее лишь обозначением ($M_{\alpha\beta}$ вместо $P_{\alpha\beta}$). Так как,

вследствие антисимметричности $M_{\alpha\beta}$, $\frac{\partial j'_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} = 0$, то для компонентов потенциала можно сохранить обычное соотношение $\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x_{\beta}} = 0$, при котором предыдущее уравнение сводится к

$$\square^2 A_{\alpha} = 4\pi (j_{\alpha} + j'_{\alpha}). \quad (67b)$$

Интегрирование этих дифференциальных уравнений приводит к обычному выражению для отстающих потенциалов, создаваемых непрерывным распределением электрического тока. Переходя затем к предельному случаю точечного электрона с зарядом e и магнитоэлектрическим моментом $\mu_{\alpha\beta}$, мы должны получить те же самые формулы, которые уже были выведены другим способом в § 5 главы IX.

§ 11. Борновская электродинамика точечного электрона. Хотя электромагнитные свойства электрона, обычно приписываемые его вращению вокруг собственной оси и связываемые с представлением о его пространственной протяженности, и могут быть описаны — правда, чисто формальным образом — и без помощи этого представления, однако, для электромагнитного объяснения его механических свойств это представление является неустранимым до тех пор, пока мы пользуемся клас-

сической теорией электромагнитного поля, выражаемой уравнениями Максвелла-Лоренца.

В конце главы VII было показано, что на основе теории Максвелла-Лоренца невозможно построить удовлетворительную динамическую теорию электромагнитного поля, т. е. такую теорию, в которой механические свойства—энергия, количество движения и т. д.—приписывались бы не электронам, а электромагнитному полю, и в которой частицы трактовались бы не как источники поля, а как его продукты, движущиеся в соответствии с законами сохранения электромагнитной энергии и количества движения.

Представление о пространственной протяженности электрона приводит при этом к ряду непреодолимых затруднений и противоречий. С другой стороны, трактуя электроны как точки, мы получаем бесконечно большие значения для энергии и количества движения образующего их поля.

Динамическая теория поля имеет, с принципиальной точки зрения, громадное преимущество перед обычной дуалистической теорией, рассматривающей материю как совокупность дискретных частиц и вводящей поле лишь для более удобного описания их взаимодействия; при этом законы электромагнитного поля оказываются необходимым дополнением совершенно от них независимыми законами механики.

Для того чтобы спасти динамическую теорию поля—а спасти ее необходимо во что бы то ни стало—приходится поэтому отрешиться от теории Максвелла-Лоренца или, вернее, видоизменить последнюю таким образом, чтобы устранить основную трудность, связанную с представлением о непротяженности электронов, а именно бесконечность электромагнитной энергии (и количества движения).

Мы уже упоминали выше (глава VII § 10), что подобная попытка была недавно сделана Борном.¹ Основными принципами теории Борна являются принцип конечности электромагнитного поля (вернее энергии) и эйнштейновская теория относительности, которая выросла на почве электромагнитной теории Максвелла-Лоренца. Однако, теория относительности гораздо общее, нежели эта классическая электромагнитная теория, и охватывает не только электромагнетизм, но и механику.

Естественно, поэтому, что новая динамическая теория, позволяющая объединить электромагнетизм и механику, должна удовлетворять общим требованиям теории относительности, т. е. быть релятивистски инвариантной.

Обобщение электромагнитной теории Максвелла-Лоренца, удовлетворяющее этому требованию релятивистской инвариантности и формально совпадающее с теорией Борна, было предложено еще в 1923 г. Эддингтоном.² Руководствуясь чисто мате

¹ М. Борн, Proc. Roy. Soc. Январь и март 1934.

² А. Эддингтон, Математическая теория относительности, ГТИ 1934.

матемическими соображениями, связанными с общей теорией относительности, Эддингтон предложил заменить Лагранжеву функцию поля $\frac{1}{16\pi} M_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2)$, фигурирующую в вариационном уравнении Шварцшильда, функцией \sqrt{g} , где

$$g = \begin{vmatrix} H_{11} - \alpha, & H_{12}, & H_{13}, & H_{14} \\ H_{21}, & H_{22} - \alpha, & H_{23}, & H_{24} \\ H_{31}, & H_{32}, & H_{33}, & H_{34} \\ H_{41}, & H_{42}, & H_{43}, & H_{44} \end{vmatrix} = \alpha^4 + \alpha^2 (E^2 - H^2) - (E \cdot N)^2, \quad (68).$$

т. е. тот же самый определитель, который уже встречался нам в § 5 этой главы в связи с теорией поступательного движения электрона в однородном электромагнитном поле.

Эддингтон, не имея, однако, в виду построения динамической теории поля, не обратил внимания на то обстоятельство, что предложенная им теория удовлетворяет требованию конечности электромагнитного поля и электромагнитной энергии.

Борн (не зная о работе Эддингтона) выдвинул на первый план именно это требование, и при разыскании новой теории руководствовался аналогией между механикой и электромагнетизмом.

Пользуясь вариационным методом, как наиболее простой и выпуклой формулировкой законов механики и электромагнетизма (и притом формулировкой, объединяющей те и другие, хотя — в рамках обычной теории — не вполне удовлетворительным образом), Борн обратил внимание на то обстоятельство, что обычному

выражению для Лагранжевой функции поля $\frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2)$ соответствует в Лагранжевой функции классической механики аналогичное ему выражение $\frac{1}{2} m_0 v^2$. Аналогия заключается в квадра-

тичности обоих выражений (причем в основе ее лежит пропорциональность между магнитным полем и скоростью v). Переход от классической механики к механике релятивистской осуществляется путем замены $\frac{1}{2} m_0 v^2$ на выражение $(1 - m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2})$,

которое автоматически исключает возможность скоростей, превышающих скорость c . Отсюда ясно, что переход от классической теории электромагнитного поля к такой теории, которая исключала бы возможность электрических напряженностей, превышающих некоторую критическую напряженность E_0 , может быть осуществлен путем замены $\frac{1}{8\pi} E^2$ выражением

$$\frac{1}{4\pi} E_0^2 \left(1 - \sqrt{1 - E^2/E_0^2} \right),$$

которое в первом приближении при $E \ll E_0$ сводится к $E^2/8\pi$. Это выражение не удовлетворяет, однако, требованию релятивистской инвариантности. Наиболее просто оно может быть

исправлено путем замены E^2 разностью $E^2 - H^2$, которая представляет собой релятивистски инвариантную величину. Мы приходим, таким образом, к Лагранжевой функции поля следующего вида:

$$L = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}} \right) = \\ = \frac{1}{4\pi} E_0^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{E_0^2} \sum_{\alpha < \beta} H_{\alpha\beta}^2} \right), \quad (68a)$$

весьма близкой к той, которая была предложена Эддингтоном.¹

Подставляя это выражение в вариационное уравнение Шварцшильда $\delta L d\Omega = 0$ и полагая попеременно

$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad (68b)$$

получаем

$$\delta \int L d\Omega = \int \frac{\partial L}{\partial H_{\alpha\beta}} \delta H_{\alpha\beta} d\Omega = 0,$$

или, вводя обозначение

$$4\pi \frac{\partial L}{\partial H_{\alpha\beta}} \equiv P_{\alpha\beta} = \frac{H_{\alpha\beta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{E_0^2} \sum_{\alpha < \beta} H_{\alpha\beta}^2}}, \quad (69)$$

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \quad (69a)$$

Эти уравнения совместно с уравнениями

$$\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial H_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (69b)$$

которые совершенно эквивалентны равенствам $H_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}$,

и заменяют классические уравнения Максвелла-Лоренца для „вакуума“, т. е. при отсутствии каких-либо электрических зарядов.

Возвышая равенства (69) в квадрат и складывая, имеем

$$\sum_{\alpha < \beta} P_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{\alpha < \beta} H_{\alpha\beta}^2}{\left(1 + \frac{1}{E_0^2} \sum_{\alpha < \beta} H_{\alpha\beta}^2 \right)},$$

¹ Мы сохранили знак (двойной) суммы в выражении $\sum_{\alpha < \beta} H_{\alpha\beta}^2$ для того, чтобы не вводить попарно равных членов $H_{\alpha\beta}^2$ и $H_{\beta\alpha}^2$.

откуда получается соотношение

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{E_0^2} \sum_{\alpha < \beta} \sum H_{\alpha\beta}^2} = 1 - \frac{1}{E_0^2} \sum_{\alpha < \beta} \sum P_{\alpha\beta}^2, \quad (69c)$$

позволяющее выразить величины $H_{\alpha\beta}$ через $P_{\alpha\beta}$.

Переписывая уравнения (69a) и (69b) в обычном трехмерном виде, имеем

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

где \mathbf{D} — вектор с компонентами $-iP_{14}, -iP_{24}, -iP_{34}$, т. е.

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}}, \quad (70a)$$

а \mathbf{B} — вектор с компонентами P_{23}, P_{31}, P_{12} , т. е.

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}}. \quad (70b)$$

Вектор \mathbf{D} соответствует, следовательно, электрической индукции обычной теории. Что касается вектора \mathbf{B} , то соответствующий ему вектор обычно обозначается через \mathbf{H} и называется „магнитным полем“, тогда как название „магнитной индукции“ и обозначение \mathbf{B} присваивается нашему вектору \mathbf{H} (см. том II, глава I).

Указанное соответствие между борновской теорией электромагнитного поля в вакууме и максвелловской теорией электрически и магнитно поляризуемой (непроводящей) среды дает возможность наглядного истолкования новой теории в терминах старой; для этого лишь нужно трактовать пустоту как фиктивную среду с диэлектрической постоянной

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}} = \sqrt{1 + \frac{D^2 - B^2}{E_0^2}} \quad (70c)$$

и магнитной проницаемостью $\mu = \frac{1}{\epsilon}$.

Для обобщения предыдущей теории на случай наличия зарядов и токов, распределенных в пространстве с конечной объемной плотностью j_α , представляется наиболее простым и естественным заменить нуль в правой части уравнений (69а) вектором $4\pi j_\alpha$, т. е. положить

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 4\pi j_\alpha. \quad (71)$$

Обобщенные уравнения новой теории (71) и (69b) или (68b) соответствуют уравнениям классической теории для проводящей среды, причем „истинной“ плотности тока j_α соответствует плотность тока, образуемого „свободными“ (подвижными) зарядами (см. том II, гл. I).

Уравнения (71) могут быть получены из вариационного принципа $\delta \int L d\Omega = 0$, если выражение (68а) для Лагранжевой функции дополнить членом $A_\alpha j_\alpha$, так же как и в классической теории, т. е. положить

$$L = \frac{1}{4\pi} E_0^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{E_0^2} \sum_\alpha \sum_{\beta < \alpha} H_{\alpha\beta}^2} \right) + A_\alpha j_\alpha. \quad (71a)$$

С точки зрения динамической теории поля вариационное уравнение $\delta \int L d\Omega = 0$ должно содержать в себе не только законы электромагнетизма, но и законы механики. Однако, прежде чем исследовать этот вопрос, мы рассмотрим вкратце некоторые элементарные следствия предыдущих уравнений.

В частном случае покоящегося точечного заряда e мы получаем, так же как и в обычной теории:

$$D = \frac{e}{r^2}, \quad (72)$$

где r — расстояние рассматриваемой точки от заряда e . Подставляя сюда выражение D через E по формуле (70а) (при $H=0$) или, что еще проще, полагая

$$E = \frac{1}{\epsilon} D = \frac{D}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{E_0^2}}},$$

согласно (70с), находим

$$E = \frac{e}{\sqrt{r_0^4 + r^4}}, \quad (72a)$$

где r_0 — некоторая длина, определяемая формулой

$$E_0 = \frac{e}{r_0^2} \quad (72b)$$

и играющая роль „радиуса электрона“. Отсюда видно, что поле E остается конечным при любых расстояниях r , стремясь к максимальному значению E_0 при $r=0$.

При $r \gg r_0$ формула (72a) сводится практически к обычной формуле $E = \frac{e}{r^2}$. В обычной электростатике, наряду с „истинным“ зарядом, плотность которого определяется расхождением вектора \mathbf{D} , рассматривают также „свободный“ заряд, плотность которого определяется формулой $\rho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}$. При наличии

радиальной симметрии эта формула сводится к $\frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E)$.

Таким образом, истинному заряду e , сконцентрированному в точке $r=0$, соответствует „свободный“ или „кажущийся“ заряд, распределенный с конечной объемной плотностью

$$\rho = e \frac{r_0^4}{2\pi r(r_0^4 + r^4)^{3/2}}. \quad (72c)$$

Легко видеть что полная величина этого заряда $\int \rho' dV$ равна истинному заряду e . В самом деле, полагая $dV = 4\pi r^2 dr$, имеем, согласно (72a),

$$\int \rho' dV = \int_0^\infty \frac{d(r^2 E)}{dr} dr = (r^2 E)_{r=\infty} = e.$$

Понятие о кажущемся заряде может быть распространено на общий случай произвольного электромагнитного поля, с помощью формулы

$$j_\alpha = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \quad (73)$$

которая служит для определения его плотности и соответствующей плотности тока. Таким образом, в новой теории открывается возможность примирения обоих представлений об электроне, взаимно исключавшихся с точки зрения классической теории. А именно, судя о распределении его заряда на основании „индукции“ \mathbf{D} (т. е. определяя плотность формулой

$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D}$) мы можем трактовать его как точку; судя же о распределении того же самого заряда на основании „напряженности“ \mathbf{E} (по формуле $\rho' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}'$), мы приходим к представлению о протяженном электроне. Подобное примирение альтернативных взглядов путем „раздвоения“ основных понятий теории случалось в физике весьма часто.

§ 12. Динамика точечного электрона в теории Борна. Теория поля, изложенная в предыдущем параграфе, остается бессодержательной до тех пор, пока она не связывается с механикой, т. е. пока фигурирующие в ней величины не приобретают динамического смысла.

В классической теории поля эта „динамизация“ осуществлялась с помощью формулы:

$$F_{\alpha} = H_{\alpha\beta} f_{\beta} \quad (74)$$

для (четырёхмерного) вектора импульса - работы, отнесенного к единице объема и времени, или же формулы

$$f_{\alpha} = \frac{e}{c} H_{\alpha\beta}^0 \frac{dx_{\beta}}{d\tau} \quad (74a)$$

для импульс-работы внешней силы, действующей на точечный электрон. Следует подчеркнуть, что в этой формуле $H_{\alpha\beta}^0$ означает внешнее поле, тогда как в (74) $H_{\alpha\beta}$ представляет собой полное поле; таким образом сила F_{α} включает действие электрона на самого себя.

Динамическая теория поля получается исходя из выражения (74) с помощью принципа Лоренца о равенстве полной силы нулю — в среднем для всего электрона. Для удовлетворительной формулировки этой теории необходимо считать электрон точкой, — что в рамках классической теории поля невозможно, вследствие проистекающей отсюда бесконечности энергии электрона.

Подобная бесконечность исключается, однако, в новой теории, в этом заключается основной ее смысл, — так что здесь представление о непротяженности электрона становится допустимым.

Прежде чем, однако, применять его, мы преобразуем выражение (74) с помощью формул (71) для компонент (истинной) плотности тока. Мы получаем при этом:

$$4\pi F_{\alpha} = H_{\alpha} \frac{\partial P_{\beta\gamma}}{\partial x_{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} (H_{\alpha\beta} P_{\beta\gamma}) - P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}}.$$

Пользуясь антисимметрией тензоров P и H и независимостью суммы от обозначения индексов суммирования, имеем далее:

$$\begin{aligned} P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}} &= P_{\gamma\beta} \frac{\partial H_{\beta\alpha}}{\partial x_{\gamma}} = \frac{1}{2} P_{\beta\gamma} \left(\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial H_{\gamma\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right) = -\frac{1}{2} P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}} = \\ &= -2\pi \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha}}, \end{aligned}$$

согласно (60b) и (69), где L определяется формулой (68a). Таким образом

$$F_{\alpha} = \frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\gamma}}, \quad (75)$$

где

$$T_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4\pi} H_{\alpha\beta} P_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\gamma} L. \quad (75a)$$

Этот тензор представляет собой тензор электромагнитной энергии и количества движения в новой теории. Для обеспечения законов сохранения энергии и количества движения остается лишь положить

$$F_{\alpha} = 0, \quad (75b)$$

чем фактически исключается понятие силы. В отличие от старой теории, где равенство $F_{\alpha} = 0$ выполнялось лишь „в среднем“ для всего объема электрона, в новой теории оно выполняется точно во всех точках пространства, в том числе и в тех, где находятся электроны, создающие поле (H, P) или, вернее, образуемые им.

Из формулы (75a) мы получаем, в частности, следующее выражение для плотности электромагнитной энергии:

$$T_{44} = \xi = \frac{1}{4\pi} \left[ED - \frac{E_0^2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}} \right) \right], \quad (76)$$

которое с помощью соотношения

$$D = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}}$$

приводится к виду

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{E_0^2 + H^2}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}} - E_0^2 \right)$$

или

$$\xi = \frac{1}{8\pi} \frac{E^2 + H^2}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}} + \frac{E_0^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}} + \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}} - 2 \right). \quad (76a)$$

При отсутствии магнитного поля оно сводится к виду:

$$\xi = + \frac{E_0^2}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}} - 1 \right). \quad (76b)$$

Таким образом, зависимость ξ от E оказывается в этом случае совершенно аналогичной зависимости кинетической энергии электрона $m \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$ от его скорости (причем E_0 играет

роль скорости света).

Хотя согласно (76b) плотность энергии становится бесконечной в „центре“ электрона (где $E = E_0$), однако полная энергия $U = \int \xi^2 dV$, как нетрудно убедиться, остается конечной в случае покоящегося точечного электрона.

Выражая E через D , имеем

$$\xi = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(\sqrt{1 + \frac{D^2}{E_0^2}} - 1 \right)$$

или, так как $D = \frac{e}{r^2}$,

$$\xi = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(\sqrt{1 + \frac{e^2}{E_0^2 r^4}} - 1 \right).$$

Отсюда для полной энергии получаем выражение:

$$U = \int_0^\infty \xi^2 4\pi r^2 dr = E_0^2 \int_0^\infty \left(\sqrt{1 + \frac{e^2}{E_0^2 r^4}} - 1 \right) r^2 dr,$$

или, полагая $E_0 = \frac{e}{r_0^2}$ (r_0 — эффективный „радиус“ электрона)

и $\frac{r}{r_0} = x$

$$U = \frac{e^3}{r_0} \int_0^\infty (\sqrt{1 + x^4} - x^2) dx.$$

Легко видеть, что интеграл¹ имеет значение, равное 1, так что

$$U = 1, \dots \frac{e^2}{r_0}.$$

От случая покоящегося электрона легко перейти с помощью преобразований теории относительности к случаю электрона движущегося прямолинейно и равномерно.

Если это движение происходит в направлении оси x со скоростью v , то мы получаем

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma E_y, \quad E'_z = \gamma E_z;$$

¹ Разбиваем интервал интегрирования $(0, \infty)$ на два $(0, 1)$ и $(1, \infty)$. Далее при $x > 1$ полагаем $(\sqrt{1 + x^4} - x^2) = x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} - 1 \right] = x^2 \left[\frac{1}{2x^4} + \dots \right] = \frac{1}{2x^2} \dots$

$$H'_x = 0, H'_y = \gamma \frac{v}{c} E_x, H'_z = -\gamma \frac{v}{c} E_y$$

или

$$\mathbf{H}' = \gamma \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}',$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Совершенно таким же образом через вектор \mathbf{D} выражаются векторы \mathbf{D}' и \mathbf{B}' .

Пользуясь предыдущими формулами, мы можем вычислить количество движения электрона как функцию его скорости.

Плотность электромагнитного количества движения равна:

$$\mathbf{G}' = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D}' \times \mathbf{H}' = \frac{\varepsilon}{4\pi c} \mathbf{E}' \times \mathbf{H}',$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E'^2 - H'^2}{E_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}}.$$

Полагая здесь

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}',$$

получаем

$$G'_x = \frac{v}{4\pi c^2} \varepsilon (E_y'^2 + E_z'^2) = \frac{v\gamma^2}{4\pi c^2} \varepsilon (E_y^2 + E_z^2),$$

и, следовательно, в силу шаровой симметрии поля \mathbf{E} в координатной системе x, y, z , в связи с $dV' = dx' dy' dz' = \frac{1}{\gamma} dx dy dz =$

$$= \frac{1}{\gamma} dV;$$

$$g' = \int G'_x dV' = \frac{v\gamma}{4\pi c^2} \frac{2}{3} \int \frac{E^2}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}} dV,$$

т. е.

$$g' = \frac{v\gamma}{4\pi c^2} \frac{2}{3} E_0^2 \left[\int \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}} - 1 \right) dV + \int \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \right) dV \right]. \quad (77)$$

Первый интеграл в этой формуле, умноженный на $\frac{E_0^2}{4\pi}$, равен, согласно (76b), электрической энергии покоящегося электрона U . При $E \ll E_0$, этот интеграл практически совпадает со вторым, что приводит нас к обычной формуле

$$g' = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2} \gamma v = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

соответствующей выражению $m_0 = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2}$ для покоящейся массы электрона. В Борновской теории точечного электрона при $U \sim \frac{e^2}{r_0}$ вместо $\frac{4}{3}$ получается несколько отличный коэффициент, который может быть легко вычислен, а именно:

$$\begin{aligned} E_0 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}} - 1 \right) + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \right) \right] = \\ = E_0 \left(\sqrt{1 + \frac{D^2}{E_0^2}} - 1 \right) + E_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{E_0^2}}} \right) = \\ = \sqrt{E_0^2 + D^2} - E_0 - E_0 \frac{\partial}{\partial E_0} (\sqrt{E_0^2 + D^2} - E_0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{E_0^2}{4\pi} \int \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \right) dV = -E_0^2 \frac{\partial}{\partial E_0} \left(\frac{U}{E_0} \right).$$

Вспоминая, что $E_0 = \frac{e}{r_0^2}$ и что, следовательно, $U \sim r_0^{-1} \sim E_0^{1/2}$,

получаем

$$-E_0^2 \frac{\partial}{\partial E_0} \left(\frac{U}{E_0} \right) = \frac{1}{2} U,$$

т. е.

$$\frac{E_0^2}{4\pi} \left[\int \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}} - 1 \right) dV + \int \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \right) dV \right] = \frac{3}{2} U.$$

Множитель $\frac{3}{2}$ сокращается с множителем $\frac{2}{3}$ в формуле (77)

и в результате для покоящейся массы электрона получается формула

$$m_0 = \frac{U}{c^2},$$

причем

$$g' = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Полученный результат, т. е. строгое выполнение Эйнштейновского соотношения между энергией и массой, без коэффициента $\frac{4}{3}$, характерного для классической теории, представляется весьма удовлетворительной чертой новой теории Борна.

Мы должны теперь вывести уравнение движения электрона в заданном внешнем электромагнитном поле. На первый взгляд эта задача решается весьма просто с помощью обычного уравнения Лоренца-Эйнштейна:

$$\frac{dg}{dt} = e \left(E_1 + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_1 \right),$$

где E_1 , H_1 — напряженности внешнего поля в точке, где находится заряд электрона e .

В действительности, однако, вопрос осложняется тем обстоятельством, что в новой теории электромагнитное поле не обладает свойством аддитивности. Поэтому „внешняя“ сила, действующая на электрон в поле, которое в случае его отсутствия сводилось бы к E_1 , H_1 , не может определяться формулой Лоренца. Для вычисления этой силы мы будем исходить из выражения для энергии и полного электромагнитного поля. При этом для простоты мы ограничимся случаем поля электростатического, т. е. будем рассматривать электрон в координатной системе x , y , z , в которой он покоится. Основная трудность заключается в том, чтобы разделить результирующее поле E или D на две составные части, соответствующие внешним источникам, например, другим электронам, находящимся на очень большом расстоянии от данного, и самому рассматриваемому полю.

Принимая во внимание, что вектор D связан с истинным распределением заряда электронов таким же образом, как и вектор E в обычной теории, мы предположим, что в новой теории вектор D удовлетворяет условию аддитивности, т. е. что

$$D = D_1 + D_2, \quad (78)$$

где вектор $D_2 = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}$ обусловлен данным электроном, а D_1 — внешними источниками. Следует заметить, что это равенство не может претендовать на абсолютную точность, так как, в отли-

чие от поля \mathbf{E} , поле \mathbf{D} даже в случае поля электростатического не имеет потенциального характера (если $\mathbf{E} = \nabla\varphi$, то вектор

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}}$$

может быть представлен как градиент некоторого потенциала лишь в исключительных случаях). Однако, оно должно выполняться тем точнее, чем больше расстояние внешних источников от данного электрона (в сравнении с r_0). При этом \mathbf{D}_1 , практически, совпадает с \mathbf{E}_1 .

Так как на не слишком больших расстояниях от электрона $\mathbf{D}_2 \gg \mathbf{D}_1$, то при вычислении его потенциальной энергии по отношению к внешним источникам можно в выражении

$$\xi = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(\sqrt{1 + \frac{D^2}{E_0^2}} - 1 \right)$$

для результирующей плотности электрической энергии положить

$$D^2 = D_2^2 + 2\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1 = D_2^2 + 2\mathbf{D}_2\mathbf{E}_1$$

и далее

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{E_0^2}{4\pi} \left[\sqrt{1 + \frac{D_2^2}{E_0^2}} \left(1 + \frac{\mathbf{D}_2\mathbf{E}_1}{E_0^2 \left(1 + \frac{D_2^2}{E_2^2} \right)} \right) - 1 \right] = \\ &= \frac{E_0^2}{4\pi} \left(\sqrt{1 + \frac{D_2^2}{E_0^2}} - 1 \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{D}_2\mathbf{E}_1}{\sqrt{1 + \frac{D_2^2}{E_0^2}}} = \xi_{22} + \xi_{12}. \end{aligned}$$

Здесь первый член (ξ_{22}) представляет собой плотность энергии поля, создаваемого электроном, взятым в отдельности; для нашей задачи он не играет роли, так как внешняя сила, действующая на электрон, определяется вторым членом, который и представляет собой взаимную потенциальную энергию. Так как

$$\frac{\mathbf{D}_2}{\sqrt{1 + \frac{D_2^2}{E_0^2}}} = \mathbf{E}_2,$$

то эта взаимная энергия в теории Борна выражается таким же точно образом, как и в обычной теории.

Преобразуя интеграл $U_{12} = \int \xi_{12} dV = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 dV$ с помощью

формулы $E_1 = -\nabla\varphi_1$, мы можем привести его к следующему виду:

$$U_{12} = \int \varphi_1 \rho_2^* dV, \tag{79}$$

где

$$\rho_2^* = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} E_2 \tag{80}$$

представляет собой „кажущуюся“ плотность электрического заряда. Мы видим, следовательно, что внешнее поле действует на точечный электрон таким образом (с силой $F = \nabla U_{12}$), как если бы его заряд был распределен в пространстве непрерывно с объемной плотностью

$$\rho^* = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_2) = \frac{e}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\sqrt{r_0^4 + r^4}} \right) = \frac{er_0^4}{2\pi r (r_0^4 + r^4)^{3/2}}.$$

Заметим, что результирующая величина заряда, соответствующего этой кажущейся плотности, равна e , т. е. истинному заряду электрона. Этот результат непосредственно вытекает из формулы Гаусса:

$$\int \rho_2^* dV = \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} E_2 dV = \frac{1}{4\pi} \oint E_{2n} dS$$

в применении к весьма удаленной шаровой поверхности с центром в электроне ($E_{2n} = E_2 = D_2 = \frac{e}{r^2}$).

Поскольку о распределении заряда электрона мы судим по действующей на него внешней силе, „кажущееся“ распределение этого заряда в пространстве может считаться столь же истинным, как и концентрация его в одной точке. Протяженность и непротяженность электрона, взаимно исключавшие друг друга в старой теории, оказываются вполне примиримыми представлениями в новой теории: электрон непротяжен с точки зрения поля D и протяжен с точки зрения поля E .

При этом, однако, устраняются все трудности, которые были связаны с представлением о протяженном электроне в старой теории.

Предыдущие результаты могут быть обобщены на случай движения электрона в произвольном внешнем электромагнитном поле. Полагая попрежнему $P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta}^{(1)} + P_{\alpha\beta}^{(2)}$ (т. е. считая поле тензора $P_{\alpha\beta}$ аддитивным), нетрудно разделить компоненты тензора $T_{\alpha\gamma}$, определяемые формулой (75а), на две части $T_{\alpha\gamma}^{(2,3)}$ и $T_{\alpha\gamma}^{(1,3)}$, из коих первая относится к полю, создаваемому самим электро-

ном, а вторая — к взаимодействию его с внешним полем. Уравнения $\frac{\partial T_{\sigma\gamma}}{\partial x_\gamma} = 0$, переписанные в виде

$$\frac{\partial T_{\sigma\gamma}^{(2,2)}}{\partial x_\gamma} = - \frac{\partial T_{\sigma\gamma}^{(1,2)}}{\partial x_\gamma},$$

превращаются при этом в уравнения движения электрона и свдвдятся приближенно (если пренебречь радиационным трением) к виду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \int (\rho_2^* \mathbf{E}_1 + \mathbf{j}_2^* \times \mathbf{H}_1) dV,$$

где

$$\rho_2^* = - \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}_2 \text{ и } \mathbf{j}_2^* = \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \mathbf{H}_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} \right).$$

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ¹.

- Абберация света 334
 Абрагам, М. 221, 242, 263
 Ампера токи 67
 Аффинные преобразования 302
 Бивектор 284, 319
 Борн, М. 275, 361, 408
 Борновский точечный электрон 275, 408
 и след.
 Боскович 270
 Брадлей 334
 Вариационная теория 344, 361, 372,
 401
 Вебер 67
 Вектор волновой 165, 337
 — излучения 227
 Вектор с шестью проекциями, см. Би-
 вектор
 — четырехмерный 195, 277 и след.
 Вейсс, П. 265
 Взаимоиндукция 213
 Вириала теорема 381
 Вихрь 10, 11
 Волновая зона 164
 Волновой вектор 337
 Волны длина 160, 162
 — шаровые 148
 — электромагнитные 159
 Вращательный момент 46
 — — внутренний 256, 262
 Вращающийся электрон 244, 256, 324,
 394
 Вращение 10, 11
 Временно-образный вектор 318
 Галилея преобразование 292
 Гамильтона функция 368 и след.
 Гамильтона-Якоби уравнение
 367
 Гармонически сопряженные точки 113
 Гармонические функции (см. шаро-
 вые ф.)
 Гаудсмит 265
 Гаусса формула 16
 Герглотц 194
 Герца вектор 98, 145
 Градиент
 Грина функция 123
 — формула 123
 Даламбера уравнение 146
 Движение электрона в неизменном во
 времени и пространстве поле 375
 — в поле плоской световой волны 379
 Движение вокруг покоящегося ядра
 388
 Двойной слой 73, 96, 126
 Действия функция 367 и след.
 Дефект массы 387
 Дивергенция 10
 Диполь магнитный 66, 180
 — математический 101
 — электрический 42 и след.
 — элементарный 42, 91
 Дирак П. А. М. 271
 Дирихле принцип 120
 Диэлектрики 53
 Доплера-Физо принцип 336
 Единицы электростатические и элек-
 тромагнитные 57
 Заряда плотность 54
 Затухание при излучении 228
 Излучения вектор 227
 Изотропия (пространства, мира) 29)
 Импульс силы 231
 Инвариантность физических законов
 286
 — скорости света 297
 Индукционные коэффициенты 213, 217
 Индукция электрическая 128
 — электромагнитная 135
 Инерциальная система 296 и след.
 Источник 12
 Квадруполь 101
 Клаузиус 383
 Ковариантность 287
 Колебания силы 160
 Количество движения электромагнит-
 ное 236
 Комплексное интегральное предста-
 вление величин, характеризующих
 поле 197, 338, 343
 Конвективный потенциал 192
 Консервативные силы 45
 Кулона закон 79
 Лагранжа функция 367 и след.
 401
 — ряд (для потенциалов) 201

¹ Слова, часто встречающиеся в тексте, в указателе упоминаются лишь один раз соответственно той странице, где они появляются впервые.

- Лапласа оператор 20
 — уравнение 194
 Лармора прецессия 266
 Лежандра полиномы 105
 Лежбниц 270
 Лиенара-Вихерта потенциалы 198, 199, 184
 Линейные токи 55
 Лоренц, Г. А. 80, 211
 Лоренца контракционная гипотеза 224
 — преобразования 291, 301
 — принцип движения 221
 — — равновесия 243
- Магнетоны 67, 95, 205
 Масса продольная и поперечная 246
 — релятивистская 353
 — электромагнитная 219
 Массы дефект 387
 Максвелл, Д. К. 142
 Максвелла-Лоренца уравнения 143
 Максвелловы напряжения 232
 Минковский 283
 Минковского «мир» 310
 Мировая линия 349
 Молекулярные токи и молекулярные магниты 67
 Мультиполь 101
 Мультиполя излучение 173
 Момент высшего порядка 102, 106
 — геометрический (кривой) 5
 — индуцированный 128
 — количества движения (электрический) 60
 — магнитный (тока) 57
 — электрический (диполя) 42
- Ньютона принцип движения 221, 352
 — — относительности 296
 Напряженность поля электрического 47
 — — магнитного 60, 89
- Октуполь 101
 Ортогональность (шаровых функций) 119
 Ортогональности условие (при линейных преобразованиях) 288, 300
 Осевые векторы 102
 Оси тензора 35
 — мультиполя 103
 Осциллятор движущ. произв. образом 337 и след.
 — движущийся равн. и прямолин. 331
 — магнитный 165
 — электрический 154
 Относительности принцип 136, 294 и след.
 Относительность направления 285
 — скорости 136
- Планк М. 227
 Плотность заряда объемная 54
 — — линейная 82
 — — поверхностная 74
 — потока энергии 225
 — эл. магн. колич. движ. 236
 — покоящаяся (электрич.) 319
 — тока объемная 52
 — — поверхностная 74
 Поверхностный заряд 74
 — ток 75, 124
 Поверхность уровня 88
 Пойнтинга вектор 227
 Поле без источников 54
 — без вихрей 50
 Поля напряженность электрич. 47
 — — магнитн. 60
 Поляризации коэффициент (или тензор) 129
 Поляризация магнитная 99
 — электрическая 52, 98
 — релятивистская (электрона) 259, 324
 — света 160
 Поляризационный потенциал 98, 99, 145
 Пондеромоторные силы 135
 Поперечные силы 135
 Преобразование к главным осям 35
 Прецессия (электрона) 256, 266
 Причинности принцип 149, 306
 Пространственно-временная точка 194
 Пространственно-образный вектор 318
 Потенциал векторный (магнитн.) 60
 — запаздывающий или отстающий 148
 — поляризационный 98, 99, 145
 — разрывный 96
 — скалярный (электрич.) 50
 — четырехмерный 194
 Поток 11
 Постоянный ток 53
 Поступательное (равномерн.) движение электрона 189, 329
- Ранг (тензора) 28
 Радиационное трение 229
 Реакции момент 256, 262
 Реакция электрона 220
 Ротор 9, 11
- Самоиндукции коэффициент 217
 Самоиндукция электрона 220
 Световое давление 239
 Секториальная скорость 95
 Силовые колебания 160
 — линии 87
 Сингулярная линия 197
 — точка 69
 Скорость критическая 87
 — света 87
 Собственное время 349

- Соленоид 102
 Сопряженные заряды 104
 Сопротивление излучения 229
 Стокса формула 16
- Тензор высшего ранга 39
 — напряжений 233 и след.
 — транспонированный 30
 Тензоров умножение 31
 Ток линейный 55
 — смещения 142
 — соленоидальный 74
 — стационарный 55
 — электрический 52
 Тока плотность 52
 — сила 53
 Томсон, Дж. Дж. 221
 Точечный заряд (электрон) 182, 272, 408
- Уленбек 265
 Уравнение Даламбера 146
 Уравнения Гамильтона-Якоби 367 и след.
 — движения Лоренца 221
 — — Максвелла-Лоренца 143
 — Ньютона 221, 352
 — Эйнштейна 353 и след.
- Частота 162
- Четырехмерный вектор 195, 277 и след.
- Шаровые функции 95 и след.
 Шварцшильда вариационный принцип 346, 365
 Шредингер Э. 271
- Эддингтон, А. С. 275
 Эйнштейн, А. 296, 300
 Эквивалентности принцип между диполями и токами 67
 — между электрическими и магнитными системами 179
 — — энергией и массой 222, 237, 249
 Эквипотенциальная поверхность 88
 Электроны 42
 — величина и масса 221
 Электромагнитная теория света 161
 — масса 219
 Энергия магнитн. (потенц.) 61
 — магнитн. (кинет.) 139, 210, 218
 — механич. и лучист. 228
 — собств. и взаимн. 210, 218
 — электрич. (потенц.) 47
 Энергии принцип 46, 60
 — плотность 208
 — потока плотность 225
 — уравнение 224
 Эфир 295
 Эффективный момент 150

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр

Введение

Основы векторного и тензорного исчисления.

А. Сложение, внутреннее и внешнее умножение векторов	3
В. Дифференциальные операции векторного исчисления	8
С. Преобразование координат и тензоры	26

Отдел I.

Электромагнитные действия, не зависящие от времени.

Глава I. Электростатические действия в связи с принципом энергии.

§ 1. Электрические диполи	41
§ 2. Момент электрического диполя	42
§ 3. Системы элементарных диполей	44
§ 4. Стабика элементарного диполя; напряженность электрического поля	45
§ 5. Невихревой характер электрического поля и его действие на отдельные заряды (полюсы)	48
§ 6. Вывод действия диполей к отдельным полюсам	50

Глава II. Электрокинетические (магнитные) действия в связи с принципом энергии.

§ 1. Электрические токи	52
§ 2. Стационарные электрические токи	53
§ 3. Магнитный момент линейного тока	55
§ 4. Системы элементарных токов; неэлементарные токи	57
§ 5. Статика электрических токов; магнитное поле	60
§ 6. Действие магнитного поля на отдельные элементы тока и движущиеся заряды.	62

Глава III. Структура электрических и магнитных полей в связи с принципом эквивалентности.

§ 1. Эквивалентность элементарных диполей и токов	66
§ 2. Основные уравнения электрического и магнитного поля в пустом пространстве.	68
§ 3. Основные уравнения электромагнитного поля для особых точек	70
§ 4. Соотношение между постоянными C_1 и C_2 . Неэлементарные токи и двойные слои; неэлементарные диполи и соленоиды	73
§ 5. Определение электрического поля из распределения зарядов	78
§ 6. Определение магнитного поля из распределения токов	82
§ 7. Графическое представление электрического и магнитного поля	87
§ 8. Поля и взаимодействия элементарных диполей и токов	91
§ 9. Скалярный потенциал неэлементарного линейного тока	95
§ 10. Электрическая и магнитная поляризация и поляризационные потенциалы	97

Глава IV. Представление произвольных систем при помощи мультиполей. Теория потенциала.

§ 1. Определение мультиполя	101
§ 2. Поле и энергия мультиполей	102
§ 3. Представление произвольных электрических систем при помощи мультиполей	106
§ 4. Гармонически сопряженные системы, электрический потенциал внутри шара	112
§ 5. Эквивалентный поверхностный заряд	117
§ 6. Функция Грина	121
§ 7. Эквивалентные поверхностные токи	124
§ 8. Индуцированные электрические и магнитные моменты	128

Отдел II.

Глава V. Общие законы электромагнитного поля.

§ 1. Электромагнитная индукция в постоянном магнитном поле	133
§ 2. Электромагнитная индукция в магнитном поле, меняющемся со временем, принцип относительности движения	135
§ 3. Основные уравнения Максвелла для переменных электромагнитных полей	139
§ 4. Дифференциальные уравнения для электромагнитных потенциалов	143
§ 5. Интегрирование общих дифференциальных уравнений электромагнитного поля: запаздывающие потенциалы	146
§ 6. Электромагнитное поле элементарного колеблющегося диполя (осциллятора)	154
§ 7. Электромагнитные волны и природа света	159
§ 8. Переход от сферических к плоским валам	162
§ 9. Строгое решение задачи об определении электромагнитного поля при заданном распределении зарядов и токов; принцип Гюйгенса	167
§ 10. Электромагнитное поле осцилляторов (мультиполей) высшего порядка	173
§ 11. Эквивалентные магнитные системы. Магнитный осциллятор	178

Глава VI. Электромагнитное поле движущегося точечного заряда (электрона).

§ 1. Электромагнитные потенциалы движущегося точечного заряда (электрона)	182
§ 2. Напряженность электрического и магнитного полей электрона	185
§ 3. Специальное рассмотрение прямолинейного и равномерного движения электрона	189
§ 4. Электроны как особенные точки в пространственно-временном континууме. Новый вывод электромагнитных потенциалов движущегося точечного заряда	194
§ 5. Формальное приведение запаздывающих дальнего действия к мгновенным	200

Глава VII. Энергия и количество движения в случае нестационарных электромагнитных явлений. Динамика электронов.

§ 1. Электрическая энергия системы покоящихся зарядов	204
§ 2. Магнитная энергия электрических токов	213
§ 3. Электромагнитная теория массы	218
§ 4. Электромагнитная энергия и излучение	224
§ 5. Преобразование электрических и магнитных сил; электромагнитный импульс	231
§ 6. Поступательное движение Лоренцова электрона	239
§ 7. Вращательное движение шарообразного электрона	249
§ 8. Комбинация вращательного и поступательного движения	256
§ 9. Магнетоны	263
§ 10. Критический разбор теории протяженных электронов	268
§ 11. Соотношение между полем и частицами; точечные электроны	272

Отдел III.

Теория относительности и электромагнетизм как статика в четырехмерном пространстве.**Глава VII. Основы теории относительности.**

§ 1. Пространственно-временная симметрия электромагнитных уравнений	277
§ 2. Преобразования Лоренца	285
§ 3. Принцип относительности Эйнштейна	294
§ 4. Графическое изображение движения и новый вывод преобразований Лоренца	301
§ 5. Пространственные и временные расстояния в теории относительности	306

Глава IX. Приложение теории относительности к электромагнитным явлениям.

§ 1. Преобразование векторов	315
§ 2. Преобразование бивекторов	319
§ 3. Преобразование тензора энергии; сила и вращательный момент	326
§ 4. Приложение релятивистских формул преобразования к прямолинейному равномерному движению электронов и осцилляторов и к р.с. пространению световых волн	329
§ 5. Электромагнитное поле произвольно движущегося осциллятора	337
§ 6. Вывод основных уравнений электромагнитного поля из вариационного принципа	344

Глава X. Релятивистская механика.

§ 1. Элементарная теория поступательного движения	349
§ 2. Теория поступательного движения электрона в заданном электромагнитном поле	354
§ 3. Вариационная теория поступательного движения электрона в заданном электромагнитном поле	361
§ 4. Трехмерная форма вариационного принципа	365
§ 5. Функция действия и дифференциальное уравнение Гамильтона-Якоби	367
§ 6. Простейшие примеры движения свободного электрона	375
§ 7. Система электронов; теорема вириала и дефект массы	381
§ 8. Движение электрона по замкнутой орбите	388
§ 9. Вращательное и поступательное движения магнитного электрона	394
§ 10. Применение вариационного метода к теории магнитного электрона (с собственным вращением)	401
§ 11. Борновская электродинамика точечного электрона	407
§ 12. Динамика точечного электрона в теории Борна	414

С374

Ф 87

Проф. Я. И. ФРЕНКЕЛЬ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ТОМ ПЕРВЫЙ

ОНТИ ◀ ГТТИ ◀ 1934