

Проф. Я. И. ФРЕНКЕЛЬ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ТОМ II

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРО-
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
к переизданию в 1935 г. Комитетом по
высшему техническому образованию при
ЦИК СССР*



ОНТИ ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1935 М О С К В А

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**§ 1. Зависимость усредненных величин, характеризующих поле, от усредненных субстанциальных величин**

1. Определение средних значений различных величин. Электромагнитные явления в материальных телах, состоящих из очень большого числа элементарных частиц — молекул, атомов или электронов, — чрезвычайно сложны. Точное описание этих явлений практически невозможно и даже едва ли необходимо, ибо наши органы чувств и средства наблюдения слишком грубы, чтобы обеспечить возможность восприятия подробностей таких сложных явлений. Этим мы не хотим сказать, что мы вообще не в состоянии наблюдать элементарные процессы, происходящие в отдельных частицах тела. Речь идет об эмпирическом описании и теоретическом рассмотрении электромагнитных процессов в системах, состоящих из чрезвычайно большого числа таких частиц. Усложнения, возникающие при этом, должны быть как-то исключены, т. е. действительные явления должны быть заменены некоторыми упрощенными явлениями, эквивалентными действительным в отношении их эффектов, доступных наблюдению.

Эти упрощенные эквивалентные явления и представляют предмет изучения макроскопической теории. В принципе упрощение состоит в выравнивании микроскопических неоднородностей, т. е. колебаний, которые испытывают различные электромагнитные величины внутри очень малых пространственных областей и временных интервалов вследствие дискретного распределения элементарных электрических зарядов и их быстрого движения. Чтобы уточнить эти понятия, мы будем разуметь под „очень малой“, или „микроскопической“, пространственной областью такую область, линейные размеры которой L порядка величины среднего расстояния между соседними молекулами рассматриваемого тела. Другими словами: микроскопическая

область пространства означает объем, занимаемый в среднем одной молекулой. Далее „очень малый“, или микроскопический, интервал времени T мы определим как промежуток времени порядка естественного периода обращения или колебания электронов (или ионов), из которых построены рассматриваемые молекулы.

Вышеупомянутое „выравнивание микроскопических неоднородностей“ для какой-нибудь электромагнитной величины F , рассматриваемой как заданная функция места и времени, можно вообще определить как замену действительного значения этой функции, для определенного места и момента времени, ее средним значением в некоторой микроскопической пространственно-временной области, заключающей в себе рассматриваемую пространственно-временную точку и имеющей, вообще, произвольную, но одинаковую для всех точек форму и размеры. Это среднее значение \bar{F} и будет рассматриваться в макроскопической теории вместо действительного значения F . Легко видеть, что подобный способ рассмотрения имеет определенные принципиальные границы, вне которых он утрачивает всякий физический смысл, а именно: он допустим и полезен только в том случае, если микроскопические длины и промежутки времени (L , T) достаточно малы по сравнению с соответствующими „макроскопическими“ величинами. В случае колебательных или волнообразных процессов эти макроскопические единицы длины и времени определяются совершенно естественным и однозначным образом длиной волны λ и периодом колебаний τ . В остальных случаях они будут до известной степени неопределенными и даже произвольными.

Таким образом последовательная макроскопическая теория распространения электромагнитных волн в каком-либо материальном теле вообще возможна только тогда, когда выполняются неравенства:

$$\lambda \gg L, \tau \gg T, \quad (1)$$

т. е. если волны не слишком коротки или если материя не очень разрежена.

Если L остается очень малым по сравнению с λ , то среднее пространственное значение функции F для некоторой определенной микроскопической области можно заменить соответствующим средним значением для микроскопически очень большой области, содержащей очень большое число молекул, и, несмотря на это, являющейся очень малой по сравнению с макроскопической единицей объема λ^3 . Этот прием особенно необходим при рассмотрении аморфных тел, в виду не совсем правильного распределения соседних молекул.

Такое „расширенное“ среднее пространственное значение является, вообще говоря, также средним временным значением рассматриваемой функции потому, что отклонения, вызываемые в течение времени движением электронов в отдельных молекулах,

при соединении большого числа молекул, взаимно компенсируются.

2. Определение средних значений величин, характеризующих поле. Обратимся теперь специально к случаю, когда F является электромагнитной величиной, характеризующей поле (напряженность электрического или магнитного поля, потенциал и т. д.). Согласно общей теории, развитой в первом томе, величина может быть определена — по крайней мере принципиально — в том случае, если для каждого момента времени известно положение всех элементарных зарядов (электронов), образующих рассматриваемое тело. Это определение может быть произведено двумя различными способами, а именно: либо непосредственно, при помощи интегральных выражений для электромагнитного поля (или потенциала) каждого отдельного электрона, либо косвенно, при помощи дифференциальных уравнений, связывающих пространственные и временные производные от величины F с объемной плотностью электричества s (т. е. заряда, тока, поляризации и т. д.). Для „микроскопической“ теории оба метода как физически, так и математически представляются эквивалентными. Иначе обстоит дело в макроскопической теории, где мы пользуемся не действительными значениями F , а только микроскопическими средними значениями \bar{F} . Косвенный метод оказывается здесь в математическом отношении значительно проще непосредственного, так как усреднение может быть выполнено еще до интегрирования уравнений поля. Действительно, если написать эти дифференциальные уравнения в форме

$$D(F) = s, \quad (2)$$

то, в виду линейности дифференциального выражения $D(F)$ по отношению к F , имеет место соотношение

$$\overline{D(F)} = D(\bar{F}), \quad (2a)$$

и следовательно

$$D(\bar{F}) = \bar{s}. \quad (2b)$$

В виду фундаментального значения формулы (2a) для дальнейшего построения макроскопической теории, мы рассмотрим ее подробнее и дадим для нее более строгое доказательство.

Обозначим пространственные координаты рассматриваемой точки P и время через x_1, x_2, x_3, x_4 . Соответствующие величины для соседней точки P' пусть будут x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 . Микроскопическое среднее значение F в P мы определим формулой

$$\bar{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\int_1 \int_2 \int_3 \int_4 F(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4}{\int_1 \int_2 \int_3 \int_4 dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4}, \quad (3)$$

где интегрирование должно быть распространено на микроскопическую пространственно-временную область, которая включает в себе точку P . Мы можем представить себе точку P как центр этой области. Полагая

$$x'_\alpha - x_\alpha = \xi_\alpha$$

и

$$dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 = d\Omega,$$

будем иметь

$$\overline{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\Omega} \int F(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3, x_4 + \xi_4) d\Omega. \quad (3a)$$

В стоящем справа интеграле координаты рассматриваемых точек входят как параметры. Если продифференцируем (3a) по одному из этих параметров и примем во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F(x_1 + \xi_1, \dots) = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} F(x_1 + \xi_1, \dots) = \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} F(x'_1, \dots),$$

то получим

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{F}(x_1, \dots) = \frac{1}{\Omega} \int \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} F(x'_1, \dots) d\Omega,$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{F}(x_1, \dots) = \overline{\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} F(x_1, \dots)}. \quad (3b)$$

Эта формула легко обобщается на случай любого дифференциального оператора D .

Однако наряду с преимуществом математической простоты косвенный метод по сравнению с прямым имеет тот недостаток, что он физически ненагляден и формален. Чтобы выяснить физический смысл полученных при его помощи результатов и глубже проникнуть в механизм электромагнитных явлений в материальных телах, необходимо эти результаты — по крайней мере в простейших случаях — получить также прямым методом и интерпретировать их соответствующим образом.

§ 2. Зависимость усредненных субстанциальных величин от усредненных величин, характеризующих поле

Для определения \overline{F} косвенным методом не требуется точно знать действительное распределение электричества; согласно (2b) нам должно быть известно лишь микроскопическое среднее значение соответствующей функции плотности \overline{s} . Однако это среднее значение \overline{s} в общем случае наперед не задается, а, наоборот,

само должно рассматриваться как определенная функция усредненного поля \bar{F} . Вид этой функции

$$\bar{s} = \bar{s}(\bar{F}) \quad (4)$$

зависит от электромагнитных свойств соответствующего тела, затем от характера рассматриваемого процесса, например в простейшем случае чисто синусоидальных колебательных явлений—от частоты колебания (или от длины волны) и, наконец, в известной мере и от способа усреднения, т. е. от величины выбранной микроскопической пространственно-временной области. В дальнейшем однако последнее обстоятельство мы оставим без внимания, что представляется допустимым в довольно широких границах.

Заметим, что эти границы фактически будут определяться характером тех предположений, которые делаются относительно функции $\bar{s}(\bar{F})$ (см. ниже).

1. Общие предположения и введение материальных постоянных. Точное определение функции (4) представляет задачу, лежащую вне рамок макроскопической теории и заставляющую глубже проникнуть в механику отдельной молекулы и электрона. Общие же принципы подобной „микроскопической“ механики, установленные нами в первой части на основе теории относительности, оказываются при этом неточными и несовершенными. Их исправлением мы займемся в третьей части, где наряду с новой квантовой механикой должно быть также изложено измененное квантовое представление электродинамики.

Таким образом, если отказаться от точного решения микро-механической задачи, которое необходимо для нахождения функции (4), то для определения—по крайней мере приближенным образом—вида этой функции в нашем распоряжении остаются два метода.

В первом, чисто феноменологическом методе, делается вполне определенное, по возможности наиболее простое предположение относительно функции $\bar{s}(\bar{F})$, а именно: принимается, что величина \bar{s} или ее составляющие выражаются линейно через составляющие \bar{F} или через ее производные по пространственным координатам и по времени. Коэффициенты этого линейного соотношения рассматриваются при этом как определенные материальные постоянные, характеризующие электромагнитные свойства данного тела и подлежащие определению эмпирическим путем (при этом они, разумеется, могут зависеть также и от типа рассматриваемого процесса, например от частоты колебаний). Этот способ рассмотрения является обычным в теории упругости и гидродинамике, причем вышеупомянутый линейный закон для функции $\bar{s}(\bar{F})$ представляет собою полную аналогию закону Гука или закону трения.

Во втором, в известной мере микроскопическом, методе делается допущение, аналогичное закону Гука для отдельных молекул (или атомов) тела, а именно: принимается, что образующие эти молекулы электроны связаны друг с другом квазиупругим образом, т. е. при смещении из их (относительного) положения равновесия испытывают влекущую назад силу, пропорциональную этому смещению. Несмотря на то, что подобное допущение является заведомо неправильным, оно все же приводит к результатам, находящимся в полном согласии с опытными фактами и с выводами точной квантово-механической теории.

Следует напомнить, что электромагнитные свойства молекулы могут быть охарактеризованы заданием электрических и магнитных моментов различного порядка. Влияние внешних сил, вызванных например другими молекулами, может быть охарактеризовано добавочными электромагнитными моментами, „индуцированными“ этими силами в данной молекуле. Этот вопрос в частном случае неизменных во времени внешних сил мы изучили уже в томе I (гл. IV, § 8). Рассмотренные там „реальные системы“ полностью соответствуют определенной выше „квазиупругой“ модели молекулы. Обычно приходится учитывать лишь электрические и магнитные моменты первого порядка („дипольные моменты“). Если эти моменты известны, то легко вычислить их среднее значение, т. е. найти электрическую и магнитную поляризацию рассматриваемого тела, как линейную функцию соответствующих усредненных величин поля. Функция, определенная таким образом, конечно тождественна с линейной функцией $\bar{s}(\bar{F})$ феноменологической теории, причем входящие в последнюю макроскопические материальные постоянные могут быть выражены через соответствующие молекулярные постоянные (составляющие тензора поляризации).

2. Колебательные явления по квазиупругой теории. Итак, мы видим, что в случае полей, неизменных во времени, феноменологическая и квазиупругая теория совершенно эквивалентны друг другу. Однако преимущество последней заключается в том, что ее с полным успехом можно применить также и к общему случаю полей, меняющихся во времени. В этом случае речь идет об интегрировании уравнений движения электронов, связанных квазиупругим образом и подверженных комбинированному действию внешних сил с одной стороны и внутренних сил, пропорциональных смещению, — с другой. Эти вопросы будут подробно рассмотрены в третьей главе. Здесь же для выяснения сути дела мы ограничимся простейшим примером „линейного осциллятора“, т. е. электрона, имеющего возможность перемещаться лишь по прямой линии x .

Пусть положение равновесия будет $x = 0$. В этой точке представим себе второй неподвижный электрон с противоположным зарядом — e . Электрический момент диполя, образованного обоими электронами, будет равен следовательно $p = ex$. Внутреннюю

квазиупругую силу мы обозначим через $-kx$, где k — постоянный множитель, характеризующий „жесткость“ связи.

При наличии внешнего электрического поля с постоянной во времени напряженностью E (в направлении оси x) положение равновесия подвижного электрона переместится в точку $x = \frac{eE}{k}$. Если мы сравним соответствующий индуцированный дипольный момент $p = ex = \frac{e^2}{k} E$ с выражением $p = \alpha E$ на стр. 129 тома I, то получим следующее выражение для статического коэффициента поляризации α :

$$\alpha = \frac{e^2}{k}. \quad (5)$$

Предположим теперь, что E меняется с течением времени. Тогда уравнение движения электрона, обладающего массой m , будет иметь вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + eE. \quad (6)$$

При отсутствии внешней силы ($E = 0$) интегрирование этого уравнения, как известно, дает

$$x = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad (7)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7a)$$

Таким образом мы получаем незатухающие свободные колебания с „естественной“ или „собственной“ частотой $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

При наличии поля

$$E = E_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

гармонически колеблющегося с частотой $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, уравнение (6) можно решить, положив

$$x = x_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

При этом с помощью соотношения $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ получаем;

$$(k - m\omega^2)x = eE,$$

г. е. согласно (7a)

$$x = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{e}{k} \frac{E}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

и следовательно

$$p = \alpha_{\omega} E, \quad (8a)$$

где

$$\alpha_{\omega} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\alpha}{1 - \frac{v^2}{v_0^2}}. \quad (8b)$$

Таким образом в случае вынужденных колебаний, подобно тому, как и в статическом случае, наш осциллятор можно характеризовать определенными динамическим или „гармоническим“ коэффициентом поляризации α_{ω} .

В общем случае негармонически колеблющегося поля зависимость дипольного момента от напряженности поля хотя и остается линейной, однако не может быть выражена формулой типа (8a), соответствующей простейшей „статической“ форме „закона Гука“. При этом мы получаем для p ряд Фурье или интеграл Фурье вида

$$p = \sum \alpha_{\omega} E_{\omega} \text{ или } p = \int_0^{\infty} \alpha_{\omega} dE_{\omega} \quad (9)$$

в зависимости от того, является ли E периодической или аperiodической функцией времени, причем E_{ω} или dE_{ω} обозначают ее гармонические составляющие ($E = \sum E_{\omega}$ или $E = \int dE_{\omega}$). Если мы хотим учесть и свободные колебания электрона, то необходимо к приведенным выражениям для p прибавить еще члены, соответствующие формуле (7).

Из этих соображений явствует, что макроскопическая теория электромагнитных явлений в материальных телах должна иметь особенно простую форму для чисто гармонических колебательных явлений (при этом статический случай получается в пределе при частоте ω , равной нулю). Общее же решение для произвольных электромагнитных явлений можно при этом представить как наложение подобных гармонических решений.

Материальные постоянные, встречающиеся в линейных функциях $\bar{s}(\bar{F})$, имеют определенные значения только для этих гармонических решений; а именно, они, вообще говоря, равны значениям этих констант для статического случая, умноженным на множитель

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

Результаты, полученные для незатухающих гармонических колебаний, можно распространить формальным образом, не разлагая в интеграл Фурье, на случай затухающих гар-

монических колебаний. Колебания этого типа (для напряженности электрического поля E) можно представить вещественной частью выражения $E_0 e^{i\omega t}$ с комплексной частотой и в общем случае с комплексной амплитудой, а именно: полагая, $\omega = \omega' + i\omega''$ и $E_0 = |E_0| e^{-i\varphi} = E' - iE''$, где ω' , ω'' , E' и E'' суть вещественные величины, будем иметь:

$$R(E_0 e^{i\omega t}) = |E_0| e^{-\omega'' t} \cos(\omega' t - \varphi) = e^{-\omega'' t} (E' \cos \omega' t + E'' \sin \omega' t).$$

Мы получаем, следовательно, затухающие колебания с частотой ω' , с постоянной затухания $\omega'' (> 0)$ и с исходной амплитудой $|E_0|$. В виду линейности уравнения движения (6) вынужденные колебания осциллятора можно определить вещественную часть решения (8), если представить E в виде комплексного выражения $E = E_0 e^{i\omega t}$. Само собой разумеется, что для гармонического коэффициента поляризации α_ω мы должны получить при этом комплексное значение.

Мы можем далее представить себе, что естественные колебания осциллятора тоже затухают (позже мы увидим, что в действительности такое затухание всегда имеет место). Это естественное затухание формально учитывается введением комплексной собственной частоты колебаний $\omega_0 = \omega'_0 + i\omega''_0$. Динамически его можно истолковать добавлением к правой стороне уравнения движения (6) некоторой „силы трения“, например пропорциональной первой или третьей производной от x по времени. При этом коэффициент поляризации α_ω должен иметь комплексное значение также и для незатухающих вынужденных колебаний; это значение вместе с амплитудой колебаний определяет смещение их фазы относительно E .

3. Вращательное движение дипольных молекул и поступательное движение ионов. Кратко изложенная выше квазиупругая теория рассматривает только относительное движение связанных электронов, образующих молекулу, по отношению к центру этой молекулы или вернее по отношению к неподвижно связанной с ней координатной системой. Поэтому непосредственно она применима лишь к случаю идеального твердого тела, в котором молекулы как целое не могут испытывать никаких вращений и смещений. В случае жидких и газообразных тел (а отчасти также и в случае действительных твердых тел) необходимо также принять во внимание это вращательное и поступательное движение молекул. Первое из них имеет особенно существенное значение, если рассматриваемые молекулы (или атомы) обладают постоянным („естественным“) электрическим или магнитным моментом: благодаря этим моментам они должны в большей или меньшей степени ориентироваться во внешнем поле в соответствующем направлении и таким образом, независимо от относительного смещения связанных электронов, в известной мере оказывать влияние на полную электрическую или магнитную поляризацию рассматриваемого тела.

Что касается поступательного движения, то оно играет очень важную роль в том случае, когда молекулы заряжены, т. е. обладают избытком или недостатком отрицательных электронов. Подобные заряженные молекулы или атомы обычно называют ионами. Частный случай ионов представляют собой свободно движущиеся или „свободные“ электроны, которые всегда имеются в твердых или жидких металлах и которые обуславливают характерную для них электрическую проводимость. В других—неметаллических—телах такие электроны встречаются только в виде исключения. Электрическая проводимость этих тел, поскольку они не представляют собою совершенных изоляторов, сводится следовательно к тому обстоятельству, что они по крайней мере частично состоят не из нейтральных молекул (или атомов), а из ионов, обладающих некоторой подвижностью.

Под действием внешнего электрического поля „свободные“ электроны и ионы должны приобретать дополнительную скорость в направлении действующих на них сил. Это добавочное движение обнаруживается в виде электрического тока проводимости, вызванного рассматриваемым полем. Согласно закону Ома, сила этого тока всегда пропорциональна напряженности соответствующего электрического поля. Чтобы объяснить эту феноменологическую связь обеих величин, соответствующую обычной форме закона трения при движении твердого тела в газах и жидкостях, нужно построить микроскопическую теорию трения, согласно которой свободные электроны и ионы при движении в рассматриваемом теле испытывают силу трения, пропорциональную их средней скорости и уравновешиваемую внешней силой. Коэффициенту поляризации связанного электрона здесь соответствует подвижность „свободного“ электрона (или иона), определяемая обычно как отношение средней скорости \bar{v} к средней напряженности внешнего поля \bar{E} . Если обозначить коэффициент трения через β , который мы определим как отношение внешней силы к средней скорости, то мы получим

$$\beta \bar{v} = e \bar{E} \quad (10)$$

и следовательно для подвижности

$$\beta = \frac{e}{\delta}. \quad (10a)$$

Заметим, что формула (10) или, что то же самое,

$$\bar{v} = \beta \bar{E}, \quad (10b)$$

строго говоря, имеет место, так же как и формула (8a), только для статических или гармонически колеблющихся полей. При этом β следует рассматривать как определенную функцию частоты колебания ω .

§ 3. Дифференциальные уравнения макроскопического поля

1. Разделение частей, соответствующих свободным и связанным электронам. Индукционные величины. После этих предварительных замечаний мы можем обратиться к фактическому установлению дифференциальных уравнений усредненного или макроскопического электромагнитного поля в материальных телах. Мы должны следовательно вместо символического уравнения (2b) ввести уравнения Максвелла-Лоренца. Для упрощения мы отбросим здесь черту, обозначающую среднее значение, и под $F(E, H)$ и $s(j, \rho)$ будем понимать усредненные значения соответствующих величин.

Основные уравнения макроскопического поля оказываются при этом тождественными с уравнениями I и II на стр. 143 тома I. Следовательно имеем в обычных обозначениях:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi\mathbf{j}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

Средняя плотность тока состоит вообще из двух различных частей; одна из них обусловлена поступательным движением свободных электронов или ионов относительно рассматриваемого тела как целого; другая же — движением связанных электронов, образующих ионы и нейтральные молекулы, относительно центра тяжести этих частиц.

Первая часть, которую мы будем обозначать через \mathbf{j}_f , образует ток проводимости, и по закону Ома может быть выражена через напряженность электрического поля. Вторая часть \mathbf{j}_b зависит от напряженности электрического и магнитного поля совершенно иным образом, который аналогичен закону Гаука, а поэтому должна быть рассмотрена отдельно.

Соответственно этому мы разобьем также (среднюю) плотность электрических зарядов ρ на две части. Первая часть ρ_f должна зависеть только от концентрации свободных электронов и ионов или, точнее, ионных центров, тогда как вторая определяется положением связанных электронов относительно центров ионов и нейтральных молекул. Короче говоря, вторая часть зависит от распределения электронов в этих частицах.

Представим себе, что рассматриваемое тело состоит из частиц различного рода с результирующими зарядами e^α и концентрациями N^α (N^α обозначает число центров частиц α -го рода

14 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАКРОСКОП. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

в единице объема). Эти частицы могут быть как электронами и ионами, так и нейтральными молекулами (в последнем случае $e^a = 0$). Тогда согласно вышеприведенным определениям имеем

$$\rho_r = \sum_a N^a e^a, \quad \mathbf{j}_r = \sum_a N^a e^a \frac{\mathbf{v}^a}{c}, \quad (11)$$

где \mathbf{v}^a — средняя скорость соответствующих частиц. Для вычисления ρ_g и \mathbf{j}_g мы введем обусловленную ионами и нейтральными молекулами электрическую и магнитную поляризацию тела \mathbf{P} и \mathbf{M} . При этом, согласно (18а) и (21) стр. 145, I тома

$$\begin{aligned} \rho_g &= -\operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \mathbf{j}_g &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (12)$$

Напомним, что векторы \mathbf{P} и \mathbf{M} обозначают электрический и магнитный моменты единицы объема. Если представить себе молекулы (и ионы) как элементарные диполи, т. е. локализовать электрические и магнитные моменты \mathbf{p}^a , \mathbf{m}^a в соответствующих центрах, то очевидно будем иметь

$$\mathbf{P} = \sum_a N^a \mathbf{p}^a, \quad \mathbf{M} = \sum_a N^a \mathbf{m}^a. \quad (12a)$$

Чтобы иметь возможность трактовать концентрацию N^a как определенную „сглаженную“ функцию положения, каждую точку пространства рассматривают как центр сферического объема ν , содержащего в себе большое число соответствующих молекул n^a , а N^a определяют как отношение $\frac{n^a}{\nu}$. Чем больше при этом выбирается ν , тем ровнее ведет себя функция $N^a(\mathbf{r})$. Не следует однако выбирать ν слишком большим, ибо тогда эта функция и связанные с нею средние значения ρ , \mathbf{j} , \mathbf{P} , \mathbf{M} утрачивают всякий физический смысл.

При совершенно упорядоченном распределении молекул в пространстве (как это имеет место например в кристаллических телах), а также при совершенно беспорядочном, но в среднем равномерном распределении ($N^a = \text{const}$), вместо грубо определяемой концентрации N^a (в вышеприведенном смысле) вообще полезнее ввести обратную ей величину $V^a = \frac{1}{N^a}$ и определить эту величину как средний объем, занимаемый одной частицей данного рода при отсутствии частиц всех других сортов.

Таким образом можно себе представить, что величины ρ , \mathbf{j} (или \mathbf{P} , \mathbf{M}) получаются в результате равномерного распределения зарядов e^a или моментов \mathbf{p}^a и т. д. внутри соответствующих

объемов (V^α) и наложения таких средних значений $\frac{e^\alpha}{V^\alpha}$ (или $\frac{P^\alpha}{V^\alpha}$), соответствующих частицам различного рода.

Важно отметить, что из приведенных определений средней плотности зарядов и тока вытекает вполне определенное правило для образования средних значений напряженностей электрического и магнитного поля, а именно: при переходе от точных уравнений поля (2) к макроскопическим (2b) нужно усреднить напряженности полей F точно таким же способом, как и плотность электричества s .

Последовательное проведение этого правила приводит к следующему способу для образования средних значений напряженностей поля F .

Прежде всего следует разложить F на отдельные составные части F^α , соответствующие различным родам частиц. Затем каждую из этих составных частей нужно усреднить по соответствующему объему $V^\alpha = \frac{1}{N^\alpha}$ вокруг рассматриваемой пространственной точки, и наконец все такие „частичные средние значения“ должны быть соединены в искомую макроскопическую среднюю величину:¹

$$\bar{F} = \sum_{\alpha} \bar{F}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{V^{\alpha}} \int F^{\alpha} dV^{\alpha} = \sum_{\alpha} N^{\alpha} \int F^{\alpha} dV^{\alpha}. \quad (13)$$

Для простоты, а также для большей определенности представляется целесообразным допустить, что все объемы V^α имеют одинаковую форму, а именно: форму шара, центр которого совпадает с рассматриваемой точкой. Далее следует заметить, что наряду с усреднением по пространству необходимо также произвести усреднение по времени. В том случае, когда полная напряженность поля F включает в себе часть F^0 , обусловленную посторонними („внешними“) зарядами, для этой части мы можем взять ее точное значение, т. е. можем положить $F^0 = \bar{F}^0$.

Если молекулы и ионы трактуются не как элементарные диполи, а принимаются во внимание их электромагнитные моменты второго и высшего порядка, то в правой части (12a) появляются дополнительные члены, которые будут подробно рассмотрены в § 5.

Ионы представляют собой наиболее общий тип материальных частиц, образующих тела, электроны же и нейтральные моле-

¹ Следует отметить, что определяемые этим способом средние значения сохраняют физический смысл также и в случае распространения очень коротких волн — например рентгеновских. Обычное же определение в этом случае совершенно неприменимо.

кулы можно при этом рассматривать как частные случаи. Но, в виду упомянутого выше разделения плотности электричества на две части, методически иногда является более удобным представлять себе ионы замененными свободными электронами, обладающими такой же концентрацией и с таким же зарядом, и кроме того нейтральными молекулами. Такое „расщепление“ ионов полезно (хотя, разумеется, и не необходимо) также потому, что только нейтральные частицы обладают вполне определенным электрическим дипольным моментом, не зависящим от выбора их центра. Если мы хотим однозначно определить по (12а) электрическую поляризацию, то заряд иона нужно приписать некоторому квази-свободному эквивалентному электрону. В соответствии с этим в дальнейшем мы уже не будем упоминать об ионах, а будем говорить только о свободных и о связанных электронах (образующих нейтральные молекулы). После подстановки (12) в основные уравнения (II) последние принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) &= 4\pi\rho_f \\ \operatorname{rot}(\mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) &= 4\pi\mathbf{j}_f. \end{aligned}$$

Вводя еще обозначения

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (14)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M} \quad (14a)$$

и отбрасывая индексы f , получаем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} &= 4\pi\mathbf{j}. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и (II), однако смысл их иной, а именно: напряженности электрического и магнитного поля заменены векторами \mathbf{D} и \mathbf{B} , которые мы будем называть соответственно электрической и магнитной индукцией.¹ При этом здесь, а также и в дальнейшем, ρ и \mathbf{j} обозначают не полные плотности зарядов и токов, а только те их части, которые обусловлены одними лишь свободными электронами.

2. Поверхности разрыва и граничные условия. В предыдущих рассуждениях величины ρ , \mathbf{j} , \mathbf{P} и \mathbf{M} предполагались конечными и непрерывными. Однако, вообще говоря, это предположение справедливо только для областей внутри какого-нибудь материального тела. Поскольку же

¹ В отношении величин \mathbf{H} и \mathbf{B} введенные нами обозначения и наименования являются обращенными по сравнению с обычными. Имеющиеся для этого основания будут приведены ниже.

последнее является ограниченным, то ограничивающую поверхность в макроскопической теории следует рассматривать как поверхность разрыва; при этом ρ и \mathbf{j} на ней могут быть даже бесконечными, что соответствует конечной поверхностной плотности электрического заряда η и электрического тока \mathbf{k} . Соотношения, имеющие место на поверхности раздела двух различных тел (одно из которых может заменять пустота), очень легко могут быть получены из уравнений (I) и (III) при помощи следующего приема. Сначала представим себе, что тело a непрерывным образом переходит в другое тело b , а затем толщину δ этого переходного слоя заставим стремиться к нулю. Если проинтегрировать (I) и (III) по объему V этого слоя, соответствующему некоторой определенной части S действительной граничной поверхности и обозначить параллельные этой поверхности (воображаемые) граничные поверхности слоя через S_a и S_b , то на основании известных формул векторного исчисления [см. (16a) и (16b), введение, том I], получаем, обозначая через \mathbf{n} нормаль, направленную от тела a к телу b ($\mathbf{n}_a = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_b = -\mathbf{n}$), и принимая во внимание условие $dS_a = dS_b = dS$,

$$\int \mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}^b - \mathbf{H}^a) dS = 0,$$

$$\int \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^b - \mathbf{E}^a) dS + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} dV = 0,$$

и аналогично

$$\int \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^b - \mathbf{D}^a) dS = 4\pi \int \rho dV,$$

$$\int \mathbf{n} \times (\mathbf{B}^b - \mathbf{B}^a) dS - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} dV = 4\pi \int \mathbf{j} dV.$$

Векторы \mathbf{H} и \mathbf{D} и их производные по времени очевидно должны оставаться конечными. В виду этого, определяя поверхностную плотность заряда и тока при исчезающей толщине слоя формулами:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int \rho dV = \int \eta dS, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \mathbf{j} dV = \int \mathbf{k} dS$$

и полагая $\mathbf{H}^b - \mathbf{H}^a = \Delta \mathbf{H}$ и т. д., получим:

$$\int \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{H} dS = 0, \quad \int \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{E} dS = 0$$

и

$$\int \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{D} dS = 4\pi \int \eta dS, \quad \int \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{B} dS = 4\pi \int \mathbf{k} dS.$$

Так как рассматриваемая часть поверхности (S) выбрана произвольным образом, то отсюда следует

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{E} = 0, \quad (I')$$

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{D} = 4\pi\eta, \quad \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{k}. \quad (III')$$

Эти формулы показывают, что нормальная составляющая \mathbf{H} и тангенциальная составляющая \mathbf{E} меняются всегда непрерывно; наоборот, соответствующие составляющие \mathbf{D} и \mathbf{B} непрерывны только в том случае, если нет свободных поверхностных зарядов или поверхностных токов.

Следует заметить, что формулы (III') в действительности определяют поверхностный скачок нормальных составляющих \mathbf{E} и тангенциальных составляющих \mathbf{H} , через поверхностную плотность полного заряда и полного тока, которые обусловлены не только свободными, но также и связанными электронами. В самом деле, поверхностные плотности „связанных“ зарядов и токов на каждом из граничащих тел определяются известными формулами [ср. (31a) стр. 99 и (33a) стр. 99 тома I]:

$$\eta_g^a = \mathbf{P}^a \cdot \mathbf{n}_a, \quad \mathbf{k}_g^a = \mathbf{M}_a \times \mathbf{n}_a,$$

$$\eta_g^b = \mathbf{P}^b \cdot \mathbf{n}_b, \quad \mathbf{k}_g^b = \mathbf{M}_b \times \mathbf{n}_b.$$

Следовательно для результирующих поверхностных плотностей получаем, имея в виду, что $\mathbf{n}_a = -\mathbf{n}_b = \mathbf{n}$:

$$\eta_g = \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{P}, \quad \mathbf{k}_g = \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{M}. \quad (15)$$

Таким образом, на основании (14) и (14a), формулы (III') можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{E} = 4\pi(\eta_f + \eta_g), \quad \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{H} = 4\pi(\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_g). \quad (II')$$

3. Обратный характер обычного определения магнитной индукции. Обусловленная связанными электронами магнитная поляризация \mathbf{M} может быть совершенно формальным образом сведена к фиктивным „молекулярным“ магнитным диполям, эквивалентным вращающимся в молекулах электронам. При этом вместо плотностей связанных токов \mathbf{j}_g и \mathbf{k}_g нужно ввести магнитные величины ρ_m и η_m , аналогичные плотностям связанных зарядов ρ_g и η_g по формулам:

$$\rho_m = -\operatorname{div} \mathbf{M}, \quad \eta_m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}. \quad (16)$$

При отсутствии свободных электронов, т. е. в случае непроводящих тел, этот прием дает возможность провести формальную аналогию между электрическими и магнитными величинами, которая совершенно отлична от общего соотношения между ними и по сравнению с этим соотношением имеет, так сказать, „скрещенный“ характер. А именно, уравнения (I), (III)

и пограничные условия (I') и (III') можно при этом перегруппировать следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (17)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (18)$$

и

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{H} = 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{B} = 0. \quad (20)$$

Далее, вместо (II') имеем

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{E} = 4\pi\eta_g, \quad \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{B} = 4\pi\eta_m. \quad (21)$$

В этих формулах векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} с одной стороны и \mathbf{D} и \mathbf{H} — с другой, играют совершенно аналогичную роль. При этом отношение \mathbf{D} к \mathbf{E} ($\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$) тождественно с отношением \mathbf{H} к \mathbf{B} ($\mathbf{H} = \mathbf{B} + 4\pi\mathbf{M}$). На этом основании для обеих последних величин обычно пользуются определениями и обозначениями, являющимися обратными по отношению к нашим: среднюю (макроскопическую) напряженность магнитного поля \mathbf{H} обычно называют „магнитной индукцией“ и обозначают через \mathbf{B} ; наоборот, величину, обозначенную нами \mathbf{B} , называют „напряженностью магнитного поля“ и обозначают через \mathbf{H} . Этот способ обозначения возник еще в то время, когда магнитным веществам приписывалась такая же физическая реальность, как и электрическим зарядам. Так как в этой книге мы с самого начала отказались от „магнитных веществ“, то это обязывает нас модернизировать старый способ обозначения, чего мы и достигаем путем простой перестановки величин \mathbf{H} и \mathbf{B} .

Однако мы должны упомянуть здесь об одном обстоятельстве, благодаря которому для практических целей обычное понимание величин \mathbf{H} и \mathbf{B} представляется иногда более удобным и „естественным“, нежели наше. Магнитная поляризация обычно¹ вызывается путем введения соответствующего тела во внешнее магнитное поле, силовые линии которого замыкаются внутри этого тела и, следовательно, идут параллельно его поверхности. Этого достигают проще всего введением кольцеобразного тела в соленоид такой же формы.

Легко показать, что при таких условиях в случае однородного тела индукция \mathbf{B} (в нашем смысле), вызванная внешним полем, в каждой точке тождественна с напряженностью этого поля. При этом под „внешним полем“ мы понимаем то поле, которое имеется в рассматриваемом соленоиде в отсутствии тела. Это утверждение непосредственно вытекает из граничного условия $\Delta \mathbf{B} \times \mathbf{n} = 0$ [см. (20)] в связи с тем обстоятельством, что внутри тела величина \mathbf{B} удовлетворяет тому же уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ как и упомянутое внешнее поле. Следует однако иметь в виду, что в

¹ В особенности при исследовании ферромагнитных тел

общем случае обе величины оказываются совершенно различными.

В случае электрической поляризации обычно (при исследовании диэлектриков) имеют дело с внешними полями, неизменными во времени, причем силовые линии в этом случае не замкнуты и идут перпендикулярно к поверхности рассматриваемого тела (как это бывает например в электрическом конденсаторе). При этом, в силу условия $\text{p} \cdot \Delta D = 0$, электрическая индукция D должна быть равна напряженности внешнего поля; желая быть последовательными, мы должны были бы именно эту величину, а не E , называть напряженностью (микроскопического) поля.

§ 4. Четырехмерная форма основных уравнений и применение их к медленно движущимся телам.

Обратный характер обычного представления о соотношении величин H и B можно яснее всего обнаружить, если представить основные уравнения (I) и (III) в четырехмерной форме. При этом мы очевидно должны рассматривать векторы H и E как пространственную и временную часть введенного уже в первом томе (гл. VIII, стр. 278 и 284) антисимметрического тензора поля ${}^2\mathfrak{H}$ — точнее его среднего микроскопического значения. Соответственно этому векторы B и D следует рассматривать как пространственную и временную часть другого антисимметрического тензора ${}^2\mathfrak{B}$, который мы будем называть тензором электромагнитной индукции.

Как известно, уравнения (I) можно соединить в систему уравнений:

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_l} = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3, 4) \quad (22)$$

[ср. (6) стр. 279, т. I], где

$$\left. \begin{aligned} H_{23} &= H_1, & H_{31} &= H_2, & H_{12} &= H_3, \\ H_{14} &= -iE_1, & H_{24} &= -iE_2, & H_{34} &= -iE_3. \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

Уравнения (III), в виду их формальной аналогии с (II), имеют такую же самую четырехмерную форму, именно:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial B_{ki}}{\partial x_i} = 4\pi j_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (23)$$

[ср. (7), стр. 279]. Напомним, что здесь j_k обозначает среднюю плотность токов и зарядов, обусловленную только свободными электронами. Для „четырехмерного тока“, обусловленного связанными электронами, имеет место формула

$$j_k^0 = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial P_{ki}}{\partial x_i}, \quad (24)$$

где ${}^2\mathfrak{B}$ четырехмерный антисимметрический тензор поляризации с составляющими

$$\left. \begin{aligned} P_{23} &= M_1, & P_{31} &= M_2, & P_{12} &= M_3, \\ P_{14} &= +iP_1, & P_{24} &= +iP_2, & P_{34} &= +iP_3. \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

Тензоры ${}^2\mathfrak{S}$, ${}^2\mathfrak{B}$, ${}^2\mathfrak{P}$ связаны между собой уравнением

$${}^2\mathfrak{B} = {}^2\mathfrak{S} - 4\pi {}^2\mathfrak{P}, \quad (25)$$

которое эквивалентно обоим уравнениям (14) и (14a). Составляющие ${}^2\mathfrak{B}$ определяются таким образом следующей схемой:

$$\left. \begin{aligned} B_{23} &= B_1, & B_{31} &= B_2, & B_{12} &= B_3, \\ B_{14} &= -iD_1, & B_{24} &= -iD_2, & B_{34} &= -iD_3. \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

Чтобы переписать граничные условия (I') и (III') в четырехмерной форме, необходимо к трем пространственным составляющим вектора \mathbf{n} добавить еще четвертую составляющую $n_4 = im$, которая в случае покоящихся тел равна нулю. Уравнения (I') при этом можно переписать следующим образом:

$$\Delta H_{ik} n_i + \Delta H_{ki} n_i + \Delta H_{4i} n_i = 0 \quad (26)$$

или, вводя вместо ${}^2\mathfrak{S}$ „дуальный“ тензор ${}^2\mathfrak{S}^*$ (ср. т. I, стр. 284),

$$\sum_{i=1}^4 \Delta H_{ki}^* n_i = 0 \quad (\Delta {}^2\mathfrak{S}^* \cdot \mathbf{n} = 0). \quad (26a)$$

Подобным же образом из (III') получим

$$\sum_{i=1}^4 \Delta B_{i4} n_i = 4\pi k_4 \quad (\Delta {}^2\mathfrak{B} \cdot \mathbf{n} = 4\pi \mathfrak{E}), \quad (27)$$

где k_4 обозначает поверхностную плотность зарядов, умноженную на $\sqrt{-1}$.

Приведенное четырехмерное представление дифференциальных уравнений и граничных условий, установленных нами в предыдущем параграфе для случая покоящихся тел, показывает, что полученные выше трехмерные уравнения остаются справедливыми также и для прямолинейно и равномерно движущихся тел. Ибо „четырёхмерность“ обозначает не что иное, как инвариантность относительно преобразований Лоренца, определяющих переход от „покоящейся“ координатной системы к системе, движущейся прямолинейно и равномерно.

Так как (относительная) скорость материальных тел \mathbf{v} всегда остается малой в сравнении со скоростью света c , то при преобразованиях составляющих четырехмерных векторов и тензоров, входящих в наши уравнения, достаточно удовлетвориться лишь приближенными формулами преобразования, линейными относи-

тельно $\frac{\mathbf{v}}{c}$.

Таким образом, если рассматриваемое тело движется как одно целое относительно координатной системы S' с постоянной скоростью \mathbf{v} , то между значениями различных величин, отнесенными к этой системе, и их значениями в системе S , движущейся вместе с телом, имеются следующие приближенные соотношения (ср. т. I, гл. IX, § 1 и 2; система, движущаяся с телом, там обозначена через S' , а „покоящаяся“—через S ; скорость \mathbf{v} соответствует прежней \mathbf{v}'):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}' &= \mathbf{H} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}, \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{P} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{M}, \\ \mathbf{M}' &= \mathbf{M} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{P} \end{aligned} \right\} \quad (28a)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}' &= \mathbf{B} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{D}, \\ \mathbf{D}' &= \mathbf{D} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \right\} \quad (28b)$$

Далее имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}' &= \mathbf{j} + \frac{\mathbf{v}}{c} \rho, & \rho' &= \rho + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{j}, \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{k} + \frac{\mathbf{v}}{c} \eta, & \eta' &= \eta + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

И наконец, в виду того, что $n_4 = 0$,

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n}. \quad (29a)$$

Уравнения (I), (III) и т. д., преобразованные с помощью этих формул и формул

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot t, \quad t' = t + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2}, \quad (29b)$$

должны иметь такую же форму, как и прежние (с точностью до величин, квадратичных относительно $\frac{\mathbf{v}}{c}$), что легко может быть проверено непосредственно. В частности имеем

$$\operatorname{div}' \mathbf{D}' = 4\pi \rho', \quad \operatorname{rot}' \mathbf{B}' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}'$$

или, если подставить здесь

$$\mathbf{D}' = \mathbf{E}' + 4\pi \mathbf{P}' = \mathbf{E}' + 4\pi \mathbf{P} + 4\pi \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{M}$$

и

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}' &= \mathbf{H}' - 4\pi\mathbf{M}' = \mathbf{H}' - 4\pi\mathbf{M} + 4\pi\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{P} \\ \operatorname{div}' \mathbf{E}' &= 4\pi \left(\rho' - \operatorname{div}' \mathbf{P} - \operatorname{div}' \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{M} \right), \\ \operatorname{rot}' \mathbf{H}' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}' &= \\ &= 4\pi \left(\mathbf{j}' + \operatorname{rot}' \mathbf{M} - \operatorname{rot}' \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{P} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Члены, стоящие справа, очевидно являются различными частями полной плотности электрических зарядов и токов. К рассмотренным уже ранее членам добавляются еще другие, обусловленные движением связанных электронов вместе с телом.

Заметим, что величина $-\operatorname{rot}' \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{P} \right) = \operatorname{rot}' \left(\mathbf{P} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right)$ обычно называется током Рентгена. Эти дополнительные члены, строго говоря, относятся не к уравнениям, а к электромагнитным величинам, входящим в последние, и преобразующимся согласно приведенным формулам при переходе от покоящегося тела к движущемуся. Если же мы хотим сохранить определения этих величин — в частности электрической и магнитной поляризации — справедливые для покоящихся тел, и для случая тел движущихся, то в соответствующие дифференциальные уравнения нужно ввести дополнительные члены. Однако этот (обычный) способ рассмотрения является принципиально неправильным, ибо на самом деле при упомянутом переходе инвариантными остаются дифференциальные уравнения, а входящие в них величины должны преобразовываться по формулам (28) — (29).

То же самое, разумеется, справедливо также относительно граничных условий. Так например, по (III') и (29a) имеем

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{D}' = 4\pi\eta', \quad \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{B}' = 4\pi\mathbf{k}',$$

или, если мы введем сюда прежние („истинные“) значения электрической и магнитной поляризации:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{E}' &= 4\pi \left(\eta' - \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{P} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \Delta \mathbf{M} \right), \\ \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{H}' &= 4\pi \left(\mathbf{k}' + \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{M} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \Delta \mathbf{P} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Таким образом для стоящих слева поверхностных скачков напряженностей электрического и магнитного полей мы получаем „добавочные члены“

$$-4\pi \frac{\mathbf{v}}{c} \times \Delta \mathbf{M} \quad \text{и} \quad -4\pi \frac{\mathbf{v}}{c} \times \Delta \mathbf{P},$$

§ 5. Электромагнитная поляризация второго и высшего порядка ¹

1. Объемные и поверхностные заряды, эквивалентные электрической поляризации высшего порядка. В § 3 мы определили величины \mathbf{P} и \mathbf{M} как отношения среднего дипольного момента молекулы к (среднему) объему, занимаемому этой молекулой. При таком определении влияние на величины ρ_g и \mathbf{j}_g квадрупольного и высших мультипольных моментов должно быть учтено особо. Для этой цели, наряду с векторами \mathbf{P} и \mathbf{M} , мы введем еще тензоры второго и высшего рангов ${}^2\mathbf{P}$, ${}^2\mathbf{M}$ и т. д., которые должны представлять собою отношение среднего электрического или магнитного момента соответствующего порядка некоторой молекулы к занимаемому ею объему [в смысле уравнения (12a)].

Для упрощения мы рассмотрим сначала только „электрическую поляризацию второго порядка“ ${}^2\mathbf{P}$. Легко показать, что эта поляризация, обусловленная электрическими квадрупольными моментами, может быть сведена к обычной поляризации (первого порядка) и, кроме того, к электрическому двойному слою на граничной поверхности S рассматриваемого тела. Это можно сделать проще всего посредством метода, которым мы пользовались в т. I, гл. III, § 10, при сведении обычной поляризации к объемным и поверхностным зарядам.

Обозначим через φ скалярный потенциал какого-нибудь внешнего электрического поля, которое мы предположим неизменным во времени. Тогда потенциальная энергия рассматриваемого тела — поскольку оно состоит из квадрупольей — по отношению к этому полю выразится объемным интегралом

$$U = \int \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} dV \quad (32)$$

[ср. (9a), стр. 110, т. I; при этом e_{ik} следует заменить через $P_{ik} \cdot dV$].

При помощи тождеств

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_i} \right) + \varphi \frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} \end{aligned}$$

¹ Результаты, изложенные в этом и следующем параграфах, для дальнейшего изложения практического значения не имеют, но с принципиальной стороны они представляют интерес. Отмечу, что частично они впервые были сообщены мне проф. В. Р. Бурсиано м. Однако я их получил значительно более простым способом, который изложен ниже.

мы можем написанный выше интеграл привести к следующему виду:

$$U = \frac{1}{2} \int \operatorname{div} ({}^2\mathbf{P} \cdot \nabla \varphi) dV - \frac{1}{2} \int \operatorname{div} {}^2\mathbf{P} \cdot \nabla \varphi dV \quad (32a)$$

или

$$U = \frac{1}{2} \int \operatorname{div} ({}^2\mathbf{P} \cdot \nabla \varphi) dV - \frac{1}{2} \int \operatorname{div} (\varphi \operatorname{div} {}^2\mathbf{P}) dV + \\ + \frac{1}{2} \int \varphi \operatorname{div} (\operatorname{div} {}^2\mathbf{P}) dV \quad (32b)$$

(ср. т. I, Введение, § 20 и 23).

Если преобразовывать эти выражения по формуле Гаусса, то в первом случае [мы имеем, в виду соотношения $({}^2\mathbf{P} \cdot \nabla \varphi)_n = = ({}^2\mathbf{P} \cdot \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = ({}^2\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) \cdot \nabla \varphi = {}^2\mathbf{P}_n \cdot \nabla \varphi$],

$$U = \int \eta' \cdot \nabla \varphi dS + \int \mathbf{P}' \cdot \nabla \varphi dV, \quad (33)$$

где

$$\eta' = \frac{1}{2} {}^2\mathbf{P}_n, \quad \mathbf{P}' = -\frac{1}{2} \operatorname{div} {}^2\mathbf{P}. \quad (33a)$$

Во втором же случае

$$U = \int \eta' \cdot \nabla \varphi dS + \int \varphi \eta'' dS + \int \varphi \rho'' dV, \quad (34)$$

где¹

$$\eta'' = \mathbf{P}'_n, \quad \rho'' = -\operatorname{div} \mathbf{P}'. \quad (34a)$$

Таким образом рассматриваемая поляризация второго порядка ${}^2\mathbf{P}$ согласно (33) эквивалентна поляризации первого порядка \mathbf{P}' и двойному слою с моментом η' на единицу поверхности (заметим, что этот момент вообще не параллелен нормали к поверхности \mathbf{n}). Формулы (34) и (34a) представляют собой уже известное нам сведение поляризации \mathbf{P}' к поверхностным и объемным зарядам.

Само собой разумеется, что те же самые результаты получатся, если вместо энергии U рассмотреть потенциал поля, обусловленный квадрупольными моментами данного тела:

$$\varphi = \int \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} dV$$

и преобразовать его аналогичным образом (ср. т. I, стр. 97).

Применяя изложенный здесь способ к поляризации k -го порядка, получаем рекурсионные формулы:

$$({}^{k-1})\eta' = \frac{{}^k\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{k}, \quad ({}^{k-1})\mathbf{P}' = -\frac{1}{k} \operatorname{div} {}^k\mathbf{P}, \quad (35)$$

¹ В этом параграфе для упрощения мы опускаем индекс g .

при этом ${}^{(k-1)}\mathbf{P}'$ обозначает эквивалентную поляризацию $(k-1)$ -го порядка, а ${}^{(k-1)}\eta$ — поверхностную плотность моментов дополняющего ее 2^{k-1} -кратного слоя. Отсюда следует, что рассматриваемая поляризация k -го порядка всегда может быть сведена к поляризации первого или даже нулевого порядка и, кроме того, к дополнительным поверхностным слоям. Объемная плотность распределения эквивалентных электрических зарядов выражается формулой: ¹

$$\rho^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \operatorname{div}^k (\vec{\mathbf{P}}) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k}^{1,3} \frac{\partial^k P_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \quad (35a)$$

или при другом обозначении составляющих тензора ${}^k\mathbf{P}$ [соответственно обозначению $e(k_1, k_2, k_3)$, ср. т. I, стр.107]:

$$\rho^{(k)} = (-1)^k \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = k} \frac{1}{k_1! k_2! k_3!} \frac{\partial^k P(k_1, k_2, k_3)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}}. \quad (35b)$$

Из всех поверхностных слоев, получающихся при сведении поляризации высших порядков к объемному заряду, только слой нулевого порядка приводит к скачку напряженности электрического поля на границе двух тел. Обозначая через $\Delta^k \mathbf{P}$ разность ${}^{(k)}\mathbf{P}^{(b)} - {}^{(k)}\mathbf{P}^{(a)}$ на рассматриваемом элементе поверхности, имеем для соответствующего скачка напряженности электрического поля:

$$(\Delta \mathbf{E})^{(k)} \cdot \mathbf{n} = 4\pi \Delta \eta^{(k)}, \quad (36)$$

где по (35)

$$\eta^{(k)} = \Delta^{(k+1)} \mathbf{P} \mathbf{n} \quad (36a)$$

(тангенциальная составляющая \mathbf{E} всегда остается непрерывной). Следует однако заметить, что поверхностные слои первого и высших порядков кроме того обуславливают еще скачкообразное изменение электростатического потенциала φ , а именно: в т. I (стр. 96 и 122) было показано, что при прохождении сквозь двойной слой с моментом i на единицу поверхности в направлении внешней нормали φ изменяется скачком на величину $4\pi i$. Таким образом та часть скачка $\Delta\varphi$, которая обязана поляризации k -го порядка, равна

$$(\Delta\varphi)^k = 4\pi \Delta \eta_n^{(k-1)}. \quad (37)$$

В частности для случая $k=2$ получается

$$(\Delta\varphi)^{(2)} = 2\pi \Delta^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}. \quad (37a)$$

¹ div^k означает операцию дивергенции, повторенную k раз.

Если не обращать внимания на эти разрывы непрерывности скалярного потенциала (а также и поляризационного потенциала Z), то влияние квадрупольного и высших электрических моментов молекулы на усредненное (макроскопическое) поле E формально можно учесть обобщением вышеприведенного определения вектора P ; нужно лишь под ним подразумевать не только поляризацию, обусловленную дипольными моментами, но полную поляризацию первого порядка. Разделение этой поляризации на части, соответствующие электрическим моментам различных порядков, необходимо потому, что эти части должны зависеть различным образом от напряженности макроскопического поля и его производных по координатам.

Совершенно аналогичные результаты получаются для магнитных поляризаций второго и высшего порядков, если при этом считать их неизменными во времени и заменить электрические токи фиктивными магнитными зарядами.

2. Релятивистское обобщение. Предыдущие формулы относятся лишь к неменяющимся с течением времени электрическим полям и поляризациям. Однако при помощи чрезвычайно простого, хотя и несколько формального, способа теория относительности позволяет обобщить их для случая произвольных (меняющихся во времени) электромагнитных полей и поляризаций. Это обобщение получается путем перехода к четырехмерным рассмотренным выше понятиям, соответствующим величинам и операциям.

Так как плотность электрических зарядов ($\rho^{(k)}$) представляет собой четвертую составляющую (разделенную на $V-1$) четырехмерного тока $\mathbf{j}^{(k)}$, то четырехмерное обобщение формулы (35b) будет иметь следующий вид:

$$j_h^{(k)} = (-1)^k \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=k} \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot k_4!} \frac{\partial^{(k)} P_h(k_1, k_2, k_3, k_4)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3} \partial x_4^{k_4}}, \quad (38)$$

или в иной форме:

$$\begin{aligned} j_h^{(k)} &= \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k}^{1,4} \frac{\partial^k P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k}^{1,4} \frac{\partial^k P_{h; i_1, i_2, \dots, i_k}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}. \end{aligned} \quad (38a)$$

При этом $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}$ обозначают составляющие четырехмерного тензора $k+1$ -го ранга, определяющего электромагнитную поляризацию k -го порядка. Для $k=1$ по (38a) имеем

$$j_h^{(1)} = - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial P_{i,h}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial P_{h,i}}{\partial x_i}. \quad (38b)$$

Эта формула тождественна с формулой (24), так что тензор P_{hi} есть не что иное, как антисимметрический тензор электромагнитной поляризации (первого порядка), определенный формулой (24а). Таким образом мы можем утверждать, что также и в общем случае ($k > 1$) составляющие тензора поляризации $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}$ антисимметричны относительно пар индексов i, h (отсюда следует соотношение $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h} = (-1)^k P_{h; i_1, i_2, \dots, i_k}$); их симметрия относительно k индексов i_1, i_2, \dots, i_k вытекает непосредственно из симметрии соответствующих трехмерных тензоров. Так как все составляющие $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}$ у которых один из индексов i равен h , исчезают, то для каждого значения h число неравных нулю составляющих, отвлекаясь от знака, тождественно с числом составляющих симметрического трехмерного тензора k -го ранга.

Заметим, что формула (38а) сохраняет смысл также и для случая $k=0$, если величины P_h отождествить с составляющими четырехмерного тока, обусловленного свободными электронами.

В виду установленной выше антисимметричности тензора $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}$ по отношению к паре индексов (i, h) общая формула (38а) для $h=4$ должна совпадать с „специальной“ формулой (35а) (ибо при этом производные по времени x_4 встретиться не могут). Точно также при $h=1, 2, 3$ в выражении для j_h производные по x_h не входят.

Так например,

$$j_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 P_{22; 1}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P_{33; 1}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 P_{44; 1}}{\partial x_4^2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 P_{23; 1}}{\partial x_2 \partial x_3} + 2 \frac{\partial^2 P_{34; 1}}{\partial x_3 \partial x_4} + 2 \frac{\partial^2 P_{42; 1}}{\partial x_4 \partial x_2} \right\}.$$

Вторая группа дифференциальных уравнений макроскопического электромагнитного поля при учете поляризаций высших порядков может быть написана следующим образом:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial H_{hi}}{\partial x_i} = 4\pi (j_h^{(0)} + j_h^{(1)} + \dots + j_h^{(k)} + \dots).$$

т. е. согласно (38а), если выполнить суммирование по всем парам одинаковых индексов и опустить знак суммирования по i :

$$\frac{\partial H_{hi}}{\partial x_i} = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Эти уравнения можно привести к обычному виду (23), если положить $j_h^0 = P_h^0 = j_h$ и определить тензор электромагнитной индукции ${}^2\mathfrak{B}$ при помощи формулы

$$B_{ih} = H_{ih} - 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k P_{i_1, i_2, \dots, i_k, i, h}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}. \quad (39a)$$

Мы можем также сохранить обычное определение ${}^2\mathfrak{B}$, но тогда под обычной поляризацией (первого порядка) следует разуметь полную или результирующую поляризацию, т. е. сумму

$$P_{ih}^{(r)} = P_{ih} - \frac{1}{2} \frac{\partial P_{i, h}}{\partial x_i} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^2 P_{i, i, h}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} - \dots \quad (39b)$$

Как было уже упомянуто выше, это разделение результирующей поляризации является существенным для определения ее зависимости от тензора электромагнитного поля. Его также нужно принимать во внимание при рассмотрении скачка потенциала на поверхности раздела двух тел.

§ 6. Геометрическая интерпретация макроскопического распределения электричества при помощи моделей молекул

1. Электрическая поляризация и плотность заряда.

Для разъяснения и наглядного представления полученных в предыдущем параграфе результатов мы рассмотрим их еще с другой, несколько отличной, точки зрения.

Сначала представим себе, что каждая из молекул рассматриваемого тела состоит из двух электронов, а именно: из отрицательного $-e$ в точке P и положительного $+e$ в точке P' , координаты которой ξ_1, ξ_2, ξ_3 по отношению к P являются непрерывными функциями координат x_1, x_2, x_3 точки P по отношению к некоторой неподвижной точке O . Иначе говоря, разность векторов OP' и OP $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \xi$ является непрерывной функцией от \mathbf{r} . Положение каждой молекулы определяется радиусом-вектором \mathbf{r} ее центра. Число этих центров в микро-скопическом элементе объема dV мы обозначим через $N dV$. При этом определенная таким образом концентрация молекул N рассматривается как некоторая непрерывная функция от \mathbf{r} . Соответствующую величину для положительных электронов, т. е. для точек P' , мы обозначим через N' . Точкам P , содержащимся в элементе объема dV (радиус-вектор \mathbf{r}), соответствуют точки P' , заполняющие элемент объема dV' . При этом очевидно имеет место равенство

$$N'(\mathbf{r}') dV' = N(\mathbf{r}) dV. \quad (40)$$

В виду соотношений

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) \quad (40a)$$

и

$$\frac{dV'}{dV} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}, & 1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}, & 1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \quad (40b)$$

из этого равенства можно определить концентрацию N' как функцию от \mathbf{r} , т. е. получить соотношение между концентрациями N и N' для одной и той же точки пространства. Непосредственный метод для решения этой задачи заключается в применении известного разложения в ряд Лагранжа. Однако косвенный метод, которым мы фактически пользовались уже в предыдущем параграфе дает возможность достичь цели значительно проще. А именно, рассмотрим интеграл

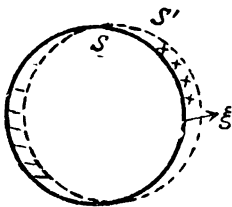


Рис. 1.

$$U' = \int \psi(\mathbf{r}') N'(\mathbf{r}') dV', \quad (41)$$

распространенный по произвольному объему V' , причем $\psi(\mathbf{r}')$ обозначает совершенно произвольную непрерывную функцию от \mathbf{r} . Этот интеграл можно преобразовать двояким способом.

Во-первых, можно положить

$$U' = \int \psi(\mathbf{r}) N'(\mathbf{r}) dV + \oint F' dS, \quad (41a)$$

причем стоящий справа объемный интеграл распространен по объему V , соответствующему V' , а поверхностный интеграл представляет собою разность

$$\int \psi(\mathbf{r}') N'(\mathbf{r}') dV' - \int \psi(\mathbf{r}) N'(\mathbf{r}) dV.$$

Это выражение получается непосредственно, если принять во внимание, что разность обоих объемов может быть выражена интегралом

$$V' - V = \oint \xi_n dS,$$

распространенным по граничной поверхности S объема V (рис. 1).

Соответственно этому в первом приближении имеем

$$F' = \psi(\mathbf{r}) N'(\mathbf{r}) \xi_n. \quad (41b)$$

Во-вторых, согласно уравнению (40) интеграл (41) можно заменить интегралом

$$U' = \int \psi(\mathbf{r}') N(\mathbf{r}) dV, \quad (42)$$

распространенным по объему V . Разлагая

$$\psi(\mathbf{r}') = \psi(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3)$$

в ряд Тейлора по степеням величин ξ_i и преобразовывая произведение каждого члена с $N(\mathbf{r})$ при помощи интегрирования по частям (т. е. повторным применением теоремы Гаусса), получаем [ср. вывод формул (32) — (34а) в предыдущем параграфе]:

$$U' = \int \psi(\mathbf{r}) \left[N(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi_i N(\mathbf{r})) + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (\xi_i \xi_k N(\mathbf{r})) - \dots \right] dV + \oint F dS. \quad (42a)$$

При этом знак суммирования по двум одинаковым индексам опущен; мы также не приводим здесь выражения F в раскрытом виде. Формулы (41а) и (42а) имеют совершенно одинаковую форму. Ввиду того, что функция ψ выбрана произвольно, ее коэффициенты в обоих объемных интегралах должны быть тождественно равными так же, как и величины F и F' . Искомое соотношение между $N'(\mathbf{r})$ и $N(\mathbf{r})$ имеет таким образом следующую вид:

$$N' = N - \frac{\partial}{\partial x_i} (N \xi_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (N \xi_i \xi_k) - \dots \quad (43)$$

Если это уравнение умножить на e и принять во внимание, что

$$\rho = e[N'(\mathbf{r}) - N(\mathbf{r})]$$

представляет собою среднюю плотность объемного заряда, обусловленного обоими электронами молекулы, и что произведения $N e \xi_i$, $N e \xi_i \xi_k$ и т. д. суть не что иное, как составляющие электрической поляризации первого, второго и высших порядков, то получим

$$\rho = - \frac{\partial P_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (43a)$$

Таким образом мы вновь находим уже известный нам результат и практически тем же способом, как и ранее.¹ Новое, что мы

¹ Само собой разумеется, что эта формула справедлива и в том случае, когда имеются молекулы нескольких сортов. В этом случае необходимо лишь заменить в (43) произведения $e N \xi_i$, $e N \xi_i \xi_k$ и т. д. суммами таких произведений по всем сортам молекул.

здесь получили, заключается в геометрической интерпретации этого результата. А именно, мы показали, что объемный заряд тела, обусловленный связанными электронами, зависит от нецентрального положения этих электронов или части их относительно центров молекул. Только что приведенное рассмотрение можно обобщить на произвольное число электронов, причем „центр“ образованной системы (молекулы) может быть выбран совершенно произвольно. Заметим, что электрические моменты второго и высших порядков вообще имеют величину, зависящую от выбора этого „центра“, и лишь моменты первого порядка—если молекула в целом нейтральна—от этого выбора не зависят. Однако легко показать, что определяемая выражением (43а) результирующая объемная плотность электрического заряда остается независимой от выбора центра. Действительно, если написать относительные координаты ξ_i различных электронов в виде $\xi'_i + \xi_i^0$, где $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ обозначают координаты нового центра относительно старого, и выразить прежние электрические моменты через новые, то по определению электрической поляризации ($P_{i_1, i_2, \dots, i_k} = Ne_{i_1, i_2, \dots, i_k} = Ne \xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}$, ср. т. I, стр. 107)

$$\left. \begin{aligned} P_i &= P'_i, & P_{ik} &= P'_{ik} + \xi_i^0 P'_k + \xi_k^0 P'_i, \\ P_{ikl} &= P'_{ikl} + \sum \xi_i^0 P'_{kl} + \sum \xi_i^0 \xi_k^0 P'_l \end{aligned} \right\} \quad (43b)$$

и т. д., где для сокращения через \sum обозначена сумма всех членов, получающихся перестановкой индексов. Подставляя эти выражения в формулу (43а) и принимая во внимание, что ряд

$$\begin{aligned} & \sum_i \frac{\partial P'_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2!} \sum_i \sum_k \xi_i^0 \frac{\partial^2 P'_k}{\partial x_i \partial x_k} + \\ & + \frac{1}{3!} \sum_i \sum_k \sum_l \xi_i^0 \xi_k^0 \frac{\partial^3 P'_l}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} - \dots \end{aligned}$$

является разложением величины $\sum_i \frac{\partial P'_i}{\partial x_i}$ в точке $x_i - \xi_i^0 = x'_i$

[аналогичное положение имеет место и для других величин, входящих в (43а)], мы вновь получаем формулу того же самого вида, причем однако r должно быть отнесено не к прежней точке, а к смещенной с координатами $x_1 - \xi_1^0, x_2 - \xi_2^0, x_3 - \xi_3^0$.

Совершенно аналогично объемному заряду поверхностный заряд, обусловленный связанными электронами, также может быть интерпретирован при помощи моментов двойных и кратных слоев.

Эти поверхностные слои получаются при смещении объемов, содержащих соответствующие электроны, относительно друг друга;

В случае простых дипольных молекул мы получаем два объема (рис. 1), причем не перекрывающиеся их части образуют тонкий слой с зарядом

$$\eta' = Ne\xi_n = P_n$$

на единицу поверхности. Этот слой в первом приближении можно рассматривать как простой поверхностный заряд, распределенный по поверхности S , проходящей через центры наиболее выступающих наружу молекул. Однако, если мы хотим учесть его конечную толщину, то к только что упомянутому простому слою на S необходимо добавить двойной слой, одна сторона которого образована противоположным поверхностным слоем на S' , а другая сторона — заключенным между S и S' объемным зарядом. Во втором приближении этот объемный заряд можно заменить поверхностным зарядом такой же самой величины, причем соответствующая поверхность S'' должна проходить приблизительно посередине между поверхностями S и S' . Таким образом мы получаем двойной слой с моментом

$$\eta \cdot \frac{1}{2} \xi_n = \frac{1}{2} Ne\xi_n^2 = \frac{1}{2} {}^2P_{nn}$$

на единицу поверхности — в согласии с формулой (33а). Если еще принять во внимание то обстоятельство, что объемная плотность заряда между S и S' не строго постоянна, а меняется некоторым образом, определяемым зависимостью концентрации N от координат, то получается дополнительный простой поверхностный заряд (на S') с плотностью

$$\eta'' = -\frac{1}{2} n_i \frac{\partial (eN\xi_i\xi_k)}{\partial x_k} = -\frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \text{div } {}^2\mathbf{P}$$

Эти рассуждения легко продолжить далее. Однако мы не будем вдаваться в подробности этого вопроса и лишь весьма кратко остановимся на соответствующих вопросах, касающихся магнитной поляризации и обусловленной ею плотности тока.

2. Магнитная поляризация и релятивистское обобщение. Рассмотрим опять модель молекулы с двумя электронами; при этом представим себе, что положительный электрон не покоится, а движется вокруг отрицательного (т. е. „центра“ молекулы) со скоростью $\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}$. Соответственно этому каждая молекула должна обладать магнитным моментом

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2c} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v} \quad (44)$$

(ср. т. I, стр. 95, 264).

Электрическое количество движения отдельных электронов $\frac{e\mathbf{v}}{c}$ складывается в результирующее количество движения, средняя величина которого в единице объема может быть определена таким же образом, как и средняя плотность заряда, а именно, если рассматривать \mathbf{v} , подобно ξ и N , как непрерывную функцию положения, то для среднего значения произведения $N'v'_h$, отнесенного к центру молекул, по (43) получаем

$$N'v'_h = Nv_h - \frac{\partial}{\partial x_i} (Nv_h \xi_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (Nv_h \xi_i \xi_k). \quad (45)$$

Так как скорость \mathbf{v} изменяется очень быстро, то для того, чтобы получить искомое среднее пространственно-временное значение плотности тока \mathbf{j} , нужно усреднить выражение (45) еще по времени (т. е. по нескольким периодам обращения электронов). Среднее значение во времени производной от какой-нибудь координаты (ξ_i) или произведения различных координат очевидно следует положить равным нулю. Таким образом мы имеем

$$\frac{d\bar{\xi}_n}{dt} = \bar{v}_n = 0, \quad \frac{d}{dt} (\bar{\xi}_h \xi_i) = \bar{v}_h \xi_i + \xi_h \bar{v}_i = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{\xi}_h \xi_i \xi_k) = \bar{v}_h \xi_i \xi_k + \bar{v}_i \xi_k \xi_h + \bar{v}_k \xi_h \xi_i = 0$$

и т. д. Отсюда следует

$$\bar{v}_h \xi_i = -\bar{\xi}_h \bar{v}_i = \frac{1}{2} (\bar{v}_h \xi_i - \bar{v}_i \xi_h);$$

далее

$$\bar{v}_h \xi_i \xi_k = -\bar{v}_i \xi_k \xi_h - \bar{v}_k \xi_h \xi_i = \frac{1}{2} (\bar{v}_h \xi_i \xi_k - \bar{v}_i \xi_k \xi_h - \bar{v}_k \xi_h \xi_i),$$

т. е.

$$\frac{3}{2} \bar{v}_h \xi_i \xi_k = \frac{1}{2} (\bar{v}_h \xi_i \xi_k - \bar{v}_i \xi_k \xi_h + \bar{v}_h \xi_i \xi_k - \bar{v}_k \xi_h \xi_i),$$

или наконец

$$\bar{v}_h \xi_i \xi_k = \frac{1}{3} [(\bar{v}_h \xi_i - \bar{v}_i \xi_h) \xi_k + (\bar{v}_h \xi_k - \bar{v}_k \xi_h) \xi_i]$$

и т. д.

Умножая среднее временное значение выражения (45) на $\frac{e}{c}$ и заменяя вектор \mathbf{m} соответствующим антисимметрическим тензором с составляющими

$$m_{hi} = \frac{e}{2} (\xi_h \bar{v}_i - \xi_i \bar{v}_h), \quad (45a)$$

мы получаем для средней плотности тока (электрического импульса в единице объема), обусловленного обращением электронов, следующую формулу:

$$j_h = \frac{\partial}{\partial x_i} (N \bar{m}_{hi}) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \{N (\overline{m_{hi} \xi_k} + \overline{m_{hk} \xi_i})\} + \dots \quad (45b)$$

Первый член справа очевидно можно трактовать как составляющую по h -ой оси вектора $\text{rot } \mathbf{M}$, где $\mathbf{M} = N\mathbf{m}$ обозначает (средний) магнитный момент единицы объема, т. е. магнитную поляризацию первого порядка. Таким образом мы получаем в первом приближении нашу прежнюю формулу $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{M}$.

Если считать, что индексы h, i, k, \dots принимают не три, а четыре значения: 1, 2, 3, 4, то в качестве четырехмерного обобщения (45b) получаем формулу (38a) или точнее сумму выражений вида (38a) от $k=1$ до $k=\infty$, причем величины $P_{hi, i, \dots}$ выражаются следующим образом:

$$P_{hi} = N \bar{m}_{hi}, \quad P_{hik} = \frac{2}{3} N (\overline{m_{hi} \xi_k} + \overline{m_{ik} \xi_i}), \quad \text{и т. д.} \quad (45c)$$

Эти выражения действительно обладают теми свойствами симметрии, которое мы им приписывали выше (без доказательства).

Добавим еще несколько слов относительно геометрической интерпретации поверхностного тока, обусловленного связанными электронами. В поверхностном слое, ограниченном S и S' (рис. 1) в среднем заключается $N\xi$ электронов на единицу поверхности, которые движутся в касательном направлении со скоростью v . При этом ξ и v обозначают средние значения, которые выбраны таким образом, что имеет место соотношение

$$\xi \cdot v = \frac{1}{2} |\overline{\xi \times v}|.$$

Таким образом для электрического импульса на единицу поверхности, т. е. для плотности тока $\vec{\mathbf{k}}$, получается известное выражение

$$\mathbf{k} = N \frac{e}{c} \frac{1}{2} |\overline{\xi \times v}| \times \mathbf{n} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}.$$

До сих пор мы не принимали во внимание того факта, что электроны, благодаря их собственному вращению („спину“) обладают дополнительным магнитным и электрическим моментом. Эти моменты очевидно должны также сказаться на магнитной, а также и на электрической поляризации. Если это влияние известно, то при помощи аналитического метода, изложенного в предыдущих параграфах, мы можем вычислить эквивалентную плотность токов и зарядов. Чтобы разъяснить геометрически их возникновение, нужно разбить электроны на элементарные заряды и

рассматривать последние таким же образом, как мы это делали с самими электронами. Само собой разумеется, что это возможно лишь в том случае, если рассматривать электроны как протяженные частицы.

Если обозначить собственный магнитный момент электрона через \mathbf{m} , то среднее значение произведения $N' m_h$, отнесенного к центру молекулы, можно определить формулой

$$M_h = \overline{N m_h} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(N m_h \xi_i)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \overline{(N m_h \xi_i \xi_k)} \quad (46)$$

[эта формула получается из (45), если заменить там \mathbf{v} на \mathbf{m}]. Непосредственный эффект электронного магнитного момента заключается следовательно в простой магнитной поляризации (первого порядка), которая имеет величину, определяемую формулой (46). Из этой поляризации получается эквивалентная плотность тока обычным путем, т. е. при помощи формулы $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{M}$ (без каких-либо дополнительных членов). Аналогичное положение имеет место и для соответствующей электрической поляризации. Этими вопросами мы заниматься не будем. Однако обратим внимание на то, что зависимость рассматриваемой части магнитной поляризации от (среднего) поля может быть отлична от соответствующей зависимости остальной части, обусловленной обращением электронов.

§ 7. Простейшая форма уравнений электромагнитного поля для изотропных и анизотропных тел

1. Электромагнитные константы изотропных тел. Окончательная форма дифференциальных уравнений макроскопического электромагнитного поля, как было показано в § 2, зависит от выбора функции $s(F)$ или, если написать подробнее от выбора функций

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad \rho(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad \text{и} \quad \mathbf{j}(\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

При этом \mathbf{P} и \mathbf{M} обозначают полную электрическую или магнитную поляризацию в обычном смысле, т. е. сумму поляризаций первого порядка, зависящих от дипольного, квадрупольного и других моментов молекулы высших порядков, тогда как ρ и \mathbf{j} суть плотности зарядов и токов, обусловленные свободными электронами.

Простейшее допущение, которое по аналогии с законом Гука можно сделать относительно функций \mathbf{P} и \mathbf{M} , есть следующее

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \quad (47)$$

$$\mathbf{M} = \gamma \mathbf{H}, \quad (47a)$$

где χ и γ обозначают две материальные постоянные, которые мы будем называть соответственно электрической и магнитной

восприимчивостью данного тела. Это допущение очевидно соответствует случаю изотропного тела, молекулы которого не имеют естественных электрических и магнитных моментов, а обладают лишь моментами первого порядка, индуцированными внешним полем; индуцированные моменты высших порядков в (47) и (47а) не учтены. В однородных телах восприимчивости χ и γ имеют одно и то же значение во всем объеме; в противном случае они должны рассматриваться как определенные функции положения. Позднее мы увидим, что формулы (47) и (47а) приближенно остаются справедливыми и в том случае, когда молекулы тела обладают естественными дипольными моментами, если в отсутствии поля они ориентированы беспорядочно, так что среднее временное и пространственное значение их составляющих в любом направлении равно нулю. Далее следует заметить, что восприимчивости, введенные при помощи (47) и (47а), строго говоря, имеют смысл, т. е. некоторое определенное значение, лишь для гармонически колеблющихся (или статических) полей. В общем случае произвольно меняющегося поля его необходимо разложить на гармонические составляющие, и каждой составляющей сопоставить соответствующую составляющую поляризации с надлежащим значением восприимчивости.

Аналогичное положение имеет место для функции \mathbf{j} , которую по закону Ома мы можем выразить линейно через составляющие напряженности поля. Если пренебречь электромагнитной силой, то простейшее допущение относительно \mathbf{j} , справедливое для изотропных тел, будет иметь вид

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E}, \quad (48)$$

где коэффициент σ называется удельной электрической проводимостью соответствующего тела.¹

Если мы хотим учесть влияние магнитного поля на плотность тока, то \mathbf{E} следует заменить суммой $\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}$, где \mathbf{v} обозначает среднюю скорость рассматриваемых „свободных“ электронов [если имеется несколько родов электронов или ионов, то соответствующие части \mathbf{j} следует рассматривать отдельно]. Следовательно

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right).$$

¹ При этом определении проводимость измеряется электростатическими единицами. Отношение $\frac{\sigma}{c}$ представляет собою ту же самую проводимость в электромагнитных единицах.

Скорость v можно вычислить из плотности тока по формуле

$$\mathbf{j} = \frac{nev}{c} \quad (48a)$$

(n обозначает здесь среднее число свободных электронов в единице объема). Таким образом для \mathbf{j} мы получаем следующее уравнение

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} (\mathbf{E} + \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{H}).$$

Если пренебречь членами квадратичными относительно \mathbf{H} , то во втором члене правой части \mathbf{j} можно заменить через $\frac{\sigma}{c} \mathbf{E}$; это дает для \mathbf{j} выражение

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\sigma^2}{nec^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (48b)$$

Первый член представляет обычный закон Ома, второй же можно назвать током Холла, ибо он является мерой эффекта, открытого Холлом. В дальнейшем этот ток Холла мы будем отбрасывать и пользоваться простой формулой (48).

Для плотности электрического заряда ρ (обусловленного свободными электронами) соответствующего соотношения, связывающего его с величинами, характеризующими электромагнитное поле, не имеется. Самостоятельное соотношение подобного рода вообще не может существовать, так как имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

выражающее принцип сохранения электричества. В случае однородного (и изотропного) тела последнее уравнение легко интегрируется. Действительно, полагая $\mathbf{j} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{c}$ и принимая во внимание уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

и соотношение

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = (1 + 4\pi\kappa) \mathbf{E}$$

[по (47)], имеем

$$c \operatorname{div} \mathbf{j} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\sigma}{1 + 4\pi\kappa} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{4\pi\sigma}{1 + 4\pi\kappa} \rho.$$

Таким образом мы получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{1 + 4\pi\kappa} \rho = 0,$$

интеграл которого имеет вид

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\rho_0 = \text{const}), \quad (49)$$

где для сокращения положено

$$\tau = \frac{1 + 4\pi\kappa}{4\pi\sigma}. \quad (49a)$$

Эти формулы показывают, что в однородном изотропном теле с отличной от нуля проводимостью невозможно длительное существование объемного распределения электричества; в каждой точке пространства его плотность должна экспоненциально убывать с течением времени, совершенно независимо от изменения во времени других электромагнитных величин, и притом тем быстрее, чем меньше величина τ — так называемое время релаксации.

Только что введенная величина

$$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa \quad (50)$$

называется диэлектрической постоянной тела. Она равна отношению электрической индукции \mathbf{D} к напряженности электрического поля, т. е.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (50a)$$

Соответствующее соотношение между магнитной индукцией $\mathbf{B} = = \mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M}$ и напряженностью магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{B} = \mu^{-1} \mathbf{H}, \quad (51)$$

причем множитель пропорциональности — „магнитная постоянная“ — по (47a) выражается следующим образом:

$$\mu^{-1} = 1 - 4\pi\gamma. \quad (51a)$$

Как уже, упомянуто выше, в обычном изложении учения об электричестве усредненная напряженность поля \mathbf{H} определяется как „магнитная индукция“, а величина \mathbf{B} — как „напряженность поля“. Соответственно этому магнитную восприимчивость χ определяют формулой

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{B} \quad (52)$$

и вместо μ^{-1} вводят обратную величину $\mu = \frac{1}{\mu^{-1}}$, которая называется магнитной проницаемостью и выражается через χ таким же образом, как и ϵ через κ , т. е. посредством формулы

$$\mu = 1 + 4\pi\chi. \quad (52a)$$

Обычная восприимчивость χ связана с нашей γ соотношением

$$1 + 4\pi\chi = \frac{1}{1 - 4\pi\gamma}. \text{ Следовательно имеем}$$

$$\gamma = \frac{\chi}{1 + 4\pi\chi} = \frac{\chi}{\mu} \quad (52b)$$

и

$$\mathbf{H} = \mu \mathbf{B}. \quad (52c)$$

2. Основные уравнения и граничные условия. Если в уравнения (17) и (18) для непроводящих тел ввести выражения (50a) и (52c), то эти уравнения принимают следующий вид:

$$\operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{B} = 0, \quad (53)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (53a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (53b)$$

Для проводящих тел ($\sigma > 0$) последнее уравнение должно быть заменено следующим:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} \quad (54)$$

(плотность свободных электрических зарядов ρ мы в дальнейшем будем полагать равной нулю).

Как уже неоднократно упоминалось, эти уравнения могут быть верны, строго говоря, лишь в случае гармонически колеблющихся полей. Поэтому мы положим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0 e^{i\omega t} \quad (55)$$

и для определения амплитуд \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 , как функций положения, получаем следующие уравнения:

$$\operatorname{div} \epsilon \mathbf{E}^0 = 0, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{H}^0 = 0, \quad (55a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^0 + \frac{i\omega}{c} \mu \mathbf{B}^0 = 0, \quad (55b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}^0 - \frac{i\omega}{c} \epsilon' \mathbf{E}^0 = 0. \quad (55c)$$

При этом обе постоянные ϵ и σ мы соединили в одну комплексную величину:

$$\epsilon' = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (55d)$$

которая называется „комплексной диэлектрической постоянной“ соответствующего тела. Напомним, что и при $\sigma = 0$ как величина ϵ , так и μ могут иметь комплексные значения (ср. конец § 2).

На ряду с дифференциальными уравнениями для величин электромагнитного поля мы вкратце рассмотрим еще условия, имеющие место на поверхности раздела двух таких тел (a и b). В том случае, когда нет поверхностного заряда и поверхностного тока, по формулам (19) и (20) имеем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^a E_n^a &= \epsilon^b E_n^b, & E_\tau^a &= E_\tau^b, \\ D_n^a &= D_n^b, & \frac{D_\tau^a}{\epsilon^a} &= \frac{D_\tau^b}{\epsilon^b} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \mu^a B_n^a &= \mu^b B_n^b, & B_\tau^a &= B_\tau^b, \\ H_n^a &= H_n^b, & \frac{H_\tau^a}{\mu^a} &= \frac{H_\tau^b}{\mu^b}, \end{aligned} \right\} \quad (56a)$$

где E_τ , D_τ и т. д. обозначают тангенциальные составляющие соответствующих векторов. Если обозначить углы между нормалью n к поверхности и напряженностью электрического поля (или индукцией) в обоих телах соответственно через i_a и i_b , то по (56) получаем следующий „закон преломления электрических силовых линий“:

$$\frac{\operatorname{tg} i_b}{\operatorname{tg} i_a} = \frac{\epsilon^b}{\epsilon^a}. \quad (56b)$$

Аналогичный закон имеет место и для магнитных силовых линий, представляющих графически векторы H и B .

Вышеприведенные дифференциальные уравнения и граничные условия легко могут быть обобщены на случай анизотропных тел, а именно: вместо скалярных материальных констант κ , ϵ , χ , μ (или γ , μ^{-1}) и σ нужно ввести соответствующие тензоры второго ранга. При этом

$$P_i = \sum_{k=1}^3 \chi_{ik} E_k, \quad D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} E_k, \quad \epsilon_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik}, \quad (57)$$

где δ обозначает единичный тензор ($\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$); далее

$$M_i = \sum_{k=1}^3 \chi_{ik} B_k, \quad H_i = \sum_{k=1}^3 \mu_{ik} B_k, \quad \mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik} \quad (57a)$$

или

$$M_i = \sum_{k=1}^3 \gamma_{ik} H_k, \quad B_i = \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{-1} H_k, \quad \mu_{ik}^{-1} = \delta_{ik} - 4\pi\gamma_{ik} \quad (57b)$$

и наконец

$$j_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\sigma_{ik}}{c} E_k. \quad (57c)$$

Тензоры ${}^2\mu$ и ${}^2\mu^{-1}$ являются обратными друг другу. Если обозначить определитель, образованный составляющими тензора ${}^2\mu$, через $|\mu|$, то имеем

$$\mu_{ik}^{-1} = \frac{1}{|\mu|} \frac{\partial |\mu|}{\partial \mu_{ki}}.$$

Как мы покажем ниже, все вышеприведенные тензоры являются, вообще говоря симметричными. Следовательно для каждого анизотропного тела можно выбрать такие прямоугольные координатные оси, по отношению к которым недиагональные составляющие тензоров ${}^2\chi$ и ${}^2\mu$ обращаются в нуль. Эти оси называются электрическими или магнитными осями данного тела (или элемента объема, если тело не только не изотропно, но и неоднородно). Соответствующие необращающиеся в нуль составляющие упомянутых тензоров называются их главными составляющими и обычно обозначаются с помощью одного индекса, напр. через x_1, x_2, x_3 .

Электрические и магнитные оси так же, как и оси тензора проводимости, вообще говоря, могут иметь различные направления. Если же они совпадают, то дифференциальные уравнения электромагнитного поля, отнесенные к этим осям, приобретают следующий сравнительно простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (\epsilon_1 E_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\epsilon_2 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\epsilon_3 E_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (\mu_1 B_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\mu_2 B_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\mu_3 B_3) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\mu_1}{c} \frac{\partial B_1}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\mu_2}{c} \frac{\partial B_2}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\mu_3}{c} \frac{\partial B_3}{\partial t} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (58a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\epsilon_1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{4\pi\sigma_1}{c} E_1, \\ \frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1} - \frac{\epsilon_2}{c} \frac{\partial E_2}{\partial t} &= \frac{4\pi\sigma_2}{c} E_2, \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\epsilon_3}{c} \frac{\partial E_3}{\partial t} &= \frac{4\pi\sigma_3}{c} E_3. \end{aligned} \right\} \quad (58b)$$

Электрические и магнитные оси характеризуются тем свойством, что для них, и только для них, напряженности полей и соответствующие индукции параллельны друг другу.

Вообще же силовые линии и линии индукции идут в различных направлениях. Следовательно на поверхности раздела двух тел они будут преломляться различно,

§ 8. Обобщение уравнений электромагнитного поля для движущихся тел

1. Непосредственный учет скорости движения. Вышеприведенные уравнения поля для изотропных тел легко могут быть обобщены еще в другом направлении, а именно для того случая, когда тело движется прямолинейно и равномерно относительно соответствующей координатной системы S' . Пусть S будет координатная система, связанная неподвижно с телом. Далее примем, что обе системы ориентированы одинаково и что S движется относительно S' в направлении (общей) первой координатной оси со скоростью v .

Этот вопрос мы уже подробно обсуждали в § 4 с общей точки зрения, т. е. независимо от какого-либо соотношения между напряженностями полей (E, H) и поляризациями (P, M) или индукциями (D, B). Теперь нам остается лишь принять во внимание введенные для системы S в предыдущем параграфе соотношения (47), (47а), (50а) и (51) (сначала мы рассмотрим случай непроводящего тела, т. е. положим $\sigma = 0$).

Это очень легко осуществить при помощи (приближенных) уравнений преобразования (28), (28а) и (28b) § 4. А именно, мы подставим в уравнения (28а) и (28b) выражения $P = \kappa E$, $M = \gamma H$, $D = \epsilon E$, $B = \mu^{-1} H$ и выразим затем E и H через E' и H' по формулам

$$\left. \begin{aligned} H &= H' - \frac{v}{c} \times E', \\ E &= E' + \frac{v}{c} \times H', \end{aligned} \right\}$$

которые получаются из (28) переменной знака у $\frac{v}{c}$. Таким путем мы приходим к следующим (приближенным) соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} P' &= \kappa E' + (\kappa + \gamma) \frac{v}{c} \times H', \\ M' &= \gamma H' - (\kappa + \gamma) \frac{v}{c} \times E' \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

или согласно (50) и (50a)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}' &= \varepsilon \mathbf{E}' + (\varepsilon - \mu^{-1}) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}', \\ \mathbf{B}' &= \mu^{-1} \mathbf{H}' + (\varepsilon - \mu^{-1}) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}'. \end{aligned} \right\} \quad (59a)$$

Из последних уравнений в том же приближении получаются формулы

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}' &= \varepsilon \mathbf{E}' + \frac{\varepsilon - \mu^{-1}}{\mu^{-1}} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}', \\ \mathbf{H}' &= \frac{1}{\mu^{-1}} \mathbf{B}' - \frac{\varepsilon - \mu^{-1}}{\mu^{-1}} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}', \end{aligned} \right\}$$

или, так как $\mu^{-1} = \frac{1}{\mu}$,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}' &= \varepsilon \mathbf{E}' + (\varepsilon \mu - 1) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}', \\ \mathbf{H}' &= \mu \mathbf{B}' - (\varepsilon \mu - 1) \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}'. \end{aligned} \right\} \quad (59b)$$

Напомним, что основные уравнения (I) и (III) остаются неизменными при переходе от S к S' , т. е. сохраняют обычную форму

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}' \mathbf{H}' &= 0, \quad \operatorname{rot}' \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div}' \mathbf{D}' &= 0, \quad \operatorname{rot}' \mathbf{B}' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Однако, если выразить здесь \mathbf{D}' и \mathbf{B}' (или \mathbf{H}'), через \mathbf{E}' и \mathbf{H}' (или \mathbf{B}') по формулам (59a) или (59b), то получаются уравнения, которые существенно отличаются от уравнений (53), (53a) и (53b), относящихся к движущейся вместе с телом координатной системе S . Если воспользоваться сокращенным обозначением

$$\mathbf{w} = (\varepsilon \mu - 1) \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (61)$$

и принять во внимание тождество $\operatorname{div}' (\mathbf{w} \times \mathbf{E}') = -\mathbf{w} \cdot \operatorname{rot}' \mathbf{E}'$, то эти обобщенные уравнения, имеющие силу в теле, движущ-

щемся относительно системы S' со скоростью \mathbf{v} , напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}' \epsilon \mathbf{E}' - \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot}' \mathbf{B}' &= 0, \\ \operatorname{div}' \mu \mathbf{B}' + \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot}' \mathbf{E}' &= 0, \\ \operatorname{rot}' \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - \mathbf{w} \times \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} \right) &= 0, \\ \operatorname{rot}' \mathbf{B}' - \frac{1}{c} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \mathbf{w} \times \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (61a)$$

До сих пор электрической проводимостью рассматриваемого тела мы пренебрегали. В том случае, когда речь идет о гармонически колеблющемся поле, ее очень легко учесть путем добавления мнимой величины $-i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ к диэлектрической постоянной тела ϵ . Здесь ω обозначает частоту колебаний (умноженную на 2π) в системе S . В нашем приближении ω можно отождествить с соответствующей частотой относительно S' ; точное соотношение будет

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

В общем случае произвольных электромагнитных процессов в правую часть первого и последнего уравнений (61a) нужно ввести (умноженную на 4π) плотность заряда ρ' и соответственно плотность тока \mathbf{j}' . Полагая, как обычно, $\rho = 0$, по (29) имеем $\rho' = -\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{j}$ и $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$. Далее, так как $\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E}$ и $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}'$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}' &= \frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}' \right), \\ \rho' &= \frac{\sigma \mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{E} \cong \frac{\sigma \mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{E}'. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Эти формулы представляют собою приближенную форму следующих точных четырехмерных соотношений

$$j'_i = \frac{\sigma}{c} \sum_{k=1}^4 H'_{ik} u_k \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (62a)$$

где H'_{ik} обозначают составляющие тензора электромагнитного поля, определяемые формулами (22a), а u_k — составляющие

четырёхмерного вектора \mathbf{u} , характеризующего скорость поступательного движения тела; пространственная проекция u равна

$$\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а временная (ср. том I, стр. 350).

$$\frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

2. Релятивистское обобщение электромагнитных материальных констант. Приведенные соотношения между поляризациями, индукциями и плотностью токов (или зарядов), с одной стороны, и напряженностями поля — с другой, впервые были получены Г. Минковским. Эти соотношения могут быть представлены в несколько отличной четырехмерной форме таким образом, чтобы скорость тела v вошла в них неявным образом через материальные константы. Эти обобщенные (зависящие от скорости) материальные константы движущегося изотропного тела уже нельзя рассматривать как скалярные величины, а их нужно трактовать так же, как в случае анизотропных тел (в данном случае анизотропия обусловлена движением), т. е. как некоторые тензоры, а именно четырехмерные тензоры четвертого и третьего ранга.¹

В самом деле, если мы хотим определить составляющие тензора индукции ${}^2\mathfrak{B}$ как линейные функции составляющих тензора поля ${}^2\mathfrak{E}$, то коэффициенты этих линейных соотношений должны являться составляющими некоторого тензора четвертого ранга. Обозначая этот тензор через ${}^4\mathfrak{C}$, имеем

$$B_{ik} = S_{ik; \alpha\beta} H_{\alpha\beta}, \quad (63)$$

причем знаки суммирования по двум одинаковым индексам ($\alpha\alpha$ и $\beta\beta$) опущены. Так как тензоры ${}^2\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ и ${}^2\mathfrak{B}_{ik}$ антисимметричны, то составляющие тензора $S_{ik; \alpha\beta}$ будут также антисимметрическими относительно пар индексов ik и $\alpha\beta$. Далее легко показать, что в случае изотропного тела имеет место следующая формула:

$$S_{ik; \alpha\beta} = S_{i\alpha} S_{k\beta}, \quad (63a)$$

где $S_{i\alpha}$ и $S_{k\beta}$ — составляющие симметрического тензора второго ранга ${}^2\mathfrak{C}$. Эта формула легко доказывается для покоящегося тела, причем составляющие тензора ${}^2\mathfrak{C}$ получаются по следующей схеме:

¹ Последующие результаты принадлежат Иг. Тамму.

$$(S_{k\beta}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{V_{\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{V_{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon V_{\mu} \end{vmatrix} \quad (63b)$$

Однако в виду инвариантного характера соотношения (63a) относительно любых лоренцовых преобразований, они должны иметь место также и для движущихся тел.

Лоренцовы преобразования, соответствующие переходу от „увлекаемой“ телом системы S к „покоящейся“ S' , как известно, определяются следующей схемой коэффициентов:

$$(\alpha_{kk'}) = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\frac{\beta}{i}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\beta}{i}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c} \right) \quad (64)$$

(ср. т. I, стр. 292; при этом мы должны изменить знак).

Подставляя эти коэффициенты в формулу преобразования

$$S'_{k'\beta'} = \alpha_{kk'} \alpha_{\beta\beta'} S_{k\beta},$$

после простых вычислений получаем:

$$S'_{k'\beta'} = \begin{vmatrix} \frac{\gamma^2}{V_{\mu}}(1-\beta^2\epsilon\mu), & 0, & 0, & \frac{\beta\gamma^2}{V_{\mu}}(1-\epsilon\mu), \\ 0 & \frac{1}{V_{\mu}}, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & \frac{1}{V_{\mu}}, & 0, \\ \frac{\beta\gamma^2}{V_{\mu}}(1-\epsilon\mu), & 0, & 0, & \gamma^2\epsilon V_{\mu}\left(1-\frac{\beta^2}{\epsilon\mu}\right) \end{vmatrix} \quad (64a)$$

Отсюда, по (63) и (63a) имеем:

$$D'_1 = iB'_{14} = iS'_{1k} S'_{4\beta} H'_{k\beta} = i(S'_{11} S'_{44} H'_{14} + S'_{14} S'_{41} H'_{41}),$$

т. е.

$$D'_1 = (S'_{11} S'_{44} - S'_{14} S'_{41}) E'_1 = E'_1 \epsilon \gamma^4 \left[(1 - \beta^2 \epsilon \mu) \left(1 - \frac{\beta^2}{\epsilon \mu} \right) - \beta^2 (1 - \epsilon \mu)^2 \right]$$

или

$$D'_1 = \epsilon \left[1 - \gamma^4 \beta^2 \left(\epsilon^2 \mu^2 - \epsilon \mu + \frac{1}{\epsilon \mu} \right) \right] E'_1.$$

Далее

$$D'_2 = i B'_{24} = i S'_{2k} S'_{4\beta} H'_{k\beta} = i S'_{22} (S'_{41} H'_{21} + S'_{44} H'_{24}),$$

т. е.

$$D'_2 = \epsilon \gamma^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{\epsilon \mu} \right) E'_2 - \frac{\beta \gamma^2}{\mu} (1 - \epsilon \mu) H'_3$$

и таким же образом

$$D'_3 = \epsilon \gamma^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{\epsilon \mu} \right) E'_3 + \frac{\beta \gamma^2}{\mu} (1 - \epsilon \mu) H'_2.$$

Аналогичные формулы получаются для составляющих B . Пренебрегая членами, квадратичными относительно $\beta = \frac{v}{c}$, эти составляющие можно представить векториально в виде уже ранее полученных приближенных формул (59а) и (59б).

Формулы (62а) для составляющих четырехмерного тока могут быть переписаны в виде

$$j'_i = H'_{ik} \sigma'_k, \quad (65)$$

благодаря чему вместо скаляра проводимости σ вводится соответствующий вектор с составляющими $\sigma'_k = \frac{\sigma}{c} u_k$. Однако в случае анизотропных тел подобное представление проводимости уже не является возможным; вместо трехмерного тензора второго ранга ${}^2\sigma$ мы должны ввести четырехмерный тензор третьего ранга при помощи уравнения

$$j'_i = \sigma'_{ikl} H'_{kl}. \quad (65a)$$

Мы не можем здесь останавливаться на рассмотрении этого тензора, а также и тензора ${}^2\mathcal{E}$ для анизотропных тел. Заметим только, что в этом случае тензор проводимости не может быть сведен к тензору второго ранга.

Чтобы учесть объемные заряды, могущие оказаться в покоящемся теле, необходимо плотность их ρ считать временной составляющей четырехмерного вектора, пространственная составляющая которого равна нулю. В движущемся теле, т. е. по отношению к координатной системе S' , эта проекция отлична от нуля и равна

$$\frac{\rho \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обычно ее называют конвекционным током, в противоположность определяемому законом Ома току проводимости. Временной составляющей, соответствующей конвекционному току, является плотность свободных зарядов

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

практически (для малых значений $\frac{v}{c}$) она тождественна с ρ .

В случае отсутствия конвекционного тока общие уравнения электромагнитного поля для движущегося анизотропного тела в четырехмерной форме по (22), (23), (63) и (65а) напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{ki}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{ii}}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (S_{ij;kl} \cdot H_{kl}) &= 4\pi\sigma_{ikl} H_{kl}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Эту систему уравнений можно рассматривать как итог обычной макроскопической теории электромагнитного поля в материальных телах.

Если ввести усредненный четырехмерный потенциал \mathfrak{A} по обычной формуле

$$H_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad (66a)$$

(ср. т. I, стр. 278; там H_{ik} и A_i обозначают точные значения соответствующих величин в рассматриваемой пространственно-временной точке), то первые уравнения (66) удовлетворяются тождественно, тогда как вторые принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[S_{ij;kl} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) \right] = 4\pi\sigma_{ikl} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right). \quad (66b)$$

Интегрированием этих уравнений с учетом вышеприведенных граничных условий можно однозначно определить гармонически колеблющееся (или статическое) электромагнитное поле. В общем случае непериодических процессов нужно еще задать определенные начальные условия, которые необходимы для определения гармонических составляющих величин, характеризующих поле. Эти вопросы будут подробно рассмотрены во втором разделе.

§ 9. Различные усложнения теории для реальных тел

Развитая в последних двух параграфах феноменологическая теория макроскопического поля восходит к Максвеллу. Будучи дополнена микроскопической теорией дисперсии,

определяющей в случае гармонических колебаний зависимость материальных постоянных ϵ , μ , σ от частоты колебаний, эта теория оказывается в очень хорошем согласии с огромным числом наблюдаемых явлений. В этом отношении, как и в отношении формы основных уравнений, она целиком соответствует основанной на законе Гука классической теории упругости, которая математически формулируется линейными дифференциальными уравнениями второго порядка для составляющих смещения (последним в максвелловской теории соответствуют электромагнитные потенциалы).

Однако в обоих случаях, как в отношении электромагнитных, так и в отношении упругих свойств материальные тела несколько идеализируются. Чтобы иметь возможность трактовать явления в том случае, когда эта идеализация не оправдывается, иными словами, чтобы учесть отклонения реальных тел от „идеальных“, необходимо в обычную феноменологическую теорию ввести некоторые осложнения. Математически эти осложнения выражаются добавочными членами, повышающими порядок или степень дифференциальных уравнений.

1. Осложнения, обусловленные поляризацией высших порядков. В нашем случае осложнения прежде всего вызываются электромагнитной поляризацией второго и высшего порядка, которую мы подробно рассмотрели в § 5, но не приняли во внимание при установлении основных уравнений в § 7. Относительно индуцированного электрического момента молекулы, в первом томе (гл. IV, § 8) мы сделали допущение, сводящееся к следующему линейному соотношению:

$$p(n_1, n_2, n_3) = - \sum_{n'_1, n'_2, n'_3} \alpha(n_1, n_2, n_3; n'_1, n'_2, n'_3) \frac{\partial^{n'} \varphi}{\partial x_1^{n'_1} \partial x_2^{n'_2} \partial x_3^{n'_3}},$$

где φ обозначает потенциал внешнего, предполагаемого постоянным, электрического поля, а суммирование распространяется по всем (неотрицательным) значениям чисел n'_1, n'_2, n'_3 , удовлетворяющим неравенствам $0 < n'_1 + n'_2 + n'_3 = n' \leq n = n_1 + n_2 + n_3$. Четырехмерное обобщение этого соотношения, если опустить знак суммы по двум одинаковым значкам,¹ напишется в несколько отличной форме:

$$m_{n_1 i_1, i_2, \dots, i_n} = \sum_{n'=1}^n \alpha_{n_1 i_1, \dots, i_n; k'_1 i'_1, \dots, i'_n} \frac{\partial^{n'} A_k}{\partial x_{i'_1} \partial x_{i'_2} \dots \partial x_{i'_n}}. \quad (67)$$

При этом m_{n_1} обозначают составляющие обычного электромагнитного тензора моментов ($m_{23} = m_1$, $m_{31} = m_2$, $m_{12} = m_3$ пред-

¹ Каждая пара значков одна независимо от другой пробегает четыре численных значения 1, 2, 3, 4.

ставляют слагающие индуцированного магнитного момента, а $-im_{14} = p_1$, $-im_{24} = p_2$, $-im_{34} = p_3$ — слагающие индуцированного электрического момента рассматриваемой молекулы). Далее по (45с) имеем

$$m_{h, ik} = \frac{2}{3} (m_{hi} \xi_k + m_{hk} \xi_i) \text{ и т.}$$

Если умножить средние микроскопические значения индуцированных моментов на число молекул в единице объема, то получим соответствующие поляризации. Последние по (39b) могут быть сведены к результирующей поляризации первого порядка, которая на основании (67) и (66a) принимает следующий вид:

$$P_{hi}^{(r)} = \sum_n \sum_{n'} x_{hi_1 \dots i_n; ki'_1 \dots i'_n} \frac{\partial^{n+n'-2} H_{ki'_1}}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n} \partial x_{i'_2} \dots \partial x_{i'_n}}. \quad (67a)$$

Коэффициенты x легко могут быть выражены через коэффициенты поляризации α , чего мы здесь однако касаться не будем.

Если в (67a) соединить все члены, которые содержат одну и ту же производную величины $H_{ki'_1}$, то вместо (67a) получим следующую формулу.

$$P_{hi}^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{hi; kl; j_1 \dots j_n} \frac{\partial^n H_{kl}}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_n}}, \quad (67b)$$

где $x_{hi; kl; j_1 \dots j_n}$ обозначают сумму всех коэффициентов вида $x_{hi j_1 \dots j_\nu; kl j_{\nu+1} \dots j_n}$ для $\nu = 0, 1, \dots, n$ и при всевозможных перестановках индексов $j_1 \dots j_n$ между собою. Коэффициенты x , которые мы можем назвать „коэффициентами восприимчивости“, для каждого фиксированного значения n образуют тензор $n+4$ -го ранга; они очевидно симметричны относительно индексов $j_\nu \dots j_n$ и антисимметричны относительно пар индексов hi и kl .

Введем теперь вместо результирующей поляризации соответствующую индукцию

$$B_{hi} = H_{hi} - 4\pi P_{hi}^{(r)}. \quad (68)$$

Из (67b) следует

$$B_{hi} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{hi; kl; j_1 \dots j_n} \frac{\partial^n H_{kl}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}}, \quad (68a)$$

причем „коэффициенты индукции“ S связаны с коэффициентами поляризации соотношениями

$$S_{hi; kl} = \delta_{hk} \delta_{il} - 4\pi x_{hi; kl}, \quad S_{hi; kl; j_1 \dots j_n} = -4\pi x_{hi; kl; j_1 \dots j_n}. \quad (68b)$$

Формула (68a) представляет собою искомое обобщение соот-

ношения (63), учитывающее поляризации высших порядков. Удерживая три первых члена (68а), получим

$$B_{hi} = S_{hi; kl} H_{kl} + S_{hi; kl; j_1} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_{j_1}} + S_{hi; kl; j_1 j_2} \frac{\partial^2 H_{kl}}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}. \quad (68c)$$

Заметим, что эти три члена учитывают поляризацию первого и второго порядка (и лишь отчасти третьего порядка). Если последнее выражение подставить в уравнения $\frac{\partial B_{hi}}{\partial x_i} = 4\pi\sigma_{hkl} H_{kl}$,

то, воспользовавшись соотношением $H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}$, для составляющих потенциала получаем четыре линейных уравнения четвертого порядка. Эти уравнения для общего случая разбирать мы не будем. Рассмотрим лишь несколько более подробно простейший случай гармонически колеблющегося (или статического) поля. При этом дифференцирование по $x_4 = ict$ можно заменить умножением на $\frac{\omega}{c}$ ($\frac{\omega}{2\pi}$ обозначает частоту колебаний) и получаемые таким образом члены соединить с подобными им членами предыдущего порядка. Далее, электрическую и магнитную индукцию можно трактовать отдельно, как функции соответствующих напряженностей поля. Таким образом для электрической индукции получается формула следующего вида:

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k + \epsilon_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l} + \epsilon_{ikl_1 l_2} \frac{\partial^2 E_k}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}, \quad (69)$$

где суммирование производится по двум одинаковым значкам, принимающим значения от 1 до 3.

В частном случае изотропных тел тензор ϵ_{ik} сводится к скаляру ϵ или, выражаясь точнее, к произведению этого скаляра и симметрического единичного тензора

$$\delta_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Что касается тензора ϵ_{ikl} , то в этом случае он сводится к произведению некоторого второго скаляра ϵ' на антисимметрический единичный тензор третьего ранга δ_{ikl} , составляющие которого равны 1, если ikl представляют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3; -1 при перестановке двух индексов, и нулю, если два или даже три из них одинаковы.¹

При этом сумма $\delta_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l}$ представляет собою, как легко видеть, отрицательную i -ую составляющую вектора $\text{rot } E$, так что

¹ Общим условием для составляющих тензора δ_{ikl} является следующее:

$$\delta_{ikl} = -\delta_{kil} = -\delta_{ilk}.$$

совокупность двух первых членов в (69) можно представить в векторной форме

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - \varepsilon' \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (69a)$$

Тензор $\varepsilon_{ikl_1l_2}$ также должен сводиться к двум скалярам и представляться следующей формулой:

$$\varepsilon_{ikl_1l_2} = \varepsilon'' \delta_{ik} \delta_{l_1l_2} + \varepsilon''' \delta_{i_1l_1} \delta_{kl_2},$$

откуда следует

$$\varepsilon_{ikl_1l_2} \frac{\partial^2 E_k}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}} = \varepsilon'' \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_k \partial x_k} + \varepsilon''' \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \varepsilon'' \nabla^2 E_i + \varepsilon''' \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Таким образом, принимая во внимание третий член в (69), мы имеем

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - \varepsilon' \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon'' \nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon''' \nabla \operatorname{div} \mathbf{E}. \quad (69b)$$

Аналогичные формулы получаются для магнитной индукции \mathbf{B} как функции напряженности магнитного поля; однако при этом $\operatorname{div} \mathbf{B}$ тождественно обращается в нуль.

2. Усложнения, нарушающие линейность уравнений. До сих пор мы рассматривали усложнения, обусловленные индуцированными квадрупольями и касающиеся лишь порядка дифференциальных уравнений макроскопического поля. Но остаются еще другие усложнения, сказывающиеся на степени этих уравнений и нарушающие их линейность.

Прежде всего мы упомянем такие усложнения, которые связаны с зависимостью электрической и магнитной поляризации от напряженности поля и соответствуют отклонениям от закона Гука в теории упругости. Обычно они сводятся к отклонению электрической и магнитной восприимчивости от „постоянного“ значения, соответствующего слабым полям. В сравнительно простых случаях эти отклонения можно учесть путем разложения диэлектрической „постоянной“ или магнитной проницаемости в ряд по степеням напряженности электрического или соответственно магнитного поля. Таким образом можно, например, описать характерные для некоторых веществ „явления насыщения“, т. е. стремление поляризации к конечному предельному значению при бесконечном возрастании поля. Далее имеются такие явления, которые обуславливаются одновременным действием слабого, быстро колеблющегося поля и сильного постоянного поля (эффект Фарадея и эффект Керра) и которые могут быть объяснены добавлением к обычной диэлектрической постоянной, относящейся к колеблющемуся полю, дополнительного члена, пропорционального напряженности постоянного поля.

Аналогичные отклонения от линейности должны быть также приняты во внимание в общем соотношении (65a) между плотностью тока и напряженностью поля. Мы уже упоминали о токе Холла, пропорциональном произведению \mathbf{E} и \mathbf{H} (ср. 48b), Но и

при отсутствии магнитного поля, при очень больших электрических полях также могут наступить определенные отклонения от закона Ома, обуславливающие явление электрического пробоя в плохо проводящих или „изолирующих“ веществах (в металлах отклонения этого рода не наблюдаются).

Резюмируя, можно сказать, что усложнения „второго рода“, благодаря которым утрачивается линейность уравнений, имеют место лишь при очень сильных полях. Поэтому является целесообразным разделять электромагнитные явления в материальных телах на два класса: на явления в слабых и в сильных полях. Лишь первые из них доступны общей теоретической трактовке. Поэтому в этой книге мы разовьем электродинамику материальных тел главным образом для слабых полей (соответственно обычной теории упругости, имеющей дело исключительно с малыми деформациями, для которых сохраняет силу закон Гука). Электромагнитные явления второй группы (сильные поля) мы будем рассматривать лишь в наиболее важных частных случаях, относящихся к постоянным полям.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЭНЕРГИЯ И СИЛЫ

§ 1. Предварительные замечания

1. Физический смысл энергии в макроскопической электродинамике. В томе I было показано, что полную электрическую энергию системы покоящихся электронов, обладающих конечным объемным или поверхностным зарядом, можно выразить интегралом

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dV,$$

взятым по всему объему, где \mathbf{E} означает результирующую напряженность электрического поля в элементе объема dV . Далее мы видели, что эта энергия складывается из двух частей: во-первых, из суммы собственных энергий отдельных электронов, и, во-вторых, из энергии взаимодействия электронов. Если разложить \mathbf{E} на составляющие \mathbf{E}_α , соответствующие отдельным электронам, то первая из двух частей, обычно превосходящая по величине вторую, выразится суммой

$$\sum_{\alpha} \int \frac{\mathbf{E}_{\alpha}^2}{8\pi} dV$$

а вторая — двойной суммой

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \int \frac{\mathbf{E}_{\alpha} \mathbf{E}_{\beta}}{8\pi} dV.$$

Подобное же разложение энергии на две части получается, если выразить ее интегралом $\frac{1}{2} \int \varphi \rho dV$, распространенным по объему, или интегралом $\frac{1}{2} \int \varphi \eta dS$, распространенным по поверхности электронов, и разбить потенциал φ на две части, одна из

которых соответствует самому данному электрону, а другая зависит от всех остальных (ср. т. I, гл. VII, § 1, стр. 204).

Не трудно видеть, что в макроскопической электродинамике материальных тел такое представление полной электрической энергии (т. е. энергии электронов, составляющих данное тело) принципиально невозможно.

Действительно, макроскопическая теория имеет дело лишь со средними значениями величин E , φ , ρ и т. д. Однако эти средние величины (мы будем их в дальнейшем отмечать, как и в начале первой главы, чертой наверху), не могут служить для определения полной энергии, поскольку она выражается произведениями или квадратами соответствующих точных величин. Среднее от произведения каких-либо величин a и b нельзя заменить произведением или какой-нибудь другой функцией их средних значений; между выражениями \overline{ab} и $\overline{a} \cdot \overline{b}$ нет вообще никакой связи. Для случая электромагнитных величин в этом проще всего убедиться, если рассматривать материальное тело в нормальном состоянии, т. е. в состоянии, при котором исчезают средние значения плотности заряда, напряженности поля и т. д. Соответствующие же квадратичные средние значения остаются отличными от нуля. Поэтому, мы не можем вычислить полную электромагнитную энергию W_0 тела в нормальном состоянии, пользуясь одними лишь линейными средними значениями макроскопической теории.

В эту энергию нормального состояния должна между прочим входить и собственная энергия электронов; частное от деления ее на c^2 определяет главную часть их общей массы (так как следует учитывать еще и небольшую „дефект массы“, обусловленный энергией взаимодействия). „Нормальная энергия“ должна также включать кинетическую энергию электронов, атомов и молекул, выражающуюся например в виде теплового движения. К „нормальной энергии“ относятся, далее, взаимные энергии электронов в отдельных атомах и взаимная энергия этих атомов и молекул. В микроскопической теории материальных тел все эти величины являются отдельными составными частями полной электромагнитной энергии. В макроскопической теории, они рассматриваются как качественно различные формы энергии, а именно, как энергия механическая, внутриатомная, химическая, молекулярная, упругая, тепловая и т. д. Электромагнитной же энергией в макроскопической электродинамике материальных тел называется лишь та часть микроскопической общей энергии, которая соответствует переходу из „нормального“ состояния в состояние „электромагнитного возбуждения“, т. е. в состояние, при котором отлично от нуля хотя бы одно из микроскопических средних значений „линейных“ величин ρ , \mathbf{j} (\mathbf{n} , \mathbf{k}), P , M и т. д. Эта макроскопическая или добавочная электромагнитная энергия может быть представлена некоторой функцией „линейных средних значений“, в общем случае, как и в микроскопической теории, — квадра-

тичной функцией их. Следует заметить, что эта функция, определением которой мы в дальнейшем займемся, может иметь вид, отличный от вида той простейшей функции, которую можно было бы составить по образцу микроскопической теории.

2. Физический смысл макроскопических электромагнитных сил. До сих пор мы касались только энергии; с ней тесно связаны также силы и напряжения, действующие в объеме и на поверхности тела, далее поток энергии и электромагнитное количество движения. В микроскопической теории все эти динамические величины выражаются квадратами и произведениями вышеприведенных линейных величин.¹ Например, электромагнитная сила F , действующая на единицу объема, выражается формулой $\rho E + j \times H$. Спрашивается, можно ли считать макроскопическое среднее этого выражения „макроскопической“ плотностью силы. На этот вопрос следует ответить отрицательно, хотя бы уже потому, что это среднее значение согласно принципу движения Лоренца (т. I, стр. 221) всегда равно нулю, и следовательно для макроскопической теории не имеет никакого смысла.

Определение макроскопической силы (или ее плотности) должно соответствовать данному выше определению макроскопической электромагнитной энергии, а именно: работа силы должна быть равна уменьшению этой энергии. Отсюда непосредственно явствует, что из общей микроскопической силы следует исключить собственные силы, или силы „самовоздействия“, лежащие в основе принципа движения Лоренца. Действительно, этим силам соответствует собственная энергия электронов (или атомов или молекул), которая в макроскопической теории трактуется уже не как электромагнитная энергия, а как масса и кинетическая энергия. Кроме собственных сил, проявляющихся главным образом в виде силы инерции, из полной микроскопической силы, обращающейся в среднем в нуль, следует исключить еще ряд составных частей, которые можно рассматривать как силы сцепления, силы химические, межуатомные и т. д. Оставшаяся после этого величина, обращающаяся в нуль в „нормальном состоянии“, т. е. в состоянии, в котором исчезают средние значения ρ , j , P , M и т. д., и является макроскопической электромагнитной силой в собственном смысле слова. Силу эту, как и макроскопическую электромагнитную энергию очевидно можно представить в виде некоторой — в общем случае квадратичной — функции линейных средних значений. Следует заметить, что эта функция может и не совпадать с простейшим выражением микроскопической теории $\rho E + j \times H$.

¹ В этом отношении между электродинамикой и теорией упругости, которую мы иногда приводили для сравнения в предыдущей главе, существует кардинальное различие, так как в теории упругости силы и напряжения выражаются линейно через составляющие деформаций. В электродинамике составляющим деформации соответствуют напряженности поля, а упругим напряжениям — поляризации.

Подобные же рассуждения применимы при макроскопическом толковании других динамических величин; мы здесь не будем останавливаться на них подробнее.

В заключение заметим следующее: в общей или микроскопической электродинамике при построении учения об энергии большое значение имел вопрос, считать ли электроны протяженными или точечными. Последовательное развитие этого учения оказывалось возможным только для случая протяженных электронов с конечным объемным или поверхностным зарядом. Для макроскопического учения об энергии этот вопрос не имеет значения. Макроскопическая теория пренебрегает размерами электронов, поскольку они полагаются малыми по сравнению с размерами атомов и молекул. Эта теория имеет дело не с действительным пространственным распределением зарядов и токов, а с их средними значениями, которые берутся для объемов целых молекул (или даже больших, чем молекулы), так что заряды электронов распределяются по этим объемам. Таким образом „индивидуальность“ различных электронов теряется, и энергия заменяющей их квазинепрерывной электрической среды практически сводится к их взаимной энергии.

3. Разделение квадратичных величин на части, соответствующие свободным и связанным электронам. В предыдущей главе было показано, что различные линейные величины (плотность зарядов и токов, напряженность поля и т. д.), характеризующие макроскопическое электромагнитное состояние тела, могут быть разложены на две составные части, соответствующие свободным и связанным электронам. Мы обозначим эти две части какой-либо линейной величины a через a_f и a_g (как и прежде, мы опускаем черточки, обозначающие средние значения). Квадратичные величины, например электромагнитная энергия, силы, напряжения и т. д., выражающиеся произведениями (или суммами произведений) двух линейных величин a и b , не могут быть подразделены таким образом; произведение $a \cdot b$ распадается на четыре слагаемых $a_f \cdot b_f$, $a_f \cdot b_g$, $a_g \cdot b_f$, $a_g \cdot b_g$, отвечающих четырем различным комбинациям свободных и связанных электронов между собой. Соответственно этому любая квадратичная величина $Q = \sum ab$ может быть разложена на четыре части:

$$Q_{ff} = \sum a_f b_f, \quad Q_{fg} = \sum a_f b_g, \quad Q_{gf} = \sum a_g b_f, \quad Q_{gg} = \sum a_g b_g.$$

Физический смысл величин Q_{ff} и Q_{gg} ясен сам собой. Что же касается смысла Q_{fg} и Q_{gf} , то для выяснения его необходимо вспомнить, что один из обих сомножителей, например a , обозначает какую-либо величину поля (напряженность, потенциал), а другой — соответствующую величину, характеризующую материю (плотность заряда или тока, поляризацию и т. д.). Если это верно для всех слагаемых $\sum ab$, то величины Q_{fg} и Q_{gf} могут быть определены как действие, производимое свободными зарядами на свя-

занные или соответственно связанными зарядами на свободные. Если ввести еще внешнее поле, зависящее от каких-либо посторонних зарядов, считая его известным, то следует к слагаемым a (но не к слагаемым b !) a_f и a_g присоединить еще третье: a_0 и соответственно к квадратичным членам прибавить еще линейные $Q_{of} = \sum a_0 b_f$ и $Q_{og} = \sum a_0 b_g$.

Суммы

$$Q_f = Q_{of} + Q_{ff} + Q_{gf}, \quad (1)$$

$$Q_g = Q_{og} + Q_{fg} + Q_{gg}, \quad (1a)$$

можно считать частями Q , соответствующими свободным и связанным зарядам данного тела. Такое разделение квадратичных величин важно, как принципиально, так и методически: свободные и связанные электроны по разному относятся к действующим на них силам; поэтому и подход к ним должен быть различным.

§ 2. Квадратичные величины (энергия, силы, напряженности), относящиеся к свободным зарядам.

1. Эффективные силы, действующие на свободные электроны, и их работа. При рассмотрении свободных электронов делается следующее, обычно скрытое, предположение: действующее на какой-либо свободный электрон в материальном теле среднее „эффективное“ поле всех остальных электронов (посторонних, свободных и связанных) в точности совпадает со средним полем макроскопической теории. На первый взгляд это предположение кажется тривиальным и не требующим доказательства. На самом деле это не так: при расчете эффективного поля следует исключить из рассмотрения поле самого выделенного нами электрона, тогда как при расчете полного макроскопического поля его надо учитывать. Таким образом наше предположение означает, что среднее значение поля электрона равно нулю для микроскопического элемента объема, центр которого совпадает с самим электроном. Это предположение наверно справедливо для электростатического поля (кулоновского) и для поля магнитного (Био—Савара), которые зависят от положения и скорости электрона. Среднее же значение электрического поля, вызванного ускорением электрона, отлично от нуля. Легко однако видеть, что это среднее значение исчезающе мало по сравнению с эффективным полем, и им можно пренебречь. Объясняется это тем, что радиус электрона (если считать электрон протяженным) весьма мал по сравнению с микроскопическими (атомными) расстояниями. При вычислении нашего поля можно даже считать его точечным. Обозначим его заряд через e , а ускорение через w . Тогда для соответствующей напряженности поля на расстоянии

R получается по формуле (11) т. I, стр. 188, следующее выражение:

$$E^{(2)} = -\frac{e}{c^2 R} \{ \mathbf{w} - \mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{w}) \},$$

среднее значение которого для различных направлений R (при неизменной величине) равно

$$E^{(2)} = -\frac{2}{3} \frac{e}{c^2 R} \mathbf{w}.$$

Мы должны вычислить среднее значение этого вектора для различных расстояний R . Возьмем для простоты сферический объем с микроскопическим радиусом l (порядка величины расстояния между двумя соседними молекулами). Тогда

$$\overline{E^{(2)}} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} l^3} \int_0^l E^{(2)} 4\pi R^2 dR = -\frac{e\mathbf{w}}{c^2 l^3} \int_0^l 2R dR = -\frac{e\mathbf{w}}{c^2 l}. \quad (2)$$

Чтобы найти порядок величины $\overline{E^{(2)}}$, заменим \mathbf{w} через $\frac{e\mathbf{E}_{\text{eff}}}{m}$, где \mathbf{E}_{eff} означает эффективную электрическую напряженность поля, а m — массу электрона. Далее положим

$$m \cong \frac{e^2}{c^2 a},$$

где a — радиус электрона в смысле электромагнитной теории массы. Впрочем и независимо от этой теории можно ввести a просто как вспомогательную величину, порядка 10^{-18} см. Таким образом из формулы (2) получается

$$\overline{E^{(2)}} = -\frac{e^2}{c^2 l m} \mathbf{E}_{\text{eff}} \cong -\frac{a}{l} \mathbf{E}_{\text{eff}}. \quad (2a)$$

Здесь l всегда больше 10^{-8} , следовательно $\frac{a}{l}$ всегда меньше 10^{-5} .

Поэтому мы в праве отождествить среднюю эффективную напряженность поля со средним значением полной напряженности $\overline{\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{E}_{\text{eff}}} + \overline{E^{(2)}}$.

Средняя сила \mathbf{F}_v , действующая на свободные электроны, заключенные в единице объема рассматриваемого тела, может быть выражена обычной формулой. Следовательно:

$$\sum (e\mathbf{E}) + \sum \left(\frac{e\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) = \left(\sum e \right) \mathbf{E} + \left(\sum \frac{e\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{H},$$

Так как

$$\sum e = \rho_r \text{ и } \sum \frac{ev}{c} = j_r,$$

$$F_r = \rho_r E + j_r \times H. \quad (3)$$

Соответствующая работа, отнесенная к единице объема и к единице времени, равна:

$$L_r = \sum e E \cdot v = c E \cdot \sum \frac{e \cdot v}{c},$$

Мы получаем для нее следовательно то же выражение, что и в микроскопической теории

$$L_r = c E \cdot j_r. \quad (3a)$$

Напомним, что между величинами F и L нет непосредственной зависимости. Их следует рассматривать соответственно как сумму элементарных сил и сумму работ этих сил.

2. Преобразование работы. Электромагнитная энергия свободных электронов. Выражение (3a) можно преобразовать так же, как и соответствующее ему выражение (19) т. I, стр. 224, положив согласно общим макроскопическим уравнениям поля:

$$j_r = \frac{1}{4\pi} \left(\text{rot } B - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \right)$$

и прибавив исчезающую величину

$$L_r^{(m)} = -\frac{c}{4\pi} B \left(\text{rot } E + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \right),$$

представляющую собой работу магнитных сил при конечной плотности магнитного тока. При этом мы получим:

$$L_r = L_s + L_r^{(m)} = \frac{c}{4\pi} \{ E \text{ rot } B - B \cdot \text{rot } E \} - \frac{1}{4\pi} \left(E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + B \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right)$$

т. е.

$$L_r = -\text{div } K_r - \frac{\partial \xi_r}{\partial t}, \quad (4)$$

где

$$K_r = \frac{c}{4\pi} E \times B \quad (4a)$$

и

$$d\xi_r = \frac{E \cdot dD + B \cdot dH}{4\pi} \quad (4b)$$

Формулы эти аналогичны соответствующим формулам т. I (стр. 224). Поэтому вектор K_r мы определим как вектор излучения, а скалярную величину ξ_r — как плотность энергии, если только она вообще существует (см. ниже). Мы должны при этом иметь в виду, что эти величины представляют собой не общую плотность энергии и не общий поток энергии, а только часть их, соответствующую свободным электронам.

Пользуясь общими обозначениями, введенными в начале этого параграфа, можно было бы написать $\xi_r = \xi_{or} + \xi_{fr} + \xi_{gr}$, $K_r = K_{or} + K_{fr} + K_{gr}$ и т. д. Таким образом в этих величинах связанные электроны приняты во внимание лишь отчасти, а именно: учтены действия, производимые ими на свободные электроны, но не действия, оказываемые на них.

Для существования величины ξ_r , как определенной пространственно-временной функции, необходимо (и достаточно), чтобы определяющее ее дифференциальное выражение (4b) представляло собой полный дифференциал. В дальнейшем мы увидим, что это требование не всегда выполнимо. В таких случаях вообще не имеет смысла говорить об энергии свободных электронов.

Если индукции D и B зависят только от соответствующих напряженностей поля (что может иметь место только в случае покоящихся тел) и притом линейно, то можно положить

$$E \cdot dD = D \cdot dE = \frac{1}{2} d(E \cdot D) \quad \text{и} \quad B \cdot dH = H \cdot dB = \frac{1}{2} d(B \cdot H),$$

т. е. согласно (4b):

$$\xi_r = \frac{E \cdot D + B \cdot H}{8\pi}. \quad (5)$$

Формула эта приложима как к изотропным, так и к анизотропным телам. В первом случае она сводится к следующему простому виду

$$\xi_r = \frac{\varepsilon E^2 + \mu B^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2 + \mu^{-1} H^2}{8\pi}; \quad (5a)$$

во втором случае она напишется несколько сложнее

$$\xi_r = \frac{1}{8\pi} \sum_1^3 \sum_1^3 (\varepsilon_{ik} E_i E_k + \mu_{ik} B_i B_k). \quad (5b)$$

При этом для существования энергии ξ_r должны быть выполнены следующие условия симметрии:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \quad \mu_{ik} = \mu_{ki}, \quad \mu_{ik}^{-1} = \mu_{ki}^{-1}. \quad (6)$$

Действительно, если $E \cdot dD = \sum_1^3 E_i \cdot dD_i$ представляет собою пол-

ный дифференциал, то выражение $D dE = \sum_1^B D_i dE_i$, также должно быть полным дифференциалом. Отсюда следует $\frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \frac{\partial D_k}{\partial E_i}$ или, так как $D_i = \sum_{\epsilon_{ik}} \epsilon_{ik} E_i$, $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$. Таким же путем получается и второе условие (6).

Для изотропных тел мы имеем далее по закону Ома $\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E}$ и следовательно по (3а)

$$L_r = \sigma E^2. \quad (7)$$

Для тел анизотропных эта формула заменяется следующей

$$L_r = \sum \sum \sigma_{ik} E_i E_k. \quad (7a)$$

Мы получаем, таким образом, для работы сил, действующих на свободные электроны, два выражения, внешне отличных друг от друга: выражение (4) с одной стороны и выражения (7) и (7a) — с другой. Эти выражения отвечают двум макроскопически различным формам энергии, связь между которыми устанавливается рассмотренной выше работой. Это: электромагнитная энергия и механическая или тепловая энергия. Последняя получается из первой механизмом, общим для всех явлений трения. Добавочная кинетическая энергия, приобретаемая свободными электронами при совершении работы L_r , переходит в результате действия на них трения атомов и молекул тела в механическую энергию этих атомов (ср. гл. I, конец § 2). Эта тепловая энергия, развиваемая в единице объема в единицу времени (так назыв. „джоулево тепло“) и выражается формулами (7) и (7a). Обозначая через Q тепло $\int L_r dV$, возникающее в произвольном объеме V рассматриваемого тела, мы получим по формуле (4):

$$-\frac{dW_r}{dt} = Q + \oint K_{rn} dS. \quad (8)$$

Здесь W_r обозначает соответствующую свободным электронам электромагнитную энергию $\int \xi_r dV$, содержащуюся в объеме V . В случае изотропных тел имеем

$$W_r = \frac{1}{8\pi} \int (\epsilon E^2 + \mu B^2) dV = \frac{1}{8\pi} \int (\epsilon E^2 + \mu^{-1} H^2) dV \quad (8a)$$

$$Q = \int \sigma E^2 dV. \quad (8b)$$

Формула (8) показывает, что исчезающая в данном объеме электромагнитная энергия свободных электронов частью излучается наружу, частью превращается в тепло.

3. Преобразование сил; тензор напряжений, соответствующий свободным электронам. Сила F_r , выраженная формулой (3), может быть преобразована подобно работе L_r . При этом должны быть выполнены известные условия, аналогичные требованию интегрируемости выражения (4b) для энергии.

Заменим сперва ρ и \mathbf{j} их выражениями через величины поля

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D}, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Мы получаем при этом

$$\mathbf{F}_r = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right\}.$$

Чтобы преобразовать это выражение, попытаемся сделать его симметричным, прибавляя к нему соответствующее выражение для „магнитной силы“:

$$\mathbf{F}_r^{(m)} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{D} - \frac{1}{c} \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right),$$

тождественно равное нулю, в силу уравнений поля (ср. т. I, стр. 234):

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

Таким образом мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_r = \frac{1}{4\pi} \left\{ (\mathbf{E} \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{D}) + \right. \\ \left. + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{H}) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

На основании этой формулы вектор

$$\mathbf{g}_r = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{H} \quad (9a)$$

может быть определен как пространственная плотность электромагнитного количества движения свободных электронов. Очевидно однако, что вектор

$$\mathbf{I}_r = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{H}), \quad (9b)$$

вообще говоря, не является дивергенцией какого-либо тензора второго ранга (в том числе и асимметричного). Для существования уравнения вида:

$$\mathbf{I}_r = -\operatorname{div}^2 \mathbf{T}_r, \quad (10)$$

индукции \mathbf{D} и \mathbf{B} должны быть связаны особым рода соотношениями с соответствующими им напряженностями поля. В эти соотношения очевидно не должны входить координаты, ни явно, ни неявно — через материальные постоянные. [То же условие было поставлено в отношении времени в случае формулы (4b).] Следовательно формула (10) может быть справедливой лишь в случае однородных тел. В частном случае изотропных тел, подчиняющихся закону гуковского типа, тензор 2T_r легко определится. Действительно, полагая $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{H} = \mu \mathbf{B}$ (или $\mathbf{B} = \mu^{-1} \mathbf{H}$), получим:

$$\hat{I}_r = \frac{\epsilon}{4\pi} (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{E}) + \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B})$$

и следовательно по формуле (30b), стр. 235, т. I:

$$\mathbf{T}_{rn} = -\frac{1}{4\pi} \left(\epsilon \mathbf{E} \mathbf{E}_n + \mu \mathbf{B} \mathbf{B}_n - n \frac{\epsilon E^2 + \mu B^2}{2} \right) \quad (10a)$$

или

$$\mathbf{T}_{rn} = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \mathbf{D}_n + \mathbf{H} \mathbf{B}_n - n \cdot \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \right). \quad (10b)$$

Легко показать, что последняя формула остается справедливой и в случае анизотропных тел, если для них выполняются условия симметричности тензоров ϵ и μ . Для этого рассмотрим какую-либо составляющую, например первую, вектора $\mathbf{E} \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{D}$, т. е. величину

$$E_1 \sum \frac{\partial D_i}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) D_3 - \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) D_2 = E_1 \sum \frac{\partial D_i}{\partial x_i} + \sum D_i \frac{\partial E_1}{\partial x_i} - \sum D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (E_1 D_i) - \sum D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_1}.$$

Полагая в последнем члене $D_i = \sum \epsilon_{ik} E_k$ и принимая во внимание, что $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$, получаем:

$$\begin{aligned} \sum D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_1} &= \sum \sum \epsilon_{ik} E_k \frac{\partial E_i}{\partial x_1} = \sum \sum \epsilon_{ik} E_i \frac{\partial E_k}{\partial x_1} = \\ &= \sum \sum \frac{1}{2} \epsilon_{ik} \left(E_k \frac{\partial E_i}{\partial x_1} + E_i \frac{\partial E_k}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2} \sum \sum \epsilon_{ik} E_i E_k \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} \sum E_i D_i = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \right). \end{aligned}$$

По формуле (9b) имеем следовательно:

$$I_{r1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (E_i D_i) - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (H_i B_i),$$

т. е.

$$I_{rn} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ri}, \quad (11)$$

где

$$-T_{ri} = \frac{1}{4\pi} \left(E_h D_i + H_h B_i - \delta_{hi} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right); \quad (11a)$$

δ_{hi} — слагающие единичного тензора. Эти формулы очевидно эквивалентны формулам (10) и (10b).

Заметим, что (при условии $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$) тензор 2T_r симметричен так же, как и полный тензор напряжений 2T в т. I (ср. ниже, § 3). Он отличается от 2T только тем, что не содержит в себе пассивного действия связанных электронов.

Первоначальное определение объемной силы F_r и закон Ома дают для изотропных тел:

$$F_r = \rho_f \mathbf{E} + \mathbf{j}_r \times \mathbf{H} = \rho_f \cdot \mathbf{E} + \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

В этом выражении, разумеется, не учитывается ток Холла. В случае однородных изотропных тел можно положить далее $\rho_f = 0$, так как объемная плотность свободного заряда убывает со временем по закону $\rho_f = \text{const} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, где $\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$ обозначает время релаксации, введенное нами в § 7 гл. I. С другой стороны, согласно формуле (9a), мы в этом случае имеем

$$\mathbf{g}_r = \frac{\epsilon}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Следовательно

$$F_r = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\tau} \mathbf{g}_r. \quad (12)$$

Интегрируя силу F_r по произвольному объему рассматриваемого (однородного и изотропного) тела, получаем согласно формулам (9a), (9b) и (9)

$$\int F_r dV = - \frac{d}{dt} \int \mathbf{g}_r dV - \oint T_{rn} dS.$$

Отсюда по формуле (12) следует:

$$\frac{1}{\tau} \int \mathbf{g}_r dV + \frac{d}{dt} \int \mathbf{g}_r dV = - \oint T_{rn} dS. \quad (12a)$$

4. **Граничные поверхности и поверхностные силы.** Приведенные формулы, вообще говоря, неприменимы к случаю неоднородных тел, или к случаю нескольких однородных тел, граничащих друг с другом. При этом играет роль

только неоднородность относительно параметров ϵ и μ , электропроводность же может быть произвольной функцией координат. Далее при рассмотрении ограниченных однородных тел (т. е. граничащих с пустотой или друг с другом) необходимо принимать во внимание существующие обычно поверхностные заряды, а также и возможные поверхностные токи. Соответствующие добавочные поверхностные силы выражаются при помощи граничных условий через граничные значения напряженностей и индукций; по виду своему они аналогичны нормальной проекции тензора напряжений 2T_r .

Рассмотрим сначала заряд, распределенный с плотностью $\eta = \eta_r + \eta_g$ по граничной поверхности, разделяющей два тела a и b . Напряженность поля, вызываемого зарядом, находящимся на элементе поверхности dS , должна очевидно иметь с обеих сторон этого элемента одну и ту же величину и противоположные перпендикулярные к нему направления. Так как разность этих двух напряженностей или вернее их нормальных слагающих, равна $4\pi (\eta_r + \eta_g)$, то их значения в b и a оказываются соответственно равными $2\pi (\eta_r + \eta_g) \mathbf{n}$ и $-2\pi (\eta_r + \eta_g) \mathbf{n}$ (нормаль \mathbf{n} направлена от a к b , ср. рис. 2). Эффективная электрическая напряженность \mathbf{E}_{eff} , выражающая действие на заряд рассматриваемого элемента поверхности других, более или менее удаленных зарядов, определяется таким образом уравнениями:

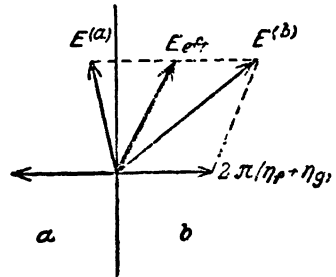


Рис. 2.

Эффективная электрическая напряженность \mathbf{E}_{eff} , выражающая действие на заряд рассматриваемого элемента поверхности других, более или менее удаленных зарядов, определяется таким образом уравнениями:

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E}^b - 2\pi (\eta_r + \eta_g) \mathbf{n} = \mathbf{E}^a + 2\pi (\eta_r + \eta_g) \mathbf{n};$$

откуда следует:

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^a + \mathbf{E}^b). \quad (13)$$

С другой стороны, для поверхностной плотности свободного заряда мы имеем, согласно (III') § 3, гл. I:

$$\eta_r = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \Delta_s E_n = \frac{1}{4\pi} (\epsilon^b E_n^b - \epsilon^a E_n^a).$$

Сила $T_r^{(e)}$, действующая на этот заряд, равна следовательно:

$$-T_r^{(e)} = \frac{1}{\xi\pi} (\mathbf{E}^a + \mathbf{E}^b) (\epsilon^b E_n^b - \epsilon^a E_n^a). \quad (13a)$$

Для определения полной силы, действующей на все тело a , включая и его поверхность, мы должны прибавить к выра-

жению (13а) электрическую часть вектора (10а) для этого тела, т. е. вектор:

$$-\mathbf{T}_{fn}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \left(\varepsilon^b \mathbf{E}^a E_n^a - \mathbf{n} \frac{\varepsilon^a E^{a2}}{2} \right). \quad (13b)$$

В случае, если диэлектрическая постоянная тела b (например пустоты, окружающей тело a) имеет то же значение, что и для a , то сумма (13а) и (13b) должна совпадать с вектором \mathbf{T}_{fn}^e со стороны b от граничной поверхности. Уравнение это (его можно написать символически в виде $\mathbf{T}^a + \mathbf{T}^{ab} = \mathbf{T}^b$) очевидно должно оставаться справедливым и при неодинаковых диэлектрических постоянных ε^a и ε^b , если только электрическая напряженность равна нулю в теле a (так как тогда различие между ε^a и ε^b теряет значение). Это имеет место например в случае, если a — металлическое тело, находящееся в состоянии электростатического равновесия. При этом напряженность \mathbf{E}^a обращается в нуль, а \mathbf{E}^b направлена перпендикулярно к поверхности (ср. ниже, гл. VI). В этом случае поверхностная сила (13а) сводится к $\mathbf{n} \frac{\varepsilon^b E^{b2}}{8\pi}$, т. е. совпадает с вектором (13b) для тела b . Таким образом сила, действующая на единицу поверхности металла, равна электростатической энергии свободных электронов прилегающего диэлектрика.

Аналогичные соображения применимы и к случаю наличия поверхностных токов. Обозначим через $\mathbf{k} = \mathbf{k}_r + \mathbf{k}_g$ поверхностную плотность полного тока (образуемого и свободными и связанными электронами). Мы получим при этом

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}^a - 2\pi \mathbf{k} \times \mathbf{n} = \mathbf{H}^b + 2\pi \mathbf{k} \times \mathbf{n},$$

т. е.

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^a + \mathbf{H}^b). \quad (14)$$

Поверхностная плотность свободного тока согласно (III') гл. I, равна:

$$\mathbf{k}_r = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times \Delta \mathbf{V} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \times (\mathbf{V}^b - \mathbf{V}^a).$$

Для соответствующей магнитной поверхностной силы получаем выражение

$$\mathbf{T}_r^{(m)} = \frac{1}{8\pi} [\mathbf{n} \times (\mathbf{V}^b - \mathbf{V}^a)] \times (\mu^b \mathbf{V}^b + \mu^a \mathbf{V}^a)$$

или

$$\begin{aligned} -\mathbf{T}_r^{(m)} = & \frac{1}{8\pi} \{ (\mathbf{V}^b - \mathbf{V}^a) (\mu^b B_n^b + \mu^a B_n^a) - \\ & - \mathbf{n} [(\mathbf{V}^b - \mathbf{V}^a) \cdot (\mu^b \mathbf{V}^b + \mu^a \mathbf{V}^a)] \}. \end{aligned} \quad (14a)$$

§ 3. Квадратичные величины, соответствующие связанным электронам.

Мы переходим теперь к определению сил, действующих на связанные электроны, т. е. на нейтральные молекулы, и соответствующей этим силам энергии. При этом, как и в случае свободных электронов, мы должны были бы прежде всего изучить зависимость между усредненной полной напряженностью поля и соответствующей эффективной напряженностью. Но мы отнесем этот вопрос к дальнейшим параграфам и вначале не будем учитывать различия между обеими напряженностями.

На первый взгляд представляется очевидным, что силы, действующие на связанные электроны, и соответствующая этим силам работа (отнесенные к единице объема и времени) должны выражаться формулами

$$\mathbf{F}_g = \rho_g \mathbf{E} + \mathbf{j}_g \times \mathbf{H} \quad \text{и} \quad L_g = c \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_g.$$

Это предположение однако неправильно, так как связанные электроны, находящиеся в каком-либо участке тела (например в одной молекуле), могут быть описаны объемным распределением заряда и тока только в связи с соответствующими поверхностными величинами. Естественнее поэтому в рассматриваемом случае определить объемную силу \mathbf{F}_g и работу L_g формулами:

$$\int \mathbf{F}_g dV = \int (\rho_g \mathbf{E} + \mathbf{j}_g \times \mathbf{H}) dV + \oint (\eta_g \mathbf{E} + \mathbf{k}_g \times \mathbf{H}) dS. \quad (15)$$

$$\int L_g dV = c \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_g dV + c \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{k}_g dS. \quad (16)$$

1. Энергия связанных электронов. Подставим в формулу (16) известные выражения:

$$\mathbf{j}_g = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{M} \quad \text{и} \quad \mathbf{k}_g = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

и примем во внимание тождество

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{M});$$

тогда будем иметь

$$\int L_g dV = \int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dV + c \int \text{rot } \mathbf{M} \cdot \mathbf{E} dV + c \oint \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{M}) dS.$$

С помощью тождества

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{M} = \text{div} (\mathbf{M} \times \mathbf{E}) + \mathbf{M} \cdot \text{rot } \mathbf{E}$$

и уравнения

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{H}}{\partial t}$$

предыдущее выражение может быть преобразовано к виду:

$$\int L_g dV = \int \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) dV + c \int \operatorname{div} (\mathbf{M} \times \mathbf{E}) dV + \\ + c \int \mathbf{n} (\mathbf{E} \times \mathbf{M}) dS.$$

Так как по формуле Гаусса оба последних интеграла взаимно уничтожаются, то окончательно получаем:

$$L_g = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (17)$$

Эта формула соответствует формуле (4) для работы L_p , совершаемой силами, которые действуют на свободные электроны. Ее можно написать в том же виде

$$L_g = -\operatorname{div} \mathbf{K}_g - \frac{\partial}{\partial t} \xi_g, \quad (17a)$$

если определить плотность энергии связанных электронов дифференциальным выражением:

$$d\xi_g = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}, \quad (18)$$

а соответствующий поток энергии положить равным нулю

$$\mathbf{K}_g = 0. \quad (18a)$$

Заметим, что выражение $L_g = c\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_g$ так же, как и выражение (16), приводит к формуле (17a), с тем же определением плотности энергии, но дает отличный от нуля поток энергии:

$$\mathbf{K}_g = c\mathbf{E} \times \mathbf{M}. \quad (18b)$$

Дифференциальное выражение (18) не является в общем случае полным дифференциалом, так что разбить электромагнитную энергию на части, отвечающие свободным и связанным электронам, не всегда возможно.

Условия интегрируемости выражения (18), разумеется, те же, что и выражения (4a). В области применимости электрического „закона Гаука“ очевидно имеем:

$$\xi_g = -\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}. \quad (19)$$

Разные знаки перед обоими членами объясняются тем, что первый отвечает потенциальной энергии, а второй — кинетической.

Приведем еще один прямой, элементарный вывод этой формулы; он между прочим, покажет нам, что в общем случае как магнитная энергия $+\frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}$, так и электрическая $-\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$ должны иметь отрицательное значение.

Представим себе сначала, что внешнее поле индуцирует в одной из молекул данного тела дипольный момент \mathbf{p} , пропорциональный эффективной напряженности поля \mathbf{E} и положительного направления (так что $\mathbf{pE} > 0$).

Потенциальная энергия U , соответствующая этому дипольному моменту, складывается из двух частей: из обычной „внешней“ электрической энергии $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ и из внутренней „квази-упругой“ энергии $\frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$. Таким образом получается

$$U = -\frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} < 0 \quad (20)$$

(ср. т. I, стр. 130). Следовательно, потенциальная энергия поляризованных молекул в единице объема равна $-\frac{1}{2}\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$, — в соответствии с формулой (19).

Если магнитную энергию считать потенциальной (как мы это делали в начале I тома), то в виду пропорциональности индуцированного магнитного момента молекулы \mathbf{m} и эффективной напряженности поля \mathbf{H} для энергии молекулы получаем выражение $-\frac{1}{2}\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}$ или для энергии единицы объема $-\frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}$, так же, как и в случае электрической энергии. Энергия эта соответствует „пондеромоторному“ действию, испытываемому молекулой.

Если кроме этого механического действия мы примем во внимание электродвижущие силы, действующие на вращающиеся в молекуле электроны (в направлении их движения), то вместо потенциальной энергии получим кинетическую энергию обратной величины.

Для того, чтобы глубже понять эти соотношения и получить представление о нормальном направлении магнитной поляризации, мы рассмотрим в качестве примера случай элементарного линейного проводника; он послужит нам моделью реальной молекулы.

В т. I было показано, что при внесении линейного проводника в магнитное поле, или при возникновении внешнего магнитного поля вокруг проводника, в последнем возбуждаются электрические силы индукции такого направления, чтобы ток, текущий в направлении этих сил, создавал магнитный момент с направлением, противоположным внешней магнитной напряженности. [Это обстоятельство выражается отрицательным знаком в формулах (3) и (4) на стр. 135 и 137 т. I]. Во всяком реальном проводнике такой индукционный ток действительно должен возникать и сохраняться тем дольше, чем больше электропроводность. При бесконечно большой электропроводности сила этого тока может меняться только при изменении внешнего магнитного потока $\int H_{\perp} dS$; легко сообразить, что она при этом должна быть в точности пропорциональной

последнему. Действительно, обозначим коэффициент самоиндукции нашего проводника через L и силу тока в нем через i . Тогда для изменения собственной его магнитной энергии $\frac{1}{2} Li^2$ будем иметь следующее уравнение (ср. т. I, стр. 213—218):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = Li \frac{di}{dt} = c \oint F_{\tau} id\sigma = -i \frac{d}{dt} \oint H_n dS$$

($\oint F_{\tau} d\sigma$ — индуцированная электродвижущая сила), откуда следует:

$$Li = - \oint H_n dS + \text{const.}$$

Магнитный момент \mathbf{m} проводника пропорционален силе тока; поэтому вектор \mathbf{m} должен быть пропорционален напряженности поля при постоянной ориентации проводника и поля. Как известно, в случае элементарного проводника или однородного внешнего поля имеет место соотношение $i \int H_n dS = \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}$ (т. I, стр. 61). Полагая постоянную в предыдущей формуле равной нулю, так как при $\mathbf{H} = 0$ ток и момент обращаются в нуль, получаем:

$$\frac{1}{2} Li^2 = - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}. \quad (20a)$$

Из этой формулы непосредственно следует, что индуцированный момент должен иметь направление отрицательное по отношению к напряженности магнитного поля, потому что „внутренняя“ энергия $\frac{1}{2} Li^2$ является величиной существенно положительной. Чтобы получить полную магнитную энергию T рассматриваемого проводника, надо к „внутренней“ энергии прибавить еще его „внешнюю“ энергию $+\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}$. Окончательно получаем:

$$T = + \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{H} < 0.$$

2. Силы и напряжения. Подставляя в формулу (15), определяющую силу, которая действует на связанные электроны (или на нейтральные молекулы) в единице объема, известные выражения для ρ_p , \mathbf{j}_p , η_p , \mathbf{k}_p , получаем:

$$\int \mathbf{F}_p dV = \int \left[-\text{div } \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{M} \right) \times \mathbf{H} \right] dV + \oint [P_n \mathbf{E} + (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{H}] dS.$$

С помощью векторных тождеств [ср. т. I, Введение, формулы (16с) и (27)]:

$$\oint P_n \mathbf{E} dS = \oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{E} dS = \int \{ (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{P} \} dV;$$

$$\begin{aligned} \oint (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{H} \, dS &= \oint [\mathbf{n}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}) - \mathbf{M}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})] \, dS = \\ &= \int [\nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}) - (\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{M} - \mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{H}] \, dV = \\ &= \int [(\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H} + \mathbf{M} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{M} - \mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{H}] \, dV. \end{aligned}$$

Предыдущее выражение может быть, таким образом, преобразовано к виду:

$$\int \mathbf{F}_s \, dV = \int [(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \mathbf{H} + (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H} + \mathbf{M} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{H}] \, dV,$$

или, согласно уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\int \mathbf{F}_s \, dV = \int \left[(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{P} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H} + \mathbf{M} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \mathbf{H} + \mathbf{P} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] \, dV.$$

Отсюда следует, в виду произвольности выбранного объема:

$$\mathbf{F}_s = (\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{P} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H} + \mathbf{M} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} \times \mathbf{H}). \quad (21)$$

При некоторых условиях эту формулу можно написать в виде:

$$\mathbf{F}_s = - \frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{T}_s, \quad (21a)$$

где

$$\mathbf{g}_s = - \frac{1}{c} \mathbf{P} \times \mathbf{H}. \quad (21b)$$

и

$$- \operatorname{div} \mathbf{T}_s = (\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{P} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H} + \mathbf{M} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (21c)$$

В частности, это оказывается возможным в случае однородности и изотропности рассматриваемого тела. Если положить

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = \gamma \mathbf{H},$$

то, приняв во внимание тождество

$$\nabla(E^2) = 2(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} + 2\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

получим

$$\mathbf{F}_s = - \frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\kappa E^2 + \gamma H^2}{2} \right). \quad (22)$$

Таким образом в этом случае тензор напряжения \mathbf{T}_s сводится к скаляру, соответствующему отрицательному гидроста-

тическому давлению $-\frac{1}{2} (\chi E^2 + \gamma H^2)$, или, вернее, к производению этого скаляра на единичный тензор δ_{ij} :

$${}^2T_{ij} = -\delta_{ij} \frac{1}{2} (\chi E^2 + \gamma H^2). \quad (22a)$$

Этот результат можно обобщить на случай однородных анизотропных тел, характеризуемых симметричными тензорами ${}^2\chi$ и ${}^2\gamma$. Образуя первую слагающую вектора $(\mathbf{P}) \nabla \mathbf{E} + \mathbf{P} \times \text{rot} \mathbf{E}$, получаем [ср. выше вывод формул (11) и (11a)]:

$$\begin{aligned} \sum_i P_i \frac{\partial}{\partial x_i} E_i + P_2 \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) - P_3 \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) &= \sum_i P_i \frac{\partial}{\partial x_i} E_i = \\ &= \sum_i \sum_k \chi_{ik} E_k \frac{\partial}{\partial x_i} E_i = \sum_i \sum_k \chi_{ik} E_i \frac{\partial E_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_k \chi_{ik} E_i E_k \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}}{2}, \end{aligned}$$

и точно также:

$$[(\mathbf{M} \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{M} \times \text{rot} \mathbf{H}]_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}}{2}.$$

Следовательно имеем:

$$\mathbf{F}_v = -\frac{\partial \mathbf{g}_v}{\partial t} + \nabla \frac{1}{2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}),$$

т. е.

$${}^2T_{ij} = -\delta_{ij} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}}{2}, \quad (23a)$$

как и выше.

Приведенные формулы легко могут быть выведены непосредственно из выражения для силы, действующей на отдельные молекулы. При этом следует считать молекулы элементарными электрическими и магнитными диполями. Сила, действующая во внешнем электрическом поле \mathbf{E} на такой диполь с электрическим моментом \mathbf{p} , равна, как известно, $(\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}$ (ср. т. I, стр. 51). В случае, если момент \mathbf{p} меняется со временем, то при наличии внешнего магнитного поля следует прибавить к этой „электростатической“ силе еще электромагнитную

силу $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \times \mathbf{H}$ и далее магнитостатическую силу $\nabla (\mathbf{m} \mathbf{H}) = \nabla \mathbf{m} \mathbf{H} = (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{m} \times \text{rot} \mathbf{H}$, где \mathbf{m} представляет собой постоянный магнитный момент молекулы [т. I, стр. 56, формула (9)]. В результате сложения всех этих сил и умножения на число

молекул в единице объема N , получаем следующую формулу для силы F_v :

$$F_v = (P \nabla) E + (M \nabla) H + M \times \text{rot } H + \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} \times H, \quad (24)$$

которая после прибавления тождественно равного нулю выражения:

$$P \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + \text{rot } E \right) = 0$$

переходит в формулу (21).

Тем же прямым способом получаем выражение для вращательного момента S действующих на молекулы сил, отнесенного к единице объема:

$$S = P \times E + M \times H. \quad (24a)$$

Формулы (23) и (23a) справедливы лишь внутри однородных тел, но не на их поверхности, на которой напряженности полей E и H испытывают скачок. Для вычисления полной силы, действующей на ограниченное тело a (или вернее на его связанные электроны), в применявшемся выше выражении для поверхностной силы $\oint [P_n E + (M \times n) \times H] dS$ следует подставить вместо напряженности полей $E = E^a$ и $H = H^a$ внутри тела a выражения:

$$E = \frac{1}{2} (E^a + E^b), \quad H = \frac{1}{2} (H^a + H^b)$$

так же, как это делалось в предыдущих параграфах, когда учитывались свободные поверхностные заряды и токи. Поэтому к объемной силе $\int F_v dV$, вычисленной по вышеприведенным формулам, мы должны прибавить еще и собственно поверхностную силу (т. е. такую, которую невозможно свести к силам объемным):

$$\frac{1}{2} \oint [P_n (E^b - E^a) + (M \times n) \times (H^b - H^a)] dS_a,$$

или на единицу поверхности,

$$\frac{1}{2} \left\{ (P \cdot n) \Delta E + (M \times n) \times \Delta H \right\}. \quad (24b)$$

Вместо этого можно конечно представить рассматриваемую полную силу в виде суммы собственно-объемной силы

$$\int \left[-\text{div } P \cdot E + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} + \text{rot } M \right) \times H \right] dV.$$

и поверхностной силы

$$\frac{1}{2} \oint [(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{E}^* + \mathbf{E}') + (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times (\mathbf{H}^* + \mathbf{H}^b)] dS_a. \quad (24c)$$

Заметим, что и полный вращательный момент следует дополнить таким же образом: к объемному моменту, определенному согласно формуле (24a) — $\int (\mathbf{P} \times \mathbf{E} + \mathbf{M} \times \mathbf{H}) dV_a$ добавляется собственно-поверхностный момент:

$$\frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times [\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \Delta \mathbf{E} + (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \Delta \mathbf{H}] dS. \quad (24d)$$

или к вращательному моменту полной поверхностной силы прибавляется вращательный момент силы „собственно объемной“.

§ 4. Соотношение между усредненной, эффективной и полной напряженностями поля в случае связанных электронов; уточнение результатов предыдущих параграфов.

1. Эффективные напряженности поля в центре нейтральной молекулы. Поправки к плотностям энергии и потока энергии. Среднюю эффективную напряженность поля в какой-либо точке данной молекулы можно, вообще говоря, определить как разность между соответствующей полной напряженностью и средним значением напряженности поля $(\mathbf{E}_{\text{eig}}, \mathbf{H}_{\text{eig}})$ самой этой молекулы. Наша задача сводится таким образом к рассмотрению усредненного поля одной нейтральной молекулы.

Представим себе эту молекулу в виде шарика K радиуса a , внутри которого совершенно произвольно расположены связанные электроны. Поскольку дело касается определения внешнего поля молекулы, это расположение может быть заменено любым другим распределением электрического заряда и тока внутри или на поверхности K , приводящим к тем же значениям электрического и магнитного моментов молекулы. Мы предположим, что все подобные эквивалентные распределения электричества дают одинаковый результат и при вычислении усредненного поля внутри молекулы (т. е. внутри шара K). Это предположение не может быть строго доказано, но его можно принять в качестве первого приближения.

Итак, мы предположим, что истинное расположение электронов заменено эквивалентным распределением на поверхности K и вычислим объемное среднее значение электрической и магнитной напряженностей внутри сферы S радиуса $l > a$ concentричной с K . При этом величина l должна быть порядка среднего расстояния между двумя молекулами, так чтобы объем $S \left(\frac{4\pi}{3} l^3 \right)$

совпадал с объемом, приходящимся в среднем на одну молекулу данного тела. Если, следовательно, число молекул в единице объема равно N ,¹ то l определится из равенства:

$$\frac{4\pi}{3} l^3 = \frac{1}{N}. \quad (25)$$

Рассмотрим сперва электростатическое поле, соответствующее дипольному моменту молекулы или вернее его среднему значению во времени \mathbf{p} . Потенциал этого поля $\varphi^{(a)}$ вне K , как известно,

равен $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3}$, а внутри $\varphi^{(i)} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{a}$ (ср. т. I, стр. 116—117).

Соответствующие напряженности поля равны:

$$\mathbf{E}_{\text{eig}}^a = \frac{1}{R^3} [3\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}]$$

(ср. т. I, стр. 92) и

$$\mathbf{E}_{\text{eig}}^i = -\frac{\mathbf{p}}{a^3}.$$

Искомое среднее значение выражается формулой

$$\overline{\mathbf{E}_{\text{eig}}^0} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} l^3} \int_0^l \mathbf{E}_{\text{eig}} dV = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} l^3} \left\{ \int_0^a \mathbf{E}_{\text{eig}}^i dV + \int_a^l \mathbf{E}_{\text{eig}}^a dV \right\}.$$

Индекс ⁰ указывает на то, что это среднее значение относится к центру молекулы. Легко видеть, что интеграл $\int_0^l \mathbf{E}_{\text{eig}}^a dV$ обращается в нуль, так как среднее значение $\mathbf{E}_{\text{eig}}^a$ равно нулю для различных направлений \mathbf{R}_0 (при постоянном расстоянии R).

Мы получаем следовательно:

$$\overline{\mathbf{E}_{\text{eig}}^0} = -\frac{1}{\frac{4\pi}{3} l^3} \cdot \frac{\mathbf{p}}{a^3} \cdot \frac{4\pi}{3} a^3;$$

т. е. согласно (25)

$$\mathbf{E}_{\text{eig}}^0 = -\frac{4\pi}{3} N \mathbf{p} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, \quad (26)$$

где \mathbf{P} означает электрическую поляризацию данного тела.

Подобным же способом можно вычислить средние значения напряженностей поля, соответствующих электрическим моментам второго и высшего порядков. При этом достаточно учесть

¹ Мы предполагаем наличие молекул лишь одного рода. Ср. ниже, п. 3.

только поля, существующие внутри K , так как средние значения внешних напряженностей для различных направлений R_0 , всегда равны нулю. Действительно, слагающая электрической напряженности, создаваемой вне K моментом n -го порядка, взятая по произвольному постоянному направлению x , формально тождественна с потенциалом мультиполя $(n+1)$ -ого порядка, одна из осей которого совпадает с этим направлением. Но такой потенциал пропорционален шаровой функции $(n+1)$ -го порядка, и следовательно его среднее значение должно обращаться в нуль на всех сферических поверхностях, концентричных K . Что касается напряженностей поля внутри K , то здесь следует различать два случая, смотря по тому, соответствуют ли они электрическим моментам четного или нечетного порядка. В первом случае, электрический потенциал является четным, а напряженность поля — нечетной функцией координат (внутри K), так что их среднее значение обращается в нуль. Во втором случае это среднее значение может быть отлично от нуля. В частности, квадрупольные моменты совершенно не отражаются на средней напряженности поля, так что если пренебречь моментами третьего и высших порядков, то эта напряженность может быть выражена простой формулой (26).

Аналогичные результаты получаются для среднего значения магнитной напряженности поля молекулы.¹

Представим себе, что истинное распределение токов внутри K заменено эквивалентным поверхностным током с магнитным моментом m . При этом внутри K имеем однородное магнитное поле с напряженностью

$$H_{\text{eig}}^t = \frac{2m}{a^3}$$

(ср. т. I, стр. 127), а вне K — поле того же типа, что и в случае электрического диполя. В виду того, что это внешнее поле не влияет на среднее значение H_{eig} , получаем:

$$\overline{H_{\text{eig}}^0} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}l^3} \cdot \frac{2m}{a^3} \frac{4\pi}{3} a^3,$$

т. е.

$$\overline{H_{\text{eig}}^0} = \frac{8\pi}{3} Nm = \frac{8\pi}{3} M, \quad (26a)$$

где M — магнитная поляризация рассматриваемого тела. В эту формулу так же, как и в формулу (15), необходимо еще ввести по-

¹ Поскольку последнее зависит от ее магнитного момента. Кроме того, играет роль еще изменение электрического момента со временем. Соответствующее этому поле не меняет, однако, средней величины напряженности (ср. ниже).

правки, связанные с наличием магнитных моментов 3-го, 5-го и т. д. порядков; однако в дальнейшем мы их учитывать не будем.

Теперь мы можем вычислить внешнюю или эффективную напряженность поля, действующего на молекулу. Эта эффективная напряженность поля получится, если вычтем из средней полной напряженности поля (E , H) среднее значение поля, создаваемого самой данной молекулой, т. е. величину (26) и соответственно (26a). Следовательно имеем:

$$E_{\text{eff}}^0 = E + \frac{4\pi}{3} P \quad (27)$$

и

$$H_{\text{eff}}^0 = H - \frac{8\pi}{3} M. \quad (27a)$$

Если ввести вместо магнитной напряженности соответствующую индукцию $B = H - 4\pi M$, то последняя формула принимает вид, совпадающий с (27):

$$H_{\text{eff}}^0 = B + \frac{4\pi}{3} M. \quad (27b)$$

Формулы (27) и (27a) были впервые выведены Лоренцом (способом, несколько отличным от приведенного здесь). Разумеется, их следует считать лишь первым приближением, даже если ограничиться рассмотрением поляризации первого порядка.

Теоретическое исправление их без более точного знания структуры атомов и их расположения представляется невозможным. Можно было бы попробовать заменить их эмпирическими формулами вида:

$$E_{\text{eff}}^0 = E + \gamma P$$

или

$$E_{\text{eff}}^0 = E + \gamma' \cdot P. \quad (27c)$$

Оказывается однако, что теоретическое значение коэффициента в большинстве случаев прекрасно совпадает с опытом (ср. ниже, гл. III).

Мы можем теперь исправить выражения для плотности электрической и магнитной энергии, приведенные в § 3. Полные напряженности поля, стоящие в этих выражениях, нужно заменить эффективными напряженностями в центрах молекул. При этом для электрической энергии одной молекулы получаем

$$U = -\frac{1}{2} p \left(E + \frac{4\pi}{3} P \right),$$

что соответствует энергии

$$\xi_y^e = -\frac{1}{2} P \cdot E - \frac{2\pi}{3} P^2 \quad (28)$$

на единицу объема.

Аналогичная формула получается для магнитной энергии, если определить ее как потенциальную энергию ponderomotorных сил. Собственно же магнитная энергия, соответствующая работе электрических сил индукции, равна противоположной величине, т. е.

$$\xi_g^m = \frac{1}{2} M \mathbf{B} + \frac{2\pi}{3} M^2 = \frac{1}{2} M \cdot \mathbf{H} - \frac{4\pi}{3} M^2. \quad (28a)$$

Происхождение добавочного члена $-\frac{4\pi}{3} M^2$ может показаться сначала несколько загадочным, так как напряженность магнитного поля вовсе не входила в нашу общую исходную формулу (16) для ξ_g . В этой формуле следовало бы подставить \mathbf{E}_{eff} вместо \mathbf{E} и учесть при этом, что для центра молекулы справедливо соотношение: ¹

$$\text{rot } \mathbf{E}_{\text{eff}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_{\text{eff}}.$$

Соответственно этому для работы сил, действующих на связанные электроны в единице объема за единицу времени, вместо формулы (17) получаем следующее выражение:

$$L_g = \mathbf{E}_{\text{eff}}^0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - M \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{eff}}^0}{\partial t}. \quad (29)$$

Поскольку, следовательно, вообще имеет смысл соотношение

$$L_g = -\frac{\partial \xi_g}{\partial t},$$

имеем согласно формулам (28) и (28a)

$$d\xi_g = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + M d\mathbf{H} - d\left(\frac{2\pi}{3} P^2 + \frac{4\pi}{3} M^2\right) \quad (29a)$$

или:

$$d\xi_g = -\mathbf{E} d\mathbf{P} + M d\mathbf{B} - d\left(\frac{2\pi}{3} P^2 - \frac{2\pi}{3} M^2\right). \quad (29b)$$

2. Градиент эффективной напряженности поля в центре молекулы; поправка для сил и напряжений. Мы должны теперь в формулы предыдущих параграфов для сил и напряжений ввести поправки, обусловленные разницей между усредненными результирующими напряженностями полей и напряженностями эффективными. На первый взгляд для этого представляется необходимым заменить напряженности поля \mathbf{E} и \mathbf{H} эффективными напряженностями (26) и (26a). Это справедливо в отношении формулы (24a), содержащей лишь самые напряженности поля, но не их производные по координатам. При этом

¹ Соотношения этого рода будут более подробно рассмотрены ниже.

выражение для \mathbf{S} остается неизменным, так как внешние произведения \mathbf{P} и \mathbf{M} на соответствующие поправочные члены тождественно равны нулю.

В случае формулы (24) дело обстоит иначе. Здесь мы должны рассматривать в первых трех членах не сами эффективные напряженности поля, а их частные производные в центре молекулы. Ошибочно было бы считать, что из равенства $\mathbf{E}_{\text{eff}}^0 = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}$

вытекает также и $[(\mathbf{P}\nabla)(\mathbf{E})]_{\text{eff}}^0 = (\mathbf{P}\nabla) \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right)$. Чтобы получить

зависимость между частными производными \mathbf{E}_{eff} и \mathbf{E} в центре молекулы, нужно определить (среднюю) эффективную напряженность поля не только для этого центра, но и для соседней точки O' по способу, изложенному в начале этого параграфа. Прежняя наша эффективная напряженность поля $\mathbf{E}_{\text{eff}}^0$ относится только к точке O . Совершенно ясно, что разность $\mathbf{E}'_{\text{eff}} - \mathbf{E}_{\text{eff}}^0$, где \mathbf{E}'_{eff} означает эффективную напряженность поля в точке O' , не имеет ничего общего с величиной $(\overrightarrow{OO'}\nabla)\mathbf{E}_{\text{eff}}^0 = (\overrightarrow{OO'}\nabla) \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right)$.

Обозначим бесконечно малый отрезок $\overrightarrow{OO'}$ через \mathbf{d} ; тогда будем иметь $\mathbf{E}'_{\text{eff}} - \mathbf{E}_{\text{eff}}^0 = [(\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E}_{\text{eff}}^0]$, причем индекс 0 как, и прежде, означает, что соответствующая величина относится к точке O .

Определение \mathbf{E}_{eff} сводится к вычислению среднего значения напряженности поля, создаваемого самой молекулой внутри сферы той же величины, что и прежде, но с эксцентрично расположенным центром O' . Разность интегралов этой напряженности поля, взятых по объемам сфер S' (радиус l , центр O') и S (радиус l , центр O), выразится, очевидно, поверхностным интегралом

$\oint \mathbf{E}_{\text{eig}} d_n dS$ (здесь $d_n dS$ означают элемент объема, заключенного между S и S' и взятого с положительным или отрицательным знаком). Этот интеграл зависит только от внешнего поля молекулы и следовательно может быть вычислен без каких-либо упрощающих предположений.

Слагающая \mathbf{E}_{eig} по какому-либо направлению может быть выражена на сфере S рядом шаровых функций различных порядков. Если, согласно первоначальному предположению, молекула нейтральна, то ряд этот должен начинаться функцией второго порядка, соответствующей дипольному моменту молекулы. Величина d_n т. е. проекция вектора \mathbf{d} на радиус сферы, является очевидно шаровой функцией первого порядка (так как она пропорциональна косинусу угла между \mathbf{d} и \mathbf{n}). Интеграл $\oint \mathbf{E}_{\text{eig}} d_n dS$ должен быть тождественно равен нулю, в виду орто-

гональности шаровых функций разных порядков (т. I, стр. 119).
Стало быть

$$\overline{E'_{\text{eig}} - E_{\text{eig}}} = [(\mathbf{d}\nabla E_{\text{eig}})]^0 = 0$$

и следовательно

$$[(\mathbf{d}\nabla)\bar{E}_{\text{eff}}]^0 = [(\mathbf{d}\nabla)(E - \bar{E}_{\text{eig}})]^0 = (\mathbf{d}\nabla)E.$$

Само собой разумеется, что такой же результат получается и для магнитного поля, поскольку причиной его является магнитная поляризация. Но мы должны учесть еще магнитное поле, возникающее благодаря изменению во времени электрического момента молекулы. Поле это обладает цилиндрической симметрией (т. е. его силовые линии суть коаксиальные круги, плоскости которых перпендикулярны к вектору $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}$; поэтому его среднее значение в центре молекулы должно обращаться в нуль, как было отмечено выше. Легко видеть однако, что среднее значение \mathbf{H}'_{eig} , а значит и дифференциал $[(\mathbf{d}\nabla)\mathbf{H}_{\text{eig}}]^0$ для точек, лежащих вне прямой, вдоль которой направлен вектор $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}$, отличны от нуля. Действительно для рассматриваемой части магнитного поля вне молекулы закон Био — Савара дает:

$$\mathbf{H}_{\text{eig}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \times \frac{\mathbf{R}_0}{R^2}.$$

Единичный вектор $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} : R$ совпадает с внешней нормалью на поверхности сферы S , так что мы получаем:

$$[(\mathbf{d}\nabla)\mathbf{H}_{\text{eig}}]^0 = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{H}_{\text{eig}} d_n dS = \frac{N}{R^2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \times \int_S n d_n dS$$

или, так как среднее значение вектора $n d_n = \mathbf{n}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})$ на поверхность сферы равно $\frac{1}{3} \mathbf{d}$:

$$[(\mathbf{d}\nabla)\bar{\mathbf{H}}_{\text{eig}}]^0 = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \times \mathbf{d}. \quad (30)$$

Отсюда следует далее, если рассматривать $\bar{\mathbf{H}}_{\text{eig}}$ как функцию радиуса-вектора \mathbf{d} :

$$\text{rot}(\bar{\mathbf{H}}_{\text{eig}} - \bar{\mathbf{H}}_{\text{eig}}^0) = \text{rot} \bar{\mathbf{H}}_{\text{eig}} = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \quad (30a)$$

Заметим, что эта формула получается непосредственно из уравнения:

$$\text{rot} \bar{\mathbf{H}}_{\text{eig}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_{\text{eig}}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}_{\text{eig}},$$

если положить $\bar{\mathbf{j}}_{\text{eig}} = 4\pi \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ и $\bar{\mathbf{E}}_{\text{eig}} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}$. Ту часть плотности тока, которая обусловлена магнитным моментом молекулы, можно не учитывать, так как объемный ток $\int \text{rot } \mathbf{M} dV$ компенсируется соответствующим поверхностным током $\oint \mathbf{M} \times \mathbf{n} dS$ — в согласии с предыдущими соображениями.

Ясно, что электрическое поле, обуславливаемое изменением во времени магнитного момента молекулы, должно быть также учтено и при вычислении $(\mathbf{d}\nabla)\bar{\mathbf{E}}_{\text{eig}}$. Это добавочное (не чисто электростатическое) поле можно определить из уравнения:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{E}}_{\text{eig}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}_{\text{eig}}}{\partial t} = 0,$$

если принять во внимание соотношение $\bar{\mathbf{H}}_{\text{eig}} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}$.

Отсюда, как показывает сравнение (25) и (25a), следует:

$$[(\mathbf{d}\nabla)\bar{\mathbf{E}}_{\text{eig}}]^0 = -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \times \mathbf{d} = \frac{4\pi}{3c} \mathbf{d} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (30b)$$

Эту формулу так же, как и формулу (30), можно вывести непосредственно из определения рассматриваемого добавочного электрического поля:

$$\mathbf{E}_{\text{eig}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \times \frac{\mathbf{R}_0}{R^3}.$$

Вычитая величины (30), (30a) и (30b) из соответствующих величин для полного усредненного поля и заменяя вектор \mathbf{d} векторами \mathbf{P} или \mathbf{M} , получаем:

$$[(\mathbf{P}\nabla)\bar{\mathbf{E}}_{\text{eff}}]^0 = (\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \frac{1}{3} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \times \mathbf{P}; \quad (31)$$

$$[(\mathbf{M}\nabla)\bar{\mathbf{H}}_{\text{eff}}]^0 = (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H} - \frac{4\pi}{3} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \mathbf{M}; \quad (31a)$$

$$[\mathbf{M} \times \text{rot } \bar{\mathbf{H}}_{\text{eff}}]^0 = \mathbf{M} \times \text{rot } \mathbf{H} - \frac{8\pi}{3} \mathbf{M} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (31b)$$

Заменим три первые члена формулы (24) § 3 этими выражениями, а в 4-й член введем вместо \mathbf{H} эффективную напряженность поля:

$$\bar{\mathbf{H}}_{\text{eff}}^0 = \mathbf{H} - \frac{8\pi}{3} \mathbf{M}.$$

Тогда получим:

$$\mathbf{F}_g = (\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} + (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H} + \mathbf{M} \times \text{rot } \mathbf{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \times \mathbf{H} + \frac{4\pi}{3c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{M} \times \mathbf{P}) \quad (32)$$

или [ср. формулу (22)]:

$$\mathbf{F}_g = (\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{P} \times \text{rot } \mathbf{E} + (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H} + \mathbf{M} \times \text{rot } \mathbf{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{P} \times \left(\mathbf{H} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} \right) \right] \quad (32a)$$

Таким образом различие между эффективной и полной напряженностями поля и их производными совершенно не отражается на тензоре напряжений связанных электронов (поскольку он вообще существует), тогда как прежнее выражение (21b) для плотности соответствующего количества движения приходится заменить следующим:

$$\mathbf{g}_g = -\frac{1}{c} \mathbf{P} \times \left(\mathbf{H} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} \right). \quad (32b)$$

3. Эффективные напряженности поля в случае смеси молекул различного рода. Мы рассматривали до сих пор тела, построенные из нейтральных молекул только одного единственного сорта и из свободных электронов. Теперь мы попытаемся обобщить полученные выше результаты на случай тела, состоящего из множества разнородных молекул или ионов (эти последние могут быть и закрепленными).

Плотности зарядов и токов, обусловленных этими ионами, определяются формулами (11), (12), (12a) гл. I. Однако, кроме полных напряженностей поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , следует еще различать эффективные напряженности $\mathbf{E}_{\text{eff}}^\alpha$, $\mathbf{H}_{\text{eff}}^\alpha$, связанные с разными родами ионов. Как и в случае одного единственного сорта мы можем положить

$$\mathbf{E}_{\text{eff}}^\alpha = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{elg}}^\alpha, \quad \mathbf{H}_{\text{eff}}^\alpha = \mathbf{H} - \mathbf{H}_{\text{elg}}^\alpha. \quad (33)$$

Но мы сделали бы ошибку, предположив, что величины $(\mathbf{E}_{\text{elg}}^\alpha)^0 \times (\mathbf{H}_{\text{elg}}^\alpha)^0$ — вернее их средние значения для центров соответствующих ионов — связаны с „частичными“ поляризациями, вызываемыми этими ионами:

$$\mathbf{P}^\alpha = N^\alpha \mathbf{p}^\alpha = \frac{\mathbf{P}^\alpha}{v^\alpha}; \quad \mathbf{M}^\alpha = N^\alpha \mathbf{m}^\alpha = \frac{\mathbf{m}^\alpha}{v^\alpha},$$

теми же соотношениями, что и в случае одного рода ионов:

$$(E_{\text{eig}}^{\alpha})^0 = -\frac{4\pi}{3} P^{\alpha}, \quad (H_{\text{eig}}^{\alpha})^0 = \frac{8\pi}{3} M^{\alpha}. \quad (33a)$$

Это можно легко показать следующим рассуждением. Представим себе, что ионы одного рода (концентрация N , момент p) разбиты на две равные части. Тогда, согласно формуле (32a), для каждой из этих частей мы получили бы поправку для эффективной напряженности поля, вдвое меньшую той, которую имели бы, если не делили ионы на две части. Не трудно понять, что замена коэффициентов $-\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{8\pi}{3}$ в (33a) какими-либо другими численными коэффициентами не внесет существенного улучшения. Во-первых, эти коэффициенты должны зависеть от моментов и относительных концентраций различных ионов, так что соотношение между $(E_{\text{eig}}^{\alpha})^0$ и P^{α} [или $(H_{\text{eig}}^{\alpha})^0$ и M^{α}] не было бы линейным. Далее, мы натолкнулись бы на противоречия в соотношениях, вытекающих из уравнений

$$\text{rot } H_{\text{eig}}^{\alpha} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_{\text{eig}}^{\alpha} = 4\pi I^{\alpha} \quad \text{и} \quad \text{rot } E_{\text{eig}}^{\alpha} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} H_{\text{eig}}^{\alpha} = 0.$$

С этими связана еще одна трудность. Если результирующая плотность свободных зарядов $\sum \rho_f^{\alpha}$ обращается в нуль, то отдельные слагающие будут, вообще говоря, отличны от нуля, а, стало быть, согласно нашему предположению будет отлична от нуля и результирующая сила

$$\sum E_{\text{eff}}^{\alpha} \cdot \rho_f^{\alpha} = - \sum E_{\text{eig}}^{\alpha} \cdot \rho_f^{\alpha}.$$

Но этого не может быть, так как тогда нейтральное тело, состоящее из противоположных ионов, подвергалось бы в электростатическом поле действию довольно большой силы. Из всех этих противоречий имеется повидимому лишь один выход: замена формул (33a) обобщенными линейными соотношениями вида:

$$(E_{\text{eig}}^{\alpha})^0 = - \sum_{\beta} s_{\alpha\beta}^{(\alpha)} P^{\beta}, \quad (H_{\text{eig}}^{\alpha})^0 = + \sum_{\beta} s_{\alpha\beta}^{(m)} M^{\beta}, \quad (33b)$$

с численными коэффициентами $s_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$, $s_{\alpha\beta}^{(m)}$, зависящими только от общего характера распределения ионов (беспорядочное или правильное расположение в пространстве и т. д.). Проще всего убедиться в необходимости введения „взаимных“ коэффициентов ($\beta \neq \alpha$) следующим рассуждением. Представим себе, что рассматриваемое тело состоит из совершенно тождественных двухатомных молекул. Мы можем очевидно считать образующие их атомы отдельными молекулами с индексами $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$.

Если для рассматриваемых сложных молекул эффективная электрическая напряженность поля определяется формулой

$$(E_{\text{eff}})^0 = E + sP,$$

то при определении эффективных напряженностей полей отдельных атомов надо принимать во внимание также и силы их взаимодействия. Эффективные напряженности $(E_{\text{eff}}^{(1)})^0$ и $(E_{\text{eff}}^{(2)})^0$ получаются в первом приближении в результате прибавления к $(E_{\text{eff}})^0$ напряженностей полей $E^{1,2}$ или $E^{2,1}$, выражающих действия атомов друг на друга; они очевидно пропорциональны электрическим моментам атомов, т. е. соответствующим частичным поляризациям $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$.

Мы можем, понятно, получить существенно различные результаты, смотря по тому, как атомы или группы атомов расположены друг относительно друга — правильно или хаотично. В первом случае их естественно объединить в молекулы; во втором случае подобное объединение не представляется возможным.

Мы не можем исследовать этот вопрос подробнее, так как он не укладывается в рамки макроскопической теории. Мы еще вернемся к нему в несколько другой связи (при определении диэлектрической постоянной двуатомных веществ, гл. III, § 1). В этой главе мы будем считать материальные тела химически однородными и будем иметь дело лишь с неоднородностью, связанной с наличием нейтральных молекул с одной стороны и свободных электронов — с другой.

§ 5. Полные квадратичные величины и обобщенные условия их расщепления.

1. Полный тензор напряжения и энергии. Сложные вычисленных в предыдущих параграфах квадратичных величин, относящихся или только к свободным, или только к связанным электронам, дает соответствующие полные величины.

При этом, как мы сейчас увидим, электромагнитная энергия и тензор напряжений могут быть определяемы всегда, совершенно независимо от тех или иных соотношений между поляризациями и напряженностями полей. Действительно, в результате сложения выражений (4b) и (29) для полной плотности энергии получается дифференциальное выражение:

$$d\mathfrak{E} = d\mathfrak{E}_r + d\mathfrak{E}_g = \frac{1}{4\pi} \left\{ E \cdot (dD - 4\pi dP) + (B + 4\pi M) \cdot dH \right\} - d \left(\frac{2\pi}{3} P^2 + \frac{4\pi}{3} M^2 \right),$$

т. е.

$$d\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} (E dE + H dH) - d \left(\frac{2\pi}{3} P^2 + \frac{4\pi}{3} M^2 \right).$$

Откуда следует, что

$$\xi = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} - \frac{2\pi}{3} P^2 - \frac{4\pi}{3} M^2. \quad (34)$$

Подобным же образом для полного тензора напряжений, согласно формулам (9b) и (32a), получаем:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} {}^2\mathbf{T} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{P}\nabla) \mathbf{E} + \mathbf{P} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{H}) + (\mathbf{M}\nabla) \mathbf{H} + \mathbf{M} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}, \end{aligned}$$

или, так как

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M},$$

то

$$-\operatorname{div} {}^2\mathbf{T} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{E} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}) +$$

$$+ \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{P} + (\mathbf{P}\nabla) \mathbf{E} - \mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{H} - \operatorname{rot} \mathbf{M} \times \mathbf{H} + (\mathbf{M}\nabla) \mathbf{H} + \mathbf{M} \times \operatorname{rot} \mathbf{H},$$

или

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} {}^2\mathbf{T} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{E} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}) + \\ &+ \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{P} + (\mathbf{P}\nabla) \mathbf{E} - \mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{H} - (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{M} + \nabla (\mathbf{M}\mathbf{H}). \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в скобках, умноженное на $\frac{1}{4\pi}$, формально тождественно с приведенным на стр. 235, т. I, выражением для дивергенции (отрицательной) тензора напряжений. Далее при интегрировании по произвольному объему, получаем [по формуле (16b) т. I, стр. 16]:

$$\int [\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{P} + (\mathbf{P}\nabla) \mathbf{E}] dV = \oint (\mathbf{P} \mathbf{n}) \mathbf{E} dS = \oint \mathbf{E} P_n dS;$$

$$\int [\mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{H} + (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{M}] dV = \oint \mathbf{M} H_n dS$$

и

$$\int \nabla (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) dS = \oint \mathbf{n} (\mathbf{M}\mathbf{H}) dS.$$

Отсюда видно, что тензор ${}^2\mathbf{T}$ существует всегда, так как интеграл $\int \operatorname{div} {}^2\mathbf{T} dV$ преобразуется в поверхностный интеграл $\oint \mathbf{T}_n dS$. Вектор \mathbf{T}_n , т. е. проекция тензора ${}^2\mathbf{T}$ на направление нормали выразится при этом следующим образом:

$$\mathbf{T}_n = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{n} \frac{E^2 + H^2}{2} - \mathbf{E} E_n - \mathbf{H} H_n \right) - \mathbf{E} P_n + \mathbf{M} H_n - \mathbf{n} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H})$$

или

$$T_n = \frac{1}{4\pi} \left\{ n \frac{E^2 + (B - 4\pi M) \cdot H}{2} - ED_n - BH_n \right\}. \quad (34a)$$

Составляющие 2T по каким-либо двум осям координат (i, k) равны следовательно:

$$T_{ik} = \delta_{ik} \left(\frac{E^2 + B \cdot H}{8\pi} - \frac{1}{2} M \cdot H \right) - E_i D_k - B_i H_k. \quad (34b)$$

Наконец, для плотности потока электромагнитной энергии $K = K_f + K_g$ и для плотности количества движения $g = g_f + g_g$, получаем следующие выражения согласно формулам (4a), (9a), (18a) и (32b)

$$K = \frac{c}{4\pi} E \times B \quad (35)$$

и

$$g = \frac{1}{4\pi c} \left[D \times H - 4\pi P \times \left(H - \frac{4\pi}{3} M \right) \right],$$

т. е.

$$g = \frac{1}{4\pi c} E \times H + \frac{4\pi}{3c} P \times M. \quad (35a)$$

Следует заметить, что электрические и магнитные линейные величины входят в квадратичные величины ξ , 2T , K и g не вполне симметрично.

Вектор K потока энергии и тензор 2T потока количества движения можно было бы определить несколько иначе, если при вычислении силы пренебречь поверхностными зарядом и током, соответствующими связанным электронам. Тогда надо было бы положить по формуле (18b) $K_g = cE \times M$ и следовательно

$$K = \frac{c}{4\pi} E \times H. \quad (35b)$$

Точно также и при отбрасывании поправок Лоренца получается:

$$T_n = \frac{1}{4\pi} \left(n \frac{E^2 + H^2}{8\pi} - EE_n - HH_n \right) \quad (35c)$$

Точная формула довольно сложна. Величины (35b) и (35c) формально тождественны соответствующим векторам общей теории, изложенной в первом томе. Это непосредственно следует из определения работы (неполной) и силы по формулам:

$$L^0 = L_f + L_g = cE \cdot (j_f + j_g) = cE \cdot j$$

и

$$F^0 = F_f + F_g = (\rho_f + \rho_g) E + (j_f + j_g) \times H = \rho E + j \times H,$$

так как полные (средние) электрические плотности ρ и \mathbf{j} связаны с соответствующими напряженностями поля теми же самыми уравнениями, которыми мы пользовались в первом томе:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\mathbf{j}.$$

Выражения L^0 и F^0 могут быть поэтому преобразованы таким же точно образом, как и там (гл. VII, § 4 и 5).

Вышеприведенные формулы справедливы при любом соотношении между поляризациями и напряженностями поля. Они приложимы к любым телам или системам тел, — в противоположность формулам двух предыдущих параграфов, годным только при наличии известных условий, которые в действительности могут быть и не выполнены.

Мы можем поэтому сказать, что полная электрическая энергия и тензор полных напряжений существуют всегда, выражаясь квадратичными или билинейными функциями от усредненных напряженностей поля и поляризаций (как полных, так и частичных); разделение же их на части, соответствующие свободным и связанным электронам, вообще говоря, невозможно.

В частном случае непроводников, состоящих из неподвижных ионов, или из одних лишь нейтральных молекул, полные квадратичные величины должны быть физически эквивалентны соответствующим величинам, относящимся к связанным электронам. Очевидно однако, что и в этом случае оба рода величин формально отличны друг от друга. Напомним при этом, что условия существования величин ξ_g и 2T_g (как определенных функций линейных величин), установленные нами в § 2 и 3, относятся только к зависимости поляризаций от напряженностей поля и совершенно не зависят от электропроводности рассматриваемых тел. Если только эти условия выполнены, т. е. если величины ξ_g , K_g , g_g , 2T_g вообще могут быть определены — они должны быть связаны с соответствующими полными величинами уравнениями:

$$-L = \frac{\partial \xi_g}{\partial t} + \operatorname{div} K_g = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div} K, \quad (36)$$

$$-F = \frac{\partial g_g}{\partial t} + \operatorname{div} {}^2T_g = \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div} {}^2T. \quad (36a)$$

Эти уравнения и выражают физическую эквивалентность обоих родов величин. Отсюда однако никоим образом не следует заключать, что справедливы отдельные уравнения

$$\xi_g = \xi, \quad K_g = K, \quad g_g = g, \quad {}^2T_g = {}^2T.$$

Строго говоря, эти последние уравнения никогда не выполняются. Это видно хотя бы из того, что вектор K_g всегда равен нулю, тогда как K вообще отличен от нуля.

Это замечание поможет нам полнее выяснить физический смысл условий существования величины ξ_g ¹. А именно: для справедливости уравнения:

$$\int L dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int \xi_g dV, \quad (37)$$

требуется равенство нулю результирующего потока энергии обусловленного движением связанных электронов. Но это возможно только в том случае, если колебания этих электронов не затухают. В противном случае электромагнитную энергию непроводника можно выразить величиной ξ_g только для чисто статических явлений.

2. Средние значения квадратичных величин для случая гармонических колебаний. Эрмитовы условия для тензоров восприимчивости. Мы рассмотрим теперь более общий случай гармонического колебательного процесса; при этом предположим, что электрическая и магнитная поляризации пропорциональны соответствующим напряженностям поля. Зависимость различных линейных величин от времени выразится комплексным множителем $e^{i\omega t}$ (где $\frac{\omega}{2\pi} = \nu$ означает

частоту колебаний). В главе первой уже указывалось, что восприимчивостям χ , χ и коэффициентам индукции ϵ , μ — или для анизотропных тел соответствующим тензорам — следует придавать комплексные значения, чтобы учесть таким образом возможный сдвиг фаз в колебаниях величин E , P или H , M . В случае вынужденных колебаний связанных электронов затухание, характеризующее их свободные колебания, выражается именно таким сдвигом фазы электрического момента всей молекулы относительно внешней силы (ср. гл. I, § 2, см. также ниже гл. III, § 4). Мы видим, следовательно, что при наличии естественного затухания величины χ , χ , ϵ , μ , — а в общем случае соответствующие компоненты тензоров, — должны иметь комплексные значения.

Формулируя условия симметрии (6), которым должны удовлетворять величины ϵ_{ik} и μ_{ik} для существования энергии ξ_r и ξ_g , мы считали эти величины вещественными. Легко показать, что рассмотренные тензорные компоненты могут принимать комплексные значения и при отсутствии естественного затухания; значения эти должны, однако, удовлетворять так называемым эрмитовым условиям:

$$\epsilon_{ki} = \epsilon_{ik}^*, \quad \mu_{ki} = \mu_{ik}^*, \quad (37a)$$

¹ В связи с этим следует заметить, что энергию ξ_g следует считать заключенной внутри самого рассматриваемого тела, так как она исчезает при P и M , равных нулю, тогда как „полная“ энергия распределена, вообще говоря, и вне тела (см. ниже § 7).

где a^* означает величину, комплексно-сопряженную с a . Уравнения (37а) являются вместе с тем необходимыми и достаточными условиями существования энергии ξ_g и могут рассматриваться как обобщение прежних условий симметрии (6). Чтобы доказать это, надо лишь установить для нашего случая связь между квадратичными и линейными величинами, если последние определены как вещественные части комплексных величин.

Итак, имеем величины a и b вида $a = a_0 e^{i\omega t}$, $b = b_0 e^{i\omega t}$, где a_0 и b_0 в общем случае также комплексны. Их вещественные части $R[a] = \frac{1}{2}(a + a^*)$ и $R[b] = \frac{1}{2}(b + b^*)$ обозначают две любые линейные величины, например напряженность поля и поляризацию. Вещественные амплитуды этих величин равны очевидно модулям соответствующих комплексных амплитуд $|a_0|$ и $|b_0|$.

Рассмотрим теперь квадратичную величину:

$$(R[a])(R[b]) = \frac{1}{2}(a + a^*) \cdot \frac{1}{2}(b + b^*). \quad (38)$$

Ее можно определить как вещественную часть следующих комплексных величин:

$$Q = \frac{1}{2}(a + a^*)b = \frac{1}{2}(ab + a^*b) \quad (38a)$$

или

$$\frac{1}{2}(ab^* + a^*b^*), \quad \frac{1}{2}(ab + ab^*), \quad \frac{1}{2}(a^*b + a^*b^*).$$

Среднее значение $e^{i\omega t}$ и $e^{i2\omega t}$ по времени равно нулю, поэтому среднее по времени от Q сводится к $\frac{1}{2}a^*b$, и мы, следовательно, получим:

$$\bar{Q} = \frac{1}{2}R[a^*b] = \frac{1}{2}R[a_0^*b_0]. \quad (38b)$$

Положим, в частности, $a = -E$ и $b = \frac{\partial P}{\partial t}$, где E и P —комплексные векторы, вещественные части которых представляют электрическую напряженность поля и поляризацию. Тогда Q будет производной от (комплексной) плотности электрической энергии ξ_g^e по времени, так что мы можем написать:

$$R \left[\frac{\partial \xi_g^e}{\partial t} \right] = -R[E] \cdot R \left[\frac{\partial P}{\partial t} \right],$$

т. е.

$$\frac{\partial \xi_g^e}{\partial t} = -\frac{1}{2}R \left[\left(E \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + E^* \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \right) \right].$$

Если функция ξ_{μ}° существует, то бесконечно малое изменение ее среднего значения должно выражаться через комплексные амплитуды E и P следующим образом:

$$d\bar{\xi}_{\mu}^{\circ} = -\frac{1}{2} R [E_{\mu}^{\circ}] \cdot dP_{\mu}^{\circ} = -\frac{1}{2} R \left[\sum_{i=1}^s E_{0i}^{\circ} dP_{0i}^{\circ} \right],$$

т. е. сумма

$$\sum_{i=1}^s E_{0i}^{\circ} dP_{0i}^{\circ} + \sum_{k=1}^s E_{0k}^{\circ} dP_{0k}^{\circ},$$

а следовательно и сумма

$$dU \equiv \sum P_{0i}^{\circ} dE_{0i}^{\circ} + \sum P_{0k}^{\circ} dE_{0k}^{\circ} \quad (39)$$

должны быть полными дифференциалами.

Положим теперь (для данной частоты колебаний):

$$P_{0i}^{\circ} = \sum_{k=1}^s x_{ik} E_{0k}^{\circ}$$

и будем считать величины E_{0i}° и E_{0k}° независимыми переменными; тогда

$$\frac{\partial}{\partial E_{0k}^{\circ}} \left(\frac{\partial U}{\partial E_{0i}^{\circ}} \right) = \frac{\partial P_{0i}^{\circ}}{\partial E_{0k}^{\circ}} = x_{ik}^{\circ} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial E_{0i}^{\circ}} \left(\frac{\partial U}{\partial E_{0k}^{\circ}} \right) = \frac{\partial P_{0k}^{\circ}}{\partial E_{0i}^{\circ}} = x_{ki}^{\circ},$$

т. е. $x_{ki}^{\circ} = x_{ik}^{\circ}$. Те же эрмитовы условия симметрии должны получиться и для компонент тензора индукции 2e .

Для величины U , являющейся однородной квадратичной функцией аргументов E_{0i}° и E_{0k}° , получаем далее:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left(\sum_i P_{0i}^{\circ} E_{0i}^{\circ} + \sum_k P_{0k}^{\circ} E_{0k}^{\circ} \right) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \left(x_{ik}^{\circ} E_{0i}^{\circ} E_{0k}^{\circ} + x_{ki}^{\circ} E_{0k}^{\circ} E_{0i}^{\circ} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k x_{ki}^{\circ} E_{0i}^{\circ} E_{0k}^{\circ} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k x_{ki}^{\circ} E_{0k}^{\circ} E_{0i}^{\circ} = \sum_i \sum_k x_{ki}^{\circ} E_{0i}^{\circ} E_{0k}^{\circ}. \end{aligned}$$

Квадратичная форма, стоящая справа — вещественна, так как согласно условию $x_{ki}^{\circ} = x_{ik}^{\circ}$ она тождественна с сопряженной величиной:

$$\sum_i \sum_k x_{ki}^{\circ} E_{0i}^{\circ} E_{0k}^{\circ} = \sum_i \sum_k x_{ik}^{\circ} E_{0k}^{\circ} E_{0i}^{\circ} = \sum_i \sum_k x_{ki}^{\circ} E_{0i}^{\circ} E_{0k}^{\circ}.$$

Среднее значение энергии ξ_g^0 оказывается при этом также вещественным и может быть выражено формулами:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_g^0 &= -\frac{1}{4} \sum_k \sum_i \chi_{ki} E_{0k}^* P_{0i} = -\frac{1}{4} \sum E_{0i}^* P_{0i} = \\ &= \frac{1}{4} \sum E_{0i} P_{0i}^*. \end{aligned} \quad (39a)$$

Подобные же результаты получаются и для магнитной части энергии ξ_p .

При гармонических колебательных процессах среднее значение работы $L (= L_p)$ должно равняться нулю, согласно формуле (37), так как энергия ξ_p , если она вообще существует, может колебаться лишь около своего постоянного среднего значения. В этом случае на движение связанных электронов в среднем никакой энергии не затрачивается. Как известно, этот результат справедлив для незатухающих колебаний любого рода. Но на самом деле колебания связанных электронов всегда следует считать затухающими, хотя в некоторых случаях это затухание и является очень малым. Поэтому невозможно строго определить энергию ξ_p , — за исключением случая статических явлений. Следовательно, строго говоря, мы должны пользоваться полной энергией ξ и другими связанными с ней величинами, также и в случае непроводников.

3. Затухающие колебания и сведение затухания к кажущейся проводимости. В случае гармонических колебаний оказывается однако возможным формально сохранить понятие энергии ξ_p путем сведения явлений затухания к фиктивной электропроводности рассматриваемого тела. Для изотропного тела с комплексной диэлектрической постоянной ϵ эту „эффективную“ проводимость можно определить из формулы (55d) гл. I (причем ϵ в этой формуле должно обозначать не действительную диэлектрическую постоянную, а только ее вещественную часть). При этом истинная электропроводность может быть объединена с вышеупомянутой эффективной проводимостью в одну общую постоянную — если только данное тело не является абсолютным изолятором. Обычно, однако, проще бывает поступать наоборот, — заменить истинную электропроводность мнимой диэлектрической постоянной (или — для анизотропных тел — тензором, не удовлетворяющим условиям Эрмита) и рассматривать тело, как совершенный изолятор, состоящий исключительно из связанных колеблющихся электронов, причем колебания их затухают в большей или меньшей степени в зависимости от рода вещества и частоты колебаний. Заметим, что комплексные значения магнитной проницаемости не могут быть сведены к обычной электропроводности. Можно было бы, разумеется, ввести соответствующую магнитную величину и связанные с ней фиктивные „маг-

нитные токи", но это вряд ли способствовало бы упрощению теории.

В случае медленных колебаний, и в особенности в случае постоянных во времени полей объединение динамических эффектов, зависящих от свободных и от связанных электронов, становится невозможным. Поэтому в этом случае рекомендуется разделять полную энергию или полный тензор напряжений на части, соответствующие свободным и связанным электронам. При этом полная работа L сводится очевидно к первой своей части L_1 , а вторая — L_2 — обращается в нуль.

Мы получаем таким образом

$$L = \sigma E^2. \quad (40)$$

Это — джоулево тепло, выделяющееся в единице объема в единицу времени. Следовательно, согласно формуле (30) мы имеем:

$$\int \sigma E^2 dV = - \frac{c}{4\pi} \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_n dS. \quad (40a)$$

Это равенство выражает тот факт, что энергия излучения, приходящая извне через поверхность S , полностью превратилась в тепло. Подобным же образом в случае отсутствия затухания получаем для гармонических колебаний формулу:

$$\int \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* dV = - \frac{c}{4\pi} \oint (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B})_n dS, \quad (40b)$$

представляющую удвоенное среднее по времени соответствующей квадратичной величины. При наличии затухания слева появляется еще величина $2 \int L_2 dV$, причем L_2 определяется по формулам (21) и (38b) следующим образом:

$$2\bar{L}_2 = R \left[\mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M}^* \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = R [i\omega (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{P} - \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{H})]. \quad (41)$$

Добавочная величина $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2\pi}{3} P^2 + \frac{4\pi}{3} M^2 \right)$ здесь опущена, так как ее среднее значение обращается в нуль. В нуль обращается также и вся та составная часть формулы (41), которая соответствует эрмитовым частям \mathbf{P} и \mathbf{M} (так как она выражает производную по времени от некоторой функции линейных величин). Нам остается следовательно учесть только не-эрмитову часть поляризации. Для этого разобьем комплексные тензоры восприимчивости χ и γ на симметричные или точнее „эрмитовые“ части χ' , γ' и на „анти-эрмитовые“ — χ'' , γ'' по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x'_{ik} &= \frac{1}{2} (x_{ik} + x_{ki}^*) = x'_{ki}^* \\ x''_{ik} &= \frac{1}{2} (x_{ik} - x_{ki}^*) = -x''_{ki}^* \\ \gamma'_{ik} &= \frac{1}{2} (\gamma_{ik} + \gamma_{ki}^*) = \gamma'_{ki}^* \\ \gamma''_{ik} &= \frac{1}{2} (\gamma_{ik} - \gamma_{ki}^*) = -\gamma''_{ki}^* \end{aligned} \right\} (42)$$

и соответственно положим

$$P = P' + P'' \quad \text{и} \quad M = M' + M''.$$

Величины $E^* \cdot P'$ и $M'^* \cdot H$ вещественны и поэтому не меняют значения \bar{L}_g . Величины же $E^* P''$ и $M''^* H$ являются чисто мнимыми. Действительно:

$$\begin{aligned} E^* P'' &= \sum_i E_i^* P_i'' = \sum_i \sum_k x''_{ik} E_i^* E_k = - \sum_i \sum_k x''_{ki}^* E_i^* E_k = \\ &= - \sum_k \sum_i x''_{ik}^* E_i^* E_k = - \sum_i E_i P_i''^* = -E \cdot P''^*, \end{aligned}$$

и точно также

$$M''^* \cdot H = -M'' \cdot H^*.$$

Следовательно, произведение этих величин и мнимого множителя $i\omega$ является величиной вещественной и представляет собой как раз искомое значение $2\bar{L}_g$. Таким образом, вводя обозначения

$$\sqrt{-1} \omega x''_{ik} = \sigma_{ik}^e, \quad \sqrt{-1} \omega \gamma''_{ik} = -\sigma_{ik}^m, \quad (42a)$$

будем иметь

$$2\bar{L}_g = \sum_i \sum_k \sigma_{ik}^e E_i^* E_k + \sum_i \sum_k \sigma_{ik}^m H_i H_k^* \quad (43)$$

и следовательно

$$\begin{aligned} \int \sum_i \sum_k [(\delta_{ik} \sigma + \sigma_{ik}^e) E_i^* E_k + \sigma_{ik}^m H_i H_k^*] dV = \\ = -\frac{c}{4\pi} \oint (E^* \times B)_n dS. \end{aligned} \quad (43a)$$

Объемный интеграл стоящий слева, равен удвоенному среднему значению количества электромагнитной энергии, втекающей в данный объем извне и превращающейся в единицу времени в тепло (или возможно, в другие формы энергии). Величины σ_{ik}^e и σ_{ik}^m представляют собой компоненты тензоров

фиктивной электрической и магнитной проводимости, характеризующих силы трения, действующие на связанные электроны. Что касается свободных электронов, то трение, испытываемое ими, следует, вообще говоря, также выразить тензором σ_{ik} (истинная проводимость) — составляющие этого тензора σ_{ik} надо подставить в формулу (43а) на место величин $\delta_{ik}\sigma$.

До сих пор мы рассматривали главным образом вопрос о работе, энергии и излучении. Однако те же рассуждения могут быть применены и к соответствующим импульсовым величинам \mathbf{F} , \mathbf{g} , 2T . Разница между ними и величинами энергии L , ξ , K заключается лишь в следующем: величина \mathbf{g} , в противоположность ξ , всегда может быть разложена на части, соответствующие свободным и связанным электронам, тогда как для 2T (в противоположность K) такое разложение возможно только в некоторых частных случаях. Но так как здесь (при рассмотрении частных производных по координатам, а не по времени) можно не учитывать сил торможения, действующих на связанные электроны, то нам не остается ничего прибавить к уже сказанному выше. Заметим лишь, что условие симметрии (6), определявшее ранее существование тензора T_{ij} , должно быть, как и в случае энергии, заменено более общим эрмитовым условием (37а). Среднее значение по времени силы, действующей на связанные электроны, выразится при этом (в случае гармонических колебательных процессов) согласно (23) и (38b) следующей простой формулой:

$$\int \bar{\mathbf{F}}_r dV = \frac{1}{4} \oint \mathbf{n} (\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{E} + \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{H}) dS. \quad (44)$$

Для свободных электронов получаем согласно формуле (10b):

$$\int \bar{\mathbf{F}}_r dV = \frac{1}{8\pi} \oint \left[-\mathbf{n} \left(\frac{\mathbf{D}^* \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{H}}{2} \right) + E D_n^* + H B_n^* \right] dS \quad (44a)$$

(здесь исключены из рассмотрения свободные поверхностные заряды и токи), причем с другой стороны для случая скалярной проводимости имеем соотношение:

$$\bar{\mathbf{F}}_r = \frac{\sigma}{2c} \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{g}}_r \quad (44b)$$

[ср. формулу (11)]. Если эрмитовы условия не выполнены, то уравнения (44) и (44a) теряют всякий смысл, потому что их правые стороны принимают комплексные значения, и тогда мы можем определить лишь сумму $\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + \bar{\mathbf{F}}_r$.

§ 6. Четырехмерная форма тензора энергии и напряжений.

1. Поверхностные эффекты и добавочные члены, появляющиеся вследствие требования инвариантности. Если пренебречь поправками Лоренца и поверхностными

эффектами, то можно объединить величины ξ , \mathbf{K} , \mathbf{g} , ${}^2\mathbf{T}$ в один четырехмерный симметричный тензор ${}^2\Theta^0$ точно так же, как это было сделано в томе I (ср. т. I, стр. 285). Однако, мы уже не раз указывали, что динамические поверхностные эффекты, производимые связанными электронами, принципиально не могут быть отделены от соответствующих объемных эффектов. Поэтому, желая ввести четырехмерный тензор энергии и напряжений ${}^2\Theta$, включающий четыре „полных“ величины ξ , \mathbf{K} , \mathbf{g} , ${}^2\mathbf{T}$ в качестве временных, временно-пространственных и пространственных проекций, мы должны сперва заняться изучением поверхностных эффектов.

При трехмерном расчете эти эффекты сводятся, как известно, к добавочной работе:

$$\int L' dV = c \oint (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{E} dS = c \oint \mathbf{n} (\mathbf{E} \times \mathbf{M}) dS$$

и к добавочной силе:

$$\int \mathbf{F}' dV = \oint [P_n \mathbf{E} + (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{H}] dS.$$

Следовательно

$$L' = c \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{M}) \quad (45)$$

и

$$\mathbf{F}' = (\mathbf{P} \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{P} - (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{M} - \mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{P} + \nabla (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) \quad (45a)$$

[ср. формулу (28a)].

Чтобы найти полную работу L и силу или импульс \mathbf{F} , отнесенные к единице объема и единице времени, нужно прибавить предыдущие величины к величинам:

$$L^0 = c\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}^0 = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (46)$$

(здесь $\rho = \rho_f + \rho_g$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_g$).

Положим $ict = x_4$ и $\frac{i}{c} L^0 = F_4^0$; тогда согласно т. I, стр. 232, получим:

$$F_\alpha^0 = \sum_1^4 \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta}^0}{\partial x_\beta}, \quad (46a)$$

где тензор ${}^2\Theta^0$ определяется формулами, приведенными на стр. 232, т. I (следует только стоящие там величины ξ , \mathbf{K} , \mathbf{g} , ${}^2\mathbf{T}$ снабдить индексом 0). Мы попытаемся соответственно представить четыре величины $F'_1, F'_2, F'_3, \frac{i}{c} L' = F'_4$ в виде:

$$F'_\alpha = \sum_1^4 \frac{\partial \Theta'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \quad (47)$$

В случае статических, т. е. независимых от времени (x_4) явлений, формула (47) оказывается справедливой, если положить

$$\Theta'_{\alpha\beta} = - \sum_{\gamma=1}^4 H_{\alpha\gamma} P_{\gamma\beta} = \sum H_{\alpha\gamma} P_{\beta\gamma}, \quad (47a)$$

где $H_{\alpha\gamma}$ и $P_{\beta\gamma}$ обозначают составляющие тензора поля и тензора поляризации, определяемые формулами (22a) и (24a) гл. I. При $\alpha=4$ имеем например:

$$\Theta'_{41} = -H_{42} P_{21} - H_{43} P_{31} = i(E_2 M_3 - E_3 M_2) = i(\mathbf{E} \times \mathbf{M})_1 \quad (47b)$$

и точно также:

$$\Theta'_{42} = i(\mathbf{E} \times \mathbf{M})_2, \quad \Theta'_{43} = i(\mathbf{E} \times \mathbf{M})_3.$$

Отсюда по формуле (47) следует

$$F'_4 = i \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{M}),$$

т. е.

$$L = c \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{M}).$$

Далее при $\alpha=1$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Theta'_{11} &= H_{12} P_{12} + H_{13} P_{13} + H_{14} P_{14} = H_3 M_3 + H_2 M_2 + E_1 P_1; \\ \Theta'_{12} &= H_{13} P_{23} + H_{14} P_{24} = -H_2 M_1 + E_1 P_2; \\ \Theta'_{13} &= H_{12} P_{32} + H_{14} P_{34} = -H_3 M_1 + E_1 P_3, \end{aligned} \right\} (47c)$$

и следовательно:

$$F'_4 = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \Theta'_{1\beta}}{\partial x_\beta} = \sum_1^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (P_\beta E_1) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (H_\beta M_1) + \frac{\partial}{\partial x_1} (H_\beta M_\beta) \right\}.$$

Но это выражение представляет собой первую компоненту вектора F' , так как по формуле (45a) при $\alpha=1, 2, 3$ имеем:

$$\begin{aligned} F'_\alpha &= \sum_{\beta=1}^3 \left\{ P_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} E_\alpha + E_\alpha \frac{\partial P_\beta}{\partial x_\beta} - H_\beta \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\beta} - M_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (M_\beta H_\beta) \right\} = \\ &= \sum_{\beta=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P_\beta E_\alpha - H_\beta M_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (M_\beta H_\beta) \right\}. \end{aligned}$$

Уравнения (47) и (47a) справедливы для статических явлений, далее они симметричны по отношению ко всем четырем индексам 1, 2, 3, 4 (т. е. инвариантны по отношению к преобра-

зованиям Лоренца); из этого следует, что они должны оставаться справедливыми для любых явлений, зависящих от времени.

Мы видим следовательно, что наши исходные формулы (45) и (45а) не полны, так как в них с правой стороны не хватает производных по времени от „скаляра“:

$$-\Theta'_{44} = -(H_{41}P_{41} + H_{42}P_{42} + H_{43}P_{43}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \quad (47d)$$

и соответственно производным по времени от трехмерного вектора с составляющими

$$\frac{1}{ic} \Theta'_{14}, \quad \frac{1}{ic} \Theta'_{24}, \quad \frac{1}{ic} \Theta'_{34},$$

т. е.

$$\frac{1}{ic} \Theta'_{\alpha 4} = \frac{1}{c} (\mathbf{H} \times \mathbf{P})_{\alpha}. \quad (47e)$$

Поэтому величины L' и F' следует определить формулами

$$L' = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}) + c \operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{M}; \quad (48)$$

$$F' = \frac{\partial}{c \partial t} (\mathbf{H} \times \mathbf{P}) + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{P} - (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{M} - \mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{H} + \\ + \nabla (\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}). \quad (48a)$$

Формулы эти надо рассматривать как временную и пространственную проекции четырехмерного уравнения (47а). Сложение (46а) и (47) дает нам полную четырехмерную силу в виде:

$$F_{\alpha} = \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \quad (49)$$

(в дальнейшем мы опускаем знаки суммы в случае двух одинаковых индексов, принимающих последовательно все четыре значения 1, 2, 3, 4), где

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta}^0 + \Theta'_{\alpha\beta}; \quad (49a)$$

т. е., согласно формуле (47а) и формуле (11) на стр. 232, т. I,

$$\Theta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{H^2 - E^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} H_{\alpha\gamma} (H_{\gamma\beta} - 4\pi P_{\gamma\beta}),$$

или, по определению тензора индукции $B_{\alpha\beta}$ [см. формулу (25), гл. I]:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{H^2 - E^2}{8\pi} + \frac{H_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta}}{4\pi}. \quad (49b)$$

Введем пространственно-временную, временную и пространственную проекции тензора $\Theta_{\alpha\beta}$ согласно схеме:

$${}^2\Theta = \begin{pmatrix} -{}^2T, & -icg \\ \frac{1}{ic}K, & \xi \end{pmatrix} \quad (50)$$

(ср. соответствующую схему на стр. 232, т. I); при этом получим следующие формулы для величин ξ , K , g , 2T :

$$\xi = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + E \cdot P = \frac{H^2 - E^2}{8\pi} + \frac{E \cdot D}{4\pi}, \quad (50a)$$

$$K = \frac{c}{4\pi} E \times B; \quad (50b)$$

$$g = \frac{1}{4\pi c} D \times H \quad (50c)$$

и

$$-\Theta_n = T_n = \frac{1}{4\pi} \left[n \left(\frac{H^2 + E^2}{2} - 4\pi M \cdot n \right) - H_n B - D_n E \right] \quad (50d)$$

или

$$-T_n = \frac{1}{4\pi} \left[n \left(\frac{H^2 - E^2}{2} - n \cdot B \right) + H_n B + D_n E \right]. \quad (50e)$$

Итак, K и 2T принимают свои прежние значения (35) и (34a), тогда как у ξ и g появляются добавочные члены, нарушающие их первоначальную симметрию относительно электрических и магнитных величин, причем эта несимметричность имеет противоположный, как бы „дополнительный“ характер в отношении величин K и 2T . Появление величины $P \cdot dE$ вместо $-EdP$ в выражении дифференциала энергии $d\xi$, может быть объяснено следующим образом.

Элементарный диполь с постоянным электрическим моментом P обладает во внешнем поле E потенциальной энергией $-E \cdot P$. Интеграл $-\int E \cdot dP$ вообще, говоря, отличен от $-E \cdot P$, и разность

$$-\int E \cdot dP - (-E \cdot P) = E \cdot P - \int E dP = \int P \cdot dE$$

очевидно представляет собой внутреннюю электрическую энергию диполя, т. е. работу, которую надо затратить против внутренних „квазиупругих“ сил при возрастании момента от 0 до P . В простейшем случае пропорциональности между P и E эта внутренняя квазиупругая энергия равна $+\frac{1}{2} P \cdot E$, тогда как

величина $-\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} = -\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$ является суммой ее и внешней потенциальной энергии (ср. т. I, стр. 130). В случае магнитной поляризации мы имеем уже не квазиупругую, а внутреннюю кинетическую энергию $\int \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}$; вычитая из нее $\mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$, получаем величину $-\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{H}$, представляющую „полную“ магнитную энергию. Эту связь между величинами обоих родов мы рассмотрим с другой точки зрения в следующих параграфах.

2. Расщепление четырехмерного тензора энергии и напряжений на части, соответствующие свободным и связанным электронам. Физический смысл добавочных членов, появляющихся благодаря требованию инвариантности теории относительности, станет нам яснее, если мы попытаемся представить определяемые формулами (17) и (21) работу L_g и силу F_g при помощи четырехмерных обозначений. Тогда мы должны считать компоненты F_g (F_1^g, F_2^g, F_3^g) и величину $\frac{i}{c} L_g = F_4^g$ четырьмя компонентами четырехмерного вектора импульса — работы ${}^2\mathcal{E}_g$, характеризующего действие, производимое на нейтральные молекулы в единице объема в единицу времени. Мы видели еще при выводе формулы (23), что компоненты вектора $(\mathbf{P} \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{P} \times \text{rot} \mathbf{E}$ равны

$$\sum_{i=1}^3 P_i \frac{\partial}{\partial x_k} E_i \quad (k = 1, 2, 3).$$

Следовательно согласно формуле (21) имеем:

$$F_k^g = \sum_{i=1}^3 P_i \frac{\partial}{\partial x_k} E_i + \sum_{i=1}^3 M_i \frac{\partial}{\partial x_k} H_i + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} \times \mathbf{H})_k,$$

или

$$F_k^g = \frac{1}{2} P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_k} H_{\alpha\beta} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} \times \mathbf{H})_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

причем подразумевается суммирование по индексам α и β от 1 до 4. Точно также по формуле (17) получаем:

$$\frac{iL_g}{c} = F_4^g = \frac{1}{2} P_{\alpha\beta} \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_4} + \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}).$$

С точки зрения теории относительности эти выражения не могут быть справедливыми, так как из за добавочных членов $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} \times \mathbf{H})_k$ и $\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{P})$ они не удовлетворяют основному принципу инвариантности. Наиболее простой способ согласо-

ния их с этим принципом, это — отбросить добавочные члены, т. е. положить

$$F_{\alpha}^g = \frac{1}{2} P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}} \quad (51)$$

и соответственно прибавить члены $\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$ и $\frac{i}{c} \mathbf{P} \times \mathbf{H}$ к первоначальным величинам ξ и \mathbf{g} в уравнениях для полной работы и импульса (в единице объема в единицу времени):

$$L = - \frac{\partial \xi}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{K}, \quad \mathbf{F} = - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \operatorname{div} {}^2\mathbf{T}.$$

При этом получаются приведенные выше формулы (50а) и (50с). На основании уравнений поля:

$$\frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial H_{\gamma\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_{\gamma}} = 0$$

формулу (51) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{\alpha}^g &= \frac{1}{2} P_{\beta\gamma} \left(\frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial H_{\beta\alpha}}{\partial x_{\gamma}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\beta}} + \frac{1}{2} P_{\gamma\beta} \frac{\partial H_{\gamma\alpha}}{\partial x_{\beta}} = P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\beta}}. \end{aligned}$$

После вычитания из формулы (49) получим:

$$F_{\alpha}^f = F_{\alpha} - F_{\alpha}^g = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \Theta_{\alpha\beta}^0 + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (H_{\alpha\gamma} P_{\beta\gamma}) - P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\beta}}$$

т. е.

$$F_{\alpha}^f = \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta}^0}{\partial x_{\beta}} - H_{\alpha\gamma} \frac{\partial P_{\beta\gamma}}{\partial x_{\beta}}. \quad (51a)$$

Эта формула для четырехмерной силы, действующей на свободные электроны, может быть получена непосредственно из выражения:

$$F_{\alpha}^f = H_{\alpha\beta} j_{\beta}^f,$$

если подставить в него

$$j_{\beta}^f = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x_{\gamma}}$$

(ср. § 4, гл. I).

Требуемое теорией относительности видоизменение четырехмерной силы, поскольку оно касается трехмерной силы F_{α} , сводится к замене нашего первоначального выражения для силы, действующей на электрический диполь $-(\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}$ выражением:

$$\nabla(\mathbf{p}\mathbf{E}) = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{p} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

(момент диполя \mathbf{p} следует при этом считать постоянным). На первый взгляд подобное изменение прежнего выражения может показаться недопустимым. Действительно, если определить силу \mathbf{f} , действующую на элементарный диполь, как геометрическую сумму сил $+e\mathbf{E}_2$ и $-e\mathbf{E}_1$, действующих на его концы, то получается:

$$\mathbf{f} = e(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = e(\mathbf{1}\nabla)\mathbf{E} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}.$$

Надо однако иметь в виду, что в основе этой формулы лежит скрытое предположение, что оба конца диполя должны быть рассматриваемы одновременно. С точки зрения теории относительности это предположение лишено физического смысла. Если мы от него откажемся, то появление добавочного члена станет вполне понятным. Правда, можно было бы ожидать, что этот добавочный член будет иметь вид $e \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Delta t$, где Δt обозначает интервал времени, пропорциональный длине диполя l , т. е. вид $c_1 \mathbf{p} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ($c_1 =$ коэффициент пропорциональности), а не вид $\mathbf{p} \times \text{rot } \mathbf{E}$. Соотношения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} \text{ и } \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

а также тесная связь, существующая между электрическим и магнитным моментами диполя, указывают, однако, на следующее обстоятельство: в полном выражении для силы, действующей на частицу с моментами \mathbf{p} , \mathbf{m} :

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{p} \times \text{rot } \mathbf{E} + (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{H} + \mathbf{m} \times \text{rot } \mathbf{H}$$

выражение

$$\mathbf{m} \times \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

следует рассматривать как электрический, а выражение

$$\mathbf{p} \times \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{p} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

как магнитный члены, добавляемые к статическим выражениям $(\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}$ и $(\mathbf{m}\nabla)\mathbf{H}$. Заметим, что выражение (51) в точности совпадает с тем, которое вытекает из релятивистской теории „вращающегося“ электрона, развитой в § 9 первого тома. Четырехмерную силу, действующую на такой электрон с электромагнитным моментом $(\mu_{\alpha\beta})$, мы выводили из энергии $U = -\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$ [см. формулу (55а) на стр. 397], т. е. определяли эту силу формулой

$$F_{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} U = +\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\mu_{\beta\gamma} H_{\beta\gamma}), \quad (52)$$

причем дифференцирование относилось только к тензору $H_{\beta\gamma}$. Но если мы считаем, что тензор момента также зависит от координат x_1, x_2, x_3, x_4 , то предыдущую формулу следует очевидно заменить формулой (51). Далее мы показали, что вращательный момент, действующий на вращающийся электрон, может быть представлен антисимметричным тензором $M_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma}$. Соответственно этому для компонент тензора вращательного момента ${}^2M^g$, отнесенного к единице объема и единице времени и характеризующего вращающие силы, которые действуют на молекулу, обладающую электрическим и магнитным моментами, получаем выражение:

$$M_{\alpha\beta}^g = P_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - P_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma}.$$

Поэтому свободные электроны предполагаются лишенными момента, они не могут испытывать вращательного действия; поэтому предыдущая формула определяет полное вращательное действие $M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^g$. Пространственная часть антисимметричного тензора (51а), т. е. собственно-трехмерный вращательный момент, выражается очевидно формулой (24а). Заметим, что тензор $M_{\alpha\beta}$ равен удвоенной антисимметричной части тензора энергии и напряжений (49б). Действительно, так как

$$B_{\gamma\beta} = H_{\gamma\beta} - 4\pi P_{\gamma\beta}$$

имеем

$$M_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta} - \Theta_{\beta\alpha}. \quad (53)$$

Необходимое и достаточное условие возможности расщепления тензора $\Theta_{\alpha\beta}$ на две части, соответствующие связанным и свободным электронам — или вернее, электромагнитным моментам и зарядам ионов, — заключается согласно формуле (51) в следующем: сумма $-\frac{1}{2} P_{\beta\gamma} dH_{\beta\gamma}$, которая может быть определена как элементарная работа dL_g , совершаемая при бесконечно малом изменении напряженности поля, должна быть полным дифференциалом, т. е. дифференциалом некоторой функции величин $H_{\beta\gamma}$. Обозначая эту функцию через Θ^g , будем иметь:

$$-dL_g = \frac{1}{2} P_{\beta\gamma} dH_{\beta\gamma} = \sum_{i=1}^3 (P_i dE_i + M_i dH_k) = d\Theta^g, \quad (54)$$

т. е.

$$\frac{\partial P_{\beta\gamma}}{\partial H_{\alpha\tau}} = \frac{\partial P_{\sigma\tau}}{\partial H_{\beta\gamma}} \quad (54a)$$

или в трехмерных обозначениях:

$$\frac{\partial P_i}{\partial E_k} = \frac{\partial P_k}{\partial E_i}, \quad \frac{\partial M_i}{\partial H_k} = \frac{\partial M_k}{\partial H_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial H_k} = \frac{\partial M_k}{\partial E_i}. \quad (54b)$$

Первые две группы этих уравнений нам уже знакомы. Третья группа появляется, когда электрическая поляризация зависит также от напряженности магнитного поля, или наоборот — магнитное поле зависит от поляризации, как это например имеет место в случае движущихся тел. Предположим, что величины $P_{\beta\gamma}$ выражаются линейно через H_σ формулами

$$P_{\beta\gamma} = \chi_{\beta\gamma; \sigma\tau} H_{\sigma\tau}; \quad (55)$$

тогда из формулы (52а) выводим следующие свойства симметрии „тензора восприимчивости“ χ ;

$$\chi_{\beta\gamma; \sigma\tau} = \chi_{\sigma\tau; \beta\gamma}. \quad (55a)$$

Если эти условия выполняются для покоящегося тела, то вследствие своей инвариантности по отношению к преобразованиям Лоренца они должны быть справедливы и для тела, движущегося прямолинейно и равномерно. В случае гармонических колебательных процессов эти условия симметрии могут быть заменены несколько более общими эрмитовыми условиями:

$$\chi_{\beta\gamma; \sigma\tau} = \chi_{\sigma\tau; \beta\gamma}^*. \quad (55b)$$

Из формул (54) и (55) следует:

$$\Theta_g = \frac{1}{4} P_{\beta\gamma} H_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) \quad (56)$$

и

$$F_\alpha^g = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Theta^g = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \Theta_{\alpha\beta}^g, \quad (56a)$$

где

$$\Theta_{\alpha\beta}^g = \delta_{\alpha\beta} \cdot \Theta^g \quad (56b)$$

[ср. формулу (23а), § 3]. Следовательно величина Θ^g тождественна с энергией ξ_g . Таким образом в нашем случае, согласно формуле (49b) и принимая во внимание формулы

$$H^2 - E^2 = \frac{1}{2} H_{\sigma\tau} H_{\sigma\tau}; \quad B_\sigma = H_\sigma - 4\pi P_\sigma$$

и

$$\frac{1}{2} B_\sigma H_\sigma = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \mathbf{D}$$

получаем для компонент тензора энергии и напряжений $\Theta_{\alpha\beta}^g = = \Theta_{\alpha\beta} - \Theta_{\alpha\beta}^g$, соответствующего свободным электронам, т. е. за рядом ионов, следующие выражения:

$$\Theta_{\alpha\beta}^g = \delta_{\alpha\beta} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} + \frac{H_{\alpha\tau} B_{\tau\beta}}{4\pi}, \quad (57)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \epsilon^f &= \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi}; \quad K^f = K; \quad g^f = g; \\ T_n^f &= \frac{1}{4\pi} \left[n \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} - H_n \mathbf{B} = D_n \mathbf{E} \right]. \end{aligned} \quad (57a)$$

Обе части Θ совершенно симметричны относительно электрических и магнитных величин. Но при их сложении эта симметрия частично нарушается вследствие противоположных знаков в выражениях:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

и

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M}.$$

3. Релятивистское исследование поправок Лоренца. До сих пор мы не принимали во внимание различия между полной и эффективной напряженностями поля. Если мы учтем это различие, в соответствии с теорией относительности, то при

вычислении коэффициентов $s^e = \frac{4\pi}{3}$ и $s^m = \frac{8\pi}{3}$ в формулах $E_{\text{eig}}^0 = -s^e \mathbf{p}$ и $H_{\text{eig}}^0 = +s^e \mathbf{M}$ мы также натолкнемся на противоречие с результатами трехмерного расчета, приведенного в § 4.

Формулы эти могут быть совместны с релятивистским принципом инвариантности только в том случае, если оба коэффициента имеют одно и то же значение s .

Тогда обе формулы можно объединить в одно общее четырехмерное соотношение:

$$(H_{\alpha\beta}^{\text{eig}})^0 = s P_{\alpha\beta}, \quad (58)$$

являющееся единственным линейным соотношением между антисимметричными тензорами, выражаемым инвариантными скалярными величинами. В общем случае асимметричных тензоров можно было бы добавить к правой части формулы (58) тензор вида

$$\tau \delta_{\alpha\beta} \sum_1^4 P_{\gamma\gamma}$$

с другим численным коэффициентом τ , не зависящим от s .

В нашем же случае компоненты $P_{\gamma\gamma}$ тождественно равны нулю. Понятно, что на основании одного лишь принципа инвариантности еще ничего нельзя сказать о величине коэффициента s . Естественным, казалось бы, предположить, что он равен среднему из двух ранее найденных значений:

$$s^e = \frac{4\pi}{3} \quad \text{и} \quad s^m = \frac{8\pi}{3},$$

т. е.

$$s = 2\pi. \quad (58a)$$

Но мы уже указывали в § 4, что если взять для средней плотности тока \mathbf{j}_{eig} значение $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ и соответственно определить градиент \mathbf{H}_{eig} в каком-либо направлении по формуле (30), т. е. по закону Био — Савара, то все численные значения коэффициентов s^e и s^m , отличные от вышеприведенных (т. е. лоренцовых) значений, окажутся в противоречии с уравнениями поля:

$$\text{rot } \mathbf{H}_{\text{eig}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{eig}}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}_{\text{eig}}; \quad \text{rot } \mathbf{E}_{\text{eig}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_{\text{eig}}}{\partial t} = 0.$$

Мы не будем здесь разбирать этот вопрос более подробно, потому что рассуждения, которые привели нас к формуле (30) и последующим формулам, были грубо приближенными, и мы не сможем их провести строже, не имея более точных сведений о строении и механике отдельных атомов и молекул. Заметим только, что при более точном расчете следовало бы учесть также и поверхностный эффект, обнаруженный нами при рассмотрении работы L' и отвечающий добавочному члену

$$- \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}).$$

Если вышеупомянутое противоречие устранено, то не трудно определить изменение энергии, связанное с введением эффективных напряженностей поля. Полные напряженности поля $H_{\alpha\beta}$ в формуле (54) надо заменить эффективными напряженностями $H_{\alpha\beta} - sP_{\alpha\beta}$. (Для случая свободных электронов обе величины тождественно равны.)

При этом оказывается, что к скаляру энергии Θ^g , если только он вообще существует, надо прибавить величину:

$$\Delta\Theta^g = - \frac{s}{4} P_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} = + \frac{s}{2} (P^2 - M^2). \quad (59)$$

Таким образом, согласно формуле (50а) имеем:

$$\xi = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} s (P^2 - M^2). \quad (59a)$$

Для вектора \mathbf{g} получается та же поправка, что и для ξ (только разделенная на c). Но мы не можем сделать никаких заключений относительно поправок к двум другим величинам; \mathbf{K} и 2T , потому что формулу

$$(H_{\alpha\beta}^{ef})^0 = H_{\alpha\beta} - sP_{\alpha\beta}$$

нельзя дифференцировать,

§ 7. Электромагнитная энергия и термодинамика.

1. Общие принципы и основные величины. Физический смысл энергии связанных электронов. Общая электронная теория, развитая в т. I, позволяет свести все явления в материальных телах к явлениям электромагнитным. Макроскопическая же электродинамика материальных тел в противоположность электронной теории рассматривает исключительно те явления, при которых средние в пространстве и во времени значения плотностей электричества, поляризации, напряженностей поля и т. д. отличны от нуля. Но эти электромагнитные в макроскопическом смысле явления, тесно связаны с другими явлениями—химическими, тепловыми и механическими—и часто могут быть поняты только в связи с ними. Самый простой и пожалуй, наиболее важный пример такой связи это рассмотренное уже выше превращение электромагнитной энергии в тепло.

Выделение тепла за счет электромагнитной энергии почти всегда наблюдается в проводящих телах и в непроводниках при прохождении электрического тока или при затухании колебаний связанных электронов. Исключением является только случай чисто статических явлений, т. е. постоянных во времени электрических и магнитных полей в совершенных изоляторах, не содержащих ни свободных электронов, ни подвижных ионов. Но и в этом случае существуют чрезвычайно важные соотношения между величинами электромагнитными и тепловыми; их можно исследовать с помощью общих термодинамических методов. Соотношения этого рода играют значительную роль при различных квази-статических процессах, которые в термодинамике называются „обратимыми“ процессами. К ним относятся, как известно, все достаточно медленные изменения состояния, которые можно рассматривать как ряд последовательных состояний равновесия; следовательно в них не входит время в явном виде.

Чтобы сформулировать эти соотношения, мы должны ввести еще две тепловые величины: абсолютную температуру T и энтропию S , которую мы будем относить к единице объема рассматриваемого тела (удельный объем мы пока положим постоянным). Заметим, что с точки зрения энергии, как функции электромагнитных и тепловых величин, энтропия соответствует поляризациям, а температура—напряженностям поля.

Далее мы предположим, что внутренняя энергия ξ , (в единице объема), соответствующая связанным электронам и определяемая выражением

$$d\xi = P \cdot dE + M \cdot dH$$

существует на самом деле, т. е. что при данной температуре выполнены условия (52b). Прежде мы имели

дело только с электромагнитными величинами, и поэтому предположение о постоянстве температуры нами не подчеркивалось. Но если поляризации хотя бы частично определяются ориентацией молекул с постоянными дипольными моментами, то они зависят не только от напряженностей поля, но и от температуры, и поэтому при выводе условий интегрируемости для бесконечно малой работы $dL_g = -d\xi_g$ (отнесенной к единице объема) нужно заранее предположить, что температура все время остается постоянной.

Можно было бы вместо величины ξ_g рассматривать полную плотность энергии ξ . Но последняя связана не с самим рассматриваемым телом, а с его электромагнитным полем, и поэтому часть ее (часто большую) следует считать заключенной вне тела. Энергия же ξ_g , если она существует, определяется электрической и магнитной поляризациями в соответствующей точке, следовательно, она заключена в самом теле, подобно энтропии S , и ее следует считать свойством самого тела, а не его поля.

Напомним, что бесконечно-малое изменение внутренней энергии U однородного тела, подвергнутого со всех сторон давлению p и занимающего объем V , выражается, согласно основным законам термодинамики, уравнением:

$$dU = T dS - p dV. \quad (60)$$

Здесь $T dS$ означает тепло, сообщаемое телу, а $-p dV$ — работу, совершаемую силами внешнего давления, стремящимися при $p > 0$ уменьшить его объем.

Введем вместо U свободную энергию тела

$$F = U - TS,$$

или его термодинамический потенциал

$$\Phi = F + pV = U - TS + pV;$$

тогда вместо формулы (60) будем иметь уравнения

$$dF = -S dT - p dV \quad (60a)$$

или соответственно

$$d\Phi = -S dT + V dp. \quad (60b)$$

Будем считать объем тела постоянным и равным 1, и вместо сил внешнего давления введем в рассмотрение эффективные электрические силы, стремящиеся увеличить электрический момент единицы объема P . Работа этих сил при бесконечно малом изменении P выражается, как известно, скалярным произведением $E_{\text{eff}} \cdot dP$ (ср. § 18). Таким образом объему V в уравнении (60) соответствует поляризация P , и отрицательному давлению $-p$ — эффективная напряженность электрического поля $E' \equiv E_{\text{eff}}$. Следовательно, это уравнение надо переписать в виде:

$$dU = T dS + E' dP. \quad (61)$$

Точно также, вместо уравнений (60а) и (60b) получаем

$$dF = -S dT + E' dP \quad (61a)$$

и

$$d\Phi = -S dT - P \cdot dE', \quad (61b)$$

где

$$F = U - TS$$

и

$$\Phi = F - E' \cdot P. \quad (61c)$$

При постоянной температуре ($dT=0$) и $H=M=0$, dF совпадает с величиной $-d\xi_p$, определяемой формулой (18), а $d\Phi$ — с величиной $-d\xi_p$, определяемой формулой (52). Отрицательные знаки в обоих случаях объясняются тем, что мы приравняли работу электрических сил убыванию, а не возрастанию электрической энергии, в противоположность принятому в термодинамике обозначению для случая внешних сил. Мы следовательно определили электрическую энергию не как внутреннюю энергию самого тела, а как внешнюю энергию действующих на него сил. Уравнение (61) означает, что при адиабатических процессах эта внешняя электрическая энергия, благодаря совершаемой работе, переходит во внутреннюю энергию тела. При изотермических процессах она переходит, согласно уравнению (61а), в его свободную энергию. Соответственно этому величина $P \cdot dE'$, которую мы в § 6 пытались толковать как увеличение внутренней энергии, в действительности является уменьшением термодинамического потенциала при постоянной температуре. Условия существования функций

$$\int_0^E E \cdot dP \quad \text{и} \quad - \int_0^E P \cdot dE$$

могут быть сформулированы вообще только для изотермических процессов. Таким образом, эти интегралы, или вернее интеграл $\int E' \cdot dP$ должен быть определен не как внутренняя энергия тела (в единице объема), а как внешняя работа, совершаемая действующими на него электрическими силами. При процессах не изотермических, значения стоящих выше интегралов не определяются однозначно пределами интегрирования, т. е. начальным и конечным состояниями, поскольку P зависит не только от E , но также и от температуры.

Аналогичным образом интегралы

$$\int H' dM \quad \text{и} \quad - \int M dH' \quad (H' = H_{eff})$$

могут быть определены как работа магнитных сил, действующих на единицу объема тела. При этом получаем для полных значений величин F , Φ и внутренней энергии U , отнесенных к единице объема, уравнения:

$$dU = T dS + E' dP + H' dM, \quad (62)$$

$$dF = -S dT + E' dP + H' dM, \quad (62a)$$

$$d\Phi = -S dT - P dE' - M dH' = -S dT - d\xi_y, \quad (62b)$$

где

$$F = U - TS \quad \text{и} \quad \Phi = F - E' \cdot P - H' \cdot M. \quad (62c)$$

Величина ξ_y в уравнении (62b) определяется из формулы (52).

Выражения (62a) и (62b) совершенно равнозначны с точки зрения определяемых ими термодинамических соотношений, так как разность между ними равна полному дифференциалу. По той же причине эффективные напряженности поля можно заменить в этих формулах полными напряженностями, или же соответствующими им индукциями, причем U , F и Φ будут уже несколько отличны от первоначальных функций того же типа. Положим например:

$$E' = E + s_e P, \quad H' = H + s_m M,$$

тогда согласно уравнениям (62), (62a), (62b) будем иметь

$$dU' = T dS + E dP + H dM,$$

$$dF' = -S dT + E \cdot dP + H dM,$$

$$d\Phi' = -S dT - P dE - M dH,$$

где

$$U' = U - \frac{1}{2} s_e P^2 - \frac{1}{2} s_m M^2, \quad F' = F - \frac{1}{2} s_e P^2 - \frac{1}{2} s_m M^2$$

и

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{2} s_e P^2 + \frac{1}{2} s_m M^2.$$

2. Основные термодинамические соотношения для случая явлений, связанных с электрической и магнитной поляризацией. Мы ограничимся для простоты случаем покоящихся изотропных тел и будем считать поляризации скалярными функциями соответствующих напряженностей поля или индукций. Вопрос о виде этих функций оставим открытым. Условия интегрируемости дифференциальных выражений:

$$-P dE - M dH, \quad E' dP - M dH', \quad E dP - H dM$$

и т. д. выполняются при этом (при $T = \text{const}$ или $S = \text{const}$) сами собой и надо обратить внимание только на условия интегрируемости суммы их с $T dS$ или с $-S dT$.

Введем в качестве независимых переменных величины T , E , H ; тогда эти чисто термодинамические условия будут иметь вид:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{T, H} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{E, H}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial H} \right)_{T, E} = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{E, H}. \quad (63)$$

Эти соотношения связывают тепловое действие электрических и магнитных сил с температурным коэффициентом соответствующих поляризации.

Величина $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T$ представляет собой количество тепла (деленное на T), которое требуется сообщить единице объема рассматриваемого тела при изотермическом изменении напряженности электрического поля. Таким же образом получается ряд других соотношений того же рода, например:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H'}\right)_{T, E} = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E, H'}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_{T, E} = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E, B}$$

и т. д. При этом в виду равенства

$$dH' = dB + s_m dM$$

имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E, B} &= \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E, H'} + \left(\frac{\partial M}{\partial H'}\right)_{E, T} \cdot \left(\frac{\partial H'}{\partial T}\right)_{E, B} = \\ &= \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E, H'} + s_m \left(\frac{\partial M}{\partial H'}\right)_{E, T} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E, B}, \end{aligned}$$

т. е. если опустить индексы E, M :

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H'}}{1 - s_m \left(\frac{\partial M}{\partial H'}\right)_T}.$$

Термоэлектрические и термомагнитные соотношения совершенно аналогичны друг другу; поэтому мы рассмотрим только последние, положив $P = E = 0$. Напомним, что магнитная индукция совпадает обычно с напряженностью внешнего поля, в котором находится рассматриваемое тело (ср. гл. I, § 3). Обозначим удельную теплоемкость при постоянных значениях B или M соответственно через c_B и c_M . Притом согласно уравнению (62) получим:

$$c_B = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B = c_M - H' \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B,$$

т. е.

$$c_B = c_M - \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(BM + \frac{1}{2} s_m M^2 \right) \right]_B. \quad (63a)$$

Далее, дифференцирование выражения (63) по T (при замене H через B) дает:

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial S}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B} \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{c_B}{T} \right)$$

и следовательно

$$\frac{\partial c_B}{\partial B} = T \left(\frac{\partial^2 M}{\partial T^2} \right)_B. \quad (63b)$$

Соотношения эти особенно важны в случае ферромагнитных тел, отличающихся ниже определенной „критической температуры“ (температура Кюри) необычайно большой восприимчивостью $\left(\frac{M}{B}\right)$

для малых индукций (B). Вблизи этой критической точки восприимчивость резко падает. Выше или ниже критической температуры намагничивание M стремится при очень больших напряженностях полей (внешнего B или полного H) к некоторому максимальному значению M_{\max} , которое не зависит ни от температуры, ни от напряженности поля.

Однако как раз к ферромагнитным телам вышеприведенные соотношения, строго говоря, неприменимы, так как эти тела отличаются от обычных (слабо магнитных) также еще и тем, что их магнитная поляризация и при постоянной температуре не является однозначной функцией B или H , так что выражение $M dH$ не является полным дифференциалом.

M для этих тел зависит не только от значения B в данный момент, но в известной мере и от „истории“ изменения этой величины, т. е. от того, как, каким путем внешняя напряженность достигла данного своего значения. Явление это называется магнитным гистерезисом. Оно непосредственно связано с явлением „остаточного намагничивания“. Явления эти заключаются в следующем: намагнитим сильным внешним полем ферромагнитное тело, первоначально ненамагниченное, а затем уничтожим это внешнее поле. Тогда изменение M в зависимости от B изобразится кривой OAO_1 на рис. 3. Отрезок OO_1 и представляет собой постоянное намагничивание. Для уничтожения этого, лучше сказать, остаточного намагничивания нужно приложить достаточно сильное внешнее поле противоположного направления. Его напряженность (OC') определяет так называемую „коэрцитивную силу“. При устранении этого поля тело остается ненамагниченным. Если же довести поле снова до первоначальной величины $OD' = OD$, то намагничивание возрастает не по пунктирной кривой OA' , симметричной с OA , а по кривой $C'A'$. При изменении напряженности поля от значения OD' до OD намагничивание меняется по кривой $A'O_2CA$, симметричной с $AO_1C'A'$ (по отношению к нулевой точке). Петля, образованная обеими кривыми, называется петлей гистерезиса. У так называемых „мягко-

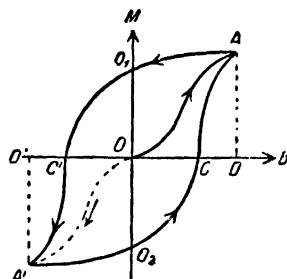


Рис. 3.

магнитных тел" она очень узка, так что M можно приближенно считать определенной однозначной функцией B или H . Напротив, у „жестко-магнитных“ тел M вообще не является функцией B или H . Таким образом, в этом случае не может быть и речи о магнитной энергии (или свободной „энергии“ и „потенциале“) в том смысле, в каком о ней говорилось в начале этого параграфа.

Величина поверхности, заключенной внутри петли гистерезиса, т. е. интеграл $\oint M dB$, очевидно представляет собой работу, совершаемую в единице объема тела электрическими силами индукции при соответствующем круговом процессе. Работа эта может быть выражена в виде $-\oint B dM$ или $\oint M dH = -\oint HdM$, причем ее можно рассматривать как работу „магнитных сил“ (которые при этом должны действовать на фиктивные магнитные полюсы). Она должна, понятно, совершаться за счет внешнего источника энергии, как и работа сил, действующих на свободные электроны проводящего тела, если последнее в конце концов возвращается в первоначальное состояние. В обоих случаях внешняя энергия должна, хотя и различными путями, перейти в тепловую энергию, развивающуюся в соответствующих местах металлического тела. Для ферромагнитных тел эффект этот — так называемая „теплота гистерезиса“ — в случае слабых гармонически-колеблющихся магнитных полей может быть выражен сдвигом фазы намагничивания (относительно индукции B или напряженности поля H), и его можно считать теплом затухания, возникающим вследствие естественного затухания колебаний электрических или магнитных осцилляторов. Следует однако отметить, что аналогия между обоими эффектами (а также между ними и Джоулевым теплом) носит чисто формальный характер; причины всех их совершенно различны.

В случае явлений электрической поляризации в постоянном электростатическом поле мы получаем „электрическое“ соотношение, аналогичное уравнению (63b):

$$\frac{\partial c_E}{\partial E} = T \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \quad (63c)$$

Можно, кроме этих соотношений, вывести ряд других соотношений подобного же рода, выбирая в качестве независимых переменных величины P , M и исходя из дифференциальных выражений для соответствующих функций (энергии или потенциала). Мы не будем здесь разбирать этот вопрос более подробно.

До сих пор мы касались только непроводников. Однако приведенные выше результаты можно обобщить без всяких изменений на случай, когда все, или некоторые из рассматриваемых тел обладают конечной проводимостью. Но если мы захотим иметь дело не

с величиной ξ_r (при данной температуре), а с соответствующей свободным электронам величиной ξ_r , то перед нами встанет следующая трудность. Энергия ξ_r , если она вообще существует, должна быть локализована в самом теле, энергия же ξ_r связана не с телом, а с его электромагнитным полем, так как в общем случае она отлична от нуля и вне тела (при $P = M = 0$). Объясняется это, как уже указывалось, тем, что в проводящих телах происходит необратимое выделение тепла, причем источником этой тепловой энергии служит внешнее электромагнитное поле, из которого она постоянно притекает через поверхность тела в виде электромагнитной энергии; интенсивность ее потока определяется вектором

$K_r = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Поэтому для энергии ξ_r , соответствующей свобод-

ным электронам, оказывается невозможным вывести какие-либо термодинамические соотношения, подобные предыдущим.

3. Термодинамические соотношения для контактных явлений, зависящих от свободных электронов. Свободные электроны и свободно движущиеся ионы могут при соприкосновении двух проводников вызвать появление добавочной поверхностной энергии. Эти электроны и ионы образуют на границе электрические двойные слои. Простые поверхностные слои этого рода мы уже исследовали в § 2. Однако отвечающую им энергию нельзя было считать поверхностной, т. е. локализовать на поверхности. С точки зрения термодинамики они также не представляют интереса, так как их плотность не связана с температурой и в состоянии равновесия зависит только от результирующего заряда и формы тела. Двойные слои, напротив, не образуют внешнего поля, или же если образуют, то лишь очень слабое, так что их энергия может считаться поверхностной.

Двойные слои характеризуются своим электрическим моментом, отнесенным к единице поверхности, или соответствующим скачком потенциала φ , который как известно, равен произведению момента на 4π . Этот скачок потенциала отвечает добавочной работе $dL = \varphi de$, совершаемой электростатическими силами при переходе количества электричества de через слой в положительном направлении (т. е. в направлении падения потенциала). Обозначим через e полное количество электричества, перешедшее через единицу поверхности слоя из тела a в тело b в положительном направлении. Вообще говоря, потенциал φ следует считать функцией e и температуры (в случае двух металлических тел, не содержащих подвижных ионов, φ зависит только от температуры). Введем еще энтропию s , отнесенную к единице поверхности; тогда получим следующее уравнение для изменения свободной энергии ψ (на единицу поверхности):

$$d\psi = -s dT - \varphi de \quad (64)$$

[ср. (60a)]. Отсюда получается соотношение

$$\frac{\partial s}{\partial e} = \frac{\partial \varphi}{\partial T}$$

или

$$q = T \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad (64a)$$

где q — количество тепла, выделяющегося в двойном слое при прохождении через него количества электричества $e=1$ (тепло это должно конечно быть отведено от слоя, чтобы температура его оставалась постоянной). Это — так называемое тепло Пельтье. Оно отвечает — хотя и не вполне — „скрытой теплоте поляризации“, определяемой из формулы (63). Мы получим величину, вполне аналогичную теплу Пельтье, если вместо E или H возьмем в качестве независимой переменной поляризацию P (или M). Обычная энергия w , соответствующая величине ψ , вычисляется по формуле

$$w = \psi + Ts,$$

или, если подставить сюда выражение $s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}$, получаемое из формулы (64),

$$w = \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (64b)$$

Заметим, что уменьшение ψ при изотермическом прохождении единицы электричества равно φ . Следовательно, соответствующее уменьшение w равно:

$$\Delta w = \varphi - T \frac{\partial \varphi}{\partial T}. \quad (64c)$$

Если прохождение тока сопровождается химическим превращением (а это бывает в случае, когда ток обусловлен ионами), можно определить величину Δw как соответствующую теплоту реакции и найти ее непосредственно, пользуясь обычными термодинамическими методами. Она связана с теплом Пельтье соотношением $q = \varphi - \Delta w$.

4. Термодинамика электромагнитного излучения. В заключение мы должны еще показать, как распространяется термодинамический метод исследования на случай, совершенно чуждый классической механике и основанному на ней учению о теплоте; это случай представления электромагнитной энергии в виде величины, связанной не с материальными телами, а с их электромагнитным полем, и локализованной в этом поле.

Для такого распространения термодинамического метода необходимо, очевидно, считать энтропию также величиной, распределенной в пространстве и связанной с электро-

магнитным полем. Далее, надо приписать последнему некоторую температуру; в случае термодинамического равновесия она должна иметь одно и то же значение для всей рассматриваемой области (если не для всего пространства). При этом обычную тепловую энергию следовало бы рассматривать как энергию электромагнитного поля (это впрочем должно относиться и ко всем вообще неэлектромагнитным формам энергии). Другими словами, надо было бы присоединить к макроскопическому полю то поле, которое с микроскопической точки зрения является носителем тепловой энергии; оно не поддается описанию с макроскопической точки зрения.

Эту весьма радикальную программу можно однако несколько упростить и ограничить путем компромисса с обычными механическими представлениями. Такой компромисс можно осуществить с помощью приведенного в томе I (стр. 227) разложения полной электромагнитной энергии на две части: $W^{(0)} + W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, причем первая часть определяется положением и скоростью электронов, а вторая — их ускорением. Первая часть соответствует обычной механической энергии тел и приближенно может быть локализована в самих телах. Вторая же часть представляет собой добавочную немеханическую энергию поля. Таким образом наша программа коснется только этой энергии $W^{(2)}$, которую принято называть „лучистой энергией“; в отношении же энергии $W^{(0)} + W^{(1)}$ ничто не изменится.

Итак, мы имеем поле излучения, находящееся в термодинамическом равновесии с системой материальных тел и обуславливающее — хотя бы частично — обмен энергии между ними; припишем ему температуру, равную температуре этих тел, и энтропию $S^{(2)}$, распределенную с некоторой плотностью. Далее, введем в рассмотрение механическое действие, производимое полем излучения на материальные тела. Это механическое действие сводится, как известно, к давлению излучения, величина которого определяется формулой:

$$T_{nn} = \xi \cos^2 \theta \quad (65)$$

(т. I, стр. 239). Здесь T_{nn} означает нормальную составляющую тензора напряжений, характеризующую элемент поля излучения — элемент этот представляет собой пучок света (или волну), образующий угол θ с нормалью к поверхности. Заметим, что по формуле (65) световой луч, падающий в некотором направлении, производит то же давление, что и луч равной интенсивности, но идущий в обратном направлении. Наше поле излучения представляется в виде множества таких падающих и испускаемых лучей (или плоских волн), равномерно распределенных по всем направлениям и не связанных друг с другом какими-либо постоянными соотношениями фаз. Результирующее среднее световое давление p на единицу поверхности какого-либо тела вычислится по формуле (65), если под ξ в ней понимать результирующую

среднюю плотность энергии, а вместо $\cos^2\theta$ подставить его среднее значение $\frac{1}{3}$. Следовательно имеем:

$$p = \frac{1}{3} \xi. \quad (65a)$$

Тангенциальные силы при этом не учитываются, так как их среднее значение очевидно обращается в нуль.

Итак, мы видим, что „пустотное излучение“, заключенное в полости с объемом V , ограниченной твердыми материальными стенками, ведет себя подобно обыкновенному газу. Отличается оно от него лишь тем, что давление газа равно не одной трети средней плотности энергии, а двум третям — согласно известной кинетической формуле:

$$p = \frac{1}{3} Nm\bar{v}^2.$$

Здесь N — число молекул в единице объема, m — их масса и v — скорость; кинетическая энергия единицы объема выражается по классической механике формулой $\frac{1}{2} Nm\bar{v}^2$.

Для последовательного проведения аналогии между полем излучения и материальным газом надо впрочем учесть то обстоятельство, что частицы, соответствующие лучам света, должны двигаться со скоростью c (ср. т. I, стр. 225). К этим критическим скоростям и скоростям, близким к ним, классическая механика уже не применима и должна быть заменена механикой релятивистской. Частица с покоящейся массой m_0 , движущаяся со скоростью v , согласно этой механике, обладает кинетической энергией

$$c^2 m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = c^2 (m - m_0)$$

(т. I, гл. 10, § 1). В случае частиц, обладающих скоростью света, покоящаяся масса должна быть равна нулю. При этом для кинетической энергии получаем выражение mc^2 , т. е. mv^3 ($v = c$) вместо классического $\frac{1}{2} mv^2$. Приведенная выше классическая формула для давления газа остается справедливой и в этом случае, так как газовое давление определяется не энергией частиц, а произведением их количества движения на скорость; количество же движения выражается в релятивистской механике так же, как и в классической, произведением mv . Стало быть, давление газа, аналогичного полю излучения, выразится той же формулой (65а).

Правильнее было бы пустотное излучение, т. е. поле излу-

чения, заключенное в ограниченной материальным телом полости, считать не газом, а паром, находящимся в равновесии со „световой материей“, содержащейся в материальных телах. Действительно, плотность энергии ξ и плотность энтропии S пустотного излучения не зависит от объема V полости и должна, очевидно, зависеть только от температуры так же, как и в случае равновесия пара какого-либо вещества с его твердой или жидкой фазой.

Сделав эти предварительные замечания, мы напишем основное термодинамическое уравнение для рассматриваемого случая в обычной форме:

$$dW = T dS - p dV,$$

причем энергия W и энтропия S имеют в объеме V значения:

$$W = \xi V; \quad S = sV.$$

Следовательно имеем:

$$V d\xi + \xi dV = TV ds + Ts dV - p dV,$$

или, так как ξ и s зависят только от T :

$$d\xi = T ds \tag{66}$$

и

$$\xi = Ts - p,$$

т. е. по формуле (65а):

$$\xi = \frac{3}{4} Ts. \tag{66a}$$

Полагая здесь, согласно (66)

$$T = \frac{d\xi}{ds},$$

получаем

$$3 \frac{d\xi}{\xi} = 4 \frac{ds}{s},$$

т. е.

$$\xi^3 = \text{const} \cdot s^4,$$

и следовательно по формуле (66а)

$$\xi = \sigma T^4, \tag{66b}$$

где σ — коэффициент пропорциональности. Это — известная формула Стефана — Больцмана. Формула эта может рассматриваться как частный случай общей формулы для давления насыщенного пара, примененной к веществу, скрытая теплота испарения которого равна нулю при $T=0$.

Вместо энергии W введем свободную энергию согласно уравнению:

$$dF = -S dT - p dV,$$

Тогда будем иметь соотношение:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T,$$

которое в случае обычного процесса испарения жидкости или твердого тела может быть переписано в виде:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(V_1 - V_2)}$$

(формула Клаузиуса—Клапейрона; r —теплота испарения единицы массы, $V_2 - V_1$ —соответствующее увеличение объема). В нашем случае (испарение излучения из недр материального тела, ограничивающего полость), очевидно, имеем:

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_T = \frac{1}{T} \left[\frac{dW + p dV}{dV} \right]_T = \frac{\xi + p}{T},$$

откуда следует:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\xi + p}{T}$$

или, по формуле (65а):

$$\frac{d\xi}{dT} = \frac{4\xi}{T}.$$

Таким образом мы снова приходим к формуле (66b).

§ 8. Электромагнитные силы и теория упругости.

1. Электро- и магнетострикция в газообразных и жидких телах. При выводе соотношений (62), (62а), (62b) мы считали объем тела постоянным. Теперь мы отбросим это предположение и рассмотрим различные упругие деформации тела, связанные с электромагнитными силами.

Эти деформации могут быть сведены в простейшем случае, например, в случае газообразных и жидких тел, к изменению удельного объема (или плотности). Отнесем величины S , F , Φ и т. д. не к единице объема (что допустимо лишь при постоянстве объема), а к единице массы, т. е. к удельному объему v (переменному); мы сможем тогда учитывать изменение объема прибавлением к первоначальным выражениям для dF или $d\Phi$ произведений— $p dv$ или $v dp$ (смотря по тому, имеем ли мы дело со свободной энергией или с термодинамическим потенциалом). Поляризации P и M должны при этом конечно умножаться на v . Мы рассматриваем случай изотропных тел, поэтому величины P , M , E , H можно считать скалярами. Итак, имеем:

$$d\Phi = -S dT - Pv dE - Mv dH + v dp. \quad (67)$$

Отсюда при $T = \text{const}$ и $M = H = 0$ получаем соотношение:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial E}\right)_p = - \left[\frac{\partial (Pv)}{\partial p}\right]_E = -E \left[\frac{\partial (\kappa v)}{\partial p}\right]_E, \quad (67a)$$

где $\kappa = \frac{P}{E}$ — электрическая восприимчивость. Полное изменение v при одновременном изменении E и p :

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial E}\right)_p dE + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_E dp$$

может следовательно быть написано в виде:

$$dv = - \left[\frac{\partial (\kappa v)}{\partial p}\right]_E E dE + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_E dp, \quad (68)$$

или, если обозначить для краткости

$$\kappa_1 = \left(\frac{\partial \kappa}{\partial p}\right)_E, \quad (68a)$$

то

$$\frac{dv}{v} = -\kappa_1 E dE + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_E (dp - \kappa E dE). \quad (68b)$$

Состояние равновесия жидкости или газа определяется основным уравнением гидростатики:

$$\nabla p = \mathbf{F}, \quad (69)$$

где \mathbf{F} означает внешнюю силу, отнесенную к единице объема V в нашем случае

$$\mathbf{F} = (P\nabla)\mathbf{E} + \mathbf{P} \times \text{rot} \mathbf{E} = \kappa \nabla \left(\frac{E^2}{2}\right) = \kappa E \nabla E,$$

так что условие равновесия (69) принимает вид:

$$\nabla p = \kappa E \nabla E = \kappa \nabla \frac{E^2}{2}. \quad (69a)$$

Отсюда следует, что при квазистатическом изменении p и E

$$dp = \kappa E dE,$$

так что, согласно формуле (68b), получаем уравнение

$$\frac{dv}{v} = -\kappa_1 E dE. \quad (69b)$$

Это уравнение характеризует явление так называемой электрострикции, т. е. изменения удельного объема (или плотности) тела под действием электрического поля. В случае газа, электрическая восприимчивость строго пропорциональна плот-

ности $\left(\frac{1}{v}\right)$. Имеем следовательно $\kappa v = \text{const} = \kappa_0$ и из уравнения $p v = RT$ (где R — газовая постоянная и T — абсолютная температура) находим:

$$\kappa = \frac{\kappa_0 p}{RT}, \quad \kappa_1 = \frac{\kappa_0}{RT}.$$

Интегрирование уравнения (69а) дает

$$\lg v = -\frac{\kappa_0 E^2}{2RT} + \text{const} \quad (70)$$

или

$$\lg p = +\frac{\kappa_0 E^2}{2RT} + \text{const}. \quad (70a)$$

В случае жидкостей коэффициент κ_1 можно считать постоянным, поскольку он не зависит от напряженности поля, и для малых изменений объема получаем:

$$\frac{v - v_0}{v_0} = -\frac{\kappa_1 E^2}{2}. \quad (70b)$$

Если же κ_1 является функцией E , то вместо $\frac{1}{2} \kappa_1 E^2$ в этих формулах следует писать $\int_0^E \kappa_1 E dE$. Заметим, что этот интеграл является производной от электрической „энергии“ $\xi = \int \kappa E dE = \int P dE$ по p (при данной температуре).

Точно такие же результаты получаются и для магнетострикции; для этого надо лишь подставить в предыдущих формулах $H (= \mu B)$ вместо E и $\gamma = \frac{\chi}{\mu}$ вместо κ .

Условие гидростатического равновесия (69) можно написать еще в следующем виде:

$$-\nabla p + \nabla \left(\frac{\kappa E^2}{2} \right) - \frac{E^2}{2} \nabla \kappa = 0. \quad (71)$$

Следовательно можно представить электрические объемные силы в виде всестороннего натяжения (отрицательного давления) с величиной $\frac{-\kappa E^2}{2}$ и добавочных, вернее остаточных сил $\frac{-E^2}{2} \nabla \kappa$; эти остаточные силы отличны от нуля лишь в том случае, если κ является величиной переменной — благо-

даря электрострикции или вследствие зависимости от E . В общем случае можно очевидно положить:

$$\nabla x = x_1 \nabla p + x_2 \nabla E, \quad (71a)$$

где $x_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial E} \right)_p$. Следовательно поверхность жидкости, находя-

щейся в электрическом поле, испытывает натяжение $\frac{x E^2}{2}$, направленное по внешней нормали и независимое от направления электрического поля. Граница двух соприкасающихся жидкостей (или жидкости и газа) с восприимчивостями x^a и x^b подвергается действию перпендикулярной силы натяжения

$$F = n (x^a E^{a2} - x^b E^{b2}). \quad (71b)$$

Напомним, что тангенциальные составляющие обоих напряженностей поля E^a и E^b имеют одинаковое значение, а нормальные составляющие относятся друг к другу как соответствующие диэлектрические постоянные.

2. Основы теории упругости твердых тел. Вышеизложенные результаты не могут быть строго применены к случаю твердых тел, даже если дело касается простого изменения объема изотропного тела. Поэтому этот случай мы должны исследовать особо. Мы займемся им несколько подробнее, так как существуют многочисленные аналогии между теорией упругости твердых тел и теорией электромагнитных сил и напряжений, изложенной в этой главе.

Мы будем трактовать смещения u частиц твердого тела как функции их положений равновесия, характеризуемых соответствующими радиусами-векторами r . Следовательно, вектор $r' = r + u$ представляет собой смещенное положение частицы, занимающей при отсутствии деформации положение r .

Рассмотрим далее относительное смещение двух соседних частиц:

$$r_1 = r \text{ и } r_2 = r + \delta r,$$

т. е. разность

$$\delta u = u_2 - u_1 = u(r + \delta r) - u(r).$$

Это относительное смещение можно представить формулой

$$\delta u = (\delta r \nabla) u \quad (72)$$

или, с помощью тензорных обозначений, опуская знаки суммы для пары равных индексов:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k.$$

Производные $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ образуют асимметричный тензор второго ранга с симметричной частью:

$$a_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (72a)$$

и антисимметричной частью:

$$b_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad (72b)$$

соответствующей очевидно вектору:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}$$

($b_1 = b_{23}$, $b_2 = b_{31}$, $b_3 = b_{12}$, ср. т. I, Введение). Этот вектор определяет бесконечно-малый поворот всего элемента объема, содержащего обе наши точки и поэтому так же, как и абсолютное смещение \mathbf{u} , не имеет существенного значения для теории упругости. Таким образом собственно относительная деформация полностью определяется тензором a_{ik} . Когда оси координат совпадают с осями симметрии этого тензора (что всегда может быть достигнуто поворотом первоначальных осей координат), то отличны от нуля и, вообще говоря, друг от друга одни только его главные составляющие a_{11} , a_{22} , a_{33} . Их можно определить как коэффициенты линейного расширения тела в данной точке в направлении трех координатных осей (главные расширения). Сумма их

$$a_{ii} = \operatorname{div} \mathbf{u}$$

не зависит от выбора координат и определяет относительное объемное расширение $\left(\frac{\Delta v}{v} \right)$.

Упругие силы, вызываемые деформацией, также характеризуются тензором, составляющая которого p_{ik} означает силу, действующую в направлении оси k на поверхность перпендикулярную оси i . Мы считаем эту силу приложенной к единице поверхности, разделяющей тело на две части и действующей со стороны отрицательной части (расположенной с отрицательной стороны оси i) на положительную. Если следовательно величина $p_{11} > 0$, то она представляет собой силу давления „отрицательной“ половины на единицу поверхности положительной части, а если она < 0 , то — силу натяжения.

Представим себе элемент объема тела, имеющий (в равновесном состоянии) вид параллелепипеда с ребрами δx_1 , δx_2 , δx_3 . Сила, действующая на его грани в направлении оси k , выразится очевидно суммой:

$$-\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3,$$

откуда для упругой силы, отнесенной к единице объема, получаем выражение:

$$f_k = -\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i}. \quad (73)$$

(где знак суммирования по индексу i опущен). Это выражение можно вывести и не пользуясь при расчете координатами; для этого надо принять во внимание, что упругую силу, действующую на любую часть рассматриваемого тела,

можно выразить поверхностным интегралом $-\oint p_n dS$ (здесь p_n

обозначает проекцию тензора упругого напряжения 2p на направление внешней нормали; S —относится к недеформированному состоянию), а этот интеграл равен объемному интегралу

$-\int \operatorname{div} {}^2p dV$. Легко убедиться в том, что тензор напряжений p_{ik}

симметричен—подобно тензору деформации a_{ik} .¹

Рассмотрим далее бесконечно малую работу, совершаемую поверхностными силами, действующими на параллелепипед, при бесконечно малом изменении его деформации. Примем для простоты, что координатные оси совпадают с осями симметрии тензора da_{ik} , определяющего добавочную деформацию. Рассматриваемая работа выразится при этом (если не учитывать поворота всего параллелепипеда) суммой

$$-(p_{11} \cdot \delta x_2 \delta x_3 \cdot da_{11} \delta x_1 + p_{22} \delta x_3 \delta x_1 \cdot da_{22} \delta x_2 + p_{33} \delta x_1 \delta x_2 da_{33} \delta x_3),$$

или, так как недиагональные компоненты da_{ik} обращаются в нуль, двойной суммой

$$-p_{ik} da_{ik} \cdot \delta V \quad (\delta V = \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3).$$

Предположим теперь, что существует упругая энергия (или свободная энергия), распределенная по всему телу с некоторой объемной плотностью w . В таком случае мы можем считать нашу работу приращением энергии $w\delta V$ элемента объема δV (вернее его свободной энергией, так как температура предполагается постоянной).

Имеем следовательно:

$$dw = -p_{ik} da_{ik}. \quad (73a)$$

Выражение, стоящее справа, инвариантно относительно любых координатных преобразований и должно поэтому оставаться справедливым для любой ортогональной системы координат. Далее из него следует, что

$$p_{ik} = -\frac{\partial w}{\partial a_{ik}} \quad (73b)$$

и

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial a_{hl}} = \frac{\partial p_{hl}}{\partial a_{ik}}. \quad (73c)$$

¹ Это следует из рассмотрения вращательных сил, действующих на какую-либо часть тела (объема и поверхности). На доказательстве мы здесь останавливаться не будем.

При этом симметрии компонент тензора деформации ($a_{ik} = a_{ki}$) отвечает симметрия компонент тензора напряжений ($p_{ik} = p_{ki}$). По закону Гука эти величины должны быть связаны друг с другом линейными соотношениями вида:

$$-p_{ik} = \lambda_{ik, hl} a_{hl} \quad (74)$$

$$a_{hl} = -\gamma_{ik, hl} p_{ik}. \quad (74a)$$

Коэффициенты пропорциональности λ и γ называются соответственно модулями упругости и коэффициентами упругости данного тела. Между ними существуют очевидно соотношения симметрии:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ki, hl} &= \lambda_{ik, hl} = \lambda_{hl, ik} \\ \gamma_{ki, hl} &= \gamma_{ik, hl} = \gamma_{hl, ik} \end{aligned} \right\} \quad (74b)$$

которые сводят число отличных друг от друга компонент тензоров ${}^4\lambda$ и ${}^4\gamma$ с $3^4 = 81$ к 36. В наиболее простом случае изотропных тел эти тридцать шесть коэффициентов, зависящие от выбора системы координат, сводятся к двум инвариантным постоянным, характеризующим данное вещество. Действительно, наиболее общее линейное соотношение между обоими тензорами 2p и 2a , содержащее одни лишь инвариантные коэффициенты пропорциональности, должно иметь вид

$$-p_{ik} = \lambda' \delta_{ik} a_{ii} + \lambda'' a_{ik} \quad (75)$$

или

$$-a_{ik} = \gamma' \delta_{ik} p_{ii} + \gamma'' p_{ik} \quad (75a)$$

Модули λ' и λ'' (обозначаемые обычно через λ и 2μ), связаны с коэффициентами γ' , γ'' соотношениями:

$$\gamma'' = \frac{1}{\lambda''}, \quad 3\lambda' + \lambda'' = \frac{1}{3\gamma' + \gamma''}. \quad (75b)$$

Эти уравнения можно применить и к случаю жидких и газообразных тел, если приравнять нулю постоянную $\mu = \frac{\lambda''}{2}$ — так называемый модуль сдвига. Во всех случаях энергия деформации w выражается формулой:

$$w = -\frac{1}{2} p_{ik} a_{ik}. \quad (76)$$

Условие гидростатического равновесия (69) должно быть заменено следующим, более общим уравнением:

$$-\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + F_i = 0. \quad (77)$$

Предположим снова, что внешняя объемная сила F обусловлена действием электростатического поля, и положим:

$$F_i = P_k \frac{\partial}{\partial x_k} E_k = \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \quad (77a)$$

причем для анизотропных тел с постоянным, т. е. независимым от напряженности поля, тензором восприимчивости справедлива формула:

$$\xi = \frac{1}{2} P_k E_k = \frac{1}{2} \chi_{ik} E_i E_k \quad (77b)$$

(условия интегрируемости $\frac{\partial P_i}{\partial k_k} = \frac{\partial P_k}{\partial k_i}$ мы предполагаем выполненными.) Заметим, что уравнение (77) можно переписать в виде¹

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{ik} \xi - p_{ik}) = 0. \quad (77c)$$

Для решения этого уравнения или, вернее, системы уравнений надо предварительно выразить компоненты тензора напряжений p_{ik} через компоненты вектора смещения u_i . При этом в случае изотропных тел имеем, согласно формулам (75) и (72a):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda' \operatorname{div} \mathbf{u} + \xi) + \frac{\lambda''}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [(\lambda + \mu) \operatorname{div} \mathbf{u} + \xi] + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0$$

или в векторных обозначениях:

$$\nabla [\xi + (\lambda + \mu) \operatorname{div} \mathbf{u}] + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0. \quad (78)$$

Отсюда путем составления дивергенции получается следующее уравнение для объемного расширения $\operatorname{div} \mathbf{u} = \vartheta = \frac{\Delta v}{v}$:

$$K \nabla^2 \vartheta + \nabla^2 \xi = 0, \quad (78a)$$

где

$$K = \lambda + 2\mu = \lambda' + \lambda'' \quad (78b)$$

означает модуль сжатия (при всестороннем давлении). Уравнение (78a) совпадает с соответствующим гидростатическим уравнением для мало сжимаемых жидкостей, получающимся из формулы (69a) при помощи соотношения $p = K \cdot \vartheta$.

3. Явления электро- и магнитоэлектрики в твердых телах. Работа $-p dv$, совершаемая силами внешнего давления при изменении объема некоторой массы жидкости, в случае твердого тела должна быть заменена согласно формуле (73a) величиной $-v_0 p_{ik} da_{ik}$, где v_0 — объем, занимаемый данной массой при отсутствии деформации.

При постоянной температуре работа эта представляет собой увеличение свободной энергии данного элемента тела. Для

¹ Электрическая энергия ξ соответствует, следовательно, тензору упругого напряжения, а не упругой энергии ψ .

его термодинамического потенциала мы получаем при этом не уравнение (67), а следующее общее уравнение:

$$d\Phi = -SdT - \nu P_i dE_i - \nu M_i dH_i + \nu_0 a_{ik} dp_{ik}, \quad (79)$$

из которого уравнение (67) получается как частный случай. Рассмотрим снова, как мы это делали раньше, квазистатические процессы при постоянной температуре и при отсутствии магнитного поля. Тогда будем иметь вместо (67а):

$$\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial E_i} \right)_p = -\frac{1}{\nu_0} \left[\frac{\partial (\nu P_i)}{\partial p_{ik}} \right]_E = -\frac{1}{\nu_0} \left(\frac{\partial (\nu x_{ih})}{\partial p_{ik}} \right)_E E_h \quad (79a)$$

и далее

$$da_{ik} = \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial E_i} \right)_p dE_i + \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_{ih}} \right)_E dp_{ih}$$

т. е.

$$da_{ik} = -\frac{1}{\nu_0} \frac{\partial (\nu x_{ih})}{\partial p_{ik}} E_h dE_i + \frac{\partial a_{ik}}{\partial p_{ih}} dp_{ih}. \quad (79b)$$

Положим здесь

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 + \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = 1 + a_{nn} = 1 + \vartheta \quad (80)$$

и введем для краткости обозначение

$$\left(\frac{\partial x_{ih}}{\partial p_{ik}} \right)_E = x_{ih, ik} \quad (80a)$$

тогда, если пренебречь a_{nn} по сравнению с 1 в множителе $1 + a_{nn}$, получим:

$$da_{ik} = -x_{ih, ik} E_h dE_i + \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial p_{ih}} \right)_E dp_{ih} - \left(\frac{\partial a_{nn}}{\partial p_{ik}} \right)_E x_{ih} E_h dE_i \quad (80b)$$

или по формуле (74):

$$da_{ik} = -x_{ih, ik} E_h dE_i - \gamma_{ik, ih} dp_{ih} + \gamma_{nn, ik} d\xi. \quad (80c)$$

Здесь величины p_{ih} — функции, определяемые формулой (77b).

Если бы можно было удовлетворить этим уравнениям, положив $p_{ih} = \delta_{ih} \xi + \text{const}$, то два последних члена (вернее суммы), стоящие с правой стороны в (80b), взаимно уничтожились бы, и мы получили бы просто:

$$a_{ik} = -\frac{1}{2} x_{ih, ik} E_h E_i = -\left(\frac{\partial \xi}{\partial p_{ik}} \right)_E.$$

Однако такое предположение приводит к противоречиям с общими соотношениями (74a), которые также должны приниматься во внимание при решении уравнений (77c) и (80c).

Более простые результаты получаются, если применить термодинамический метод исследования не к компонентам дефор-

мации a_{ik} , а к компонентам напряжения p_{ik} . Рассматривая вместо выражения (79) „смешанный“ термодинамический потенциал

$$d\Phi = -S dT - v P_i dE_i - v_0 p_{ik} da_{ik}, \quad (81)$$

получаем соотношения:

$$\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial E_l}\right)_a = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial (v P_l)}{\partial a_{ik}}\right)_E, \quad (81a)$$

т. е. по формуле (80):

$$\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial E_l}\right)_a = \zeta_{lh, ik} \cdot E_h + \delta_{ik} x_{lh} E_h, \quad (82)$$

где для краткости положено:

$$\zeta_{lh, ik} = \left(\frac{\partial x_{lh}}{\partial a_{ik}}\right)_E. \quad (82a)$$

Отсюда следует, что

$$dp_{ik} = \left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial E_l}\right)_a dE_l + \left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial a_{hl}}\right)_E da_{hl} = \zeta_{lh, ik} E_h dE_l + \delta_{ik} d\xi + (dp_{ik})_E.$$

Здесь $(dp_{ik})_E$ означает обычное, обусловленное деформацией a_{ik} приращение напряжения p_{ik} при постоянной напряженности поля (приближенно при $E=0$). Величина же:

$$\Delta p_{ik} = \frac{1}{2} \zeta_{lh, ik} E_h E_l + \frac{1}{2} \delta_{ik} x_{hl} E_h E_l = \frac{\partial \xi}{\partial a_{ik}} + \delta_{ik} \xi \quad (82b)$$

является дополнительным напряжением, появляющимся при неизменной деформации благодаря включению электрического поля. Оно составляется из всестороннего давления ξ и „дополнительной“ системы напряжений $\frac{\partial \xi}{\partial a_{ik}}$. Величины (82a), характеризующие эту систему, образуют тензор четвертого ранга с теми же свойствами симметрии, что и у тензоров ${}^4\lambda$ и ${}^4\gamma$. Отсюда следует, что в частном случае изотропных тел формула (82b) сводится к следующему виду [ср. (75)]:

$$\Delta p_{ik} = \delta_{ik} (\xi + \zeta' E^2) + \zeta'' E_i E_k, \quad (82c)$$

где ζ' и ζ'' — две, характеризующие данное тело постоянные. Легко убедиться в том, что эта дополнительная система напряжений соответствует давлению $\zeta' E^2$, перпендикулярному к электрическим силовым линиям и параллельному им давлению $(\zeta' + \zeta'') E^2$.

Во всех предыдущих рассуждениях мы считали электрическое поле заданным, т. е. полагали напряженность электрического поля известной функцией координат. Обычно, однако, при экспериментальном исследовании электрострикции какого-либо тела задается только внешняя часть этого поля, т. е. внешнее

поле, которое наблюдалось бы в данном месте пространства при отсутствии тела. При наличии тела мы имеем другое результирующее поле; прежде чем перейти к решению задачи об электрострикции, его надо определить, пользуясь общими методами электростатики (или электродинамики). Строго говоря, обе задачи — и электрическая, и упругая — должны решаться одновременно, так как электрические свойства вещества, обуславливающие результирующее поле, сами несколько изменяются под влиянием электрострикции. Но это изменение обычно весьма мало, и при решении электрической задачи им можно пренебречь (в первом приближении).

В заключение следует упомянуть об обратном электрострикции эффекте; он заключается в изменении электрической поляризации находящегося в заданном внешнем электрическом поле тела при упругих деформациях, производимых какими-либо неэлектрическими внешними силами (например внешним давлением или натяжением). В случае некоторых ацентрических кристаллов (как например кварц и турмалин), такой „пьезоэлектрический“ эффект появляется и при отсутствии внешних электрических сил. В этом случае электрическая поляризация тела возникает вследствие его упругой деформации. Компоненты поляризации выражаются при этом линейными функциями компонент деформации согласно уравнению:

$$P_i = P_i^0 + e_{ik} a_{ik}, \quad (83)$$

где P_i^0 обозначает естественную или „остаточную“ поляризацию, существующую, возможно, и при отсутствии деформации. Пьезоэлектрические постоянные e_{ik} образуют тензор третьего ранга, имеющий благодаря своей симметрии относительно последних двух индексов лишь восемнадцать различных компонент.

Подставляя выражения (83) в соотношения (81а), получим вместо формулы (82):

$$\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial E_i} \right)_a = e_{ik} + \delta_{ik} P_i.$$

Отсюда следует, что электрическое поле (внешнее), при сохранении деформации вызывает добавочные напряжения:

$$\Delta p_{ik} = e_{ik} E_i + \delta_{ik} P_i E_i. \quad (83a)$$

При этом мы в первом приближении пренебрегли зависимостью пьезоэлектрической поляризации от напряженности электрического поля.

Подобные же результаты получаются для магнетострикции и для обратного ей явления пьезомагнетизма, поскольку мы пренебрегаем гистерезисом. Если же гистерезис учитывать, то приходится отказаться от понятия энергии; тогда получаются значительно более сложные явления, на которых мы здесь не будем останавливаться.

КВАЗИМИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

§ 1. Электростатическая поляризация (электрическая восприимчивость в случае постоянных во времени полей)

1. Вычисление восприимчивости диэлектрических тел исходя из тензора поляризации отдельных молекул. Как уже было упомянуто в гл. I, § 2, электрическая поляризация материального тела (за исключением пьезоэлектрического эффекта и других сложных эффектов того же типа), обуславливается двумя причинами — во-первых, квазиэластической деформацией молекул во внешнем электрическом поле и, во-вторых, их ориентацией в этом поле. Поскольку последнее в очень малых областях пространства, занимаемых отдельными молекулами, можно считать (приближенно) однородным, необходимо при этом учитывать электрические моменты только первого порядка, т. е. трактовать молекулы как элементарные диполи.

Мы рассмотрим сперва наиболее часто встречающийся случай, когда молекулы не обладают естественным или „остаточным“ дипольным моментом. В этом случае вышеупомянутый эффект ориентации не может иметь места, а остается лишь эффект деформации, который мы можем трактовать как внутримолекулярную или „микроскопическую“ электрострикцию.

Представим себе следовательно молекулу как очень маленькое, твердое, упругое, деформируемое тело и примем, что во внешнем постоянном в пространстве и времени электрическом поле E^0 она приобретает пропорциональный напряженности поля и направленный в положительную сторону электрический момент p . Если ввести связанную с определенной молекулой систему координат (S) , то между компонентами p и E^0 будет существовать соотношение вида:

$$P_i = \sum \alpha_{ik} E_k^0, \quad (1)$$

где α_{ik} — вполне определенные, характерные для рассматриваемой молекулы величины, которые образуют симметричный

тензор, так называемый тензор поляризации. Для рассматриваемого здесь случая постоянного во времени поля симметричность этого тензора вытекает из принципа сохранения энергии, т. е., иначе говоря, из того факта, что суммы $\sum E_i^0 dp_i$ или $\sum p_i dE_i^0$ являются полными дифференциалами. В случае, когда оси координат совпадают с осями симметрии этого тензора, можно положить

$$p_1 = \alpha_1 E_1^0, \quad p_2 = \alpha_2 E_2^0, \quad p_3 = \alpha_3 E_3^0, \quad (1a)$$

где $\alpha_1 = \alpha_{11}$, $\alpha_2 = \alpha_{22}$, $\alpha_3 = \alpha_{33}$ — главные компонентные тензоры поляризации (остальные компоненты должны быть равными нулю).

Мы примем, что рассматриваемое тело состоит из одинаковых и одинаково ориентированных молекул, как это фактически имеет место в твердых кристаллических телах. Чтобы вычислить поляризацию \mathbf{P} , т. е. электрический момент единицы объема, достаточно умножить \mathbf{p} на число их N в единице объема. При этом внешнее поле отождествляется с определенным в предыдущей главе (§ 4) эффективным полем. Следовательно будем иметь

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}, \quad \mathbf{E}^0 = \mathbf{E} + s\mathbf{P}, \quad s = \frac{4\pi}{3}, \quad (1b)$$

где \mathbf{E} , как обычно, представляет собой среднее значение полной напряженности поля. Можно было бы вместо лоренцовского значения $\frac{4\pi}{3}$ для коэффициента s ввести другое, экспериментально найденное численное значение. Подставляя (1b) в (1a), получим уравнения

$$P_i = N\alpha_i (E_i + sP_i),$$

решение которых имеет вид

$$P_i = \chi_i E_i, \quad (2)$$

где

$$\chi_i = \frac{N\alpha_i}{1 - N\alpha_i s}. \quad (2a)$$

Величины χ_i являются главными компонентами тензора восприимчивости ${}^2\chi$ ($\chi_i = \chi_{ii}$). Главные компоненты тензора ${}^2\epsilon$ (диэлектрической постоянной) вычисляются отсюда по соотношениям $\epsilon_i = 1 + 4\pi\chi_i$.

Мы обратимся теперь к случаю изотропного тела с совершенно беспорядочно ориентированными молекулами. В случае газов и жидкостей можно себе представить, что эта беспорядочность возникает благодаря вращению молекул. При этом можно определить поляризацию, как произведение концентрации N на средний по времени момент какой-нибудь одной моле-

кулы. Можно было бы также произвести пространственное усреднение по физически малой области, которая содержит достаточно большое количество молекул. В обоих случаях вместо (1) получаем „изотропное“ соотношение вида

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}^0, \quad (3)$$

откуда

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}, \quad (3a)$$

где

$$\kappa = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha s}. \quad (3b)$$

Коэффициент средней поляризации α является молекулярной постоянной и ни от концентрации N , ни от каких-либо других величин, определяющих состояние рассматриваемого тела, не зависит. Формула (3b) определяет следовательно зависимость электрической восприимчивости от плотности данного тела в случае, если последняя может меняться. При экспериментальной проверке формулы (3b) в отношении зависимости электрической восприимчивости от плотности является более удобным выразить величину $N\alpha$, которая точно пропорциональна плотности, через диэлектрическую постоянную $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$. Тогда

$$N\alpha = \frac{\kappa}{1 + s\kappa} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi + s(\epsilon - 1)} \quad (4)$$

или, взяв теоретическое значение s ($= \frac{4\pi}{3}$),

$$N\alpha = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}. \quad (4a)$$

Эта формула Лоренца хорошо подтверждается экспериментально в случае жидкостей и сжатых газов. В случае же разреженных газов величиной $s\kappa$ по сравнению с единицей можно пренебречь и положить:

$$N\alpha = \kappa = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}. \quad (4b)$$

Заметим, что электрическая восприимчивость жидкостей и твердых (аморфных) тел обычно имеет порядок величины, равный 1 или несколько меньше. Отсюда следует, что (средний) коэффициент поляризации α имеет тот же порядок величины (и, само собой понятно, ту же физическую размерность), что и объем $\frac{1}{N}$, который занимает одна молекула в теле. Но так как этот объем не очень сильно отличается от собственного объема молекулы, то окончательно можно сказать, что коэффициент поляризации молекулы по порядку величины совпадает с ее объемом. Чтобы понять физический смысл этого

результата, представим себе молекулу в форме шара, как мы это уже делали при вычислении эффективной напряженности поля в § 4, гл. II. Тогда средняя напряженность электрического поля, которое устанавливается внутри поляризованной молекулы радиуса a , как известно, равна $-\frac{p}{a^3}$. Но по вышесказанному $\alpha^3 \cong \alpha$.

Следовательно вызванное поляризацией (или „электрострикцией“) молекулы внутреннее электрическое поле должно приблизительно компенсировать внешнее электрическое поле E^0 , которое эту поляризацию обуславливает. Мы видим, таким образом, что молекула, по отношению к внешним электрическим силам, ведет себя как проводящая частица тех же размеров.

Легко видеть, что средний коэффициент поляризации молекулы α равен арифметическому среднему ее главных коэффициентов поляризации:

$$\alpha = \frac{1}{3} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3). \quad (5)$$

В самом деле, относя компоненты p и E^0 к закрепленной в пространстве координатной системе и образуя соответствующие средние значения для различных ориентаций молекулы, получаем в виду того, что средние значения векторов p и E^0 должны быть друг другу параллельны:

$$\bar{p}_1 = \alpha_{11} \bar{E}_1^0, \quad \bar{p}_2 = \alpha_{22} \bar{E}_2^0, \quad \bar{p}_3 = \alpha_{33} \bar{E}_3^0,$$

где

$$\bar{\alpha}_{11} = \bar{\alpha}_{22} = \bar{\alpha}_{33} = \frac{1}{3} (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = \alpha.$$

Но сумма $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$ есть инвариант по отношению к различным преобразованиям координат. Следовательно, она всегда остается равной $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

2. Вычисление тензора поляризации молекулы, исходя из коэффициентов поляризации отдельных атомов. Электрическая анизотропия молекулы может быть сведена к взаимодействию атомов, из которых она построена, причем каждый атом может считаться сферически симметричным в электрическом отношении. Рассмотрим, например, двухатомную молекулу $A'A''$ и допустим, что оба атома, взятые в отдельности, являются изотропными, т. е., что их можно характеризовать скалярными коэффициентами поляризации α' и α'' . Если внешнее поле направлено параллельно оси молекулы, т. е. линии, соединяющей оба атома (или, вернее, их центры A' и A'' , рис. 4а), то влияние этого поля будет усиливаться взаимодействием самих атомов. При перпендикулярном направлении поля (рис. 4б), наоборот, взаимодействие атомов будет его ослаблять. Полный коэффициент поляризации молекулы должен быть поэтому в первом случае больше,

а во втором меньше суммы $\alpha' + \alpha''$. При этом, очевидно, в обоих случаях моменты индуцированных диполей p' и p'' совпадают по направлению с внешним полем. Обозначая через E' и E'' дополнительные поля, вызываемые в центре каждого атома (A' и соответственно A'') поляризацией другого, для определения поляризации каждого атома получим уравнения

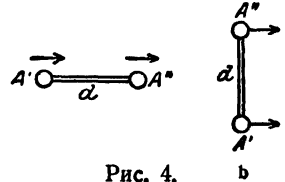
$$p = \alpha'(E^0 + E'), \quad p'' = \alpha''(E^0 + E'').$$

При этом в случае (а) мы имеем (см. т. I, стр. 91)

$$E' = \frac{2p''}{d^3}, \quad E'' = \frac{2p'}{d^3};$$

а в случае (б)

$$E' = -\frac{p''}{d^3}, \quad E'' = -\frac{p'}{d^3},$$



где d означает расстояние $A'A''$.

Следовательно в первом случае мы получим:

$$p' - \frac{2\alpha'}{d^3} p'' = \alpha' E^0, \quad p'' - \frac{2\alpha''}{d^3} p' = \alpha'' E^0,$$

т. е.

$$\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{2}{d^3} \right) p' = \left(\frac{1}{\alpha''} + \frac{2}{d^3} \right) p'',$$

и

$$(p' + p'') = p_1 = \alpha_1 E^0,$$

откуда следует

$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha'} - \frac{2}{d^3} \frac{2\alpha'}{d^3 + 2\alpha'}} + \frac{1}{\frac{1}{\alpha''} - \frac{2}{d^3} \frac{2\alpha''}{d^3 + 2\alpha''}}.$$

Аналогичным образом во втором случае получаем:

$$p' + p'' = p_2 = \alpha_2 E^0,$$

где

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{d^3} \frac{d^3 - \alpha'}{d^3 - \alpha'}} + \frac{1}{\frac{1}{\alpha''} + \frac{1}{d^3} \frac{d^3 - \alpha''}{d^3 - \alpha''}}.$$

Эти формулы значительно упрощаются, если оба атома имеют одинаковые коэффициенты поляризации. Полагая $\alpha' = \alpha''$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2\alpha'}{1 - \frac{2\alpha'}{d^3}}, \\ \alpha_2 &= \frac{2\alpha'}{1 + \frac{\alpha'}{d^3}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Коэффициенты α_1 и α_2 представляют собой очевидно главные коэффициенты поляризации рассматриваемой молекулы, для направлений параллельного и перпендикулярного к „оси молекулы“, которую мы выбрали в качестве первой координатной оси. Так как третья ось вполне эквивалентна второй, то должно быть $\alpha_3 = \alpha_2$. Следовательно тензор поляризации двухатомной молекулы можно представить эллипсоидом вращения. При этом для среднего коэффициента поляризации согласно (5) и (6) имеем:

$$\alpha = \frac{1}{3} (\alpha_1 + 2\alpha_2) = \frac{2}{3} \alpha' \left(\frac{1}{1 - \frac{2\alpha'}{d^3}} + \frac{2}{1 + \frac{\alpha'}{d^3}} \right). \quad (6a)$$

Если молекула построена не из нейтральных атомов, а из двух ионов с противоположными зарядами ($\pm e$), то она должна иметь собственный дипольный момент p^0 и при отсутствии внешних электрических сил. Пренебрегая взаимной поляризацией обоих ионов, этот момент можно положить просто равным произведению ed . При учете взаимной поляризации к этому произведению нужно еще прибавить противоположно направленные индуцированные моменты. Эти индуцированные моменты можно приближенно определить из уравнений

$$p' = -\alpha' \left(\frac{e}{d^2} - \frac{2p''}{d^3} \right), \quad p'' = -\alpha'' \left(\frac{e}{d^2} - \frac{2p'}{d^3} \right),$$

которые получаются из рассмотренных выше уравнений для случая (а), если в них внешнее поле E^0 заменить кулоновским $-\frac{e}{d^2}$. В присутствии внешнего электрического поля E^0 молекула приобретет дополнительный момент:

$$p - p^0 = \Delta p,$$

который при заданной ориентации обусловлен поляризацией обоих ионов и отчасти изменением их взаимного расстояния. Но теперь наряду с этим „стрикционным“ эффектом, поскольку молекулы могут свободно вращаться, т. е. в жидких и газообразных телах, должен иметь место гораздо более существенный эффект ориентации. При рассмотрении этого эффекта стрикционный можно оставить совершенно без внимания и предполагать, что молекула имеет постоянный по величине ($= p^0$) момент.

3. Поляризация, обусловленная ориентацией дипольных молекул. Ориентирующее действие (внешнего) поля состоит в тенденции устанавливать молекулярные диполи в своем направлении, которое соответствует минимальному значению их потенциальной энергии $-E^0 \cdot p$. Но в случае быстро вращающихся молекул эта тенденция может даже совсем не про-

явиться. Только те молекулы, вращательная энергия которых настолько мала, что они не в состоянии перевернуться в обратную сторону и должны поэтому колебаться около направления поля, будут фактически — конечно, частичным образом — ориентированы полем. Доля общего числа молекул, которую составляют подобные „качающиеся“ молекулы, или что сводится к тому же — вероятность того, что одна определенная молекула вследствие недостатка вращательной энергии будет колебаться около направления поля, — представляет собой убывающую функцию температуры рассматриваемого тела. Эту функцию легко определить приближенным образом на основании максвелловского закона распределения. Именно, легко показать, что в случае двухатомных молекул, которые имеют две вращательные степени свободы, вероятность того, что энергия вращения W лежит в интервале dW , пропорциональна произведению dW на

$$e^{-\frac{W}{kT}}, \quad (7)$$

где T — абсолютная температура, а k — постоянная Больцмана. Вероятность того, что энергия вращения равна или меньше заданного значения W_0 , выражается следовательно формулой

$$\int_{W_0}^{\infty} e^{-\frac{W}{kT}} dW : \int_0^{\infty} e^{-\frac{W}{kT}} dW = 1 - e^{-\frac{W_0}{kT}}. \quad (7a)$$

В первом приближении колеблющиеся молекулы можно отделить от вращающихся при помощи предельного значения $W_0 = pE^0$, которое можно трактовать как кинетическую энергию, необходимую для того, чтобы молекула, ориентированная перпендикулярно к полю E_0 , могла принять направление, противоположное E^0 .

Мы видим следовательно, что относительное число молекул, которые вследствие ориентации участвуют в поляризации тела, равно приблизительно $1 - e^{-\frac{pE^0}{kT}}$. При достаточно слабых полях или при не слишком низких температурах (т. е. при условии $pE^0 \ll kT$) это выражение сводится к

$$\frac{pE^0}{kT}.$$

Чтобы определить по порядку величины искомую поляризацию вследствие ориентации, достаточно умножить это выражение на Np . Следовательно, мы будем иметь

$$P \cong \frac{Np^2}{kT} E^0. \quad (7b)$$

Приведенное наглядное, но неточное рассуждение (принадлежащее В. Паули) мы заменим теперь точным рассмотрением, принадлежащим Дебаю, который заимствовал его из Ланже-

веновской теории магнитной поляризации такого же типа. Максвеллевская или, вернее, больцмановская функция вероятности (7) относится, как известно, не только к кинетической энергии, но также и к потенциальной, а равным образом, и к сумме обеих форм энергии, т. е. к полной энергии. При рассмотрении эффекта поляризации и других эффектов подобного рода, которые непосредственно определяются координатами молекулы, а не ее скоростью, можно совершенно не рассматривать кинетическую энергию и в соответствии с этим под W понимать потенциальную энергию одной молекулы. Обозначая через \bar{F} геометрическое среднее значение какой-нибудь функции координат F , т. е. то среднее значение, которое соответствует равновероятности всех значений координат (или в рассматриваемом случае всех ориентаций), можно вычислить физическое или статистическое среднее этой функции по формуле

$$[\bar{F}] = \frac{\overline{F e^{-\frac{W}{kT}}}}{\overline{e^{-\frac{W}{kT}}}}. \quad (8)$$

Потенциальная энергия молекулы, дипольный момент которой образует угол θ с направлением поля, равна

$$W = -E^0 \cdot p = -E^0 p \cos \theta.$$

Если эта энергия мала по сравнению с kT , т. е. с средней энергией теплового движения, то для вычисления ее статистического среднего можно воспользоваться разложением в ряд

$$[\bar{W}] = \frac{\overline{W e^{-\frac{W}{kT}}}}{\overline{e^{-\frac{W}{kT}}}} = \frac{\overline{W} - \frac{\overline{W^2}}{kT} + \frac{1}{2} \frac{\overline{W^3}}{(kT)^2} - \frac{\overline{W^4}}{6(kT)^3} + \dots}{1 - \frac{\overline{W}}{kT} + \frac{1}{2} \frac{\overline{W^2}}{(kT)^2} - \frac{\overline{W^3}}{6(kT)^3} + \dots}$$

При этом по известным формулам будем иметь:

$$\overline{\cos \theta} = 0, \quad \overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{3}, \quad \overline{\cos^3 \theta} = 0, \quad \overline{\cos^4 \theta} = \frac{1}{5},$$

и следовательно

$$[\bar{W}] = - \frac{\frac{(E^0 p)^2}{3kT} + \frac{(E^0 p)^4}{30(kT)^3}}{1 + \frac{(E^0 p)^2}{6(kT)^2}},$$

т. е.

$$[\bar{W}] = - \frac{(E^0 p)^2}{3kT} \left(1 - \frac{(E^0 p)^2}{15(kT)^2} + \dots \right). \quad (8a)$$

Так как с другой стороны

$$[\overline{W}] = -[\overline{E^0 \cdot p}] = -\overline{E^0} \cdot [\overline{p}]$$

и так как статистическое среднее вектора p совпадает с направлением поля, то для получения этого среднего достаточно (8а) разделить на $-E^0$. Отсюда после умножения на N получается искомая поляризация

$$P = \frac{Np^2}{3kT} \overline{E^0} \left[1 - \frac{1}{15} \left(\frac{E^0 p}{kT} \right)^2 + \dots \right]. \quad (8b)$$

Мы видим, таким образом, что эта „ориентационная поляризация“ в противоположность обыкновенной „стрикционной“ поляризации от напряженности поля зависит нелинейным образом. При очень сильных полях или при очень низких температурах поляризация (8b) стремится к значению „насыщения“

$$P_{\max} = Np, \quad (8c)$$

которое соответствует одинаковой ориентации всех молекул. Для этого предельного случая разложение в ряд (8b) неприменимо. Однако не представляет затруднений получить точную форму соответствующей функции.

При равной вероятности всех ориентаций, вероятность того, что угол θ лежит в интервале $d\theta$, как известно, равна

$$\frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2} d \cos \theta.$$

Отсюда следует, что

$$[\overline{W}] = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\pi W e^{-\frac{W}{kT}} d \cos \theta}{\frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-\frac{W}{kT}} d \cos \theta} = E^0 p \frac{\int_{-1}^{+1} e^{ax} x dx}{\int_{-1}^{+1} e^{ax} dx},$$

где для сокращения положено

$$W = a \cos \theta, \quad a = \frac{E^0 p}{kT}. \quad (9)$$

Но, как известно,

$$\int_{-1}^{+1} e^{ax} x dx = \frac{\partial}{\partial a} \int_{-1}^{+1} e^{ax} dx = \frac{\partial}{\partial a} \frac{e^a - e^{-a}}{a} = \frac{e^a + e^{-a}}{a} - \frac{e^a - e^{-a}}{a^2}$$

Следовательно

$$[\overline{W}] = -E^0 \rho \left(\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right)$$

или

$$P = Np \left(\operatorname{cth} a - \frac{1}{a} \right). \quad (9a)$$

При малых значениях a из этой формулы Ланжевена — Дебая получается ряд (8b).

В случае газов, когда эффективная напряженность поля E^0 практически совпадает с полной E , „ориентационную“ восприимчивость можно определить простым делением (8b) на E^0 . В других случаях она определяется из трансцендентного уравнения, которое получается, если в (8b) вставить $E^0 = E + \frac{4\pi}{3} P$. Но при этом необходимо учитывать также и стрикционную поляризацию. С достаточным в обычных случаях приближением ее можно просто прибавить к (8b) и ограничиться двумя первыми членами этого ряда. Если еще отбросить во втором члене $\frac{4\pi}{3} P$ по сравнению с E , то для полной диэлектрической постоянной, как функции концентрации (N), температуры и напряженности поля получается следующая формула [см. (4a)]:

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = N \left[a + \frac{p^2}{3kT} \left(1 - \frac{1}{15} \left(\frac{pE}{kT} \right)^2 \right) \right]. \quad (9b)$$

При помощи этой формулы можно определить естественный момент молекулы из экспериментальных данных о температурной зависимости диэлектрической постоянной ϵ . При этом получают численные значения порядка величины 10^{-18} (например $p = 1,87 \cdot 10^{-18}$ для воды), что согласно приближенному соотношению $p = ed$ при $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ (элементарный заряд), соответствует расстоянию $d \cong 10^{-8}$ см между ионами, из которых построена молекула. Приведенные результаты остаются, само собой разумеется, справедливыми не только для двухатомных молекул, но также и для многоатомных молекул с постоянным дипольным моментом. Соответствующие жидкости и газы, образованные такими молекулами, отличаются как раз сильной температурной зависимостью диэлектрической постоянной. В случае обыкновенных неполярных (или „гомополярных“) веществ диэлектрическая постоянная практически от температуры не зависит.

4. Эффект ориентации в случае неполярных молекул. Необходимо однако упомянуть, что и в этом случае диэлектрическая постоянная должна зависеть от температуры, поскольку в электрическом отношении молекулы не обладают сферической симметрией, т. е. поскольку главные компоненты тензора

поляризации не равны друг другу. Это происходит вследствие того, что потенциальная энергия такой молекулы в данном внешнем поле E^0 зависит — хотя и в не такой сильной степени, как в случае дипольного момента — от ее ориентации. В рассмотренном выше случае двухатомной молекулы положение a (ось молекулы параллельна направлению поля) соответствует минимуму, а положение b (ось молекулы перпендикулярна направлению поля) — максимуму потенциальной энергии. Это означает, что на молекулу вообще действует вращательный момент $\mathbf{p} \times \mathbf{E}^0$, который стремится установить ее ось по направлению поля. При этом противоположные ориентации энергетически эквивалентны (в противоположность дипольным молекулам, в случае которых они соответствуют противоположным значениям энергии). В самом деле, если обозначить угол между направлением поля и осью молекулы через θ , то согласно (1) или (1а), принимая во внимание, что $\alpha_2 = \alpha_3$, можно получить следующее выражение для энергии:

$$W = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^0 = -\frac{1}{2} E^{02} (\alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta). \quad (10)$$

При этом предполагается, что напряженность поля лежит в плоскости (1, 2). Но вследствие симметрии молекулы выбор этой плоскости является безразличным. В общем случае молекулы с тремя различными главными коэффициентами поляризации выражение (10) должно быть заменено более общим:

$$W = -\frac{1}{2} E^{02} (\alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \alpha_3 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi), \quad (10a)$$

где φ обозначает угол между плоскостями (1, 2) и (1, E^0).

Формулу (10) можно написать также в следующей форме:

$$W = -\frac{1}{2} E^{02} (\alpha_2 + \Delta \cos^2 \theta), \quad (10b)$$

где

$$\Delta = \alpha_1 - \alpha_2. \quad (10c)$$

Ранее, при вычислении среднего коэффициента поляризации по формулам (5) или (6а) мы считали все ориентации равновероятными. Эти формулы, следовательно, представляют не статистическое среднее, а геометрическое среднее значение коэффициента поляризации. Чтобы получить статистическое среднее $[\alpha] = \alpha$, мы вычислим среднее статистическое значение энергии W по уже применявшейся формуле:

$$[\overline{W}] = W_0 \cdot e^{-\frac{W}{kT}} : e^{-\frac{W}{kT}}.$$

Согласно (10b) будем иметь

$$[\overline{W}] = -\frac{1}{2} E^{02} (\alpha_2 + \Delta \cos^2 \theta) e^{-\frac{E^2 \Delta \cos^2 \theta}{2kT}} : e^{-\frac{E^2 \Delta \cos^2 \theta}{2kT}}. \quad (11)$$

или, вводя сокращение:

$$b = \frac{E^{02}\Delta}{2kT}, \quad (11a)$$

$$[\overline{W}] = -\frac{1}{2} E^{02} \left\{ \alpha_2 + \Delta \cdot \frac{\cos^2 \theta \left(1 + b \cos^2 \theta + \frac{1}{2} b^2 \cos^4 \theta \dots \right)}{1 + b \cos^2 \theta + \frac{1}{2} b^2 \cos^4 \theta \dots} \right\}.$$

Опуская члены третьего и высшего порядков малости по отношению к Δ и принимая во внимание, что

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{3} \text{ и } \overline{\cos^4 \theta} = \frac{1}{5},$$

получаем:

$$[\overline{W}] = -\frac{1}{2} E^{02} \left\{ \alpha_2 + \frac{1}{3} \Delta \left(1 + \frac{4}{15} b \right) \right\}.$$

С другой стороны по определению $\alpha = [\overline{\alpha}]$

$$[\overline{W}] = -\frac{1}{2} \alpha E^{02}.$$

Следовательно

$$\alpha = \alpha_2 + \frac{1}{3} (\alpha_1 - \alpha_2) \left(1 + \frac{2}{15} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E^{02}}{kT} \right). \quad (11b)$$

При малых напряженностях поля или при высоких температурах это выражение переходит в прежнее выражение (6b).

До сих пор мы предполагали электрическое поле однородным. В случае сильно неоднородных полей появляются дополнительные стрикционные и ориентационные эффекты, которые можно учесть введением индуцированных и естественных квадрупольных моментов. Но эти осложнения в макроскопической электростатике, которая имеет дело со слабо неоднородными полями, не играют почти никакой роли.

§ 2. Магнитоэлектрическая поляризация (диа-, пара- и ферромагнитные явления)

Микроскопическая теория магнитной поляризации, или, кратко говоря: намагниченности, во многих отношениях совершенно аналогична изложенной в п. 1 теории электрической поляризации. При этом стрикционной поляризации соответствует диамагнитная поляризация, которая также является общим, наблюдаемым у всех тел, эффектом. Поляризации вследствие ориентации соответствует парамагнитная поляризация, которая наблюдается только у тех веществ, атомы или моле-

кулы которых обладают постоянным (естественным) магнитным моментом.

Наконец, имеется еще сравнительно небольшое число ферромагнитных веществ, которые ниже определенной „критической“ температуры отличаются парамагнитной поляризацией аномальной величины и характера (см. гл. II, § 7).

1. Сущность диамагнетизма. В то время как электрическая стрикционная поляризация может рассматриваться как электростатическая индукция, ее магнитный аналог можно трактовать как электромагнитную индукцию. При рассмотрении магнитных сил всегда необходимо учитывать также и электрические индукционные силы, которые постоянно присутствуют при появлении магнитного поля и при его изменениях во времени, и от работы которых зависит магнитная энергия. Ту же самую роль могут играть также и те „электродвижущие“ силы, которые появляются при движении материальных тел в постоянном во времени магнитном поле. Согласно принципу относительности они принципиально равноценны упомянутым индукционным силам (см. т. I, гл. 5).

Электростатическая индукция (или „стрикция“) всегда имеет следствием положительно (в отношении электрического поля) направленную поляризацию. Соответствующая ей диамагнитная поляризация, наоборот, всегда имеет направление, обратное направлению магнитного поля. Она остается при этом практически пропорциональной напряженности магнитного поля и так же, как и ее электрический аналог, практически не зависит от температуры и от других величин, характеризующих состояние тела. Эти факты могут быть объяснены, как показал еще Ампер, с квазимикроскопической точки зрения, если принять что атомы и молекулы по отношению к магнитному полю, так же как и электрическому, ведут себя как очень маленькие, идеально проводящие частицы. Такое грубое наглядное объяснение диамагнетизма, при котором молекула заменяется элементарным проводником тока, мы уже привели в гл. II, § 4. Однако, его можно легко уточнить, если вместо элементарного линейного проводника ввести атом, с вращающимся вокруг его центра электроном. Собственная энергия тока $\frac{1}{2} Li^2$ (L — коэффициент самоиндукции, i — сила тока) должна быть при этом заменена просто кинетической энергией электрона $\frac{1}{2} m_0 v^2$. Тогда по формуле (20a) гл. II будем иметь

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot H. \quad (12)$$

При выводе этой формулы мы учитывали только работу электродвижущих сил, т. е., другими словами, никаких иных сил, кроме этих электрических индукционных сил, мы не вво-

дили в рассмотрение. В тот момент, когда напряженность магнитного поля достигает своего постоянного конечного значения H , электрические индукционные силы исчезают, и электрон продолжает двигаться с приобретенной энергией. Легко видеть, что обусловленные полем H магнитные силы должны поддерживать это вызванное электрическими силами и оставленное им в наследство движение. Так например, если электрон движется перпендикулярно к магнитным силовым линиям (т. е. в направлении индуцированных электрических сил, до возникновения которых, по нашему предположению, он находился в покое), то на него будет действовать постоянная по величине сила $\frac{evH}{c}$, остающаяся все время в одной и той же, перпендикулярной к H , плоскости и направленная по нормали к орбите электрона. Следовательно, электрон должен (поскольку на него не действуют никакие другие силы) описывать круговую орбиту, радиус которой r определяется из уравнения

$$\frac{m_0 v^2}{r} = \frac{ev}{c} H.$$

В случае, если электрон вращается вокруг неподвижного центра, произведение $\frac{1}{2} r \frac{ev}{c}$ должно быть равно его магнитному моменту m . Принимая во внимание, что в случае положительного электрона направление вращения является отрицательным (относительно направления поля), предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = -m \cdot H.$$

Отсутствие множителя $1/2$ (в правой части) объясняется тем, что вышеприведенное определение магнитного момента относится только к связанным электронам, т. е. к таким электронам, которые движутся (как в случае линейного проводника) по зафиксированным орбитам или — как это фактически имеет место в атомах — вращаются вокруг неподвижного центра притяжения. В случае же свободного электрона, который подвержен действию только магнитных сил, его магнитный момент, согласно формуле (12), должен быть удвоен, т. е. его нужно определить произведением $r \frac{ev}{c}$ [см. т. I, стр. 377, формула (31)].

Соответствующая формула для связанного электрона должна иметь, как не трудно убедиться, следующий вид:

$$\Delta \frac{1}{2} m_0 v^2 = m_0 \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} = -m \cdot \mathbf{H}, \quad (12a)$$

где $\Delta \mathbf{v}$ обозначает дополнительную скорость, обусловленную магнитным полем (или вернее электрическими индукционными

силами, которыми сопровождается его возбуждение), а \mathbf{m} — первоначальный магнитный момент невозмущенной электронной орбиты. При этом предполагается, что изменение этого момента $\Delta \mathbf{m}$ относительно очень мало, т. е. что скорость электрона при включении магнитного поля меняется очень незначительно. Для вывода формулы (12а) заменим обращающийся по своей орбите электрон элементарным линейным током, но примем теперь, в противоположность нашему прежнему предположению, что начальная сила тока (при $H=0$) не равна нулю, а имеет большое значение i , которое при возрастании поля меняется на сравнительно небольшую величину Δi . Тогда получаем [см. вывод формулы (26) гл. II]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = -i \cdot \frac{d}{dt} \int H_n dS,$$

т. е. в первом приближении:

$$Li \Delta i = -i \oint H_n dS = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}.$$

Заменив $\frac{1}{2} Li^2$ через $\frac{1}{2} m_0 v^2$, получаем формулу (12а). Ее можно было бы также получить, образуя среднее по времени для фактического движения электрона, без введения каких бы то ни было заменяющих это движение моделей (ср. гл. I, стр. 266).¹

В случае, если для невозмущенного движения электрона имеет место закон площадей, т. е. если угловой момент электрона $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m_0 \mathbf{v}$ остается постоянным, вызываемое электрическими индукционными силами возмущение должно сводиться к равномерной прецессии. В самом деле, полагая $\Delta \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\omega}$ соответствующая (дополнительная) угловая скорость, будем иметь

$$m_0 \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} = m_0 \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times m_0 \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}$$

и следовательно по (12а):

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}, \tag{12b}$$

или, так как векторы \mathbf{J} и \mathbf{m} друг другу параллельны,

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{J}|} \mathbf{H}.$$

При обычном определении магнитного момента

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{e\mathbf{v}}{c},$$

¹ Формулу (12а) можно рассматривать как непосредственное выражение того факта, что потенциальная энергия связанного электрона по отношению к магнитному полю есть не что иное, как его дополнительная кинетическая энергия при движении вокруг центра притяжения в присутствии этого поля.

так что

$$\omega = -\frac{e}{2cm_0} \mathbf{H}. \quad (12c)$$

Но это в точности есть скорость ларморовской прецессии, которая, как мы видели в т. I (стр. 266), обуславливается постоянным магнитным полем.

2. Вычисление диамагнитной восприимчивости. Теперь легко вычислить соответствующий этому прецессионному движению дополнительный магнитный момент рассматриваемого электрона. Именно, по определению \mathbf{m} , для среднего по времени значения $\Delta \mathbf{m}$ имеем

$$\overline{\Delta \mathbf{m}} = \frac{e}{2c} \overline{\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{v}} = \frac{e}{2c} \overline{\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})} = \frac{e}{2c} [\omega \overline{r^2} - \overline{\mathbf{r} (\omega \cdot \mathbf{r})}],$$

т. е. в виду (12c):

$$\overline{\Delta \mathbf{m}} = -\frac{e^2}{4c^2 m_0} [\mathbf{H} \overline{r^2} - \overline{\mathbf{r} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{r})}], \quad (13)$$

или в координатном представлении (опуская знак суммирования):

$$\Delta m_i = \beta_{ik} H_k, \quad (13a)$$

где

$$\beta_{ik} = -\frac{e^2}{4c^2 m_0} (\delta_{ik} \overline{x_h x_h} - \overline{x_i x_k}). \quad (13b)$$

Здесь черта обозначает усреднение по времени для невозмущенного движения. Это среднее значение невозможно вычислить без точного знания движения. В простейшем случае плоского движения, симметричного (в среднем) относительно оси орбиты, т. е. прямой, проведенной через центр притяжения параллельно угловому моменту, имеем (если выбрать эту прямую за 1-ю ось)

$$x_1 = 0, \quad \overline{x_2 x_3} = 0, \quad \overline{x_2^2} = \overline{x_3^2} = \frac{1}{2} \overline{r^2}$$

и следовательно

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31} = 0, \\ \beta_{11} = -\frac{e^2 \overline{r^2}}{4c^2 m_0}, \quad \beta_{22} = \beta_{33} = -\frac{e^2 \overline{r^2}}{8c^2 m_0} = \frac{1}{2} \beta_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Отсюда для внутреннего произведения $\Delta \mathbf{m}$ на \mathbf{H} получаем

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{m} \cdot \mathbf{H} &= \beta_{11} \left[H_1^2 + \frac{1}{2} (H_2^2 + H_3^2) \right] = \beta_{11} H^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) = \\ &= \frac{1}{2} \beta_{11} H^2 (1 + \cos^2 \theta), \end{aligned} \quad (14a)$$

где θ обозначает угол между осью орбиты и направлением поля.

Принимая далее, что все ориентации оси орбиты (или плоскости орбиты) равновероятны и усредняя (14а), получаем

$$\overline{\Delta m} \cdot \mathbf{H} = \frac{2}{3} \beta_{11} H^2,$$

или, согласно (14):

$$\overline{\Delta m} \cdot \mathbf{H} = -\frac{e^2 r^2}{6c^2 m_0} H^2. \quad (14b)$$

Так как среднее значение Δm очевидно параллельно напряженности поля, то отсюда следует, что

$$\overline{\Delta m} = -\frac{e^2 \overline{r^2}}{6c^2 m_0} \mathbf{H}. \quad (14c)$$

Этот результат можно обобщить на случай атомов с произвольно большим числом электронов. Как известно, каждый атом состоит из центрального ядра с положительным зарядом и некоторого числа „планетных электронов“, которые имеют одинаковый заряд $e = -4,77 \cdot 10^{-10}$ и одинаковую массу $m_0 = 9 \cdot 10^{-28}$. Поэтому, если отвлечься от их собственного вращения, при включении внешнего магнитного поля они должны, не меняя своего относительного движения, прецессировать как целое вокруг направления поля, с угловой скоростью (12с). Следовательно, чтобы получить дополнительный магнитный момент всего атома, достаточно сложить вычисленные выше дополнительные моменты отдельных электронов. При этом существенную роль играют только внешние электроны, радиус орбиты которых (r) имеет порядок величины 10^{-8} см. Так как средние радиусы орбит в выражении Δm входят только квадратично, то внутренние электроны могут только очень незначительно увеличивать Δm .

Вращение электронов вокруг собственной оси не может оказывать непосредственного влияния на величину общего индуцированного момента атома (оно в этом отношении вполне эквивалентно движению по орбите, размеры которой совпадают с собственными размерами электрона). Но оно должно проявляться косвенно, именно в обусловленных им возмущениях орбитального движения электрона. Это возмущение никоим образом нельзя считать несущественным, особенно при наличии внешнего магнитного поля, ибо скорость прецессии для собственного вращения вдвое больше ларморовской. Поскольку угловые моменты собственного вращения и орбитального движения остаются прочно связанными друг с другом, они должны прецессировать вокруг результирующего углового момента электрона, в то время как последний прецессирует вокруг направления поля с „компромиссной“ угловой скоростью, лежащей между o и $2o$.

Однако мы не можем здесь входить в эти подробности, ибо они относятся к собственно микроскопической теории. Мы должны уже быть удовлетворены тем, что изложенная квазимикроскопическая теория¹ позволяет определить не только общий характер рассматриваемого явления, но также и порядок его величины.

Что касается этого порядка величины, то согласно (14с) для отношения $\frac{|\Delta m|}{|H|}$ при $e \cong -4,8 \cdot 10^{-10}$, $m_0 = 9 \cdot 10^{-28}$, $c = 3 \cdot 10^{-10}$ и $r \cong 10^{-8}$ см получается приблизительно $4 \cdot 10^{-30}$. Чтобы определить порядок величины диамагнитной восприимчивости χ какого-нибудь твердого или жидкого тела, это число нужно еще разделить на занимаемый в среднем одним атомом объем ($10^{-23} - 10^{-24}$ см³). Тогда получается $-\chi \cong 10^{-6} - 10^{-7}$, что совпадает с максимальным значением экспериментально определенных диамагнитных восприимчивостей различных веществ (если отвлечься от некоторых исключительных случаев).

Вследствие такой малости диамагнитной восприимчивости при ее теоретическом определении нет надобности принимать во внимание разницу между эффективной и полной (средней) напряженностью поля. Едва ли также необходимо различать обе восприимчивости $\gamma = \frac{M}{H}$ и $\chi = \frac{M}{B}$ ($B = H - 4\pi M$), так как они практически совпадают. Для изотропного тела можно просто положить

$$M = \chi H, \quad (15)$$

где

$$\chi \cong -\frac{Ne^2}{6c^2m} \sum \bar{r}^2. \quad (15a)$$

Здесь N —число атомов в единице объема, а сумма $\sum r^2$ распространена на все электроны, которые находятся в атоме.

3. Парамагнетизм. В том случае, когда атомы имеют отличный от нуля магнитный момент, наряду с диамагнитной поляризацией появляется непосредственно обусловленная ориентирующим действием поля парамагнитная поляризация, которая обычно совершенно перекрывает диамагнитную. Эту парамагнитную поляризацию формально можно трактовать совершенно таким же образом, как соответствующую электрическую ориентационную поляризацию. Она зависит не от электромоторного, а от „пондеромоторного“ действия магнитного поля, т. е. от обусловленного этим полем вращательного момента $m \times H^0$ (m —результатирующий магнитный момент атома, H^0 —эффек-

¹ Она так же, как и теория парамагнетизма, впервые была развита Лав-жевецом.

тивная напряженность поля) или от соответствующей потенциальной энергии

$$W = -m \cdot H^0. \quad (16)$$

Парамагнитная поляризация, в противоположность диамагнитной, должна поэтому иметь — так же, как и в случае электрической поляризации — положительное направление. Ее величина должна следовательно определяться (а не же веновской) формулой:

$$\left. \begin{aligned} M &= Nm \left(\operatorname{ctgh} a - \frac{1}{a} \right), \\ a &= \frac{mH^0}{kT}, \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

или приближенно

$$M = \frac{Nm^2}{3kT} H^0 \left[1 - \frac{1}{15} \left(\frac{H^0 m}{kT} \right)^2 + \dots \right]. \quad (16b)$$

Эти формулы получаются из (9a) и соответственно (8a), если заменить p через m , а E^0 — через H^0 .

Следует заметить, что сходство между электрической и магнитной ориентационной поляризацией имеет чисто формальный характер, по своему же механизму они совершенно отличны друг от друга. В предыдущем параграфе мы видели, что электрическая поляризация возникает благодаря качанию дипольной молекулы с небольшой вращательной энергией около направления поля. Магнитное поле не может обусловить такое качание. Его тенденции установить магнитные атомы или отдельные магнетоны (орбиты электронов) в своем собственном направлении противодействует гироскопический эффект. Поэтому вместо ориентации имеет место прецессия атома вокруг направления поля. Но это прецессионное движение, как мы только что показали, обуславливает диамагнитную поляризацию. Получающийся из формального статистического рассмотрения — и фактически наблюдаемый — эффект ориентации не является следовательно результатом непосредственного действия магнитного поля, а обуславливается комбинированным влиянием этого поля и некоторых других сил, зависящих от теплового движения атомов или их теплового излучения. Эти дополнительные силы играют, следовательно, двоякую роль: с одной стороны они благоприятствуют парамагнитной поляризации, обеспечивая установление ее в течение конечного промежутка времени; с другой же они затрудняют ее, уменьшая ее (равновесное) значение, ибо согласно (16a) и (16b) при повышении температуры ориентационная поляризация должна быстро спадать.

В то время как электрическая ориентационная поляризация наблюдается обычно только в случае газов и жидкостей, состоя-

ших из двухатомных или многоатомных молекул, „паранамагничение“ может иметь место в такой же степени и у одноатомных веществ, в любом агрегатном состоянии, причем зависимость от температуры и напряженности поля выражается той же формулой Ланжевена. Эти факты объясняются тем, что отдельные атомы не обладают постоянным электрическим дипольным моментом и что молекулы, которые имеют постоянный дипольный момент, в твердых телах обычно не могут поворачиваться. Напротив, магнитный момент может иметься у отдельных атомов и даже электронов, и его ориентация может иметь место вне зависимости от химического состава и агрегатного состояния.

Как уже было упомянуто в т. I (стр. 267), магнитные моменты атомов равны небольшим кратным элементарной величины $|\mathbf{m}| \cong 10^{-20}$. Этот факт, впервые экспериментально найденный Вейсом, объясняется квантовой теорией магнетизма. Здесь мы приведем только примерный расчет для определения его порядка величины. В случае электрона, движущегося по круговой орбите вокруг неподвижного центра, в котором находится заряд противоположного знака ($-e$), имеет место следующее уравнение:

$$\text{(центробежная сила)} \quad \frac{m_0 v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \quad \text{(сила протяжения).}$$

Отсюда получается:

$$|\mathbf{m}| = \frac{e}{2c} r v = \frac{e^2}{2c} \sqrt{\frac{r}{m_0}}.$$

Полагая здесь $r \cong 10^{-8}$, что приблизительно соответствует размерам внешних орбит электронов, и подставляя известные значения e , c и m_0 , будем иметь в согласии с опытом

$$|\mathbf{m}| \cong 3 \cdot 10^{-20}.$$

Отсюда далее следует, что в случае насыщения значение M , т. е. произведение $N|\mathbf{m}|$ должно иметь порядок величины 10^3 — 10^4 . Наибольшее экспериментально найденное значение равно $2 \cdot 10^3$ (в случае железа). При низких температурах это значение момента насыщения может быть достигнуто уже при сравнительно слабых внешних магнитных полях. При высоких температурах, наоборот, даже при очень сильных полях парамагнитная поляризация остается очень незначительной, хотя все же и превышает диамагнитную.

4. Ферромагнитные явления. При больших значениях M следует строго отличать эффективную напряженность поля H^0 от средней напряженности поля H и от магнитной индукции B .¹ Следует заметить, что в обычных экспериментальных

¹ Напомним, что в принятой нами терминологии понятия магнитной напряженности и магнитной индукции имеют значения, обратные общепринятым.

условиях B совпадает с напряженностью внешнего поля (гл. I, § 3). Если, следовательно, определять намагничение как функцию напряженности внешнего поля по формуле Ланжевена (16а), т. е. вычислять обычную магнитную восприимчивость $\chi = \frac{M}{B}$, то нужно положить $H^0 = H - \frac{8\pi}{3} M = B + \frac{4\pi}{3} M$ и учесть то обстоятельство, что M может быть гораздо больше B .

В этом случае непосредственное вычисление χ из (16а) весьма затруднительно и предпочтительнее воспользоваться следующим, графическим методом.

На график наносят с одной стороны кривую Ланжевена по (16а) $M = L(a)$, с другой — „прямую Лоренца“:

$$a = \frac{m}{kT} \left(B + \frac{4\pi}{3} M \right),$$

причем a откладывается по абсциссе, M — по ординате, а B считается произвольно заданным параметром.

Ради общности заменим лоренцовский коэффициент $\frac{4\pi}{3}$ через численный, пока неопределенный, коэффициент s . При этом будем иметь

$$H^0 = B + sM$$

и

$$M = \frac{1}{s} \left(\frac{kT}{m} a - B \right). \quad (17a)$$

Значение M , соответствующее заданным значениям B и T , получается как ордината точки пересечения кривой Ланжевена и прямой (17а). При этом температура определяет наклон этой прямой по отношению к оси a , а индукция B точку ее пересечения с осью M (рис. 5).

Из этого графического представления легко вывести следующие заключения.

1. Пока угловой коэффициент прямой (17а) $\frac{kT}{sm}$ меньше, чем угловой коэффициент $\frac{1}{3} Nm$ касательной к кривой Ланжевена в точке O [ср. асимптотическую формулу (16б)], намагничение даже при $B=0$, т. е. при отсутствии внешнего поля, отлично от нуля. „Критическая температура“, ниже которой это остаточное или спонтанное намагничение может существовать, равна следовательно

$$\theta = \frac{s Nm^2}{3 k}. \quad (18)$$

Выше этой температуры зависимость намагничивания от индукции B (при малых значениях B) может быть представлена вытекающей из (16b) и (17) приближенной формулой

$$M = \frac{Nm^2}{3kT}(B + sM).$$

Заменяя здесь коэффициент s (по 18) через $\frac{3k\theta}{Nm^2}$, получаем

$$M = \frac{Nm^2 B}{3k(T - \theta)}. \quad (18a)$$

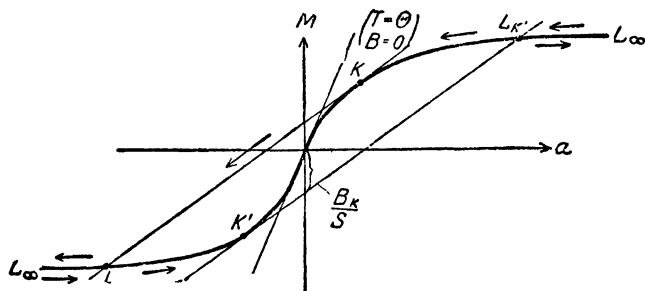


Рис. 5.

При $\theta = 0$ получаем экспериментально найденный Кюри закон $MT = \text{const } B$. Критическая температура обыкновенно называется температурой Кюри.

2. Ниже критической температуры имеется три точки пересечения кривой Ланжевена с прямой (17a), соответствующие, при одном и том же значении индукции, трем различным значениям намагничивания. Чтобы объяснить этот факт, представим себе, что индукция имеет очень большую положительную величину, при которой наступает состояние насыщения. В этом случае имеется только одна точка пересечения L_∞ (так же, как и при $T > 0$), причем для этой точки $M = +Nm = M_{\text{max}}$. Если теперь при постоянной температуре уменьшать индукцию, т. е., не меняя наклона прямой (17a), перемещать ее вверх, то наряду с первой точкой пересечения, которая при этом постепенно будет смещаться вниз и влево, получим на отрицательной ветви кривой точку касания K' . Соответствующую точку пересечения с положительной ветвью и величину индукции обозначим через $L_{K'}$ и $B_{K'}$. Хотя и имеется „математическая возможность“ того, что в этот момент намагничение перескочит на отрицательную ветвь, эта возможность, очевидно, не может осуществиться, и при дальнейшем уменьшении индукции намагничение будет меняться так же, как и до сих пор, сохраняя положительное значение, пока не изменится направление индукции и не будет достигнуто значение $B = -B_{K'}$. При этом значении B

прямая (17а) будет касаться положительной ветви в точке K и пересекать отрицательную в точке L'_k . Эти точки расположены симметрично (относительно O) с точками K' и L'_k . Если индукция будет возрастать дальше в отрицательном направлении, намагничение сразу примет отрицательное значение, соответствующее точке пересечения L'_k (положительные значения M уже невозможны), и наконец будет достигнуто значение насыщения $M = -Nm$.

Если после этого в обратном порядке вернуться к первоначальной положительной индукции, то вместо прежних значений намагничения, получаются значения, соответствующие сперва отрезку $L'_\infty - L'_k - K'$ отрицательной ветви, а затем отрезку $L_k - L_\infty$ положительной ветви.

Мы видим следовательно, что отрезок $K - K'$ между двумя точками касания никогда не будет пройден, а отрезки $L_k \rightarrow K$ и $L'_k \rightarrow K'$ могут быть пройдены только по одному разу, в направлениях, указанных стрелками. Точки перехода KK' при этом тем больше удалены от нулевой точки O , чем меньше наклон кривой, т. е. чем ниже температура.

Таким образом для температур, которые лежат ниже критической температуры θ , мы получаем в некотором интервале двузначную зависимость намагничения от индукции, которая представлена кривой рис. 6 (стр. 154). Эта кривая представляет большое сходство с приведенной уже в гл. II, § 7, экспериментальной кривой гистерезиса ферромагнитных тел (ср. рис. 3). Величины M_k и B_k , соответствующие остаточному намагничению и так называемой коэрцитивности (или „коэрцитивной силе“), являются при этом определенными функциями температуры, которые легко могут быть определены графическим методом, примененным на рис. 5. При приближении температуры к критической точке они стремятся к нулю, а при $T \geq \theta$ исчезают вовсе. Следует отметить то обстоятельство, что отрицательные значения M при положительных значениях B и обратно соответствуют неустойчивым состояниям. Таким образом при переходе B от положительных к отрицательным значениям, M перескакивает от значения $M = +M_k$ к $M = -M_k$ при $B = 0$; в результате никакого гистерезиса фактически не должно было бы существовать.

Из вышеизложенного следует между прочим, что приведенное в начале этого параграфа подразделение положительно намагничивающихся тел на пара- и ферромагнитные, не имеет принципиального значения. Скорее мы должны сказать, что парамагнитные тела могут существовать в двух состояниях, которые примерно соответствуют жидкому и газообразному агрегатным состояниям материи и которые подобным же образом отделены друг от друга определенной критической температурой.

Что касается порядка величины этой температуры, то при

вышеприведенных значениях для $N |m|$ и $|m|$ в связи с известной величиной постоянной Больцмана ($k \cong 1,4 \cdot 10^{-16}$) и при использовании лоренцовского значения для коэффициента s , равного $\frac{4\pi}{3}$,

получаем примерно $\theta = 1$ град. (максимум). Фактически однако в случае железа и других, в собственном смысле слова ферромагнитных тел, критическая температура лежит между 500 и 1000 градусами (по абсолютной шкале). Следовательно, если

желательно сохранить изложенную теорию ферромагнетизма или ферромагнитного состояния, то необходимо лоренцовский коэффициент s увеличить приблизительно в тысячу раз. П. Вейсс, которому принадлежит эта теория, назвал фигурирующий в (17) дополнительный член sM молекулярным полем. Однако представляется очевидно невозможным толковать величину sM при $s \cong 1000$ как напряженность реального магнитного поля, ибо полная (усредненная) напряженность поля $H = B + 4\pi M$ при

относительно малых значениях B имеет порядок величины $13 \cdot M$. Это дает в состоянии насыщения $H \cong 25\,000$, тогда как молекулярное поле Вейсса имеет порядок величины 10^7 .

Немагнитная природа молекулярного поля Вейсса наиболее очевидно проявляется в том факте, что восприимчивость многих парамагнитных веществ (например, кислорода и большого количества солей) очень точно выражается формулой (18а) с отрицательным значением константы θ . Это соответствует, очевидно, отрицательному значению коэффициента s и следовательно отрицательному молекулярному полю.

Теорию Ланжевена — Вейсса можно признать следовательно только как формально правильную теорию. Механизм же внешнего (вызываемого B) и внутреннего или взаимного (выражаемого членом sM) эффекта ориентации остается однако совершенно невыясненным в рамках обычной теории электрических и магнитных сил. В последнее время его удалось выяснить на основе современной квантовой механики, сведя к чисто электрическим силам на основании представления о собственном вращении („спине“) электронов (Гейзенберг).

5. Спонтанное намагничение. Рассмотренная выше зависимость намагничения ферромагнитных тел (ниже критической температуры) от напряженности внешнего поля или от индукции B находится лишь в формальном соответствии с реально наблюдаемыми фактами. Так например, значения намагничения, заключенные между точками K и K' на кривой рис. 5, на самом деле могут осуществляться, а гистерезисная петля имеет вид, отличный от рис. 6 [ср. рис. 3] и соответ-

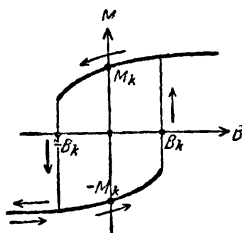


Рис. 6.

ствующий устойчивым промежуточным состоянием. В некоторых случаях гистерезис совершенно исчезает, причем намагничение M чрезвычайно быстро возрастает с увеличением индукции от нуля до значения M_k , соответствующего (согласно рис. 6) $B = +0$, после чего дальнейшее возрастание M происходит в согласии с кривыми 5 и 6.

Эти отклонения реальных ферромагнитных тел от приведенной выше схемы объясняются следующим образом. Во-первых в каждом кристалле существуют несколько (1—2—3) пар наиболее выгодных, т. е. соответствующих минимуму энергии, направлений намагничения, причем противоположным направлениям каждой пары соответствует одно и то же значение энергии.

Эта, выясненная Н. С. Акуловым, зависимость энергии намагничения от направления объясняется, по Блоху, взаимодействием „спина“ электронов с их орбитным движением. Во-вторых, как было показано Я. Г. Дорфманом и мною, магнитное взаимодействие электронных „спинов“ стремится не намагнитить, но наоборот размагнитить тело; борьба этих размагничивающих сил с вейссовскими намагничивающими силами (обладающими очень малым радиусом действия) приводит к подразделению тела на однородно намагниченные капельки (или „нити“), причем у соседних капелек направления намагничения являются резко различными и даже противоположными. Изменение общего намагничения тела может осуществляться при таких условиях без всякого гистерезиса постепенным ростом одних магнитных „капель“ (или нитей) за счет других. Последний сохраняется, однако, при наличии в теле неоднородностей — примесей или упругих натяжений, — разобщающих соседние элементы объема тела в смысле возможности „поедания“ или слияния капелек, принадлежащих к разным элементам (Акулов).

Таким образом при отсутствии внешнего магнитного поля спонтанное намагничение, существующее ниже температуры Кюри, во всяком ферромагнитном теле обычных макроскопических размеров, не проявляется непосредственно. Достаточно однако самого небольшого внешнего поля, чтобы спонтанное намагничение приняло более или менее одинаковое направление во всем теле, причем тотчас же получается характерная для ферромагнитных тел зависимость результирующего намагничения от напряженности внешнего поля (при $M > M_k$). В случае „жестких“ в магнитном отношении тел это направление частично сохраняется также и при исчезновении поля (остаточный магнетизм). В случае „мягких“ в магнитном отношении тел, наоборот, устанавливается первоначальное беспорядочное распределение намагничения, которое непосредственно не проявляется, хотя при очень низких температурах и может очень близко подходить к состоянию насыщения.

Уменьшение намагничения с повышением температуры косвенно проявляется в аномально большой теплоемкости соответствующего тела. Эту дополнительную, обусловленную

уменьшением спонтанного намагничения „ферромагнитную теплоемкость“ можно вычислить по формуле:

$$\Delta c = c_B - c_M = - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} s M^2 \right), \quad (19)$$

которая получается из формулы (63а) гл. II при исчезающей индукции. Вид функции $M(T)$ при $B=0$ графически представлен на рис. 7. При этом наибольшее значение Δc получается вблизи критической точки, где намагничение спадает наиболее быстро. Но при переходе через эту точку величина Δc внезапно обращается в нуль, что фактически и наблюдается (см. пунктирную кривую на рис. 7).

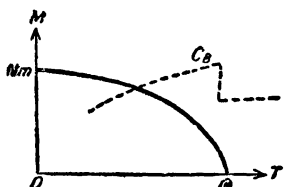


Рис. 7.

Это скачкообразное изменение теплоемкости при $T=\theta$ и $B=0$, может быть приближенно вычислено из несколько продолженного разложения в ряд (16b) в связи с (17) и (18). При этом получается

$$(\Delta c)_\theta \cong \frac{5}{6} \frac{s(Nm)^2}{\theta} = \frac{5}{2} kN \quad (19a)$$

в качественном согласии с опытом

На рассмотрении вопроса о „магнитной жесткости“ тела и о дальнейшем развитии теории ферромагнетизма мы не можем здесь останавливаться. В заключение заметим, что аналогичные явления наблюдаются также и при электрической ориентационной поляризации, в случае, если электрические диполи, связанные с молекулами соответствующего вещества сохраняют способность поворачиваться ниже „электрической критической температуры“ (для обычных дипольных жидкостей, с моментами порядка величины 10^{-18} при $s = \frac{4\pi}{3}$ получаются критические температуры, лежащие значительно ниже точки отвердевания). Наиболее известным примером такого „ферромагнитно-подобного“ вещества является сегнетова соль.

§ 3. Электрическая поляризация в случае гармонически колеблющихся полей. Вращение плоскости поляризации и оптическая активность.

1. Тензор поляризации и вектор гирации. Изложенную в § 1 теорию стрикционной поляризации можно легко обобщить на случай гармонически колеблющихся электрических полей, если трактовать молекулы как квазиупругие осцилляторы (или системы квазиупруго связанных электронов). Для полной характеристики этих осцилляторов необходимо, как это было указано в гл. I, § 2, на ряду с их статическими коэффициентами поляризации учитывать также и соответственные

частоты. При этом результирующий тензор статической поляризации какой-нибудь молекулы ${}^2\alpha$ должен рассматриваться, вообще говоря, как сумма некоторого числа элементарных составных частей ${}^2\alpha^{(h)}$, которые принадлежат гармоническим осцилляторам с различной частотой ν_h . Такая трактовка оказывается применимой, как показывает опыт, не только в случае многоатомных молекул, где она является вполне естественной, но также и в случае отдельных атомов: каждый атом нужно представлять себе, следовательно, как систему осцилляторов, обладающих характеристическими для спектров излучения и поглощения частотами, причем число этих вспомогательных осцилляторов ничего общего с числом фактически имеющихся в атоме электронов не имеет.

Обозначая через $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ частоту колебаний, вызываемых эффективным полем E^0 , мы получим для электрических моментов формулу обычного типа [ср. (1)]:

$$p_i = \alpha_{ik}(\nu) E_k^0, \quad (20)$$

где

$$\alpha_{ik}(\nu) = \sum_h \frac{\alpha_{ik}^{(h)}}{1 - \frac{\nu^2}{\nu_h^2}} \quad (20a)$$

согласно (8b) гл. I. При этом E^0 и p необходимо трактовать как комплексные векторы, пропорциональные одному и тому же фазовому множителю $e^{V-1} 2\pi\nu t = e^{i\omega t}$.

Мы будем сперва считать собственные частоты ν_h вещественными, т. е. исключим из рассмотрения затухание, и в соответствии с этим будем рассматривать только такие вынужденные колебания, частоты которых не совпадают с частотами собственных колебаний. Непригодность формулы (20a) в случае $\nu = \nu_h$ означает не что иное, как невозможность стационарных колебаний для таких „резонансных частот“ (см. ниже § 4).

Что же касается частных коэффициентов поляризации $\alpha_{ik}^{(h)}$, то мы будем считать их либо вещественными и симметричными или, вообще говоря, комплексными и сопряженно-симметричными в смысле условий Эрмита (37a) гл. II. Это допущение принципиально необходимо для того, чтобы иметь возможность обеспечить существование электрической энергии, соответствующей связанным электронам или заменяющим их вспомогательным осцилляторам.

Компоненты результирующего гармонического тензора поляризации $\alpha_{ik}(\nu)$ должны следовательно удовлетворять условиям Эрмита:

$$\alpha_{ik}^*(\nu) = \alpha_{ki}(\nu). \quad (21)$$

Разложим теперь этот тензор на вещественную (симметричную) и мнимую (антисимметричную) части:

$$\alpha_{ik}(\nu) = \beta_{ik} + \sqrt{-1} \gamma_{ik} \quad (21a)$$

и введем эквивалентный тензору γ_{ik} вектор \mathbf{g} с компонентами

$$g_1 = \gamma_{23}, \quad g_2 = \gamma_{31}, \quad g_3 = \gamma_{12}. \quad (21b)$$

Этот вектор определяет так называемую гирацию (вращение плоскости поляризации) соответствующей молекулы (см. ниже) и будет в дальнейшем называться „гирационным вектором“. Индуцированный электрический момент \mathbf{p} можно при этом согласно (20) представить в форме

$$\mathbf{p} = {}^{\beta}\beta \cdot \mathbf{E}^0 + \sqrt{-1} \mathbf{E}^0 \times \mathbf{g} \quad (22)$$

или, в координатных осях, совпадающих с осями симметрии тензора ${}^{\beta}\beta$:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \beta_1 E_1^0 + \sqrt{-1} (E_2^0 g_3 - E_3^0 g_2), \\ p_2 &= \beta_2 E_2^0 + \sqrt{-1} (E_3^0 g_1 - E_1^0 g_3), \\ p_3 &= \beta_3 E_3^0 + \sqrt{-1} (E_1^0 g_2 - E_2^0 g_1). \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

Следует заметить, что оси симметрии частных тензоров поляризации $\beta_{ik}^{(h)} = R[\alpha_{ik}^{(h)}]$, вообще говоря, отличны друг от друга и от осей симметрии результирующего тензора поляризации ${}^{\beta}\beta$. Полагая следовательно согласно (20a)

$$\beta_k = \sum_h \frac{\beta_k^{(h)}}{1 - \frac{\nu^2}{\nu_h^2}}, \quad \mathbf{g} = \sum_h \frac{\mathbf{g}^{(h)}}{1 - \frac{\nu^2}{\nu_h^2}}, \quad (22b)$$

мы должны под $\beta_k^{(h)}$ понимать не главные компоненты тензоров ${}^{\beta}\beta^{(h)}$, а их диагональные компоненты (k, k) по отношению к рассматриваемой системе координат. Заметим наконец, что в статическом случае ($\nu=0$) тензор α_{ik} должен быть вещественным и симметричным. Отсюда следует, что векторы $\mathbf{g}^{(h)}$, в отличие от тензоров ${}^{\beta}\beta^{(h)}$ должны зависеть от частоты вынужденных колебаний, и притом таким образом, чтобы при $\nu=0$ они все обращались в нуль. Эту своеобразную зависимость нельзя вывести из теории квазиупругой стрикционной поляризации, ибо согласно этой теории мы всегда должны иметь $\mathbf{g}^h=0$.

Можно показать, что отличные от нуля значения векторов получаются в том случае, если трактовать электроны не как квазиупруго связанные, а исходить из действительной резерфордской модели атома и рассматривать возмущение, вызываемое электрическим полем \mathbf{E}^0 в нормальном орбитальном движении электронов. Мы не можем здесь входить в подробное

рассмотрение этого вопроса, так как он выходит из рамок излагаемой квазимикроскопической теории. Для примера мы исследуем однако один простой случай, когда на ряду с феноменологическими квазиупругими силами на электроны действуют еще дополнительные силы, вызываемые постоянным во времени магнитным полем. Вследствие обусловленного этим полем диамагнитного прецессионного движения при этом получаются, поскольку частота ν отлична от нуля, не исчезающие значения векторов $g^{(h)}$.

2. Гирация, обусловленная дополнительным магнитным полем. Ради простоты представим себе изотропный гармонический осциллятор, состоящий из квазиупруго-связанного электрона с зарядом e и массой m , и второго электрона, неподвижно закрепленного в центре O с зарядом $-e$. Движение электрона при комбинированном действии на него гармонически колеблющегося электрического поля E^0 и постоянного во времени и пространстве магнитного поля H^0 определяется следующим уравнением:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + k \mathbf{r} = e E^0 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}^0, \quad (23)$$

где $k = m \omega_0^2 = 4\pi \nu_0^2 m$ — коэффициент связи, а ν_0 — собственная частота [см. (6) § 2, гл. 1]; \mathbf{r} — радиус-вектор электрона относительно точки O , а $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ его скорость.

Вводя в (23) вместо \mathbf{r} дипольный момент рассматриваемого осциллятора $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$, будем иметь:

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{e}{m} E^0 + \frac{e}{cm} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{H}^0 \right),$$

или, так как $\mathbf{p} \sim e^{i\omega t}$ ($\omega = 2\pi\nu$):

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \mathbf{p} = \frac{e}{m} E^0 + \frac{i\omega e}{cm} \mathbf{p} \times \mathbf{H}^0 \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (23a)$$

Чтобы определить в первом приближении влияние магнитного поля, подставим в правую часть равенства (23a) выражение $\frac{eE^0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ для \mathbf{p} , которое вытекает из него в нулевом приближении, т. е. при $H^0 = 0$. В первом приближении получим

$$\mathbf{p} = \frac{e^2 E^0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + \frac{i\omega e^2}{cm^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} E^0 \times \mathbf{H}^0. \quad (23b)$$

Эта формула совпадает с общей формулой (22), если положить в ней

$$\beta_{ik} = \delta_{ik} \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (24)$$

и

$$\mathbf{g} = \frac{\omega e^2 \mathbf{H}^0}{cm^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (24a)$$

Последнюю формулу можно написать также в виде

$$\mathbf{g} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \boldsymbol{\omega}, \quad (24b)$$

где

$$\omega = \frac{e}{2cm} H^0$$

есть угловая скорость ларморовой прецессии. Как и следовало ожидать, \mathbf{g} исчезает при $\omega = 0$.

Рассматриваемое действие магнитного поля проявляется, как мы покажем в следующей главе, во вращении плоскости поляризации света, который распространяется в соответствующем теле параллельно магнитным силовым линиям (так называемый эффект Фарадея). Так как это вращение зависит от эффективной напряженности поля, то представляется новая возможность проверить, имеет ли „молекулярное поле“ требуемую вейссовской теорией ферромагнетизма величину. При этом действительно для ферромагнитных тел получаются громадные значения $H^0 (= B + sM)$.

Нужно однако обратить внимание на то обстоятельство, что этот эффект может произойти совершенно другим образом, а именно не вследствие исключительно быстрого прецессионного движения и связанной с ним диамагнитной поляризации, а вследствие ориентирующего „парамагнитного“ действия магнитного поля. При этом необходимо допустить, что также и при отсутствии последнего атомы обладают определенными векторами гирации, направленными параллельно их магнитным моментам. Тогда для среднего статистического значения \mathbf{g} или отнесенной к единице объема гирации

$$\mathbf{G} = N[\bar{\mathbf{g}}] \quad (25)$$

получаем формулу того же вида, как и для магнитной поляризации $\mathbf{M} = N[\underline{\mathbf{m}}]$, так что можно просто положить

$$\mathbf{G} = \frac{|\mathbf{g}|}{|\mathbf{m}|} \mathbf{M}. \quad (25a)$$

Такого рода ориентация векторов гирации может быть обусловлена также дополнительным, достаточно сильным электрическим полем, если молекулы соответствующего жидкого или твердого тела обладают постоянными электрическими моментами и параллельными им векторами гирации.

Чтобы определить зависимость электрической поляризации от среднего (гармонически колеблющегося) поля \mathbf{E} , умножим равенство (22) на N и заменим \mathbf{E}^0 суммой $\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}$. В про-

стейшем случае, когда тензор β сводится к скаляру β , получим

$$\mathbf{P} = N\beta \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right) + i \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right) \times \mathbf{G}.$$

Это уравнение можно приближенно решить, подставляя во второй член правой части значение \mathbf{P} , соответствующее $G=0$. Но, как известно, в этом случае $\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}$, где $\kappa = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}$.

Таким образом

$$\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} = \frac{\epsilon + 2}{3} \mathbf{E}. \quad (26)$$

Следовательно, в первом приближении получим

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} + i \frac{\epsilon + 2}{3} \mathbf{E} \times \mathbf{G}. \quad (26a)$$

Тела рассматриваемого типа, т. е. с отличной от нуля гирацией \mathbf{G} , мы будем называть „гиротропными“, чтобы отличить их от обыкновенных изотропных и анизотропных тел. Само собой разумеется, что тело может быть одновременно гиротропным и анизотропным. Но этот общий случай мы не будем здесь рассматривать.

3. Оптическая анизотропия, обусловленная дополнительным электрическим полем. Так же, как и гиротропия, анизотропия жидкостей и газов может быть обусловлена внешними воздействиями, в частности добавочными статическими полями. Такого рода искусственная анизотропия по отношению к быстрым световым колебаниям достигается, например, включением добавочного, сильного электростатического поля (эффект Керра). Если частота ν световых колебаний достаточно высока, а напряженность \mathbf{E}^0 очень мала по сравнению с напряженностью добавочного, постоянного во времени поля \mathbf{F} , то ориентация молекул должна быть обусловлена исключительно последним (см. ниже). Мы примем, что молекулы обладают симметрией вращения относительно своей „первой“ оси. Главные компоненты тензора поляризации β для перпендикулярных к оси симметрии направлений должны иметь, следовательно, одно и то же значение $\beta_2 = \beta_3$. Определим теперь среднее статистическое значение компонент тензора поляризации в направлении постоянного поля \mathbf{F} (β'_{11}) и в перпендикулярных к нему направлениях β'_{22} .¹ При этом потенциальную энергию молекулы мы будем считать известной функцией ориентации молекулы, т. е. угла θ между осью симметрии и направлением поля \mathbf{F} .

¹ Излагаемая теория принадлежит П. Ланжевену.

Вводя косинусы углов γ_{ik} между связанными с молекулой и неподвижными в пространстве осями координат, можно выразить новые (отнесенные к неподвижным осям) компоненты тензора ${}^2\beta$ следующим образом:

$$\beta'_{11} = \sum_i \sum_k \gamma_{i1} \gamma_{k1} \beta_{ik} = \gamma_{11}^2 \beta_1 + (\gamma_{21}^2 + \gamma_{31}^2) \beta_2 = \gamma_{11}^2 (\beta_1 - \beta_2) + \beta_2,$$

$$\beta'_{22} = \sum_i \sum_k \gamma_{i2} \gamma_{k2} \beta_{ik} = \gamma_{12}^2 \beta_1 + (\gamma_{22}^2 + \gamma_{32}^2) \beta_2 = \gamma_{12}^2 (\beta_1 - \beta_2) + \beta_2.$$

Далее, для средних статистических (или геометрических) значений имеют место соотношения

$$\overline{[\gamma_{12}^2]} = \overline{[\gamma_{13}^2]} = \frac{1}{2} \overline{[\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2]} = \frac{1}{2} (1 - \overline{[\gamma_{11}^2]}),$$

и следовательно, вспоминая, что $\gamma_1 = \cos \theta$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \overline{[\beta'_{11}]} &= \beta_2 + (\beta_1 - \beta_2) \overline{[\cos^2 \theta]}, \\ \overline{[\beta'_{22}]} &= \beta_2 + (\beta_1 - \beta_2) \frac{1}{2} \overline{[\sin^2 \theta]}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Для среднего значения $\cos^2 \theta$ имеем обычную формулу

$$\overline{[\cos^2 \theta]} = \frac{\overline{\cos^2 \theta e^{-\frac{W}{kT}}}}{\overline{e^{-\frac{W}{kT}}}}$$

[см. (8) § 1]. Отсюда в случае дипольных молекул, для которых

$$W = -\frac{pF}{kT} \cos \theta,$$

имеем

$$\overline{[\cos^2 \theta]} = \frac{\overline{\cos^2 \theta} + \frac{1}{2} a^2 \overline{\cos^4 \theta} + \dots}{1 + \frac{1}{2} a^2 \overline{\cos^2 \theta} + \dots} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{a^2}{10}}{1 + \frac{a^2}{6}} \quad \left(a = \frac{pF}{kT} \right),$$

т. е. в первом приближении

$$\overline{[\cos^2 \theta]} = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2}{15} \left(\frac{pF}{kT} \right)^2 \right], \quad (27a)$$

а в случае неполярных молекул со статическими коэффици-

циентами поляризации $\alpha_1, \alpha_2 = \alpha_3$, $\left[W = -\frac{1}{2} F^2 [\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2 \theta] \right]$,
 см. (10b) § 1]:

$$\overline{[\cos^2 \theta]} = \frac{\overline{\cos^2 \theta} + b \overline{\cos^4 \theta}}{1 + b \overline{\cos^2 \theta}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{b}{5}}{1 + \frac{b}{3}} \left(b = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) F^2}{2kT} \right),$$

т. е.

$$\overline{[\cos^2 \theta]} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2) F^2}{15kT} \right). \quad (27b)$$

Величины (27), умноженные на $\frac{4\pi}{3}$, равны $\frac{\epsilon'_1 - 1}{\epsilon'_1 + 2}$ и соответ-
 ственно $\frac{\epsilon'_2 - 1}{\epsilon'_2 + 2}$, где ϵ'_1, ϵ'_2 суть главные диэлектрические посто-

янные рассматриваемого тела для колебаний E^0 .

4. Влияние магнитных колебаний на электриче-
 скую поляризацию. При быстрых электромагнитных коле-
 баниях диамагнитная поляризация вследствие своей малости мож-
 жет быть оставлена совершенно без внимания.

Необходимо однако заметить, что электрические и магнит-
 ные колебания никогда не могут иметь места каждое в отдель-
 ности, ибо они всегда взаимно индуцируют друг друга. В вол-
 новой зоне, т. е. достаточно далеко от их общего источника,
 как известно, напряженности электрического и магнитного по-
 лей имеют одинаковую величину и направлены перпендикулярно
 друг к другу и к нормали к волновой поверхности. Но и в этом
 случае дополнительная величина электрической поляризации, по-
 являющаяся под действием магнитных сил, а также диамагнит-
 ная поляризация, которая, строго говоря, вызывается также
 электрическими силами, остаются обычно исчезающе ма-
 лыми по сравнению с непосредственным стрикционным эффектом
 электрического поля (ср. впрочем ниже, п. 5).

Движение свободного электрона в электромагнитном поле
 плоской световой волны было подробно исследовано в первом
 томе. Как там было показано, действие магнитного поля состоит,
 главным образом, в создании светового давления, ко-
 торое обуславливает движение электрона в направлении свето-
 вого луча (поступательное движение). В случае связанного
 электрона такое движение не может иметь места, и оно заме-
 няется дополнительным продольным смещением. Это смещение
 должно так относиться к поперечному смещению, вызванному
 действием одного лишь электрического поля, как сила магнит-

ного поля $\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}$ к силе электрического поля, т. е. как обусловленная последним скорость электрона v к скорости света. При обычных условиях это отношение исчезающе мало.

Для уточнения этих соображений мы найдем для рассматриваемого случая ($\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, \mathbf{n} — нормаль к волновой поверхности) приближенное решение уравнения движения (23). Для этого подставим во второй член правой части то выражение для скорости \mathbf{v} , которое получается при отбрасывании этого члена, т. е. вещественную часть $\frac{i\omega e \mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Предполагая ω_0 вещественным, а \mathbf{E} — пропорциональным $\cos \omega t$, будем иметь

$$\mathbf{v} = \frac{\omega e \mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t,$$

где E_0 обозначает вещественную амплитуду поля \mathbf{E} , и следовательно по (23)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \cos \omega t + \frac{e^2 \omega}{cm^2(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{E}_0 \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \cos \omega t \sin \omega t$$

или, так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \cos \omega t + \frac{e^2 \omega}{2cm^2(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{n} E_0^2 \sin 2\omega t. \quad (28)$$

Так как это уравнение является линейным, его решение (при отсутствии свободных колебаний) состоит из двух частей, которые соответствуют силам, представленным обоими членами правой части. Первую часть мы не будем рассматривать. Для второй

$\Delta \mathbf{r}$ мы получаем обычным образом (полагая $\Delta \mathbf{r} \sim \sin 2\omega t$)

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{e^2 \omega \mathbf{n} E_0^2}{2cm^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin 2\omega t. \quad (28a)$$

Это дополнительное продольное смещение имеет следовательно удвоенную частоту. Поэтому, как мы увидим далее, в оптических явлениях оно совершенно не проявляется. Интересно отметить, что среднее значение этого смещения равно нулю, а не положительной величине, как это можно было бы ожидать. Это соответствует исчезновению среднего светового давления при отсутствии затухания (см. ниже § 4).

5. Влияние пространственной периодичности электрического поля в связи с индуцированным магнитным моментом. Оптическая активность. Хотя длины волн видимого света велики по сравнению с раз-

мерами молекул, в случае ряда веществ, молекулы которых обладают сложным асимметрическим строением, оказывается необходимым, на ряду с временной периодичностью светового поля, принимать во внимание также и пространственную периодичность его или, вернее, обусловленную ею неоднородность эффективного электрического поля. Эта неоднородность имеет следствием тот факт, что различные атомы, из которых состоит данная молекула, колеблются с различными фазами (хотя и с одинаковой частотой).

Обозначая напряженность внешнего поля в центре O молекулы через E^0 , можно определить его величину в центре атома A с помощью радиуса-вектора r^a формулой $E^a = E^0 + (r^a \nabla) E^0$.

Если при этом не учитывать взаимодействие атомов, получается следующее выражение для индуцированного дипольного момента всей молекулы:

$$p = \sum \alpha^a E^0 + \sum \alpha^a (r^a \nabla) E^0, \quad (29)$$

где α^a — коэффициенты поляризации отдельных атомов.

При учете упомянутого взаимодействия, к напряженности E^a внешнего поля следует еще прибавить напряженности E^{ab} ($b=1, 2, \dots$) полей, создаваемых другими атомами. Эти добавочные напряженности выражаются через соответствующие моменты p^b по формуле

$$E^{ab} = \frac{1}{R_{ab}^3} [3R_{ba}^0 (R_{ba}^0 \cdot p^b) - p^b], \quad (29a)$$

где $R_{ba} = r^a - r^b$ — вектор BA , а R_{ba}^0 — соответствующий единичный вектор (см. т. I, стр. 92). Подставляя это выражение в формулы

$$p^a = \alpha^a E^a = \alpha^a [E^0 + (r^a \nabla) E^0 + \sum_{b \neq a} E^{ab}], \quad (29b)$$

получим систему уравнений для определения моментов отдельных атомов, причем результирующий момент молекулы может быть вычислен по формуле ¹

$$p_i = \alpha_{ik} E_k^0 + \alpha_{ikl} \frac{\partial E_l^0}{\partial x_k}. \quad (29c)$$

Коэффициенты α_{ik} образуют уже известный нам тензор поляризации молекулы. Кроме него, однако, молекула характеризуется еще одним тензором третьего ранга с компонентами α_{ikl} .

Он определяет согласно М. Борну так называемую „оптическую активность“ рассматриваемого тела, которая проявляется во вращениях плоскости поляризации проходящего света (см. ниже, гл. IV, § 3).

¹ Знаки суммирования по одинаковым индексам по обыкновению опущены.

В случае плоских волн имеем

$$E^0 \sim e^{2\pi i \left(vt - \frac{n \cdot r}{\lambda} \right)}, \quad (30)$$

где λ — длина волны, а n — нормаль к волновой поверхности. При этом

$$\frac{\partial E_i^0}{\partial x_k} = \frac{2\pi i}{\lambda} n_k E_i^0 \quad (30a)$$

и следовательно по (29с)

$$p_i = \alpha_{ik} E_k^0 - \frac{2\pi i}{\lambda} \alpha_{ikl} n_k E_l^0. \quad (30b)$$

Если речь идет об аморфном (жидком или газообразном) теле, молекулы которого ориентированы совершенно беспорядочно, при вычислении поляризации необходимо взять геометрическое среднее выражения (30a). Среднее значение α_{ik} сводится, как известно, при отсутствии гирации, к $\frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\delta_{ik} = \alpha\delta_{ik}$. Для средних значений α_{ikl} получается, как легко показать, произведение некоторого инвариантного скаляра γ на антисимметричный единичный тензор третьего ранга δ_{ikl} , компоненты которого определяются условиями

$$\delta_{123} = 1, \quad \delta_{ikl} = -\delta_{kli} = \delta_{lki}.$$

Они равны следовательно ± 1 , если все три индекса различны, и нулю, если два из них совпадают¹.

Сумма $\delta_{ikl} n_k E_l^0 = n_2 E_3^0 - n_3 E_2^0$ представляет первую компоненту вектора $n \times E^0$. Соответствующая формуле (30a) поляризация равна следовательно:

$$P = N\alpha E^0 + iE^0 \times \Gamma, \quad (31)$$

или, если ввести вместо эффективного внешнего поля E^0 среднее поле E [см. (26)]:

$$P = \kappa E + i \frac{\epsilon + 2}{3} E \times \Gamma, \quad (31a)$$

где

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \gamma N n. \quad (31b)$$

Вектор Γ играет ту же самую роль, как гирация G , соответствующая антисимметричной (мнимой) части тензора α_{ik} . Между ними однако имеется важное различие, которое состоит в том, что G представляет собой неподвижный, не зависящий от направления светового луча вектор, тогда как „вектор активности“ Γ всегда параллелен нормали к волновой поверхности,

¹ C. G. Darwin, „Optical Constants of Matter“.

если только вообще он отличен от нуля. Дополнительная поляризация $\Delta P = iE^0 \times \Gamma$, обусловленная неоднородностью электрического поля, соответствует по существу квадрупольной поляризации, определяясь по формуле (33а) гл. I. Отсюда понятно, что ΔP относится к основной части дипольной поляризации αNE , как расстояние между соседними атомами в молекуле к длине волны. В том же отношении к αNE^0 находится, как легко видеть, и магнитная поляризация, создаваемая тем же электрическим полем (магнитное поле играет при этом, как было показано выше, лишь второстепенную роль).

Эта поляризация может быть определена наиболее просто следующим формальным приемом. Вспоминая, что в первом приближении (т. е. если пренебречь квадрупольными и магнитными эффектами) $n \times E = \frac{1}{V_s} H$, мы можем переписать дополнитель-

ную электрическую поляризацию в виде $\Delta P = -\frac{i}{V_s} gH$, где

$g = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\epsilon + 2}{3} \gamma N$. Но, как известно, H и E образуют четырехмер-

ный антисимметричный тензор, которому соответствует тензор поляризации ΔM , $-\Delta P$. С точки зрения требования инвариантности теории относительности электромагнитному соотношению $\Delta P = -\frac{i}{V_s} gH$ должно соответствовать „магнитоэлектри-

ческое“ соотношение $\Delta M = \frac{i}{V_s} gE$, образующее вместе с ним

четырёхмерное соотношение $P_{kl} = -\frac{i}{V_s} gH_{kl}^*$ ($l, k = 1, 2, 3, 4$),

где H_{kl}^* — тензор электромагнитного поля, „взаимный“ по отношению к H_{kl} (т. I, стр. 284). Таким образом, дополнительная магнитная поляризация равна

$$M = \frac{i}{V_s} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\epsilon + 2}{3} \gamma NE. \quad (32)$$

К тому же результату приводит и непосредственный расчет.

§ 4. Электрическое затухание

1. Формальная теория затухания и его влияния на тензор электрической поляризации при гармонических колебаниях. В предыдущих параграфах мы рассматривали молекулу как систему осцилляторов, которые могут совершать незатухающие колебания с определенными частотами. Но эти свободные колебания мы оставляли без внимания и рассматривали только синхронные или „когерентные“ с внешним полем вынужденные колебания. Однако полный электрический момент изотропного гармонического осциллятора,

находящегося под действием эффективного электрического поля $Ee^{i\omega t}$ ($\omega = 2\pi\nu$), как известно, состоит из упомянутой когерентной части:

$$p = \frac{e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (33)$$

[согласно (23b)] и части, соответствующей свободным колебаниям:

$$p = p'_0 e^{i\omega_0 t} + p''_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad (33a)$$

где комплексные амплитуды p'_0 и p''_0 , вообще говоря, могут быть определены из начальных условий.

Чтобы учесть затухание этих свободных колебаний — если таковое имеется — достаточно входящие в (33a) частоты $\pm \omega_0$ заменить комплексными числами

$$\pm \omega' + i\omega''$$

с положительной мнимой частью $\omega'' > 0$. В соответствии с этим частоту ω_0 в (33) также необходимо заменить комплексным числом, но, как легко видеть, не тем же самым, а другим, которое определенным образом, обусловленным механизмом затухания, зависит от частоты вынуждающих колебаний ω , и которое при $\omega = 0$ сводится к вещественному числу.

Представим себе, например, что изотропно и квазиупруго связанный электрон испытывает силу трения, пропорциональную его скорости — ϑv ($\vartheta > 0$). Тогда его уравнение движения [см. (23), § 3] имеет следующий вид:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + \vartheta \frac{dr}{dt} + kr = eE. \quad (34)$$

При $E = 0$, положив $r \sim e^{i\omega t}$, получим „характеристическое уравнение“:

$$-m\omega^2 + i\vartheta\omega + k = 0,$$

или, если подставить сюда $\omega = \omega' + i\omega''$,

$$-m(\omega'^2 - \omega''^2) - \vartheta\omega'' + k + i(-2m\omega'\omega'' + \vartheta\omega') = 0.$$

Следовательно, будем иметь:

$$\omega'' = \frac{\vartheta}{2m}, \quad (35)$$

и

$$\omega'^2 = \omega_0^2 - \frac{\vartheta^2 \omega''^2}{m} + \frac{k}{m} = \frac{k}{m} - \frac{\vartheta^2}{4m^2},$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \pm \sqrt{\omega_0^2 - \omega''^2}, \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned} \right\} \quad (35a)$$

где

Здесь, как и прежде, ω_0 означает ту частоту, которую имели бы свободные колебания при отсутствии затухания ($\delta = 0$).

Таким образом, если вместо \mathbf{r} ввести момент осциллятора $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$, решение уравнения (34) при $E = 0$ можно написать в виде:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}'_0 e^{-\frac{\delta}{2m}t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \omega''^2}t} + \mathbf{p}''_0 e^{-\frac{\delta}{2m}t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \omega''^2}t},$$

где \mathbf{p}'_0 и \mathbf{p}''_0 — два независимых постоянных вектора. Если эти векторы рассматривать как комплексные величины, то можно один из них, например второй, положить равным нулю, не нарушая при этом общности. Тогда получим

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{(i\omega' - \omega'')t}. \quad (35b)$$

При наличии внешнего поля синхронная часть \mathbf{r} определяется уравнением

$$(-m\omega^2 + i\delta\omega + k)\mathbf{r} = e\mathbf{E}.$$

Можно, следовательно, соответствующую часть электрического момента, согласно (35) и (35a), написать в виде:

$$\mathbf{p} = \frac{e^2 \mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega'')}. \quad (36)$$

или, если ввести комплексную амплитуду электрического поля \mathbf{E} ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$)

$$\mathbf{p} = \frac{e^2 \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \varphi)}}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega''^2}}, \quad (36a)$$

где φ — смещение фазы \mathbf{p} относительно \mathbf{E} . Эта разность фаз определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega\omega''}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (36b)$$

и в случае резонанса ($\omega = \omega_0$) равна $\frac{\pi}{2}$. Соответствующая максимальная амплитуда равна

$$p_{\max} = \frac{e^2 E_0}{2m\omega_0 \omega''} = \frac{e^2}{\omega_0 \delta} E_0. \quad (36c)$$

Необходимо подчеркнуть то обстоятельство, что резонансная частота $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \nu_0$ от затухания не зависит и, следовательно, отличается от фактической частоты $\frac{\omega'}{2\pi}$ свободных затухающих колебаний.

Общее решение колебательного уравнения (34) выражается суммой (35b) и (36). Но так как первая, когерентная, часть \mathbf{p} со

временем экспоненциально спадает, то в случае, когда затухание достаточно велико, — ее можно отбросить, что мы фактически и делали в предыдущих параграфах.

Для обобщения формулы (20а), определяющей зависимость тензора поляризации молекулы от частоты, на случай затухающих колебаний, мы прежде всего введем вместо коэффициентов статической поляризации $\alpha_{ik}^{(h)}$ новые безразмерные числовые коэффициенты $f_{ik}^{(h)}$ по формуле:

$$\alpha_{ik}^{(h)} = \frac{e^2}{4\pi^2 m v_h^2} f_{ik}^{(h)}; \quad (37)$$

тогда, при учете затухания, будем иметь

$$\alpha_{ik}(\nu) = \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum \frac{f_{ik}^{(h)}}{v_h^2 - \nu^2 + 2i\nu\nu_h''}, \quad (37a)$$

причем величина $\nu_h = \frac{\omega_h}{2\pi}$, как и прежде, может быть названа собственной или, лучше, резонансной частотой, а $\nu_h'' = \frac{\omega''}{2\pi}$ — частотой затухания или декрементом затухания. Заметим, что эти величины, в случае анизотропного осциллятора, должны иметь различные значения для трех основных колебаний последнего. Поэтому является целесообразным воспользоваться линейными вспомогательными осцилляторами, которые могут колебаться только в одном направлении, т. е. пространственный осциллятор заменить тремя линейными.

Разлагая коэффициенты поляризации α_{ik} на вещественную и мнимую части, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ik} &= \beta_{ik} - i\gamma_{ik} \\ \beta_{ik} &= \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum \frac{(v_h^2 - \nu^2) f_{ik}^{(h)}}{(v_h^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 \nu_h''^2} \\ \gamma_{ik} &= \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum \frac{2\nu\nu_h'' f_{ik}^{(h)}}{(v_h^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 \nu_h''^2} \end{aligned} \right\} \quad (37b)$$

Коэффициенты $f_{ik}^{(h)}$ в случае изотропного осциллятора имеют очень наглядный физический смысл, именно: $f_{11}^{(h)} = 3f_{22}^{(h)} = 3f_{33}^{(h)}$ в этом случае можно трактовать, как число находящихся в одной молекуле изотропно и квазиупруго связанных электронов с зарядом e , массой m и собственной частотой ν_h . Это толкование конечно не необходимо соответствует физической реальности.

Однако во многих случаях на основании оптических измерений для f получаются значения, которые точно или приблизи-

тельно совпадают с химическими данными о числе валентных электронов в отдельных атомах. Это относится к видимой области спектра. Для таких веществ, резонансная частота которых лежит в далекой инфракрасной области, простые целые значения для $f^{(h)}$ получаются, если заменить электроны соответствующими ионами с тем же (или двойным и т. д., смотря по валентности) зарядом и соответствующей массой.

Заметим, что коэффициенты β определяют дисперсию рассматриваемого вещества, т. е. зависимость скорости волн от частоты колебаний (ν), тогда как коэффициенты γ — затухание или поглощение этого вещества. Это затухание, как известно, связано с выделением теплоты. Хотя вопрос этот уже был подробно исследован выше (гл. II, § 5), в совершенно общей форме, мы хотим здесь на простом примере изотропного осциллятора несколько подробнее рассмотреть соответствующий этому процессу элементарный эффект.

Согласно (36), (36a) и (36b) в этом случае можно написать,

$$\left. \begin{aligned} E &= E_0 e^{i\omega t}; & p &= \alpha E; & \alpha &= |\alpha| e^{-i\varphi} = \beta - i\gamma; \\ \beta &= |\alpha| \cos \varphi; & \gamma &= |\alpha| \sin \varphi; & |\alpha| &= \frac{e}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega''^2}}; \\ \beta &= \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega''^2}; & \gamma &= \frac{e^2}{m} \frac{2\omega\omega''}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega''^2}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Работа, произведенная в единицу времени действующим на осциллятор силами, в среднем выражается, как известно, формулой [см. гл. II (41)]

$$\bar{L} = \frac{1}{2} R \left[\left(E^* \cdot \frac{dp}{dt} \right) \right] = \frac{1}{2} R [(i\omega E^* \cdot p)],$$

т. е. согласно (38) и так как $\bar{E}^2 = \frac{1}{2} E_0^2$:

$$\bar{L} = \frac{1}{2} \omega E_0 \cdot p_0 \sin \varphi = \frac{\omega}{2} \gamma E_0^2 = \omega \gamma \bar{E}^2. \quad (38a)$$

В точке резонанса ($\omega = \omega_0$) это выражение приобретает максимальное значение, которое оказывается тем больше, чем меньше затухание.

Если наносить значения L или γ как ординаты, а соответствующие значения ω как абсциссы, то получается так называемая „резонансная кривая“ (рис. 8), которая тем круче спадает в обе стороны от вершины, чем выше лежит эта точка. Вблизи точки резонанса, т. е. при $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, можно приближенно положить

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_0^2 (\omega - \omega_0)^2$$

$$\gamma = \frac{e^2 \omega''}{2m\omega_0} \frac{1}{\omega''^2 + (\omega - \omega_0)^2} = \gamma_{\max} \frac{1}{1 + x^2}, \quad (39)$$

где

$$\gamma_{\max} = \frac{e^2}{2m\omega_0 \omega''} = \frac{e^2}{\omega_0 \vartheta} \quad \text{и} \quad x = \frac{\omega - \omega_0}{\omega''}.$$

Определяя полуширину $\Delta\omega$ резонансной кривой, как горизонтальное расстояние между точками, лежащими на половине высоты кривой, согласно вышеприведенной формуле, получим

$$\Delta\omega = 2\omega'' = \frac{\vartheta}{m}. \quad (39a)$$

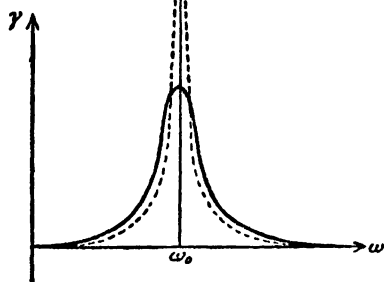


Рис. 8.

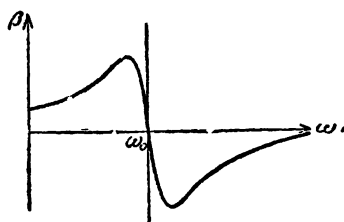


Рис. 9.

Площадь, ограниченная резонансной кривой, определяется при этом с достаточным приближением интегралом

$$\gamma_{\max} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + x^2} = \gamma_{\max} \cdot \omega'' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx^2}{1 + x^2} = \frac{\pi \omega'' e^2}{2m\omega_0 \omega''} = \frac{\pi e^2}{2m\omega_0}. \quad (39b)$$

Она следовательно не зависит от остроты $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ резонанса.

На рис. 9 изображена соответствующая кривой $\gamma(\omega)$ кривая $\beta(\omega)$. Ее форма вблизи точки резонанса приближенно определяется уравнением:

$$\beta = -\gamma x = -\gamma_{\max} \frac{x}{1 + x^2}.$$

Экстремальные значения β лежат друг от друга на расстоянии, приблизительно совпадающем с полушириной. Кривую $\beta(\omega)$ называют обычно кривой дисперсии, а кривую $\gamma(\omega)$ — кривой поглощения. Как мы увидим в следующей главе, первая определяет скорость распространения электромагнитных волн, в материальных телах, а вторая — их поглощение, т. е. уменьшение энергии. Последняя, как уже было упомянуто, должна при этом переходить в механическую и, в конце концов, в тепловую энергию.

Механизм этого перехода теснейшим образом связан с механизмом всего процесса затухания, т. е. с природой силы трения, чисто формальным образом введенной в вышеприведенные рассуждения. Как можно представить себе происхождение такой силы?

2. Затухание, обусловленное излучением. Наиболее простой и универсальной силой такого рода является уже известная нам, введенная Планком, сила трения, связанная с излучением энергии (т. I, стр. 229):

$$\mathbf{f} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{3c^3} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}. \quad (40)$$

Для когерентной части вынужденных гармонических колебаний ($\mathbf{r} \sim e^{i\omega t}$, $\omega = 2\pi\nu$) эту силу можно представить как обыкновенную силу трения, пропорциональную скорости $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$:

$$\mathbf{f} = -\vartheta \mathbf{v} \quad (40a)$$

с зависящим от частоты колебаний коэффициентом трения

$$\vartheta = \frac{8\pi^2\nu^2 e^2}{3c^3}. \quad (40b)$$

Это соответствует, согласно (35a), следующему значению „декремента затухания“ $\nu'' = \frac{\omega''}{2\pi}$:

$$\nu'' = \frac{2\pi e^2 \nu^2}{3c^3} = \frac{\pi a \nu}{\lambda}, \quad (40c)$$

где $a = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2 m}$ обозначает „радиус“ электрона в смысле обычной электромагнитной теории массы (т. I, стр. 218), а $\lambda = \frac{c}{\nu}$ — соответствующую частоте ν длину волны.

Для обыкновенного света λ имеет порядок величина 10^{-5} см, тогда как порядок величины a — 10^{-13} см. Мы видим следовательно, что затуханию вследствие излучения соответствует узкая резонансная кривая с очень высоким максимумом (относительная ширина $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\nu''}{\nu} \cong 10^{-8}$).

Рассмотрим движение осциллятора с учетом затухания вследствие излучения под действием электромагнитного поля световых волн. Соответствующее уравнение движения имеет следующий вид [ср. формулу (23)]:

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} + k\mathbf{r} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (41)$$

причем магнитную силу \mathbf{F} , представленную последним членом, можно трактовать как силу светового давления. Для того, чтобы определить эту силу в первом приближении, достаточно для скорости \mathbf{v} подставить нулевое приближение [ср. выводы (28а), § 3]. При $H=0$ имеем:

$$(-m\omega^2 + i\partial\omega + k)\mathbf{r} = e\mathbf{E},$$

и следовательно

$$\frac{e}{c} \mathbf{v} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{p},$$

где \mathbf{p} определяется по прежней формуле (38), а ∂ — из (40b). Мы получаем таким образом следующее выражение для среднего значения силы \mathbf{F} :

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} R \left[\left(\frac{i\omega}{c} \mathbf{p} \times \mathbf{H}^* \right) \right] = \frac{1}{2} R \left[\left(i \frac{\omega}{c} \alpha \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \right]. \quad (41a)$$

В случае плоских электромагнитных волн имеем соотношение $\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = n\mathbf{E}_0^2$, где \mathbf{n} , как обычно, обозначает нормаль к волновым поверхностям. Далее [см. (38а)] $\frac{1}{2} \mathbf{E}_0^2 = \bar{\mathbf{E}}^2$ и $R[(i\alpha)] = \gamma$. Следовательно искомое среднее световое давление равно:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{n} \frac{\omega}{c} \gamma \bar{\mathbf{E}}^2 = \mathbf{n} \frac{\bar{L}}{c}, \quad (41b)$$

где L обозначает среднее значение работы электрической силы за единицу времени. Это соотношение полностью совпадает с соответствующим отношением между энергией (ξ) и количеством движения $\left(\mathbf{g} = \mathbf{n} \frac{\xi}{c} \right)$ электромагнитных волн. Оно выражает тот факт, что сообщенные осциллятору в единицу времени механические энергия и количество движения находятся друг с другом в таком же соотношении, как и соответствующие электромагнитные величины.

3. Затухание вследствие столкновений. В случае обычных не слишком разреженных газов молекулы (или атомы) чрезвычайно часто сталкиваются друг с другом. Благодаря этим столкновениям, рассмотренные выше стационарные вынужденные колебания (с постоянной частотой и амплитудой) фактически не могут осуществляться. В самом деле, при каждом столкновении вынужденные колебания должны либо как-то измениться, либо совсем прекратиться и потом вновь возникнуть. Время τ , протекающее между двумя столкновениями, может быть при этом настолько мало, что колебательный процесс в конце этого периода остается еще очень удаленным от того стационарного состояния, которое соответствует затуханию некогерентных колебаний.

Соответствующий затуханию вследствие излучения декремент ν'' для свободных колебаний с собственной частотой ν выражается приблизительно той же самой формулой (40с), как и для вынужденных когерентных колебаний с той же частотой. Амплитуда этих свободных колебаний спадает во времени по экспоненциальному закону $e^{-\omega''t} = e^{-2\pi\nu''t}$ [см. (35с)]. Относительное уменьшение амплитуды (по отношению к ее первоначальному значению) за промежутки времени τ равно, следовательно, $e^{-\omega''\tau}$. При распространении световых волн, соответствующих видимой области спектра, в газе при нормальных температуре и давлении, имеем согласно (40с) $\omega'' \cong 10^{-8} \cdot 10^{15} = 10^7$ и $\tau \cong 10^{-9} - 10^{-10}$. Произведение $\omega''\tau$ таким образом приблизительно равно $10^{-2} - 10^{-3}$. Затухание свободных колебаний в промежутке времени между двумя последовательными столкновениями какой-нибудь молекулы с другими остается, следовательно, незначительным, так что затуханием вследствие излучения можно практически пренебречь и эти колебания трактовать как совершенно незатухающие.

При таких условиях вместо затухания вследствие излучения выступает на первый план гораздо более мощное затухание, которое зависит от нарушения вынужденных колебаний молекулы при ее столкновении с другими молекулами. Это затухание, впервые исследованное Лоренцом, обычно называют затуханием вследствие столкновений (Stossdämpfung, collision damping). Его механизм можно себе представить следующим образом. В промежутке времени τ между двумя столкновениями каждая молекула подвержена действиям исключительно внешних электрических сил. При этом производимая последними, в среднем, работа равна дополнительной механической энергии L , которую получают заменяющие молекулу осцилляторы за счет электромагнитной энергии окружающего их поля. При столкновении двух молекул эта „внутримолекулярная“ механическая энергия переходит в кинетическую энергию их поступательного или вращательного движения, т. е. в тепло. Приведенное представление является, само собой разумеется, очень схематичным и выражает только средние соотношения, не учитывая имеющихся при этом флюктуаций. Оно однако вполне достаточно для приближенного определения декремента затухания, и соответствующего ему „эффективного“ коэффициента трения ϑ .

Ради простоты мы будем трактовать молекулы как изотропные гармонические осцилляторы рассмотренного в начале этого параграфа вида. Мы попытаемся представить затухание сперва формально посредством непрерывно действующей силы трения — ϑv . Работа, которая должна быть затрачена в единицу времени против этой силы, очевидно равна ϑv^2 , или в среднем за время τ

$$L = \overline{\vartheta v^2} \tau.$$

Эта работа должна быть равна полученной за время τ энергии W . Последняя состоит из кинетической энергии $\frac{1}{2} m v^2$ и потенциальной энергии $\frac{1}{2} k r^2$, которые, в среднем, имеют одинаковое значение. Следовательно

$$\overline{W} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} + \frac{1}{2} k \overline{r^2} = m \overline{v^2},$$

откуда вытекает, если учесть соотношение $\overline{W} = \frac{1}{2} W$,¹ что

$$\vartheta \overline{v^2} \tau = 2m \overline{v^2},$$

т. е.

$$\vartheta = \frac{2m}{\tau} \quad (42)$$

или согласно (35а):

$$\omega'' = \frac{1}{\tau} = 2\kappa v'' \quad (42a)$$

Этот результат, согласно Лоренцу, можно вывести еще следующим путем, который является более сложным, чем приведенный формальный вывод, но который по сравнению с ним является более наглядным.

Как уже было указано, вынужденные колебания электрона в молекуле, за промежуток времени, протекающий между двумя столкновениями, фактически остаются совершенно незапускающими (если, конечно, пренебречь затуханием вследствие излучения). Электрический момент молекулы в этом интервале времени можно следовательно представить, как функцию от времени, формулой

$$p = \alpha e^{i\omega t} + \alpha' e^{i\omega_0 t} + \alpha'' e^{-i\omega_0 t}, \quad (43)$$

где для сокращения положено

$$\alpha = \frac{e^2 E_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2)};$$

α' и α'' — пока неопределенные постоянные, которые мы выберем таким образом, чтобы в „начальный“ момент времени $t_0 < t$, p и $\frac{dp}{dt}$ обращались в нуль. Этот момент времени соответствует предшествующему столкновению, при котором осциллятор был приведен в состояние покоя. Следовательно имеем

$$\begin{aligned} \alpha e^{i\omega t_0} + \alpha' e^{i\omega_0 t_0} + \alpha'' e^{-i\omega_0 t_0} &= 0, \\ \frac{\omega}{\omega_0} \alpha e^{i\omega t_0} + \alpha' e^{i\omega_0 t_0} - \alpha'' e^{-i\omega_0 t_0} &= 0, \end{aligned}$$

¹ Напомним, что W обозначает не среднюю, а максимальную энергию, которую осциллятор может накопить в течение времени τ . При этом предполагается, что эта энергия растет пропорционально времени.

откуда

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0} \right) e^{i(\omega - \omega_0) t_0},$$

$$\alpha'' = -\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) e^{i(\omega + \omega_0) t_0}$$

или, положив $t - t_0 = t'$, согласно (43):

$$p = \alpha e^{i\omega t} \left[1 - \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} e^{i(\omega_0 - \omega) t'} - \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0} e^{-i(\omega_0 + \omega) t'} \right]. \quad (43a)$$

Представленные этой формулой колебания можно трактовать как наложение трех колебаний с одинаковой частотой, $\frac{\omega}{2\pi}$, амплитуды которых не являются постоянными, а колеблются с частотами 0, $\frac{\omega_0 - \omega}{2\pi}$, $\frac{\omega_0 + \omega}{2\pi}$. Чтобы лучше уяснить характер

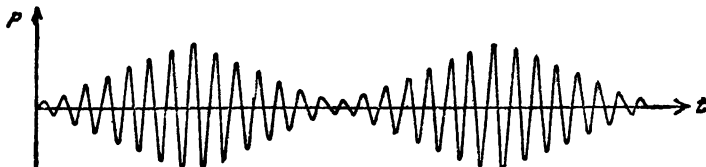


Рис. 10.

этого процесса, рассмотрим частный случай $t_0 = 0$. Переходя к вещественным величинам, получаем просто

$$p = \alpha (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) = 2\alpha \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t. \quad (43b)$$

Этот результат можно тотчас же вывести из вещественного представления $p (= \alpha \cos \omega t + \beta' \cos \omega_0 t + \beta'' \sin \omega_0 t)$ при условии, что при $t = 0$

$$p = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dt} = 0.$$

Формула (43b) определяет биеения, которые можно рассматривать как гармонические колебания с частотой $\frac{\omega_0 + \omega}{4\pi}$ и амплитуда которых, в свою очередь, колеблется с относительно малой — особенно вблизи резонанса — частотой $\frac{\omega_0 - \omega}{4\pi}$ (рис. 10).

Заметим, что амплитуда, возрастая от своей первоначальной величины, равной нулю, достигает максимального значения 2α за промежуток времени $T = \frac{2\pi}{|\omega_0 - \omega|}$, затем опять падает до нуля и т. д. В случае резонанса ($\omega = \omega_0$) $T = \infty$, т. е. амплитуда должна

непрерывно возрастать, а именно, как легко видеть, пропорционально времени. В самом деле, в этом случае из (43b) получаем

$$p = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{2e^2 E_0 \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right) t \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} =$$

$$= \frac{e^2 E_0}{m\omega_0} \cos \omega_0 t \cdot \lim \left(\frac{\sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t}{\omega_0 - \omega} \right),$$

т. е.

$$p = \frac{e^2 E_0}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t. \quad (43c)$$

Механизм затухания вследствие столкновений состоит в торможении или уничтожении после каждого столкновения биений описанного типа. Вблизи резонансной частоты эти биения „умервляются“ уже в своей начальной стадии.

Чтобы определить среднее значение электрического момента большого количества молекул для одного и того же момента времени t , необходимо вычислить среднее значение выражения (43a) для различных значений времени t' , протекшего с момента последнего столкновения. Но вероятность того, что молекула в течение времени t' не испытала ни одного столкновения, равна, как известно:

$$e^{-\frac{t'}{\tau}}, \quad (44)$$

где τ есть среднее (или наиболее вероятное) значение t' . Следовательно вероятность того, что последнее столкновение имело место в промежутке времени между t' и $t' + dt'$, выражается формулой

$$\left| de^{-\frac{t'}{\tau}} \right| = e^{-\frac{t'}{\tau}} \frac{dt'}{\tau}.$$

Мы должны (43a) умножить на это выражение и проинтегрировать по t' от 0 до ∞ . При этом в силу известной формулы

$$\int_0^{\infty} e^{-(x+iy)t} dt = \frac{1}{x+iy} \quad (x > 0)$$

будем иметь

$$p = \frac{e^2}{m} \frac{E_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[1 - \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} \frac{1}{1 - i(\omega_0 - \omega)\tau} - \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0} \frac{1}{1 + i(\omega_0 + \omega)\tau} \right]$$

или, окончательно, после элементарных вычислений:

$$\bar{p} = \frac{e^2}{m} \frac{E_0 e^{i\omega t}}{\left(\omega_0^2 + \frac{1}{\tau^2}\right) - \omega^2 + 2i\frac{\omega}{\tau}}. \quad (44a)$$

Эта формула, если не обращать внимания на дополнительный член $\frac{1}{\tau^2}$ при ω_0^2 , в точности совпадает с нашей первоначальной формулой (36) при найденном выше значении $\omega'' = \frac{1}{\tau}$ для декремента затухания; при обычных обстоятельствах величина $\frac{1}{\tau^2}$ очень мала по сравнению с ω_0^2 , так что она может быть опущена в (44a). Заметим, что время τ равно $\frac{l}{v}$, где l — средняя длина пути, а v — средняя скорость газовой молекулы. При этом приближенно

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k T$$

(m = масса молекулы, T = температура). Таким образом

$$\omega'' = \frac{1}{\tau} \cong \frac{1}{l} \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (44b)$$

Следовательно при низких температурах затухание вследствие столкновений должно стремиться к нулю.

Приведенную теорию Лоренца можно чисто формальным образом перенести на случай жидких и твердых тел. При этом понятие „столкновения“ в собственном смысле слова необходимо совершенно отбросить, так как молекулы и атомы этих тел находятся в непрерывном взаимодействии друг с другом. Однако, можно себе представить, что превращение колебательной энергии скрытых в атомах осцилляторов в кинетическую энергию самих атомов происходит только при определенных условиях, так что в течение некоторого промежутка времени колебательный процесс в каждом атоме может развиваться без всяких возмущений. Если для этого „промежутка времени“ принять тот же закон (44), как и в случае газов, то формула для электрического момента принимает вид (44a). Что же касается значения среднего времени τ , то о нем а priori нельзя ничего определенного сказать. Во всяком случае оно должно быть гораздо меньше времени между двумя столкновениями в случае газа и так же, как и последнее, должно возрастать при понижении температуры.

Впрочем процесс затухания в случае жидких и твердых тел можно также объяснить непрерывным образом действующими силами трения. Эти силы могут быть сведены к дополнительным

механическим силам взаимодействия между соседними молекулами, которые зависят от их индуцированных электрических моментов. В случае многоатомных молекул такие силы должны существовать также и между отдельными атомами одной и той же молекулы, поскольку они не жестко связаны и могут колебаться относительно общего центра тяжести. Энергия электрических колебаний в отдельных атомах должна при этом переходить частично в энергию этих механических колебаний, т. е. в тепловую энергию образованной этими атомами молекулы. К тому же самому сводится, вероятно, механизм превращения внутренней колебательной энергии газовых молекул или атомов в их кинетическую энергию при столкновениях — превращение, которое теория Лоренца постулирует, но отнюдь не объясняет.

§ 5. Ориентационная поляризация и соответствующее ей затухание в гармонически колеблющихся полях.

Теоретическое определение ориентационной поляризации и соответствующего ей затухания для гармонически колеблющихся полей можно провести совершенно иным способом, чем для случая обыкновенной стрикционной поляризации, а именно, с помощью метода, впервые введенного Эйнштейном в теорию броуновского движения, который затем был применен Дебаем к рассматриваемому здесь вопросу и который в следующем параграфе мы применим к исследованию электрической проводимости.

1. Общая теория диффузионного движения с трением. Для разъяснения этого метода рассмотрим сперва следующую одномерную задачу.

Представим себе тело, частицы которого могут двигаться параллельно определенному направлению, которое мы выберем за ось X . При отсутствии внешних сил положительные и отрицательные скорости можно считать равновероятными, так что средняя скорость \bar{v} частицы должна быть равна нулю. Если концентрация частиц (n) не постоянна, а зависит от x , то числа частиц, проходящих в положительном и отрицательном направлениях через поверхность, перпендикулярную к оси X , должны быть различны, несмотря на одинаковую вероятность равных по величине, положительных и отрицательных скоростей, а именно: в направлении убывающей концентрации должен возникнуть диффузионный ток. Плотность этого тока J , т. е. разность между числом частиц, проходящих за единицу времени через единицу площади в положительном и отрицательном направлениях, пропорциональна падению концентрации — $\frac{dn}{dx}$, т. е. равна

$$J = -D \frac{dn}{dx}, \quad (45)$$

где D означает „коэффициент диффузии“.

При наличии действующей в положительном направлении внешней силы положительные скорости должны быть вероятнее (или больше), чем отрицательные. При этом мы предположим, что средняя скорость v частицы пропорциональна действующей на нее средней эффективной силе f . Вводя „коэффициент трения“ ϑ , можно следовательно положить

$$\vartheta \bar{v} = f. \quad (45a)$$

При равномерном распределении частиц, т. е. при постоянной концентрации, получается конвекционный ток плотности $K = n\bar{v}$, т. е.

$$K = \frac{n}{\vartheta} f. \quad (45b)$$

Концентрация со временем должна меняться согласно следующему уравнению:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (J + K) = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{n}{\vartheta} f \right). \quad (46)$$

Если сила f постоянна во времени, то в конце концов должно установиться стационарное состояние, при котором конвекционный и диффузионный токи как раз компенсируют друг друга; это условие выражается уравнением

$$D \frac{dn}{dx} - \frac{n}{\vartheta} f = 0, \quad (46a)$$

или, если ввести соответствующую силе f потенциальную энергию U по формуле

$$f = - \frac{dU}{dx}, \quad (46b)$$

и разделить вышеприведенное уравнение на $\frac{n}{\vartheta}$:

$$D\vartheta \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} + \frac{dU}{dx} = 0.$$

Вследствие постоянства D и ϑ получаем

$$D\vartheta \lg n + U = \text{const}$$

или окончательно

$$n = \text{const} \cdot e^{-\frac{U}{D\vartheta}}. \quad (47)$$

Но с другой стороны стационарное распределение частиц должно определяться общим законом Больцмана:

$$n = \text{const} \cdot e^{-\frac{U}{kT}}, \quad (47a)$$

где, как обычно, k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура рассматриваемого тела. Отсюда следует замечательное, выведенное Эйнштейном, соотношение:

$$D\vartheta = kT. \quad (47b)$$

Заметим, что в этом соотношении температура является не мерой средней кинетической энергии частицы, а параметром больцмановского закона распределения. Своеобразие приведенного вывода заключается как раз в его общности, которая не ограничивается какими-нибудь специальными предположениями относительно характера движения. Это движение при отсутствии внешних сил является совершенно беспорядочным и подчиняется закону диффузии (45). „Закон трения“ (45a) можно при этом рассматривать как следствие последнего и закона распределения Больцмана (47a). Эквивалентное этому закону уравнение (46a) можно, благодаря (47b), переписать в виде

$$\frac{dp}{dx} = F, \quad (48)$$

где

$$p = nkT, \quad F = nf, \quad (48a)$$

что выражает известный закон гидростатического равновесия [(69), гл. II], причем величину p нужно трактовать как гидростатическое давление — в согласии с обычным выражением элементарной теории газов или теории осмотического давления разведенных растворов.

2. Приложение к теории ориентационной поляризации. Изложенная теория оказывается применимой не только к поступательному движению, но, при небольшой формальной модификации, также и к вращательному движению молекул в жидких и отчасти газообразных телах.

Для этого вместо координаты положения x нужно в формулах (45) до (47b) ввести угловую координату θ (или в общем случае неплоского вращения две угловых координаты θ, φ) и заменить величины n, D, f, ϑ соответствующими угловыми величинами. Для последних трех величин мы сохраним прежнее обозначение. Что же касается концентрации n , то относительно нее необходимо заметить следующее. В рассмотренном выше случае произведение $n dx$ равнялось числу молекул, находящихся в интервале от x до $x + dx$. В соответствии с этим $n d\theta$ должно быть равно (относительному) числу частиц, дипольные моменты которых p образуют с некоторым заданным постоянным направлением (например, с направлением амплитуды E_0 электрических колебаний) угол, лежащий в пределах от θ до $\theta + d\theta$. Определенное таким образом число n означает при этом не истинную „концентрацию“ направлений n' , а, как легко видеть, произведение истинной концентрации молекул n' на $2\pi \sin \theta$, ибо соот-

ветствующий интервалу $d\theta$ элемент телесного угла, очевидно, равен $2\pi \sin \theta d\theta$. Следовательно $n' 2\pi \sin \theta d\theta = n d\theta$, т. е.

$$n = 2\pi n' \sin \theta. \quad (49)$$

Ради простоты мы будем рассматривать вращение молекул только в меридиональной плоскости, содержащей „полярную ось“ E_0 (их распределение по азимуту, очевидно, не может меняться под действием электрического поля и поэтому должно оставаться равномерным). Выражение (45) для плотности диффузионного тока заменяется тогда следующим:

$$I = -2\pi \sin \theta D \frac{dn'}{d\theta}. \quad (49a)$$

Соответственно этому вместо уравнения (46) имеем уравнение

$$\sin \theta \frac{\partial n'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D \sin \theta \frac{\partial n'}{\partial \theta} - \frac{n' \sin \theta}{\vartheta} f \right),$$

где f обозначает вращательный момент, действующий на молекулу со стороны электрического поля $E = E_0 e^{i\omega t}$;

$$f = |\mathbf{p} \times \mathbf{E}| = -pE \sin \theta. \quad (49b)$$

Знак минус здесь поставлен потому, что при положительном направлении поля E этот момент стремится уменьшить угол θ , т. е. действует в отрицательном направлении.

Принимая во внимание (47b), получаем следующее основное уравнение для „ориентационной концентрации“ или „функции распределения“ n' :

$$\vartheta \frac{\partial n'}{\partial t} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(kT \sin \theta \frac{\partial n'}{\partial \theta} + n' p E_0 e^{i\omega t} \sin^2 \theta \right). \quad (50)$$

Это уравнение, при условии $\frac{pE_0}{kT} \ll 1$, можно решить методом последовательных приближений. Именно, в нулевом приближении ($E_0 = 0$) имеем:

$$\vartheta \frac{\partial n'}{\partial t} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial n'_0}{\partial \theta} \right) \quad (50a)$$

и, далее, в первом приближении, полагая $n' = n'_0 + n'_1$:

$$\vartheta \frac{\partial n'_1}{\partial t} = \frac{kT}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial n'_1}{\partial \theta} \right) + pE_0 e^{i\omega t} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (n'_0 \sin^2 \theta). \quad (50b)$$

Для получения стационарного состояния можно просто положить $n'_0 = \text{const}$ (что соответствует равномерному распределению моментов по углам при отсутствии внешних сил). Тогда для n'_1 получается частное решение вида

$$n'_1 = A e^{i\omega t} \cos \theta,$$

где

$$A = \frac{n'_0 p E_0}{kT + \frac{i\omega\vartheta}{2}}.$$

Таким образом имеем:

$$n' = \text{const} \left(1 + \frac{p E_0 e^{i\omega t}}{kT + \frac{i\omega\vartheta}{2}} \cos \theta \right). \quad (51)$$

При $\omega = 0$ эта формула совпадает с известной приближенной формой закона распределения Больцмана:

$$e^{-\frac{pE}{kT} \cos \theta} \cong \left(1 + \frac{pE}{kT} \cos \theta \right)$$

[см. (9) § 1]. Умножая (51) на $Np \cos \theta$ (N — число молекул в единице объема) и усредняя по всем направлениям ($\overline{\cos \theta} = 0$, $\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{3}$), окончательно получаем следующую формулу для ориентационной поляризации

$$P = \frac{1}{3} \frac{Np^2 E_0 e^{i\omega t}}{kT + \frac{i\omega\vartheta}{2}}. \quad (51a)$$

При $\omega = 0$ она переходит в первый член ранее выведенной формулы (8b).

Чтобы определить порядок величины коэффициента трения ϑ , представим себе молекулу (вместе с Дебаем или, вернее, с Эйнштейном) в виде маленького шарика с радиусом $a \cong 10^{-8}$ см и будем трактовать ее как обыкновенный шар макроскопических размеров. Если такой шар вращается с угловой скоростью $\frac{d\theta}{dt}$ в жидкости с коэффициентом трения η , то, как показывает в гидродинамике, вращательный момент действующих на него сил трения равен $-8\pi\eta a^3 \frac{d\theta}{dt}$. Следовательно приближенно можно положить

$$\vartheta \cong 8\pi\eta a^3.$$

В случае воды ($\eta \cong 10^{-2}$) эта формула дает

$$\vartheta \cong 10^{-26}.$$

Для световых колебаний с частотой, лежащей в видимой области спектра ($\omega \cong 10^{15} - 10^{16}$), имеем следовательно

$$\frac{\omega\vartheta}{2} \cong 10^{-10},$$

тогда как величина kT для обычных температур равна примерно 10^{-13} .

Поэтому как в этом случае, так и вообще в случае очень быстрых колебаний можно влиянием температуры пренебречь и в формуле (51a) положить $T=0$.

Заметим, что общее решение уравнения (50a) можно представить в форме следующего ряда

$$n'_0 = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-s \frac{kT}{\vartheta} t} P_s(\cos \theta), \quad (51b)$$

где $P_s(\cos \theta)$ — полином Лежандра соответствующего порядка $\left[P_0 = 1, P_1 = \cos \theta, P_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$ и т. д.

Это выражение соответствует с в о б о д н ы м колебаниям затухающего осциллятора, но с настолько сильным затуханием, что фактически не может произойти ни одного колебания, так что весь процесс является аperiодическим [этот случай, согласно (35b), имеет место при $\frac{\vartheta}{\sqrt{2m}} > \omega_0$].

Время спадания, или, как его обычно называют, время релаксации, т. е. промежуток времени, в течение которого первоначально неоднородное распределение направлений молекул при отсутствии электрического поля практически становится однородным, или промежуток времени, в течение которого равномерное распределение при наличии электрического поля переходит в стационарное распределение, определяемое уравнением (51), имеет согласно (51b) порядок величины

$$\frac{\vartheta}{kT};$$

для воды при обыкновенных условиях оно равно примерно 10^{-11} сек.

Формула (51a) соответствует когерентной части вынужденных колебаний гармонического осциллятора с коэффициентом поляризации

$$\alpha = \frac{\rho^2}{3} \frac{1}{kT + i \frac{\omega \vartheta}{2}}.$$

В этом случае следовательно не имеется резонанса. При возрастании частоты α монотонно падает. Работа, затраченная за единицу времени в единице объема на эти вынуж-

денные вращательные колебания", согласно (38а) выражается формулой:

$$\bar{L} = N\omega\gamma\bar{E}^2 = \frac{Np^2}{6} \frac{\omega}{(kT)^2 + \frac{\omega^2\gamma^2}{4}} \bar{E}^2. \quad (52)$$

Максимального значения она достигает при $\frac{\omega\gamma}{2} = kT$, т. е. при

$$\omega = \frac{2kT}{\gamma}. \quad (52a)$$

Работа (52) очевидно равна теплу, выделяющемуся (в единице объема за единицу времени) в рассматриваемом теле.

§ 6. Электрическая проводимость.

1. Общая теория электрической проводимости. Главный источник тепла, которое возникает в материальных телах при электрических колебаниях малой частоты, лежит не в связанном с электрической поляризацией затухании, а в токе проводимости, зависящем от свободных электронов или от свободно движущихся ионов. В противоположность поляризационному току, ток проводимости может иметь место в случае постоянного во времени поля, причем его сила определяется законом Ома:

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{c}, \quad (53)$$

выделяющее ся тепло — законом Джоуля

$$L = \sigma E^2. \quad (53a)$$

Эти формулы относятся, само собою разумеется, к изотропным телам. Если соответствующее тело имеет несколько сортов ионов (включая свободные электроны), то силу тока можно представить суммой

$$\mathbf{j} = \sum_i \frac{e_i}{c} n_i \bar{\mathbf{v}}_i, \quad (54)$$

где e_i , n_i и $\bar{\mathbf{v}}_i$ означают заряды, концентрации и средние скорости различных сортов ионов. Мы примем, что при отсутствии внешних (или эффективных) электрических сил ионы движутся совершенно беспорядочным образом и, что далее, под действием обусловленной эффективным полем \mathbf{E} силы $\mathbf{f}_i = e_i \mathbf{E}$ соответствующие ионы приобретают среднюю скорость

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \frac{e_i \mathbf{E}}{\gamma_i}. \quad (54a)$$

Подставляя это выражение в (54), получаем:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{c} \left(\sum_i \frac{e_i^2 n_i}{\vartheta_i} \right) \mathbf{E}, \quad (54b)$$

т. е. мы приходим к закону Ома со следующим значением для проводимости

$$\sigma = \sum_i \frac{e_i^2 n_i}{\vartheta_i}. \quad (54c)$$

Мы ограничимся сперва для простоты рассмотрением ионов одного сорта и будем предполагать остальные совершенно неподвижными. Вводя вместо коэффициента трения ϑ коэффициент диффузии D , по формуле Эйнштейна (47b) получаем

$$\sigma = \frac{e^2 n D}{kT}. \quad (55)$$

Теоретическая оценка электрической проводимости сводится, согласно этой формуле, поскольку концентрация ионов известна, к определению их коэффициентов диффузии; для различных тел — газообразных, жидких и твердых — можно при этом положить

$$D = \frac{\bar{r}^2}{6t}, \quad (55a)$$

где \bar{r}^2 — среднее значение квадрата смещения иона за время t при отсутствии внешних сил.

Приведенную формулу можно получить следующим образом. Будем наблюдать за некоторым количеством ионов, которые первоначально, т. е. в момент времени $t=0$, находились вблизи нулевой точки $\mathbf{r}=0$. Вследствие своего беспорядочного движения, рассматриваемые ионы постепенно рассеются по всему пространству, и притом равномерно по всем направлениям. Их концентрацию m (которую не следует смешивать с полной концентрацией n) нужно следовательно рассматривать как функцию времени и расстояния $r=|\mathbf{r}|$, удовлетворяющую при $t=0$ условию $m=0$ для $r>0$ и $m=\infty$ для $r=0$, а, кроме того, для всех времен, условию

$$\int m dV = \int_0^\infty 4\pi m r^2 dr = M = \text{const},$$

которое выражает сохранение числа рассматриваемых ионов.

Эту функцию нужно определить, в согласии с поставленными условиями, как решение дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D \nabla^2 m.$$

При этом, так как m от направления радиуса-вектора не зависит, можно положить $\nabla^2 m = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rm)$ и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} (mr) = D \frac{\partial^2 (rm)}{\partial r^2}.$$

Искомое решение, как легко убедиться, выражается формулой

$$m = \frac{M}{(2\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}.$$

Отсюда после простого вычисления следует:

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{M} \int_0^{\infty} r^2 m 4\pi r^2 dr = 6Dt.$$

Заметим, что среднее значение векторного смещения \mathbf{r} ионов равно нулю, тогда как среднее значение абсолютной величины \mathbf{r} имеет отличное от нуля значение:

$$\bar{r} = \frac{1}{M} \int_0^{\infty} rm 4\pi r^2 dr = \sqrt{\frac{4}{\pi}} Dt.$$

Таким образом выражение (55a) можно заменить следующим:

$$D = \frac{\pi(\bar{r})^2}{4t}. \quad (55b)$$

Эти формулы справедливы, строго говоря, только для макроскопических смещений и интервалов времени. Но они должны приближенно оставаться справедливыми также и для микроскопических смещений и времен, поскольку последние превышают определенные предельные значения, которые мы назовем элементарным смещением (l) и элементарным временем (τ). Элементарные смещения можно определить как те наименьшие возможные смещения, направления которых независимы друг от друга, т. е. распределены по законам случайности. Элементарные времена равны соответствующим интервалам времени.

2. Электрическая проводимость газов. В случае газов, очевидно, элементарное смещение в нашем смысле совпадает с длиной свободного пути, а элементарное время со временем между двумя последовательными столкновениями. Вероятность того, что молекула пройдет путь, равный и больший r , без столкновений, как известно, равна $e^{-\frac{r}{l}}$, где l сред-

няя длина свободного пути. Отсюда для среднего значения квадрата смещения получается

$$\bar{r}^2 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r}{l}} r^2 \frac{dr}{l} = 2l^2.$$

Подставляя это значение в (55b) и вводя вместо l среднее время между столкновениями τ , получим

$$D = \frac{1}{3} \frac{l^2}{\tau} = \frac{1}{3} lv, \quad (56)$$

где v — средняя скорость беспорядочного движения ионов. Эта скорость, как функция температуры, приближенно выражается формулой

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (56a)$$

Мы не будем останавливаться на точном определении численных коэффициентов хотя бы уже по той причине, что замена макроскопических величин в (55a) микроскопическими, строго говоря, недопустима. При пользовании формулой (55b) вместо (55a) мы получили бы, например, вместо (56) величину

$$D = \frac{\pi}{4} \frac{l^2}{\tau}.$$

Электрическую проводимость газа, поскольку она зависит от ионов рассматриваемого сорта, согласно (55), (56) и (56a) можно представить следующим образом:

$$\sigma = \frac{e^2 n l}{m v}. \quad (56b)$$

Обычно эта формула выводится гораздо более простым образом. Именно, рассматривается дополнительная скорость Δv , которую ион приобретает под действием электрической силы eE за промежуток времени τ между двумя последовательными столкновениями. Так как соответствующее ускорение равно

$$\frac{eE}{m},$$

то

$$\Delta v = \frac{eE}{m} \tau = \frac{eE}{m v} l.$$

Чтобы получить среднее значение этой дополнительной скорости, необходимо предыдущую величину разделить пополам. При этом для силы тока получается выражение

$$\mathbf{j} = \frac{en}{c} \overline{\Delta v} = \frac{ne^2 l}{2m v c} \mathbf{E} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E}$$

со значением σ , которое отличается от (56а) только множителем $\frac{1}{2}$.¹

3. Проводимость жидких и твердых электролитов. Вышеприведенный простой метод применим однако только в случае газов. В случае же жидких и твердых тел тепловое движение атомов и ионов следует представлять себе совершенно иначе, чем в газах. Тот факт, что атомная теплоемкость жидкостей и твердых тел имеет приблизительно одинаковое значение (6 кал.), и притом в два раза большее, чем у газов, показывает: 1) что атомы и ионы жидкости колеблются около определенных положений равновесия, как это происходит в твердых телах и 2) что эти положения равновесия в твердых телах, так же, как и в жидкостях, не являются неизменными, а постепенно перемещаются по всему объему тела. Мы здесь не можем входить в подробности этого вопроса. Для наших целей достаточно установить тот факт, что элементарные смещения ионов в жидких и твердых телах состоят в переходах от одного положения равновесия к другому.

Эти элементарные смещения (l) должны быть, очевидно, того же порядка величины, как и расстояния между соседними атомами или молекулами. Что же касается соответствующих элементарных времен τ , то они состоят из двух частей: из времени колебания τ' около одного и того же положения равновесия и из собственно времени перехода τ'' к следующему. Это время перехода или „скачка“ должно быть вообще малым по сравнению с временем колебания. Легко показать, что последнее связано с периодом свободных колебаний τ_0 соотношением вида

$$\tau' = \tau_0 e^{\frac{U'}{kT}}, \quad (57)$$

где U' есть энергия, необходимая для отрыва от положения равновесия.² Отношение $\frac{\tau'}{\tau_0} = e^{\frac{U'}{kT}}$ равно среднему числу колебаний, которое атом или ион может совершить около одного и того же положения равновесия. Это число — особенно у твердых тел и при низких температурах — может быть очень большим (порядка нескольких степеней десяти). Наоборот, время скачка должно всегда оставаться того же порядка величины, что и пе-

¹ Чтобы получить численное совпадение, нужно было бы в первоначальном методе определить коэффициент диффузии по формуле:

$$\frac{1}{6} \frac{l^2}{\tau} = \frac{1}{6} lv.$$

² Эту формулу можно рассматривать как прямое следствие закона распределения Больцмана в связи с тем обстоятельством, что вероятности двух различных состояний (в нашем случае состояний колебания и перехода) пропорциональны средним временам пребывания в этих состояниях.

риод колебания. Отношение $\frac{l}{\tau''}$ поэтому должно быть приблизительно равным определяемой формулой (56а) средней скорости теплового движения, тогда как входящая в (56) средняя скорость перемещения $v = \frac{l}{\tau' + \tau''}$ должна составлять только очень небольшую часть скорости теплового движения. Если пренебречь τ'' по сравнению с τ' , то для коэффициента диффузии ионов получается формула

$$D = \frac{l^2 e^{-\frac{U'}{kT}}}{6\tau_0}, \quad (57a)$$

и соответственно этому для электрической проводимости:

$$\sigma = \frac{e^2 n l^2 e^{-\frac{U'}{kT}}}{6\tau_0 kT}. \quad (57b)$$

Эта формула относится к электролитически проводящим телам, т. е. к таким (жидким и твердым) телам, которые не имеют свободных электронов, и где ток состоит в движении ионов в собственном смысле слова, т. е. в переносе заряженных атомов и атомных групп.¹

Впрочем аналогичные результаты получаются также для так называемых „электронных полупроводников“. Под этим названием подразумеваются такие тела, у которых проводимость обусловлена наличием свободных электронов, так же как и у металлов, но у которых в отличие от металлов число электронов сравнительно мало, возрастая с понижением температуры по формуле $n = ce^{-\frac{U}{kT}}$. При этом средняя скорость беспорядочного (теплового) движения электронов определяется обычной формулой $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT$. Таким образом для проводимости получается в этом случае выражение

$$\sigma = \frac{ce^2 l e^{-\frac{U}{kT}}}{m v}. \quad (58)$$

4. Проводимость металлов. В случае металлов, проводимость которых обусловлена исключительно свободными электронами, приведенные выше представления о движении ионов в газах или в жидких и твердых телах, а также свободных электронов в полупроводниках, оказываются неприменимыми.

В самом деле, электроны, называемые „свободными“, являются не чем иным, как теми „валентными“ электронами, которые

¹ Концентрация n свободно движущихся ионов должна при этом составлять, особенно в случае твердого тела, очень незначительную часть концентрации всех атомов или также всех ионов (если считать подвижными только диссоциировавшие ионы).

в парообразном состоянии соответствующего металла являются наименее прочно связанными с отдельными атомами. Если согласно Резерфорду, сравнить атом с солнечной системой, то характерное отличие металлических атомов заключается в том, что на ряду с обыкновенными прочно связанными „планетными электронами“ они имеют еще один или несколько — смотря по их химической валентности — слабо связанных „кометных электронов“. При конденсации металлического пара эти „кометные электроны“ не могут постоянно вращаться вокруг одного и того же атома, так как расстояния между соседними атомами оказываются того же порядка величины, как и размеры орбит электронов в атомах. Они должны, следовательно, после одного или нескольких оборотов вокруг определенной „планетной системы“ перейти затем к соседней. Кометные или валентные электроны в твердом или жидком металле „свободны“ только в том смысле, что каждый из них принадлежит всему коллективу атомов в целом, а не какому-нибудь определенному атому. Легко видеть, что со всем коллективом атомов эти электроны связаны в среднем прочнее, чем с отдельными изолированными атомами соответствующего металлического пара и что вместе с тем они должны несколько быстрее двигаться. Это заключение непосредственно вытекает из доказанной в первом томе (стр. 381) теоремы вириала, если учесть то обстоятельство, что при конденсации металлического пара энергия всего агрегата уменьшается на некоторую определенную величину W , равную теплоте конденсации. Потенциальная энергия валентных электронов должна при этом уменьшиться на удвоенную величину ($2W$), а их кинетическая энергия возрасти на ту же величину (W). Таким образом, при конденсации металлического пара каждый из валентных электронов перестает быть связанным с определенным атомом и все они образуют систему весьма большого числа частиц электричества в поле ионов.

Скорость валентных электронов в свободных атомах металлического пара легко оценить как отношение линейных размеров их орбит $l \cong 10^{-8}$ см к периоду обращения $\tau \cong 10^{-15}$ (последний приблизительно соответствует частоте световых колебаний и поэтому может быть определен из спектроскопических данных). Таким образом мы получим численные значения порядка 10^7 — 10^8 см/сек. Приблизительно с той же скоростью, согласно вышесказанному, должны двигаться „коллективизованные“ электроны в жидком или твердом металле, что соответствует кинетической энергии примерно в 100 раз большей, чем средняя кинетическая энергия $\frac{3}{2}kT$, которую электроны должны были бы иметь при комнатной температуре ($\sim 300^\circ$) в том случае, если бы они вели себя в соответствии с обычной статистической теорией Максвелла — Больцмана. Контраст между ней и тем законом, которым определяется фактическое распре-

деление скоростей между электронами, обнаруживается еще явственнее в случае абсолютного нуля температуры. Согласно вышеприведенному рассуждению электроны должны иметь при абсолютном нуле температуры практические такую же кинетическую энергию, как и при обычных температурах.

Не углубляясь в рассмотрение нового статистического закона, установленного Паули и Ферми в связи с теорией квантов, заметим, что для оценки электропроводности металлов он не играет существенной роли. Для этой оценки можно воспользоваться формулой (56b), подставив в нее приведенное выше значение средней скорости электронов. Так как число их n можно считать известным (оно совпадает с числом валентных электронов), то единственной неизвестной величиной является длина свободного пробега l . Сравнение формулы (56b) с экспериментальными значениями электропроводности показывает, что при обычных температурах l имеет порядок величины 10^{-6} см; при этом с понижением температуры l возрастает (в случае чистых металлов в области средних температур обратно пропорционально T), обращаясь в бесконечность при $T=0$. Этот результат станет нам понятным, если мы примем во внимание, что в идеальной кристаллической решетке электрон может переходить от одного атома к другому в определенных направлениях, двигаясь подобно точке на вращающемся колесе, которое катится по прямой линии (вращение колеса соответствует обращению электрона вокруг отдельных атомов, а прямолинейное перемещение центра колеса — перемещению электрона в решетке). Отвлекаясь от вращательного движения электрона и рассматривая лишь его прямолинейное перемещение, мы легко можем представить себе, что эта прямолинейность будет нарушаться лишь постольку, поскольку кристаллическая решетка отклоняется от идеальной. Подобные отклонения вызываются прежде всего тепловым движением атомов; отсюда понятно, что с повышением температуры отклонения электрона от прямолинейного пути должны происходить все чаще и чаще, т. е. длина свободного пробега должна сокращаться. Аналогичное влияние должны оказывать посторонние примеси и вообще все те факторы, которые нарушают правильность кристаллической решетки. Количественное изучение этого вопроса на основе современной квантовой механики приводит к результатам, прекрасно согласующимся с опытными данными.¹

Обращение электропроводности в бесконечность при абсолютном нуле температуры в случае чистых металлов не следует

¹ Ср. мою „Волновую механику“, ч. I, а также книгу Бриллюэна „Квантовая статистика“. Заметим, что формула (55) неприменима к случаю металлов, так как в этом случае произведение $Df = \frac{1}{3} mv^2$ практически не зависит от температуры.

смешивать с явлением сверхпроводимости, которое наблюдается у ряда плохо проводящих металлов (независимо от чистоты) и которое заключается во внезапном исчезновении электрического сопротивления при некоторой весьма низкой, но конечной температуре. В настоящее время можно считать установленным, что мы имеем дело в этом случае с переходом тела в другую „фазу“, т. е. другое состояние, отличающееся от обычного примерно так, как газообразное состояние отличается от жидкого.

Согласно развитой Кронигом теории сверхпроводимости, последняя характеризуется переходом электронов из свободного состояния в связанное, причем они сохраняют способность коллективно, целыми цепочками перемещаться по отношению к соответствующим атомам (при этом в случае замкнутой цепочки каждый электрон перепрыгивает на место следующего, а последний становится на место первого). Это коллективное перемещение электронов представляет собой не ток проводимости, но скорее „поляризационный“ ток, аналогичный тому, который обуславливается совместным смещением связанных электронов в обыкновенном диэлектрике под действием переменного внешнего поля. Разница заключается лишь в том, что в рассматриваемом случае смещение оказывается неограниченным.

Соответственно этому сверхпроводник может быть охарактеризован как диэлектрик с электропроводностью равной нулю, но с бесконечно большой диэлектрической постоянной. С этим связано то обстоятельство, что его магнитная проницаемость должна равняться нулю — обстоятельство, непосредственно доказанное на опыте. Таким образом сверхпроводник является в действительности „сверхдиамагнитным сверхдиэлектриком“. Способность сверхпроводника пропускать постоянный электрический ток без внешней электродвижущей силы, т. е. способность электронов двигаться в сверхпроводнике без торможения, несмотря на тепловое движение кристаллической решетки, объясняется коллективным характером этого движения, совершенно так же, как и в случае обыкновенного поляризованного тока (предельно малой частоты колебаний) у обычных диэлектриков.

Что касается бесконечно большой поляризуемости сверхпроводника, то она легко объясняется взаимным поляризующим действием соседних атомов. А именно согласно формуле (2а) § 1 эффективная электрическая восприимчивость χ , обращается в бесконечность, если $N\alpha_s = 1$, т. е. если коэффициент поляризации атомов α_s , разделенный на объем $\frac{1}{N}$, приходящийся на один из них, равен некоторому числу $\frac{1}{s}$ (например $\frac{3}{4\pi}$ по Лорентцу). Тот же результат получается, как легко видеть, и в случае $N\alpha_s > \frac{1}{s}$.

§ 7. Электролитическая поляризация и контактные потенциалы.

1. Диффузионные силы и поляризационные слои. Определенные в предыдущих параграфах значения электропроводности позволяют вычислять силу тока только в том случае, когда концентрация ионов (или свободных электронов) постоянна в пространстве. Если концентрация ионов определенного сорта как-нибудь меняется вблизи рассматриваемой точки, то электрический ток складывается из собственного тока проводимости $\frac{ne^2}{\vartheta} E$ и диффузионного тока, проекция которого на произвольное направление x равна $-De \frac{\partial n}{\partial x}$. Полная сила тока равна следовательно:

$$j = \sum \left(\frac{ne^2}{\vartheta} E - De \nabla n \right) = \sigma E - \sum De \nabla n, \quad (59)$$

где суммирование распространяется по всем сортам ионов (включая свободные электроны, если они имеются). Для простоты мы опустили индексы, характеризующие сорта ионов.

Если, как это обычно делается в макроскопической теории, полагать $j = \sigma E$ или $j = {}^2\sigma \cdot E$, то этим вводится, вообще говоря, „кажущаяся“ электрическая проводимость, которая более или менее отличается от истинной проводимости, соответствующей равномерному распределению ионов. Эту кажущуюся проводимость мы будем отличать от истинной штрихом. Таким образом, мы имеем, по определению

$${}^2\sigma E = \sigma E - \sum De \nabla n. \quad (60)$$

Но диффузионный ток формально можно учесть еще и другим образом, а именно, вводя вместо истинного электрического поля E кажущееся поле E' согласно уравнению

$$j = \sigma E'. \quad (60a)$$

Разность

$$E' - E \equiv E^s = -\frac{1}{\sigma} \sum De \nabla n \quad (60b)$$

представляет фиктивное электрическое поле, эквивалентное зависящему от падения концентрации градиенту осмотического давления. В простейшем случае одного лишь сорта (подвижных) ионов это выражение ввиду $\sigma = \frac{De^2 n}{kT}$ [ср. (55a)] сводится к

$$E^s = -\frac{kT}{en} \nabla n. \quad (60c)$$

Это уравнение выражает не что иное, как условие гидростатического равновесия, причем $nkT = p$ означает осмотическое давление

ионов, а enE^* —действующую на единицу объема электрическую силу. Величину E^* мы будем называть электролитической поляризацией. При $j=0$ она должна в точности компенсировать эффективное поле E .

Легко теперь показать, что в однородных телах, по крайней мере в случае статических электрических полей, заметная разница концентраций ионов и, в особенности, свободных электронов, может иметь место только в исключительно тонких слоях на границах тела. Это есть как раз те так называемые поляризационные слои, или, вернее, связанные с ними электрические заряды, которые в макроскопической теории трактуются как свободные электрические заряды (т. е. заряды конечной поверхностной плотности, обусловленные свободными электронами или ионами). Только в случае плохо проводящих веществ при переменных во времени полях нужно учитывать, обусловленные пространственно-временным изменением концентрации ионов, поляризационные явления во всем объеме тела.

Чтобы лучше разобраться в сущности этих явлений, мы рассмотрим их подробно на простом примере.

2. Электролитическая поляризация в случае одного подвижного сорта ионов (твердые электролиты и металлы). Представим себе плоскую пластинку, которая введена перпендикулярно к силовым линиям во внешнее однородное электрическое поле заданной напряженности E^a ; при этом почти мгновенно появляется обычная, зависящая от смещения связанных электронов поляризация P , вследствие чего напряженность электрического поля внутри пластинки падает от своей первоначальной величины E^a до $E = E^a - 4\pi P$. Электрическая индукция D остается при этом тождественно равной E^a . Заметим, что $\pm P$ совпадает с поверхностной плотностью находящихся на границах пластинки связанных зарядов, а величина $-4\pi P$ есть не что иное, как дополнительная напряженность поля, обусловленная этими поверхностными зарядами (вне пластинки эта дополнительная напряженность равна нулю).

Далее начинают также смещаться в направлении поля подвижные ионы (которые мы будем предполагать положительными; отрицательные ионы мы будем считать прочно связанными и имеющими неизменную концентрацию). Они должны при этом накапливаться на одной поверхности пластинки, тогда как ионы противоположного знака остаются в излишке на противоположной поверхности.

Однако, они не образуют настоящих поверхностных зарядов, так как при уменьшении или увеличении концентрации появляются силы осмотического давления, которые стремятся выровнять имеющуюся разность концентраций. (Заметим, что эти силы имеют чисто фиктивное значение, и их нужно рассматривать только как динамический эквивалент диффузион-

ного движения.) Поэтому они должны образовывать на обеих поверхностях пластинки два противоположно заряженных слоя ионов, которые также, как и обусловленные связанными электронами поверхностные заряды, будут еще дальше — практически до нуля — понижать электрическое поле внутри пластинки.

Ход этого процесса легко определить количественно при помощи уравнений (59). При этом нужно учесть еще то обстоятельство, что истинная проводимость σ в каждом месте пропорциональна фактической, а не средней концентрации ионов. Положим, следовательно, $\sigma = \sigma_0 \frac{n}{n_0}$, где σ_0 можно назвать нормальной проводимостью соответствующего материала. Далее, согласно (55а) мы можем положить $De = \frac{\sigma_0 kT}{n_0 e}$. Упомянутые уравнения принимают при этом в одномерном случае следующую форму:

$$\rho = (n - n_0)e, \quad \mathbf{j} = \frac{\sigma_0}{cn_0 e} \left(ne\mathbf{E} - kT \frac{\partial n}{\partial x} \right), \quad (61)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} = 0, \quad (61a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} = 4\pi\rho. \quad (61b)$$

(в последней формуле \mathbf{D} представляет собой конечно уже не коэффициент диффузии, а электрическую индукцию). Мы заменили здесь уравнение $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}$ через (61а), чтобы не вводить явным образом магнитное поле.

К приведенным уравнениям нужно еще добавить соотношение

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (61c)$$

и начальные предельные условия

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E}^a \text{ для } t=0 \text{ и всех } x, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E}^a \text{ вне пластинки для всех } t. \end{aligned} \right\} \quad (61d)$$

Посредством (61с) и (61b) можно выразить \mathbf{j} через \mathbf{D} . Именно

$$\begin{aligned} ne\mathbf{E} &= n_0 e\mathbf{E} + (n - n_0)e\mathbf{E} = \frac{n_0 e}{\epsilon} \mathbf{D} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x}, \\ \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{1}{e} \frac{\partial (n - n_0)e}{\partial x} = \frac{1}{e} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{4\pi e} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

и следовательно:

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma_0}{c\epsilon} \left[\left(1 + \frac{1}{4\pi n_0 e} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} \right) \mathbf{D} - \frac{\epsilon kT}{4\pi e^2 n_0} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial x^2} \right]. \quad (62)$$

Мы получаем, таким образом, из (61a) и (61b) следующее уравнение для \mathbf{D} :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon} \left[\left(1 + \frac{1}{4\pi n_0 e} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} \right) \mathbf{D} - \frac{\varepsilon k T}{4\pi e^2 n_0} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial x^2} \right] \right\} = 0. \quad (62a)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках $\{ \}$, не зависит следовательно от x и представляет функцию только от времени.

Заметим, что коэффициент $\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma_0}$ есть не что иное, как введенное уже в I гл. (§ 7) „время релаксации“ τ , которое при допущении постоянной во времени и в пространстве проводимости должно определять исчезновение первоначально имевшегося произвольно распределенного объемного заряда согласно формуле

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

В рассматриваемом случае, наоборот, такой заряд постепенно возникает именно в течение времени порядка величины τ . Это кажущееся противоречие с элементарной теорией объясняется следующим образом. Исчезновение свободного объемного заряда можно толковать (учитывая закон сохранения электричества) как смещение этого заряда на поверхность соответствующего тела. Но согласно развиваемой здесь точной теории, этот свободный „поверхностный заряд“ можно трактовать как объемный заряд, плотность которого достигает заметной величины только в очень тонком поверхностном слое.

Точная формула (62), если положить в ней $n_0 e = \infty$ или также $kT = 0$, т. е. пренебречь разницей концентраций и связанным с ней диффузионным током, сводится к

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \frac{1}{\tau} \mathbf{D} \right) = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} \right)_{t=0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

в согласии с прежним результатом.

Если учитывать диффузионный ток, но пренебрегать величиной

$$\frac{1}{4\pi n_0 e} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} = \frac{\rho}{n_0 e} = \frac{n - n_0}{n_0}$$

по сравнению с 1, и ограничиться случаем статического состояния, при котором плотность тока $\mathbf{j} = 0$, получается следующее простое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial x^2} = \frac{4\pi e^2 n_0}{\varepsilon k T} \mathbf{D}, \quad (63)$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{D} = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x},$$

где для сокращения положено

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{\varepsilon kT}}. \quad (63a)$$

Мы примем, что начало координат $x=0$ лежит в середине пластинки и обозначим ее толщину через $2d$.

При этом ввиду предельных условий (61с) будем иметь

$$C_1 = C_2 = \frac{E^a}{e^{\alpha d} + e^{-\alpha d}},$$

и следовательно

$$\mathbf{D} = E^a \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{e^{\alpha d} + e^{-\alpha d}}. \quad (63b)$$

Если d очень велико по сравнению с параметром $\frac{1}{\alpha}$, то электрическую индукцию вблизи поверхности можно выразить как функцию расстояния $|x-d|=x'$ формулой:

$$\mathbf{D} = E^a e^{-\alpha x'}. \quad (63c)$$

Легко убедиться, что $\frac{1}{\alpha}$ при обычных условиях представляет чрезвычайно малую длину ($\frac{1}{\alpha} = 10^{-4}$ см при $n_0 = 10^{15}$). Согласно (62с) $\frac{1}{\alpha}$ равно тому расстоянию от поверхности соответствующего тела, при котором индукция, а следовательно, и плотность заряда $\rho = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x}$ спадает в отношении $e:1$ ($e=2, 7, \dots$).

На некотором расстоянии, которое несколько больше, чем $\frac{1}{\alpha}$, но которое однако с макроскопической точки зрения является очень малым, внешнее поле оказывается практически полностью экранированным. Отнесенный к единице поверхности свободный заряд равен при этом

$$\eta_r = \int_0^{\infty} \rho dx = \frac{1}{4\pi} |\mathbf{D}_0| = \frac{E^a}{4\pi},$$

что совпадает с обычным „предельным условием“ для скачкообразного изменения электрической индукции при переходе через идеализированную геометрическую поверхность.

Что же касается связанных зарядов, то они, вследствие неоднородности поля, также должны иметь отличную от нуля пространственную плотность

$$\rho_g = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\epsilon-1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\epsilon-1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial D}{\partial x} = -\frac{\epsilon-1}{\epsilon} \rho.$$

Помимо этого поляризация P обуславливает еще собственно поверхностный заряд с плотностью $\eta_g = P_0 = \frac{\epsilon-1}{4\pi\epsilon} D_0$. Следова-

тельно $\eta_g + \int_0^\infty \rho_g d\xi = 0$. Это означает, что в проводящем теле эффективная поверхностная плотность зарядов, обусловленных связанными электронами, при постоянных во времени полях всегда остается равной нулю (в противоположность случаю идеального изолятора).

3. Электролитическая поляризация в случае двух подвижных сортов ионов. Мы рассмотрим теперь случай, когда тело имеет два сорта подвижных ионов (с противоположными по знаку, но равными по величине зарядами). Это представление соответствует простейшему случаю жидких электролитов, ибо неподвижные ионы могут быть только в твердых телах.

Вышеупомянутое „экранирующее действие“, т. е. исчезновение электрического поля на макроскопических расстояниях от поверхности при исчезающей силе тока, в этом случае может не иметь места, потому что здесь j и ρ могут быть одновременно равными нулю, в то время как $E \neq 0$.

Именно, при этих условиях имеем $n_1 e_1 + n_2 e_2 = 0$, т. е. вследствие $e_1 = -e_2 = e$,

$$n_1 = n_2 = n.$$

Далее, согласно (59) и пользуясь выражением $D = \frac{kT}{\psi}$ для коэффициента диффузии, получаем:

$$\text{Ene}^2 \left(\frac{1}{\vartheta_1} + \frac{1}{\vartheta_2} \right) = kTe \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) \nabla n,$$

т. е.

$$\text{E} = \frac{kT}{en} \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_2 + \vartheta_1} \nabla n. \quad (64)$$

Если ввести сюда вместо напряженности поля соответствующий потенциал, то для двух произвольных точек будем иметь:

$$\varphi' - \varphi'' = \frac{kT}{e} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \lg \frac{n'}{n''}. \quad (64a)$$

Эту формулу, впервые установленную Нернстом, можно интерпретировать лвояким образом — смотря по тому, рассматри-

ваются ли разность потенциалов как причина или как следствие неоднородного распределения ионов в соответствующем теле. Во втором случае последнее можно трактовать как гальванический элемент. Если две различных точки такого „концентрационного элемента“ соединить металлической проволокой, то по этой проволоке будет течь электрический ток до тех пор, пока имеющаяся на концах проволоки разность потенциалов не исчезнет. Нужно заметить, что в то время как направление тока в проволоке совпадает с направлением разности потенциалов $\varphi' - \varphi''$, т. е. напряженности поля, внутри электролита они противоположны. Во втором случае плотность тока определяется не напряженностью эффективного поля E , а суммой этого поля с напряженностью электролитической поляризации E^p . Первоначально имевшееся и выраженное уравнением (64) равновесие между электрическими и осмотическими силами при введении проволоки нарушается (в пользу последних), благодаря чему и возникает „гальванический ток“.

Линейный интеграл напряженности электролитической поляризации называется электродвижущей силой, действующей между соответствующими точками. Эта электродвижущая сила в рассматриваемом случае выражается правой частью формулы (64а). В состоянии равновесия она совпадает с соответствующей разностью потенциалов, но вообще она от нее отличается.

Необходимо отметить, что здесь идет речь не об истинном состоянии равновесия, а только о равновесии между электрическими и диффузионными силами: исчезновение полного тока означает только то, что оба сорта ионов движутся с одинаковыми средними скоростями. Плотность этого нейтрального потока материи, т. е. число ионов обоого сорта, проходящих за единицу времени через единицу поверхности, выражается по величине и направлению вектором

$$I = E \frac{ne}{\vartheta_1} - \frac{kT}{\vartheta_1} \nabla n = - \frac{Ene}{\vartheta_2} - \frac{kT}{\vartheta_2} \nabla n,$$

т. е. согласно (64):

$$I = - \frac{2kT}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \nabla n = - \frac{2neE}{\vartheta_2 - \vartheta_1}. \quad (64b)$$

Если достигается состояние истинного равновесия, этот ток должен исчезать. Но условие $n_1 = n_2$ при наличии внешних электрических сил может оказаться при этом невыполненным, особенно вблизи поверхности тела, где объемная плотность свободных зарядов $\rho = e(n_1 - n_2)$ отлична от нуля.

Предположим снова, что исследуемое тело имеет форму плоской пластинки. Если речь идет о жидком электролите, можно себе представить, что он налит в сосуд с плоско-параллель-

ными стенками; внешнее поле будем считать направленным перпендикулярно к последним.

После того как установится равновесное состояние (внешнее поле E^0 мы предполагаем постоянным), концентрации n_1 и n_2 должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} En_1 e - kT \frac{dn_1}{dx} &= 0, \\ En_2 e + kT \frac{dn_2}{dx} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

которые, согласно (59), выражают исчезновение в отдельности каждой из двух составных частей тока, обусловленных обоими сортами ионов. Вводя электростатический потенциал по формуле $E = -\frac{d\varphi}{dx}$, можно представить решение уравнений (65) в виде

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{e\varphi}{kT}}, \quad n_2 = n_0 e^{+\frac{e\varphi}{kT}}, \quad (65a)$$

в согласии с общим законом распределения Больцмана. Для определения потенциала имеем далее уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho,$$

т. е.

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} e (n_1 - n_2), \quad (65b)$$

которое получается из $\frac{dD}{dx} = 4\pi\rho$ в связи с $D = \varepsilon E = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dx}$.

Если концентрации n_1 и n_2 не очень отличаются от средней концентрации n_0 ($\frac{n_1 - n_0}{n_0}$ и $\frac{n_2 - n_0}{n_0}$ малы по сравнению с 1), то можно приближенно положить

$$n_1 = n_0 \left(1 - \frac{e\varphi}{kT} \right) \quad \text{и} \quad n_2 = n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{kT} \right),$$

причем (65) принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{8\pi e^2 n_0}{\varepsilon kT} \varphi. \quad (66)$$

Это уравнение отличается от уравнения (63) только тем, что вместо индукции D здесь стоит потенциал φ , а коэффициент α^2 удвоен. Это удвоение соответствует тому обстоятельству, что

мы имеем здесь дело не с одним, а с двумя сортами подвижных ионов. Полагая, следовательно,

$$\alpha = \sqrt{\frac{8\pi e^2 n_0}{\epsilon kT}}, \quad (66a)$$

мы можем представить решение уравнения (66) формулой

$$\varphi = \varphi_m \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\alpha d} - e^{-\alpha d}}, \quad (66b)$$

где $\pm \varphi_m$ означают максимальное и минимальное значения потенциала на граничных поверхностях (при этом предполагается, что в центре $\varphi = 0$). Эту формулу можно вывести из (63b), принимая во внимание соотношение $\varphi = -\frac{1}{\epsilon} \int D dx$. Отсюда между прочим вытекает соотношение:

$$E^a = \alpha e \varphi_m \operatorname{ch} \alpha d. \quad (66c)$$

Определяемые формулами (66b) и (63b) распределения потенциала и напряженности поля (или индукции), графически изображены на рис. 11. При фактически встречающихся очень больших значениях α (см. выше) напряженность поля заметно отлична от нуля только в непосредственной близости от поверхностей. Ничтожные значения разности потенциалов $2\varphi_m$ могут соответствовать при этом большим напряженностям в обоих „поляризованных слоях“.

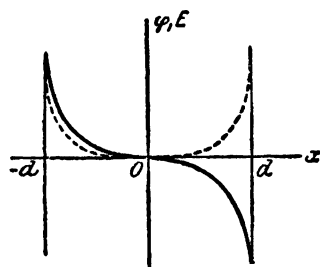


Рис. 11.

Не трудно найти точное решение уравнения (65b). Полагая для сокращения $\frac{e\varphi}{kT} = f$ и $\alpha x = \xi$, можно переписать уравнение (65b) в виде

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \operatorname{sh} f. \quad (67)$$

Рассматривая f как независимую переменную и замечая, что

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{df'}{d\xi} = \frac{df'}{df} \cdot \frac{df}{d\xi} = \frac{f' df''}{df}$$

получаем

$$\frac{1}{2} f'^2 = \operatorname{ch} f + \operatorname{const} = \operatorname{ch} f - \operatorname{ch} f_0,$$

откуда следует

$$\xi + \operatorname{const} = \int \frac{df}{\sqrt{\operatorname{ch} f - \operatorname{ch} f_0}}. \quad (67a)$$

Исследованием этого решения мы заниматься не будем.

Следует отметить одну трудность, возникающую при сравнении случая двух сортов подвижных ионов с рассмотренным ранее случаем одного сорта. Неподвижность ионов второго сорта можно, очевидно, трактовать как предельный случай бесконечно большого коэффициента трения ϑ_2 . Но так как этот коэффициент совершенно не входит в закон распределения Больцмана (65а), последний должен оставаться справедливым также и при $\vartheta_2 = \infty$, тогда как в этом случае можно положить $n_2 = n_0 = \text{const}$. Это противоречие объясняется тем, что при $\vartheta_2 = \infty$ состояние равновесия может наступить только через бесконечно-большой промежуток времени, т. е. фактически никогда, так как при этом время релаксации оказывается бесконечно большим.

4. Контактные потенциалы. Если два разных металла, или металл и электролит, или два электролита — короче говоря, два различно проводящих тела a и b — соприкасаются, то, вообще говоря, ионы тела a должны диффундировать в b , а ионы тела b должны диффундировать в a . При этом возникают электрические силы, которые, в конце концов, уравнивают диффузионные силы. Таким образом на поверхности или, вернее, около поверхности соприкосновения образуется двойной электрический слой с определенным скачком потенциала, который обычно называется контактным потенциалом. В состоянии равновесия он совпадает с соответствующей электродвижущей силой.

В простейшем случае двух полупроводников с различными концентрациями свободных электронов (n' или n''), эта электродвижущая сила или соответствующий контактный потенциал выражается формулой

$$\varphi' - \varphi'' = \varphi = \frac{kT}{e} \lg \frac{n'}{n''}, \quad (68)$$

которая непосредственно следует из закона распределения Больцмана

$$n' : n'' = e^{-\frac{e\varphi'}{kT}} : e^{-\frac{e\varphi''}{kT}}.$$

Концентрации n' и n'' относятся к внутренним частям полупроводников и при соприкосновении остаются неизменными.¹

В случае двух электролитов, которые содержат одни и те же сорта ионов (1, 2) с различными заданными концентрациями, $n'_1 = n'_2 = n'$, $n''_1 = n''_2 = n''$, должна возникать разность потенциалов, определяемая формулой (64а). Заметим, что формула (68) получается, если ϑ_1 или ϑ_2 положить равным бесконечности, т. е. ионы одного из сортов считать неподвижными.

¹ Формула (68) применялась ранее и к металлам. В настоящее время мы знаем, однако, что распределение электронов в металлах описывается статистикой Ферми, которая приводит к формуле, существенно отличной от (68).

При соприкосновении твердого металла с жидким электролитом ионы металла выделяются в раствор, свободные же электроны не выделяются. В состоянии равновесия концентрация ионов n'' достигает совершенно определенной величины, которая связана со скачком потенциала и температурой соотношением такого же вида, как и (68). Величина n'' представляет собою характеристическую для рассматриваемой комбинации металла и электролита константу, которая однако отлична от истинной концентрации ионов.

Если образовать замкнутую цепь из нескольких металлов и электролитов, то получается результирующая электродвижущая сила, которая остается отличной от нуля лишь постольку, поскольку сохраняется первоначальная концентрация ионов, благодаря ли растворению металла, или путем других химических процессов. Если такого рода цепь содержит только электронные проводники, то согласно (68) электродвижущая сила должна исчезать, поскольку не имеется разницы температуры. То же самое имеет место и в случае металлов. При наличии разницы температур (в местах соединения) возникают так называемые „термоэлектрические“ силы, которые мы не будем здесь рассматривать.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

ОБЩИЕ ПРОБЛЕМЫ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ.

ГЛАВА IV.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ (ВОЛН) В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ.

§ 1. Однородные изотропные тела.

1. Общие дифференциальные уравнения. Хотя материальные тела всегда ограничены, мы будем при разыскании законов распространения электромагнитных колебаний рассматривать их как неограниченную среду. Усложнения, вызываемые пограничными явлениями, мы учтем в последующих главах.

Прежде всего рассмотрим простейший случай однородного изотропного тела, свойства которого могут быть описаны с помощью постоянных ϵ (диэлектрическая постоянная $\frac{D}{E}$), μ (магнитная восприимчивость $\frac{H}{B}$) и σ (электропроводность). Как было подробно показано в предшествующей главе, эти постоянные имеют определенные, зависящие от частоты значения только для гармонических колебаний; в общем же случае связь между индукциями D и B с одной стороны и напряженностями полей E и H — с другой не может характеризоваться постоянными коэффициентами. Поэтому мы примем с самого начала, что эти векторы как функции времени могут быть представлены в виде $D = D^0 e^{-i\omega t}$ и т. д.¹ Постоянные ϵ и μ мы будем считать вещественными. Затухание электрических колебаний, независимо от того, вызывается ли оно свободными или связанными электронами, мы будем характеризовать вещественной „эффективной“ электропроводностью σ . Если действительная диэлектрическая постоянная равна $\epsilon + i\epsilon'$, а действительная электропроводность σ_0 , то согласно уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\epsilon + i\epsilon'}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma_0}{c} \mathbf{E},$$

получаем

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\epsilon'\omega}{4\pi}. \quad (1)$$

¹ В дальнейшем нам будет удобнее пользоваться показательным множителем $e^{-i\omega t}$ вместо ранее употреблявшегося $e^{+i\omega t}$.

Общие уравнения поля можно таким образом в рассматриваемом случае представить в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (1b)$$

[ср. (53) и (54) гл. I]. Впрочем уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ излишни, так как они получаются, если взять расхождение от предшествующих уравнений. При этом конечно свободные пространственные заряды исключены из рассмотрения. В противном случае свести электрическое затухание к электропроводности так, как это сделано выше, было бы невозможно, так как вместо $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ мы имели бы $\operatorname{div}(\epsilon + i\epsilon') \mathbf{E} = 4\pi\rho$.

Если в уравнениях (1a) и (1b) заменить $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ через $-i\omega \mathbf{E}$ и $-i\omega \mathbf{H}$ и вместо действительной диэлектрической постоянной $\epsilon + i\epsilon'$ ввести эффективную

$$\epsilon_s = \epsilon + i\epsilon' + i \frac{4\pi\sigma_0}{\omega} = \epsilon - i \frac{4\pi\tau}{\omega}, \quad (2)$$

то получим:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{H} = 0 \quad (2a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{i\omega\mu\epsilon_s}{c} \mathbf{E} = 0. \quad (2b)$$

Хотя эти уравнения формально проще, чем (1a) и (1b), однако последние значительно удобнее для понимания выражаемых ими общих физических законов, так как в них входят только вещественные величины.

Дифференцируя (1b) по ct и принимая во внимание (1a), получим

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

т. е. вследствие тождества

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E},$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3)$$

Точно так же, исключая \mathbf{E} находим:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (3a)$$

При $\sigma = 0$ эти уравнения сводятся к известному уравнению Даламбера:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\psi = E, H), \quad (4)$$

где

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}. \quad (4a)$$

Это означает, что при отсутствии затухания, т. е. при отсутствии проводимости, электромагнитные колебания в однородном и изотропном теле распространяются точно так же, как и в пустом пространстве, но с отличной от $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{см}{сек}$ скоростью, которая определяется соотношением (3b). Такие тела мы будем называть прозрачными. Коэффициент

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon\mu}$$

называется их показателем преломления (такое обозначение основано на хорошо известных явлениях преломления света на поверхности раздела двух однородных тел, см. ниже, гл. V).

В противоположном случае очень большого затухания можно, при не слишком высоких частотах колебаний, пренебречь входящими в (3) и (3a) вторыми производными по времени, т. е. величинами $\frac{\epsilon\mu}{c^2} \omega^2 \psi$, по сравнению с правыми сторонами $\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} i\omega\psi$, так что вместо (4) получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \nabla^2 \psi, \quad (5)$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu}}. \quad (5a)$$

Уравнение (5) имеет тот же вид, что и рассмотренное в предыдущей главе уравнение диффузии, или основное уравнение теории теплопроводности, причем постоянная a играет роль коэффициента диффузии или коэффициента теплопроводности. В этом случае — который имеет место преимущественно в металлических телах — первоначально имевшиеся неоднородности электромагнитного поля должны стремиться исчезнуть.

В общем случае, который соответствует уравнению

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (6)$$

электромагнитные колебания распространяются более сложным, охватывающим оба рассмотренных типа, способом.

Так как уравнения (1а) имеют тот же вид, что и для пустого пространства, напряженности поля можно выразить через потенциалы φ и \mathbf{A} при помощи обычных формул

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (6a)$$

Однако для того, чтобы эти потенциалы удовлетворяли тому же уравнению распространения (6), что и напряженности поля, нужно, как легко видеть, заменить обычное соотношение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0$$

через

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c} \varphi = 0. \quad (6b)$$

Наконец, потенциалы можно выразить через один единственный вектор \mathbf{Z} , который соответствует обычному потенциалу поляризации — а именно по формулам

$$\varphi = -\text{div } \mathbf{Z}, \quad \mathbf{A} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c} \mathbf{Z} \quad (6c)$$

(ср. т. I, стр. 145), причем \mathbf{Z} опять-таки удовлетворяет уравнению (6).

Переходя снова к комплексным величинам и принимая во внимание, что

$$\frac{\omega^2}{u^2} - \frac{i\omega}{a} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s \mu,$$

получим

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2 \varepsilon_s \mu}{c^2} \psi = 0, \quad (7)$$

($\psi = E, H, \varphi, \mathbf{A}, \mathbf{Z}$), далее

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \varphi + \frac{i\omega}{c} \mathbf{A} = \nabla \text{div } \mathbf{Z} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s \mu \mathbf{Z} = \text{rot rot } \mathbf{Z}, \\ \mathbf{H} &= -\frac{i\omega}{c} \varepsilon_s \mu \text{rot } \mathbf{Z} \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

и

$$\text{div } \mathbf{A} - \frac{i\omega}{c} \varepsilon_s \mu \varphi = 0. \quad (7b)$$

2. Плоские волны. Скорость распространения и коэффициент поглощения. Теперь мы еще более сузим наши предположения и будем рассматривать такие электромагнитные явления, которые не только во времени, но и в пространстве, т. е. в зависимости от пространственных координат,

имеют гармонический, синусоидальный вид. Мы положим таким образом

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi^0 e^{iS}, \\ S &= -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где \mathbf{k} означает постоянный (в общем случае комплексный) вектор; S — общая для всех векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и т. д. фаза колебаний; $\psi^0 = H^0, E^0, \dots$ — амплитуда (в общем случае комплексная) соответствующих электромагнитных величин. Если вектор \mathbf{k} вещественен, то выражения (8) совпадают с неоднократно рассматривавшимися в первом томе выражениями для плоских синусоидальных волн. При этом

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}, \quad (8a)$$

где λ — длина волны и \mathbf{n} — нормаль к волновой поверхности (в направлении распространения).

В общем случае можно ввести два различных единичных вектора $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}$ и представить \mathbf{k} в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(1)} + i\mathbf{k}^{(2)} = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{n}^{(1)} + i\rho\mathbf{n}^{(2)}) = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}^{(1)} + i\zeta\mathbf{n}^{(2)}. \quad (8b)$$

Мы получим при этом так называемые затухающие плоские волны с вещественной амплитудой

$$|\psi| = |\psi^0| e^{-\mathbf{k}^{(2)} \cdot \mathbf{r}} = |\psi^0| e^{-\zeta\mathbf{n}^{(2)} \cdot \mathbf{r}}, \quad (8c)$$

которая убывает в направлении $\mathbf{n}^{(2)}$ на единицу расстояния в отношении $e^\zeta : 1$ (или $e^{2\pi\rho} : 1$ на длину волны λ), тогда как вещественная фаза $S^{(1)} = -\omega t + \mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{r}$ меняется в направлении $\mathbf{n}^{(1)}$. Это последнее направление и нужно рассматривать как собственно направление распространения; для различения мы будем направление $\mathbf{n}^{(2)}$ называть направлением затухания. Коэффициент ζ называется соответственно этому коэффициентом затухания или также коэффициентом поглощения (см. ниже).

Легко показать, что выражение (8) при соответствующем выборе \mathbf{k} действительно удовлетворяет основным уравнениям (7) [или (6)]. А именно [независимо от того, является ли ψ скалярной или векторной величиной (см. т. I, стр. 165)] имеем:

$$\nabla^2 \psi = -k^2 \psi,$$

и следовательно, по (7)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ii} u = \mathbf{k}^{(1)2} - \mathbf{k}^{(2)2} + 2i\mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{k}^{(2)} \quad (9)$$

или в силу (2)

$$\left. \begin{aligned} k^{(1)2} - k^{(2)2} &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu, \\ \mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{k}^{(2)} &= k^{(1)} k^{(2)} \cos \theta = \frac{2\pi\sigma\mu\omega}{c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Мы видим таким образом, что направление затухания всегда образует острый угол θ с направлением распространения. Помимо этого условия направления $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ совершенно произвольны и друг от друга не зависят. Решая (9a), получаем следующие формулы для величины векторов $\mathbf{k}^{(1)}$ (фазовый вектор) и $\mathbf{k}^{(2)}$ (вектор затухания):

$$\left. \begin{aligned} k^{(1)2} &= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 v^2 \cos^2 \theta}} \right) \\ k^{(2)2} &= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 v^2 \cos^2 \theta}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

Укажем еще приближенные формулы

$$k^{(1)} \cong \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}; \quad k^{(2)} = \frac{2\pi}{c} \frac{\sigma}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \left(\frac{\sigma}{\varepsilon v \cos \theta} \ll 1 \right) \quad (10)$$

$$k^{(1)} \cong k^{(2)} \cong \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu\sigma v}{\cos \theta}}, \quad \left(\frac{\sigma}{\varepsilon v \cos \theta} \gg 1 \right), \quad (10a)$$

относящиеся соответственно к случаю очень малого и очень большого затухания.

Если ввести соответствующую данной частоте колебаний длину волны в пустом пространстве:

$$\lambda_0 = \frac{c}{v} = \frac{2\pi c}{\omega},$$

то формулы для λ и ρ принимают вид:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} \cong \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \rho \cong \frac{2\sigma}{\varepsilon v \cos \theta}, \quad \left(\frac{\sigma}{\varepsilon v \cos \theta} \ll 1 \right), \quad (10b)$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{\sigma\mu}{v \cos \theta}}, \quad \rho \cong 1, \quad \left(\frac{\sigma}{\varepsilon v \cos \theta} \gg 1 \right). \quad (10c)$$

В рассматриваемом случае плоских синусоидальных волн можно положить на ряду с $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$, также $\nabla = i\mathbf{k}$. При этом согласно (7a) и (9) получаем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{Z}) = Zk^2 - \mathbf{k}(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{k}), \\ \mathbf{H} &= \frac{\omega}{c} \varepsilon\mu \mathbf{k} \times \mathbf{Z} = \frac{c}{\omega} k^2 \mathbf{k} \times \mathbf{Z} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(ср. т. I, стр. 166).

Отсюда получаются следующие соотношения:

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{H} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (11a)$$

$$\epsilon_0 \mu \frac{\omega}{c} \mathbf{E} = -\mathbf{k} \times \mathbf{H}, \quad (11b)$$

которые являются, очевидно, не чем иным, как специальной формой основных уравнений (2a) и (2b) для рассматриваемого случая. Исключая из этих уравнений \mathbf{E} или \mathbf{H} , можно получить уравнение (9) для k^2 . Далее, отсюда следуют уравнения

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (11c)$$

которые можно вывести и непосредственно из уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

3. Плоские волны: амплитуды и энергия. Мы введем теперь вещественные составляющие комплексных амплитуд \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}' + i\mathbf{E}'', \quad \mathbf{H}^0 = \mathbf{H}' + i\mathbf{H}''. \quad (12)$$

Заметим, что \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' являются двумя сопряженными полу диаметрами эллипса колебаний, описываемого концом вектора

$$R[\mathbf{E}^0 e^{-i\omega t}] = \mathbf{E}' \cos \omega t + \mathbf{E}'' \sin \omega t$$

в направлении от \mathbf{E}' к \mathbf{E}'' .

Чтобы установить связь между этими вещественными составляющими и составляющими \mathbf{k} , подставим (12) в уравнения (11c).

При этом получаем

$$(\mathbf{k}^{(1)} + i\mathbf{k}^{(2)}) \cdot (\mathbf{E}' + i\mathbf{E}'') = \mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{E}' - \mathbf{k}^{(2)} \cdot \mathbf{E}'' + i(\mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{E}'' + \mathbf{k}^{(2)} \cdot \mathbf{E}') = 0,$$

так что

$$\mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{E}' = \mathbf{k}^{(2)} \cdot \mathbf{E}'', \quad \mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{E}'' = -\mathbf{k}^{(2)} \cdot \mathbf{E}', \quad (12a)$$

и точно так же

$$\mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{H}' = \mathbf{k}^{(2)} \cdot \mathbf{H}'', \quad \mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{H}'' = -\mathbf{k}^{(2)} \cdot \mathbf{H}'. \quad (12b)$$

Подставляя (12) в (11a), находим далее

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} (\mathbf{H}' + i\mathbf{H}'') &= (\mathbf{k}^{(1)} + i\mathbf{k}^{(2)}) \times (\mathbf{E}' + i\mathbf{E}'') = \mathbf{k}^{(1)} \times \mathbf{E}' - \mathbf{k}^{(2)} \times \mathbf{E}'' + \\ &+ i(\mathbf{k}^{(1)} \times \mathbf{E}'' + \mathbf{k}^{(2)} \times \mathbf{E}'), \end{aligned}$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{c} \mathbf{H}' &= \mathbf{k}^{(1)} \times \mathbf{E}' - \mathbf{k}^{(2)} \times \mathbf{E}'', \\ \frac{\omega}{c} \mathbf{H}'' &= \mathbf{k}^{(1)} \times \mathbf{E}'' - \mathbf{k}^{(2)} \times \mathbf{E}'. \end{aligned} \right\} \quad (12c)$$

Отсюда на ряду с уравнениями (12b) получаются еще следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{c} \mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{H}' &= (\mathbf{k}^{(2)} \times \mathbf{k}^{(1)}) \cdot \mathbf{E}'', \\ \frac{\omega}{c} \mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{H}'' &= (\mathbf{k}^{(1)} \times \mathbf{k}^{(2)}) \cdot \mathbf{E}'. \end{aligned} \right\} \quad (12d)$$

Предположим теперь, что электрический вектор колеблется линейно, и соответственно этому положим $\mathbf{E}'' = 0$ ($\mathbf{E}' = \mathbf{E}^0$).

Тогда из (12a) следует, что эти колебания должны иметь направление, перпендикулярное к векторам $\mathbf{k}^{(1)}$ и $\mathbf{k}^{(2)}$. Магнитные колебания по величине и направлению определяются уравнениями (12c), а именно: обе составляющие \mathbf{H} лежат в плоскости $(\mathbf{k}^{(1)}, \mathbf{k}^{(2)})$, перпендикулярны соответственно к $\mathbf{k}^{(1)}$ и к $\mathbf{k}^{(2)}$ и находятся друг к другу в отношении $\mathbf{k}^{(1)} : \mathbf{k}^{(2)}$.

Когда магнитные колебания линейны, они опять-таки по (12b) должны иметь направление, перпендикулярное к \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' . Отсюда вытекает, согласно (12d), что электрические колебания происходят в этом случае в плоскости $(\mathbf{k}^{(1)}, \mathbf{k}^{(2)})$. Таким образом оба случая друг другу противоположны.

Мы перейдем теперь к простейшему и чаще всего встречающемуся в действительности случаю, когда векторы $\mathbf{k}^{(1)}$ и $\mathbf{k}^{(2)}$ имеют одно и то же направление ($\mathbf{n}^{(1)} = \mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{n}$). В этом случае нет надобности разлагать векторы амплитуд \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 на их вещественные и мнимые части. Из (12) видно, что электрическая и магнитная напряженности перпендикулярны к \mathbf{n} . Полагая далее

$$k = k^{(1)} + ik^{(2)} = |k| e^{i\alpha}, \quad (13)$$

получим по (11a) для произвольных (т. е. вообще говоря, эллиптически поляризованных) гармонических колебаний

$$\mathbf{H}^0 = \frac{c}{\omega} |k| \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0 e^{i\alpha}, \quad (13a)$$

т. е. по (9b), принимая во внимание, что $|k|^2 = k^{(1)2} + k^{(2)2}$,

$$\mathbf{H}^0 = \epsilon \mu \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{e^2 v^2}} \mathbf{E}^0. \quad (13b)$$

Для сдвига фаз δ мы приведем только приближенные формулы, которые соответствуют очень малому или очень большому затуханию. А именно, согласно (10) и (10a):

$$\left. \begin{aligned} \text{и} \quad \text{tg } \delta \cong \delta = \frac{\sigma}{\nu \epsilon} \quad (\ll 1) \\ \text{tg } \delta = 1, \text{ т. е. } \delta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (13c)$$

В случае совершенно прозрачных тел ($\sigma = 0$), имеем $\delta = 0$ и

$$H^2 = \epsilon\mu E^2,$$

или

$$\mu B^2 = \epsilon E^2. \quad (13d)$$

Это уравнение обычно интерпретируется как равенство электрической и магнитной плотности энергии в незатухающих электромагнитных волнах. Такая интерпретация, однако, вряд ли допустима, так как выражение

$$\frac{\mu B^2 + \epsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{E}D}{8\pi}$$

представляет, как известно, лишь соответствующую свободным электронам часть плотности энергии (см. гл. II, § 1). Но в рассматриваемом случае свободные электроны должны отсутствовать, так как они внесли бы затухание волн. При $\sigma > 0$, т. е. при наличии затухания, только полные квадратичные величины имеют физический смысл. Так как они подробно были разобраны в главе II, то мы здесь разберем только простейшую и для волновых явлений важнейшую из них, а именно плотность потока лучистой энергии:

$$\mathbf{K} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{e}{4\pi\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (14)$$

[см. напр., гл. II, формула (50b)]. Нужно заметить, что это выражение является совершенно точным, т. е. оно остается справедливым и тогда, когда учитывается разница между полной и эффективной напряженностью поля. Входящие в (14) напряженности считаются, разумеется, вещественными. При комплексном их представлении получаем для среднего по времени значения \mathbf{K} выражение

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi\mu} R[(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)].$$

Если направление затухания волн совпадает с направлением их распространения, то по (13a) и (13b)

$$\bar{K} = n \cdot \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2}} \cos \delta |\bar{\mathbf{E}}|^2. \quad (14a)$$

При малом затухании, учитывая (13c), получаем отсюда следующую формулу, верную с точностью до величин второго порядка относительно $\frac{\sigma}{\epsilon\nu}$:

$$\bar{K} \cong n \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(1 + \frac{\sigma^2}{2\epsilon^2\nu^2}\right) |\bar{\mathbf{E}}|^2. \quad (14b)$$

В противоположном случае:

$$\bar{k} \cong n \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu\mu}} |\bar{E}|^2. \quad (14c)$$

4. Распространение плоских волн в движущихся телах. В заключение мы обобщим некоторые из приведенных выше результатов на случай движущихся тел. Мы имеем в виду равномерное прямолинейное движение со скоростью v , очень малой по сравнению с c , относительно „покоящейся“ координатной системы S . В этом случае основные уравнения (1a) и (1b) должны быть заменены уравнениями (61a) гл. I (§ 8). Для упрощения мы будем считать входящую туда электрическую постоянную ϵ (которая соответствует нашей ϵ_0) вещественной величиной, т. е. затухание исключим. В случае плоских синусоидальных волн (8) эти уравнения принимают следующий вид, если опустить излишние теперь штрихи

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{w} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) &= 0, \\ \mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{w} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} - \frac{\omega}{c} (\mu \mathbf{B} - \mathbf{w} \times \mathbf{E}) &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} + \frac{\omega}{c} (\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

где

$$\mathbf{w} = (\epsilon\mu - 1) \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (15b)$$

Рассмотрим прежде всего волны, распространяющиеся в направлении движения:

$$\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\mathbf{w}}{\omega} = \mathbf{n}.$$

Мы получаем в этом случае

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (16)$$

и далее, по (15a):

$$\left. \begin{aligned} \left(k + \frac{\omega}{c} w\right) \mathbf{n} \times \mathbf{E} - \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{B} &= 0, \\ \left(k + \frac{\omega}{c} w\right) \mathbf{n} \times \mathbf{B} + \frac{\omega}{c} \epsilon \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

Умножая первое из этих уравнений векторно на $\left(k + \frac{\omega}{c} w\right) \mathbf{n}$, второе на $\frac{\omega}{c} \mu$ и складывая их, получим

$$\left(k + \frac{\omega}{c} w\right)^2 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \mathbf{E} = 0$$

или, так как

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = -\mathbf{E},$$

то

$$\left(k + \frac{\omega}{c} w\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\mu},$$

и следовательно

$$k = \frac{\omega}{c} (V_{\epsilon_{\mu}} - w) = \frac{\omega}{c} V_{\epsilon_{\mu}} \left[1 - \frac{v}{c} V_{\epsilon_{\mu}} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\mu}}\right)\right]. \quad (16b)$$

Здесь $\frac{c}{V_{\epsilon_{\mu}}} = u$ означает скорость распространения рассматриваемых колебаний в покоящемся теле. Для движущегося тела она по определению k равна $u' = \frac{\omega}{k}$. Мы имеем таким образом

$$\frac{u}{u'} = 1 - \frac{v}{u} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\mu}}\right),$$

т. е. приближенно (поскольку $v \ll u$):

$$\frac{u'}{u} = 1 + \frac{v}{u} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\mu}}\right),$$

или, положив

$$\epsilon_{\mu} = \frac{c^2}{u^2},$$

$$u' = u + v \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right). \quad (16c)$$

Эта формула показывает, что скорость u' не равна просто сумме скоростей u и v , а составляется из них по общему закону теории относительности (ср. т. I, стр. 305).

Точный закон этого составления для рассматриваемого случая ($\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$) имеет вид:

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

Отсюда в первом приближении (относительно $\frac{v}{c}$) получается предыдущая формула (впервые выведенная еще Френелем).

Не трудно решить уравнения (15a) также и для общего случая (\mathbf{k} не параллельно \mathbf{v}). При этом, пользуясь тем же приемом, что и раньше, получаем вместо (16b) уравнение:

$$\left(\mathbf{k} + \frac{\omega}{c} \mathbf{w}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\mu},$$

или

$$k^2 + \frac{2\omega}{c} wk \cos \theta + \frac{\omega^2}{c^2} w^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\mu},$$

где θ означает угол между \mathbf{k} и \mathbf{v} . Следовательно в первом приближении

$$k = \frac{\omega}{c} (\sqrt{\epsilon_{\mu}} - w \cos \theta), \quad (17)$$

или

$$u' = u + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) v \cos \theta, \quad (17a)$$

в согласии с общим законом составления скоростей [см. т. I, стр. 317]. Вектор потока энергии, в виду соотношения

$$\mu \mathbf{B} = \left(\frac{c}{\omega} \mathbf{k} - \mathbf{w}\right) \times \mathbf{E}$$

[см. первое уравнение (15)], выражается в этом случае формулой:

$$\mathbf{K} = \frac{c}{4\pi\mu} \mathbf{E} \times \left[\left(\frac{c}{\omega} \mathbf{k} - \mathbf{w}\right) \times \mathbf{E}\right]. \quad (17b)$$

Он имеет направление, отличное от волновой нормали, в соответствии с тем, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} по (15) уже не лежат в плоскости волн.

Таким образом мы видим, что движение однородного и изотропного тела вызывает своеобразную анизотропию по отношению к распространению волн. Эта „кинематическая анизотропия“, впрочем, совершенно отлична от „физической анизотропии“, характерной для покоящихся кристаллических тел.

§ 2. Плоские волны в однородных анизотропных телах.

Мы перейдем теперь к рассмотрению законов распространения плоских электромагнитных волн в физически анизотропных телах, которые могут быть, вообще говоря, охарактеризованы тремя тензорами ϵ_{ik} , μ_{ik} (или μ_{ik}^{-1}) и σ_{ik} (вместо скаляров ϵ , μ или $\frac{1}{\mu}$ и σ).

Общие уравнения поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 4\pi \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho \end{aligned}$$

принимают в случае плоских гармонических волн [характеризуемых выражением (8)] следующий вид:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} - \frac{\omega}{c} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} + \frac{\omega}{c} \mathbf{D} = -i4\pi\mathbf{j}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (18a)$$

(плотность свободных зарядов с самого начала предполагается равной нулю).

Для ясности мы не будем решать их в общем виде, а ограничимся простейшим случаем:

$${}^2\mu = 1, \quad {}^2\sigma = 0,$$

причем ${}^2\epsilon$ предполагается вещественным. Это соответствует совершенно прозрачному немагнитному кристаллическому телу без гиротропии, или естественной активности.

1. Скорость волн как функция волновой нормали. Основные колебания \mathbf{D} . Уравнения (18a) сводятся при этом к

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} + \frac{\omega}{c} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (18b)$$

Заменяя здесь \mathbf{H} через $\frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ согласно (18), получаем

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0, \quad (19)$$

или

$$\mathbf{n} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{E} + \frac{u^2}{c^2} \mathbf{D} = 0, \quad (19a)$$

где, как обычно, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ — волновая нормаль и $u = \frac{\omega}{k}$ — скорость распространения.

Введем еще связь между \mathbf{E} и \mathbf{D} в виде

$$D_1 = \epsilon_1 E_1, \quad D_2 = \epsilon_2 E_2, \quad D_3 = \epsilon_3 E_3, \quad (19b)$$

направив оси координат по осям симметрии тензора ${}^2\epsilon$, и определим u как функцию n_1, n_2, n_3 (направляющие косинусы волновой нормали). Эта задача особенно просто решается, если нормаль \mathbf{n} параллельна одной из координатных осей. Так, например, при $n_2 = n_3 = 0$ и $n_1 = 1$ имеем по (19a):

$$-E_1 + \frac{u^2}{c^2} \epsilon_1 E_1 = 0, \quad -E_2 + \frac{u^2}{c^2} \epsilon_2 E_2 = 0,$$

$$-E_3 + \frac{u^2}{c^2} \epsilon_3 E_3 = 0,$$

т. е. $E_1 = 0$ и $u = \frac{c'}{\sqrt{\varepsilon_2}}$ или $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_3}}$, смотря по тому, какая из двух других слагающих — E_3 или E_2 — равна нулю. Это означает, что в направлении осей симметрии тензора ε_{ik} могут распространяться только такие линейные колебания, которые параллельны одной из двух других осей и притом с соответствующей их направлению скоростью, определяемой формулой

$$u_i = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_i}}. \quad (19c)$$

Мы будем называть эти скорости главными скоростями распространения волн. Для определения u в общем случае выпишем векторное уравнение (19a) в составляющих по координатам

$$n_i \sum_k n_k E_k - E_i + \frac{u^2}{u_i^2} E_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (20)$$

Мы получаем таким образом систему трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными E_1, E_2, E_3 (или D_1, D_2, D_3 , если первые выразить через последние). Условие их совместности выражается уравнением

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} n_1^2 - 1 + \frac{u^2}{u_1^2}, & n_1 n_2, & n_1 n_3 \\ n_2 n_1, & n_2^2 - 1 + \frac{u^2}{u_2^2}, & n_2 n_3 \\ n_3 n_1, & n_3 n_2, & n_3^2 - 1 + \frac{u^2}{u_3^2} \end{vmatrix} = 0, \quad (20a)$$

которое и представляет собой искомое уравнение для u . Будучи третьего порядка относительно u^2 , оно должно, вследствие симметрии определителя, иметь три вещественные корни. Один из этих корней, однако, как легко видеть, бесконечен и поэтому отпадает. Два других корня u' и u'' соответствуют двум определенным типам колебаний, которые могут распространяться в данном направлении, а именно двум линейным колебаниям с вполне определенными направлениями E', E'' или D', D'' . Их линейность следует из того, что все коэффициенты системы уравнений (20), включая значения u , вещественны. Отношения $E_1 : E_2 : E_3$ (и $D_1 : D_2 : D_3$) должны поэтому также быть вещественными. Величины векторов E (и D), т. е. амплитуды соответствующих колебаний, остаются, разумеется, произвольными. Из тождеств

$$n_i \sum_k n_k E'_k - E'_i + \frac{u'^2}{u_i^2} E'_i = 0,$$

$$n_i \sum_k n_k E''_k - E''_i + \frac{u''^2}{u_i^2} E''_i = 0$$

путем умножения их соответственно на E_i'' и E_i' , суммирования по i и вычитания, получаем

$$\left(\sum_i n_i E_i''\right) \left(\sum_k n_k E_k'\right) - \left(\sum_i n_i E_i'\right) \left(\sum_k n_k E_k''\right) + \\ + (u'^2 - u''^2) \sum_i \frac{E_i' E_i''}{u_i^2} = 0,$$

т. е. в случае если u' и u'' различны,

$$c^2 \sum \frac{E_i' E_i''}{u_i^2} = \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E}'' = \mathbf{D}'' \cdot \mathbf{E}' = 0. \quad (20b)$$

Подобным же образом из (19а), принимая во внимание (20b), а также то, что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$, получаем соотношение

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'' = 0, \quad (20c)$$

которое показывает, что направления \mathbf{D}' и \mathbf{D}'' друг к другу перпендикулярны. Эти направления мы назовем основными и направлениями или направлениями основных колебаний. Заметим, что $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'' \neq 0$; поэтому не имеет смысла определять основные направления вектором \mathbf{E} , тем более, что он лежит вне волновых плоскостей ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \neq 0$).

Уравнение (20а) значительно упрощается, если вычислить определитель и учесть соотношение $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Однако, можно притти к цели скорее и проще, если исходить непосредственно из уравнений (20). В самом деле, имеем:

$$\frac{n_i}{1 - \frac{u^2}{u_i^2}} \sum_k n_k E_k = E_i,$$

откуда, умножая на n_i и суммируя, получим соотношение:

$$\sum_i \frac{n_i^2}{1 - \frac{u^2}{u_i^2}} = 1,$$

или наконец

$$\frac{n_1^2}{u_1^2 - u^2} + \frac{n_2^2}{u_2^2 - u^2} + \frac{n_3^2}{u_3^2 - u^2} = 0. \quad (20d)$$

Это впервые установленное Френелем уравнение, очевидно, эквивалентно (20а).

Скорости распространения и направления колебаний друг с другом однозначно связаны. Действительно, первые можно непосредственным образом выразить через вторые, не вводя

явно направления распространения. А именно, умножая (19а) на \mathbf{D} , получаем, в виду $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$:

$$\frac{u^2}{c^2} D^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \sum_i \frac{u_i^2}{c^2} D_i^2,$$

т. е

$$u^2 D^2 = \sum_i u_i^2 D_i^2, \tag{21}$$

или

$$u^2 = \sum_i u_i^2 d_i^2, \tag{21a}$$

где

$$d_i = \frac{D_i}{D} \tag{21b}$$

есть направляющие косинусы вектора \mathbf{D} .

Однако было бы заблуждением считать, что линейное колебание \mathbf{D} заданного направления может распространяться во всех

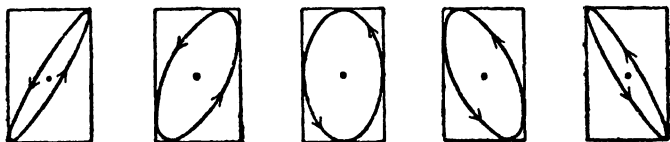


Рис. 12.

перпендикулярных к нему направлениях с одной и той же определяемой (21а) скоростью. Такое колебание является основным колебанием лишь для вполне определенного направления распространения (или вернее двух противоположных направлений волновой нормали) и в других направлениях вообще не может распространяться.

Нужно еще заметить, что два линейных основных колебания \mathbf{D}' и \mathbf{D}'' , хотя они и распространяются с различными скоростями, в каждой точке складываются в результирующее гармоническое колебание, вид которого („тип поляризации“) не зависит от времени, но определенным образом меняется в направлении распространения. В тех местах, где фазы \mathbf{D}' и \mathbf{D}'' совпадают, они дают линейное колебание; при сдвиге фаз на $\frac{\pi}{2}$ получается эллиптическое колебание с полуосями $|\mathbf{D}'|$ и $|\mathbf{D}''|$ и т. д. Эти изменения вида результирующего колебания $\mathbf{D} = (\mathbf{D}'_0 e^{ik' \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{D}''_0 e^{ik'' \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t}$ схематически представлены на рис.12.

2. Скорость лучей как функция направления лучей света. Основные колебания \mathbf{E} . Уравнение (19) показывает, что напряженность электрического поля \mathbf{E} лежит в плоскости колебаний (\mathbf{D}, \mathbf{n}) ; она, однако, не перпендикулярна

к \mathbf{n} , а образует с \mathbf{D} определенный, вообще говоря, отличный от нуля угол θ , зависящий от направления \mathbf{D} (и \mathbf{n}). Этот угол исчезает только в том случае, когда векторы \mathbf{D} и \mathbf{n} параллельны двум осям симметрии тензора ϵ_s . Магнитная напряженность поля, по (18), напротив всегда перпендикулярна к \mathbf{D} и \mathbf{n} так, что вектор $\mathbf{D} \times \mathbf{H}$ совпадает по направлению с \mathbf{n} (рис. 13).

Вектор

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \times \mathbf{H} \quad (22)$$

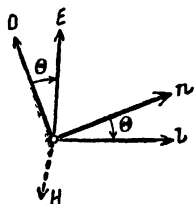


Рис. 13.

представляет, как известно, плотность электромагнитного количества движения [гл. II, (50с)].

В кристаллооптике имеют дело большей частью не с неограниченными плоскими волнами, а с тонкими пучками лучей (т. е. с волнами, ограниченными в поперечных направлениях). Направление этих пучков лучей совпадает не с волновой нормалью, а с вектором \mathbf{g} потока энергии излучения

$$\mathbf{K} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\mathbf{H} = \mathbf{B}), \quad (22a)$$

который совпадает в то же время с направлением световых лучей. Поэтому целесообразно, наряду с рассмотренной выше скалярной волновой скоростью, ввести еще и векторную лучевую скорость \mathbf{v} , направление которой совпадает с \mathbf{K} , величина же определяется формулой

$$u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v \cos \theta. \quad (22b)$$

При помощи этой скорости вектор потока энергии можно представить в виде

$$\mathbf{K} = \xi \mathbf{v}, \quad (23)$$

где

$$\xi = \frac{c}{4\pi} \frac{EH}{v}.$$

Далее, согласно первому уравнению (18), принимая во внимание, что $|\mathbf{k} \times \mathbf{E}| = kE \cos \theta$, $\frac{\omega}{k} = u$ и $\frac{u}{\cos \theta} = v$, имеем

$$E = \frac{v}{c} H. \quad (23a)$$

Точно так же из (18b) получаем

$$H = \frac{u}{c} D. \quad (23b)$$

Следовательно, в виду $\mathbf{ED} = ED \cos \theta$:

$$\xi = \frac{H^2}{4\pi} = \frac{\mathbf{ED}}{4\pi} = \frac{\mathbf{ED} + H^2}{8\pi}. \quad (23c)$$

Величина ξ таким образом равна „плотности энергии, соответствующей свободным электронам“. Напомним, что полная плотность энергии (при отождествлении полных и эффективных напряженностей поля), по (50) гл. II, равна

$$\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{ED} + \frac{H^2 - E^2}{2} \right).$$

Уравнения (23a) и (23b), при учете направления соответствующих векторов, могут быть заменены векторными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} &= 0, \\ \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{D} - \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Первое из них понятно без пояснений. Что же касается второго, то оно следует из того, что разность векторов \mathbf{np} и \mathbf{v} параллельна \mathbf{D} ; следовательно векторные произведения $\mathbf{np} \times \mathbf{D}$ и $\mathbf{v} \times \mathbf{D}$ тождественны. Уравнения (18) и (18b) могут быть записаны в форме аналогичной или вернее обратной (24)

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{u} \mathbf{n} \times \mathbf{E} - \mathbf{H} &= 0, \\ \frac{c}{u} \mathbf{n} \times \mathbf{H} + \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

Отношение $\frac{u}{c}$ в (24a) играет ту же роль, что и отношение $\frac{c}{v}$ в (24); при этом единичному вектору \mathbf{n} соответствует единичный вектор $\frac{\mathbf{v}}{v} = \mathbf{l}$, который определяет направление световых лучей. Исключая \mathbf{H} , получаем из (24) следующее, аналогичное (19a), уравнение:

$$\mathbf{l}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{D} + \frac{c^2}{v^2} \mathbf{E} = 0. \quad (24b)$$

Отсюда при помощи соотношений $E_i = \frac{D_i}{\epsilon_i} = D_i \frac{u_i^2}{c^2}$ тем же способом, что и (20d), (20c) и (21a) из (19a) получаются формулы:

$$\sum \frac{l_i^2}{1 - \frac{u_i^2}{v^2}} = 1,$$

т. е.

$$\frac{l_1^2}{\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{v^2}} + \frac{l_2^2}{\frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{v^2}} + \frac{l_3^2}{\frac{1}{u_3^2} - \frac{1}{v^2}} = 0, \quad (25)$$

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'' = 0 \quad (25a)$$

и

$$\frac{c^2}{v^2} E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (25b)$$

или

$$v^{-2} = u_1^{-2} e_1^2 + u_2^{-2} e_2^2 + u_3^{-2} e_3^2, \quad (25c)$$

где \mathbf{e} означает единичный вектор $\mathbf{E} : E$.

Связь $\frac{1}{v}$ с \mathbf{E} и \mathbf{e} , следовательно, тождественна со связью u с \mathbf{D} и \mathbf{p} .

3. Графическое определение направлений основных колебаний посредством поверхностей (v, \mathbf{e}) и (u, \mathbf{d}) . Эти соотношения могут быть графически представлены очень наглядным способом.

Мы рассмотрим сперва поверхность, которая получается, если из неподвижной точки O откладывать в каждом направлении \mathbf{e} отрезок длины v , определяемой уравнением (25c). Обозначая составляющие этого отрезка, т. е. величины $e_i \cdot v$, через x_i , получим

$$\frac{x_1^2}{u_1^2} + \frac{x_2^2}{u_2^2} + \frac{x_3^2}{u_3^2} = 1, \quad (26)$$

т. е. уравнение эллипсоида с полуосями u_1, u_2, u_3 . С помощью этого эллипсоида можно определить не только лучевую скорость v , соответствующую произвольному направлению напряженности электрического поля (\mathbf{e}), но и оба направления напряженности электрического поля \mathbf{e}' и \mathbf{e}'' , относящиеся к произвольному направлению луча l (и, само собой разумеется, соответствующие скорости v' и v'').

Прежде всего заметим, что векторы \mathbf{e}' и \mathbf{e}'' должны лежать в плоскости, перпендикулярной к l ; эту плоскость мы представим себе проходящей через центр эллипсоида. Линия ее пересечения с эллипсоидом является, как известно, эллипсом. Легко показать, что полуоси этого эллипса v' и v'' — поскольку они различны — по своему направлению совпадают с электрическими векторами \mathbf{e}' и \mathbf{e}'' , а по величине совпадают с соответствующими лучевыми скоростями (рис. 14). Чтобы это показать, рассмотрим вариационное уравнение

$$\delta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \quad (26a)$$

которое в связи с добавочными условиями (26) и с уравнением

$$x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3 = 0 \quad (26b)$$

определяет полуоси эллипса в сечении, перпендикулярном к l . По известному лагранжеву методу неопределенных множителей составляем вариацию левой стороны последнего уравнения и уравнения (26), помножаем их соответственно на два множителя -2α и $-\beta$, прибавляем к вариации $\sum x_i^2$ и, наконец, приравниваем нулю коэффициенты при вариациях δx_1 , δx_2 , δx_3 , так, как если бы последние были независимы друг от друга. Таким путем мы получаем следующие уравнения:

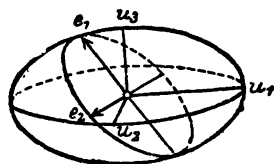


Рис. 14.

$$x_i - \alpha l_i - \beta \frac{x_i}{u_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

или

$$x_i = \frac{\alpha}{\beta} \frac{l_i}{1 - \frac{1}{u_i^2}}$$

Умножая соответственно на x_i или l_i и суммируя по i , получим отсюда

$$\sum x_i^2 - \beta \sum \frac{x_i^2}{u_i^2} = 0,$$

т. е. $\beta = v^2$ по (26) и

$$\sum \frac{l_i^2}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{u_i^2}} = 0,$$

т. е. уравнение (25).

Когда оба корня этого уравнения совпадают, эллиптическое сечение превращается в круг. Существует, как легко видеть два таких круговых сечения эллипсоида (26); они проходят через его среднюю ось (u_2) таким образом, что их нормали l образуют с большой осью (u_1) угол, определяющийся формулой

$$\operatorname{tg} \theta = \pm \frac{u_3}{u_1} \sqrt{\frac{u_1^2 - u_2^2}{u_2^2 - u_3^2}}. \quad (26c)$$

Эти особенные направления лучей называются **оптическими осями** рассматриваемого кристаллического тела. Они не связаны с двумя определенными основными колебаниями; все перпендикулярные к ним направления колебаний вполне равноправны.

Совершенно аналогичные результаты по отношению к **волновым нормальям** и колебаниям вектора индукции D получаются посред-

ством графического представления уравнения (21b). А именно, откладывая в направлении каждого единичного вектора \mathbf{d} отрезок g длины $r = u$, определяемой (21b), получим поверхность, подобную выше рассмотренному эллипсоиду — так называемый овалويد Френеля:

$$u_1^2 x_1^2 + u_2^2 x_2^2 + u_3^2 x_3^2 = r^4 \quad (x_i = r d_i).$$

Легко показать — тем же способом, что и выше — что полуоси (r_{\max} и r_{\min}) центрального сечения этого овалоида произвольной плоскостью совпадают по направлению с основными колебаниями \mathbf{D} , относящимися к перпендикулярной к ним волновой нормали (при этом само собой разумеется $r_{\max} = u'$ и $r_{\min} = u''$). Овалويد Френеля точно так же, как и эллипсоид (26), имеет два круговых центральных сечения ($r_{\max} = r_{\min}$), которые определяют два особых направления волновых нормалей, аналогичные оптическим осям.

4. Поверхность лучей и поверхность нормалей. В приведенных графических представлениях скорости v и u откладываются соответственно в направлении напряженности электрического поля или в направлении электрической индукции. Если откладывать их — что представляется более естественным — в направлении луча или в направлении волновой нормали, согласно уравнениям

$$\sum \frac{l_i^2}{\frac{1}{u_i^2} - \frac{1}{v^2}} = 0 \quad \text{или} \quad \sum \frac{n_i^2}{u_i^2 - u^2} = 0,$$

то получают две поверхности, называемые поверхностью лучей и поверхностью нормалей. Эти две поверхности

имеют очень сходный вид [точно так же, как эллипсоид (26) и овалويد Френеля]; они представлены схематически на рис. 15. В виду симметрии поверхности мы ограничились только одним октантом и нарисовали линии пересечения ее с координатными плоскостями. В случае поверхности лучей (v , I) эти сечения представляют собой круги или эллипсы; пунктирная линия означает одну из оптических осей. Поверхность лучей имеет очень простой физический смысл, а именно: она представляет геометрическое место точек, до которых распространяется за единицу времени электромагнитное возмущение, возник-

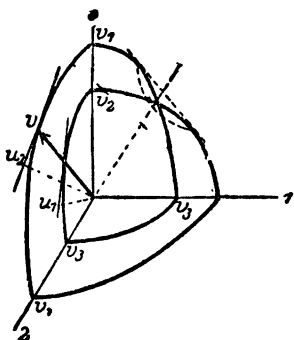


Рис. 15.

шее в начале координат. При этом каждому направлению распространения (I) соответствуют два элементарных луча с взаимно перпендикулярными направлениями колебания E (это расщепле-

ние первоначального возмущения на множество линейно поляризованных пучков лучей должно очевидно происходить само собой). Оптические оси представляют исключение: в направлении их распространение света происходит квази-изотропным образом (со скоростью $v = u_2$).

Поверхность нормалей не имеет подобного непосредственного физического значения. Она, однако, находится в очень простом геометрическом отношении к поверхности лучей, а именно: плоскости, касательные к поверхности лучей, параллельны волновым плоскостям, соответствующим этим лучам. Другими словами: поверхность лучей есть огибающая (двойного) семейства плоскостей, которые получаются, если плоские волны всех возможных направлений, пройдя одновременно через начало координат, переместятся за единицу времени с соответствующими скоростями u' , u'' . Для доказательства напомним прежде всего уравнение указанного семейства плоскостей:

$$f \equiv \sum x_i n_i - u = 0. \quad (27)$$

Это уравнение содержит 4 параметра: n_1 , n_2 , n_3 , u , связанных между собой соотношениями:

$$\sum n_i^2 = 1, \quad \sum \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2} = 0.$$

Огибающая семейства (27) получается, как известно, исключением этих параметров из уравнений $f=0$ и $\delta f=0$, где δ соответствует произвольной вариации независимых параметров. Вводя два неопределенных множителя $-\frac{\alpha}{2}$ и $-\frac{\beta}{2}$, можно заменить последнее уравнение следующим:

$$\delta f - \frac{\alpha}{2} \delta \sum n_i^2 - \frac{\beta}{2} \delta \sum \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2} = 0, \quad (27a)$$

и при этом рассматривать все четыре параметра как независимые переменные, т. е. приравнять нулю коэффициенты при вариациях этих переменных.

Таким образом:

$$x_i - \alpha n_i - \beta \frac{n_i}{u^2 - u_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (27b)$$

$$1 - \beta u \sum \frac{n_i^2}{(u^2 - u_i^2)^2} = 0, \quad (27c)$$

Умножая (27b) на n_i и суммируя, получим в связи с (20d):

$$\sum x_i n_i - \alpha = 0,$$

т. е. по (27) $\alpha = u$. Из (27с) находим второй множитель:

$$\beta = \frac{1}{u \sum_i \frac{n_i^2}{(u^2 - u_i^2)^2}}.$$

Далее по (27b) имеем

$$\sum x_i^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_i \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2} + \beta^2 \sum_i \frac{n_i^2}{(u^2 - u_i^2)^2},$$

т. е.

$$r^2 = u^2 + \frac{\beta}{u}$$

или

$$\beta = u(r^2 - u^2).$$

Уравнения (27b) могут быть следовательно написаны в виде

$$x_i = n_i u \left(1 + \frac{r^2 - u^2}{u^2 - u_i^2} \right) = n_i u \frac{r^2 - u_i^2}{u^2 - u_i^2}.$$

Отсюда далее получаем

$$\begin{aligned} \sum \frac{x_i^2 u_i^2}{r^2 - u_i^2} &= u \sum \frac{n_i x_i u_i^2}{u^2 - u_i^2} = -u \sum n_i x_i + u^3 \sum \frac{n_i x_i}{u^2 - u_i^2} = \\ &= -u^2 + u^3 \sum \frac{n_i x_i}{u^2 - u_i^2}, \end{aligned}$$

или, принимая во внимание

$$n_i x_i = \alpha n_i^2 + \beta \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2}$$

и

$$\begin{aligned} \sum \frac{n_i x_i}{u^2 - u_i^2} &= \alpha \sum \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2} + \beta \sum \frac{n_i^2}{(u^2 - u_i^2)^2} = \frac{1}{u}, \\ \sum \frac{x_i^2 u_i^2}{r^2 - u_i^2} &= 0, \end{aligned} \quad (27d)$$

т. е. окончательно

$$\sum \frac{l_i^2}{\frac{1}{u_i^2} - \frac{1}{r^2}} = 0 \quad \left(l_i = \frac{x_i}{r} \right).$$

что совпадает с уравнением поверхности лучей (при $r = v$). Нужно заметить, что каждому направлению луча соответствуют, вообще говоря, два направления нормали (см. рис. 15). Исключение представляют только оптические оси; соответствующие направления нормали, как легко показать, образуют конус.

Обратно, каждому направлению нормали соответствуют, вообще говоря, два направления луча. Существуют однако особенные касательные плоскости к поверхности лучей, которые касаются ее вдоль круга: им соответствуют два конуса лучей. Указанные касательные плоскости представляют собой те волновые плоскости, для которых обе скорости u' и u'' совпадают. Эти своеобразные соотношения между особенными направлениями волн и лучей вызывают замечательные явления внутренней и внешней конической рефракции (см. ниже, гл. V).

5. Одноосные кристаллы. Кристаллы рассмотренного выше типа, с двумя различными оптическими осями, называют двуосными. В кристаллах, в которых две из главных скоростей равны друг другу, у которых, следовательно, тензор ϵ_{ij} обладает симметрией вращения, оптические оси совпадают с осью симметрии этого тензора. При этом поверхность лучей распадается на шар и эллипсоид, касающиеся друг друга на концах оптической оси. В самом деле, переписывая уравнение (27d) в виде

$$u_1^2 x_1^2 (r^2 - u_2^2) (r^2 - u_3^2) + u_2^2 x_2^2 (r^2 - u_3^2) (r^2 - u_1^2) + u_3^2 x_3^2 (r^2 - u_1^2) (r^2 - u_2^2) = 0,$$

получим при $u_1 = u_2$:

$$(r^2 - u_1^2) \{ u_1^2 x_1^2 (r^2 - u_3^2) + u_1^2 x_2^2 (r^2 - u_3^2) + u_3^2 x_3^2 (r^2 - u_1^2) \} = 0,$$

т. е.

$$r = u_1 \text{ (шар)} \tag{27e}$$

и

$$u_1^2 (x_1^2 + x_2^2) (r^2 - u_3^2) + u_3^2 x_3^2 (r^2 - u_1^2) = r^2 [u_1^2 (x_1^2 + x_2^2) + u_3^2 x_3^2 - u_1^2 u_3^2] = 0,$$

или

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{u_3^2} + \frac{x_3^2}{u_1^2} = 1 \text{ (эллипсоид вращения)}. \tag{27f}$$

В случае $u_1 = u_2 > u_3$ этот эллипсоид является вытянутым, а в противоположном случае ($u_1 = u_2 < u_3$) — сплюснутым (рис. 16а и 16б). Соответствующие одноосные кристаллы обозначаются как положительные и отрицательные.

Лучи, скорость которых не зависит от направления, которые следовательно представляются шаровой поверхностью, называют обыкновенными; лучи же, представляемые эллипсоидом, — необыкновенными. В положительных кристаллах скорость обыкновенных лучей больше, чем необыкновенных, в отрицательных — наоборот.

Направление колебаний D или E в каком-либо луче определяется в общем случае из условия, что оно лежит в плоскости, содержащей этот луч и соответствующую волновую нормаль

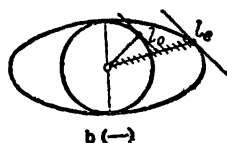
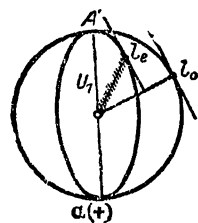


Рис. 16.

(рис. 13). В случае одноосных кристаллов, это правило применимо только к необыкновенному лучу; при этом плоскость колебаний E и D совпадает с меридиональной плоскостью, проходящей через луч и через оптическую ось. Направление колебаний в обыкновенном луче с тем же направлением волновой нор-

мали получается при этом как перпендикулярное к указанной меридиональной плоскости. В обыкновенном луче векторы E и D всегда параллельны, отношение $D:E$ при этом равно

$$\frac{c^2}{u_1^2} = \epsilon_1 = \epsilon_3.$$

§ 3. Плоские волны в гиротропных телах; обобщение на произвольные однородные тела.

В предыдущих параграфах мы считали тензор ϵ_2 симметричным и вещественным. Теперь мы рассмотрим случай, когда его составляющие комплексны и сопряженно-симметричны, т. е. „эрмитовы“. Этому случаю, вообще говоря, соответствует комбинация обычной анизотропии с гиротропией. Чтобы лучше понять значение этой последней, мы положим сперва, что вещественная часть ϵ_2 обладает шаровой симметрией. При этом по формуле (26а) гл. III: имеем:

$$D = E + 4\pi P = (1 + 4\pi\kappa) E + \frac{4\pi i}{\left(1 - \frac{4\pi}{3} N\beta\right)^2} E \times G \quad (28)$$

или

$$D = \epsilon E + iE \times J, \quad (28a)$$

где для сокращения положено

$$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa, \quad J = \frac{4\pi G}{\left(1 - \frac{4\pi}{3} N\beta\right)^2}. \quad (28b)$$

Ограничиваясь попрежнему случаем плоских волн, мы однако введем отличную от единицы скалярную магнитную восприимчивость μ , отчего вопрос лишь незначительно усложнится.

1. Общая теория оптической гиротропии; скорость распространения волн и типы основных

колебаний. Основное уравнение (18b) соответственно сказанному мы заменим уравнением:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} + \frac{\omega \mu}{c} \mathbf{D} = 0, \quad (29)$$

тогда как уравнение (18) остается неизменным:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} - \frac{\omega}{c} \mathbf{H} = 0. \quad (29a)$$

Исключая \mathbf{H} , получим, как и прежде,

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \mathbf{D} = 0$$

или при $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ и $\frac{\omega}{k} = u$,

$$\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{E} + \frac{u^2}{c^2} \mu \mathbf{D} = 0. \quad (29b)$$

Это уравнение отличается от (19a) только множителем μ .

Подставляя (28a) в (29b), получаем

$$\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) - \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu\right) \mathbf{E} + i \frac{u^2}{c^2} \mu \mathbf{E} \times \mathbf{J} = 0 \quad (30)$$

или в составляющих

$$\left. \begin{aligned} & \left(n_1^2 - 1 + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu\right) E_1 + \left(n_1 n_2 + i \frac{u^2}{c^2} \mu J_3\right) E_2 + \\ & \quad + \left(n_1 n_3 - i \frac{u^2}{c^2} \mu J_2\right) E_3 = 0; \\ & \left(n_2 n_1 - i \frac{u^2}{c^2} \mu J_3\right) E_1 + \left(n_2^2 - 1 + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu\right) E_2 + \\ & \quad + \left(n_2 n_3 + i \frac{u^2}{c^2} \mu J_1\right) E_3 = 0; \\ & \left(n_3 n_1 + i \frac{u^2}{c^2} \mu J_2\right) E_1 + \left(n_3 n_2 - i \frac{u^2}{c^2} \mu J_1\right) E_2 + \\ & \quad + \left(n_3^2 - 1 + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu\right) E_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

Эта система уравнений решается тем же способом, что и система (20). Прежде всего из коэффициентов при E_1, E_2, E_3 составляем определитель Δ и получаем в качестве условия совместности уравнение

$$\Delta = 0,$$

из которого можно вычислить скорости, соответствующие заданному направлению распространения волн \mathbf{n} .

Вследствие эрмитовского характера элементов определителя Δ все корни уравнения $\Delta=0$ должны быть вещественными (см. ниже п. 4), при этом должны учитываться только два корня u' и u'' , так как третий бесконечен.

Решения E' и E'' , соответствующие этим корням, т. е. отношения $E'_1:E'_2:E'_3$ и $E''_1:E''_2:E''_3$ имеют теперь, в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, комплексные значения.

Это означает, что E'_1, E'_2, E'_3 (или E''_1, E''_2, E''_3) имеют различные фазы, или, другими словами, что основные колебания, которые могут распространяться в заданном направлении с определенными скоростями, вообще говоря, поляризованы не линейно, а эллиптически и притом вполне определенным, для различных направлений распространения различным образом.

Эти основные колебания связаны между собой условиями ортогональности подобного же вида, что и в рассмотренном выше случае. Именно, принимая во внимание уравнение $\mathbf{pD}=0$, получим из (29b):

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}''^* = \frac{u'^2}{c^2} \mu \mathbf{D}' \mathbf{D}''^*,$$

$$\mathbf{E}''^* \cdot \mathbf{D}' = \frac{u''^2}{c^2} \mu \mathbf{D}' \mathbf{D}''^*.$$

Далее вследствие эрмитовского характера тензора ϵ_{ik} имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \mathbf{D}''^* &= \sum_i E'_i D_i''^* = \sum_i \sum_k \epsilon_{ik}^* E'_i E_k''^* = \sum_k \sum_i \epsilon_{ki} E'_i E_k''^* = \\ &= \sum_k E_k''^* D'_k = \mathbf{E}''^* \cdot \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{\mu}{c^2} (u'^2 - u''^2) \mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}''^* = 0,$$

т. е.

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}''^* = 0, \quad (30b)$$

и, следовательно, также

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{E}''^* = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}''^* = 0. \quad (30c)$$

2. Более подробное рассмотрение предыдущих результатов. Уравнение $\Delta=0$ значительно упрощается, если первую ось направить вдоль вектора \mathbf{J} , а вторую в плоскости (\mathbf{J}, \mathbf{n}) . Полагая следовательно

$$J_1 = J, \quad J_2 = J_3 = 0, \quad n_3 = 0, \quad n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta, \quad (\theta \neq \pi, \mathbf{J})$$

а также полагая для краткости

$$\frac{u^2}{c^2} \epsilon \mu - 1 = a, \quad \frac{u^2}{c^2} \mu J = b = (a+1) \frac{J}{\epsilon},$$

получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta + a, & \cos \theta \sin \theta, & 0 \\ \cos \theta \sin \theta, & \sin^2 \theta + a, & ib \\ 0, & -ib, & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \cos^2 \theta + a, & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta, & \sin^2 \theta + a \end{vmatrix} + \\ + ib \begin{vmatrix} \cos^2 \theta + a, & 0 \\ \cos \theta \sin \theta, & ib \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\Delta = a^2(a+1) - (a+1)^2 \frac{J^2}{e^2} (\cos^2 \theta + a),$$

и следовательно (так как $a+1 \neq 0$)

$$a^2 \left(1 - \frac{J^2}{e^2}\right) - a \frac{J^2}{e^2} (\cos^2 \theta + 1) - \frac{J^2}{e^2} \cos^2 \theta = 0$$

или, наконец,

$$u^2 \frac{e\mu}{c^2} = 1 \pm \frac{1 + \cos^2 \theta \pm \sqrt{(1 + \cos^2 \theta)^2 + 4 \left(\frac{e^2}{J^2} - 1\right) \cos^2 \theta}}{2 \left(\frac{e^2}{J^2} - 1\right)}. \quad (31)$$

Если отношение $\frac{J}{e}$ очень мало по сравнению с единицей (это предположение практически всегда выполняется), имеем, в первом приближении:

$$u^2 \frac{e\mu}{c^2} \cong \left(1 \pm \frac{J}{e} \cos \theta\right),$$

или

$$u \cong u_0 \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{J_n}{e}\right), \quad (31a)$$

где $u_0 = \frac{c}{\sqrt{e\mu}}$ — скорость распространения воли при отсутствии гиротропии, а J_n — проекция вектора \mathbf{J} на волновую нормаль.

Приведем еще точные формулы для u при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{1 \mp \frac{J}{e}}} \quad (\theta = 0) \quad (31b)$$

и

$$u' = u_0, \quad u'' = \frac{u_0}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{e^2}}} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right). \quad (31c)$$

Для этих двух частных случаев исходное уравнение (30) легко решается. В первом случае положим $\mathbf{J} = J\mathbf{n}$ и напишем уравнение (30) в виде

$$\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) + E\mathbf{a} + i\mathbf{b}\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0.$$

Отсюда, умножая скалярно на \mathbf{n} , получим

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})(a + 1) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \frac{u^2}{c^2} \epsilon\mu = 0.$$

Мы видим, таким образом, что $\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{n} = 0$, т. е. что плоскость колебаний \mathbf{E} совпадает с волновой плоскостью. Предшествующее уравнение сводится, следовательно, к

$$\mathbf{E} + i\frac{b}{a}\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0. \quad (32)$$

Внешним умножением на \mathbf{n} получаем далее

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} + i\frac{b}{a}[\mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})] = \mathbf{n} \times \mathbf{E} + i\frac{b}{a}\mathbf{E} = 0.$$

Сравнивая это равенство с (32), находим:

$$\frac{ib}{a} = -\frac{a}{ib}$$

или

$$\frac{a}{b} = \pm 1, \quad (32a)$$

т. е.

$$\frac{u^2}{c^2} \epsilon\mu - 1 = \pm \frac{u^2}{c^2} \mu\mathbf{J}$$

в согласии с (31b).

Для определения соответствующих основных колебаний положим

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}_2 + i\mathbf{E}_3,$$

где \mathbf{E}_2 и \mathbf{E}_3 означают вещественные составляющие комплексной амплитуды $\mathbf{E} (= \mathbf{E}^0 e^{-i\omega t})$ по второй и третьей осям. Подставляя в (32), получим в силу (32a):

$$\mathbf{E}_2 \pm \mathbf{E}_3 \times \mathbf{n} = 0. \quad (32b)$$

Это уравнение показывает, что численные значения \mathbf{E}_2 и \mathbf{E}_3 равны друг другу, так что мы имеем два колебания, поляризованные по кругу с противоположными направлениями вращения.

Во втором случае ($\mathbf{J} \perp \mathbf{n}$) уравнение (30) удовлетворяется, если положить $\mathbf{E} \parallel \mathbf{J}$, т. е. $\mathbf{E} \times \mathbf{J} = 0$ и $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$. Это первое линейное основное колебание распространяется с той же скоростью u_0 , что и при отсутствии гирации. Второе основное колебание должно, очевидно [по (30c)] происходить в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{J} . Мы обозначим эту плоскость через (1, 2)

и направим первую ось по волновой нормали. Если положить для рассматриваемых колебаний

$$E^0 = E_1 + iE_2,$$

то согласно (30) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} E_1 u^2 \frac{\epsilon\mu}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} \mu J E_2 &= 0, \\ iE_2 \left(u^2 \frac{\epsilon\mu}{c^2} - 1 \right) - i \frac{u^2}{c^2} \mu J E_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Отсюда следует

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{J}{\epsilon} \quad (33a)$$

и

$$u^2 \frac{\epsilon\mu}{c^2} - 1 - \frac{u^2}{c^2} \mu \frac{J^2}{\epsilon} = 0,$$

так что

$$u^2 \frac{\epsilon\mu}{c^2} \left(1 - \frac{J^2}{\epsilon^2} \right) = 1$$

в согласии с (31с).

При $\frac{J}{\epsilon} \ll 1$ это второе колебание можно также рассматривать как линейное и его скорость распространения отождествить с u_0 .

Легко показать, что основные колебания, соответствующие другим направлениям волновой нормали по отношению к вектору гирации, поляризованы эллиптически. Большие оси эллипсов колебаний E лежат в волновой плоскости, параллельно и перпендикулярно к плоскости (\mathbf{n}, \mathbf{J}) , причем плоскость первого эллипса перпендикулярна к волновой нормали, а второго — к вектору гирации. Эллипсы колебаний D лежат, напротив, оба в волновой плоскости (это следует непосредственно из уравнения $D \cdot \mathbf{n} = 0$) и имеют противоположные направления вращения; отношения их осей приблизительно (при $\frac{J}{\epsilon} \ll 1$) равны $\cos \theta$ (рис. 17).

Мы не будем здесь ближе входить в рассмотрение этих колебаний, и ограничимся лишь указанием на то, что изложенные в предыдущих параграфах соотношения между волнами и лучами дословно применимы и к рассматриваемому здесь случаю. Каждому направлению нормали соответствует „обыкновенный“ луч, совпадающий с ней, и необыкновенный, несколько к ней наклонный и лежащий в плоскости (\mathbf{n}, \mathbf{J}) . Следовательно гиротропные тела эквивалентны в этом отношении одноосным кристаллам, причем направление вектора гирации играет роль оптической оси.

3. Вращение плоскости поляризации; эффект Фарадея. Каждое линейное колебание может быть, как известно,

представлено в виде суммы двух круговых колебаний с одинаковыми амплитудами и противоположными направлениями вращения. Если рассматривать распространение таких круговых колебаний в направлении гирации, то получим в каждой точке результирующее линейное колебание постоянного во времени направления. Это направление или содержащая его и волновую нормаль „плоскость поляризации“ должна, однако, при продвижении по направлению распространения, равномерно вращаться вокруг последнего, вследствие различной скорости распространения обоих круговых колебаний. Величина этого „вращения плоскости поляризации“ на единицу длины, как легко видеть, выражается формулой

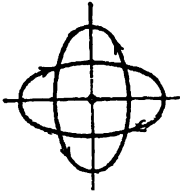


Рис 17.

Действительно, результирующие колебания определяются формулой:

$$E^0 e^{-i\omega t} = (E_2 + iE_3) e^{i(-\omega t + k'x_1)} + (E_2 - iE_3) e^{i(-\omega t + k''x_1)},$$

т. е.

$$\begin{aligned} E^0 e^{-i\omega t} &= [(E_2 + iE_3) e^{i\frac{k' - k''}{2} x_1} + (E_2 - iE_3) e^{-i\frac{k' - k''}{2} x_1}] e^{i(-\omega t + \frac{k' + k''}{2} x_1)} = \\ &= 2 \left[E_2 \cos \frac{k' - k''}{2} x_1 - E_3 \sin \frac{k' - k''}{2} x_1 \right] e^{i(-\omega t + \frac{k' + k''}{2} x_1)}. \end{aligned}$$

Можно следовательно представить себе, что рассматриваемое колебание распространяется со средней скоростью:

$$u = \frac{2\omega}{k' + k''} = \frac{2u' u''}{u' + u''}, \quad (34a)$$

тогда как его амплитуда на пути x_1 поворачивается на угол $\left(\frac{k' - k''}{2}\right) x_1$. Согласно (31a) имеем приблизительно (при $\frac{J}{\varepsilon} \ll 1$):

$$\varphi \cong \frac{\pi J}{\varepsilon \lambda} \cos \theta. \quad (34b)$$

Эта формула остается справедливой также и для линейных колебаний, распространяющихся наклонно к вектору гирации ($\theta > 0$). В этом случае их нужно разлагать на два эллиптические основные колебания, т. е. не предполагать равенства между $|E_2|$ и $|E_3|$. Впрочем это предположение очевидно не существенно для предшествующих соображений.

В § 3 гл. II мы показали, что гиротропия изотропного тела может быть вызвана внешним, постоянным во времени, магнитным полем; вектор \mathbf{J} при этом параллелен и пропорционален магнитной напряженности [ср. формулы (24a) и (25a) гл. III]. Это явление было открыто еще Фарадеем и называется поэтому эффектом Фарадея.

Точно так же, как и гиротропию, можно трактовать и рассмотренную в § 3 гл. III оптическую активность. Это явление проще, чем предыдущее, в том отношении, что вектор активности Γ всегда совпадает с направлением волновой нормали. Теория распространения волн в оптически-активной среде осложняется однако необходимостью учета наряду с дополнительной электрической поляризацией $\Delta \mathbf{P} = \frac{i}{\sqrt{\epsilon}} g \mathbf{H}$ соответствующей магнитной поляризации $\Delta \mathbf{M} = -\frac{i}{\sqrt{\epsilon}} g \mathbf{E}$. Полагая в основном уравнении

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0,$$

и

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} - 4\pi \Delta \mathbf{M}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + 4\pi \Delta \mathbf{P}$$

и пользуясь соотношением

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} = 0,$$

где

$$\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E} + 2 \frac{i}{\sqrt{\epsilon}} g \mathbf{H} = \epsilon \mathbf{E} + 2i g \mathbf{n} \times \mathbf{E}.$$

Отсюда явствует, что эффект магнитной поляризации сводится практически к удвоению вектора гирации Γ , обусловленного двубочной электрической поляризацией.

4. Общая теория прозрачных тел. Полученные выше результаты без значительного изменения распространяются на общий случай тел одновременно электрически анизотропных, магнитно анизотропных и гиротропных — если только они остаются вполне прозрачными, т. е. если в них не происходит затухания электромагнитных колебаний.

Для определения плоских волн, могущих распространяться в заданном направлении, мы имеем в этом случае общие уравнения:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \frac{u}{c} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{B} + \frac{u}{c} \mathbf{D} = 0 \quad (35)$$

и линейные соотношения

$$D_i = \sum_k \epsilon_{ik} E_k, \quad B_i = \sum_k \mu_{ik}^{-1} H_k \quad (35a)$$

с сопряженно симметричными (эрмитовыми) коэффициентами:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}^*; \quad \mu_{ik}^{-1} = \mu_{ki}^{-1*}. \quad (35b)$$

Вводя вместо \mathbf{n} соответствующий антисимметричный тензор:

$$n_1 = n_{23} = -n_{32}, \quad n_2 = n_{31} = -n_{13}, \quad n_3 = n_{12} = -n_{21}, \quad (36)$$

перепишем уравнения (35) в виде:

$$-\frac{u}{c} H_i = \sum n_{ik} E_k, \quad \frac{u}{c} D_i = \sum n_{ik} B_k. \quad (37)$$

Отсюда далее получим:

$$\frac{u^2}{c^2} D_i = \sum_k \sum_l n_{ik} \nu_{kl}^{-1} H_l \frac{u}{c} = - \sum_k \sum_l \sum_j n_{ik} \nu_{kl}^{-1} n_{lj} E_j,$$

т. е.

$$\sum_i \left(m_{ij} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right) E_j = 0 \quad (37a)$$

где

$$m_{ij} = \sum_k \sum_l n_{ik} \nu_{kl}^{-1} n_{lj}. \quad (37b)$$

Система уравнений (37a) является обобщением уравнений (20) и (30a).¹ Легко видеть, что коэффициенты m_{ij} также эрмитовы. Действительно, имеем вследствие $n_{ik} = -n_{ki}$:

$$m_{ij}^* = \sum_k \sum_l n_{ik} \nu_{kl}^{-1*} n_{lj} = \sum_k \sum_l n_{ik} \nu_{lk}^{-1} n_{lj} = \sum_k \sum_l n_{jl} \nu_{lk}^{-1} n_{ki} = m_{ji}.$$

Отсюда следует, что условие совместности системы (37a)

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} m_{11} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{11} & m_{12} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{12} & m_{13} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{13} \\ m_{21} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{21} & m_{22} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{22} & m_{23} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{23} \\ m_{31} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{31} & m_{32} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{32} & m_{33} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (38)$$

удовлетворяется вещественными значениями параметра u^2 . Для доказательства умножим (37a) на E_i^* и просуммируем по i . При этом

$$-\frac{u^2}{c^2} = \frac{\sum \sum m_{ij} E_i^* E_j}{\sum \sum \varepsilon_{ij} E_i^* E_j} = \frac{\sum \sum m_{ij} E_i^* E_i}{E^* \cdot D}. \quad (38a)$$

Далее, вследствие

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*,$$

$$E^* \cdot D = \sum \sum \varepsilon_{ji}^* E_i^* E_j = \left(\sum \sum \varepsilon_{ji} E_j^* E_i \right)^* = (E^* \cdot D)^* = E \cdot D^*.$$

Это означает, что знаменатель (38a) имеет вещественное значение. Так как вследствие $m_{ij} = m_{ji}^*$ числитель точно так же вещественен, то и u^2 должно быть вещественно. Легко далее показать, что один из корней (38) бесконечен и поэтому не имеет

¹ Если выразить E через D и H через B , то вместо (37a) получается эквивалентная система уравнений

$$\sum \left(e_{ij} + \frac{u^2}{c^2} \nu_{ij} \right) B_j = 0, \quad \text{где } e_{ij} = \sum_k \sum_l n_{ik} \varepsilon_{kl}^{-1} n_{lj}.$$

физического смысла, тогда как два другие дают различные вещественные скорости распространения u' и u'' — точно так же, как и в рассмотренных прежде частных случаях.

Этим скоростям соответствуют два определенных, вообще говоря эллиптических основных колебания E' и E'' или D' и D'' , удовлетворяющих условиям ортогональности

$$E' \cdot D''^* = E''^* \cdot D' = 0. \quad (38b)$$

Напротив, другие условия ортогональности: $D' \cdot D''^* = 0$ точно так же, как и соотношение $E' \cdot E''^* = 0$, вообще говоря, не выполняются. Следовательно основные колебания E и D друг к другу, так сказать, взаимно ортогональны.

Б. Влияние затухания. Нам остается еще рассмотреть условия, вызываемые затуханием. Последнее в общем случае описывается прибавлением к эрмитовым тензорам m_{ik} и ϵ_{ik} соответствующих антиэрмитовых (сопряженно-антисимметричных) тензоров (см. гл. III, § 3). При этом для u' и u'' (или k' и k'') получаются из (38) комплексные значения, мнимые части которых определяют коэффициенты поглощения соответствующих основных колебаний в направлении распространения. Можно однако, формулировать проблему еще общее, подобно тому, как мы это сделали в § 1 для частного случая изотропных тел, а именно можно считать направление распространения $\mathbf{n}^{(1)}$ и направление затухания $\mathbf{n}^{(2)}$ различными. При этом для каждой подобной пары направлений получается по два основных колебания эллиптического типа, связанных между собой и с векторами $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ довольно сложным образом. Однако и в том случае, когда $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ совпадают, соотношения ортогональности вышерассмотренного типа при наличии затухания, вообще говоря, не могут иметь места.

Подробное исследование этих вопросов в общем случае не представляет физического интереса. Мы поэтому ограничимся иллюстрацией влияния затухания на распространение света в анизотропных телах на простом примере одноосного кристалла. Основные уравнения (20) могут при этом оставаться неизменными (если не делать слишком общих предположений относительно тензора проводимости), и нужно только рассматривать главные скорости u_i или главные диэлектрические постоянные $\epsilon_i = \frac{c^2}{u_i^2}$ как комплексные величины. Составляющие электрической напряженности (или индукции) должны соответственно этому также рассматриваться как комплексные величины.

При условии $u_1 \neq u_2 = u_3$ уравнение Френеля (20d) или соответствующее ему уравнение „поверхности нормалей“:

$$\sum \frac{x_i^2}{u^2 - u_i^2} = 0, \quad (x_i = un_i)$$

расщепляется на два уравнения, а именно:

$$u' = u_2$$

и

$$u'^2 = u_1^2 (n_2^2 + n_3^2) + u_2^2 n_1^2 = u_1^2 + (u_2^2 - u_1^2) \cos^2 \theta$$

[ср. (27d), (27e) и (27f)]; θ означает угол между волновой нормалью и оптической осью, которую мы теперь выберем в качестве первой оси ($\cos \theta = n_1$). Для простоты мы направим вторую ось в плоскости (\mathbf{l}, \mathbf{n}) , что соответствует $n_2 = \sin \theta$ и $n_3 = 0$. Подставляя первое из вышеприведенных значений u в уравнения (20), будем иметь:

$$n_1 (E_1 n_1 + E_2 n_2) + \left(\frac{u_2^2}{u_1^2} - 1 \right) E_1 = 0,$$

$$n_2 (E_1 n_1 + E_2 n_2) = 0, \quad 0 = 0,$$

т. е., следовательно

$$E_1 = E_2 = 0.$$

Таким образом соответствующие колебания линейно поляризованы точно так же, как и при отсутствии затухания [перпендикулярно к плоскости (\mathbf{l}, \mathbf{n})].

При $u = u'$ имеем также:

$$n_1 (E_1 n_1 + E_2 n_2) + \left(\frac{u_2^2}{u_1^2} - 1 \right) n_1^2 E_1 = 0$$

$$n_2 (E_1 n_1 + E_2 n_2) + \left(\frac{u_1^2}{u_2^2} - 1 \right) n_2^2 E_2 = 0,$$

$$\left(\frac{u_1^2}{u_2^2} - 1 \right) n_2^2 E_3 = 0.$$

Отсюда следует $E_3 = 0$ и далее

$$\frac{E_1}{E_2} = - \frac{n_2}{n_1} \frac{u_1^2}{u_2^2}, \quad \text{или} \quad D_1 : D_2 = -n_2 : n_1.$$

Эти формулы показывают, что хотя колебания \mathbf{D} остаются линейными, соответствующие колебания \mathbf{E} — поскольку отношение $\frac{u_1^2}{u_2^2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ комплексно — должны быть эллиптически поляризованы, причем плоскость этих эллипсов совпадает с плоскостью (\mathbf{l}, \mathbf{n}) .

Коэффициент поглощения на единицу длины для обоих основных колебаний определяется как мнимая часть $\frac{c^2}{u^2}$ (ср. § 1). По-

этому, не вдаваясь в подробности его вычисления, отметим, что в случае второго основного колебания этот коэффициент точно так же, как и скорость распространения, равная вещественной части ω , зависит от направления волновой нормали.

§ 4. Негармонические колебательные процессы в однородных телах; линейные и пространственные волновые группы.

1. Представление произвольных электромагнитных процессов путем наложения плоских синусоидальных гармонических волн. До сих пор мы рассматривали исключительно гармонические колебательные процессы. Как уже неоднократно указывалось, распространение другого рода электромагнитных процессов в материальных телах можно исследовать лишь путем разложения напряженностей электромагнитного поля на их гармонически колеблющиеся составляющие.

Дальнейшая специализация этих гармонических колебательных процессов введением плоских волн не являлась необходимой, и должна была служить скорее подготовкой к рассмотрению анизотропных тел.

Однако такие гармонически колеблющиеся синусоидальные плоские волны, которые мы в дальнейшем будем кратко называть элементарными волнами, с математической точки зрения представляются гармоническими составляющими "различных пространственно-временных функций $F(t, \mathbf{r}) = F(t, x_1, x_2, x_3)$ в том же смысле, в каком мы говорили до сих пор о гармонических функциях одного лишь времени. Беря например определенные значения t, x_1, x_2 и рассматривая F как функцию переменной x_3 , можно разложить ее на гармонические составляющие вида $f e^{ik_3 x_3}$, точно так же, как это делается, если рассматривать время как независимую переменную, а координаты — как параметры.

Другими словами, каждую однозначную пространственно-временную функцию $F(t, x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющую некоторым практически всегда выполняющимся условиям непрерывности, можно представить в виде суммы элементарных волн

$$\psi = \psi^0 e^{i(-\omega t + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} = \psi^0 e^{i(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (39)$$

с соответствующим образом выбранными амплитудами ψ^0 . Параметры ω, k_1, k_2, k_3 могут при этом меняться или дискретным или непрерывным образом. В последнем случае, вместо обычной суммы или бесконечного ряда, получается интеграл, и притом четырехкратный интеграл, если значения параметров независимы, или трехкратный, если они связаны между собой одним соотношением. Амплитуду ψ^0 нужно при этом рассматривать как известную функцию независимых параметров.

Если какие-либо функции представляют решения уравнений

электромагнитного поля, то вследствие линейности последних, сумма этих функций также является таким решением. Обратное, общее решение уравнений электромагнитного поля всегда можно представить как наложение элементарных волн (39), удовлетворяющих этим уравнениям. Это представление применимо, очевидно, лишь к случаю однородных тел, в особенности к случаю анизотропных тел, где величина вектора \mathbf{k} зависит не только от частоты колебаний $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, но и от направления их распространения, т. е. от направления волновой нормали $\mathbf{n} = \mathbf{k} : k$.

Мы ограничимся сперва случаем совершенно прозрачных тел, исключая таким образом какое бы то ни было затухание. При этом три прямоугольные составляющие \mathbf{k} можно рассматривать как независимые вещественные переменные, а частоту ω — как характерную для рассматриваемого тела функцию этих переменных. Общее решение уравнений поля для данного тела $F(t, \mathbf{r})$ можно соответственно этому представить в виде

$$F(t, \mathbf{r}) = \sum \psi_n^0 e^{i(-\omega_n t + \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r})} + \\ + \int \int \int \psi^0(k_1, k_2, k_3) e^{i(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} dk_1 dk_2 dk_3.$$

Следует отметить, что обе части этого представления — дискретная и непрерывная — никоим образом не могут быть сведены одна к другой (см. ниже). В дальнейшем мы первую часть опустим и будем рассматривать такие процессы, которые могут быть представлены интегралом, т. е. в виде

$$F(t, \mathbf{r}) = \int \psi^0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\tau. \quad (39a)$$

Здесь $d\tau$ означает элемент объема пространства \mathbf{k} , так что в прямоугольных координатах $d\tau = dk_x dk_y dk_z$. В частном случае однородных тел ω зависит только от величины k . Вообще же ω должно при каждом значении k принимать два различных значения, соответствующих рассмотренным выше „основным колебаниям“. Соответственно этому, формулу (39a) перепишем в виде:

$$F(t, \mathbf{r}) = \int [\psi'(\mathbf{k}) e^{-i\omega' t} + \psi''(\mathbf{k}) e^{-i\omega'' t}] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\tau. \quad (39b)$$

Если функция $F(t, \mathbf{r})$ известна для определенного момента времени, например $t=0$, то амплитуду $\psi^0(\mathbf{k})$ можно вычислить по формуле:

$$\psi^0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(0, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dV \quad (39c)$$

(эта формула, хорошо известная из теории интегралов Фурье, остается справедливой и тогда, когда \mathbf{k} принимает ряд дискретных значений, т. е. когда функция F может быть представлена не в виде интеграла, а в виде ряда Фурье). Таким путем, на основании

„моментальной фотографии“ произвольного электромагнитного процесса можно определить все более ранние и более поздние состояния, т. е., так сказать, „теоретически прокинематографировать“ весь процесс. При этом нужно знать только вид функции $\omega(k)$.

Вследствие симметрии выражений (39) по отношению к пространственным координатам и ко времени, при построении общего решения рассматриваемых уравнений поля можно поменять местами „временную координату“ t с одной из пространственных координат, например x_1 . Тогда вместо (39а) получим представление вида:

$$F(t, r) = \int \int \int \psi^0(\omega, k_2, k_3) e^{i(-\omega t + k \cdot r)} d\omega dk_2 dk_3. \quad (40)$$

Для определения амплитудных коэффициентов $\psi^0(\omega, k_2, k_3)$ достаточно знать функцию F в одной единственной точке x_1 , т. е. на одной единственной плоскости, например $x_1 = 0$. Однако рассмотрение плоскости при этом не обязательно, и с тем же успехом можно считать заданными значения F на совершенно произвольной поверхности $x_1 = f(x_2, x_3)$ (разумеется, эти значения должны быть заданы во всех точках этой поверхности для любого момента времени). Обозначая эти значения через $F(t)$, мы получаем при этом:

$$\psi^0(\omega, k_2, k_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int F(t) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)} dx_1 dx_2 dt. \quad (40a)$$

2. Линейные (плоские) волновые группы. Мы рассмотрим теперь такие электромагнитные процессы, которые зависят только от одной пространственной координаты x , само собой разумеется, от времени. Эти „плоские“ процессы могут быть представлены в виде наложения элементарных волн, с одинаковыми или прямо противоположными направлениями распространения, по формулам

$$F(t, x) = \sum \psi^0(k) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (41)$$

или

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = \\ &= \int_0^{\infty} [\psi^+(k) e^{ikx} + \psi^-(k) e^{-ikx}] e^{-i\omega t} dk, \end{aligned} \quad (41a)$$

смотря по тому, может ли „волновое число“ k (или частота ω) принимать дискретные или непрерывно-распределенные значения. Совокупность этих значений называется спектром рассматриваемого процесса.

Как было уже выше замечено, процессы с дискретным и непрерывным спектром никоим образом не могут быть сведены друг к другу. Действительно, собственный элемент процесса

типа (51a) — поскольку амплитуда $\psi^0(k)$ остается ограниченной и непрерывной — представляется не одной элементарной волной, как в случае (41), а группой элементарных волн, соответствующих бесконечно малому участку спектра Δk (или $\Delta\omega$). Если в рассматриваемой области спектра амплитудная функция не имеет точек разрыва и если частота ω меняется с k непрерывно, то такую волновую группу можно представить следующей приближенной формулой:

$$\Delta F(t, x) = \psi^0(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{\Delta k} e^{i \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] (k - k_0)} dk,$$

где k_0 означает произвольную „точку“ на „отрезке“ Δk . Беря в качестве такой точки среднюю точку Δk , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta k} e^{i \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] (k - k_0)} dk &= \frac{e^{i \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \frac{\Delta k}{2}} - e^{-i \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \frac{\Delta k}{2}}}{i \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]} = \\ &= \frac{2 \sin \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \frac{\Delta k}{2}}{x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t}, \end{aligned}$$

и следовательно (индекс $_0$ мы теперь снова опускаем):

$$\Delta F(t, x) = \frac{\psi^0(k) \sin \frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right)}{\frac{1}{2} \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right)} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (42)$$

Таким образом волновую группу можно представить в виде элементарной волны с переменной амплитудой, абсолютное значение которой имеет резкий максимум в точке $x = \frac{d\omega}{dk} t$. Этот максимум передвигается со скоростью

$$w = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\nu}{d \left(\frac{1}{\lambda} \right)}, \quad (42a)$$

которая называется групповой скоростью; она, вообще говоря, отличается от скорости распространения отдельных элементарных волн, или „фазовой скорости“.

Подставив $\omega = ku$ в (42a), получим следующее соотношение между обеими скоростями:

$$w = u + k \frac{d\omega}{dk} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}. \quad (42b)$$

Квадрат амплитуды или, вернее, квадрат ее абсолютного значения на расстоянии $\Delta x = y$ от максимума (в произвольно заданный момент времени t) равен:

$$|\Delta F(y)|^2 = |\psi^0(k)|^2 \frac{\sin^2 \frac{\Delta k}{2} y}{\left(\frac{1}{2} y\right)^2}. \quad (42c)$$

Величина максимума следовательно равна

$$|\psi^0(k)|^2 (\Delta k)^2.$$

Для очень малых значений Δk и не слишком больших значений y имеем приближенно

$$\sin\left(\Delta k \cdot \frac{y}{2}\right) = \Delta k \cdot \frac{y}{2} \left(1 - \frac{(\Delta k)^2 y^2}{24} + \dots\right) \cong \frac{1}{2} y \Delta k e^{-\frac{(\Delta k)^2 y^2}{24}}.$$

Точную формулу (42с) можно следовательно с достаточным приближением заменить формулой

$$|\Delta F(y)|^2 = |\psi^0(k)|^2 (\Delta k)^2 e^{-\frac{(\Delta k)^2 y^2}{12}}, \quad (42d)$$

которая представляет распределение амплитуды колебаний вблизи максимума.

Нужно заметить, что это распределение амплитуды перемещается со скоростью (42а) как одно целое, без всякого изменения.¹ По отношению к этому, так сказать, жесткому „амплитудному остову“ отдельные элементарные волны перемещаются с относительной скоростью

$$u - w = \lambda \frac{du}{d\lambda}.$$

Аналогичные результаты получаются, если вместо одной волновой группы рассматривать две элементарные волны с одинаковыми амплитудами и почти одинаковыми частотами ω' и ω'' или волновыми числами k' и k'' . Полагая эти амплитуды равными единице, для результирующего колебания будем иметь:

$$\psi = e^{i(k'x - \omega't)} + e^{i(k''x - \omega''t)}$$

или

$$\begin{aligned} \psi &= \left[e^{i \frac{1}{2} (\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t)} + e^{-i \frac{1}{2} (\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t)} \right] e^{i(kx - \omega t)} = \\ &= 2 \cos \left[\frac{1}{2} \Delta k \left(x - \frac{\Delta \omega}{\Delta k} t \right) \right] e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned}$$

¹ Если при разложении ω в ряд по степеням $k - k_0$ не ограничиваться первыми двумя членами, как мы делали это выше, распределение амплитуды оказывается, вообще говоря, непостоянным; а именно с течением времени область максимума медленно „расплывается“, т. е. становится шире и ниже, так что остается постоянной лишь ее площадь. Любопытно, что это расплывание происходит симметричным образом как в стороны $t \rightarrow +\infty$, так и в сторону $t \rightarrow -\infty$.

где

$$k = \frac{k' + k''}{2}, \quad \omega = \frac{\omega' + \omega''}{2}, \quad \Delta k = k'' - k', \quad \Delta \omega = \omega'' - \omega'.$$

При постоянном x эта формула представляет биения (или пульсации), которые мы уже рассмотрели подробно в гл. III, § 4 [формула (43b)]. Совершенно аналогичные „пространственные биения“ получаются, если ψ рассматривать как функцию x в один определенный момент времени (см. выше рис. 10). При этом образуется ряд равноотстоящих „узловых точек“, в которых амплитуда исчезает. Эти узловые точки перемещаются со скоростью $\frac{\Delta \omega}{\Delta k}$, тогда как между ними пробегают волны сперва с нарастающей, а затем опять убывающей амплитудой с относительной скоростью $\frac{\omega}{k} - \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$.

Рассмотренные выше волновые группы, которые соответствуют непрерывному интервалу частот, отличаются от этой простой картины особенно сильным развитием главного максимума; практически можно весь колебательный процесс представить себе сосредоточенным вблизи главного максимума.

3. Дисперсия плоских волн. Каждый плоский процесс с непрерывным спектром можно, очевидно, представить в виде суммы волновых групп. При этом элементарные спектральные области Δk нужно выбирать столь малыми, чтобы соответствующее изменение („колебание“) амплитудной функции $\Delta \psi^0(k)$ оставалось незначительным.

Распространение элементарных волн одинакового направления, но различной частоты, с различными фазовыми скоростями $u = \frac{\omega}{k}$, называют дисперсией. При наличии дисперсии для процессов с непрерывным спектром, фазовая скорость теряет свой непосредственный физический смысл, даже в том случае, когда рассматривается очень узкая спектральная область, и в этом отношении заменяется групповой скоростью (при отсутствии дисперсии обе скорости совпадают). Однако последняя, со своей стороны, только тогда имеет определенный смысл, когда она в рассматриваемой спектральной области практически постоянна. Вблизи резонансных частот, где u меняется с λ (или ω) очень быстро, это условие не выполняется. По формулам, которые были выведены в § 3 гл. III для зависимости электрической восприимчивости от частоты, диэлектрическая постоянная вблизи места резонанса, или, как обычно говорят, вблизи „линии поглощения“, должна иметь вид

$$\epsilon = a + \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (43)$$

где a и b означают две характерные для рассматриваемого тела положительные постоянные. Отсюда получаем (если пренебречь магнитной восприимчивостью)

$$z = \frac{c}{V \varepsilon} \cong \frac{c}{V a} \left[1 + \frac{b}{2a(\omega_0^2 - \omega^2)} \right], \quad (43a)$$

если второй член в (43) остается малым по сравнению с первым, или

$$z \cong \frac{c \sqrt{b}}{V \omega_0^2 - \omega^2} \quad (43b)$$

в противоположном случае, при условии $\omega < \omega_0$, которое соответствует так называемой „нормальной дисперсии“ (мнимые значения u для $\omega > \omega_0$ получиться в действительности не могут вследствие наличия затухания). Отношение групповой скорости к волновой $u = \frac{\omega}{k}$ равно:

$$\frac{w}{u} = \frac{d\omega}{dk} : \frac{\omega}{k} = \frac{d \lg \omega}{d \lg k} = \frac{d \lg \omega}{d \lg \omega - d \lg u},$$

так что

$$\frac{u - w}{w} = - \frac{d \lg u}{d \lg \omega}.$$

Следовательно, в случае (43a):

$$\frac{u - w}{w} \cong \frac{u - w}{u} \cong \frac{b\omega^2}{a(\omega_0^2 - \omega^2)^2} > 0, \quad (43c)$$

а в случае (43b)

$$\frac{u - w}{w} \cong - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} < 0. \quad (43d)$$

На достаточно большом расстоянии от места резонанса, например при $\omega \ll \omega_0$, групповая скорость мало отличается от фазовой. С повышением частоты, однако, она должна расти все быстрее и наконец превзойти фазовую скорость. В этой области спектра, хотя она обычно (особенно в газах) сравнительно очень узка, групповая скорость имеет также мало непосредственного смысла, как и фазовая. Она теряет также этот смысл при импульсообразных процессах или в начальный и в конечный период колебательных процессов с ограниченной продолжительностью, так как эти процессы характеризуются крайне растянутым спектром.

Рассмотрим например случай, когда функция $F(t, x)$ в точке $x=0$ в течение некоторого определенного промежутка вре-

мени τ имеет вид $F(t, 0) = e^{-i\omega_0 t}$, а вне этого промежутка, при $t < \frac{\tau}{2}$ и при $t > \frac{\tau}{2}$, исчезает. Этот случай приближенно осуществляется, если в течение времени τ на тело, ограниченное (с отрицательной стороны) плоскостью $x = 0$, падает гармонический ряд волн внешнего происхождения. Чтобы определить вызванное таким путем электромагнитное возмущение и его распространение в рассматриваемом теле, т. е. вид функции $F(t, x)$ (для $x > 0$), нужно представить определенную выше функцию $F(t, 0)$ в виде наложения бесконечно многих, неограниченных во времени гармонических колебаний всех частот по формуле

$$F(t, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

и соответственно этому заменить падающий ограниченный ряд волн данной частоты наложением бесконечно многих неограниченных рядов волн со всеми возможными частотами и с амплитудной функцией

$$\psi^0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, 0) e^{i\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt,$$

т. е.

$$\psi^0(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\pi(\omega - \omega_0)}. \quad (44)$$

Таким образом согласно (40) имеем:

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\pi(\omega - \omega_0)} e^{i(kx - \omega t)} d\omega \quad (44a)$$

или, положив $(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2} = \alpha$,

$$F(t, x) = \frac{1}{\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i(kx - \frac{2\alpha}{\tau})} d\alpha. \quad (44b)$$

Из этих формул легко видеть, что начальная фаза рассматриваемого возмущения распространяется в теле практически с той же скоростью c , что и в пустом пространстве, в виде элементарных волн очень малой длины (т. е. очень высокой частоты) и с очень малыми амплитудами. Последние непосредственно определяются из (41); что же касается скорости распространения, то она должна совпадать с c потому, что диэлек-

трическая постоянная при $\omega = \infty$ становится равной единице, как это вытекает из выведенных в § 3 гл. III формул для электрической восприимчивости. После указанных очень слабых коротковолновых „предвестников“ приходит главная фаза возмущения, распространяясь со скоростью, приблизительно соответствующей групповой скорости вблизи частоты ω_0 и притом тем точнее, чем больше промежуток времени t .

Подобные же результаты получаются, если рассматривать распространение электромагнитного возмущения, которое в определенный момент времени $t=0$ имеет вид пространственно-ограниченного ряда волн длиной l . Этот ряд волн нужно опять-таки заменить наложением бесконечного множества неограниченных волн всевозможных длин по формуле

$$F(0, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^0(k) e^{ikx} dk$$

с амплитудной функцией

$$\psi^0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(0, x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} e^{i(k_0-k)x} dx = \frac{\sin(k_0-k)\frac{l}{2}}{\pi(k_0-k)}$$

Вид возмущения во всякий другой момент времени $t \neq 0$ определяется при этом интегралом

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^0(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

и должен очевидно при наличии дисперсии более или менее отличаться от первоначального. Различные элементарные волны, которые при $t=0$ могут быть объединены в один „индивидуум“, при $t \leq 0$ должны, так сказать, „разделяться“, расходясь в обоих направлениях оси x .

4. Стоячие плоские волны. Две неограниченные элементарные волны одной и той же частоты и амплитуды, но с противоположными направлениями распространения, складываются в так называемую стоячую волну вида

$$F(t, x) = e^{i(kx - \omega t)} + e^{i(-kx - \omega t)} = 2 \cos kx \cdot e^{-i\omega t}. \quad (45)$$

При этом в каждой точке получается колебание постоянной амплитуды, которая вдоль оси x меняется синусоидально. Плоскости $\cos kx = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{k} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)$ (n —целое число), отстоящие друг от друга на расстояния $\frac{\lambda}{2}$, называются узловыми плоскостями; по обе стороны такой плоскости

колебания имеют одну и ту же амплитуду, но противоположные фазы. Посередине между двумя узловыми плоскостями амплитуда колебания достигает своего максимального значения ($\cos kx = 1$). Такие места называются „пучностями“ волны.

В то время как в элементарной волне, распространяющейся в одном направлении, электрические и магнитные колебания имеют одинаковую фазу, в стоячих волнах они во времени и в пространстве взаимно смещены на четверть периода ($\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ и $\lambda = \frac{2\pi}{k}$). Положим, например, что величина F в (45) означает электрическую напряженность. Напряженность магнитного поля определяется отсюда из уравнения

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} - \frac{\omega}{c} \mathbf{H} = 0.$$

Она следовательно, как обычно, перпендикулярна к напряженности электрического поля и по величине (и фазе) определяется формулой

$$H = \frac{k}{k_0} (e^{i(kx - \omega t)} - e^{i(-kx - \omega t)}) = 2 \frac{k}{k_0} \sin kx \cdot ie^{-i\omega t}. \quad (45a)$$

Вещественные части (45) и (45a) равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} E &= 2 \cos kx \cdot \cos \omega t, \\ H &= 2 \frac{k}{k_0} \sin kx \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (45b)$$

Таким образом узлы E совпадают с пучностями H , и обратно узлы H совпадают с пучностями E . Этому смещению амплитуды колебаний на $\frac{\lambda}{4}$ соответствует смещение фазы колебаний на $\frac{\tau}{4}$.

Аналогичные соотношения имеют место в стоячих волнах произвольного вида.

5. Пространственные волновые группы; волновые пакеты, монохроматические пучки лучей. Электромагнитные процессы, которые распространяются в одном или в двух противоположных направлениях, нужно рассматривать как идеализацию действительных явлений — того же рода, как и гармонические синусоидальные волны. Действительные процессы, строго говоря, могут быть представлены лишь с помощью интегралов вида (39a), причем не только величина, но и направление волнового вектора \mathbf{k} должны меняться непрерывно в некотором конечном интервале. Введенному выше понятию волновой группы определенного направления соответствует при этом понятие волнового пакета.

Волновой пакет определяется вообще как результат наложения элементарных волн, нормали которых образуют очень маленький конус с угловым отверстием $\Delta\Omega$, тогда как их длины или частоты, как и прежде, заполняют очень небольшой участок спектра. Полагая в (39а) $d\tau = k^2 dk d\Omega$, получим для волнового пакета следующее определение:

$$\Delta F(t, \mathbf{r}) = \int_{\Delta k} \int_{\Delta\Omega} \psi^0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} k^2 dk d\Omega. \quad (46)$$

Если рассматриваемый интервал $(\Delta k, \Delta\Omega)$ так мал, что соответствующее изменение амплитудной функции $\psi^0(\mathbf{k})$ остается незначительным, то можно положить

$$\Delta F(t, \mathbf{r}) = \psi^0(\mathbf{k}_0) \int_{\Delta k} \int_{\Delta\Omega} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} k^2 dk d\Omega.$$

Здесь \mathbf{k}_0 означает, как обычно, произвольно выбранное среднее значение \mathbf{k} . Полагая $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = \mathbf{g}$ и

$$\omega - \omega_0 = \mathbf{g} \cdot \nabla\omega = \sum_i g_i \frac{\partial\omega}{\partial k_i},$$

где градиент ω относится, конечно, не к обычному пространству \mathbf{r} , а к пространству \mathbf{k} , получаем:

$$\int \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} k^2 dk d\Omega = e^{i(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r} - \omega_0 t)} \int e^{i(\mathbf{r} - t\nabla\omega)\cdot\mathbf{g}} d\tau.$$

Значение стоящего справа интеграла не должно зависеть от вида выбранной очень малой области пространства \mathbf{k} , определяясь только ее объемом. Поэтому мы можем при интегрировании рассматривать эту область как шар с центром \mathbf{k}_0 и с радиусом ρ , определяемым уравнением $\frac{4\pi}{3}\rho^3 = k_0^2 \Delta k \cdot \Delta\Omega$. При этом получим, если обозначить через θ угол между \mathbf{g} и вектором $\mathbf{r} - t\nabla\omega$:

$$\begin{aligned} \int e^{i(\mathbf{r} - t\nabla\omega)\cdot\mathbf{g}} d\tau &= \int_0^\rho \int_0^\pi e^{i|\mathbf{r} - t\nabla\omega| g \cos\theta} 2\pi g^2 dg \sin\theta d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^\rho \int_{-1}^{+1} e^{i\alpha g u} g^2 dg du, \end{aligned}$$

где для сокращения положено

$$\alpha = |\mathbf{r} - t\nabla\omega| \quad \text{и} \quad u = \cos\theta.$$

Далее имеем:

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\alpha g u} du = \frac{e^{i\alpha g} - e^{-i\alpha g}}{i\alpha g} = \frac{2 \sin \alpha g}{\alpha g}$$

и

$$\int_0^{\rho} \frac{\sin \alpha g}{\alpha g} g^2 dg = \frac{1}{\alpha^3} \int_0^{\alpha \rho} \sin y \cdot y dy = \frac{\sin \alpha \rho - \alpha \rho \cos \alpha \rho}{(\alpha \rho)^3} \rho^3.$$

Мы получаем следовательно

$$\Delta F(t, \mathbf{r}) = 3\psi^0(k_0) \frac{\sin \alpha \rho - \alpha \rho \cos \alpha \rho}{(\alpha \rho)^3} e^{i(k_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)} k_0^2 \Delta k \Delta \Omega, \quad (46a)$$

где

$$\alpha = \left| \mathbf{r} - t \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \right| \quad (46b)$$

и

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} k_0^2 \Delta k \Delta \Omega}. \quad (46c)$$

Этот результат вполне аналогичен полученному выше для случая строго направленной волновой группы. Главное различие между обоими случаями заключается в том, что процесс, определяемый формулой (46a), остается концентрированным не вблизи некоторой плоскости, а вблизи точки $\mathbf{r} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} t$.¹ Абсолютное значение ΔF вблизи этой точки в функции соответствующего расстояния $|\Delta \mathbf{r}|$ может быть приближенно представлено формулой

$$|\Delta F|^2 \cong e^{-\frac{12}{125} \rho^2 |\Delta \mathbf{r}|^2}, \quad (47)$$

которая получается, если выражение $\frac{3}{y^3} (\sin y - y \cos y)$ разложить по степеням y и заменить показательной функцией с тем же начальным разложением.

Этот „точечный“ максимум или „волновой пакет“ перемещается прямолинейно и равномерно со скоростью

$$\mathbf{w} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}, \quad (47a)$$

которую можно рассматривать как векторное обобщение определенной выше групповой скорости.²

В случае изотропного тела она по направлению совпадает со средней нормалью волнового пучка, т. е. с осью конуса $d\Omega$. В общем случае однако она имеет иное направление, которое при наличии дисперсии не совпадает также и с соответствующим направлением лучей.

¹ Начало координат, соответствующее моменту $t = 0$, разумеется, может быть выбрано совершенно произвольно.

² $\frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \nabla \omega$ представляет собой вектор с прямоугольными слагающими $\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z}$.

На ряду с волновыми пакетами, соответствующими очень малому элементу объема пространства k , можно определить и волновые пучки, относящиеся к определенному (искривленному), элементу поверхности в этом пространстве, например к элементу шаровой поверхности $k = \text{const}$ или поверхности $\omega = \text{const}$. В изотропных телах эти поверхности, конечно, совпадают. Такие „монокроматические“ пучки с постоянной длиной волны или постоянной частотой представляются формулами

$$(\Delta F)_k = \psi^0(\mathbf{n}_0) \int_{\Delta\Omega} e^{i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)k} d\Omega \quad (48)$$

и

$$(\Delta E)_\omega = \psi^0(\mathbf{n}_0) e^{-i\omega t} \int_{\Delta\Omega} e^{i\omega \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{u}} d\Omega \quad (48a)$$

причем u в обоих случаях рассматривается как функция волновой нормали \mathbf{n} . Мы не будем входить в ближайшее рассмотрение этих формул для общего случая анизотропных тел.

В простейшем случае изотропного тела обе формулы (48) и (48a) вполне равнозначны. При этом, если направление радиуса-вектора \mathbf{r} выбрать в качестве полярной оси

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = r \cos \theta \quad \text{и} \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

и следовательно

$$\begin{aligned} \int e^{i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)k} d\Omega &= -e^{-i\omega t} \int \int e^{ikr \cos \theta} d \cos \theta d\varphi = \\ &= -\frac{e^{-i\omega t}}{ikr} \oint e^{ikr \cos \theta} d\varphi = -\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{ikr} \oint e^{-2ikr \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} d\varphi, \end{aligned}$$

где θ_1 означает граничное значение θ .

При $\psi^0(\mathbf{n}) = \text{const}$ получаем таким образом

$$\Delta F = -\psi^0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{ikr} \oint e^{-i \cdot 2kr \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} d\varphi, \quad (48b)$$

т. е. расходящуюся из точки $r=0$ или сходящуюся к этой точке шаровую волну, амплитуда которой определенным образом зависит от направления распространения. В частности при $\Delta\Omega = 4\pi$ получаем:

$$\Delta F = 2\psi^0 \frac{\sin kr}{kr} e^{-i\omega t}, \quad (48c)$$

г. е. „стоячую“ шаровую волну, которую можно представить как результат наложения расходящейся и сходящейся шаровых волн обычного типа (с амплитудой, не зависящей от направления).

6. Дополнения. До сих пор затухание элементарных волн мы исключали; полученные выше результаты относятся поэтому только к вполне прозрачным телам. Однако их легко обобщить на случай поглощающих тел. А именно: в этом случае

вместо комплексного пространства \mathbf{k} нужно рассматривать вещественное пространство $\mathbf{k}^{(1)}$, т. е. формулу (39а) заменить следующей:

$$F(t, \mathbf{r}) = \int \psi^0(\mathbf{k}^{(1)}) e^{i[(\mathbf{k}^{(1)} + i\mathbf{k}^{(2)})\mathbf{r} - \omega t]} d\tau^{(1)}.$$

Здесь $\mathbf{k}^{(1)}$ и $\mathbf{k}^{(2)}$ означают, как обычно, вещественную и мнимую части \mathbf{k} , которые мы для простоты рассматриваем как одинаково направленные. При этом коэффициент поглощения $k^{(2)}$ является точно так же, как частота, вообще говоря, двухзначной функцией $\mathbf{k}^{(1)}$.

В заключение мы прибавим еще несколько слов о представлении квадратичных величин, соответствующих приведенному „гармоническому анализу“ различных линейных величин (F).

В простейшем случае плоского процесса с дискретным спектром

$$F = \sum_n F_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

получаем для среднего квадратичного значения по времени

$$\overline{|F|^2} = \frac{1}{2} \sum_n F_n F_n^* = \frac{1}{2} \sum_n |F_n|^2. \quad (49)$$

Соответствующая формула для процесса с непрерывным спектром $F = \int \psi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$ будет:

$$\overline{|F|^2} = \frac{1}{2} \int \psi(k) \psi^*(k) dk = \frac{1}{2} \int |\psi(k)|^2 dk. \quad (49a)$$

В самом общем случае неплоского процесса с непрерывным спектром: $F = \int \psi(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d\tau$, получаем

$$\overline{|F|^2} = \frac{1}{2} \int |\psi(\mathbf{k})|^2 d\tau. \quad (49b)$$

Точно таким же образом можно определить средние значения произведения двух различных линейных величин (например напряженности электрического и магнитного поля), если речь идет об одном и том же процессе, или вообще, если обе величины имеют тот же спектр и какие-либо постоянные фазовые соотношения. При различных спектрах или при неправильно меняющихся фазовых соотношениях эти средние значения должны исчезать. В первом случае колебания называют когерентными, или „способными интерферировать“; во втором — некогерентными.

§ 5. Электромагнитные волны в квази-однородных телах.

1. Общее исследование волнового уравнения. Понятие элементарных волн в указанном выше смысле применимо только к однородным телам. Мы исследуем теперь распространение электромагнитных колебаний в неоднородных телах произвольного строения, предполагая лишь непрерывное изменение их электромагнитных свойств. Соответственно этому мы не будем делать никаких предположений относительно геометрического характера электромагнитных процессов. Что же касается зависимости их от времени, то мы ограничимся чисто гармоническими колебаниями и запишем основные уравнения электромагнитного поля в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (50)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (50a)$$

(ср. (2a) и (2b), § 1).

Нужно при этом различать два особенно важных и интересных крайних случая, смотря по тому, меняются ли электромагнитные свойства тела, т. е. диэлектрическая постоянная, коэффициент затухания и магнитная восприимчивость, очень медленно или очень быстро, или, точнее говоря, смотря по тому, остается ли их „изменение“ на расстояниях порядка длины волны малым или нет. В первом случае тела называются квази-однородными, во втором — мутными.

В этом параграфе мы будем заниматься исключительно квази-однородными телами. Для простоты мы сперва ограничимся случаем изотропных прозрачных немагнитных тел, которые могут быть охарактеризованы одним лишь параметром, а именно диэлектрической постоянной ϵ .

Мы будем следовательно рассматривать эту „постоянную“ как вещественную непрерывную функцию координат, удовлетворяющую условию $|\nabla \epsilon| \lambda_0 \ll 1$ или $|\nabla \epsilon| \lambda \ll 1$. Здесь $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ означает длину волны колебаний той же частоты в пустом пространстве, а $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}}$ — их длину волны в однородном теле, диэлектрическая постоянная которого совпадает с значением ϵ в рассматриваемой точке.

Мы должны здесь особенно подчеркнуть то обстоятельство, что понятие длины волны имеет непосредственный физический смысл только в случае однородного тела. В неоднородном теле вообще нельзя говорить о длине волны как о расстоянии между двумя соседними поверхностями одинаковой фазы, ибо, как мы увидим ниже, таких поверхностей в этом случае не существует.

Полагая в (50а) $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, имеем (при $\mathbf{V} = \mathbf{H}$):

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = 0. \quad (51)$$

С другой стороны, исключая \mathbf{H} , получаем обычным путем уравнение

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0, \quad (51a)$$

т. е.

$$-\nabla \operatorname{div} \mathbf{E} + \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} = 0. \quad (51b)$$

В однородных телах первый член левой стороны равен нулю. Напротив, в рассматриваемом случае он отличен от нуля, а именно, по (51),

$$\begin{aligned} -\nabla \operatorname{div} \mathbf{E} &= \nabla \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right) = \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \\ &+ \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla \right) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (51c)$$

Таким образом уравнение (51b) имеет значительно более сложный вид, чем обычное волновое уравнение для однородных тел, и соответственно этому значительно более сложные решения, которые, строго говоря, не могут быть описаны с помощью волновых поверхностей какого бы то ни было вида.

Наше предположение относительно медленного изменения ε позволяет однако пренебречь величиной (51c). Следовательно для квази-однородных тел мы получаем приближенное уравнение того же вида, что и для однородных, т. е. [ср. (7)]

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (52)$$

с той единственной, но весьма существенной разницей, что волновой параметр

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon} = k_0 \sqrt{\varepsilon} \quad (52a)$$

является уже не постоянной величиной, а заданной функцией координат.

Мы будем искать решение уравнения (52), где ψ может означать какую-нибудь линейную величину \mathbf{E} , \mathbf{H} и т. д., в виде

$$\psi = \psi^0 \cdot e^{i(-\omega t + k_0 s)}, \quad (53)$$

причем ψ^0 означает некоторую постоянную, а s — пока неизвестную функцию координат. Формула (53) является обобщением нашей прежней формулы (8) для плоских синусоидальных волн. Функция s , если она вещественна, должна характеризовать собой вид волн, т. е. вид поверхностей одинаковой фазы $s = \text{const}$.

В этом случае ψ_0 можно рассматривать как амплитуду колебаний, а величину

$$S = -\omega t + k_0 s \quad (53a)$$

как фазу этих колебаний.

В действительности функция s , даже и при вещественных значениях ε является, вообще говоря, комплексной.

В самом деле, подставляя (53) в (52) и учитывая формулы

$$\begin{aligned} \nabla e^{ik_0 s} &= e^{ik_0 s} ik_0 \nabla s, \\ \nabla^2 e^{ik_0 s} &= \operatorname{div} \nabla e^{ik_0 s} = e^{ik_0 s} ik_0^2 \nabla^2 s - e^{ik_0 s} k_0^2 (\nabla s)^2, \end{aligned}$$

получаем следующее уравнение для „фазовой функции“ s :

$$ik_0 \nabla^2 s - k_0^2 (\nabla s)^2 + k^2 = 0$$

или по (52)

$$\frac{1}{ik_0} \nabla^2 s + (\nabla s)^2 = \varepsilon. \quad (54)$$

Отсюда видно, что даже при вещественном ε функция s должна представлять собой комплексную величину.

2. Короткие волны; геометрическая оптика и ее аналогия с механикой. Когда речь идет об электромагнитных колебаниях очень высокой частоты, т. е. очень малой длины волны, можно, при известных условиях, опустить первый член в (54), т. е. определить фазовую функцию из приближенного уравнения

$$(\nabla s)^2 = \varepsilon, \quad (54a)$$

в которое длина волны совсем не входит.

Указанные условия сводятся, как легко видеть, к требованию, чтобы кривизна получающихся из (54a) волновых поверхностей $s = \text{const}$ была очень мала по сравнению с k_0 . Другими словами, радиус кривизны ортогональных к этим поверхностям „лучей“ должен быть очень велик по сравнению с λ_0 или λ (так как диэлектрическая постоянная имеет всегда порядок 1).¹

Уравнение (54a) имеет как-раз тот вид, как выведенное в т. I (стр. 374) уравнение Гамильтона—Якоби (26a), которое определяет движение электрона в заданном электроста-

¹ Следует подчеркнуть, что уравнением (54a) определяется приближение не к общему решению волнового уравнения (52), а к одному из частных решений, соответствующих, в пределе $\lambda \rightarrow 0$, волнам, распространяющимся (в каждом месте) в одну определенную сторону. Общее решение (52) может быть представлено суммой подобных частных решений для различных направлений распространения, причем функция s (соответствующая общему решению) утрачивает смысл фазы. Разложение „комплексной амплитуды“ ψ^0 в формуле (53) на „вещественную амплитуду“ (ψ^0) и „фазовый множитель“ вида $e^{i\varphi}$ математически допустимо и в этом случае. Однако, поскольку мы не имеем дела с распространением волн в определенном направлении, разложение это является физически бессмысленным.

тическом поле (при отсутствии магнитных сил). Фазовой функции s соответствует при этом независимая от времени часть Φ_0 (хуз) функции действия

$$\Phi = -Ht + \Phi_0,$$

а диэлектрической постоянной — величина

$$2m_0(H - e\varphi),$$

равная помноженной на $2m_0$ кинетической энергии электрона, или, проще, квадрату его механического количества движения $m_0\mathbf{v}$. Функция действия \mathbf{v} соответствует, далее, разделенной на k_0 фазе S , а полная энергия H — отношению частоты ω к k_0 , т. е. к скорости света в пустом пространстве.

Мы видим, таким образом, что распространение очень коротких электромагнитных волн в квази-однородном прозрачном теле происходит при указанных выше условиях примерно по тем же законам, что и распространение поверхностей постоянного действия ($\Phi = \text{const}$) в гамильтон-якобиевской формулировке механической проблемы движения материальной частицы в статическом силовом поле. Это соответствие между обеими проблемами может быть символически выражено соотношениями

$$\left. \begin{aligned} m_0\mathbf{v} &= \hbar k_0 \nabla s, & 2m_0(H - e\varphi) &= \hbar k_0 e, \\ \Phi &= \hbar S, & H &= \hbar \omega. \end{aligned} \right\} \quad (54b)$$

Мы здесь ввели произвольную постоянную \hbar размерности действия, в соответствии с размерностью стоящих справа и слева величин. В механической задаче „волны действия“ играют роль вспомогательного понятия, тогда как непосредственный физический смысл имеют только ортогональные к ним кривые, которые представляют траектории отдельной частицы при различных начальных условиях движения. Этим траекториям соответствуют в электродинамической или оптической проблеме — поскольку речь идет о распространении коротких электромагнитных или световых волн — лучи энергии, или световые лучи. В приближении, представляемом уравнением (53а), эти лучи имеют такую же непосредственную реальность, как и механические траектории. Их можно определить как траектории множества частиц, движущихся согласно уравнению

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\hbar k_0}{2m_0^2} \nabla e. \quad (54c)$$

Это уравнение получается из обычного уравнения движения $m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e \nabla \varphi$ в связи с (54b).

Нужно заметить, что скорость движения $\mathbf{v} = \frac{\hbar k_0}{m} \nabla s$, получающаяся интегрированием (54с), только по своему направлению совпадает со скоростью распространения волн. Чтобы

найти величину этой скорости распространения, рассмотрим изменение фазы колебания S в очень малой пространственно-временной области:

$$dS = -\omega dt + k_0 dr \cdot \nabla s. \quad (55)$$

Это выражение имеет такой же точно вид, как и в случае элементарных волн с фазовым вектором

$$\mathbf{k} = k_0 \nabla s. \quad (55a)$$

Согласно (54a) вектор \mathbf{k} по величине равен введенному ранее параметру (52a). Мы видим таким образом, что в приближении, соответствующем уравнению (54a), волны в каждой достаточно малой пространственной области распространяются подобно элементарным волнам той же длины $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

и направления $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ в однородном теле с диэлектрической постоянной ϵ . Волновая скорость при этом, как обычно, равна

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{|k_0 \nabla s|}, \quad (55b)$$

откуда по (54b) следует, что

$$v = \frac{h\omega}{m_0 u}. \quad (55c)$$

Таким образом „скорость движения“ v обратно пропорциональна скорости распространения u .

Представим себе произвольную кривую σ , проведенную между двумя неподвижными точками P_1 и P_2 . Взятый вдоль этой кривой интеграл

$$\int \mathbf{k} d\mathbf{r} = \int k \cos \theta d\sigma = 2\pi \int \cos \theta \frac{d\sigma}{\lambda},$$

где θ означает угол между $d\sigma$ и направлением луча в соответствующей точке, равен по (55) в каждый момент времени разности фаз $S_2 - S_1$ колебаний в обеих конечных точках, и следовательно, не зависит от вида кривой σ . Если точки P_1 и P_2 находятся на одном и том же луче, то

$$\int \cos \theta \frac{d\sigma}{\lambda} = \int \frac{d\sigma_0}{\lambda}$$

и следовательно, так как $\cos \leq 1$,

$$\int \frac{d\sigma}{\lambda} \geq \int \frac{d\sigma_0}{\lambda}.$$

Это неравенство показывает, что вид луча, проходящего через две заданные точки, может быть определен условием

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{d\sigma}{\lambda} = \int \frac{V_{\varepsilon}^{-} d\sigma}{\lambda_0} = \text{minimum} \quad (56)$$

(рис. 18). Это условие можно выразить еще следующим образом: световые лучи проходят от одной точки до другой тем путем, который соответствует минимальному времени прохождения (принцип Ферма). Скорость световых лучей определяется при этом как волновая скорость u , так что $\frac{d\sigma}{\lambda} = v \frac{d\sigma}{u} = v dt$.

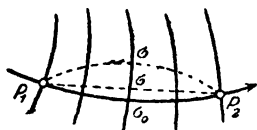


Рис. 18.

Вводя в (56) вместо u определенную по (55с) скорость движения v и принимая во внимание, что $d\sigma = v dt$, получаем:

$$\int_{P_1}^{P_2} m_0 v d\sigma = \int m_0 v^2 dt = \text{minimum}. \quad (56a)$$

Это принцип наименьшего действия Мопертюи, который определяет траекторию частицы с заданной полной энергией H . Постоянству последней в (56a) в (56) соответствует согласно (54b) постоянство частоты колебаний.

Нужно отметить, что это совпадение между оптикой и механикой не является точным; оно получается только в том случае, когда законы распространения электромагнитных волн формулируются в приближенном виде (54a).¹ Эту приближенную оптическую теорию, в основу которой кладется не понятие волн, а понятие лучей, принято называть лучевой оптикой, или геометрической оптикой — в противоположность точной, или вернее более точной теории,² которая находит свою простейшую математическую формулировку в уравнении (52) и которую обычно называют волновой оптикой.

3. Дополнения; волновая оптика и элементарные волны Гюйгенса. В точной теории функции s , как уже указывалось выше, должна принимать, вообще говоря, комплексные значения. Определяемый формулой (55a) фазовый вектор будет следовательно тоже комплексным, и по своей величине должен отличаться от параметра k в (52). Веществен-

¹ Изложенные выше результаты восходят еще к Гамильтону. В последнее время они стали исходным пунктом важного развития теории квантов, в виде созданной Л. де Бройлем и Э. Шредингером волновой механики.

² Напомним, что точная теория должна исходить из уравнения (51b), в которое входит градиент „диэлектрической постоянной“, а не из обычного „волнового уравнения“ (52).

ная часть k также от него отлична, так что эффективная длина волны $\lambda = \frac{\lambda_0}{V_\varepsilon}$ не совпадает с действительной $\frac{2\pi}{|k^{(1)}|}$. Эти различия при сильно искривленных волновых поверхностях (или световых лучах) могут быть очень значительны. Появляющиеся при этом усложнения связаны не только с неоднородностью тела, но и с формой волновых поверхностей, поскольку они не являются плоскими. Распространение их должно быть связано с изменением их амплитуды, что возможно лишь при комплексности функции s .

Полагая в уравнении (54) $s = s^{(1)} + is^{(2)}$, где $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ — вещественные величины, получаем из него два уравнения:

$$\frac{1}{k_0} \nabla^2 s^{(2)} + (\nabla s^{(1)})^2 - (\nabla s^{(2)})^2 = \varepsilon, \quad (57)$$

$$\frac{1}{2k_0} \nabla^2 s^{(1)} - \nabla s^{(1)} \cdot \nabla s^{(2)} = 0. \quad (57a)$$

Если $s^{(2)} \ll s^{(1)}$, то в уравнении (57) можно отбросить первый и третий члены, сведя его таким образом к уравнению (54a) для $s^{(1)}$. Определив из него $s^{(1)}$, можно определить функцию $s^{(2)}$ из уравнения (57a).

Вместо плоских синусоидальных волн в случае изотропных тел удобно в качестве элементарных волн рассматривать шаровые волны. Распространение волны произвольной формы в однородном изотропном теле можно при этом свести к распространению таких сферических элементарных волн, одновременно возникающих из всех точек волнового фронта, или точнее из всех точек какой-либо поверхности постоянной фазы, и новое положение этой поверхности определять как огибающую этих шаровых волн. Этот так называемый принцип Гюйгенса мы доказали в первом томе для распространения электромагнитных волн в пустом пространстве. Его обобщение на случай, квази-однородных тел непосредственно вытекает из того обстоятельства, что распространение волн в бесконечно малых объемах подобных тел должно происходить так же, как и в однородных телах. При этом скорость распространения шаровых, или, вернее, квази-шаровых элементарных волн следует рассматривать как заданную функцию координат.

§ 6. Рассеяние электромагнитных волн в мутных средах.

Представление об элементарных шаровых волнах применимо также к случаю тел, содержащих очень маленькие неоднородности какого угодно рода, так что диэлектрическая постоянная их претерпевает значительные колебания в элементах объема, линейные размеры которых сравнимы с длиной волны,

Влиянием этих колебаний на скорость распространения можно в первом приближении пренебречь и трактовать элементарные волны Гюйгенса как шаровые. В рассматриваемом случае они однако должны уже в соседних точках иметь весьма различные амплитуды, и поэтому при своем наложении не могут полностью сливаться в результирующую огибающую волновую поверхность. Такое слияние возможно только в том случае, когда пространственное распределение неоднородностей имеет совершенно правильный характер (как например, распределение атомов в кристалле, если атомы рассматривать как микроскопические неоднородности в непрерывной среде, образуемой исследуемым телом). Поскольку такая правильность отсутствует, поскольку следовательно колебания диэлектрической постоянной в областях порядка длины волны имеют совершенно неправильный характер, элементарные волны Гюйгенса должны хотя бы отчасти сохранять свою индивидуальность, распространяясь во все стороны без слияния друг с другом. Эти волны принято называть рассеянными волнами. Они должны делать соответствующее тело также и при отсутствии истинного поглощения не вполне прозрачным, или, как говорят, мутным.

Явление рассеяния света, или „мутности“, наблюдается преимущественно в телах, однородность которых нарушена наличием в очень большом количестве неправильно расположенных очень малых посторонних частиц (коллоидальные растворы), но также и в макроскопически вполне однородных телах, где оно зависит от тепловых флуктуаций, т. е. от обусловленного тепловым движением неправильных колебаний состояния и состава очень малых элементов объема. Представим себе, например, находящийся при постоянном давлении и температуре газ, содержащий N молекул в единице объема. Очень малый элемент объема v этого газа должен в среднем содержать $n_0 = Nv$ молекул. Однако вследствие неправильного характера теплового движения, рассматриваемый элемент объема в различные моменты времени может содержать различное число молекул, колеблющееся около указанного выше среднего значения. Эти колебания концентрации относительно тем интенсивнее, чем меньше v или n . Так как они происходят совершенно независимо в соседних элементах объема, то газ в каждый момент должен представляться несколько неоднородным. На ряду с колебаниями концентрации (или плотности), в газообразных и жидких телах нужно еще иметь в виду колебания ориентации молекул, которые вызываются неправильным характером их вращательного движения. Поскольку молекулы не имеют шаровой симметрии, эти колебания ориентации должны вызывать быстро меняющуюся во времени и в пространстве анизотропию отдельных элементов объема.

1. Определение рассеянного излучения при помощи приближенного решения „возмущенного“ волнового уравнения. Влияние таких очень малых неоднород-

родностей в коллоидальных растворах и в макроскопически однородных телах на распространение электромагнитных волн (мы будем в дальнейшем говорить только о световых волнах) можно приближенно определить следующим образом.

Разложим диэлектрическую постоянную ε на две части по формуле:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon' \quad (58)$$

где ε^0 средняя диэлектрическая постоянная исследуемого тела (которое мы для упрощения предполагаем изотропным), а ε' — добавочное очень небольшое изменение последней, вызываемое рассматриваемыми неоднородностями и неправильно колеблющееся около нуля.

Соответственно этому полную напряженность электрического поля \mathbf{E} напишем в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}', \quad (58a)$$

где \mathbf{E}^0 представляет собой то значение \mathbf{E} , которое получается в нулевом приближении, т. е. при $\varepsilon' = 0$. Это нулевое приближение определяется обычным дифференциальным уравнением

$$\nabla^2 \mathbf{E}^0 + k_0^2 \varepsilon^0 \mathbf{E}^0 = 0. \quad (58b)$$

Чтобы получить первое приближение для \mathbf{E} , положим в точном уравнении:

$$\nabla \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right) + \nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \varepsilon \mathbf{E} = 0$$

[ср. (51) и (51b)] $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}'$ и пренебрежем членами второго порядка малости относительно ε' , т. е. $\varepsilon' \mathbf{E}'$, $\mathbf{E}' \nabla \varepsilon'$ и $(\nabla \varepsilon')^2$. Мы получим при этом

$$\frac{1}{\varepsilon^0} \nabla(\mathbf{E}^0 \cdot \nabla \varepsilon') + \nabla^2 \mathbf{E}^0 + \nabla^2 \mathbf{E}' + k_0^2 \varepsilon^0 \mathbf{E}^0 + k_0^2 \varepsilon^0 \mathbf{E}' + k_0^2 \varepsilon' \mathbf{E}^0 = 0,$$

т. е. вследствие (58b)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}' + k_0^2 \varepsilon^0 \mathbf{E}' &= -\mathbf{f}, \\ \mathbf{f} &= k_0^2 \varepsilon' \mathbf{E}^0 + \frac{1}{\varepsilon^0} \nabla(\mathbf{E}^0 \cdot \nabla \varepsilon') \end{aligned} \right\} \quad (58c)$$

Вектор \mathbf{f} можно рассматривать как заданную функцию вида $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 e^{-i\omega t}$, где \mathbf{f}_0 зависит только от \mathbf{r} . Приведенное (приближенное) уравнение для \mathbf{E}' совпадает с общим уравнением для запызывающих потенциалов:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -f,$$

которое мы исследовали в томе I, если положить $\psi = \psi_0 e^{-i\omega t}$ и вместо $\frac{1}{c^2}$ ввести величину

$$\frac{\epsilon^0}{c^2} = \frac{1}{u^2}.$$

Таким образом (ср. т. I, стр. 150)

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{f}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{u}\right)}{R} dV' \quad (\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (59)$$

Часть \mathbf{E}' , обуславливаемая объемом ΔV , малым не только по сравнению с расстоянием R , но и по сравнению с длиной волны, можно с достаточным приближением представить формулой

$$\Delta \mathbf{E}' = \frac{ie^{ikR}}{4\pi R} \Delta V \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{u}\right). \quad (59a)$$

Эта формула показывает, в согласии с качественными соображениями, приведенными в начале этого параграфа, что при распространении световых колебаний в мутных телах правильно распространяющиеся „первичные“ волны \mathbf{E}^0 создают слабые „вторичные“ шаровые волны, амплитуда которых пропорциональна колебаниям диэлектрической постоянной.

Когда эти колебания совершенно несогласованы, — что в дальнейшем всегда будет предполагаться, — элементарные напряженности поля (59a), зависящие от различных — даже соседних — элементов объема, в каждое произвольно выбранное мгновение, должны иметь различную величину, и вообще говоря, разные знаки. Сумма $\sum \Delta \mathbf{E}'$ (для объема $\sum \Delta V = V$, содержащего много элементов ΔV , но все же малого по сравнению с длиной волны), или, что то же самое, интеграл (59) — должна, следовательно, оставаться очень малой, так что соответствующее пространственное среднее значение $\overline{|\Delta \mathbf{E}'|} = \frac{\sum \Delta \mathbf{E}'}{\sum \Delta V}$ можно считать практически равным нулю (мы применяем обозначение $\overline{\quad}$ для того, чтобы отличить рассматриваемое среднее значение от обычного среднего по времени $\overline{\Delta \mathbf{E}'}$).

Так как рассматриваемые колебания $\Delta \mathbf{E}'$ ведут себя при своем сложении („интерференции“) в результирующее колебание $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}'$ несогласованно или, как говорится, некогерентно, как по отношению к первичным колебаниям \mathbf{E}^0 , так и между собой, то при макроскопическом рассмотрении распространения электромагнитных колебаний в мутных телах мы можем игнорировать вторичные или рассеянные волны и просто полагать $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0$ или вернее $\overline{|\mathbf{E}|} = \mathbf{E}^0$,

При этом однако необходимо принять во внимание их энергию, так как последняя создается за счет энергии „организованных“ волн E^0 , чем обуславливается специфическое связанное с рассеянием „затухание“ последних, существенно отличное от собственного затухания, зависящего от поглощения, но в отношении своего эффекта вполне ему подобное. Энергия рассеянного излучения проявляется также и непосредственно в „мутности“ соответствующего тела; наиболее знакомый и яркий пример этого представляет земная атмосфера.

Энергия результирующих колебаний E (т. е. интенсивность света) определяется средним по времени значением E^2 . Но вследствие указанной некогерентности E' и E^0

$$\overline{E^2} = \overline{(E^0 + E')^2} = \overline{E^{02}} + 2\overline{E^0 \cdot E'} + \overline{E'^2} = \overline{E^{02}} + \overline{E'^2}.$$

Далее в результате некогерентности элементарных колебаний $\Delta E'$ между собой имеем

$$\overline{E'^2} = S \sum \overline{(\Delta E')^2},$$

где внутренняя сумма (\sum) простирается на соседние элементы объема ΔV , размеры которых малы по сравнению с длиной волны; S означает дополнительное суммирование по всему объему тела. Отдельные слагаемые в \sum можно заменить пространственными средними значениями по формуле

$$\sum \overline{(\Delta E')^2} = \sum \overline{|\Delta E'|^2} = \frac{1}{2} \sum \overline{|\Delta E'|^2},$$

где через $||$ обозначено абсолютное значение соответствующей комплексной векторной величины. Наша задача сводится следовательно, по (59a), к вычислению

$$\overline{|\Delta E'|^2} = \frac{\sqrt{|f|^2}}{16\pi^2 R^2} (\Delta V)^2. \quad (59b)$$

Мы ограничимся исследованием той части этой величины, которая соответствует первому члену в выражении (58b) для f (ср. ниже). Это дает

$$\overline{|\Delta E'|^2} = \frac{\pi^2 |E^0|^2}{\lambda_0^4 R^2} \overline{|e'^2|} \cdot (\Delta V)^2. \quad (60)$$

В простейшем случае газообразного тела, неоднородность которого вызывается колебаниями концентрации молекул, имеем

$$e^0 - 1 = 4\pi\alpha N, \quad e' = 4\pi\alpha \cdot \frac{n'}{\Delta V} = \frac{e^0 - 1}{N} \cdot \frac{n - n_0}{\Delta V}, \quad (60a)$$

где α означает коэффициент поляризации молекулы, $^1 N$ —число молекул в единице объема, n —в объеме ΔV и наконец n_0 —среднее значение n . Таким образом

$$\epsilon'^2(\Delta V)^2 = \frac{(\epsilon_0 - 1)^2}{N^2} \overline{(n - n_0)^2}. \quad (60b)$$

Среднее значение „квадрата колебания“ $(n - n_0)^2$ находится следующим образом. Пусть в объеме $V = \sum \Delta V$ движутся независимо друг от друга N молекул. Вероятность p того, что определенная молекула находится в данном элементе объема ΔV , который в среднем содержит $n_0 = N \frac{\Delta V}{V}$ молекул, равна очевидно $\frac{\Delta V}{V} = \frac{n_0}{N}$. Вероятность того, что n определенных молекул находятся в ΔV , а остальные вне ΔV (но внутри V) выражается произведением $p^n (1 - p)^{N-n}$. Умножая это выражение на $\frac{N!}{n!(N-n)!}$, получим вероятность такого распределения, при котором n произвольных молекул содержатся в объеме ΔV :

$$P_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}. \quad (61)$$

Среднее значение какой-либо функции от n определяется формулой

$$\overline{F(n)} = \sum_{n=0}^N F(n) P_N^n. \quad (61a)$$

В частности

$$1 = \sum_{n=0}^N P_N^n;$$

далее

$$\begin{aligned} \overline{n} &= \sum_{n=1}^N \frac{(N-1)! N p}{(N-1)! [(N-1)-(n-1)]!} p^{n-1} (1-p)^{(N-1)-(n-1)} = \\ &= N p \sum_{n=1}^N P_{N-1}^{n-1} = N p, \end{aligned}$$

т. е. $\overline{n} = n_0$ —как, разумеется, и следовало ожидать. Тем же путем получается

$$\begin{aligned} \overline{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^N \frac{(N-2)! N(N-1) p^2}{(n-2)! [(N-2)-(n-2)]!} p^{n-2} (1-p)^{(N-2)-(n-2)} = \\ &= N(N-1) p^2, \end{aligned}$$

¹ Для рассматриваемой частоты колебаний,

$$\overline{|n^2|} - \overline{|n|} = n_0^2 \left(1 - \frac{1}{N} \right)$$

и следовательно

$$\overline{|(n - n_0)^2|} = \overline{|n^2|} - 2 \overline{|n|} n_0 + n_0^2 = \overline{|n^2|} - n_0^2 = n_0 \left(1 - \frac{n_0}{N} \right),$$

или приближенно, при $\frac{n_0}{N} \ll 1$,

$$\overline{|(n - n_0)^2|} = n_0. \quad (61b)$$

Таким образом получаем, согласно (60b), при $V=1$, т. е. $n^0 = N\Delta V$:

$$\overline{\varepsilon'^2} (\Delta V)^2 = \frac{(\varepsilon^0 - 1)^2}{N^2} n_0 = \frac{(\varepsilon^0 - 1)^2}{N} \Delta V$$

и, окончательно, по (60):

$$\overline{|\Delta E'|^2} = |E^0|^2 \frac{\pi^2 (\varepsilon^0 - 1)^2}{R \lambda_0^4 N} \Delta V. \quad (62)$$

Эта формула не совсем точна. Легко, однако, показать, что опущенный член в \mathbf{f} как раз компенсирует продольную, т. е. параллельную радиусу-вектору \mathbf{R} , составляющую E' , не влияя (в первом приближении) на перпендикулярную к ней составляющую. Чтобы получить окончательную формулу, нужно следовательно заменить вектор \mathbf{E} его поперечной составляющей

$$\mathbf{E}^0 - \mathbf{R}_0 (\mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{R}_0) = \mathbf{R}_0 \times (\mathbf{E}^0 \times \mathbf{R}_0) \quad (\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} : R).$$

Это дает

$$\overline{|\Delta E'|^2} = \frac{\pi^2 |\mathbf{R}_0 \times (\mathbf{E}^0 \times \mathbf{R}_0)|^2}{R^2} \cdot \frac{(\varepsilon^0 - 1)^2}{N \lambda_0^4} \Delta V. \quad (62a)$$

2. Элементарное определение рассеянного излучения, вызываемого колебаниями плотности, и его поляризации. Последнюю формулу, полученную впервые Рэлеем, можно вывести совершенно элементарно, если рассматривать совокупность молекул, находящихся в элементе объема ΔV , как элементарный осциллятор, который под действием напряженности внешнего или первичного поля \mathbf{E}^0 совершает вынужденные колебания.

Электрический момент (индуцированный) этого осциллятора обозначим через $\mathbf{P}\Delta V$. Здесь \mathbf{P} , как обычно, означает электрическую поляризацию тела в рассматриваемой точке. Однако в отличие от расчетов предыдущих параграфов, в которых флюктуации или постоянные (во времени) очень малые неоднородности среды оставались без внимания, мы учтем теперь флюктуации

поляризации, соответствующие флуктуациям как концентрации, так и ориентации молекул.

Для простоты представим себе, что все n молекул, находящихся в элементе объема ΔV , одинаково ориентированы и следовательно имеют одинаковый (индуцированный) момент \mathbf{p} ; эта ориентация при переходе от одного элемента объема к другому может колебаться произвольным образом точно так же, как и концентрация $n:\Delta V$. Среднее значение \mathbf{p} при постоянной напряженности E^0 обозначим через \mathbf{p}^0 или $|\overline{\mathbf{p}}|$, а его флуктуацию $\mathbf{p} - \mathbf{p}^0$ через \mathbf{p}' . Соответственно этому положим:

$$P\Delta V = P^0\Delta V + P'\Delta V = n^0p^0 + n'p^0 + n^0p' + n'p',$$

откуда следует, если пренебречь произведением $n'p'$:

$$P'\Delta V = n'p^0 + n^0p'. \quad (63)$$

Средняя поляризация $P^0 = |\overline{P^0}|$ определяет распространение „организованных“ первичных волн, тогда как ее флуктуация P' характеризует рассеянные волны.

По формуле (35) на стр. 163, т. I, напряженность электрического поля, создаваемого элементарным осциллятором с моментом

$$P'\Delta V = P'_0\Delta V e^{-i\omega t}$$

на расстоянии R , очень большом по сравнению с длиной волны, равна

$$\Delta E' = \frac{R_0 \times (P' \times R_0)}{R} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} e^{ikR} \Delta V,$$

где

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ и } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon}.$$

Проекция вектора $\Delta E'$ на направление произвольного, перпендикулярного к R вектора \mathbf{q} равна

$$\Delta E'_q = -\frac{4\pi^2 e^{ikR}}{\lambda_0^2 R} P'_q \Delta V.$$

Мы получаем, таким образом,

$$|\Delta E'_q|^2 = \frac{16\pi^4}{\lambda_0^4 R^2} |\overline{P'_q}|^2 (\Delta V)^2. \quad (63a)$$

Но по (63), вследствие независимости флуктуаций концентрации молекул от флуктуации их индуцированных моментов:

$$|\overline{P'_q}|^2 (\Delta V)^2 = \overline{n'^2} |p_q^0|^2 + \overline{n^0}^2 |\overline{p'_q}|^2. \quad (63b)$$

Если последние оставить без внимания и положить, по (60а):

$$p^0 = \alpha E^0 = \frac{\epsilon^0 - 1}{4\pi N} E^0, \quad (63c)$$

то получим, согласно (61b),

$$\overline{|P'_q|^2} (\Delta V)^2 = \frac{(\epsilon^0 - 1)^2}{16\pi^2 N^2} |E_q^0|^2 n_0 \quad (n_0 = N\Delta V)$$

и соответственно этому

$$\overline{|\Delta E'_q|^2} = \frac{\pi^2 |E_q^0|^2 (\epsilon^0 - 1)^2}{R^2 \lambda_0^4 N}. \quad (64)$$

Эта формула эквивалентна (62а). Она объясняет основные черты явления рассеяния света в газах и, в частности, голубой цвет неба, т. е. рассеянного земной атмосферой солнечного света. Длина волны крайнего синего света, как известно, вдвое меньше, чем крайнего красного. Так как величина $\epsilon^0 - 1$ для воздуха мало меняется в видимой области спектра, то энергия рассеянного излучения в случае синего света должна быть в 16 раз больше, чем в случае красного.

Далее, из формулы (64) следует, что в случае неполяризованных первичных лучей рассеянные лучи должны быть частично поляризованы. Обозначим через X_1 направление первичных лучей и через θ „угол рассеяния“ (X_1, R). Проведем вторую ось в плоскости (X_1, R) и разложим перпендикулярный к X_1 вектор E^0 на его составляющие E_2^0 и E_3^0 (рис. 19). Составляющие вектора E' , перпендикулярного к R , параллельная и перпендикулярная к плоскости (1, 2), $E'_{||}$ и E'_3 находятся друг с другом в отношении

$$E_2^0 \cos \theta : E_3^0,$$

а соответствующие энергии — в отношении

$$E_2^{02} \cos^2 \theta : E_3^{02},$$

как это непосредственно следует из (64), если вектор q направить параллельно плоскости (1, 2) или параллельно 3-ей оси.

Неполяризованные лучи характеризуются тем, что квадраты составляющих E^0 по всем направлениям, перпендикулярным к X_1 , имеют в среднем одно и то же значение. Положив следовательно

$$\overline{E_2^{02}} = \overline{E_3^{02}} = \frac{1}{2} \overline{E^{02}},$$

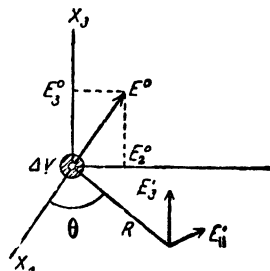


Рис. 19.

получим для вышеуказанного отношения просто $\cos^2 \theta : 1$ и соответственно этому для отношения $(\Delta E')^2$ к E^{02} („коэффициент рассеяния“) значение:

$$s = \frac{\pi^2 (\varepsilon^0 - 1)^2}{R^2 \lambda_0^4 N} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}. \quad (64a)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$, E'_{\parallel} обращается в нуль, независимо от характера первичных колебаний; вторичные колебания следовательно в этом случае должны быть линейно поляризованы.

3. Рассеянное излучение, вызываемое колебаниями ориентации, и его деполяризующее действие. В действительности однако и в этом случае, вообще говоря, не получается полной поляризации, т. е. наблюдается не исчезающая составляющая E'_2 . Это обстоятельство (так называемая „деполяризация“ рассеянного света) объясняется отмеченными выше колебаниями ориентации молекул в связи с их оптической асимметрией; электрический момент молекулы, не обладающей шаровой симметрией, должен, вообще говоря, иметь направление, отличное от направления напряженности первичного поля E^0 , и в частности должен иметь не исчезающую продольную составляющую p_1 .

Составляющие тензора поляризации ${}^2\alpha$ молекулы по отношению к осям неподвижной координатной системы обозначим через α_{ik} , а по отношению к связанным с молекулой осям симметрии X'_1, X'_2, X'_3 — через

$$\alpha'_{ii} = \alpha'_i, \quad \alpha'_{ik} = 0 \quad (\text{при } i \neq k).$$

При этом получаем

$$p_i = \sum_k \alpha_{ik} E_k^0,$$

откуда

$$\overline{p_i} = \sum \overline{\alpha_{ik}} E_k^0,$$

или, так как

$$\overline{\alpha_{11}} = \overline{\alpha_{22}} = \overline{\alpha_{33}} = \frac{1}{3} (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) \equiv \alpha$$

а

$$\overline{\alpha_{ik}} = 0,$$

при $i \neq k$

$$\overline{p_i} = p_i^0 = \alpha E_i^0, \quad (65)$$

и следовательно

$$\overline{p'_i} = 0.$$

Далее имеем

$$\overline{|p_i^{\prime 2}|} = \overline{|(p_i - p_i^0)^2|} = \overline{|p_i^2|} - p_i^{02} = \sum_k \sum_l \overline{|\alpha_{ik} \alpha_{il}|} E_k^0 E_l^0 - \alpha^2 E_i^0, \quad (65a)$$

причем

$$\overline{|\alpha_{ik} \alpha_{il}|} = \sum_{i'} \sum_{j'} \sum_{k'} \sum_{l'} \alpha'_{i'k'} \alpha'_{j'l'} \overline{|\gamma_{ii'} \gamma_{kk'} \gamma_{jj'} \gamma_{ll'}|},$$

т. е.

$$\overline{|\alpha_{ik} \alpha_{il}|} = \sum_{i'} \sum_{j'} \alpha'_{i'} \alpha'_{j'} \overline{|\gamma_{ii'} \gamma_{ki'} \gamma_{ij'} \gamma_{lj'}|}, \quad (65b)$$

где

$$\gamma_{ii'} = \cos(X_i, X_{i'}).$$

Для удобства положим $\gamma_{i1} = a_i$, $\gamma_{i2} = b_i$, $\gamma_{i3} = c_i$, где \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} означают координатные векторы системы X' . Будем различать при нахождении указанных выше средних значений следующие два случая:

1. $i' = j' = 1$.

$$\overline{|\gamma_{ii'} \gamma_{kk'} \gamma_{ij'} \gamma_{lj'}|} = \overline{|a_i^2 a_k a_l|}.$$

Этого рода средние значения уже вычислялись в первом томе (стр. 260), а именно:

$$\overline{|a_1^4|} = \frac{1}{5}, \quad \overline{|a_1^2 a_2^2|} = \frac{1}{15}, \quad \overline{|a_1^2 a_2 a_3|} = 0.$$

2. $i' = 1, j' = 2$.

$$\overline{|\gamma_{ii'} \gamma_{ki'} \gamma_{ij'} \gamma_{lj'}|} = \overline{|a_i a_k b_i b_l|}.$$

При вычислении этого выражения нужно учитывать, что

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_k a_k b_k = 0.$$

Отсюда получаем (возводя в квадрат)

$$\sum_i \sum_k a_i a_k b_i b_k = 0$$

или

$$3 \overline{|a_1^2 b_1^2|} + 6 \overline{|a_1 a_2 b_1 b_2|} = 0,$$

т. е.

$$\overline{|a_1^2 b_1^2|} + 2 \overline{|a_1 a_2 b_1 b_2|} = 0.$$

Но среднее значение $a_1^2 b_1^2$ очевидно тождественно со средним значением произведения $\mathbf{d}_a^2 \mathbf{d}_b^2$, где \mathbf{d} означает единичный вектор, направленный по оси X_1 , если оси X'_1 и X'_2 будем считать неподвижными, а оси X_1 давать всевозможные направления.

Поскольку при этом играет роль лишь ее относительное направление, то мы получим:

$$\overline{a_1^2 b_1^2} = \overline{a_1^2 a_2^2} = \frac{1}{15},$$

и следовательно

$$\overline{a_1 a_2 b_1 b_2} = -\frac{1}{30}.$$

При $k \neq l$ рассматриваемое среднее значение должно исчезать, так как в противном случае оно при обращении одного из координатных направлений меняло бы свой знак.

Мы получаем таким образом согласно (65b):

$$\left. \begin{aligned} \overline{\alpha_{ik} \alpha_{il}} &= 0 \quad \text{при } k \neq l, \\ \overline{\alpha_{ii}^2} &= \frac{1}{5} (\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2) + \frac{2}{15} (\alpha_2' \alpha_3' + \alpha_3' \alpha_1' + \alpha_1' \alpha_2') \\ \overline{\alpha_{ik}^2} &= \frac{1}{15} (\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2) - \frac{1}{15} (\alpha_2' \alpha_3' + \alpha_3' \alpha_1' + \alpha_1' \alpha_2') \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (65c) \\ (k \neq i) \end{array}$$

и окончательно по (65a)

$$\overline{p_i'^2} = \sum_k (\overline{\alpha_{ik}^2} - \delta_{ik} \alpha^2) |E_k^0|^2. \quad (65d)$$

Часть рассеянной энергии, зависящая от колебаний ориентации молекул, равна следовательно

$$|\Delta E'_i|^2 = \frac{16\pi^4}{R^2 \lambda_0^4} (n^0)^2 \sum_k (\overline{\alpha_{ik}^2} - \delta_{ik} \alpha^2) |E_k^0|^2.$$

Эту формулу однако нужно еще исправить следующим образом. Мы сначала предполагали, что все молекулы, находящиеся в элементе объема ΔV , одинаково ориентированы. Так как в действительности они могут вращаться совершенно независимо друг от друга, эти элементы объема нужно выбирать столь малыми, чтобы они содержали по одной молекуле (колебания плотности мы при этом можем не учитывать). Другими словами, в приведенной формуле нужно положить $n^0 = 1$. Тогда, чтобы вычислить обусловленное произвольным числом $n^0 = N\Delta V$ молекул значение $|\Delta E'_i|^2$, нужно соответствующее выражение умножить на n^0 (а не на n^{02}).

Вводя вместо первоначального, относящегося к одной молекуле тензора поляризации ${}^2\alpha$, фиктивную восприимчивость ${}^2\chi = N^2\alpha$ (которая соответствует определенной ориентации всех молекул, находящихся в единице объема), получим следующую

окончательную формулу для энергии излучения, рассеянного вследствие флуктуаций при ориентации молекул:

$$\overline{|\Delta E'|^2} = \frac{16\pi^4}{R^2\lambda_0^4 N} \sum_k (\overline{x_{ik}^2} - \delta_{ik}x_0^2) |E_k^0|^2 \cdot \Delta V. \quad (66)$$

Нужно заметить, что эта энергия составляет обычно лишь несколько процентов от энергии рассеянного излучения, вызываемого флуктуациями плотности. В случае неполяризованных первичных лучей имеем при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (рис. 19), полагая

$$E_1^0 = 0, |E_2^0|^2 = |E_3^0|^2 = \frac{1}{2} |E^0|^2, \overline{x_{12}^2} = \overline{x_{13}^2},$$

$$\overline{|\Delta E_1'|^2} = \frac{16\pi^4}{R^2\lambda_0^4 N} \overline{x_{12}^2} |E^0|^2 \Delta V.$$

Отношение этой энергии „продольных“ колебаний, которая может зависеть только от флуктуаций ориентации, к энергии „поперечных“ колебаний $\overline{|\Delta E_3'|^2}$, зависящей главным образом от флуктуаций плотности, называют „степенью деполяризации“ рассеянного излучения. Из (64а) имеем следовательно для этой степени деполяризации δ , если в последней формуле заменить $\epsilon^0 - 1$ на $4\pi\kappa_0 = \frac{4\pi}{3} N(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)$ и пренебречь частью $\overline{|\Delta E_3'|^2}$, зависящей от флуктуаций ориентации:

$$\delta \cong \frac{\overline{x_{12}^2}}{2x_0^2} = \frac{3}{10} \frac{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 - \alpha_2'\alpha_3' - \alpha_3'\alpha_1' - \alpha_1'\alpha_2'}{(\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3')^2}. \quad (66a)$$

Для молекул, обладающих осевой симметрией, которые характеризуются равенством α'_2 и α'_3 , эта формула сводится к

$$\delta \cong \frac{3}{10} \frac{(\alpha_1' - \alpha_2')^2}{(\alpha_1' + 2\alpha_2')^2}. \quad (66b)$$

Экспериментальное определение δ позволяет полностью установить оптические свойства таких молекул и тем самым с помощью намеченной в § 1 гл. III теории оптической и электрической анизотропии молекул найти расстояние между образующими их атомами (поскольку последние можно считать радиально симметричными).

4. Колебания плотности в жидких и твердых телах. Изложенная теория, которую мы развили для случая газообразных тел, без затруднений обобщается на случай жидкостей. Поскольку речь идет о флуктуациях ориентации, достаточно в формулах (65), (65а) и следующих заменить среднюю

напряженность первичного поля E^0 на соответствующую эффективную напряженность

$$E^0 + \frac{4\pi}{3} P^0 = \left(1 + \frac{4\pi}{3} \chi^0\right) E^0.$$

В случае флуктуаций плотности нужно еще исправить формулу (61b), так как последняя справедлива только в том случае, когда молекулы движутся совершенно независимо друг от друга. Это условие однако в отношении поступательного движения молекул жидкости не выполняется. Чтобы получить более точную формулу для $\overline{|n'^2|}$, будем рассматривать не переменное число молекул n в заданном объеме, а переменный объем V , занимаемый заданным числом молекул n^0 . Его среднюю величину обозначим через V^0 и его флуктуацию $V - V^0$ — через V' .

Работа, которая совершается внешним давлением при расширении рассматриваемого объема от V^0 до $V^0 + V'$ равна очевидно

$$W = - \int_0^{V'} (p - p^0) dV',$$

где p означает давление и p^0 его среднее значение для $V = V^0$. Разлагая разность $p - p^0$ по степени V' :

$$p - p^0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0 V' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)^0 V'^2 + \dots,$$

получим

$$W = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0 V'^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)^0 V'^3 - \dots \quad (67)$$

Вероятность того, что флуктуация объема лежит в интервале dV' , согласно уже неоднократно применявшемуся принципу Больцмана, пропорциональна $e^{-\frac{W}{kT}} dV'$. Мы получаем таким образом для среднего значения квадрата флуктуации следующую формулу:

$$\overline{|V'^2|} = \int V'^2 e^{-\frac{W}{kT}} dV' : \int e^{-\frac{W}{kT}} dV'.$$

Пределы интегрирования в этой формуле можно без заметной ошибки раздвинуть до бесконечности ($V' = \pm \infty$). Ограничиваясь первым членом (67) и полагая для краткости

$$-\frac{1}{2kT} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0 = \beta > 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \overline{|V'^2|} &= \int_{-\infty}^{+\infty} V'^2 e^{-\beta V'^2} dV' : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta V'^2} dV' = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta V'^2} dV' : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta V'^2} dV' = -\frac{\partial}{\partial \beta} \lg \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{1}{2\beta}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\overline{|V'^2|} = \frac{kT}{-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0} \quad (67a)$$

Число n молекул, находящихся в объеме V^0 , равно, очевидно,

$$n = \frac{n^0 V^0}{V}.$$

Поэтому флуктуация n равна:

$$n' = n - n^0 = -n^0 \frac{V - V^0}{V^0} \cong -n^0 \frac{V'}{V^0} = -NV',$$

а среднее значение ее квадрата

$$\overline{|n'^2|} = N^2 \overline{|V'^2|},$$

т. е. по (67a)

$$\overline{|n'^2|} = \frac{N^2 kT}{-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0} = \frac{NkT}{-V^0 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0} n^0. \quad (67b)$$

Здесь $-V^0 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0$ обозначает модуль сжимаемости рассматриваемой жидкости. Эта формула должна конечно оставаться справедливой и для газов. Действительно, положив $pV = n^0 kT$, получаем

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0 = \frac{n^0 kT}{V^{02}} = \frac{NkT}{V^0}$$

и следовательно $\overline{|n'^2|} = n^0$, в согласии с (61b).

Вблизи критической температуры первая и вторая производная p по V обращаются в нуль, так что разложение (67) начинается с члена четвертого порядка относительно V' . При этом получают исклчительно сильные колебания плотности, и соответственно этому исклчительно интенсивное рассеяние света (так называемое „явление опалесценции“).

5. Кажущееся поглощение, вызываемое рассеянием первичных волн (затухание). В заключение мы должны рассмотреть уже отмеченное выше ослабление первичных лучей (или волн), обуславливаемое их рассеянием. С этой целью мы вычислим энергию, излучаемую в виде рассеянных волн заданным элементом объема ΔV в единицу времени. Это излучение энергии выражается интегралом

$$U' \Delta V = \oint \overline{|K'_n|} dS,$$

где

$$|\Delta \mathbf{K}| = \frac{c}{4\pi} |\Delta \mathbf{E}' \times \Delta \mathbf{H}'| = \frac{c}{4\pi} |\Delta \mathbf{E}'|^2 |\mathbf{R}^0|.$$

Выбирая в качестве S поверхность шара радиуса R с центром O в ΔV , получим, по (62а) (рассеянное излучение, вызываемое флюктуациями ориентации, мы оставляем без внимания):

$$U' \Delta V = c\pi^2 |E^0|^2 \frac{(\epsilon - 1)^2}{N\lambda_0^4} \overline{\sin^2 \theta} \Delta V,$$

где θ означает угол между \mathbf{R} и \mathbf{E}^0 (для упрощения мы считаем колебания \mathbf{E}^0 линейно-поляризованными) и $\overline{\sin^2 \theta}$ — среднее значение $\sin^2 \theta$ для всех направлений \mathbf{R} . Но $\overline{\sin^2 \theta} = 1 - \overline{\cos^2 \theta} = \frac{2}{3}$; энергия, рассеиваемая за единицу времени единицей объема, равна следовательно

$$U' = \frac{2}{3} \frac{1}{\pi^2 c} |E^0|^2 \frac{(\epsilon_0 - 1)^2}{N\lambda_0^4}. \quad (68)$$

Эта энергия возникает за счет первичных волн; в том случае однако, когда последние распространяются по всем направлениям (например в виде шаровых волн), она опять сливается с энергией первичных колебаний. Если же первичные волны являются строго направленными, т. е. плоскими, или если они образуют узкий, параллельный или слегка расходящийся, пучок лучей, то их энергия при распространении в рассматриваемом теле должна убывать на величину, соответствующую U' . Эта величина легко находится из уравнения

$$\oint K_n^0 dS + \oint \overline{K_n'} dS = 0,$$

которое показывает, что энергия колебаний в каждой точке, в среднем, со временем не меняется. Последнее уравнение можно представить в виде

$$\operatorname{div} K^0 + \operatorname{div} \overline{K'} = 0. \quad (68a)$$

Далее, по определению величины U' :

$$\operatorname{div} \overline{K'} = U'$$

и следовательно

$$\operatorname{div} K^0 = -U'.$$

Это дает в случае плоских волн, распространяющихся в направлении оси x -ов:

$$\frac{\partial K^0}{\partial x} = -U',$$

¹ Здесь имеются в виду средние значения не только по пространственным координатам, но и по времени.

т. е., согласно (68), в связи с $K^0 = \frac{c}{4\pi} |E^0|^2$

$$\frac{\partial K^0}{\partial x} = -sK^0, \quad (68b)$$

где

$$s = \frac{8\pi^3}{3} \cdot \frac{(\epsilon_0 - 1)^2}{N\lambda_0^4}. \quad (68c)$$

Интенсивность первичных волн должна следовательно убывать в направлении оси X по показательному закону

$$K^0 \sim e^{-sx}.$$

т. е. так же, как и при обыкновенном поглощении. Коэффициент s обычно называется коэффициентом рассеяния.

§ 7. Исследование распространения волн в однородных телах прямым методом теории запаздывающего дальнего действия.

1. Предварительные замечания. Примененный в последнем параграфе элементарный метод определения рассеянного излучения может быть применен также и к первичным волнам. При этом получаются, конечно, те же самые результаты, что и установленные нами в предшествующих параграфах путем интеграции макроскопических уравнений поля; однако получение этих результатов новым методом позволяет лучше понять их физический смысл и сущность электромагнитных процессов, которые формально описываются соответствующими дифференциальными уравнениями (ср. гл. I, § 1).

Мы ограничимся простейшим случаем распространения плоских синусоидальных волн в однородных телах. При этом мы будем рассматривать молекулы как квази-эластические осцилляторы, которые под действием эффективной напряженности электрического поля E^0 совершают вынужденные колебания. „Вторичное“ поле E' , создаваемое этими колебаниями, мы найдем так же, как это было сделано выше для поля рассеянных волн, — не вводя при этом каких-либо флуктуаций.

Нужно, однако, иметь в виду, что эти вторичные электрические колебания, в противоположность рассеянным, когерентны (т. е. способны интерферировать) с первичными электрическими колебаниями E^0 .

„Первичные“ и „вторичные“ колебания должны следовательно полностью сливаться друг с другом, так что результирующие колебания E могут быть разложены на указанные две части лишь путем, так сказать, „исторического“ анализа,

Между рассматриваемым сейчас случаем и прежде исследованным случаем рассеянных волн имеются еще следующие различия.

Во-первых, рассеянные волны мы считали очень слабыми и соответственно этому пренебрегали создаваемыми ими „третичными“ колебаниями, т. е. рассеянными волнами второго (и высшего) порядка. При когерентности вторичных и первичных колебаний это уже недопустимо; напротив, здесь нужно наряду со вторичными колебаниями E' учитывать и третичные колебания E'' (соответствующие рассеянным волнам второго порядка) и т. д.

Во-вторых, мы должны представлять себе, что все эти колебания (или волны) распространяются так же, как и в пустом пространстве (а не в среде с некоторой средней, отличной от 1, диэлектрической постоянной ϵ_0). Действительно, с микроскопической точки зрения материальное тело представляет собой не что иное, как часть пространства, содержащую очень большое число практически точечных электронов. Взаимодействие между этими электронами протекает по законам, подобно исследованным нами в первом томе и совершенно независимым от их концентрации, а именно в виде запаздывающего дальнего действия, распространяющегося во всем пространстве с постоянной скоростью c . При этом механические колебания каждого электрона или атома могут рассматриваться одновременно и как следствие и как причина электрических (или электромагнитных) силовых колебаний, а именно как следствие силовых колебаний n -го порядка и как причина силовых колебаний $(n + 1)$ -го порядка.

Эта крайняя сложность микроскопической картины распространения электромагнитного колебательного процесса в материальном теле находится в разительном контрасте с крайней простотой макроскопической теории, которая утверждает, что плоские гармонические волны распространяются в однородном теле так же, как и в пустом пространстве, но с отличной от c скоростью (и, возможно, также с затуханием).

Не нужно однако забывать, что, во-первых, эта простая картина относится только к случаю строго гармонических колебаний и, во-вторых, что макроскопическая теория рассматривает не то же самое поле, как и микроскопическая, но поле, получающееся из него сглаживанием микроскопических неоднородностей (усреднение).

Мы сейчас покажем, что с точки зрения микроскопической теории прямой метод, заключающийся в непосредственном учете действия молекул друг на друга, приводит к тем же результатам, что и макроскопическая теория и притом не более сложным путем.

2. Вторичное излучение, вызываемое слоем материи, параллельным первичным волнам. Представим себе систему плоских гармонических волн, распространяю-

щихся в пустом пространстве в направлении оси X . Обозначим их частоту через $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, а длину — через $\lambda = \frac{c}{\nu}$. Электрическая напряженность выразится следовательно формулой:

$$E^0 = E_0^0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})} = E_0^0 e^{i(k_0 x - \omega t)} \quad \left(k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \right). \quad (69)$$

Представим себе далее в плоскости $x=0$, или, точнее, между плоскостями $x = -\frac{l}{2}$ и $x = +\frac{l}{2}$ бесконечно тонкий слой какого-либо однородного вещества. Наличие этого слоя на распространении рассматриваемых волн отразиться не может, однако, поскольку заключенные в нем электроны могут колебаться, они должны совершать вынужденные колебания той же частоты, и этим путем создавать когерентные вторичные электромагнитные волны. Так как наш слой бесконечно тонок, можно пренебречь обратным действием этих волн на электроны и связанными с этим третичными колебаниями. Движение электронов должно следовательно определяться исключительно первичными силовыми колебаниями E^0 и иметь одинаковую фазу во всей плоскости $x=0$. Мы будем его характеризовать величиной электрического момента p на единицу поверхности или электрической поляризацией вещества P , причем $p = P \cdot l$.¹ Зависимость этих величин от времени представляется очевидно формулой

$$p = p_0 e^{-i\omega t}.$$

Вторичная электрическая напряженность E' проще всего определится, если сначала вычислить поляризационный потенциал Z' по обычной формуле:

$$Z' = \int \frac{p \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R} dS = p e^{-i\omega t} \int \frac{e^{ik_0 R}}{R} dS.$$

Выберем точку A с положительной стороны от нашего слоя и обозначим ее расстояние от последнего через x (рис. 20). В качестве элемента поверхности dS возьмем круговое кольцо с радиусами r и $r + dr$ и с центром в точке пересечения O оси X с плоскостью слоя. Таким образом

$$dS = 2\pi r dr = \pi dr^2,$$

или, так как $r^2 = R^2 - x^2$,

$$dS = \pi dR^2 = 2\pi R dR.$$

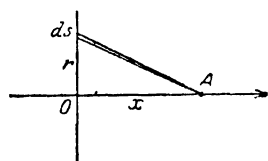


Рис. 20.

¹ Магнитной поляризацией, которая может при этом возникнуть, мы для упрощения пренебрегаем, т. е. рассматриваем тело как совершенно немагнитное. Было бы не трудно учесть и магнитную поляризацию (см. ниже).

Мы имеем следовательно

$$\int \frac{e^{ik_0 R}}{R} dS = 2\pi \int e^{ik_0 R} dR = -\frac{2\pi}{ik_0} e^{ik_0 R} + \text{const.}$$

Этот интеграл является неопределенным, если слой считать безграничным, т. е. если положить верхний предел для R равным ∞ . Однако это обстоятельство для определения \mathbf{E}' совершенно несущественно, поскольку стоящая в последней формуле постоянная от x не зависит и должна при дифференцировании исчезнуть.

Таким образом мы можем положить

$$\mathbf{Z}' = -\frac{2\pi}{ik_0} \mathbf{p}_0 e^{i(k_0 x - \omega t)}. \quad (69a)$$

Замечая, что

$$\text{rot } \mathbf{p}_0 e^{ik_0 x} = \nabla e^{ik_0 x} \times \mathbf{p}_0 = ik_0 \mathbf{n} \times \mathbf{p}_0 e^{ik_0 x},$$

где \mathbf{n} означает единичный вектор в направлении оси X , получаем отсюда по известной формуле $\mathbf{E}' = \text{rot rot } \mathbf{Z}'$

$$\mathbf{E}' = -2\pi ik_0 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_0) e^{i(k_0 x - \omega t)},$$

или, обозначая через \mathbf{p}_r перпендикулярную к x составляющую \mathbf{p} ,

$$\mathbf{E}' = 2\pi ik_0 \mathbf{p}_{0r} e^{i(k_0 x - \omega t)} = 2\pi ik_0 \mathbf{p}_r \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (69b)$$

Эту формулу можно также записать в виде

$$\mathbf{E}' = -\frac{2\pi}{c} \dot{\mathbf{p}}_r \left(t - \frac{x}{c} \right) \left(\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} \right). \quad (69c)$$

Следовательно, вторичная электрическая напряженность пропорциональна первой производной поляризации по времени, т. е. скорости электронов, и зависит от расстояния x данной точки от рассматриваемого слоя лишь постольку, поскольку определяющая $\mathbf{E}'(t, x)$ поляризация соответствует эффективному времени $t' = t - \frac{x}{c}$. Вторичные электрические колебания распространяются следовательно в положительном направлении x точно так же, как и первичные, т. е. в виде плоских синусоидальных волн. Одновременно, однако, они должны распространяться и в отрицательном направлении x и притом точно таким же образом.

Следует отметить для сравнения, что создаваемая элементом dS слоя, находящимся вблизи точки O , элементарная напряженность поля в A равна

$$d\mathbf{E}' = -\frac{1}{c^2 x} \ddot{\mathbf{p}}_r \left(t - \frac{x}{c} \right) dS.$$

Она следовательно пропорциональна второй производной поляризации по времени, т. е. ускорению электронов, и кроме того обратно пропорциональна расстоянию x .¹

3. Приближенная форма законов распространения волн в однородных телах и их наглядное толкование. Если вторичные волны E' , распространяющиеся в отрицательном направлении, оставить без внимания, а распространяющиеся в положительном направлении соединить с первичными волнами E^0 , то для результирующих волны получим

$$E = E_0^0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{при } x < -\frac{l}{2},$$

$$E = (E_0^0 + 2\pi i k_0 P_{or} l) e^{i(k_0 x - \omega t)} \quad \text{при } x > \frac{l}{2}.$$

Изменение комплексной амплитуды E_0 результирующих электрических колебаний на участке $x = -\frac{l}{2} \rightarrow x = +\frac{l}{2}$, вызываемое наличием слоя, равно следовательно

$$\Delta E_0 = 2\pi i k P_{or} \cdot l.$$

Вводя две взаимно перпендикулярные оси Y и Z , лежащие в плоскости $x=0$, и обозначая толщину слоя l через dx , будем иметь:

$$\frac{dE_{0y}}{dx} = 2\pi i k_0 P_{0y}, \quad \frac{dE_{0z}}{dx} = 2\pi i k_0 P_{0z}. \quad (70)$$

Положим теперь (так как $E_x = 0$)

$$\left. \begin{aligned} P_y &= \kappa_{22} E_y + \kappa_{23} E_z, \\ P_z &= \kappa_{32} E_y + \kappa_{33} E_z, \end{aligned} \right\} \quad (70a)$$

где κ_{ik} — составляющие тензора электрической восприимчивости рассматриваемого вещества. Мы ввели здесь вместо первичной полную электрическую напряженность, так как разность между

¹ Вторичная магнитная напряженность определяется из (69a) по формуле $H' = \text{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial Z'}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} \text{rot} Z' = \mathbf{n} \times E'$. Если учитывать магнитную поляризацию слоя $\mathbf{m} = Ml$, то нужно наряду с электрическим поляризационным потенциалом Z' ввести еще соответствующий магнитный потенциал $Z'^{(m)}$. Последний должен очевидно выражаться через \mathbf{m} так же, как Z' выражается через \mathbf{p} , так что можно положить $Z'^{(m)} = -\frac{2\pi \mathbf{m}_0}{ik_0} e^{i(k_0 x - \omega t)}$. Отсюда по формуле (21a) стр. 146, т. I, получаем добавочную магнитную напряженность:

$$H'^{(m)} = \text{rot rot} Z'^{(m)} = 2\pi i k_0 \mathbf{m}_r \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

и добавочную электрическую напряженность:

$$E'^{(m)} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} Z'^{(m)} = -\mathbf{n} \times H'^{(m)},$$

ними бесконечно мала (она того же порядка, как и dx) и для (70) не имеет значения. Следовательно

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_{0y}}{dx} &= 2\pi i k_0 (x_{22} E_{0y} + x_{23} E_{0z}), \\ \frac{dE_{0z}}{dx} &= 2\pi i k_0 (x_{32} E_{0y} + x_{33} E_{0z}). \end{aligned} \right\} \quad (70b)$$

Эти формулы остаются справедливыми и тогда, когда вместо одного слоя мы представим себе ряд слоев какого-либо однородного тела, лежащих один за другим вдоль оси X , т. е., другими словами, будем рассматривать распространение волн в однородном (по бокам неограниченном) теле — поскольку бегущими назад вторичными волнами и разницей между полной и эффективной напряженностью всегда можно пренебречь. Эти пренебрежения допустимы только в случае разреженного газа или при очень быстрых колебаниях. Считая тело изотропным

$$(x_{22} = x_{33} = x, \quad x_{23} = x_{32} = 0),$$

получаем следующее приближенное уравнение:

$$\frac{dE_0}{dx} = 2\pi i k_0 x E_0, \quad (71)$$

решение которого будет

$$E_0 = A e^{2\pi i k_0 x^2} \quad (A = \text{const}). \quad (71a)$$

Следовательно

$$E = E_0 e^{i(k_0 x - \omega t)} = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad (71b)$$

где

$$k = k_0 (1 + 2\pi x). \quad (71c)$$

При $x \ll 1$ это выражение практически не отличается от известной формулы макроскопической теории:

$$k = k_0 \sqrt{\epsilon} = k_0 \sqrt{1 + 4\pi x}. \quad (71d)$$

Приведенный здесь элементарный, хотя и не вполне точный вывод этой формулы показывает, что кажущееся изменение скорости распространения электромагнитных волн в материальных телах точно так же, как и их поглощение и прочие явления того же рода, вызываются наложением (интерференцией) первичных и вторичных волн, которые распространяются так же, как в пустом пространстве. Когда восприимчивость x имеет вещественное значение, т. е. когда колебания электронов по фазе совпадают с вызывающими их первичными силовыми колебаниями, вторичные колебания согласно (69с) сдвинуты по фазе по сравнению с последними на $\frac{\pi}{2}$. Комплексная амплитуда результирующих силовых колебаний имеет в этом случае по (71a) по-

стоянную величину и непрерывно меняющуюся с x фазу. Это однако согласно (71b) вполне эквивалентно распространению колебаний с постоянной амплитудой и с фазовым параметром k , отличным от истинного параметра k_0 , т. е. с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, отличной от истинной длины волны $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$.

При комплексных значениях x , кроме этого кажущегося изменения длины волны, получается еще и поглощение волн по формуле

$$|E|^2 \sim e^{-4\pi x^{(2)} k_0 x}, \quad (72)$$

где $x^{(2)}$ означает мнимую часть x . Тем же путем объясняются и явления, имеющие место при распространении электромагнитных волн в гиротропных и анизотропных телах. Положив, например $\chi_{22} = \chi_{33}$, $\chi_{23} = -\chi_{32} = ig$ (что соответствует первому случаю) и предполагая, что для некоторого заданного значения x , $E_{0z} = 0$, имеем по (70b)

$$dE_{0y} = 2\pi i k_0 x E_{0y} dx, \quad \text{т. е.} \quad d|E_{0y}| = 0$$

и

$$dE_{0z} = 2\pi k_0 g E_{0y} dx.$$

Величина вектора E_0 остается следовательно при продвижении на отрезок dx в направлении распространения неизменной, тогда как плоскость колебаний (или поляризации) поворачивается на угол

$$d\varphi = \frac{dE_{0z}}{E_{0y}} = 2\pi k_0 g dx.$$

Вращение плоскости поляризации, или „гирация“, на единицу длины составляет следовательно

$$\varphi = 2\pi k_0 g = \frac{4\pi^2 g}{\lambda_0}. \quad (72a)$$

Этот результат можно получить из рассмотрения распространения двух поляризованных по кругу колебаний — как мы это сделали в § 3. Эти колебания характеризуются, как известно, соотношением $E_{0y} = \pm i E_{0z}$. Умножая второе из уравнений (70b) на $\pm i$ и складывая его с первым, получаем в рассматриваемом случае

$$\frac{d}{dx} (E_{0y} \pm i E_{0z}) = 2\pi i k_0 (x \pm g) (E_{0y} \pm i E_{0z}),$$

откуда следует $|E_{0y} \pm i E_{0z}| = \text{const}$ и далее

$$k = k_0 (x \pm g) \quad (72b)$$

для тех колебаний, для которых сумма $E_{0y} \pm i E_{0z}$ не исчезает.

В случае анизотропного тела (в газе такую анизотропию можно вызвать добавочным электростатическим полем) можно

выбрать направления осей Z и Y так, чтобы $x_{23} = x_{32} = 0$. Происходящие в этих особенных направлениях линейные колебания распространяются, согласно (72a), так же, как в изотропных телах с различными параметрами k :

$$k_1 = k_0 x_{11} \quad \text{и} \quad k_2 = k_0 x_{22};$$

напротив колебания всех других направлений должны испытывать непрерывное изменение типа поляризации (ср. § 2).

4. Точное решение задачи с помощью интегрального уравнения. Упомянутые выше бегущие назад вторичные волны, образующиеся при распространении электромагнитных колебаний в однородных телах непосредственно не проявляются; их влияние сказывается только в том, что фазовый параметр k выражается не через (71c), а через (71d). Последняя формула получается, как известно, из макроскопического уравнения

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k_0^2 E = 0.$$

Мы выведем теперь тот же результат методом теории запаздывающего дальнего действия на основании формулы (69b).

Результирующая напряженность $E(x, t)$ представляет собой, очевидно, не что иное, как сумму напряженностей бесконечно малых вторичных полей E' , происходящих из различных слоев тела и притом как с положительной, так и с отрицательной стороны от рассматриваемой точки. Следовательно

$$E(x, t) = 2\pi i k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(x', t - \frac{|x' - x|}{c}\right) dx'. \quad (73)$$

С другой стороны, поляризация выражается (в случае изотропных тел) через результирующую напряженность по формуле

$$P(x, t) = x E(x, t).$$

Мы получаем следовательно для определения E (или P) линейное интегральное уравнение

$$E(x, t) = 2\pi i k_0 x \int_{-\infty}^{+\infty} E\left(x', t - \frac{|x' - x|}{c}\right) dx'. \quad (73a)$$

Это уравнение, как легко видеть, удовлетворяется выражением вида

$$E(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (73b)$$

надлежаще выбранным значением параметра k и с произвольной амплитудой A . Действительно, подставляя это выражение в (73a), получаем

$$1 = 2\pi i k_0 x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left[k(x' - x) + \frac{\omega}{c}|x' - x|\right]} dx'$$

или, полагая для краткости $x' - x = \xi$ и заменяя $\frac{\omega}{c}$ через k_0 :

$$1 = 2\pi i k_0 x \int_0^{\infty} e^{ik_0 \xi} (e^{i k \xi} + e^{-i k \xi}) d\xi. \quad (73c)$$

Чтобы удовлетворить уравнению (73a), остается следовательно определить параметр k из (73d). Чтобы обеспечить сходимость стоящего справа интеграла, заменим k_0 на $k_0 + i\gamma$, где γ — положительная величина, которую мы вводим как фиктивный коэффициент затухания с тем, чтобы затем положить его равным нулю.

При этом получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-[\gamma - i(k_0 + k)] \xi} d\xi + \int_0^{\infty} e^{-[\gamma - i(k_0 - k)] \xi} d\xi = \\ & = \frac{1}{\gamma - i(k_0 + k)} + \frac{1}{\gamma - i(k_0 - k)} = \frac{2(\gamma - ik_0)}{(\gamma - ik_0)^2 + k^2}, \end{aligned}$$

и следовательно при $\gamma = 0$

$$1 = 2\pi i k_0 x \frac{-2ik_0}{k^2 - k_0^2},$$

или

$$k^2 = k_0^2 (1 + 4\pi x),$$

т. е. формулу (71d). Пренебрегая бегущими назад волнами, нужно было бы в (73a) распространить интегрирование по x' на область $x' = -\infty$ до $x' = x$, и следовательно отбросить в формуле (73d) первый член в скобках. Этим путем мы получили бы соотношение

$$1 = \frac{2\pi i k_0 x}{-i(k_0 - k)}$$

т. е.

$$k = k_0 (1 + 2\pi x)$$

в согласии с (71c).

ГЛАВА V.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ.

§ 1. Отражение и прохождение плоских волн при перпендикулярном падении на плоскую поверхность раздела двух однородных сред.

1. Исследование по методу теории дальнего действия. Представим себе два однородных изотропных тела, граничащих друг с другом вдоль плоскости $x=0$ так, что одно тело (b) занимает положительное полупространство ($x > 0$), а другое (a) — отрицательное ($x < 0$). Рассмотрим далее гармонический колебательный процесс, при котором в теле b распространяются в положительном направлении плоские синусоидальные волны. Подобные же волны должны очевидно иметь место и в теле a . Легко однако показать, что наряду с „падающими“ волнами, бегущими в теле a в том же направлении, что и в b , необходимо принимать во внимание также обратные, или „отраженные“, волны в теле a , которые тем интенсивнее, чем больше разница между электромагнитными константами обоих тел. Происхождение этих отраженных волн и неизбежность их становятся совершенно понятными, если этот вопрос рассмотреть с помощью метода запаздывающего дальнего действия, изложенного в предыдущем параграфе.

Ради простоты ограничимся случаем, когда a представляет собой пустое пространство, а b — немагнитное тело с электрической восприимчивостью ϵ .

Предположим при этом, что электромагнитные колебания в положительном полупространстве, занимаемом телом b , распространяются таким же точно образом, как если бы это тело было неограничено. Соответственно этому положим:

$$\left. \begin{aligned} E(x, t) &= B e^{i(kx - \omega t)}, \\ P &= \epsilon E, \quad \epsilon = k_0 \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}, \end{aligned} \right\} (x > 0) \quad (1)$$

где B означает (постоянную) амплитуду E в b .

Но было бы неверно представлять себе, что колебания E , рассматриваемые здесь как причина колебаний P , являются вместе с тем полностью следствием последних, как это

можно было принимать в исследованном ранее случае неограниченного тела. Именно, силовые колебания, возбуждаемые колебаниями P , определяются в рассматриваемом случае не формулой (73) гл. IV, но формулой

$$E'(x, t) = 2\pi i k_0 \int_0^{\infty} P\left(x', t - \frac{|x' - x|}{c}\right) dx'. \quad (1a)$$

Так как с другой стороны E удовлетворяет интегральному уравнению (73b) и следовательно соотношению (73), то мы должны себе представить, что механические колебания P поддерживаются не только вызываемыми ими колебаниями E' , но что последние в этом отношении подкрепляются добавочными, приходящими извне (т. е. из отрицательного полупространства) силовыми колебаниями. Напряженность этих „падающих“ колебаний внутри тела мы должны очевидно определить формулой $E^0 = E - E'$, т. е.

$$E^0(x, t) = 2\pi i k_0 \int_{-\infty}^0 P\left(x', t - \frac{|x' - x|}{c}\right) dx', \quad (x > 0). \quad (1b)$$

Заметим, что эта формула имеет непосредственный смысл только для положительных значений x ; для отрицательного полупространства падающие колебания должны определяться посредством аналитического продолжения (1b) (см. ниже).

При выполнении интегрирования мы можем считать параметр k комплексным, что соответствует всегда имеющемуся налицо затуханию колебаний.

При $x < 0$ и $x' > 0$ имеем $|x' - x| = x' - x$, и следовательно, согласно (1) и (1a),

$$E'(x, t) = 2\pi i k_0 x B e^{-i(kx + \omega t)} \int_0^{\infty} e^{i(k+k_0)x'} dx';$$

или в виду того, что

$$\int_0^{\infty} e^{i(k+k_0)x'} dx' = \frac{1}{-i(k+k_0)} \quad (k = k^{(1)} + ik^{(2)}, \quad k^{(2)} > 0)$$

$$E'(x, t) = A^- e^{-i(k_0 x + \omega t)}, \quad (2)$$

где

$$A^- = -\frac{2\pi k_0 x B}{k_0 + k} = -\frac{2\pi x B}{1 + \sqrt{\epsilon}} = -\frac{2\pi x (\sqrt{\epsilon} - 1) B}{\epsilon - 1},$$

т. е.

$$A^- = -\frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon} - 1) B. \quad (2a)$$

При $x > 0$ и $x' < 0$ оказывается напротив $|x' - x| = x - x'$. Вводя вместо x' переменную $-x' = \xi$, получим согласно (1b):

$$E^0(x, t) = 2\pi i k_0 \chi B e^{i(k_0 x - \omega t)} \int_0^\infty e^{i(k_0 - k)\xi} d\xi = \frac{2\pi i k_0 \chi B e^{i(kx - \omega t)}}{i(k - k_0)},$$

т. е.

$$E^0(x, t) = A^+ e^{i(k_0 x - \omega t)}, \quad (3)$$

где

$$A^+ = +\frac{1}{2}(V^- + 1)B. \quad (3a)$$

Формула (2) представляет собой не что иное, как вышеупомянутую отраженную волну; $E^0(x, t)$ для отрицательных значений x очевидно можно интерпретировать как падающую волну. Необходимо заметить, что она имеет непосредственный физический смысл только в последнем случае; в положительном полупространстве колебательный процесс определяется формулой (1), причем обе части суммарной напряженности E' и E^0 не играют в отдельности никакой роли.

2. Исследование задачи обычным методом; изотропные тела. Выведем теперь полученный результат по методу дифференциальных уравнений, причем будем рассматривать общий случай, когда a и b суть два произвольные изотропные тела с диэлектрическими постоянными ϵ_a, ϵ_b и магнитными проницаемостями μ_a, μ_b .

При этом получается следующая постановка вопроса, характерная для приложения этого метода к электромагнитным колебательным процессам в ограниченных телах.

Уравнения поля [см. (2a) и (2b) гл. IV]:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} - ik_0 \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} + ik_0 \epsilon \mu \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \left(k_0 = \frac{\omega}{c} \right) \quad (4)$$

должны интегрироваться для каждого тела в отдельности так, как если бы оно было неограничено, причем на поверхности раздела должны выполняться условия:

$$\left. \begin{aligned} E_\tau^a &= E_\tau^b, & \epsilon_a E_n^a &= \epsilon_b E_n^b, \\ \frac{1}{\mu_a} H_\tau^a &= \frac{1}{\mu_b} H_\tau^b, & H_n^a &= H_n^b. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Для полной определенности задачи необходимо еще сделать какое-нибудь предположение относительно электромагнитного поля в бесконечно удаленной точке.

Уравнения (4) согласно (7) и (7a) гл. IV можно представить в виде системы уравнений:

$$\nabla^2 \mathbf{Z} + k_0^2 \epsilon \mu \mathbf{Z} = 0, \quad (4b)$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{H} = -ik_0 \epsilon \mu \operatorname{rot} \mathbf{Z}, \quad (4c)$$

где положено $\epsilon_a = \epsilon$.

Для решения нашей задачи, рассмотренной уже по методу теории дальнего действия, предположим сначала, что Z зависит только от координаты x . При этом получаем для всех электромагнитных величин выражение вида:

$$\psi = \psi^+ e^{ikx} + \psi^- e^{-ikx}, \quad (5)$$

где

$$k = k_0 \sqrt{\epsilon\mu}$$

(временной множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем мы будем всегда опускать). Формула (5) представляет собою две плоские синусоидальные волны с одинаковой длиной $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, распространяющиеся в противоположных направлениях. Граничные условия (4а) приводятся при этом к определенным соотношениям между амплитудами ψ^+ и ψ^- напряженности электрического и магнитного поля в обоих телах.

Операция rot , примененная к вектору вида (5), дает

$$\text{rot } \psi = ike^{ikx} (\mathbf{n} \times \psi^+) - ike^{-ikx} (\mathbf{n} \times \psi^-),$$

где \mathbf{n} , как и раньше, означает единичный вектор, совпадающий с положительным направлением x ($x = r \cdot \mathbf{n}$). Согласно (4с) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= +k^2 \left\{ \mathbf{n} \times (\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{n}) e^{ikx} + \mathbf{n} \times (\mathbf{Z}^- \times \mathbf{n}) e^{-ikx} \right\} = \\ &\quad k^2 \mathbf{n} \times (\mathbf{Z} \times \mathbf{n}) \\ \mathbf{H} &= k_0 k \epsilon \mu \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{Z}^+) e^{ikx} - (\mathbf{n} \times \mathbf{Z}^-) e^{-ikx} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Мы можем очевидно приписать вектору Z направление, перпендикулярное к x , так как его составляющая, параллельная x , не имеет значения для \mathbf{E} и \mathbf{H} . При этом получаем $\mathbf{n} \times (\mathbf{Z} \times \mathbf{n}) = Z$ и следовательно

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{Z}. \quad (6a)$$

Граничные условия (4а) для плоскости $x=0$ при учете (5а) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} k_a^2 (\mathbf{Z}_a^+ + \mathbf{Z}_a^-) &= k_b^2 (\mathbf{Z}_b^+ + \mathbf{Z}_b^-), \\ k_a \epsilon_a (\mathbf{Z}_a^+ - \mathbf{Z}_a^-) &= k_b \epsilon_b (\mathbf{Z}_b^+ - \mathbf{Z}_b^-). \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

Две из четырех фигурирующих здесь амплитуд могут быть заданы совершенно произвольно. Положим, в согласии с предыдущей трактовкой $\mathbf{Z}_b^- = 0$, и будем рассматривать \mathbf{Z}_b^+ — амплитуду „проходящей“ волны — как известную величину. При этом

для амплитуд падающей и отраженной волны получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} Z_a^+ &= \frac{1}{2} \frac{k_b^2}{k_a^2} \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon_b \mu_a}{\mu_b \epsilon_a}} \right) Z_b^+, \\ Z_a^- &= -\frac{1}{2} \frac{k_b^2}{k_a^2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_b \mu_a}{\mu_b \epsilon_a}} - 1 \right) Z_b^+. \end{aligned} \right\} \quad (6c)$$

Соответствующие соотношения между амплитудами напряженностей электрического поля имеют вид, согласно (6а):

$$\left. \begin{aligned} E_a^+ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_b \mu_a}{\mu_b \epsilon_a}} + 1 \right) E_b^+, \\ E_a^- &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_b \mu_a}{\mu_b \epsilon_a}} - 1 \right) E_b^+. \end{aligned} \right\} \quad (6d)$$

В частном случае, когда a представляет собой пустое пространство, а b — немагнитную среду, эти формулы переходят в выведенные ранее формулы (2а) и (3а).

Напряженности магнитного поля отдельных волн равны по величине напряженностям электрического поля, умноженным на $\frac{k_0}{k} \epsilon \mu = \sqrt{\epsilon \mu}$ [см. гл. I, § IV, (13а)].

Относительная интенсивность падающих, отраженных и проходящих колебаний определяется отношением соответствующих векторов потока энергии или, точнее, их средних значений по времени:

$$\bar{K} = \frac{c}{8\pi\mu} R[E^* \cdot H] = \frac{c}{8\pi} R \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} EE^* \right].$$

Отношение $\frac{\bar{K}_a^-}{\bar{K}_a^+} = r$ называется коэффициентом отражения, а отношение $\frac{\bar{K}_b^+}{\bar{K}_a^+} = d$ — коэффициентом прохождения тела b по отношению к a или просто тела b , если a означает пустое пространство.

В последнем случае,

$$r = \left| \frac{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu} - 1}}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu} + 1}} \right|^2, \quad (7)$$

и

$$d = \frac{4 \left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right|}{\left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1 \right|^2} = 1 - r. \quad (7a)$$

Напомним, что величина ε в вышеприведенных формулах означает вообще говоря комплексную диэлектрическую постоянную. Чтобы показать влияние электрического затухания (поглощения) на коэффициенты r и d , представим ε согласно (2) гл. IV в виде суммы $\varepsilon_s = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$.

Ограничимся при этом двумя предельными случаями, когда $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ очень мало или очень велико по сравнению с 1.

В первом случае имеем приближенно (см. § 1, гл. IV):

$$\sqrt{\varepsilon_s} \cong \sqrt{\varepsilon} \left(1 + i \frac{\sigma}{v\varepsilon} \right)$$

и следовательно

$$\left| \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\mu}} \pm 1 \right|^2 = \left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \pm 1 + i \frac{\sigma}{v\sqrt{\varepsilon\mu}} \right|^2 = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \pm 1 \right)^2 + \frac{\sigma^2}{v^2\varepsilon\mu},$$

т. е.

$$r \cong \left(\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1} \right)^2 + \frac{4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1 \right)^4} \frac{\sigma^2}{v^2\varepsilon\mu}. \quad (7b)$$

Во втором случае можно просто положить

$$\varepsilon_s \cong i \frac{4\pi\sigma}{\omega} = i \frac{2\sigma}{v}.$$

При этом получается

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_s} &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\sigma}{v}}, \\ \left| \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\mu}} \pm 1 \right|^2 &= \left| \sqrt{\frac{\sigma}{v\mu}} \pm 1 + i \sqrt{\frac{\sigma}{v\mu}} \right|^2 = \\ &= \left(\sqrt{\frac{\sigma}{v\mu}} \pm 1 \right)^2 + \frac{\sigma}{v\mu} \cong \frac{2\sigma}{v\mu} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\mu v}{\sigma}} \right). \end{aligned}$$

Откуда следует

$$\left. \begin{aligned} r &\cong \frac{1 - \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}}{1 + \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}} \cong 1 - 2\sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}, \\ d &= 2\sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}. \end{aligned} \right\} \quad (7c)$$

т. е.

Эти формулы позволяют с большой точностью определить коэффициент отражения или прохождения в случае металлов для инфракрасных лучей и еще более медленных колебаний, применяемых в радиотехнике.

Коэффициент прохождения в случае различных металлов для колебаний определенной частоты оказывается тем меньше, чем больше коэффициент поглощения $\zeta \cong \frac{2\pi}{c} \sqrt{\mu\sigma\nu}$ [см. (10a) § 1 гл. IV]: чем лучше свет проходит через поверхность металла, тем сильнее он должен поглощаться внутри него. При данном затухании (т. е. проводимости) оба коэффициента пропорциональны корню квадратному из частоты.

Проводимость металлов σ составляет примерно 10^{16} — 10^{17} (в электромагнитных единицах). Для длинноволнового инфракрасного света ($\nu \cong 10^{18}$) получаем таким образом согласно (7c) при $\mu \cong 1$: $d \cong \frac{1}{100}$ и $\zeta \cong 10^3 \text{ см}^{-1}$; для колебаний радио-частоты ($\nu \cong 10^8 \text{ сек}^{-1}$): $d \cong 10^{-5}$ и $\zeta \cong 10^3 \text{ см}^{-1}$. Из этих примеров видно, что для каждого металла существует некоторая „оптимальная“ частота, при которой электромагнитные колебания проникают внутрь хуже всего.

При отсутствии поглощения ($\sigma = 0$) проходящие колебания согласно (6c) должны иметь на граничной поверхности $x = 0$ такую же фазу, как падающие и отраженные, если $\frac{\varepsilon_b}{\mu_b} > \frac{\varepsilon_a}{\mu_a}$, или противоположную, если $\frac{\varepsilon_b}{\mu_b} < \frac{\varepsilon_a}{\mu_a}$. При наличии поглощения ($\sigma > 0$) получается сложное соотношение фаз, которое мы здесь детально не будем рассматривать. Заметим только, что в случае металлического отражения смещение фазы δ отраженной волны по отношению к падающей приблизительно определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \delta = - \frac{2\sqrt{\frac{\sigma}{\mu\nu}}}{2\frac{\sigma}{\mu\nu} - 1}$$

и составляет величину, несколько большую π .

Однако и в этом предельном случае все три волны сохраняют, как легко видеть, одинаковый характер поляризации, например то же направление колебаний, если речь идет о линейно-поляризованных волнах. Это обстоятельство характерно для изотропного тела при перпендикулярном падении волны.

3. Анизотропные и гиротропные тела. В случае анизотропного и гиротропного тела при тех же условиях получаются некоторые своеобразные изменения в типе колебаний отраженных и проходящих волн по отношению к падающим, которые мы сейчас вкратце рассмотрим.

Представим себе, что a означает пустое пространство и b — какое-нибудь анизотропное тело (кристалл), которое будем полагать ради простоты абсолютно прозрачным и немагнитным. Тогда, как известно, в направлении оси X могут распространяться две линейно поляризованные волны со скоростями u' и u'' , которые определяются из уравнения Френеля (см. гл. IV, § 2). При этом целесообразно ввести в качестве основной величины вместо напряженности электрического поля электрическую индукцию D . Этот вектор можно разложить на две перпендикулярные к направлению распространения и друг к другу составляющие $D' = D_y^{(b)}$ и $D'' = D_z^{(b)}$, которые представляют собой основные колебания; при этом вместо одного уравнения типа (5) получаются два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} D_y^b &= D_b'^+ e^{ik'x} + D_b'^- e^{-ik'x}, \\ D_z^b &= D_b''^+ e^{ik''x} + D_b''^- e^{-ik''x}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $k' = \frac{\omega}{u'} = \frac{2\pi}{\lambda'}$ и $k'' = \frac{\omega}{u''} = \frac{2\pi}{\lambda''}$.

Что касается магнитного поля, то его составляющие выражаются согласно (18b) гл. IV формулами: ¹

$$\left. \begin{aligned} H_x^b &= \frac{u'}{c} (D_b'^+ e^{ik'x} - D_b'^- e^{-ik'x}), \\ H_y^b &= \frac{u''}{c} (-D_b''^+ e^{ik''x} + D_b''^- e^{-ik''x}). \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Векторы $E^a = D^a$ и H^a , соответствующие пустому полупространству, могут быть представлены точно таким же образом с единственной разницей, что в этом случае $k' = k'' = k_0$.

Граничные условия (4a) для $x=0$ принимают при этом следующий вид:

$$H_y^b = H_y^a, \quad H_z^b = H_z^a, \\ E_y^b = \varepsilon_{yy}^{-1} D_y^b + \varepsilon_{yz}^{-1} D_z^b = E_y^a = D_y^a, \quad E_z^b = \varepsilon_{zy}^{-1} D_y^b + \varepsilon_{zz}^{-1} D_z^b = E_z^a = D_z^a,$$

¹ Предполагается, что направления x, y, z образуют положительную (правовинтовую) систему координат. Далее нужно заметить, что H перпендикулярно к x и D .

где ϵ_{xy}^{-1} и т. д. означают составляющие обратного диэлектрического тензора, т. е. согласно (8) и (8а):

$$\left. \begin{aligned} \frac{u'}{c} (D_b'^+ - D_b'^-) &= (D_a'^+ - D_a'^-), \\ \frac{u''}{c} (D_b''^+ - D_b''^-) &= -(D_a''^+ - D_a''^-). \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{yy}^{-1} (D_b'^+ + D_b'^-) + \epsilon_{yz}^{-1} (D_b''^+ + D_b''^-) &= D_a'^+ + D_a'^-, \\ \epsilon_{zy}^{-1} (D_b'^+ + D_b'^-) + \epsilon_{zz}^{-1} (D_b''^+ + D_b''^-) &= D_a''^+ + D_a''^-. \end{aligned} \right\} \quad (8c)$$

Величины $D_a'^+$, $D_b'^+$, относящиеся к падающим волнам, считаются здесь известными. Далее, для проходящих волн должно быть $D_b'^- = D_b''^- = 0$. Остальные 4 величины $D_a'^+$, $D_b'^+$ и $D_a'^-$, $D_a''^-$, характеризующие проходящие и отраженные волны, легко определяются при этом из предыдущих уравнений.

Мы не даем здесь полного решения рассматриваемой задачи. Однако уже из общего вида этих уравнений ясно, что в случае линейно поляризованной падающей волны, направление колебания которой отлично от обоих основных направлений y и z , отраженная волна должна быть эллиптически-поляризована.

Подобным же образом можно показать, что при падении линейно-поляризованного света на гиротропное тело, у которого вектор гирации (вращения плоскости поляризации) параллелен оси X , отраженные колебания хотя и остаются линейными, но по отношению к падающим претерпевают некоторое изменение направления. Это вращение плоскости поляризации отраженного света наблюдается обычно при падении светового луча на намагниченное тело и называется магнитным эффектом Керра.

Определяющие этот эффект основные уравнения имеют такой же вид (8) и (8а), как и для только что рассмотренного случая анизотропного тела. При этом под y и z (соответственно u' и u'') следует подразумевать не два взаимно-перпендикулярные направления, а противоположные направления вращения круговых (или эллиптических, если вектор гирации не параллелен оси X) основных колебаний.

В этом случае нет надобности вместо напряженности поля вводить электрическую индукцию. Поэтому вместо (8) положим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_y^b &= \mathbf{E}_b'^+ e^{ik'x} + \mathbf{E}_b'^- e^{-ik'x}, \\ \mathbf{E}_z^b &= \mathbf{E}_b''^+ e^{ik''x} + \mathbf{E}_b''^- e^{-ik''x}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и согласно (29а) гл. IV

$$\left. \begin{aligned} \frac{u'}{c} \mathbf{H}_y^b &= \mathbf{n} \times [\mathbf{E}_b'^+ e^{ik'x} - \mathbf{E}_b'^- e^{-ik'x}], \\ \frac{u''}{c} \mathbf{H}_z^b &= \mathbf{n} \times [\mathbf{E}_b''^+ e^{ik''x} - \mathbf{E}_b''^- e^{-ik''x}]. \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Само собой разумеется, что колебания в a должны представляться точно таким же способом (т. е. также должны разлагаться на правые и левые круговые колебания).

Положим теперь $\mathbf{E}_b'^- = \mathbf{E}_b''^- = 0$; при этом граничные условия (4а) принимают следующий вид;

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_b'^+ &= \mathbf{E}_a'^+ + \mathbf{E}_a'^-, & \mathbf{E}_b''^+ &= \mathbf{E}_a''^+ + \mathbf{E}_a''^-, \\ \frac{c}{\mu u'} \mathbf{E}_b'^+ &= \mathbf{E}_a'^+ - \mathbf{E}_a'^-, & \frac{c}{\mu u''} \mathbf{E}_b''^+ &= \mathbf{E}_a''^+ - \mathbf{E}_a''^-. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получается

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_a'^+ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\mu u'} + 1 \right) \mathbf{E}_b'^+, & \mathbf{E}_a''^+ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\mu u''} + 1 \right) \mathbf{E}_b''^+, \\ \mathbf{E}_a'^- &= -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{\mu u'} - 1 \right) \mathbf{E}_b'^+, & \mathbf{E}_a''^- &= -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{\mu u''} - 1 \right) \mathbf{E}_b''^+. \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

Здесь можно с достаточным приближением положить, согласно (31а) гл. IV,

$$\frac{c}{\mu u} = \frac{c}{\mu u_0 \left(1 \pm \frac{J}{2s} \right)} \cong \frac{c}{\mu u_0} \left(1 \mp \frac{J}{2s} \right) = \sqrt{\frac{s}{\mu}} \left(1 \mp \frac{J}{2s} \right). \quad (9c)$$

Если диэлектрическая постоянная ϵ комплексна, т. е. следовательно при наличии затухания (поглощения) колебаний в рассматриваемом теле — как это на самом деле имеет место в случае эффекта Керра у намагниченного железа и других ферромагнитных металлов — обе круговые составляющие отраженной волны должны испытывать различные сдвиги фаз по отношению к соответствующим составляющим падающей волны. Это обстоятельство обуславливает поворот плоскости результирующих (линейно поляризованных) колебаний на угол $\frac{1}{2} (\delta'' - \delta')$, где δ' и δ'' сдвиги фаз $\mathbf{E}_a'^-$ относительно $\mathbf{E}_a'^+$ и соответственно $\mathbf{E}_a''^-$ относительно $\mathbf{E}_a''^+$. Согласно (9b) имеем

$$\delta', \delta'' = \arg \frac{\sqrt{\frac{s}{\mu}} - 1 \pm \frac{J}{2\sqrt{s\mu}}}{\sqrt{\frac{s}{\mu}} + 1 \pm \frac{J}{2\sqrt{s\mu}}}$$

Необходимо заметить, что при применении этой формулы к видимому свету ($\nu \cong 10^{15} \text{ сек}^{-1}$) выражение $\epsilon = i \frac{2\sigma}{\nu}$ представляет не всегда достаточное приближение. Что касается магнитной восприимчивости μ , то у ферромагнитных тел она уже для инфракрасных световых колебаний практически равна 1.

§ 2. Отражение и преломление плоской волны при наклонном падении на плоскость раздела между двумя телами.

1. Изотропные прозрачные тела. Обобщим теперь установленные в предыдущем параграфе результаты на тот случай, когда плоскость раздела двух тел a и b образует с плоскостью падающей волны некоторый произвольный угол.

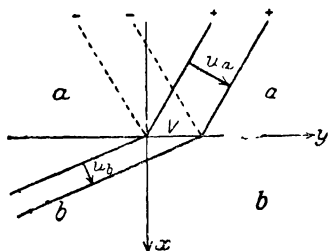


Рис. 21.

Можно было бы рассмотреть также и этот случай по методу теории дальнего действия, но теперь это едва ли необходимо, так как применение этого метода к предыдущим простым случаям в достаточной мере разъяснило механизм распространения и отражения волн.

Наклон плоскости падающей волны к плоскости раздела должен быть связан, как это легко видеть, с соответствующим наклоном отраженной и проходящей волны; помимо этого обстоятельства в наших прежних выводах ничто существенно не изменится.

Итак, представим себе, что в теле b в некотором определенном направлении \mathbf{n}_b распространяются плоские волны так, как если бы оно было неограничено, но что однако на границе ($x=0$) они заменяются двумя другими волнами с направлениями распространения \mathbf{n}_a^+ (падающая волна) и \mathbf{n}_a^- (отраженная волна). Углы между направлениями распространения с одной стороны и осью X — с другой (последнюю мы представляем себе, как и раньше, перпендикулярной к плоскости раздела обоих тел a и b), обозначим через θ_b , θ_a^+ и θ_a^- . Соотношение между этими углами может быть непосредственно определено из того обстоятельства, что каждая волновая плоскость в теле b (т. е. поверхность постоянной фазы в b) по линии своего пересечения с плоскостью раздела переходит в две „сопряженные“ волновые плоскости с определенной постоянной разностью фаз (например 0 или π рис. 21) в теле a . Эта общая линия пересечения, принадлежащая трем „сопряженным“ волновым плоскостям, перемещается в перпендикулярном к себе направлении u со скоростью V , проекция которой на направление распространения волн должна, очевидно, совпадать с соответствующими волно-

выми скоростями u_b и u_a . Мы получаем, таким образом, следующие уравнения:

$$V \sin \theta_a^+ = V \sin \theta_a^- = u_a, \quad V \sin \theta_b = u_b, \quad (10)$$

т. е., учитывая тот факт, что падающая и отраженная волны распространяются в различных направлениях:

$$\theta_a^+ = \pi - \theta_b^- \equiv \theta_a \quad (10a)$$

и

$$\frac{\sin \theta_a}{\sin \theta_b} = \frac{u_a}{u_b} = \frac{\sqrt{\epsilon_b \mu_b}}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \equiv n_{ab}. \quad (10b)$$

Эти формулы выражают известные законы отражения и преломления света. Величина n_{ab} называется относительным показателем преломления тела b по отношению к a .

Необходимо заметить, что приведенный наглядный вывод соотношений (10) предполагает вещественность величин u_a и u_b , т. е. прозрачность обоих тел. Обобщение его на случай поглощающего тела мы установим позднее чисто аналитическим путем. Сперва ограничимся простейшим случаем абсолютно прозрачного изотропного тела.

Так как постоянство фазовых соотношений между тремя „сопряженными“ волнами обеспечено равенствами (10), то граничные условия (4a) нам нужно написать только для амплитуд напряженностей электрического и магнитного поля. Последняя выражается через первую по формуле [см. (11a) гл. IV]:

$$\frac{u}{c} \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \text{т. е. } \mathbf{H} = \sqrt{\epsilon \mu} \mathbf{n} \times \mathbf{E}.$$

Отметим еще обратное соотношение:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \mathbf{H} \times \mathbf{n}$$

и вытекающие отсюда условия поперечности:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Эти соотношения позволяют характеризовать каждую волну составляющими амплитуд \mathbf{E} и \mathbf{H} по оси z (z — направление, перпендикулярное к плоскости падения, т. е. направление линии пересечения плоскости волны с плоскостью раздела обеих сред).

Именно, принимая во внимание, что

$$n_x = \cos \theta, \quad n_y = \sin \theta, \quad n_z = 0,$$

получаем:

$$H_x = \sqrt{\epsilon \mu} E_s \sin \theta, \quad H_y = -\sqrt{\epsilon \mu} E_s \cos \theta, \quad (11)$$

$$E_x = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} H_z \sin \theta, \quad E_y = +\frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} H_z \cos \theta. \quad (11a)$$

Граничные условия (4а) должны при этом приниматься во внимание только для составляющих **E** и **H** по осям *z* и *y*; легко видеть, что соответствующие граничные условия для составляющих по оси *x* получаются как следствие соотношения (10). Само собой понятно, что можно рассуждать обратным путём и рассматривать соотношения (10) как следствие граничных условий.

Таким образом:

$$\left. \begin{aligned} E_z^b &= E_z^{a+} + E_z^{a-}, \\ -\frac{1}{\mu_b} H_y^b &= \sqrt{\frac{\epsilon_b}{\mu_b}} E_z^b \cos \theta_b = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} (E_z^{a+} - E_z^{a-}) \cos \theta_a = -\frac{1}{\mu_a} H_y^a \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu_b} H_z^b &= \frac{1}{\mu_a} (H_z^{a+} + H_z^{a-}), \\ E_y^b &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_b \mu_b}} H_z^b \cos \theta_b = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} (H_z^{a+} - H_z^{a-}) \cos \theta_a = E_y^a. \end{aligned} \right\} \quad (11c)$$

Положим для краткости

$$\frac{\epsilon_b}{\epsilon_a} = \epsilon, \quad \frac{\mu_b}{\mu_a} = \mu \quad (12)$$

(относительная диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость обоих тел); далее, согласно (10b)

$$\sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\sin \theta_a}{\sin \theta_b} \equiv n \quad (12a)$$

(относительный показатель преломления $= n_{ab}$) и опустим индексы *a* при *E* и *H*. Тогда, согласно (11b), получим:

$$\left. \begin{aligned} E_z^+ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\cos \theta_b}{\cos \theta_a} + 1 \right) E_z^b, \\ E_z^- &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\cos \theta_b}{\cos \theta_a} - 1 \right) E_z^b \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

и точно так же, согласно (11c),

$$\left. \begin{aligned} H_z^+ &= \frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\cos \theta_b}{\cos \theta_a} + 1 \right) H_z^b, \\ H_z^- &= -\frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\cos \theta_b}{\cos \theta_a} - 1 \right) H_z^b. \end{aligned} \right\} \quad (12c)$$

В случае достаточно быстрых электромагнитных колебаний, соответствующих, например, видимому свету, всегда можно положить $\mu_a = \mu_b = 1$. При этом согласно (12а) имеем:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\cos \theta_b}{\cos \theta_a} \pm 1 = \frac{\sin \theta_a \cos \theta_b \pm \cos \theta_a \sin \theta_b}{\cos \theta_a \sin \theta_b} = \frac{\sin (\theta_a \pm \theta_b)}{\cos \theta_a \sin \theta_b}$$

и

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\cos \theta_b}{\cos \theta_a} \pm 1 = \frac{\sin \theta_b \cos \theta_b \pm \sin \theta_a \cos \theta_a}{\sin \theta_a \cos \theta_a} = \frac{\sin 2\theta_b \pm \sin 2\theta_a}{\sin 2\theta_a},$$

или

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\cos \theta_b}{\cos \theta_a} + 1 &= \frac{2 \sin (\theta_b + \theta_a) \cos (\theta_b - \theta_a)}{\sin 2\theta_a} \\ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\cos \theta_b}{\cos \theta_a} - 1 &= \frac{2 \cos (\theta_b + \theta_a) \sin (\theta_b - \theta_a)}{\sin 2\theta_a} \end{aligned}$$

Таким образом в этом („оптическом“) случае формулы (12b) и (12c) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{E_z^b}{E_z^+} &= \frac{2 \cos \theta_a \sin \theta_b}{\sin (\theta_a + \theta_b)}, & \frac{E_z^-}{E_z^+} &= -\frac{\sin (\theta_a - \theta_b)}{\sin (\theta_a + \theta_b)}, & (13) \\ \frac{H_z^b}{H_z^+} &= \frac{\sin 2\theta_a}{\sin (\theta_a + \theta_b) \cos (\theta_a - \theta_b)}, & \frac{H_z^-}{H_z^+} &= \frac{\operatorname{tg} (\theta_a - \theta_b)}{\operatorname{tg} (\theta_a + \theta_b)}. & (13a) \end{aligned}$$

В этой (или верней в подобной ей) форме они были впервые даны Френелем.¹

2. Полная поляризация, полное отражение, поглощение. Последняя формула показывает, что при $\theta_a + \theta_b = \frac{\pi}{2}$, т. е., согласно (12а), при

$$\operatorname{tg} \theta_a = n \quad (13b)$$

отраженный свет должен быть линейно поляризован, так как в этом случае только составляющие E по оси z и соответствующие (перпендикулярные к z) составляющие H отличны от нуля. Определяемый соотношением (13b) угол падения называется углом поляризации Брюстера или углом полной поляризации.

На ряду с этим углом особое значение при условии $n < 1$ имеет еще угол падения, определяемый уравнением

$$\sin \theta_a = n \quad (13c)$$

¹ Тот факт, что углы θ_a и θ_b входят в выражения для коэффициентов отражения $E^-:E^+$ симметричным образом, показывает, что эти коэффициенты при обращении направления падения остаются неизменными или же меняют только свой знак.

и соответствующий максимальному значению угла преломления $\theta_b = \frac{\pi}{2}$. При $\sin \theta_a > n$ падающие колебания вообще не могут больше распространяться в теле b : при этом имеет место так называемое полное отражение.

Предыдущие формулы остаются в силе также и в этом случае, когда угол θ_b определяется как комплексная величина уравнением

$$\sin \theta_b = \frac{\sin \theta_a}{n},$$

причем, разумеется, он теряет свое наглядное значение. Нужно однако заметить, что приведенный в начале этого параграфа наглядный вывод соотношений (10) может быть заменен чисто аналитическим выводом. Определив составляющие волновых нормалей совершенно формальным образом посредством равенств

$$n_x = \cos \theta, \quad n_y = \sin \theta, \quad n_z = 0,$$

получаем для различных электромагнитных величин — как функций координат и времени — выражения вида:

$$\psi = \psi^0 e^{i(-\omega t + k_n \cdot r)} = \psi^0 e^{i[-\omega t + k(x \cos \theta + y \sin \theta)]}. \quad (14)$$

При этом из граничных условий (4а) тотчас же следует, что фазовые множители трех рассматриваемых волн должны быть тождественны при $x=0$. Это требование приводит к соотношениям

$$k_a \sin \theta_a^+ = k_a \sin \theta_a^- = k_b \sin \theta_b,$$

идентичным с (10). Эти же уравнения получаются, как уже было упомянуто; из соотношений между амплитудами составляющих E и H по осям z и x . Положив, таким образом, $n < 1$ и $\sin \theta_a > n$, получаем

$$\cos \theta_b = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_a}{n^2}} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_a}{n^2} - 1},$$

и следовательно

$$\psi^b = \psi_b^0 e^{-\zeta x} e^{i\left(\frac{k_b}{n} \sin \theta_a y - \omega t\right)}, \quad (14a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_b &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_b \mu_b}, & \frac{k_b}{n} &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = k_a \\ \zeta &= k_a \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_a} = \sqrt{k_b^2 - k_a^2 \sin^2 \theta_a}. \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

Эти формулы показывают, что при полном отражении падающие колебания также проникают в тело b ; однако уже на

очень малых расстояниях от поверхности они практически совершенно гасятся вторичными колебаниями E' (см. § 1). Здесь речь идет главным образом о вторичных колебаниях, возбуждаемых в теле a , но не в b , ибо условие $n < 1$ выполняется в общем и тогда, когда b представляет собой пустоту. Отраженные волны должны при этом иметь такие же амплитуды, как и падающие, и могут отличаться от них только фазой. Согласно (12b), например, получаем (при $\mu = 1$):

$$\frac{E_z^-}{E_z^+} = \frac{\cos \theta_a - i \sqrt{\sin^2 \theta_a - n^2}}{\cos \theta_a + i \sqrt{\sin^2 \theta_a - n^2}} = e^{-i\delta},$$

где

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2 \cos \theta_a \sqrt{\sin^2 \theta_a - n^2}}{n^2 + \cos^2 \theta_a}. \quad (14c)$$

Колебательный процесс, изображаемый формулой (14a), можно рассматривать как волновой процесс, распространяющийся в направлении оси Y со скоростью V (10) и одновременно затухающее в перпендикулярном направлении X . Такие волны с различными направлениями распространения и затухания были подробно нами исследованы в гл. IV (§ 1). Они должны иметь место при всевозможных углах падения, если b представляет собой поглощающее тело. Направление затухания $\mathbf{n}_b^{(2)}$, как легко видеть, всегда совпадает с осью X , в то время как направление распространения $\mathbf{n}_b^{(1)}$, т. е. угол $(\mathbf{n}_b^{(1)}, x) = \theta_b^{(1)} = \theta_b$, остается такой же функцией от угла падения θ_a , как и в случае абсолютно прозрачного тела. Последнее утверждение непосредственно следует из приведенных в начале этого параграфа соображений, остающихся в силе совершенно независимо от наличия затухания. Оно получается также аналитическим путем на основании обобщенного выражения

$$\psi = \psi^0 e^{-k^{(2)} x + i [k^{(1)} (x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t]} \quad (15)$$

как следствие граничных условий для $x=0$. Чтобы не усложнять вывод, представим себе, что тело a прозрачно ($k_a^{(2)} = 0$, $k_a^{(1)} = k_a$). Параметры $k_b^{(1)}$ и $k_b^{(2)}$ выражаются с помощью формулы (9b) (гл. IV, § 1) как функции угла θ_a . Вместо прежних соотношений (11) и (11a), остающихся в силе для a , для b получаются соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} \mathbf{H} &= (k^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} + k^{(2)} \mathbf{n}^{(2)}) \times \mathbf{E}, \\ \epsilon, \mu \frac{\omega}{c} \mathbf{E} &= - (k^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} + k^{(2)} \mathbf{n}^{(2)}) \times \mathbf{H}. \end{aligned}$$

[см. (11a) и (11b) гл. IV]. Таким образом, положив для сокращения

$$\left. \begin{aligned} n_b^{(1)} &\equiv \frac{ck_b^{(1)}}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_b \mu_b} \sqrt{\frac{1}{2} \left(+1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma_b^2}{\varepsilon_b^2 v^2 \cos^2 \theta_b}} \right)}, \\ n_b^{(2)} &\equiv \frac{ck_b^{(2)}}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_b \mu_b} \sqrt{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma_b^2}{\varepsilon_b^2 v^2 \cos^2 \theta_b}} \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} H_x^b &= n_b^{(1)} E_z^b \sin \theta_b, & H_y^b &= -(n_b^{(1)} \cos \theta_b + n_b^{(2)}) E_z^b, \\ E_x^b &= -\frac{n_b^{(1)}}{\varepsilon_b^s \mu} H_z^b \sin \theta_b, & E_y^b &= \frac{n_b^{(1)} \cos \theta_b + n_b^{(2)}}{\varepsilon_b^s \mu} H_z^b. \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

Граничные условия для E_x и H_x остаются неизменными, в то время как для H_y и E_y получаются следующие соотношения [см. (11b) и (11c)]:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_b} H_y^b &= \frac{n_b^{(1)} \cos \theta_b + n_b^{(2)}}{\mu_b} E_z^b = \\ &= \frac{n_a}{\mu_a} (E_z^{a+} + E_z^{a-}) \cos \theta_a = -\frac{1}{\mu_a} H_y^a, \\ E_y^b &= \frac{n_b^{(1)} \cos \theta_b + n_b^{(2)}}{\varepsilon_b^s \mu_b} H_z^b = \frac{1}{n_a} (H_z^{a+} - H_z^{a-}) \cos \theta_a = E_y^a, \end{aligned}$$

где $n_a = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ и $\varepsilon_b^s = \varepsilon_b - i \frac{2\sigma_b}{v}$. Вместо (12b) и (12c) мы получаем следовательно

$$\left. \begin{aligned} E_z^\pm &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\mu_a}{\mu_b} \frac{n^{(1)} \cos \theta_b + n_b^{(2)}}{n_a \cos \theta_a} \right) E_z^b, \\ H_z^\pm &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_a}{\mu_b} \pm \frac{n_a (n_b^{(1)} \cos \theta_b + n_b^{(2)})}{\varepsilon_b^s \mu_b \cos \theta_a} \right] H_z^b. \end{aligned} \right\} \quad (15c)$$

Мы не будем вдаваться в детальное исследование этих формул. Заметим только, что явления полной поляризации и полного отражения имеют место также и в случае поглощающего тела, причем полное отражение происходит при том же условии $\left(\sin \theta_a = \frac{n_b^{(1)}}{n_a} \right)$, как и в случае прозрачного тела, а полная поляризация — при угле падения, выражающемся довольно сложно через электромагнитные постоянные тела.

3. Анизотропные тела; двойное лучепреломление и коническая рефракция; графическое построение преломленных волн и лучей. Отражение и преломление световой волны на поверхности прозрачного анизотропного (кристаллического) тела при косом падении могут быть рассмотрены следующим образом. Прежде всего нужно принять во внимание то обстоятельство, что каждому направлению распространения волн \mathbf{n}_b в таком теле соответствуют два различные направления основных колебаний \mathbf{D}' , \mathbf{D}'' и две фазовые скорости u'_b , u''_b . Но для того, чтобы эти два рода колебаний могли распространяться в одном и том же направлении, должны выполняться соотношения [см. (10)]:

$$\frac{u_a}{\sin \theta_a} = \frac{u'_b}{\sin \theta_b} = \frac{u''_b}{\sin \theta_b},$$

что однако при $u'_b \neq u''_b$ невозможно. Отсюда следует, что некоторому определенному углу падения θ_a должны соответствовать две различно преломленные волны, направления распространения которых определяются отношениями

$$\frac{u_a}{\sin \theta_a} = \frac{u'_b}{\sin \theta'_b} = \frac{u''_b}{\sin \theta''_b}.$$

Каждая волна должна отвечать колебаниям лишь одного рода, именно того, который обладает соответствующей скоростью. Это явление низывают двойным лучепреломлением. Наряду с обеими преломленными волнами следует принимать во внимание и лучи, направления которых \mathbf{l}'_b и \mathbf{l}''_b вообще отличны от направлений соответствующих волновых нормалей \mathbf{n}'_b , \mathbf{n}''_b . Только в случае одноосного кристалла направление одного из двух лучей — именно обыкновенного — совпадает с нормалью волны. Другой же „необыкновенный“ луч лежит в плоскости, содержащей направление x и оптическую ось и вообще отличной от плоскости падения.

При некотором определенном направлении падения, соответствующем совпадению обеих волновых скоростей u'_b и u''_b , вместо обычных двух лучей в двуосном кристалле получается конус лучей, примерно такого вида, какой был описан в § 2 гл. IV. Это явление называется внутренней конической рефракцией. Оно отличается от так называемой внешней конической рефракции, которая наблюдается тогда, когда луч, распространяющийся в кристалле вдоль одной из оптических осей, выходит во внешнее пространство. Соответствующие такому лучу направления волновых нормалей образуют, как известно, также конус, и во внешнем пространстве после преломления этих нормальных направле-

ний получается, таким образом, расходящийся лучевой конус. Это явление можно обратить, направив на кристалл (при помощи линзы) сходящийся пучок лучей.

Явление двойного преломления можно графически представить весьма простым и наглядным

способом с помощью описанных в § 2 гл. IV лучевых поверхностей в связи с принципом Гюйгенса. Представим себе, что из некоторой точки O на поверхности раздела $x=0$ во все стороны — как во внешнее пустое пространство a , так и в кристаллическое тело b — распространяется электромагнитное возмущение. При этом в a получаются полусферические лучевые поверхности с радиусом $u_a t$ (t — время распространения), а в b — половина ха-

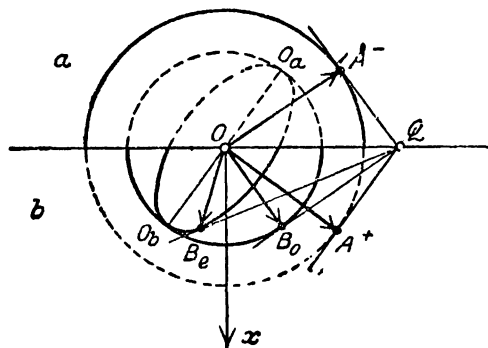


Рис. 22.

актерной для рассматриваемого кристалла лучевой поверхности. Эти поверхности изображены на рис. 22 для одноосного положительного кристалла (см. рис. 16а, § 2, гл. IV), причем мы продолжили их пунктирными линиями по другую сторону от плоскости раздела.

Обозначим направление падающей волны или луча через OA^+ . Касательная плоскость A^+Q к пунктирной полусфере с радиусом $u_a t$ очевидно представляет направление падающей (плоской) волновой поверхности. Соответствующие поверхности отраженной и проходящей волн получаются тогда в виде касательных плоскостей, проведенных через Q к внешней полусфере с одной стороны (QA^-) и к двум (внутренним) лучевым поверхностям в кристалле — с другой (QB_0, QB_e). В рассматриваемом случае последние обращаются в сферу радиуса

$$u_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} \quad (\epsilon_1 = \epsilon_2)$$

и эллипсоид вращения с полуосями

$$u_1 \text{ и } u_3 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_3}}.$$

Векторы OB_0 и OB_e представляют собою соответственно направления обыкновенных и необыкновенных лучей. Величины этих векторов пропорциональны соответствующим скоростям лучей, а длины нормалей (проведенных из O) пропорциональны скоростям волн u_o и u_e . Для лучей обыкновенных скорости лучей и волн совпадают как по величине, так и по направлению.

Что касается, наконец, направления основных колебаний, то они, поскольку речь идет о напряженности или об индукции электрического поля, в случае обыкновенных лучей перпендикулярны к плоскости $O_b O B_o$ ($O_b O_a$ — оптическая ось), а в случае необыкновенных лучей параллельны плоскости $O_b O B_o$. Следует заметить, что обе эти плоскости вообще отличны друг от друга. Поэтому нет основания считать рассматриваемые направления колебаний D_o , D_e (или E_o , E_e) точно перпендикулярными друг к другу.

Само собой разумеется, что эти результаты и соответствующие результаты для общего случая двуосного кристалла могут быть установлены и чисто аналитическим путем. Для этой цели нужно скомбинировать предыдущие уравнения для u'_b и u''_b с уравнением Френеля. Если обозначить направляющие косинусы между осями симметрии кристалла (или, точнее, его диэлектрического тензора) X_1 , X_2 , X_3 с осями X , Y , Z через γ_{ik} (например $\gamma_{12} = \cos(X_1, Y)$), то получают следующие соотношения между составляющими волновой нормали n_b относительно обеих систем осей:

$$n_1 = n_x \gamma_{11} + n_y \gamma_{12} + n_z \gamma_{13} \text{ и т. д.}$$

или, принимая во внимание, что $n_x = \cos \theta_b$, $n_y = \sin \theta_b$, $n_z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \gamma_{11} \cos \theta_b + \gamma_{12} \sin \theta_b, \\ n_2 &= \gamma_{21} \cos \theta_b + \gamma_{22} \sin \theta_b, \\ n_3 &= \gamma_{31} \cos \theta_b + \gamma_{32} \sin \theta_b. \end{aligned} \right\}$$

Подставив эти значения в уравнение Френеля

$$\frac{n_1^2}{u_b^2 - u_1^2} + \frac{n_2^2}{u_b^2 - u_2^2} + \frac{n_3^2}{u_b^2 - u_3^2} = 0$$

и пользуясь равенством

$$u_b^2 = \frac{u_a^2}{\sin^2 \theta_a} \sin^2 \theta_b,$$

получаем уравнение для определения двух возможных значений угла рефракции θ_b .

После того, как установлены направления и скорости распространения волн, а также направления основных колебаний, можно без труда определить отношение между амплитудами падающей, отраженной и обеих преломленных волн, примерно таким же образом, как и в рассмотренном в § 1 случае перпендикулярного падения.

§ 3. Отражение и преломление сферической волны на плоской граничной поверхности; распространение волн в беспроводной телеграфии.

1. Идеально проводящая плоскость. Отражение электромагнитных волн от плоскости раздела между изотропным поглощающим телом b и пустым пространством (или абсолютно прозрачным телом) a , как уже упоминалось выше, тем сильнее, чем больше коэффициент поглощения тела b , т. е. чем больше его постоянная затухания или эффективная электропроводность σ . В предельном случае $\sigma = \infty$, соответствующем так называемым идеальным или абсолютным проводникам, должно иметь место полное отражение при всех направлениях падающей волны; при этом проходящие колебания (как и в ранее рассмотренном случае полного внутреннего отражения) гасятся на бесконечно малом расстоянии от поверхности раздела.

Само собой разумеется, что идеальных проводников в действительности не существует. Однако легко показать, что для электромагнитных колебаний, частота которых лежит в определенных пределах, всякое металлическое тело можно трактовать приближенно, как идеальный проводник.

Коэффициенты отражения и прохождения b (относительно a) зависят на самом деле, как можно видеть из формул (15с), от отношения $\frac{\sigma}{\nu}$ ($\sigma = \sigma_1$). Уменьшение частоты следовательно эквивалентно в этом отношении увеличению проводимости. При $\frac{\sigma}{\nu} = \infty$ формулы (15с) принимают вид

$$E_z^- = -E_z^+, \quad E_z^b = 0, \quad (16)$$

$$H_z^- = +H_z^+, \quad H_z^b = 2 \frac{\mu_b}{\mu_a} H_z^a, \quad (16a)$$

совершенно независимо от того, достигается ли этот предельный случай благодаря тому, что $\sigma \rightarrow \infty$ или $\nu \rightarrow 0$. Следует однако заметить, что коэффициент поглощения металла, который при больших значениях σ выражается приближенно формулой

$$\zeta = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\mu\sigma\nu} \quad (=k^{(2)}),$$

при $\nu \rightarrow 0$ стремится к нулю. При этом, согласно (15) и (15a), проходящие колебания могут быть представлены в форме

$$\psi^b = \psi^{ob} e^{-\zeta x + i[\zeta(x \cos \theta_b + y \sin \theta_b) - \omega t]},$$

где

$$\sin \theta_b = \frac{\sin \theta_a}{n_b^{(1)}} \approx \frac{\sin \theta_a}{\sqrt{\frac{\mu \sigma}{v}}} \rightarrow 0,$$

т. е. $\theta_b \rightarrow 0$. Таким образом в этом приближении имеем:

$$\psi^b = \psi^0 e^{-\zeta x + i(\zeta x - \omega t)}.$$

Следовательно, связанные с E_z^b величины (H_x^b , H_y^b) должны обращаться в нуль на границе раздела внутри b , в то время как связанные с H_z величины (E_x^b , E_y^b) должны проникать в тело b тем глубже, чем меньше частота колебаний.

Противоположное влияние частоты колебаний на коэффициент отражения у металла и коэффициент поглощения его было отмечено нами уже в § 1. „Оптимальная“ частота, при которой колебания E_z и одновременно H_z хуже всего проникают в металл, и при которой следовательно последний лучше всего приближается к идеальному проводнику, не представляет собой определенного числа. Она зависит очевидно от допускаемой глубины проникновения, а также некоторым образом и от угла падения.

Граничные условия для случая идеального проводника легко установить непосредственно не только для плоских волн и плоских поверхностей, но и для произвольных электромагнитных процессов (в a) и произвольной формы граничной поверхности (ab). А именно в этом случае напряженности E^b и H^b должны одновременно обращаться в нуль, так как отличная от нуля напряженность электрического поля вызвала бы бесконечно сильный ток. Исчезновение E^b в силу уравнения $\operatorname{rot} E^b + \frac{1}{c} \frac{\partial H^b}{\partial t} = 0$ влечет за собою также исчезновение H^b . Таким образом в идеальном проводнике могут иметь место только поверхностные заряды и поверхностные токи, которые полностью экранируют внутренность проводника от электромагнитного поля. Это экранирующее действие состоит очевидно в уничтожении (или вернее компенсации) проникающего извне первичного поля вторичным полем, которое и обусловливается упомянутыми поверхностными зарядами и токами.

При этом, согласно общим граничным условиям (I') § 3, гл. I, касательная составляющая E^a и нормальная составляющая H^a должны обращаться в нуль, т. е.

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^a = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^a = 0, \quad (17)$$

в то время как, согласно (III'), плотности (свободного) заряда и тока связаны с нормальной составляющей E^a и касательной составляющей H^a соотношением:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^a = \frac{4\pi}{\epsilon_a} \eta, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}^a = 4\pi \mu_a \mathbf{k}. \quad (17a)$$

Формулы (17) представляют собою обобщение уравнений (16), т. е. формулы $E_x = 0$ и вытекающей отсюда согласно (11) формулы $H_x = 0$. Вектор \mathbf{n} означает здесь внешнюю нормаль к телу b .

Возвратимся теперь опять к рассмотренному ранее случаю бесконечной плоской граничной поверхности $x=0$, но только вместо плоских волн будем иметь в виду совершенно произвольный электромагнитный процесс в полупространстве a . При этом

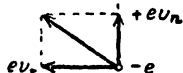
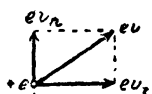


Рис. 23.

ось X проведем в это полупространство (a не в b , как раньше) так, чтобы она совпадала по направлению с нормалью \mathbf{n} . Для простоты положим $\epsilon_a = \mu_a = 1$, т. е. следовательно будем рассматривать a как пустоту и индекса a отбросим.

Легко показать, что такая идеально проводящая поверхность действует как идеальное зеркало в том смысле, что ее вторичное (или отраженное) поле тождественно с электромагнитным полем системы (фиктивных) электрических зарядов, в каждый дан-

ный момент распределенных симметрично относительно находящихся в a зарядов и имеющих противоположную величину.

Представим себе сначала, что первичное поле возбуждается точечным зарядом e , движущимся в полупространстве $x > 0$ по совершенно произвольно заданному закону. Его координаты x , y , z можно считать таким образом заданными функциями времени t . Так как это поле в отрицательном полупространстве уничтожается вторичным полем поверхностных зарядов и токов, то последнее должно быть тождественно с полем заряда $-e$, противоположного точечному заряду e с теми же координатами $x > 0$, y , z . С другой стороны это вторичное поле должно быть очевидно симметрично относительно поверхности $x=0$. Отсюда следует, что в положительном полупространстве оно должно совпадать с полем находящегося в отрицательном полупространстве точечного заряда $-e$ с координатами $-x$, y , z (рис. 23).

Легко убедиться, что граничные условия (17) для результирующего поля удовлетворяются тождественно, т. е. независимо от движения заряда e и его зеркального изображения. Это следует непосредственно из общих выражений для электромагнитного поля движущегося заряда, если принять при этом во внимание, что касательные составляющие (y , z) скорости и ускорения e и $-e$ совпадают, тогда как их нормальные составляющие равны и противоположны по знаку.

Составляющие напряженностей первичного и вторичного поля ψ^+ и ψ^- в точках $(\pm x, y, z)$, симметрично расположенных

относительно $x=0$ и в частности на самой плоскости $x=0$, связаны друг с другом соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} E_x^+ &= E_x^-, & E_y^+ &= -E_y^-, & E_z^+ &= -E_z^-, \\ H_x^+ &= -H_x^-, & H_y^+ &= H_y^-, & H_z^+ &= H_z^-. \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

Эти результаты остаются очевидно в силе для произвольной системы зарядов. Если такая система образована непрерывным распределением зарядов и токов с объемной плотностью ρ^+ и соответственно j^+ , то каждому элементу объема V соответствует в качестве зеркального изображения симметрично расположенный элемент объема такой же величины с плотностью заряда $\rho^- = -\rho^+$ и плотностью тока $j_x^- = +j_x^+$, $j_y^- = -j_y^+$, $j_z^- = -j_z^+$.

Следует заметить, что для этих результатов форма и свойства тела по другую сторону от идеальной проводящей плоскости совершенно не существенны. Они остаются приближенно правильными также в случае изогнутой поверхности, если только радиус кривизны последней велик по сравнению с расстоянием электрической системы от этой поверхности.

2. Электрическая и магнитная антенна в случае идеально проводящей земли. Рассмотрим теперь несколько подробнее простейший случай системы зарядов, именно элементарный гармонический осциллятор. Если расстояние x_0 последнего от зеркальной плоскости весьма велико по сравнению с длиной волны λ излучаемых колебаний, то мы получаем схематическое изображение точечного источника света, который отражается от плоскости $x=0$. При бесконечно большом расстоянии мы приходим к ранее исследованному случаю отражения плоских волн. Противоположный случай весьма малых расстояний соответствует приближенно соотношениям, которые осуществляются в беспроволочной телеграфии; при этом передающая антенна схематически представлена осциллятором, а поверхность земли или моря — проводящей плоскостью.

Обычно применяемые антенны можно считать электрическими осцилляторами с неподвижной вертикальной или горизонтальной осью. Можно однако вместо таких „открытых антенн“ пользоваться замкнутыми „рамочными“ антеннами, которые схематически представляются при помощи элементарных магнитных осцилляторов.

В случае электрической антенны с вертикальной осью колебания и их зеркальные изображения имеют одинаковую фазу, так как в этом случае зеркальное изображение осуществляется посредством перемены знака заряда и направления его движения на противоположные ($e^- = -e^+$, $v^- = -v^+$). Электрический импульс $\left(e \frac{v}{c} \right)$ и электрический момент $p \left(ev = \frac{dp}{dt} \right)$ должны

при этом оставаться неизменными (см. рис. 24). Таким образом, зеркальное отражение — поскольку передающая антенна находится в непосредственной близости к идеально проводящей земле — эквивалентно удвоению этой антенны или точнее ее электрического момента, а следовательно и напряженности электрического и магнитного поля во всем верхнем полупространстве. Энергия излучения в этом полупространстве благодаря присутствию „идеально отражающей“ земли увеличивается в 4 раза, или, если вычислить ее для всего пространства, оказывается удвоенной.

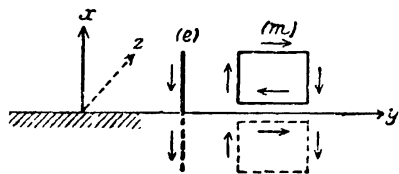


Рис. 24.

Подобные соотношения получаются и в случае магнитной антенны с горизонтальной осью (рис. 24).

В случае горизонтальной электрической антенны или вертикальной магнитной, излучение,

а также электромагнитное поле — исключая соседние точки — в первом приближении исчезает (см. ниже).

Электромагнитное поле гармонического электрического осциллятора для достаточно больших расстояний (т.е. в волновой зоне) определяется формулой (35) на стр. 163 первого тома. Электрическое поле вертикальной электрической антенны с эффективным (удвоенным) моментом $p_x = p_0 e^{-i\omega t}$ ($p_y = p_z = 0$) выражается следовательно вблизи поверхности земли ($x = 0$) формулой:

$$E^{(e)} = E_x^{(e)} = \frac{k^2 p_x}{R} e^{ikR}, \quad \left(k = \frac{\omega}{c}, R = \sqrt{y^2 + z^2} \right); \quad (18)$$

магнитное поле получается отсюда при помощи соотношения

$$H^{(e)} = R_0 \times E^{(e)}, \quad (R_0 = R : R).$$

С другой стороны, в случае горизонтальной магнитной антенны с такой же частотой колебаний и эффективным магнитным моментом $m = m_x = m_0 e^{-i\omega t}$ ($m_y = m_z = 0$), согласно (54а), стр. 181, том I, мы имеем:

$$E^{(m)} = E_z^{(m)} = -k^2 m_x \frac{y}{R^3} e^{ikR}$$

или если перейти к полярным координатам в плоскости $x = 0$, выбрав в качестве полярной оси направление y ($y = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$):

$$E^{(m)} = -\frac{k^2 m_x}{R} e^{ikR} \cos \varphi; \quad (18a)$$

при этом соотношение между E и H остается неизменным.

Эти формулы показывают, что комбинация электрической вертикальной антенны и магнитной горизонтальной может обус-

ловить направленное излучение. При этом фазы колебаний должны быть или равны или противоположны, а амплитуды p_0 и m_0 — численно совпадать. Например, при $m_s = -p_s$ получаем следующее результирующее поле (вблизи поверхности):

$$|E| = |E^e + E^m| = \frac{k^2}{R} p_0 (1 + \cos \varphi),$$

т. е.,

$$|E| = 2 \frac{k^2}{R} p_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (18b)$$

Зависимость интенсивности излучения $|E|^2$ от азимута φ для только что рассмотренных трех случаев представлена графически на рис. 25 (радиус-вектор диаграммы пропорционален величине $|E|^2$ для соответствующих направлений).

Эти результаты представляют только весьма грубое приближение к тем соотношениям, которые наблюдаются в действительности при распространении радиоволн (т. е. электромагнитных

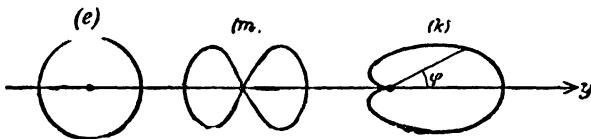


Рис. 25.

волн беспроводной телеграфии и телефонии). Главный источник появляющихся при этом усложнений лежит не столько в сферической форме земли, сколько в ее сравнительно малой электропроводности.

Поверхность земли (а также поверхность моря) представляет собою весьма несовершенное зеркало не только для быстрых световых колебаний, но также и для сравнительно медленных радио-колебаний. Чтобы учесть это обстоятельство, мы должны вернуться к точной постановке вопроса предыдущего параграфа, т. е. рассматривать землю как однородное тело с комплексной диэлектрической постоянной $\varepsilon = \varepsilon_0 + 2i \frac{\sigma}{\nu} \cong \frac{2i\sigma}{\nu}$. Однако в про-

тивоположность нашей предыдущей теории, в которой источник падающих волн считался бесконечно удаленным, мы должны теперь локализовать этот источник в виде некоторого элементарного осциллятора, находящегося на небольшом расстоянии от земной поверхности. При этом поверхность земли мы будем считать плоской, а ось осциллятора — вертикальной („вертикальная электрическая антенна“).

3. Распространение радиоволн от вертикальной электрической антенны.¹ Влияние земли (или моря) на распространение электромагнитных волн может быть учтено наиболее просто, если рассматривать землю как плоское неидеальное зеркало, с отражающей способностью, отличной от 1 и зависящей от угла отражения $\theta = \theta_a$. При этом коэффициент отражения можно рассчитывать по тем же формулам Френеля (13), (13а), как и в случае плоских волн соответствующего направления. Таким образом электромагнитное поле в среде a (воздухе) складывается из части ψ_a , непосредственно обусловленной шаровыми волнами, исходящими из источника колебаний S_a (рис. 26), и части ψ_b , обусловленной отраженными волнами, которые можно представлять себе,

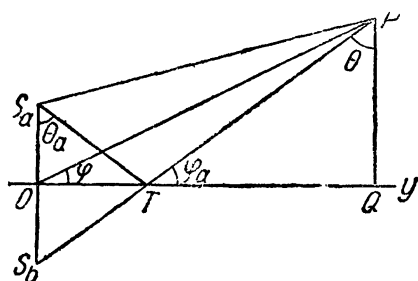


Рис. 26.

как шаровые волны, исходящие из точки S_b , являющейся зеркальным изображением S_a . Единственное отличие от случая идеальной отражающей плоскости заключается в том, что амплитуда отраженных колебаний зависит специфическим образом, определяемым формулами (15 с), от их направления.

Подразумевая под ψ поляризационный потенциал Z , или вернее его вертикальную слагающую Z_x (в случае осциллятора с вертикальной осью она одна лишь отлична от нуля), мы можем следовательно положить

$$\psi = \psi_0 \left\{ \frac{e^{ik_a R_a}}{R_a} + f(\theta) \frac{e^{ik_b R_b}}{R_b} \right\}, \quad (19)$$

где $R_a = S_a P$ — расстояние рассматриваемой точки от источника, $R_b = S_b P$ — от его зеркального изображения; ψ_0 — амплитуда электрического момента осциллятора (в дальнейшем мы будем полагать ее равной 1); наконец функция $f(\theta)$ представляет собой коэффициент отражения плоских волн, падающих на поверхность под углом $\theta_a = \theta$ к нормали. При этом под коэффициентом отражения подразумевается отношение нормальных слагающих поляризационного потенциала отраженной и падающей волн

$$f = \frac{\psi^-}{\psi^+}.$$

Так как в случае плоских волн, распространяющихся в пустоте (с которой мы можем отождествить среду a , т. е. воздух), напряженность электрического поля равна поляризационному потенциалу, умноженному на k_a^2 (см. т. I, стр. 166), то отношение

¹ Cp. K. F. Niessen, Ann. der Physik 18, 893 (1933).

$\psi^- : \psi^+$ можно заменить отношением нормальных слагающих вектора E , т. е. положить

$$f = \frac{E_x^-}{E_x^+}.$$

Магнитные силовые линии представляют собой в рассматриваемом случае (так же как и в случае вертикальной антенны в присутствии идеально отражающей плоскости) круги с вертикальной осью, проходящей через осциллятор. Таким образом вектор H параллелен поверхности земли; в точке T , где происходит отражение волн, направляющихся окольным путем к точке P , вектор H можно считать поэтому направленным по горизонтальной оси Z , перпендикулярной к плоскости S_aTP . Мы можем следовательно воспользоваться для вычисления f первой из формул (11а) (с $\epsilon = \mu = 1$) и второй из формул (13а) настоящей главы. В результате получаем

$$f = \frac{\operatorname{tg}(\theta_a - \theta_b)}{\operatorname{tg}(\theta_a + \theta_b)}.$$

Введем теперь вместо углов θ_a и θ_b углы $\varphi_a = \frac{\pi}{2} - \theta_a$, $\varphi_b = \frac{\pi}{2} - \theta_b$, образуемые падающими и преломленными лучами (в точке T) с горизонтальной плоскостью. На практике угол φ_a бывает чрезвычайно малым (поскольку горизонтальное расстояние OQ между передатчиком S_a и приемником P велико в сравнении с их высотой x_a и x над поверхностью земли).

Что касается угла φ_b , то при исчезающе малых значениях φ_a он сохраняет конечное и притом, вообще говоря, комплексное значение. Имея в виду большие расстояния OQ , мы можем поэтому положить

$$\operatorname{tg}(\theta_a - \theta_b) = \operatorname{tg}(\varphi_b - \varphi_a) = \operatorname{tg} \varphi_b - \frac{\varphi_a}{\cos^2 \varphi_b} = -\frac{\cos \varphi_b \sin \varphi_b - \varphi_a}{\cos^2 \varphi_b}$$

и

$$\operatorname{tg}(\theta_a + \theta_b) = -\operatorname{tg}(\varphi_a + \varphi_b) = -\operatorname{tg} \varphi_b - \frac{\varphi_a}{\cos^2 \varphi_b} = -\frac{\cos \varphi_b \sin \varphi_b + \varphi_a}{\cos^2 \varphi_b},$$

т. е. следовательно

$$f = \frac{\varphi_a - \cos \varphi_b \sin \varphi_b}{\varphi_a + \cos \varphi_b \sin \varphi_b}$$

или в виду соотношения $k_b \cos \varphi_b = k_a \cos \varphi_a = k_a \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cong k_a$

$$\text{и } \sin \varphi_b = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_b} \cong \sqrt{1 - \frac{k_a^2}{k_b^2}}$$

$$f = \frac{\varphi_a - \frac{k_a}{k_b} \sqrt{1 - \frac{k_a^2}{k_b^2}}}{\varphi_a + \frac{k_a}{k_b} \sqrt{1 - \frac{k_a^2}{k_b^2}}}. \quad (20)$$

Угол φ_a можно заменить без заметной погрешности (при больших расстояниях OQ и малых возвышениях QP) углом $\varphi = POQ$ или его тангенсом $\frac{x}{R}$. Так как при этом $\frac{x}{R} \ll \left| \frac{k_a}{k_b} \right|$, то предыдущая формула сводится к

$$f = -1 + \frac{2k_b^2}{k_a \sqrt{k_b^2 - k_a^2}} \frac{x}{R}, \quad (20a)$$

а выражение (19) для поляризационного потенциала принимает вид

$$\psi = \psi_0 \left(\frac{e^{ik_a R_a}}{R_a} - \frac{e^{ik_a R_b}}{R_b} \right) + \frac{2k_b^2}{k_a \sqrt{k_b^2 - k_a^2}} \psi_0 e^{ik_a R_b} \frac{x}{R_b^2}. \quad (21)$$

С той же степенью точности можно заменить в этом выражении разность $\frac{e^{ik_a R_a}}{R_a} - \frac{e^{ik_a R_b}}{R_b}$ через $\frac{1}{R} (e^{ik_a R_a} - e^{ik_a R_b})$ и далее положить $R_a = R - x_a \sin \varphi = R - \frac{x_a x}{R}$, $R_b = R + x_a \sin \varphi = R + \frac{x_a x}{R}$, что приводит к следующему упрощенному выражению для ψ :

$$\psi = -\psi_0 \frac{e^{ik_a R}}{R} 2i \sin \frac{k_a x_a x}{R} - \psi_0 \frac{2k_b^2}{k_a \sqrt{k_b^2 - k_a^2}} \frac{x}{R^2} e^{ik_a R}$$

или, в еще более грубом приближении (при $\sin \varphi = \varphi$):

$$\psi = -2 \psi_0 e^{ik_a R} \frac{x}{R^2} \left(ik_a x_a + \frac{k_b^2}{k_a \sqrt{k_b^2 - k_a^2}} \right). \quad (21a)$$

Из формулы (21) получается следующее выражение для вертикальной слагающей напряженности электрического поля¹

$$E_x = k_a^2 \psi_0 \left\{ \frac{e^{ik_a R_a}}{R_a} - \frac{e^{ik_a R_b}}{R_b} - \frac{2ie^{ik_a R}}{R^2} \left[\frac{k_b^2}{k_a(k_a^2 - k_b^2)} + \frac{xk_b^2}{\sqrt{k_a^2 - k_b^2}} \right] \right\} \quad (21b)$$

Совершенно аналогичным образом можно вывести приближенные формулы для электромагнитного поля рамочной антенны с вертикальной осью, т. е. вертикального магнитного осциллятора. При этом коэффициент отражения f определяется формулой

$$f = \frac{\sin(\theta_a - \theta_b)}{\sin(\theta_a + \theta_b)}$$

[ср. первую из формул (11) и вторую из (13)], которая легко приводится к виду

$$f = \frac{\sin \varphi_b - \cos \varphi_b \cdot \varphi_a}{\sin \varphi_b + \cos \varphi_b \cdot \varphi_a} = \frac{\sqrt{\frac{k_b^2}{k_a^2} - 1} - \varphi_a}{\sqrt{\frac{k_b^2}{k_a^2} - 1} + \varphi_a}$$

Несколько сложнее, но в принципе столь же просто выводятся формулы для горизонтальных антенн.

Все эти формулы дают правильное описание электромагнитного поля лишь на больших расстояниях от источника, так как лишь при этом условии коэффициент отражения f оказывается возможным вычислять по формулам, относящимся к плоским волнам.

В непосредственном соседстве с осциллятором они не применимы, особенно в том случае, когда высота осциллятора над поверхностью земли мала в сравнении с длиной волны ($\lambda = \frac{2\pi}{k_a}$).

В предельном случае осциллятора, расположенного на самой поверхности, оказывается необходимым исходить для точного описания электромагнитного поля не из обыкновенных плоских волн, а из так называемых „поверхностных волн“, впервые изученных Ценнеком.

§ 4. Поверхностные волны и более точная теория распространения радиоволн вблизи земной поверхности.

1. Плоские поверхностные волны (Ценнек). Дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (22)$$

¹ Eckersley, Journ. Inst. El. Eng. 65, 600 (1927).

которым определяется распространение гармонических колебаний, в случае двух сред (a , b), граничащих друг с другом вдоль плоскости $x=0$, может быть удовлетворено, вместе с пограничными условиями, выражениями следующего вида

$$\psi_h = \varphi_h(x) e^{i(hy - \omega t)} \quad (h = a, b), \quad (23)$$

представляющими собой два различных колебательных процесса (один в среде a , другой в среде b), которые распространяются вдоль поверхности раздела с общей скоростью $\frac{\omega}{q}$ в направлении оси y (последнюю можно заменить осью z или любой другой прямой, перпендикулярной к x).

Подставляя (23) в уравнение (22) получаем следующие уравнения для функций $\varphi_h(x)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x^2} + (k_h^2 - q^2) \varphi_h = 0,$$

общие решения которых имеют вид:

$$\varphi_h = C'_h e^{+V_{q^2 - k_h^2} x} + C''_h e^{-V_{q^2 - k_h^2} x}.$$

Со знаком $+$ мы будем брать те корни, которые имеют положительную вещественную часть [одна из двух величин k_h является комплексной, а при таких условиях и параметр q должен иметь комплексное значение, что соответствует продольному затуханию волнового процесса (23)]. Для того, чтобы при удалении от граничной поверхности $x=0$ на бесконечность ($x = \pm \infty$) выражения φ_h оставались конечными, необходимо положить при этом $C'_a = 0$ ($C''_a = C_a$) и $C'_b = 0$ ($C''_b = C_b$). Мы получаем таким образом

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a &= C_a e^{-V_{q^2 - k_a^2} x} & (x > 0), \\ \varphi_b &= C_b e^{+V_{q^2 - k_b^2} x} & (x < 0). \end{aligned} \right\} \quad (23a)$$

А priori можно представить себе две разновидности волн рассматриваемого типа, а именно такие, у которых магнитное поле параллельно оси z (а электрическое, следовательно, лежит в плоскости xy), и такие, у которых электрическое поле параллельно оси z (а магнитное лежит в плоскости xy).

Полагая в первом случае $\psi = H_z = H$, имеем согласно общему уравнению $\operatorname{rot} H - \frac{e}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0$ для среды с магнитной проницаемостью 1,

$$\frac{i\omega\epsilon}{c} E_x = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{i\omega\epsilon}{c} E_y = +\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Граничные условия $\Delta H_x = 0$ и $\Delta E_y = 0$ могут быть следовательно записаны в виде

$$\psi_a = \psi_b, \quad \frac{1}{k_a^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_a = \frac{1}{k_b^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_b \quad \text{при } x = 0$$

(так как $\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} = k^2$). Подставляя сюда выражения (23а), получаем:

$$C_a = C_b$$

и

$$\frac{1}{k_a^2} \sqrt{q^2 - k_a^2} + \frac{1}{k_b^2} \sqrt{q^2 - k_b^2} = 0,$$

откуда

$$q = \frac{k_a k_b}{\sqrt{k_a^2 + k_b^2}}. \quad (24)$$

Хотя последнее выражение имеет смысл и при вещественных значениях обоих параметров k_a и k_b , однако соответствующий волновой процесс утрачивает в этом случае характер „поверхностных“ волн, т. е. колебаний, амплитуда которых убывает в обе стороны от плоскости $x=0$, вдоль которой они распространяются (разности $q^2 - k_a^2$ и $q^2 - k_b^2$ принимают при этом чисто мнимые значения $-\frac{k_a^4}{k_a^2 + k_b^2}$ и $-\frac{k_b^4}{k_a^2 + k_b^2}$).

Таким образом, для возможности существования поверхностных волн необходимо, чтобы по крайней мере одна из обеих сред была проводящей (или поглощающей). Резюмируя, мы можем в этом случае охарактеризовать рассматриваемые волны следующими формулами:

$$H = H_0 e^{-\sqrt{q^2 - k_a^2} x + i(qy - \omega t)} \quad (x > 0),$$

$$H = H_0 e^{+\sqrt{q^2 - k_b^2} x + i(qy - \omega t)} \quad (x < 0),$$

$$E_y = \frac{c \sqrt{q^2 - k_a^2}}{i \omega \varepsilon_a} H \quad (x > 0),$$

$$E_y = -\frac{c \sqrt{q^2 - k_b^2}}{i \omega \varepsilon_b} H \quad (x < 0),$$

и

$$E_x = \frac{cq}{\omega \varepsilon} H \quad (x \geq 0). \quad (24a)$$

Пользуясь формулой (24), получаем

$$\left. \begin{aligned} E_y &= \frac{k_a}{k_b} E_x & \text{при } x > 0 \\ E_y &= \frac{k_b}{k_a} E_x & \text{при } x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (24b)$$

Переходя ко второму случаю, положим $\psi = E_z = E$ и воспользуемся уравнением $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$, т. е.

$$\frac{i\omega H_x}{c} = -\frac{\partial E}{\partial y}, \quad \frac{i\omega H_y}{c} = \frac{\partial E}{\partial z}.$$

Отсюда сразу же явствует, что в этом случае получение поверхностных волн является невозможным — если только магнитная проницаемость обеих сред равна 1 или каким-либо вещественным числам.

При комплексных значениях магнитной проницаемости хотя бы одной из сред мы могли бы определить параметр q совершенно так же, как и в предыдущем случае.

2. Цилиндрические поверхностные волны и представление произвольного волнового процесса посредством их суперпозиции (Зоммерфельд). Вернемся к общему дифференциальному уравнению волн (22) и рассмотрим такие его решения, которые обладают цилиндрической симметрией и которые получаются, если положить

$$\psi = u(x) \cdot v(r), \quad (25)$$

где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ означает расстояние от оси x .

В этом случае имеем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right)$$

и точно так же

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{z^2}{r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right).$$

Таким образом

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 (\sqrt{r} \psi)}{\partial r^2} + \frac{1}{4r^2} \psi,$$

и следовательно

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + k^2 \psi = 0, \quad (26)$$

или

$$\frac{\partial^2(\psi V \bar{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\psi V \bar{r})}{\partial r^2} + \left(k^2 + \frac{1}{4r^2}\right) \psi V \bar{r} = 0. \quad (26a)$$

Подставив сюда выражение ψ из (25) и разделив на $\psi V \bar{r}$, получаем

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{v V \bar{r}} \frac{\partial^2(v V \bar{r})}{\partial r^2} + k^2 + \frac{1}{4r^2} = 0.$$

Так как u зависит только от x , а v — только от r , то отсюда следует

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 = -\frac{1}{v V \bar{r}} \frac{\partial^2(v V \bar{r})}{\partial r^2} - \frac{1}{4r^2} = l^2,$$

где l — некоторая постоянная, т. е.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = (l^2 - k^2) u$$

и

$$\frac{d^2(v V \bar{r})}{dr^2} + \left(l^2 + \frac{1}{4r^2}\right) v V \bar{r} = 0$$

или

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + l^2 v = 0. \quad (26b)$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$u = C_1 e^{+V \sqrt{l^2 - k^2} x} + C_2 e^{-V \sqrt{l^2 - k^2} x}$$

и

$$v = C_3 J(lr) + C_4 K(lr),$$

где $J(\rho)$ и $K(\rho)$ суть бесселевы функции (нулевого порядка) соответственно первого и второго рода, т. е.

$$J(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho \cos \varphi} d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\rho^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}, \quad (26c)$$

и

$$K(\rho) = \frac{1}{i} \int_0^{i\infty} e^{i\rho \cos \varphi} d\varphi = \lg \frac{2\gamma i}{\rho} + O(\rho^2) \quad (\gamma = 0,5615) \quad (26d)$$

Предыдущие формулы могут быть использованы для построения поверхностных волн с цилиндрической симметрией, распро-

страняющихся вдоль плоскости $x=0$ во все стороны от оси x . Для того, чтобы амплитуда этих волн обращалась в нуль как при $x=+\infty$, так и при $x=-\infty$, величину ψ нужно определить формулой вида

$$\left. \begin{aligned} \psi &= C_a e^{-\sqrt{r^2 - k_a^2} x} J(lr) \text{ или } C_a e^{-\sqrt{r^2 - k_a^2} x} K(lr) \text{ при } x > 0 \\ \psi &= C_b e^{+\sqrt{r^2 - k_b^2} x} J(lr) \text{ или } C_b e^{+\sqrt{r^2 - k_b^2} x} K(lr) \text{ при } x < 0, \end{aligned} \right\} (27)$$

причем в случае радиального множителя $J(lr)$ функция ψ остается конечной при $r=0$, а в случае множителя $K(lr)$ — стремится логарифмически к бесконечности при $r \rightarrow 0$; в обоих случаях она обращается в нуль при $r = \infty$.

Если магнитная проницаемость обоих тел (a, b) равна 1 (или вообще какой-либо вещественной величине), то, так же, как и в рассмотренном ранее случае (§ 3, п. 3), поверхностные волны могут распространяться лишь при условии параллельности магнитных силовых линий поверхности $x=0$. Из симметрии задачи непосредственно следует, что эти силовые линии должны представлять собой систему коаксиальных кругов (общей осью которых является ось x -ов). Полагая $\psi = H = H_\alpha$ (α — азимутальный угол, определяемый формулами $y = r \cos \alpha$, $z = r \sin \alpha$), мы можем воспользоваться для вычисления электрического поля (силовые линии которого лежат в меридиональных плоскостях x, r) формулами

$$-\frac{i\omega\epsilon}{c} E_x = \frac{1}{r} \frac{\partial(rH)}{\partial r}, \quad \frac{i\omega\epsilon}{c} E_r = \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (27a)$$

которые непосредственно вытекают из уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{i\omega\epsilon}{c} \mathbf{E} = 0$ при представлении его в цилиндрических координатах и соответствуют формулам $\frac{i\omega\epsilon}{c} E_x = -\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{i\omega\epsilon}{c} E_y = \frac{\partial H}{\partial x}$ предыдущего параграфа.¹ Граничные условия $\Delta H = 0$ и $\Delta E_r = 0$ при $x=0$ сводятся таким образом к тем же самым формулам $\psi_a = \psi_b$ и $\frac{1}{k_a^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_a = \frac{1}{k_b^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_b$, как и в предыдущем случае, и, в виду одинакового характера зависимости ψ от x (независимо от ради-

¹ См. „Математическое дополнение“ § 1. Впрочем эти формулы легко вывести непосредственно. Так например, применяя формулу $\int (\operatorname{rot} \mathbf{H})_n dS = \oint H_\tau ds$ к кругу радиуса r , имеем, $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r E_x 2\pi r dr = H 2\pi r$, откуда дифференцированием по r получаем первую из формул (27a).

альных множителей $J(lr)$ или $K(lr)$, приводят к той же самой формуле для параметра l (ранее обозначавшегося через q):

$$l = \frac{k_a k_b}{\sqrt{k_a^2 + k_b^2}}.$$

Имея в виду применение цилиндрических волн к описанию электромагнитного поля точечного осциллятора, расположенного на земной поверхности, мы рассмотрим более общие решения волнового уравнения (22), получающиеся путем суперпозиции цилиндрических волн вида

$$\psi = Ce^{\pm \sqrt{r^2 - k^2} x} J(lr), \quad (28)$$

где параметр l может принимать какие угодно — в том числе и комплексные значения. Рассматривая C как произвольную функцию от l , можно представить общее решение уравнения (22), обращающееся в нуль при $x = \pm \infty$, посредством интеграла

$$\psi = \int_0^{\infty} C(l) J(lr) e^{\mp \sqrt{r^2 - k^2} x} l dl \quad (x \geq 0), \quad (28a)$$

где знак минус берется для $x > 0$, а плюс — для $x < 0$,¹ причем в первом случае постоянная k и функция C должны быть снабжены индексом a , а во втором индексом b . Путь интегрирования в комплексной области l может быть выбран произвольно.

Это интегральное представление совершенно аналогично интегральному представлению (Фурье) решения уравнения (22) посредством плоских синусоидальных волн, которые были введены в § 4, гл. IV [см. особенно (39a) и (41a)]. При этом координата x играет роль времени t , а r — роль пространственных координат; экспоненциальная функция (e^{itr}) заменена здесь бесселевой функцией $J(lr)$. Если для $x=0$ функция $\psi(x, r)$ известна, то она может быть вычислена по формуле (28a) для любого значения x . Для этого необходимо только знать „амплитудную функцию“ $C(l)$, входящую в интегральное выражение Бесселя:

$$\psi(0, r) = \int_0^{\infty} C(l) J(lr) l dl. \quad (28b)$$

Эта амплитудная функция определяется формулой

$$C(l) = \int_0^{\infty} \psi(0, r) J(lr) r dr \quad (28c)$$

совершенно аналогично соответствующей формуле интегрального выражения Фурье.

¹ Вещественная часть квадратного корня должна быть положительной.

Следует заметить, что для случая двух переменных (y, z) интегральное представление Бесселя непосредственно получается из интегрального представления Фурье. Именно, полагая

$$\psi(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(m, n) e^{i(my + nz)} dm dn,$$

получаем

$$C(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y, z) e^{-i(my + nz)} dy dz.$$

Введем теперь вектор l с составляющими $l_y = m$, $l_z = n$ и обозначим угол (l, y) через α . Предыдущие интегралы могут быть при этом представлены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \psi(y, z) \equiv \psi(r, \varphi) &= \int_0^{\infty} l dl \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i l r \cos(\varphi - \alpha)} C(l, \alpha) d\alpha, \\ C(l, \varphi) \equiv C(m, n) &= \int_0^{\infty} r dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i l r \cos(\varphi - \alpha)} \psi(r, \varphi) d\varphi. \end{aligned} \right\} (28d)$$

В частном случае, когда ψ зависит только от $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, они приводятся с помощью (26с) к формулам (28b) и (28с).

3. Применение общих формул к случаю вертикальной электрической антенны. Прежде всего применим последние формулы к представлению функции

$$\psi = \psi_0 \frac{e^{ikR}}{R},$$

являющейся простейшим радиально симметричным решением волнового уравнения (22). При этом имеем

$$\psi(0, r) = \psi(r) = \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r}.$$

и следовательно

$$C(l) = \psi_0 \int_0^{\infty} e^{ikr} J(lr) dr = \frac{\psi_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{ikr \left(1 + \frac{l}{k} \cos \varphi\right)} dr.$$

Предположим теперь, что k есть комплексная величина ($= k^{(1)} + ik^{(2)}$) и что $k^{(2)}$ — ее мнимая часть — положительна. При этом получаем

$$\int_0^{\infty} e^{ikr \left(1 + \frac{l}{k} \cos \varphi\right)} dr = \frac{1}{ik \left(1 + \frac{l}{k} \cos \varphi\right)}$$

и по известной формуле интегрального исчисления

$$C(l) = \frac{\psi_0}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \frac{l}{k} \cos \varphi} = \frac{\psi_0}{ik} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{k^2}}} = \frac{\psi_0}{\sqrt{l^2 - k^2}},$$

или окончательно

$$\psi_0 \frac{e^{ikR}}{R} = \psi_0 \int_0^\infty \frac{l dl}{\sqrt{l^2 - k^2}} J_0(lr) e^{\mp \sqrt{l^2 - k^2} x} \quad (29)$$

Мы будем в дальнейшем подразумевать под этой функцией вертикальную слагающую поляризационного потенциала, создаваемого рассматриваемым осциллятором в однородной среде. Прямоугольные слагающие электромагнитного поля, определяемого подобным поляризационным потенциалом, выражаются формулами

$$H_x = 0, \quad H_y = -\frac{i\omega\epsilon}{c} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i\omega\epsilon}{c} \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$E_x = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad E_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad E_z = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}.$$

из которых непосредственно вытекают их выражения в полярных координатах (r, α, z) ;

$$H_x = 0, \quad H_r = 0, \quad H_\alpha = \frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r}, \quad (30)$$

$$E_x = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad E_r = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r}, \quad E_\alpha = 0 \quad (30a)$$

Эти формулы остаются справедливыми и в применении к полю, которое получается в присутствии земли, поскольку в обоих случаях магнитные силовые линии остаются кругами, а электрические лежат в меридиональных плоскостях. Граничные условия $\Delta H_\alpha = 0, \Delta E_r = 0$ могут быть следовательно записаны в виде $\Delta \left(k^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0, \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r} = 0$, или так как дифференцирование по r не играет при этом существенной роли

$$\left. \begin{aligned} k_a^2 \psi_a &= k_b^2 \psi_b, \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_a &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_b. \end{aligned} \right\} \quad (30b)$$

Мы применим сначала эти условия к „первичному потенциалу“ (29). Мы предположим при этом, что осциллятор находится на

самой граничной поверхности, в начале координат, и соответственно этому положим

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{C_a}{R} e^{ik_a R} & (x > 0), \\ \psi &= \frac{C_b}{R} e^{ik_b R} & (x < 0), \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где коэффициенты C удовлетворяют соотношению $k_a^2 C_a = k_b^2 C_b$ [второе из соотношений (30b) удовлетворяется автоматически]. Для определенности мы нормируем эти коэффициенты по формуле $\frac{1}{2}(C_a + C_b) = 1$, откуда следует

$$C_a = \frac{2k_b^2}{k_a^2 + k_b^2}, \quad C_b = \frac{2k_a^2}{k_a^2 + k_b^2}. \quad (31a)$$

Полный потенциал ψ (в присутствии земли) может быть выражен формулами:

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= \int_0^\infty \left[\frac{C_a l}{\sqrt{l^2 - k_a^2}} + f_a(l) \right] J(lr) e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x} dl, & (x > 0), \\ \psi_b &= \int_0^\infty \left[\frac{C_b l}{\sqrt{l^2 - k_b^2}} + f_b(l) \right] J(lr) e^{+\sqrt{l^2 - k_b^2} x} dl & (x < 0), \end{aligned} \right\}$$

где $f_a(l)$ и $f_b(l)$ две функции, обращающиеся в нуль при $k_a = k_b$ (т. е. в предельном случае однородной среды) и подлежащие определению из граничных условий (30b).

Первое из них дает, в связи с (31a),

$$k_a^2 f_a(l) - k_b^2 f_b(l) = \frac{2k_a k_b^2}{k_a^2 + k_b^2} \left(\frac{1}{\sqrt{l^2 - k_b^2}} - \frac{1}{\sqrt{l^2 - k_a^2}} \right).$$

Что касается второго, то, автоматически выполняясь для первичного потенциала (31), оно сводится к

$$\sqrt{l^2 - k_a^2} f_a(l) + \sqrt{l^2 - k_b^2} f_b(l) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} f_a &= \frac{l}{\sqrt{l^2 - k_a^2}} \frac{2k_a^3 k_b^2}{k_a^2 + k_b^2} \frac{\sqrt{l^2 - k_a^2} - \sqrt{l^2 - k_b^2}}{k_b^2 \sqrt{l^2 - k_a^2} + k_a^2 \sqrt{l^2 - k_b^2}} \\ f_b &= \frac{l}{\sqrt{l^2 - k_b^2}} \frac{2k_a^2 k_b^3}{k_a^2 + k_b^2} \frac{\sqrt{l^2 - k_b^2} - \sqrt{l^2 - k_a^2}}{k_a^2 \sqrt{l^2 - k_b^2} + k_b^2 \sqrt{l^2 - k_a^2}} \end{aligned} \right\} (32a)$$

и окончательно

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= \int_0^\infty \frac{2k_b^2}{N} J(lr) e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x} dl, \quad (x > 0) \\ \psi_b &= \int_0^\infty \frac{2k_a^2}{N} J(lr) e^{+\sqrt{l^2 - k_b^2} x} dl, \quad (x < 0) \end{aligned} \right\} (33)$$

где

$$N = k_b^2 \sqrt{l^2 - k_a^2} + k_a^2 \sqrt{l^2 - k_b^2}. \quad (33a)$$

Заметим, что в предельном случае $k_b = \infty$ (идеально проводящая поверхность) $\frac{k_b^2}{N}$ сводится к $\frac{1}{\sqrt{l^2 - k_a^2}}$, что соответствует

$$\psi_a = \frac{2e^{ik_a R}}{R}, \text{ т. е. удвоению электромагнитного поля со стороны } a,$$

как и должно быть в этом случае (ψ_b обращается при этом в нуль).

Формулами (33), (33a) наша задача принципиально решается и сводится к определению значений предыдущих интегралов.

Вычисление этих значений может быть произведено по методу комплексного интегрирования.

Подинтегральные выражения в (33) имеют четыре особые точки, именно два полюса $l = \pm q$ при $N = 0$ и две точки разветвления $l = k_a$ и $l = k_b$. Рассмотрим первую часть интеграла, соответствующую обходу вокруг обоих полюсов в комплексной плоскости l . При помощи интегральных вычетов получаем для каждого из них в отдельности:

$$\oint \frac{J(lr)}{N} e^{-\sqrt{l^2 - k^2} x} dl = 2\pi i J(\pm qr) e^{-\sqrt{q^2 - k^2} x} \frac{\pm q}{\left(\frac{\partial N}{\partial l}\right)_{l=q}}$$

где

$$q^2 = \frac{k_a^2 k_b^2}{k_a^2 + k_b^2}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} q^2 - k_a^2 &= -\frac{k_a^4}{k_a^2 + k_b^2}, & q^2 - k_b^2 &= -\frac{k_b^4}{k_a^2 + k_b^2}, \\ \left(\frac{dN}{dl}\right)_{l=q} &= q \left(\frac{k_b^2}{\sqrt{q^2 - k_a^2}} + \frac{k_a^2}{\sqrt{q^2 - k_b^2}} \right) = \\ &= \frac{q}{i} \sqrt{k_a^2 + k_b^2} \left(\frac{k_b^2}{k_a^2} + \frac{k_a^2}{k_b^2} \right). \end{aligned}$$

Для обоих полюсов вместе взятых имеем, следовательно.

$$\begin{aligned} \oint \frac{J(lr)}{N} e^{-\sqrt{l^2 - k^2} x} l dl &= -\frac{2\pi}{\sqrt{k_a^2 + k_b^2}} \frac{k_a^2 k_b^2}{k_a^4 + k_b^4} [J(qr) + \\ &+ J(-qr)] e^{-\sqrt{q^2 - k^2} x}. \end{aligned} \quad (34)$$

При достаточно больших значениях аргумента $qr = \rho$, как известно, имеет место асимптотическое выражение

$$J(\rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ e^{i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} \right\},$$

так что

$$J(\rho) + J(-\rho) \cong \frac{2}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{i\rho - \frac{\pi}{4}}.$$

Отсюда видно, что выражение (34) на больших расстояниях от антенны представляет собою расходящиеся волны, амплитуда которых уменьшается обратно пропорционально корню квадратному из горизонтального расстояния r (если не учитывать экспоненциального затухания, обусловленного комплексностью параметра q , а тем самым и ρ).

Если предположить, что k_a^2 вещественно ($= \frac{\omega^2}{c^2}$), а k_b^2 — мнимым ($= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{2l\sigma_b}{v}$), то

$$\begin{aligned} \sqrt{q^2 - k_a^2} &= \pm i \frac{k_a^2}{\alpha + i\beta} = \pm (\beta + i\alpha) \frac{k_a^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \sqrt{q^2 - k_b^2} &= \pm \frac{(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{2\sigma_b}{v} \frac{\omega^2}{c^2}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha + i\beta = \sqrt{k_a^2 + k_b^2},$$

т. е.

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = k_a^2 + 2i \frac{\sigma_b}{\nu} \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Мы можем при этом считать α и β положительными и выбрать в предыдущих формулах верхний знак.

При $\frac{\sigma_b}{\nu} \gg 1$ приближенно имеем:

$$\alpha = \beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma_b}{\nu}} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\nu \sigma_b} = \zeta$$

[ср. (16b)], и следовательно

$$R[e^{-\sqrt{q^2 - k_a^2} x}] = e^{-\frac{k_a^2}{2\zeta} x} \quad (x > 0), \quad R[e^{+\sqrt{q^2 - k_b^2} x}] = e^{\zeta x}, \quad (x < 0)$$

В противоположном предельном случае $\left(\frac{\sigma_b}{\nu} \ll 1\right)$ следует учитывать также и (вещественную) диэлектрическую постоянную ϵ_s земли. При этом получаем

$$R[\sqrt{q^2 - k_a^2}] = 2\pi \frac{\sigma_b}{c} \frac{1}{(1 + \epsilon_s)^2}, \quad R[\sqrt{q^2 - k_b^2}] \cong 2\pi \frac{\sigma_b}{c} \frac{\epsilon_s}{(1 + \epsilon_s)^2}.$$

Необходимо отметить, что определяемые формулой (34) цилиндрические поверхностные волны сами по себе не характеризуют электромагнитное поле осциллятора; их надо рассматривать совместно с той частью интегралов ψ_a , ψ_b , которая получается методом комплексного интегрирования при учете соответствующих точек разветвления. Мы не будем однако останавливаться на более подробном рассмотрении этого вопроса.

§ 5. Волны в проводах.

1. Идеальные провода. После этого краткого обзора законов распространения волн без проводов, рассмотрим теперь передачу электромагнитных колебаний — или волн — вдоль металлических проводов. При этом мы сначала будем трактовать последние как систему бесконечно длинных параллельных цилиндров произвольного сечения и предполагать их сначала идеально проводящими.¹ Общее направление всех проводов

¹ Относящаяся к этому случаю и излагаемая ниже простая теория принадлежит А б р а г а м у (М. Абрагам).

должно совпадать с направлением распространения (z) электромагнитных волн во внешнем пространстве (которое мы полагаем пустым). Эти волны должны быть следовательно плоскими и синусоидальными. Однако, в противоположность рассмотренным ранее случаям подобного рода, амплитуда колебаний в плоскости волны должна быть переменной, и внутри идеальных проводов — поскольку речь идет о напряженности поля — должна обращаться в нуль.

Составляющие этой напряженности и всех других электромагнитных величин можно представить таким образом как функции координат и времени в форме:

$$\psi = \psi_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (35)$$

Амплитудная функция $\psi_0(x, y)$ должна быть при этом определена таким образом, чтобы вне проводов удовлетворялось дифференциальное уравнение

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

или, согласно (35),

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} = 0, \quad (35a)$$

и кроме того, чтобы на поверхности выполнялись граничные условия (17). Поверхностные плотности заряда (η) и тока (\mathbf{j}) определяются при этом по формулам (17a).

Можно представлять себе, что именно эти заряды и токи составляют физическую сущность рассматриваемых явлений. Механизм их происхождения мы оставляем здесь без внимания. В то время как в исследованной ранее задаче распространения волн без проводов последние возбуждались внешним источником (в виде гармонического осциллятора), теперь они возбуждаются исключительно электрическими колебаниями в самих проводах. Таким образом в этом случае не существует вовсе первичных колебаний, а только „вторичные“, которые можно трактовать как свободные колебания проводов. Практически подобные колебания должны всегда возбуждаться каким-нибудь внешним воздействием на одном из концов провода. Однако при весьма большой длине этого провода распространение их не зависит от механизма возбуждения и определяется уравнениями (35) и (35a) в связи с соотношениями (17) и (17a).

Решение этой задачи становится наиболее простым, если наряду с плотностями электричества η , \mathbf{j} ввести еще соответствующие потенциалы φ , \mathbf{A} . Мы предположим, при этом что плотность тока \mathbf{K} параллельна оси z ; соответственно этому векторный потенциал \mathbf{A} должен сводиться к составляющей z , т. е. $\mathbf{A}_z = \mathbf{A}$. Общее уравнение, связывающее оба потенциала

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

сводится при этом к

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} = 0,$$

или согласно (35) к

$$\varphi = A \quad (36)$$

(в виду того, что $k = \frac{\omega}{c}$).

Отсюда согласно общим формулам

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

следует:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = 0 \quad (36a)$$

и

$$H_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad H_z = 0 \quad (36b)$$

или согласно (36) и (36a):

$$H_x = -E_y, \quad H_y = E_x, \quad H_z = E_z = 0. \quad (36c)$$

Эти формулы показывают, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны обычным (для волновой зоны) образом друг с другом и с направлением распространения ($\mathbf{E} = \mathbf{H}$, $\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$, \mathbf{n} — нормаль волны) и притом совершенно независимо от закона, по которому они изменяются в плоскости xy .

На основании уравнения (35a) векторный потенциал \mathbf{A} можно заменить скалярным магнитным потенциалом ψ , т. е. составляющие \mathbf{H} выразить при помощи формул

$$H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (37)$$

Сравнивая эти формулы с предыдущими, получаем соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (37a)$$

откуда следует

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

в согласии с (35a).

Соотношения (37a) показывают, что φ и ψ представляют собою вещественную и мнимую части некоторой аналитической функ-

ции $f(\zeta)$ комплексной переменной $\zeta = x + iy$ (множитель $e^{i(kz - \omega t)}$ мы в дальнейшем не будем рассматривать). Линии $\varphi = \text{const}$ и

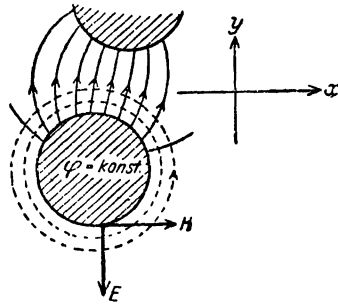


Рис. 27.

$\psi = \text{const}$ ортогональны друг к другу и совпадают соответственно с магнитными и электрическими силовыми линиями. При этом кривые, ограничивающие поперечное сечение проводов с какой-либо плоскостью $z = \text{const}$, должны совпадать с определенными кривыми $\varphi = \text{const}$ (рис. 27). Далее, внутри каждого провода φ и ψ должны оставаться постоянными. Вне провода φ является однозначной, и ψ — многозначной функцией x и y : при каждом обходе вокруг провода

эта функция получает приращение $-\oint H_z ds = -4\pi J = -4\pi \oint j ds$ (J — сила тока).

На границе провода формулы (36а) и (37) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} E_n &= -\frac{\partial \varphi}{\partial n}, & E_\tau &= 0, \\ H_n &= 0, & H_\tau &= -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Плотности заряда и тока выражаются при этом следующим образом

$$\eta = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = j. \quad (38a)$$

Их численное равенство соответствует равенству потенциалов φ и A . Разумеется, сила тока $J = \int j ds$ должна совпадать с электрическим зарядом на единицу длины $\int \eta ds = e$. Если σ обозначает кривую, расположенную совершенно произвольно в плоскости xu , то формулы (36а) и (37) можно заменить соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} E_n &= -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, & E_\tau &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = +\frac{\partial \psi}{\partial n}, \\ H_n &= -\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}, & H_\tau &= -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (38b)$$

Отсюда следует, что разность $\varphi_1 - \varphi_2$ для двух произвольных точек P_1 и P_2 (в плоскости xu) представляет собою одновременно циркуляцию \mathbf{E} вдоль любой соединяющей эти точки кривой $\left(\int_{P_2}^{P_1} E_\tau ds \right)$, и поток \mathbf{H} через эту кривую или вернее через

связанную с ней цилиндрическую поверхность с высотой $1 \left(\int_{P_1}^{P_2} H_n d\sigma \right)$. Соответственно этому разность $\psi_1 - \psi_2$ представляет магнитную циркуляцию $\left(\int H_\tau d\sigma \right)$ и электрический поток $\left(\int E_n d\sigma \right)$ через кривую $P_1 P_2$.

Итак, поставленная в начале этого параграфа задача сводится к следующей сравнительно простой двумерной задаче:

Требуется определить аналитическую функцию

$$f(\zeta) \equiv f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (39)$$

вещественная часть которой на некоторых наперед заданных граничных кривых $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ принимает постоянные значения. Эти кривые вообще должны быть замкнуты, но они могут замыкаться также на бесконечности. Встречающийся обыкновенно в технике случай тонкого провода с круглым сечением, натянутого параллельно земной поверхности, непосредственно подходит под общую теорию, если рассматривать землю как идеальный проводник с бесконечно большим поперечным сечением, ограниченным прямою линией. По отношению к электромагнитному полю, создаваемому ею, земля совершенно эквивалентна зеркальному изображению провода (или системы проводов, если рассматривать несколько проводов).

Будем называть функцию (39) комплексным потенциалом. Как всякую комплексную величину, ее можно представить при помощи вектора f с составляющими $F_x = \varphi$ и $F_y = \psi$. Векторы E и H можно трактовать как комплексные величины

$$E = E_x + iE_y, \quad H = H_x + iH_y.$$

Формулы (36а) и (36с) могут быть при этом, как легко видеть, заменены комплексными выражениями

$$E = - \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^*, \quad H = iE, \quad (39a)$$

(где A^* означает, как обычно, величину, комплексно-сопряженную с A).

В случае например лишь одного провода с круглым сечением имеем:

$$f(\zeta) = c_1 \lg \frac{1}{\zeta} + c_2,$$

где c_1 и c_2 суть две вещественные постоянные.

Полагая $\zeta = re^{i\alpha}$ (α — азимут), получаем

$$f(\zeta) = \left(c_1 \lg \frac{1}{r} + c_2 \right) - ic_1 \alpha,$$

т. е.

$$\varphi = c_1 \lg \frac{1}{r} + c_2 \text{ и } \psi = c_1 \alpha. \quad (39b)$$

При каждом обходе вокруг провода ψ получает приращение $2\pi c_1$, которое согласно вышесказанному должно быть равно $4\pi J = 4\pi e$. Поэтому $c_1 = 2e$ и следовательно

$$f(\zeta) = 2e \lg \frac{1}{\zeta} + c_2. \quad (40)$$

Рассмотрим еще в виде примера круглый провод с радиусом a , образующий ось круглого полого цилиндра с внутренним радиусом $b (> a)$. Предположим при этом, что заряды и токи в проводе и цилиндре взаимно компенсируются (как это всегда имеет место в случае кабеля).

Электромагнитное поле в пространстве между проводом и цилиндром ($a < r < b$) определяется при помощи комплексного потенциала (40), если при этом через e обозначить заряд (или вернее линейную плотность заряда) провода и выбрать надлежащим образом постоянную c_2 . Так как в теле цилиндра и следовательно также во внешнем пространстве электромагнитное поле равно нулю, то при $r \geq b$ мы можем положить $\varphi = 0$. Это дает

$$2e \lg \frac{1}{b} + c_2 = 0,$$

т. е.

$$c_2 = 2e \lg b,$$

и следовательно

$$f(\zeta) = 2e \lg \frac{b}{\zeta}. \quad (40a)$$

Таким образом потенциал провода — или вернее разность потенциалов провода и цилиндра — равна:

$$\varphi_{ab} = 2e \lg \frac{b}{a}. \quad (40b)$$

Для напряженностей электрического и магнитного поля в пространстве между проводом и цилиндром (промежуточное пространство) согласно (40a) имеем следующие выражения:

$$E = \frac{2e}{\zeta^*} = \frac{2e}{r} e^{i\alpha} = -iH. \quad (40c)$$

Электрические силовые линии направлены радиально, в то время как магнитные образуют систему ортогональных к ним коаксиальных кругов. Их плотность обратно пропорциональна аксиальному расстоянию r .

В этих формулах плотность заряда не является постоянной величиной, но представляет собою функцию координаты z и времени t , пропорциональную вещественной части множителя $e^{i(kz - \omega t)}$, т. е. выражается формулой

$$e = e_0 \cos(kz - \omega t). \quad (40d)$$

Если промежуточное пространство совершенно пустое (как это предполагалось нами выше), то полученные результаты остаются справедливыми не только для гармонических колебаний, но и для произвольных электромагнитных процессов (поскольку речь идет о распространении их вдоль проводов). Эти результаты легко обобщаются и на тот случай, когда промежуточное пространство наполнено однородной изолирующей средой. Именно в этом случае достаточно, как видно из формулы (17а), разделить плотность заряда η (и e) на диэлектрическую постоянную ϵ изолятора, а плотность тока j (или силу тока J) помножить на его магнитную проницаемость μ . При этом получаем:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}$$

и, далее, согласно (6а) § 1 гл. IV:

$$\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (41)$$

т. е.

$$\sqrt{\epsilon\mu} \varphi = A. \quad (41a)$$

Соответственно этому

$$H = \sqrt{\epsilon\mu} E \quad \text{и} \quad j = \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad \left(\text{или} \quad J = \frac{e}{\sqrt{\epsilon\mu}} \right). \quad (41b)$$

2. Не идеально проводящие провода. Изложенная (абрагамовская) теория волн в идеальных проводах представляет собою такое же грубое приближение к действительности, как и рассмотренная в начале § 3 теория распространения волн без проводов вдоль идеально проводящей земли.

Разовьем теперь основные положения более строгой теории (по Зоммерфельду). Для этого будем рассматривать провода как несовершенные проводники с конечными проводимостью σ_h , диэлектрической постоянной ϵ_h и магнитной проницаемостью μ_h ($h = 1, 2, 3, \dots$). Окружающую среду будем обозначать индексом 0. При этом можно положить $\sigma_0 = 0$ и $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$.

Относительно различных электромагнитных величин сделаем следующее допущение:

$$\psi^{(h)} = \psi_0^{(h)}(x, y) e^{i(qz - \omega t)}, \quad (h = 0, 1, 2, \dots), \quad (42)$$

представляющее собою непосредственное обобщение (35). Параметр q , характеризующий скорость распространения и затухание

волн, должен иметь здесь одно и то же значение для всех тел, и следовательно должен быть отличным от всех волновых параметров

$$k_n = \frac{\omega}{c} n_n \quad \left(n_n = \sqrt{\epsilon'_n - 2i \frac{\sigma_n}{\nu}}, \quad \epsilon'_n = \epsilon_n - 2i \frac{\sigma_n}{\nu} \right), \quad (42a)$$

характеризующих отдельные проводя (включая внешнюю среду). Как мы сейчас увидим, волны, определяемые формулой (42a), могут трактоваться в некотором смысле как поверхностные волны, рассмотренные в предыдущем параграфе.

Подставляя (42) в уравнение

$$\nabla^2 \psi^{(h)} + k_n^2 \psi^{(h)} = 0,$$

получим вместо (35a)

$$\frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial y^2} + (k_n^2 - q^2) \psi^{(h)} = 0. \quad (42b)$$

Относительно векторного потенциала сделаем прежнее допущение:

$$A_x^{(h)} = A_y^{(h)} = 0, \quad A_z^{(h)} = A, \quad (43)$$

соответствующее симметричному распределению электрического тока относительно оси z . Тогда, согласно (41), получаем

$$A^{(h)} = \frac{ck_n^2}{\omega q} \varphi^{(h)} = \frac{n_h^2}{m} \varphi^{(h)} \left(m = \frac{c}{\omega} q \right), \quad (43a)$$

$$E_x^{(h)} = -\frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial x}, \quad E_y^{(h)} = -\frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial y}, \quad E_z^{(h)} = \frac{i}{q} (k_n^2 - q^2) \varphi^{(h)}, \quad (43b)$$

$$H_x^{(h)} = -\frac{n_h^2}{m} E_y^{(h)}, \quad H_y^{(h)} = +\frac{n_h^2}{m} E_x^{(h)}, \quad H_z^{(h)} = 0. \quad (43c)$$

Продольная составляющая напряженности электрического поля оказывается следовательно отличной от нуля, — что непосредственно ясно, так как именно этой составляющей обуславливается электрический ток в проводя.

Представление напряженности магнитного поля при помощи магнитного потенциала оказывается, вообще говоря невозможным; так из (43b) и (37) должны были бы вытекать соотношения:

$$\frac{n_h^2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{n_h^2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

а из них уравнение (35a) в противоречии с (42b). Само собой разумеется, что представление φ как вещественной части некоторой аналитической функции комплексного переменного $x + iy$ также невозможно — за исключением статического случая ($\omega = 0$), когда все параметры k_n и q равны нулю. Если принять во внимание

свободные поверхностные заряды, соответствующие мнимой части диэлектрической постоянной, и исключить свободные поверхностные токи (последние при конечной проводимости не могут появляться), то граничные условия (4а) § 1 для поверхности раздела h -го и l -го тела ($l = h + 1$), примут вид

$$\epsilon'_h E_n^{(h)} = \epsilon'_l E_n^{(l)}, \quad E_\tau^{(h)} = E_\tau^{(l)}, \quad E_z^{(h)} = E_z^{(l)}, \quad (44)$$

$$\frac{1}{\mu_h} H_\tau^{(h)} = \frac{1}{\mu_l} H_\tau^{(l)}, \quad H_n^{(h)} = H_n^{(l)}, \quad (44a)$$

Здесь n и τ означают нормальный и касательный единичные векторы к граничной кривой σ в данной точке. Для простоты допустим на минуту, что они совпадают соответственно с направлениями x и y .

При этом из (43с) и (44а) следует в связи с $n_h^2 = \epsilon'_h \mu_h$:

$$\epsilon'_h E_x^{(h)} = \epsilon'_l E_x^{(l)}, \quad \epsilon'_h \mu_h E_y^{(h)} = \epsilon'_l \mu_l E_y^{(l)}.$$

Первое из этих уравнений тождественно с уравнением (44), второе же противоречит второму уравнению (44). Чтобы устранить это противоречие, мы должны положить

$$E_\tau = H_n = 0. \quad (44b)$$

Эти равенства представляют таким образом условие справедливости допущения (43).

Остальные два граничные условия согласно (43а) приводятся к виду:

$$\epsilon'_h \frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial n} = \epsilon'_l \frac{\partial \varphi^{(l)}}{\partial n}, \quad (k_h^2 - q^2) \varphi^{(h)} = (k_l^2 - q^2) \varphi^{(l)}. \quad (44c)$$

При этом в виду (44b) потенциалы $\varphi^{(h)}$ и $\varphi^{(l)}$ должны иметь постоянные граничные значения, вообще говоря, неравные друг другу [равенство $\varphi^{(h)} = \varphi^{(l)}$ противоречило бы второму из равенств (43)]. Следует подчеркнуть, что скачки потенциалов $\varphi^{(h)} - \varphi^{(l)}$ в рассматриваемом случае не имеют непосредственного физического значения и непосредственно вытекают из граничных условий (30b) для поляризационного потенциала в связи с формулой $\varphi = -\text{div } Z$ [ср. (6с) § 1 гл IV].

Так как уравнения (44с) линейны относительно граничных значений φ , то они могут быть совместны друг с другом только при определенных значениях параметра q . Исключая эти граничные значения, мы получаем уравнение

$$\Delta(q) = 0, \quad (44d)$$

служащее для определения q .

Для иллюстрации рассмотрим с помощью изложенного метода уже рассмотренный в предыдущем параграфе случай плоской граничной поверхности, которую можно трактовать как провод бесконечно большого радиуса.

Выражение (42) мы можем в этом случае упростить, предположив, что ψ не зависит от y . Тогда согласно (42b) будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial x^2} + (k_h^2 - q^2) \psi^{(h)} = 0, \quad (h=0,1),$$

т. е.

$$\varphi^{(h)} = C_1^{(h)} e^{+\sqrt{q^2 - k_h^2} x} + C_2^{(h)} e^{-\sqrt{q^2 - k_h^2} x}.$$

Со знаком плюс мы взяли квадратный корень, имеющий положительную вещественную часть. Для того чтобы при удалении от граничной поверхности $x=0$ потенциалы не обращались в ∞ , необходимо положить при этом $C_1^{(0)} = C_2^{(1)} = 0$. Притом предыдущие формулы сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(0)} &= C_0 e^{-\sqrt{q^2 - k_0^2} x}, & (x > 0), \\ \varphi^{(1)} &= C_1 e^{+\sqrt{q^2 - k_1^2} x}, & (x < 0). \end{aligned} \right\}$$

Условия (44b) в рассматриваемом случае выполняются сами собою, в то время как условия (44c) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} (q^2 - k_0^2) C_0 &= (q^2 - k_1^2) C_1, \\ -\varepsilon'_0 \sqrt{q^2 - k_0^2} C_0 &= \varepsilon'_1 \sqrt{q^2 - k_1^2} C_1. \end{aligned} \right\}$$

Считая оба тела (воздух и землю) немагнитными и положив соответственно этому $\varepsilon'_0 = k_0^2$, $\varepsilon'_1 = k_1^2$, получим, исключая постоянные, соотношение

$$k_0^2 \sqrt{q^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{q^2 - k_0^2} = 0,$$

найденное нами в предыдущем параграфе несколько другим методом; отсюда получается уже известное нам значение для q :

$$q = \frac{k_0 k_1}{\sqrt{k_0^2 + k_1^2}}.$$

3. Изолированный провод с круглым сечением; кабель. Перейдем теперь к несколько более сложному случаю распространения электромагнитных колебаний вдоль провода с круглым сечением конечного радиуса a . Ось этого провода примем за ось Z и расстояние от последней будем обозначать, как и прежде, через $r (= \sqrt{x^2 + y^2})$.

Так как электрический потенциал, кроме z и t , может зависеть только от r , то мы положим

$$\varphi^{(h)} = \varphi_0^{(h)}(r) e^{i(qz - \omega t)} \quad (h = 0, 1). \quad (45)$$

Напряженности электрического и магнитного поля определяются отсюда по формулам

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, & E_\alpha &= 0, & E_z &= -\frac{i}{q} (q^2 - k^2) \varphi, \\ H_r &= 0, & H_\alpha &= \frac{ck^2}{\omega q} E_r, & H_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45a)$$

Таким образом условие (44a)¹ удовлетворяется и тем самым оправдывается наше допущение (42).

Функция $\varphi(r)$ должна при этом удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + (k^2 - q^2) \varphi = 0$$

или

$$\frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} + \varphi = 0, \quad \rho = \sqrt{k^2 - q^2} r = sr, \quad (45b)$$

общее решение которого имеет вид:

$$\varphi = AJ(\rho) + BK(\rho), \quad (45c)$$

где $J(\rho)$ и $K(\rho)$ означают, как обычно, бесселевы функции первого и второго рода [см. (26c) и (26d)].

Так как $\varphi^{(1)}$ при $r=0$ должно оставаться конечным, в то время как $K(\rho)$ при этом логарифмически стремится к ∞ , то следует положить $B_1 = 0$. Во внешнем пространстве, наоборот, потенциал должен определяться функцией $K(\rho)$, как это явствует уже из того факта, что при бесконечно большой проводимости провода этот потенциал сводится к $c_1 \lg \frac{1}{r}$ [см. (39b)]. Мы имеем следовательно:

$$\varphi^{(1)} = AJ(s_1 r), \quad \varphi^{(0)} = BK(s_0 r). \quad (46)$$

Граничные условия (43c) для $r=a$ дают (мы ограничиваемся случаем $\mu_0 = \mu_1 = 1$):

$$\left. \begin{aligned} Ak_1^2 s_1 J'(s_1 a) &= Bk_0^2 s_0 K'(s_0 a), \\ A(k_1^2 - q^2) J(s_1 a) &= B(k_0^2 - q^2) K(s_0 a). \end{aligned} \right\} \quad (46a)$$

¹ Направление τ есть не что иное, как азимутальное направление α , в то время как λ совпадает с r .

При обыкновенно встречающихся малых значениях ξ это выражение быстро сходится.

Если $|s_1 a| \gg 1$, то согласно этим формулам $q \cong k_0$. Этот результат следует из того обстоятельства, что условию $|s_1 a| \gg 1$ соответствует очень высокая проводимость провода. В противоположном случае ($|s_1 a| \ll 1$) получается значительное замедление в распространении волн и в то же время сильное продольное затухание.

Следует заметить, что в первом случае электрический ток концентрируется в очень тонком поверхностном слое провода. Это явление обычно называется скин-эффектом. При уменьшении проводимости или частоты колебания ток проникает все глубже и глубже внутрь провода; при исчезающе малой частоте (постоянный ток) плотность тока имеет одинаковое значение по всему сечению провода. В общем случае зависимость плотности тока от r определяется формулой

$$j = \sigma E_2^{(1)} = \frac{\sigma}{iq} (q^2 - k^2) A J(s_1 r).$$

Интересно констатировать, что как передача электромагнитных волн по проводам, так и „беспроволочное“ распространение их вдоль поверхности земли представляют собой в основных чертах один и тот же процесс. Это беспроволочное распространение — поскольку речь идет о поверхностных волнах на больших расстояниях от передающей антенны — можно трактовать как предельный случай распространения по обыкновенному проводу, если радиус его становится очень большим по сравнению с длиной волны λ_0 .

В заключение добавим несколько слов о строгой теории кабельного проводника. В этом случае необходимо различать по крайней мере четыре среды: внешнее пространство (0), внешний металлический цилиндр (1), внутренний изолирующий цилиндр (2) и осевой провод (3).

Формулы (45) и (45с) применяются в этом случае без каких бы то ни было изменений. Однако вместо формул (46) мы получаем более сложные выражения:

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= B_0 K(s_0 r), & \varphi^{(1)} &= A_1 J(s_1 r) + B_1 K(s_1 r), \\ \varphi^{(2)} &= A_2 J(s_2 r) + B_2 K(s_2 r), & \varphi^{(3)} &= A_3 J(s_3 r) \end{aligned}$$

и соответственно этому вместо граничных условий (46а) — следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} B_0 s_0^2 K(s_0 a_0) &= s_1^2 [A_1 J(s_1 a_0) + B_1(s_1 a_0)], \\ B_0 k_0^2 s_0 K'(s_0 a_0) &= k_1^2 s_1 [A_1 J'(s_1 a_0) + B_1 K'(s_1 a_0)], \\ \begin{cases} s_1^2 [A_1 J(s_1 a_1) + B_1 K(s_1 a_1)] = s_2^2 [A_2 J(s_2 a_1) + B_2 K(s_2 a_1)], \\ k_1^2 s_1 [A_1 J'(s_1 a_1) + B_1 K'(s_1 a_1)] = k_2^2 s_2 [A_2 J'(s_2 a_1) + B_2 K'(s_2 a_1)], \end{cases} \\ \begin{cases} s_2^2 [A_2 J(s_2 a_2) + B_2 K(s_2 a_2)] = s_3^2 A_3(s_3 a_2), \\ k_2^2 s_2 [A_2 J'(s_2 a_2) + B_2 K'(s_2 a_2)] = k_3^2 s_3 A_3 J'(s_3 a_2), \end{cases} \end{aligned}$$

где a_0, a_1, a_2 —три рассматриваемых граничных радиуса. Путем исключения констант B_0, \dots, A_3 получаем очень сложное уравнение для q , которое однако легко решается приближенно, если предположить, что

$$s_1 \cong k_1, s_2 \cong k_2 \text{ и } |s_0 a_0| \ll 1, |s_2 a_1| \ll 1.$$

§ 6. Электромагнитные колебания в телах, ограниченных со всех сторон. Общая теория собственных колебаний.

До сих пор мы рассматривали электромагнитные колебания в таких телах, которые были неограничены во всех трех, или в двух, или наконец в одном измерении.

Существует однако ряд важных электромагнитных колебательных процессов, при которых подобная идеализация действительных—всесторонне ограниченных—тел невозможна, и при которых таким образом конечные геометрические размеры их играют существенную роль. При этом следует различать три случая, а именно, когда эти размеры или велики, или одного и того же порядка, или малы по сравнению с длиной волны рассматриваемых колебаний (в пустом пространстве). Мы могли бы упомянуть распространение электромагнитных волн вокруг земли, принимая во внимание ее сферическую форму, как пример первого случая, возбуждение электромагнитных колебаний в передающей антенне беспроволочной телеграфии—как пример второго случая, и прием их при помощи небольшой рамочной антенны—как пример третьего. К третьему случаю принадлежат также рассмотренные в гл. IV оптические явления рассеяния света в коллоидных растворах. Им соответствуют во втором случае так называемые диффракционные явления, которые мы будем исследовать ниже. На ряду с этими тремя случаями следует различать до некоторой степени дополнительные случаи, характеризующиеся наличием в (практически) неограниченном теле или оболочке какой-нибудь „полости“, т. е. пустого пространства или отверстия, размеры которого или велики, или одного порядка, или малы по сравнению с длиной волны.

Эти, вообще говоря, весьма сложные явления можно представить сравнительно просто, если тела, о которых идет речь, считать идеально проводящими. Противоположный предельный случай идеального изолятора не представляет никакого интереса.

1. Механизм собственных электрических колебаний в проводящих телах. Простейшими колебательными процессами, могущими иметь место в ограниченных со всех сторон телах (металлах) или, также, полостях (заключенных в металлических телах), являются так называемые электрические или электромагнитные собственные колебания, аналогич-

ные механическим собственным колебаниям в твердых упругих телах.

Вопрос об их возникновении или возбуждении мы оставим пока без внимания и займемся только механизмом их поддержания и затухания. Для простоты ограничимся телами с симметрией вращения и электромагнитными колебательными процессами, обнаруживающими такую же симметрию.

Представим себе металлическое тело, обладающее симметрией вращения, являющееся носителем электрического тока такого рода, что линии тока постоянно остаются в меридиональных плоскостях и что плотность тока не зависит от азимутального угла α этих плоскостей по отношению к одной из них. Представим себе далее, что во всех сечениях (x, y) тела, перпендикулярных к оси вращения (которую мы выберем за ось Z), электрический ток в один и тот же момент времени имеет одинаковый знак, т. е. направлен или в положительную сторону оси Z или в отрицательную. Тогда вблизи обоих полюсов, или вернее в соответствующих — „верхней“ (положительной) и „нижней“ (отрицательной) — половинах поверхности тела, должны образоваться противоположные электрические заряды, как показано на рис. 28. Эти заряды в свою очередь порождают электростатическое поле, противоположное направлению тока, которое уменьшает силу тока и в конце концов должно уничтожить его. Однако исчезновение электрического тока может иметь место только на один момент, так как электростатические силы, зависящие от упомянутого поля, тотчас же вызывают электрический ток противоположного направления.

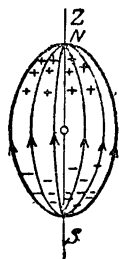


Рис. 28.

С другой стороны с изменением во времени силы тока связано появление индукционных электрических сил, благодаря которым сила тока лишь постепенно увеличивается в направлении, противоположном первоначальному (сверху вниз). Это увеличение силы тока может продолжаться только до тех пор, пока не исчезнут электрические заряды, накопленные в обеих половинах тела. Одновременно с этим исчезает и обусловленное этими зарядами электростатическое поле.

Несмотря на это, электрический ток должен продолжаться в том же самом направлении под влиянием сил индукции, причем теперь нижняя половина тела будет заряжаться положительно, а верхняя — отрицательно.

Образующееся вновь таким образом электростатическое поле, направленное вверх, действует сначала как тормоз, уменьшающий силу тока до тех пор, пока вызываемые этим уменьшением силы электрической индукции не смогут больше преодолеть силы торможения, а также всегда имеющиеся налицо силы трения. Тогда направление тока снова меняется, и описанный выше процесс повторяется еще раз с несколько уменьшенной силой вследствие потерь на трение.

Таким образом в рассматриваемом случае мы имеем такой же самый механизм колебаний, как при свободных колебаниях маятника или квази-упругого электрического осциллятора, который мы подробно рассмотрели в гл. III, § 4. При этом электростатическим силам соответствует квази-упругая сила— kr , а силе индукции—инерционная сила— $m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$. Заряд верхней (или нижней) половины металлического тела соответствует отклонению \mathbf{r} , а сила тока— скорости $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. В самом деле, рассматриваемая задача может быть приведена к тому же уравнению

$$m \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} + \vartheta \frac{d\mathbf{p}}{dt} + k \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0,$$

которое определяет собственные колебания изотропного квази-упругого осциллятора [см. (35) § 4, гл. III], если \mathbf{p} определить как электрический момент металлического тела (или части последнего) и надлежащим образом выбрать константы m , ϑ , k , или вернее отношения $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\frac{\vartheta}{m} = 2\omega''$. Можно даже сказать, что вся задача о собственных электрических колебаниях тела состоит в определении этих констант, причем, разумеется, предварительно должны быть твердо установлены различные возможные типы колебаний. Частота колебаний ω' может быть вычислена тогда при помощи этих констант по формулам (35b) гл. III.

Что касается типа колебаний, то во всяком металлическом теле возможно бесчисленное множество различных типов колебаний, соответствующих механическим парциальным или нормальным колебаниям натянутой струны и вообще какого угодно упругого тела. Рассмотренные выше электрические колебания металлического тела с симметрией вращения представляют собою лишь простейшие из совокупности нормальных колебаний (они соответствуют основным колебаниям натянутой струны).

Можно легко представить себе сложные типы колебаний, при которых плотность тока на поверхности тела исчезает не только в обоих полюсах, но одновременно в нескольких так называемых узловых линиях; при этом фазы колебаний на обеих сторонах каждой такой линии должны оставаться противоположными, точно так же, как это имеет место при упругих колебаниях.

Важно заметить, что узлы плотности тока совпадают с пучностями (местами наибольшей амплитуды) поверхностной плотности электрического заряда (объемные заряды в однородном проводнике не могут существовать), и, наоборот, пучности плотности тока на поверхности тела являются узловыми

линиями плотности заряда. Мы еще вернемся к этому вопросу при рассмотрении некоторых частных случаев. В последующем мы будем понимать всегда под узлами такие места, где плотность тока равна нулю. На рис. 29а и б схематически представлены первый и второй обертоны рассматриваемого металлического тела; пунктирные линии суть линии узлов. При этом полюсы можно считать узловыми линиями исчезающе малой величины.

На ряду с этими меридиональными колебаниями в телах вращения могут иметь место также латеральные колебания, при которых линии тока образуют коаксиальные круги, или вернее дуги кругов, вырезаемые из параллельных кругов некоторым числом равноотстоящих друг от друга меридиональных узловых плоскостей. В этой системе боковых колебаний не существует „основного“ колебания; можно также сказать, что частота этого основного колебания, соответствующего отсутствию какой-нибудь узловой поверхности, равна нулю.

Совокупность частот различных собственных электрических колебаний металлического тела называется его электрическим спектром. При наличии затухания этот спектр целесообразно представлять комплексными числами $\omega' + i\omega''$, которые определяют не только частоту колебания, но одновременно и соответствующий декремент затухания.

Всякий электрический колебательный процесс, происходящий в таком теле при отсутствии внешних сил, можно описывать как суперпозицию различных собственных колебаний с определенными (относительными) амплитудами и фазами. То обстоятельство, что при этой суперпозиции собственные колебания должны оставаться совершенно невозмущенными, следует из линейности основных уравнений электромагнитного поля. Таким образом в электрическом случае мы имеем точно такие же соотношения, как и при малых механических колебаниях упругих тел.

2. Собственные колебания по теории поля и по субстанциальной теории. Рассматриваемые электрические колебания в металлических телах могут трактоваться с внешне совершенно отличной точки зрения, причем их аналогия с механическими колебаниями исчезает. А именно, вместо субстанциальных электрических величин, т. е. плотности заряда и тока, можно рассматривать связанные с ними величины электромагнитного поля. Центр тяжести описанного выше комплекса явлений перемещается при этом из металла в окружающее пространство. Область внутри металла означает

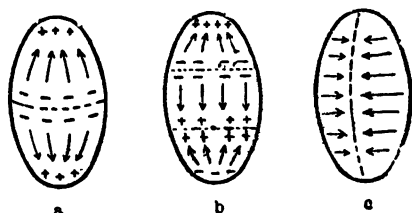


Рис. 29.

здесь только ту часть пространства, где вектор $\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (или $\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$) отличен от нуля. В предельном случае идеально проводящего металлического тела электромагнитное поле внутри последнего должно вообще исчезать. Плотности поверхностных зарядов и токов должны при этом выражаться через граничные значения напряженностей электрического и магнитного поля согласно формулам

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{k} = \frac{2}{4\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}. \quad (48)$$

Эти формулы относятся к тому случаю, когда металл находится в пустом пространстве. Если же он помещен в изолирующую среду с диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ , то они заменяются следующими:

$$\eta = \frac{\epsilon}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\mu} \mathbf{n} \times \mathbf{H}. \quad (48a)$$

При этом получается такое впечатление, как будто бы весь электромагнитный процесс происходит в этой среде, в форме стоячих или же расходящихся волн, в то время как металл представляет собой лишь пустую (т. е. лишенную поля) часть пространства, влияние которой учитывается граничными условиями:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (48b)$$

Собственные электрические колебания металла в этой „полевой“ трактовке представляются в виде волн определенного типа, характеризуемого общим уравнением поля для гармонического колебательного процесса:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \left(k = \frac{\omega \sqrt{\epsilon\mu}}{c} \right) \quad (48c)$$

в связи с граничными условиями. В случае полости в идеальном проводнике (или ящике с идеально отражающими стенками) получаются стоячие электромагнитные волны, так что в этом случае не происходит никакого излучения, а следовательно никакого затухания.

При учете конечной проводимости данного металла, с точки зрения теории поля, оказывается, что электромагнитное поле проникает внутрь металла извне (или изнутри в случае полости) и что наряду с обыкновенным излучением энергии имеет место непрерывный приток электромагнитной энергии внутрь металла; вследствие этого энергия электромагнитных волн с течением времени должна экспоненциально затухать. Оставляя в стороне

эту утечку электромагнитной энергии, притекающей в металл извне, можно представить колебательный процесс как чередующееся превращение электрической энергии в магнитную, и наоборот; при отсутствии внешней металлической оболочки эта энергия постепенно излучается в волновую зону.

Само собой разумеется, что эта „полевая“ трактовка собственных электрических колебаний металла и набросанная выше квази-механическая „субстанциальная картина“ в физическом и математическом отношениях совершенно эквивалентны друг другу. Однако с физической точки зрения „субстанциальная картина“ гораздо более проста и наглядна. Если оставить в стороне силы самовоздействия отдельных электронов, к которым могут быть сведены обыкновенные силы инерции, то понятие поля можно совершенно исключить и электромагнитные процессы свести к запаздывающему дальнему воздействию отдельных электронов и движению последних в соответствии с обычными законами механики. Однако исследование рассматриваемого здесь вопроса по этому методу приводит к довольно сложным интегральным уравнениям, общий вид которых мы сейчас наметим.

Основной функцией, подлежащей определению, является плотность тока \mathbf{j} . Так как она представляет гармоническую функцию времени ($\mathbf{j} \sim e^{-i\omega t}$), то достаточно определить ее зависимость от пространственных координат, т. е. от радиус-вектора \mathbf{r} . Для этой цели мы должны в „механическое“ соотношение

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} \quad (49)$$

подставить общее выражение напряженности электрического поля как функцию плотности тока.

Для того, чтобы не усложнять задачу, мы не будем учитывать действие связанных электронов ($\epsilon = \mu = 1$). При этом будем иметь

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{Z} = -\frac{1}{ik} \text{rot rot } \mathbf{A}, \quad \left(k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \right), \quad (49a)$$

где \mathbf{Z} означает, как обычно, поляризационный потенциал, \mathbf{A} — векторный потенциал $\left(\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{Z} \right)$ и далее

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} e^{ikR} dV' \quad (R = \mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (49b)$$

При дифференцировании \mathbf{A} по \mathbf{r} , $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ считается постоянным.

Таким образом, полагая для сокращения $\psi = \frac{e^{ikR}}{R}$, имеем:

$$\text{rot } \mathbf{j}\psi = \nabla^2 \psi \times \mathbf{j}, \quad \text{rot rot } \mathbf{j}\psi = (\mathbf{j}\nabla)\nabla\psi - \mathbf{j}\nabla^2\psi,$$

или, в силу соотношений $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ и (49 а, б):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{ik} \int \left\{ (\mathbf{j}\nabla) \nabla \frac{e^{ikR}}{R} + k^2 \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{j} \right\} dV' = \frac{c}{\sigma} \mathbf{j}. \quad (49c)$$

Это и есть искомое интегральное уравнение. В предельном случае идеально проводящего тела ($\sigma = \infty$) оно принимает следующий несколько более простой вид:

$$\int [(\mathbf{k}\nabla) \nabla \psi + k^2\psi \mathbf{k}] dS = 0, \quad (49d)$$

где \mathbf{k} есть поверхностная плотность тока; точка \mathbf{r} может при этом находиться как вне металла, так и внутри него.

Как доказывается в теории интегральных уравнений, линейные однородные уравнения типа (49с) и (49d) разрешимы только при определенных значениях параметра k . Это как раз суть те особые „характеристические значения“ k , которые определяют частоту различных характеристических для данного тела собственных колебаний. Решения $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ или $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ представляют собой соответствующие типы колебаний. Их обозначают обычно как характеристические функции данной задачи. Разумеется, различным субстанциальным величинам или величинам, относящимся к полю, соответствуют различные характеристические функции.

3. Некоторые общие свойства собственных колебаний; ортогональность характеристических функций при внутренней задаче. В заключение рассмотрим несколько общих свойств „полевых“ характеристических функций. Для простоты ограничимся случаем идеально проводящего тела. Мы будем придерживаться точки зрения „теории поля“, так как соответствующий ей „косвенный“ метод в математическом отношении оказывается гораздо удобнее, чем прямой метод „субстанциальной теории“.

Прежде всего необходимо различать два упомянутые уже основные типа задач о собственных колебаниях, смотря по тому, идет ли речь об ограниченной извне области пространства, или о неограниченной. В первом случае („внутренняя задача“) колебания имеют характер стоячих незатухающих волн с вещественным спектром, т. е. с вещественными характеристическими значениями k_1, k_2, k_3, \dots . Во втором случае („внешняя задача“) эти характеристические значения комплексны, что соответствует волнам, затухающим во времени и расходящимся в пространстве.

Рассмотрим сначала первый случай. Обозначим через k_1 и k_2 два различные вещественные характеристические значения, а через ψ_1, ψ_2 — соответствующие характеристические функции, удовлетворяющие тождествам

$$\nabla^2\psi_1 + k_1^2\psi_1 = 0, \quad \nabla^2\psi_2 + k_2^2\psi_2 = 0.$$

Помножим первое тождество на ψ_2^* (величину, комплексно сопряженную с ψ_2), а тождество

$$\nabla^2 \psi_2^* + k_2^2 \psi_2^* = 0,$$

сопряженное второму, — на ψ_1 ; вычитая затем эти произведения одно из другого и интегрируя результат по всему рассматриваемому объему, получим:

$$J = \int (\psi_2^* \nabla^2 \psi_1 - \psi_1 \nabla^2 \psi_2^*) dV = (k_2^2 - k_1^2) \int \psi_1 \psi_2^* dV. \quad (50)$$

Если ψ означает скалярную величину, то интеграл, стоящий в левой части, можно преобразовать в интеграл по граничной поверхности:

$$J = \oint (\psi_2^* \nabla_n \psi_1 - \psi_1 \nabla_n \psi_2^*) dS \quad (50a)$$

(или сумму подобных интегралов, если внутри V имеются еще другие тела).

Если же ψ представляет векторную величину, например напряженность электрического или магнитного поля, то, как легко видеть,

$$J = \oint [\psi_2^* \times \text{rot } \psi_1 - \psi_1 \times \text{rot } \psi_2^*] \cdot n dS. \quad (50b)$$

Эта формула получается при помощи соотношения

$$\nabla^2 \psi = -\text{rot rot } \psi$$

(так как $\text{div } \psi = 0$) и тождества

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B},$$

если положить

$$\mathbf{A} = \psi_1, \quad \mathbf{B} = \psi_2^* \quad \text{или} \quad \mathbf{A} = \psi_2^*, \quad \mathbf{B} = \psi_1.$$

Согласно уравнениям поля

$$\text{rot } \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{E} = 0,$$

$\text{rot } \psi$ должно быть равно $ik\mathbf{H}$ или $-ik\mathbf{E}$, смотря по тому, имеем ли мы $\psi = \mathbf{E}$ или $\psi = \mathbf{H}$. В обоих случаях, в виду граничных условий (48b), векторы $\psi_1 \times \text{rot } \psi_2^*$ и $\psi_2^* \times \text{rot } \psi_1$ направлены параллельно поверхности, так что J тождественно равно нулю. Согласно (50) отсюда вытекает соотношение

$$\int \psi_1 \psi_2^* dV = 0, \quad (50c)$$

которое выражает так называемую ортогональность различных характеристических функций по отношению друг к другу.

Так как характеристические функции определены с точностью до произвольного постоянного множителя (характеризующего амплитуду колебаний), то их всегда можно подчинить условию:

$$\int \psi_n \cdot \psi_n^* dV = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (50d)$$

они называются в этом случае **нормированными**.

Следует заметить, что благодаря вещественности характеристических значений и следовательно также частот $\omega_n = ck_n$, в произведение $\psi_n \psi_n^*$ время не входит. Действительно, полагая $\psi_n = \psi_n^0 e^{-i\omega_n t}$, где амплитуда ψ_n^0 зависит только от пространственных координат, получаем

$$\psi_n^* = \psi_n^{0*} e^{+i\omega_n t} \quad \text{и} \quad \psi_n \psi_n^* = \psi_n^0 \psi_n^{0*}.$$

Если расположить характеристические значения в ряд k_1, k_2, k_3, \dots , в порядке возрастания, то первое из них относится к основному колебанию, а остальные — к обертонам.

Всякое решение общего волнового уравнения

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (51)$$

удовлетворяющее граничным условиям (48b), можно представить в виде ряда

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n. \quad (51a)$$

с надлежащим образом подобранными амплитудными коэффициентами c_n . Если ψ известно, то эти коэффициенты определяются по формуле

$$c_n = \int \psi \cdot \psi_n^* dV, \quad (51b)$$

которая непосредственно вытекает из (50c) и (50d). Среднее во времени значение плотности электрической или магнитной энергии выражается при $\psi = E$ или H формулой

$$\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\overline{\psi \cdot \psi^*}}{2} = \frac{1}{16\pi} \sum \sum c_n c_m^* \psi_n \psi_m^*.$$

Ввиду условий ортогональности и нормировки имеем:

$$\int \psi \cdot \psi^* dV = \sum c_n \cdot c_n^* = \sum |c_n|^2. \quad (51c)$$

Следовательно полная энергия во всем объеме V равна сумме энергий, соответствующих отдельным собственным колебаниям.

Полученные результаты справедливы не только для колебаний в пустом пространстве, но и для свободных колебаний лю-

бой системы идеально проводящих тел, окруженных произвольно удаленной, идеально проводящей оболочкой.

Однако они неприменимы в том случае, когда такая оболочка отсутствует („внешняя задача“). Чтобы убедиться в этом, введем прежде всего вместо идеально отражающей оболочки весьма удаленную поверхность Σ , заключающую в себе рассматриваемое тело (или систему тел), и произведем интегрирование в (50) по объему, заключенному между внутренней поверхностью Σ и внешней поверхностью тела (или тел). В то время как интеграл (50b) для поверхности тела в силу граничных условий обращается в нуль, соответствующий интеграл для внешней поверхности остается отличным от нуля. Следовательно, условие ортогональности (50с) в этом случае не выполняется. Что касается условия нормировки (50а), то его вообще можно формулировать только в том случае, если вместо характеристических функций ψ_n рассматривать их амплитуды ψ_n^0 и отбросить их временные множители $e^{-i\omega_n t} = e^{-i\omega'' t - i\omega' t}$.

При этом, принимая во внимание, что характеристические значения комплексны, получаем

$$(k_2^{*2} - k_1^2) \int \psi_1 \psi_2^* dV = \oint [\psi_2^* \times \text{rot } \psi_1 - \psi_1 \times \text{rot } \psi_2^*] \cdot \nu d\Sigma$$

(ν — внешняя нормаль к Σ) или для $\psi = \mathbf{E}$:

$$(k_2^{*2} - k_1^2) \int \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* dV = \int [k_1 \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1 - k_2^* \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^*] \cdot \nu d\Sigma$$

и аналогичную формулу для $\psi = \mathbf{H}$. Произведения $\mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^*$ должны быть теперь в среднем направлены параллельно нормали ν , так что интеграл, стоящий в правой части, никогда не может обратиться в нуль (одновременно для всех пар характеристических функций). Однако при незначительном излучении часто бывает возможным оставить без внимания волновую зону и рассматривать колебания как незатухающие.

Следует еще заметить, что затухающие колебания, в противоположность незатухающим, должны начинаться в определенный момент времени (иначе интенсивность их в достаточно отдаленные предыдущие моменты времени была бы бесконечно велика). Поэтому зависимость их от времени может быть представлена множителем $e^{-i\omega t}$, начиная только от этого определенного момента. Случай, когда они делятся неограниченно от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, в действительности не может быть осуществлен.

§ 7. Важнейшие частные случаи собственных колебаний.

1. Шар. В случае собственных колебаний меридионального типа в телах с симметрией вращения, магнитные силовые линии должны, как это явствует из соображений симметрии, совпадать с параллельными кругами, а электрические — проходить в меридиональных плоскостях. Условия (44b) и следовательно допущение (43), которым мы пользовались в § 5 для волн в бесконечно

длинных проводах или кабелях с круглым сечением, остаются справедливыми также в случае тел вращения конечной длины. Однако формулу (45) для ψ и $A = A_z$ мы должны заменить более общим выражением

$$\psi^{(h)} = \psi^{(h)}(r, z) e^{-i\omega t} \quad (h = 0, 1). \quad (52)$$

Соответственно этому вместо формул (45а) мы получим

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad E_\alpha = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{i\omega A}{c}, \\ H_r &= 0, \quad H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r}, \quad H_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (52a)$$

где φ и A связаны друг с другом согласно (41) соотношением:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} \epsilon \mu \varphi. \quad (52b)$$

Формула $H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r}$ получается из выражений:

$$H_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial r} \sin \alpha, \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial r} \cos \alpha,$$

в связи с $H_\alpha = H_x \sin \alpha - H_y \cos \alpha$.

Введя вместо цилиндрических координат (z, r, α) полярные (R, θ, α) с началом $R=0$ в какой-нибудь точке O на оси Z , будем иметь $z = R \cos \theta$, $r = R \sin \theta$ и соответственно этому

$$\begin{aligned} E_r &= E_R \sin \theta + E_\theta \cos \theta, \\ E_z &= E_R \cos \theta - E_\theta \sin \theta, \end{aligned}$$

или наоборот:

$$E_R = E_r \sin \theta + E_z \cos \theta, \quad E_\theta = E_r \cos \theta - E_z \sin \theta,$$

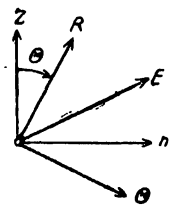


Рис. 30.

как это видно из рис. 30.

Эти преобразования справедливы не только для E , но и для любых векторов, лежащих в меридиональной плоскости. Принимая во внимание, что составляющие вектора $\nabla\psi$ в координатах

R и θ равны $\frac{\partial \psi}{\partial R}$ и $\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, имеем

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{i\omega}{c} A \cos \theta, \quad E_\alpha = 0, \quad E_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{i\omega}{c} A \sin \theta, \\ H_R &= 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial R} \sin \theta - \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial \theta} \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (52c)$$

$$\frac{i\omega}{c} \varepsilon\mu\varphi = \frac{\partial A}{\partial R} \cos \theta - \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial \theta} \sin \theta. \quad (52d)$$

Решение уравнения $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ при обычных граничных условиях представляет для случая металлического тела с симметрией вращения также значительные математические трудности и только в предположении бесконечно большой проводимости может быть получено сравнительно просто.

Мы ограничимся здесь простейшим (впервые рассмотренным Дж. Дж. Томсоном) случаем идеально проводящего шара. При этом можно воспользоваться приведенными в I томе (гл. V, § 10) разложениями потенциалов φ и A , представляющими общее решение уравнения $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ вне шара и особенно пригодными для удовлетворения граничных условий на шаровой поверхности.

Другими словами — в этом случае поверхностные заряды и токи, порождающие искомое электромагнитное поле, можно заменить некоторым числом мультиполей, помещенных в центре шара.

Так как A_x и A_y равны нулю, а Z является осью симметрии, то для $A_z = A$ получается следующее общее выражение:

$$A = J_0\psi + J_1 \frac{\partial}{\partial z} \psi + \frac{J_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + \dots + \frac{J_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \psi + \dots, \quad (53)$$

где

$$\psi = \frac{e^{ikR}}{R} \quad \left(k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \right), \quad (53a)$$

а J_0, J_1, \dots означают неопределенные постоянные. Положим сначала все эти постоянные кроме J_0 равными нулю и соответствующим выбором параметра k попытаемся подчинить полученное решение граничным условиям. В рассматриваемом случае эти условия сводятся просто к

$$E_\theta = 0 \text{ при } R = a, \quad (53b)$$

где a означает радиус шара.

Так как $A = J_0\psi$ не зависит от θ , мы имеем согласно (52c):

$$\varphi = \frac{c}{i\omega\varepsilon\mu} \frac{\partial A}{\partial R} \cos \theta,$$

и следовательно по (52c):

$$E_\theta = \frac{c}{i\omega\varepsilon\mu R} \frac{\partial A}{\partial R} \sin \theta - \frac{i\omega}{c} A \sin \theta.$$

Таким образом условие (53b) действительно удовлетворяется, если для $R = a$ положить

$$\frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R} + k^2 A = 0.$$

Так как $A = J_0 \psi$, то это даст

$$J_0 \psi \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{ik}{a} + k^2 \right) = 0, \quad \text{т. е.} \quad k^2 + \frac{ik}{a} - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Это и есть искомое уравнение для параметра k (или для соответствующей частоты $\omega = \frac{kc}{\sqrt{\epsilon\mu}}$). Его решение имеет вид:

$$k = -\frac{i}{2a} + \frac{\sqrt{3}}{2a}, \quad (54)$$

или

$$\omega = \omega' - i\omega'', \quad (54a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega' = 2\pi\nu' &= \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{\sqrt{3}c}{2a\sqrt{\epsilon\mu}} \\ \omega'' &= \frac{c}{2a\sqrt{\epsilon\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (54b)$$

Таким образом полученное решение, соответствующее очевидно электрическому „основному тону“ шара, в точности совпадает по частоте колебаний, затуханию и свойствам электромагнитного поля (вне шара) с колебаниями элементарного дипольного осциллятора, находящегося в центре шара. Естественная частота этого эквивалентного осциллятора, согласно (35а, б) гл. III, равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega'^2 + \omega''^2} = \frac{c}{a\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (54c)$$

Так как в случае идеального проводника затухание собственных колебаний зависит исключительно от излучения, то эффективный заряд и массу эквивалентного осциллятора или вернее отношение $\frac{e^2}{m}$ можно определить формулой

$$\omega'' = \frac{e^2 \omega'^2}{3mc^3}$$

[см. (40с) гл. III], т. е.

$$\frac{e^2}{2mc^2} = a\sqrt{\epsilon\mu}.$$

При $\epsilon = \mu = 1$, m означает электромагнитную массу распределенного на шаровой поверхности заряда e .

Рассмотрим теперь второй член ряда (53) и попытаемся удовлетворить граничному условию (53b) выражением

$$A = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial R} \cos \theta.$$

При этом получаем, как и раньше:

$$i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mu \varphi = J_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \cos^2 \theta + \frac{J_1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \sin^2 \theta$$

и

$$E_\theta = \frac{J_1}{i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mu} \left\{ \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} + k^2 \frac{\partial \psi}{\partial R} \right\} \cos \theta \sin \theta.$$

Условие (53b) оказывается выполненным, если k определено уравнением

$$\frac{2}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \left(k^2 - \frac{2}{R^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0, \text{ при } R = a,$$

т. е.

$$\left(k^2 - \frac{2}{a^2} \right) \left(ik - \frac{1}{a} \right) + \frac{2k^2}{a} + \frac{4ik}{a^2} - \frac{6}{a^3} = 0.$$

Таким способом получают первый электрический „обертон“ шара. Однако этот метод не может быть распространен далее без всякого видоизменения; например третий член (53) дает для E_θ выражение, которое не обращается в нуль одновременно для всей шаровой поверхности. Чтобы получить третье собственное колебание шара, т. е. второй обертон, нужно положить

$$A = J_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + J_0 \psi,$$

что при некотором определенном значении отношения $J_0:J_2$ позволяет удовлетворить условию (53b). Вообще векторный потенциал n -го обертона выражается суммой вида:

$$A^{(n)} = J_n \frac{\partial^n \psi}{\partial z^n} + J_{n-2} \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial z^{n-2}} + \dots$$

при определенных отношениях между амплитудными коэффициентами $J_n:J_{n-2}:\dots$. Это выражение можно записать в более компактной форме, введя шаровые функции соответствующего порядка. Но мы не будем касаться здесь этого вопроса, имеющего чисто математический интерес (см. приложение § 3).

Легко убедиться, с помощью формулы $H_a = -\frac{\partial A}{\partial r}$ [см. (50a)], и соотношения

$$A = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial R} \cos \theta,$$

что первый обертон имеет узловую линию $\theta = \frac{\pi}{2}$.

По отношению к этому колебанию шар эквивалентен некоторому квадрупольному осциллятору, расположенному в его центре. По отношению ко второму обертону он эквивалентен системе, состоящей из одного осциллятора третьего порядка и одного простого осциллятора. В этом случае получаются два узла, положение которых определяется довольно сложным уравнением, содержащим отношение $\frac{J_0}{J_2}$.

Напомним при этом, что под узловыми линиями мы понимаем места, где плотность электрического тока и следовательно связанная с нею напряженность магнитного поля равна нулю (в согласии с первоначальным определением). Однако мы уже упоминали тот факт, что узлы плотности тока совпадают с пучностями плотности электрического заряда (и следовательно связанной с ним напряженностью электрического поля). В этом легко убедиться на рассматриваемом примере. В случае основного колебания согласно (45b) и (46c) имеем:

$$E_R = \frac{J_0}{i^{\omega} - \epsilon \mu} \left(k^2 \psi - \frac{d^2 \psi}{dR^2} \right) \cos \theta = \frac{4\pi}{\epsilon}$$

$$H_a = -J_0 \frac{\partial \psi}{\partial R} \sin \theta = 4\pi \mu |k|.$$

Таким образом в то время, как H на обоих полюсах обращается в нуль, а на экваторе шара ($\theta = \frac{\pi}{2}$) имеет „пучность“, — напряженность электрического поля E (и плотность заряда) на экваторе исчезает, а на полюсах имеет пучности. При этом фазы E и H смещены относительно друг друга на $\frac{\pi}{2}$. Такое же соотношение имеет место для всех обертонов. Следует заметить, что оно типично для стоячих электромагнитных волн произвольного вида.

2. Прямолинейный провод конечной длины. Это соотношение выступает еще яснее в предельном случае сильно вытянутого „стержнеобразного“ тела вращения, которое можно трактовать как провод конечной длины. Точная форма обоих концов при этом практически не имеет значения. Узловые места (для обертонов невысокого порядка) разделяют

провод на некоторое число равных отрезков, т. е. таким же точно образом, как и в случае упругих колебаний натянутой струны. Собственные электрические колебания каждого отрезка при этом тождественны с основными колебаниями отдельного провода такой же длины.

Что касается основных колебаний, то легко показать, что соответствующая им длина волны λ равна удвоенной длине провода l (так же, как и в случае упругих колебаний этого провода, с закрепленными концами). Электромагнитное поле провода на расстояниях малых сравнительно с его длиной — за исключением областей, окружающих оба конца — совпадает с полем бесконечно длинного провода такой же длины. Таким образом, мы можем воспользоваться прежним определением потенциала A , относящимся к бесконечному проводу, с той существенной разницей, что теперь мы имеем стоячие, а не бегущие в одном определенном направлении волны.

Следовательно, вблизи провода получаем, согласно (45):

$$A = [A_1(r) e^{iqz} + A_2(r) e^{-iqz}] e^{-i\omega t} = A(r) \cos(qz + \delta) e^{-i\omega t}. \quad (55)$$

Так как мы считаем провод идеально проводящим, то можно положить

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$$

и

$$A = c_1 \lg \frac{1}{r} + c_2. \quad (55a)$$

Далее так же, как в случае бегущих волн, имеем $c_1 = 2j$ и (по формуле $H_z = -\frac{\partial A}{\partial z}$)

$$H = \frac{2j}{r},$$

где j означает силу тока в соответствующем сечении провода. Согласно (55) получаем таким образом

$$j = j_0 \cos(qz + \delta) e^{-i\omega t}. \quad (55b)$$

Поместим начало координат в середине провода, так что для его концов $z = \pm \frac{l}{2}$. Так как эти точки должны быть узлами j , то

$$\cos\left(\frac{ql}{2} + \delta\right) = \cos\left(-\frac{ql}{2} + \delta\right) = 0,$$

т. е. или

$$\delta = 0 \text{ и } ql = \pi n \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

или

$$\delta = \frac{\pi}{2} \text{ и } ql = \pi n \text{ (} n = 2, 4, 6, \dots \text{)}.$$

Переходя к вещественным величинам, получаем:

$$j = j_0 \left. \begin{array}{l} \cos \left(\frac{\pi n z}{l} \right) \cos \omega_n t \text{ для нечетного } n \\ \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) \cos \omega_n t \text{ для четного } n \end{array} \right\} \quad (55c)$$

Параметр q связан с длиной волны соотношением $q = \frac{2\pi}{\lambda}$.
Таким образом

$$\lambda = 2l, \frac{2l}{2}, \frac{2l}{3}, \dots, \frac{2l}{n}, \dots \quad (55d)$$

Частоты соответствующих собственных колебаний определяются формулой $\nu = \frac{c}{\lambda \sqrt{\epsilon\mu}}$, или

$$\omega_n = \frac{\pi c}{l \sqrt{\epsilon\mu}} \cdot n. \quad (55e)$$

Эти результаты не могут быть получены обычным путем, т. е. из граничного условия $E_z = 0$, так как в соотношение (55) не входит конечная длина провода. Однако легко убедиться в том, что это условие фактически выполняется повсюду, помимо концов провода.

Соотношения между магнитными и электрическими величинами, найденные нами для бегущих волн, остаются в силе и для стоячих волн, исключая уже упомянутый пространственно-временной сдвиг амплитуды и фазы на четверть соответствующих периодов (λ и $\tau = \frac{1}{\nu}$). Например, согласно уравнению

$$\frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0, \quad (56)$$

где e означает линейную плотность заряда (на единицу длины), имеем, в связи с (55c):

$$e = e_0 \frac{\sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right)}{\cos \left(\frac{\pi n z}{l} \right)} \sin \omega_n t, \quad (56a)$$

где

$$\frac{\omega_n}{c} e_0 = \frac{\pi n}{l} j_0,$$

т. е. согласно (55c)

$$e_0 = j_0 \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (56b)$$

Напряженность электрического поля выражается через e точно таким же образом, как напряженность магнитного через j , т. е. посредством формулы

$$E = \frac{2e}{r},$$

и соответствует скалярному потенциалу

$$\varphi = 2e \lg \frac{1}{r} + c_2. \quad (56c)$$

Само собой разумеется, что предыдущие формулы имеют силу лишь вблизи провода, т. е. на таких расстояниях r от его оси, которые малы по сравнению с его длиной l . На больших расстояниях электромагнитное поле следует вычислять при помощи общих формул для запаздывающего потенциала на основе заданного распределения заряда и тока [см. (55c), (56a), (56b)]. Учитывая это поле на далеком расстоянии, можно вычислить затухание собственных колебаний и исправить таким путем предыдущие формулы, в которых колебания считались незатухающими.

Поле на далеком расстоянии может быть представлено в виде ряда (53), и его определение сведено к вычислению коэффициентов J_0, J_1, \dots

Для основного колебания, как и в случае шара, имеем приближенно

$$A_s = A = J_0 \psi \left(\psi = \frac{e^{iqR}}{R}, \quad q = \frac{\pi}{l} \right).$$

Здесь $J = J_0 e^{-i\omega t}$ означает „электрический импульс“ провода. Вводя соответствующий электрический момент p и принимая во внимание, что $J = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t}$, получаем

$$J_0 = -\frac{i\omega}{c} p_0.$$

Энергия, излучаемая в единицу времени, выражается через p_0 по известной формуле

$$\bar{Q} = \frac{2}{3} \frac{\omega^4}{c^3} \cdot \frac{p_0^2}{2}$$

[см. (23a), т. I, стр. 227]. Подставив вместо p_0 величину J_0 , получим:

$$\bar{Q} = \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{c} J_0^2. \quad (57)$$

Согласно определению J_0 [т. I, стр. 177] имеем далее

$$J_0 = j_0 \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) dz = \frac{2j_0 l}{\pi}. \quad (57a)$$

Средняя энергия вблизи провода выражается через j_0 (если ограничиться случаем $\varepsilon = \mu = 1$) следующим образом:

$$\bar{W} = 2 \int \frac{\bar{H}^2}{8\pi} dV = \frac{1}{2\pi} j_0^2 \int \cos^2 \frac{\pi z}{l} dV.$$

Мы полагаем здесь $dV = 2\pi r dr \cdot dz$ и интегрируем по z по всей длине провода и по r от $r = a$ (радиус провода) до $r = al$, где a — численный коэффициент порядка единицы. Точное определение этого коэффициента не играет существенной роли, так как энергия W концентрируется главным образом в непосредственной близости от провода.

Мы получаем таким образом

$$\bar{W} = j_0^2 \int_a^{al} \frac{dr}{r} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \cos^2 \frac{\pi z}{l} \cdot dz = \frac{1}{2} l j_0^2 \lg \frac{al}{a}, \quad (57b)$$

Декремент затухания ω'' определяется формулой

$$-\frac{d\bar{W}}{dt} = \omega'' \bar{W} = \bar{Q}, \quad (57c)$$

откуда, согласно (57) и (57a), следует

$$\omega'' = \frac{8}{3\pi^2} \frac{l}{c} \frac{\omega^2}{\lg \frac{al}{a}},$$

или окончательно, согласно (55e):

$$\omega'' = \frac{8}{3} \frac{c}{l \cdot \lg \frac{al}{a}}. \quad (57d)$$

Эту формулу можно вывести еще другим, несколько более простым способом, который совсем не требует рассмотрения поля в волновой зоне. А именно вместо излучения будем рассматривать связанную с ним планковскую силу трения на единицу заряда

$$\frac{2e}{3c^3} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} = \frac{2}{3c^2} \frac{d^2 e \mathbf{v}}{dt^2 c},$$

обусловливаемую колебаниями заряда e или импульса $\frac{e\mathbf{v}}{c}$. Так как эта добавочная сила не зависит от расстояния, то результирующая сила трения, происходящая от собственных колебаний всего провода, равна

$$\frac{2}{3c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{J} = -\frac{2}{3} \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{J} \quad \left(\mathbf{J} = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \mathbf{j} dz \right). \quad (58)$$

Это выражение можно трактовать как напряженность некоторого добавочного однородного электрического поля — „поля трения“. Работа, произведенная силой трения в единицу времени, равна произведению (58) на $c \int \mathbf{j} dz = c\mathbf{J}$. Таким образом для среднего значения этой работы мы получаем прежнее выражение (57).

Энергию W можно рассматривать как „механическую“ энергию колебаний, т. е. как сумму потенциальной (электрической) и кинетической (магнитной) энергии, и представить в форме

$$W = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} (Aj + \varphi e) dz = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} Aj dz. \quad (58a)$$

Вблизи провода $A = 2j \lg \frac{1}{r} + c_2$. Постоянную c_2 можно приближенно определить из того условия, что на расстояниях r порядка длины провода $A \cong 0$. Это дает $c_2 = 2j \lg al$ ($\alpha \cong 1$) и

$$A = 2j \lg \frac{\alpha l}{r}. \quad (58b)$$

В интеграле (58a) значение A относится к поверхности провода $r = a$. Таким образом мы имеем

$$W = 2 \lg \frac{\alpha l}{a} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} j^2 dz = \frac{1}{2} l j_0^2 \lg \frac{\alpha l}{a}$$

в согласии с (57b).

Определяя таким же путем затухание обертонов, тотчас же получаем, что силы трения для колебаний четного порядка ($n = 2, 4, \dots$), вычисленные по (58), обращаются в нуль. Отсюда следует, что эти колебания не дают никакого излучения. Однако это заключение неправомерно. Планковская сила трения представляет, строго говоря, только реакцию излучения, обусловленного дипольными колебаниями. Но, как мы видели в

первом томе (стр. 173 и след.), квадрупольные колебания и вообще колебания любого порядка также приводят к некоторому излучению. Рассмотрим например первый обертон провода ($n=2$). Его поле на далеком расстоянии совпадает в первом приближении с электромагнитным полем квадрупольного осциллятора и определяется векторным потенциалом

$$A = A_z = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial R} \cos \theta,$$

где

$$J_1 = j_0 \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \sin \frac{2\pi z}{l} \cdot z dz = j_0 \frac{l^2}{-\pi}.$$

Для очень больших расстояний R имеем (при $\epsilon = \mu = 1$):

$$\frac{d\psi}{dR} \cong iq\psi$$

и

$$E = H = -\frac{\partial A}{\partial r} = J_1 q^2 \psi \cos \theta \sin \theta.$$

Средний поток энергии через поверхность шара радиуса R равен следовательно:

$$\bar{Q} = \frac{c}{4\pi} \int \frac{|H|^2}{2} dS = \frac{1}{2} c q^4 J_1^2 \overline{\cos^2 \theta \sin^2 \theta},$$

где черта над $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ означает среднее значение этого выражения для всей шаровой поверхности. Так как

$$\overline{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \overline{\cos^2 \theta} - \overline{\cos^4 \theta} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15},$$

то

$$\bar{Q} = \frac{1}{15} c q^4 J_1^2,$$

или, в виду соотношений

$$q = \frac{2\pi}{l} \quad \text{и} \quad J_1 = j_0 \frac{l^2}{2\pi},$$

$$\bar{Q} = \frac{4}{15} \pi^2 c j_0^2.$$

С другой стороны, согласно (58a) и (58b), мы имеем

$$W = 2 \lg \frac{\alpha l}{a} \int_{-\frac{l}{4}}^{+\frac{l}{4}} \bar{I}^2 dz = \frac{1}{2} I j_0^2 \lg \frac{\alpha l}{a},$$

как и прежде.

Таким образом, согласно (57с)

$$\omega^n = \frac{\bar{Q}}{W} = \frac{8}{15} \pi^2 \frac{c}{l \cdot \lg \frac{al}{a}}.$$

Полученные результаты не точны, так как поле провода в волновой зоне представляется для каждого собственного колебания бесконечным рядом вида (53). Например, в случае основного колебания имеем (т. I, стр. 177)

$$J_k = \frac{1}{k!} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \cos \frac{\pi z}{l} \cdot z^k dz.$$

Интеграл, стоящий в правой части, обращается в нуль для нечетных значений k ; напротив, для четных значений он остается отличным от нуля. Точно так же, в случае первого обертона мы получаем коэффициенты J_n , которые для нечетных значений k не обращаются в нуль. То же самое справедливо и для высших обертонов; именно при нечетном n имеем

$$J_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \cos \frac{n\pi z}{l} \cdot z^k dz = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2 \left(\frac{l}{n\pi} \right)^{k+1} \quad (k \text{ четное}),$$

а при четном n :

$$J_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \sin \frac{n\pi z}{l} \cdot z^k dz = (-1)^{\frac{n}{2}-1} l \left(\frac{l}{n\pi} \right)^k \quad (k \text{ нечетное}).$$

При помощи этих выражений можно вычислить общее излучение для каждого рода колебаний. Однако мы не будем останавливаться на этом вопросе.

Следует заметить, что прямолинейные провода конечной длины, весьма большой по сравнению с их поперечными размерами, применяются в радиотехнике как передающие антенны (электрического типа). Их собственные колебания возбуждаются специальными генераторами и поддерживаются аналогично тому, как упругие собственные колебания натянутой струны при помощи смычка.

При этом затухание излучения не играет существенной роли. Распространение электромагнитного поля, возбуждаемого такими незатухающими колебаниями, было подробно нами рассмотрено в § 3. Но там шла речь только о дипольных колебаниях.

Для того, чтобы получить полное решение задачи, необходимо обобщить теорию Зоммерфельда, чего до сих пор не было сделано.

В предположении, что земля — идеальный проводник, это не представляет никакой трудности, но не имеет также никакого практического интереса.

3. Полость (прямоугольный ящик). В заключение этого параграфа исследуем теоретически важный вопрос о собственных колебаниях „металлической полости“, т. е. пустого пространства, ограниченного идеально проводящими (или „отражающими“) стенками. При этом, как уже было упомянуто выше, должны получаться стоячие незатухающие волны, длина и форма которых зависят от величины и формы металлической оболочки. Если последняя образует полиэдрическую поверхность, то волны являются плоскими. В частном случае прямоугольного ящика эти волны определяются особенно просто и наглядно.

Представим себе, что стенки ящика совпадают с координатными плоскостями, т. е. соответственно с плоскостями $x_l = a_l$ ($l=1, 2, 3$) и попытаемся удовлетворить граничным условиям

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (59)$$

выражениями вида

$$\psi = \psi_0 \frac{\cos(k_1 x_1)}{\sin(k_1 x_1)} \frac{\cos(k_2 x_2)}{\sin(k_2 x_2)} \frac{\cos(k_3 x_3)}{\sin(k_3 x_3)} e^{-i\omega t}. \quad (59a)$$

Эти выражения (где ψ означает произвольную электромагнитную величину) соответствуют суперпозиции восьми элементарных волн (в смысле § 4, гл. III) вида:

$$e^{i(\pm k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm k_3 x_3 - \omega t)},$$

которые получаются посредством отражения одной из них, например

$$e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)} \quad (59b)$$

от стенок ящика; ψ_0 означает амплитуду результирующего „стоячего“ колебания.

Условиям (59) можно удовлетворить, определив составляющие \mathbf{E} следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E'_1 \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \sin k_3 x_3 e^{-i\omega t}, \\ E_2 &= E'_2 \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \sin k_3 x_3 e^{-i\omega t}, \\ E_3 &= E'_3 \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos k_3 x_3 e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где

$$k_l = \frac{\pi}{a_l} n_l, \quad n_l \text{ — целые числа,} \quad (60a)$$

Что касается условия $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$, то оно удовлетворяется непосредственно. С другой стороны напряженность магнитного поля может быть определена из (60) уравнением

$$\frac{i\omega}{c} \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E},$$

которое дает

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H'_1 \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \cos k_3 x_3 \cdot ie^{-i\omega t}, \\ H_2 &= H'_2 \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos k_3 x_3 \cdot ie^{-i\omega t}, \\ H_3 &= H'_3 \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \sin k_3 x_3 \cdot ie^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (60b)$$

$$H'_1 = \frac{c}{\omega} (k_2 E'_3 - k_3 E'_2) \text{ и т. д.} \quad (60c)$$

Таким образом условие $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0$ точно так же выполняется, как, разумеется, и следовало ожидать (ибо оно является следствием условия $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ и уравнений поля).

Предыдущие формулы представляют, следовательно, определенное собственное колебание рассматриваемого пустого пространства (или металлической оболочки). Длина любой из восьми бегущих волн, из которых составлено каждое собственное колебание, равна

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}},$$

т. е. согласно (60a)

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}}}, \quad (61)$$

а частота колебаний

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}}. \quad (61a)$$

Направление этих волн точно так же, как и их длину, можно интерпретировать весьма наглядным образом. Именно при соединении двух бегущих волн $+k_1, +k_2, +k_3$ и $-k_1, -k_2, -k_3$ в одну стоячую, узлы напряженности электрического поля образуют систему из $n_1 + n_2 + n_3$ равноотстоящих плоскостей, пересекающих ребра ящика a_1, a_2, a_3 соответственно на n_1, n_2, n_3 равных отрезков. Эти соотношения представлены на рис. 31 для случая $n_1 = 2, n_2 = 3$ и $n_3 = 4$. Мы предполагали здесь числа n_1, n_2, n_3 положительными. Однако они могут с одинаковым успехом принимать и отрицательные значения, а также обра-

щаться в нуль (не одновременно). Направляющие косинусы нормалей к рассматриваемому семейству плоскостей относятся при этом друг к другу как $n_1 : n_2 : n_3$.

Согласно уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} должны лежать в этих плоскостях; в самом деле, согласно (60) и (60b), эти уравнения принимают вид $E'_1 k_1 + E'_2 k_2 + E'_3 k_3 = 0$ и соответственно $H'_1 k_1 + H'_2 k_2 + H'_3 k_3 = 0$.

Выражения $E'_1 \cos k_1 x_1$, $E'_2 \cos k_2 x_2$, $E'_3 \cos k_3 x_3$ можно в (60) заменить через $E''_1 \sin k_1 x_1$, $E''_2 \sin k_2 x_2$, $E''_3 \sin k_3 x_3$, отчего граничное условие $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ остается ненарушенным. Соответственно этому выражения $H'_1 \sin k_1 x_1$, $H'_2 \sin k_2 x_2$, $H'_3 \sin k_3 x_3$ в (60b) следует заменить через $H''_1 \cos k_1 x_1$, $H''_2 \cos k_2 x_2$, $H''_3 \cos k_3 x_3$. Таким образом для каждого типа колебаний получаются две различные амплитуды колебаний, которые можно определить таким образом, чтобы они были перпендикулярны друг к другу ($\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'' = 0$).

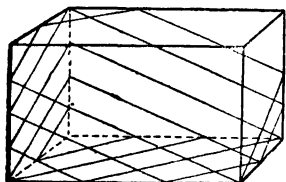


Рис. 31.

Для многих целей важно оценить число типов колебаний (собственных колебаний), частота которых лежит в заданном интервале между ν и $\nu + \Delta\nu$. Эта оценка производится приближенно следующим образом. Каждому типу колебаний (если оставить в стороне „направление поляризации“) соответствует определенная система чисел n_1, n_2, n_3 , которые можно трактовать как целочисленные координаты точки в „пространстве \mathbf{n} “. Для колебаний, частота которых меньше ν , эти точки, согласно (61a), лежат внутри или на поверхности эллипсоида:

$$\frac{n_1^2}{\left(\frac{2a_1\nu}{c}\right)^2} + \frac{n_2^2}{\left(\frac{2a_2\nu}{c}\right)^2} + \frac{n_3^2}{\left(\frac{2a_3\nu}{c}\right)^2} = 1.$$

Число их для достаточно большого значения ν (т. е. при достаточно малой длине волны) численно равно объему эллипсоида, т. е.

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{2a_1\nu}{c}\right) \left(\frac{2a_2\nu}{c}\right) \left(\frac{2a_3\nu}{c}\right) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8a_1 a_2 a_3 \nu^3}{c^3}.$$

Рассматривая колебания, соответствующие одним и тем же абсолютным значениям n_1, n_2, n_3 , как равноценные и различая два колебания с перпендикулярными друг к другу направлениями поляризации, следует заменить множитель 8 в правой части на 2. Число собственных колебаний, частота которых меньше,

чем ν , или длина волны которых больше, чем $\lambda = \frac{c}{\nu}$, выражается следовательно формулой

$$N_\nu = \frac{8\pi}{3} \frac{V}{c^3} \nu^3 = \frac{8\pi}{3} \frac{V}{\lambda^3} \quad (V = a_1 a_2 a_3). \quad (61b)$$

Отсюда дифференцированием получаем (при $\frac{\Delta\nu}{\nu} \ll 1$)

$$\Delta N_\nu = 8\pi \frac{V}{c^3} \nu^2 \Delta\nu. \quad (61c)$$

Можно показать, что эта формула справедлива не только для прямоугольного ящика, но и для полости произвольной формы с объемом V .

§ 8. Вынужденные колебания и явления дифракции.

1. Общий способ рассмотрения. Вынужденные электрические колебания, возбуждаемые в ограниченном теле (или в неограниченном теле с полостью конечной величины) заданным первичным полем, могут быть определены, вообще говоря, следующим образом.

Обозначим внешнее или первичное электромагнитное поле через ψ^0 (E^0 , H^0 , φ^0 , A^0 и т. д.). Внутри объема, занимаемого рассматриваемым телом (частично также и вне последнего), оно удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi^0 + k_0^2 \psi^0 = 0 \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c} \right).$$

В присутствии тела получаем результирующее поле (ψ), которое в объеме V удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \left(k^2 = k_0^2 \epsilon_s \mu, \quad \epsilon_s = \epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega} \right),$$

а на поверхности S — граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Delta E \times \mathbf{n} &= 0, & \Delta H \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \Delta \epsilon_s E \cdot \mathbf{n} &= 0, & \Delta \frac{H}{\mu} \times \mathbf{n} &= 0. \end{aligned}$$

Это результирующее поле мы рассматриваем теперь как сумму первичного и вторичного поля

$$\psi' = \psi - \psi^0.$$

Вычитая уравнения для ψ и ψ^0 друг из друга, получаем дифференциальное уравнение для ψ' внутри V :

$$\nabla^2 \psi' + k^2 \psi' = - (k^2 - k_0^2) \psi^0, \quad (62)$$

в то время как вне V

$$\nabla^2 \psi' + k_0^2 \psi' = 0. \quad (62a)$$

Так как $\Delta \psi^0 = 0$, то граничные условия можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta E' \times \mathbf{n} = 0, \quad \Delta \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \Delta \varepsilon_e E' \cdot \mathbf{n} = -\Delta \varepsilon_e E^0 \cdot \mathbf{n}, \quad \Delta \frac{\mathbf{H}'}{\mu} \times \mathbf{n} = -\Delta \frac{\mathbf{H}^0}{\mu} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \right\} \quad (62b)$$

причем правые части (62) и (62b) считаются известными.

Эти уравнения вместе с добавочным условием, что на бесконечности ψ' обращается в нуль, представляют собою полную формулировку задачи и допускают однозначное решение (см. приложение, § 3). В предельном случае идеального проводника ($|k| = \infty$) уравнения (62) и (62b) заменяются следующими:

$$\left. \begin{aligned} \psi' = -\psi^0 + \text{const}, \\ E' \times \mathbf{n} = -E^0 \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{H}^0 \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \right\} \quad (62c)$$

при этом в граничные условия входят значения ψ вне объема V .

Вторая группа граничных условий (62b) преобразуется в уравнения

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 4\pi\eta, \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 4\pi\mathbf{k}$$

для поверхностной плотности свободного заряда и тока.

2. Качественное рассмотрение двух предельных случаев. Точное определение вынужденных колебаний в теле конечных размеров представляет вообще говоря еще более трудную задачу, чем определение собственных колебаний. Эта задача решается сравнительно просто в том предельном случае, когда внешняя сила обусловливается весьма удаленным осциллятором, частота колебаний которого мала по сравнению с собственной частотой тела. Далее, длина падающих волн должна быть велика по сравнению с линейными размерами тела, так что внешнее электромагнитное поле, в которое последнее помещено, можно было бы трактовать как однородное. Если известны собственные колебания тела, то его можно заменить некоторым числом гармонических осцилляторов с определенными собственными частотами ω' , декрементами затухания ω'' и „чувствительностями“ $\frac{e^2}{m}$.

Вынужденный электрический момент тела, или вернее часть этого момента, синхронно колеблющаяся с напряженностью первичного электрического поля, с достаточным приближением можно при этом представить рядом:

$$\mathbf{p} = \mathbf{E} \cdot \sum \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega''}$$

Здесь ω_0 означает не собственную частоту ω' соответствующего замещающего осциллятора, а его резонансную частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\omega'^2 + \omega''^2}$$

[см. формулы (36) и (35b) гл. III]. Например для основного колебания сферического идеально проводящего тела, согласно (54c) и (54d), имеем (при $\varepsilon = \mu = 1$):

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{1}{a} \quad \text{и} \quad \frac{e^2}{m} = 2c^2 a.$$

Соответствующая часть вынужденного момента равна следовательно

$$\mathbf{p} = \frac{2c^2 a \mathbf{E}}{\frac{c^2}{a^2} - \omega^2 + i \frac{\omega c}{a}},$$

или, если вместо ω ввести длину волны $\lambda = \frac{2\pi i}{\omega}$,

$$\mathbf{p} = \frac{2a \mathbf{E}}{\frac{1}{a^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{2\pi i}{\lambda}}.$$

Разумеется, эта формула справедлива только в предположении, что $\lambda \gg a$ (иначе нельзя было бы приписать напряженности первичного поля \mathbf{E} одно и то же значение для всего шара). В предельном случае $\lambda = \infty$ (статическое поле) она приводится к виду

$$\mathbf{p} = 2a^3 \mathbf{E}.$$

В действительности полный момент шара в этом случае равен

$$\mathbf{p} = a^3 \mathbf{E}.$$

Последняя формула вытекает из того обстоятельства, что первичное поле внутри шара должно компенсироваться полем с напряженностью $-\frac{\mathbf{p}}{a^3}$. [См. вывод формулы (15), гл. II]. Разница между этой „статической“ формулой и предыдущей объясняется тем, что наряду с основным колебанием на величину результирующего дипольного момента влияют также обертоны шара.

Собственно говоря, предыдущая формула может быть справедлива только для случая шара. Для несферических тел векторы \mathbf{p} и \mathbf{E} должны вообще иметь различные направления и должны быть связаны друг с другом формулой вида

$$v_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} E_k.$$

Противоположный предельный случай весьма большого по сравнению с длиной волны и „гладкого“ тела многократно исследовался — в связи с распространением радиоволн вокруг земного шара — однако лишь в последнее время удалось удовлетворительно разрешить эту задачу.¹

Согласно опыту кривизна земли оказывает сравнительно ничтожное влияние на силу радиосигналов на больших расстояниях. В то время как солнечные лучи полностью задерживаются освещенной половиной земной поверхности, „радиолучи“ почти беспрепятственно достигают антиподов. Мы имеем здесь эффектный — но как увидим сейчас — неправильный пример так называемого явления диффракции, которое обыкновенно определяют как искривление световых лучей в совершенно однородной среде.

Откуда происходит эта разница между солнечными лучами или лучами земного источника света и радиолучами?

Согласно Хивисайду, причина этого различия заключается в сильном преломляющем или отражающем действии верхних слоев атмосферы на радиоволны, обусловленном ионизацией этих слоев ультрафиолетовыми лучами солнца, а также космическими лучами. Таким образом, в противоположность нижним слоям, они имеют значительную электропроводность. Вследствие этого они должны сильно поглощать падающие снизу волны и одновременно сильно отражать их (см. гл. IV, § 2). Наиболее благоприятные соотношения получаются (согласно Лармору) для коротких волн (от 10 до 40 м), периоды колебаний которых того же порядка или еще меньше, чем время столкновения ионов и электронов на соответствующей высоте. По отношению к таким колебаниям ионы ведут себя как совершенно свободные частицы. В этом случае по общим формулам § 3 гл. III ($\omega_0 = 0$) получаются вещественные отрицательные значения для электрической восприимчивости и соответственно (в виду того, что $v < 1$), скорости распространения большие, чем c . При таких обстоятельствах может иметь место сильная рефракция радиолучей.

Распространение радиоволн вокруг земли можно рассматривать таким же способом, как распространение поверхностных волн в кабеле, причем земля образует внутреннюю, а верхние атмосферные слои — внешнюю обкладку этого „кабеля“.

3. Простейшие задачи диффракции; диффракция света от экранов и отверстий. Настоящие явления диффракции наблюдаются тогда, когда „источник света“ (при этом под светом мы понимаем электромагнитные колебания произвольной частоты) находится на большом по сравнению с длиной волны расстоянии от данного непрозрачного тела. Они состоят, как уже было выше упомянуто, в искривлении световых лучей на границе тела, т. е. в их проникновении в геометрическую область

¹ Ср. статью Зоммерфельда во II томе „Дифференциальные уравнения математической физики“ Франка—Мизеса.

тени. Следует заметить, что это определение и постановка вопроса исходят из геометрической оптики, которая трактует световые лучи как траектории материальных частиц, т. е. описывает законы распространения света приближенным уравнением (54а) гл. IV. С точки зрения волновой оптики появление тени при падении электромагнитных волн на непрозрачное тело — или, другими словами, „прямолинейное распространение света“ — и представляет собой подлежащее объяснению явление. О резком ограничении тени не может быть при этом никакой речи. То же самое относится и к явлению диафрагмирования светового пучка. Световой пучок определенного сечения или телесного угла (в случае расходящихся или сходящихся волн) с точки зрения волновой оптики есть абстракция или идеализация такого же рода, как резкое ограничение теневого пучка или теневого конуса. Таким образом возникает вопрос о происхождении подобного пучка и о структуре волнового поля вблизи его геометрической границы.

Прежде всего заметим, что здесь, как и везде, речь идет о суперпозиции первичных электромагнитных волн и вторичных волн, создаваемых в данном теле вынужденными колебаниями. Присутствие какого-либо тела непосредственно не оказывает никакого влияния на распространение первичных волн в пространстве; однако практически нет смысла рассматривать эти волны отдельно от вторичных, так как наблюдению доступно только результирующее волновое поле.

Идеально проводящее тело, малое по сравнению с длиной волны, вообще не отбрасывает никакой тени. Вторичное поле при этом сводится к полю элементарного осциллятора с шаровой (или осевой) симметрией и уже на сравнительно небольших расстояниях практически исчезает по сравнению с первичным полем.

Вообразим теперь источник света, окруженный абсолютно поглощающей (или отражающей) металлической оболочкой с маленьким отверстием, соответствующим предыдущему телу. Если отверстие закрывается этим телом („экраном“), то свет из оболочки не выходит, т. е. вне оболочки первичные волны совершенно уничтожаются вторичными. Если теперь открыть отверстие, т. е. убрать рассматриваемое тело, то во внешнем пространстве должно получиться результирующее поле, дополнительное ко вторичному полю тела, т. е. совпадающее с ним по интенсивности и противоположное по фазе. Отсюда видно, что при прохождении света через отверстие, малое по сравнению с длиной волны, в поглощающем теле больших размеров получается не световой пучок, а сферические волны такого же типа, которые излучались бы элементарным источником света, находящимся в этом отверстии. Использованное здесь свойство дополнительности между отверстием и экраном такой же формы¹

¹ Так называемый „принцип Бабине“.

можно применять к отверстиям и экранам произвольной величины. Однако эту дополнителность не следует понимать в том смысле, что вторичное поле экрана при отсутствии оболочки (ψ_s) и вторичное поле оболочки с отверстием при отсутствии экрана (ψ_h) в сумме точно равно и противоположно первичному полю источника света (ψ_q). Уравнение

$$\psi_s + \psi_h + \psi_q = 0 \quad (63)$$

выполняется строго только тогда, когда рассматривают в месте и оболочку и экран. Первичное поле для первой равно при этом $\psi_q + \psi_s$ и для второго $\psi_q + \psi_h$, тогда как в отсутствии одного из этих элементов оно сводится к ψ_q . Если экран достаточно мал (но все же велик по сравнению с длиной волны), то можно пренебречь разностью между $\psi_q + \psi_s$ и ψ_q и считать уравнение (63) справедливым в этом примитивном смысле.

Явления дифракции, происходящие у малых отверстий или „диафрагм“, обыкновенно формально описываются на основе принципа Гюйгенса (т. I, стр. 167). Вместо того, чтобы вычислять вторичные волны (ψ_h), исходящие от замкнутой или бесконечно протяженной оболочки (с рассматриваемым отверстием), заслоняющей источник света, представим себе, что электромагнитное поле в (внешней) точке P обуславливается той частью первичных колебаний, которые по принципу Гюйгенса как бы исходят из поверхности S , ограниченной рассматриваемой диафрагмой, и определим колебания во внешней точке P по формуле

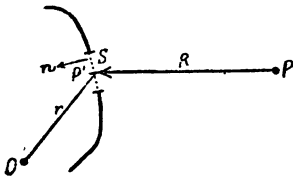


Рис. 32.

$$\psi = \int \frac{\nabla'_n \psi'}{4\pi R} dS - \int \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\psi'}{4\pi R} \right) \nabla'_n R dS \quad (63a)$$

[см. (44) т. I, стр. 172]. Здесь ψ' — значение ψ_q в точке P' поверхности S в момент $t' = t - \frac{R}{c}$ ($R = PP'$). Если источник света O находится на конечном расстоянии r от P' (рис. 32), то можно положить

$$\psi' = \psi_0 \frac{e^{ik(r+R)}}{r} \quad (\psi_0 = \text{const})$$

(временной множитель $e^{-i\omega t}$ мы отбрасываем).

Из определения оператора ∇' (градиент при постоянном t' , т. е. R) следует

$$\nabla'_n \psi' = \psi' \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$$

и далее

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\psi}{R} \right) = \frac{\psi}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}).$$

Таким образом имеем

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \psi_0 \int \frac{e^{ik(r+R)}}{rR} \left\{ ik [\cos(\mathbf{n}\mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}\mathbf{R})] - \left[\frac{\cos(\mathbf{n}\mathbf{r})}{r} - \frac{\cos(\mathbf{n}\mathbf{R})}{R} \right] \right\} dS,$$

или, если пренебречь $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{R}$ по сравнению с $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (т. е. ограничиться волновой зоной):

$$\psi = \frac{ik}{4\pi} \psi_0 \int \frac{e^{ik(r+R)}}{rR} [\cos(\mathbf{n}\mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}\mathbf{R})] dS. \quad (63b)$$

Поле, определяемое этой формулой, должно — во всяком случае приближенно — совпадать с $\psi_a + \psi_b$ или $-\psi_s$. Для проверки этого обстоятельства мы рассмотрим предельный случай бесконечно удаленного источника света. При этом заменим $\psi_0 \frac{e^{ikr}}{r}$

через $\psi_0 e^{ikz}$, где ось z проведена в направлении распространения первичных волн. Для простоты предположим далее, что диафрагма (или экран) параллельна плоскости волны и лежит в плоскости $z=0$ (в приложениях имеют дело почти исключительно с этим случаем). Таким образом имеем $\cos(\mathbf{n}\mathbf{r}) = \cos(\mathbf{n}z) = -1$, и следовательно, ограничиваясь небольшим углом отклонения, т. е. полагая $\cos(\mathbf{n}\mathbf{R}) \cong 1$,

$$\psi = -\frac{ik}{2\pi} \psi_0 \int \frac{e^{ikR}}{R} dS. \quad (63c)$$

Представим себе экран S в виде бесконечно тонкой и идеально проводящей металлической пластинки. Предположим, далее, что ψ_0 означает напряженность первичного электрического поля. Легко тогда показать, что величина $-\psi$ равна напряженности вторичного электрического поля в точке P .

В самом деле, на поверхности экрана напряженность вторичного электрического поля должна в точности компенсировать напряженность первичного поля, т. е. быть равной $-\psi_0$ [согласно (62)]. Напротив, напряженности первичного и вторичного магнитного поля обе одинаково направлены и равны ψ_0 (на поверхности экрана находится узел напряженности электрического и пучность напряженности магнитного поля). Поверхностная плотность электрического тока равна следовательно $\frac{2\psi_0}{4\pi} = \frac{\psi_0}{2\pi}$

Напряженность, обусловленная ускорением w заряда de на больших расстояниях R при $\mathbf{R} \perp \mathbf{w}$ выражается, как известно, формулой

$$d\mathbf{E}(t) = -\frac{de}{c^2 R} \mathbf{w} \left(t - \frac{R}{c} \right) = i\omega \frac{de \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2} \frac{e^{ikR}}{R}.$$

В рассматриваемом случае электрический импульс $\frac{de \cdot \mathbf{v}}{c}$ элемента поверхности dS равен $\frac{\psi_0}{2\pi} dS$. Следовательно имеем

$$\frac{dew}{c^2} = -\frac{i\omega}{c} \frac{\psi_0}{2\pi} dS = -\frac{ik}{2\pi} \psi_0 dS$$

и

$$\mathbf{E} = \frac{ik}{2\pi} \psi_0 \int \frac{e^{ikR}}{R} dS = -\psi.$$

Такой же результат получается и для не идеально проводящего экрана, если предположить его достаточно толстым и распространить интегрирование по всему объему.

В практических применениях формулы (63b) размеры экрана или отверстия бывают весьма малы в сравнении с расстоянием от рассматриваемой точки; но они могут быть велики относительно длины волны. Соответственно этому величину R в знаменателе (63b) можно заменить постоянной ($= R_0$), а в показателе разложить ее в ряд по степеням координат x', y' элемента поверхности dS относительно его центральной точки P' . При этом с точностью до величин третьего порядка относительно $\frac{x'}{R}$ и $\frac{y'}{R}$ имеем:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \\ &= R_0 - \frac{xx' + yy'}{R_0} + \frac{x'^2 + y'^2}{2R_0} - \frac{(xx' + yy')^2}{2R_0^3}, \end{aligned} \quad (64)$$

где x, y, z — координаты P относительно P' , так что

$$R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Положив для краткости

$$\frac{x}{R} = \alpha, \quad \frac{y}{R} = \beta, \quad R - R_0 \equiv f(x', y'), \quad (64a)$$

мы получаем таким образом

$$\psi = -\frac{ik}{2\pi} \frac{\psi_0 e^{ikR_0}}{R_0} \int e^{ikf(x', y')} dS. \quad (64b)$$

Рассмотрим сначала только члены, линейные относительно x' и y' в f (им соответствуют явления диффракции Фраунго-

фера). При этом в случае прямоугольного экрана (или отверстия) со сторонами a и b получаем:

$$\int e^{ikr} dS = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{-ikr\alpha'} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} e^{-ikr\beta'} dy' = ab \frac{\sin \frac{k\alpha a}{2} \cdot \sin \frac{k\beta b}{2}}{\frac{k\alpha a}{2} \cdot \frac{k\beta b}{2}}. \quad (65)$$

Значениям $\alpha = \beta = 0$ соответствует максимум $|\psi|^2$, т. е. максимум затемнения или освещения, в зависимости от того, рассматривается ли экран или отверстие. К нему примыкают однако еще побочные максимумы, появляющиеся в направлениях, определяемых формулами

$$\frac{k\lambda a}{2} = \pi \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad \frac{k\lambda b}{2} = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \text{ где } m \text{ и } n \text{ — целые числа,}$$

т. е.

$$\alpha = \frac{\lambda}{a} \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad \beta = \frac{\lambda}{b} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (65a)$$

(α и β — направляющие косинусы отклоненных лучей относительно соответствующих осей). Между этими максимумами лежат минимумы, т. е. места, в которых ψ обращается в нуль:

$$\alpha = \frac{\lambda}{a} m, \quad \beta = \frac{\lambda}{b} n.$$

В случае круглого экрана (диафрагмы) можно без ограничения общности положить $y = 0$ и следовательно

$$\frac{xx' + yy'}{R_0} = \rho r \cos \varphi,$$

где $\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, а φ означает угол между ρ и осью X . При этом получаем

$$\int e^{ikr} ds = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho r \cos \varphi} \rho d\rho d\varphi \quad (a \text{ — радиус экрана}),$$

или, воспользовавшись известными формулами:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\xi \cos \varphi} d\varphi = J(\xi) \quad \text{и} \quad \int_0^\xi J(\xi) \xi d\xi = \xi J_1(\xi)$$

(J и J_1 — бesselевы функции нулевого и первого порядка):

$$\int e^{ikr} dS = 2\pi a^2 \frac{J_1(kaa)}{kaa}. \quad (65b)$$

Функция $\frac{J_1(\xi)}{\xi}$ имеет абсолютный максимум $\frac{1}{2}$ при $\xi = 0$.

Следующие максимумы сравнительно очень слабы. Кривые $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$

и $\frac{J_1^2(\xi)}{\xi^2}$, характеризующие зависимость интенсивности света от угла отклонения, имеют форму, весьма аналогичную представленной схематически на рис. 33. Следует напомнить по этому

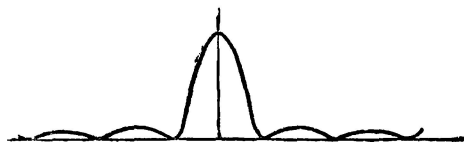


Рис. 33.

поводу, что под углом отклонения понимается угол между первичным и отклоненным лучом, т. е. в рассматриваемом случае угол между осью Z и вектором $R = P'P$. Величина α равна синусу этого угла; так как мы с самого начала

ограничились малыми углами отклонения, то эта величина приближенно совпадает с самим углом.

Чем больше радиус a или чем меньше длина волны λ , тем быстрее спадает освещенность (или затемнение) от своего максимума до нуля. Однако за этим нулевым местом лежат второстепенные максимумы, которые с точки зрения геометрической оптики должны были бы казаться совершенно непонятными. Обычное представление о резко ограниченном однородном цилиндрическом световом пучке или теневой области является таким образом грубым упрощением действительного положения вещей. В действительности граница между светом и тенью размывается своеобразной периодической тонкой структурой. Эта тонкая структура для случая „параллельного светового пучка“ с круглым сечением представлена на рис. 34. Угловые расстояния между следующими друг за другом максимумом и минимумом тем меньше, чем больше ka , т. е. чем меньше длина волны и чем больше поперечное сечение экрана или диафрагмы (πa^2).

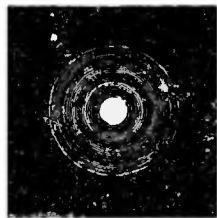


Рис. 34.

Несколько более сложный результат получается, если рассматривать источник света, находящийся на конечном расстоянии (т. е. расходящийся световой пучок), и в особенности если принять во внимание в разложении (64) и в соответствующем разложении для r члены второго порядка относительно $\frac{x'}{R}$, $\frac{y'}{R}$ и соответственно $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$ („явления дифракции Френеля“).

Однако мы не можем здесь детально входить в рассмотрение этого вопроса.

В изложенной упрощенной теории дифракции, вытекающей из приведенного выше анализа уравнения (63), т. е. принципа дополнительной, реакция вторичных волн не принята во внимание. Таким образом вынужденные электрические колебания определяются так, как если бы они возбуждались только первичными (заданными) силовыми колебаниями. Этот упрощенный способ совершенно тождествен с тем, которым мы пользовались в теории рассеяния электромагнитных волн (гл. IV, § 6). Различие между рассеянием и дифракцией состоит исключительно в том, что в первом случае имеют дело с некогерентными, а во втором — с когерентными вторичными колебаниями.

В самом деле, между элементарными силовыми колебаниями, происходящими от различных элементов пространственно протяженного вторичного излучателя (экрана, оболочки с отверстиями и т. д.) существуют определенные постоянные разности фаз, которые должны приниматься во внимание при вычислении энергии результирующих колебаний (в то время как при обыкновенном рассеянии элементарные энергии арифметически складываются).

4. Элементарная теория дифракции в случае параллельных первичных и вторичных лучей. Рассмотрим теперь некоторые общие законы явления дифракции и рассеяния для того случая, когда источник света (O) и точка (P) находятся на очень большом расстоянии от данного тела (P').

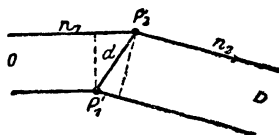


Рис. 35.

При этом не только первичные, но также и вторичные волны можно рассматривать как плоские, а соответствующие лучи — как прямолинейные. Обозначим через P'_1 и P'_2 две точки или вернее две очень малые частицы (например молекулы) тела. Разность фаз исходящих от них вторичных колебаний в точке P очевидно равна (см. рис. 35):

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} [(OP'_2 + P'_2P) - (OP'_1 + P'_1P)] = \frac{2\pi}{\lambda} [(r_2 + R_2) - (r_1 + R_1)].$$

Обозначим направление вектора \mathbf{r} (OP') и вектора \mathbf{R} ($P'P$) соответственно единичными векторами \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 , а отрезок $P'_1P'_2$ через \mathbf{d} . При этом получаем приближенно:

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_1 = d \cos(\mathbf{d}, \mathbf{n}_1), \\ R_2 - R_1 &= -\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_2 = -d \cos(\mathbf{d}, \mathbf{n}_2) \end{aligned}$$

и следовательно

$$\varphi = \mathbf{q} \cdot \mathbf{d}, \quad (66)$$

где
$$q = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 - n_2). \quad (66a)$$

Назовем вектор q , определяемый этой формулой, фазовым или диффракционным вектором. Его направление и величину легко найти из рис. 36; при этом очевидно имеем

$$|n_2 - n_1| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

(θ — угол между n_1 и n_2) и следовательно:

$$q = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (66b)$$

Если обе частицы находятся в плоскости, перпендикулярной к q , то согласно (66) φ равно нулю независимо от их положения в этой плоскости. Вторичные колебания, создаваемые слоем, перпендикулярным к q , имеют, таким образом, одну и ту же фазу и должны взаимно усиливаться. Амплитуда результирующего колебания пропорциональна числу частиц в слое, а энергия колебания — квадрату этого числа. Напомним в связи с этим, что при некогерентных вторичных колебаниях средняя амплитуда обращается в нуль, в то время как энергия пропорциональна числу осцилляторов.

Полученный только что результат дает новое весьма наглядное объяснение рассмотренного в начале этой главы явления отражения плоской волны от (плоской) поверхности тела.

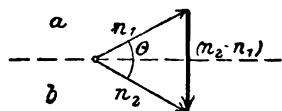


Рис. 36.

А именно векторы n_1 и n_2 определяют направления падающего и отраженного лучей, в то время как вектор $n_2 - n_1$ представляет нормаль к поверхности (см. рис. 36). Однако, из приведенного вывода явствует, что в направлениях n_2 , отличных от направления правильного отражения, также

должна излучаться определенная энергия в виде рассеянных лучей. Энергия этих лучей по сравнению с энергией отраженного главного пучка лучей тем меньше, чем больше поверхность отражающей плоскости, или поперечное сечение падающего пучка лучей.

Амплитуду результирующих вторичных колебаний легко вычислить, если известны амплитуды элементарных волн, излучаемых отдельными частицами. Пусть эти элементарные амплитуды характеризуются вещественными, положительными или отрицательными, числами a_1, a_2, a_3, \dots , где индексы относятся к различным частицам. Радиусы-векторы последних по отношению к одной из них или к какой-нибудь другой неподвижной точке обозначим через r'_1, r'_2, \dots . Тогда для результирующего колебания в рассматриваемой точке получаем следующую формулу

$$\psi = \psi_0 e^{-i\omega t} = \sum a_n e^{-i(\omega t + \epsilon_n)},$$

т. е. согласно (66)

$$\psi_0 = \sum_n a_n e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'_n}. \quad (67)$$

Здесь ψ_0 обозначает комплексную амплитуду ψ ; в последующем будем обозначать ее просто через ψ . При этом ψ может означать произвольные линейные величины поля (например напряженность электрического поля и т. д.).

Рассматривая отклоняющее или диффразирующее тело не как систему отдельных частиц, но как континуум в смысле макроскопической теории, получаем вместо (67) интеграл вида:

$$\psi = \int a(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} dV', \quad (67a)$$

где $a(\mathbf{r}') dV'$ — амплитудный множитель соответствующего элемента объема. В случае идеально отражающего тела, имеющего форму пластинки, ψ можно представить в виде поверхностного интеграла. Величина $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'$ представляет очевидно не что иное, как функцию $-k \cdot f(x', y')$, определяемую (64) и (64a), если сохранить в них только члены первого порядка. При $z' = 0$, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'$ переходит в уже известное нам выражение $\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha k' + \beta y')$. Таким образом для относительной амплитуды вторичных колебаний имеем в этом случае [см. (63b)].

$$\psi = \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \cdot \int e^{-\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} dS'. \quad (67b)$$

В правую часть должен еще входить сравнительно очень медленно изменяющийся коэффициент, зависящий от угла диффракции θ и для различных величин поля могущий иметь различные значения. В случае, если ψ означает поляризационный потенциал, этот коэффициент равен 1.

5. Диффракционная решетка как физический и математический прибор. Особенно простые и интересные результаты получаются в том случае, когда коэффициенты $a(\mathbf{r}')$ являются периодическими функциями координат x', y', z' . Тело, обладающее таким свойством, называют вообще диффракционной решеткой. Математически простейшая, хотя физически неосуществимая решетка получается, если a представляет собой гармоническую (синусоидальную) функцию от \mathbf{r}' (так называемая решетка Рэлея). Свойства диффразирующего тела в этом случае можно определить синусоидальными „структурными волнами“.

Вообще же функцию $a(\mathbf{r}')$ можно представить в виде ряда Фурье, или — при отсутствии периодичности — интегралом Фурье; при этом диффракционная картина, т. е. распределение интенсивности вторичных колебаний по различным направле-

ниям, представляется как наложение соответствующих „гармонических“ диффракционных картин.

Рассмотрим, например, гармоническую диффракционную картину, получающуюся согласно (67а) при

$$a = a_0 \cos \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'. \quad (68)$$

Полагая $\cos \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}' = \frac{1}{2} (e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'} + e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'})$, мы тотчас же убеждаемся в том, что вторичные колебания значительной амплитуды могут распространяться только по двум направлениям, определяемым условиями

$$\mathbf{q} = \pm \mathbf{p}. \quad (68a)$$

Введя вместо p соответствующую „постоянную решетки“ $d = \frac{2\pi}{p}$, т. е. расстояние между двумя соседними плоскостями, соответствующими одним и тем же значениям a , получаем согласно (66b) следующую формулу для угла диффракции

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\lambda}{2d}. \quad (68b)$$

Случай периодической, но не синусоидальной решетки можно рассматривать как наложение ряда синусоидальных решеток с постоянными d , $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{3}d$ и т. д. Функцию a в этом случае можно разложить в ряд Фурье вида

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}' + b_n \sin n \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'),$$

причем для отклоненных (вторичных) лучей получаем формулы:

$$\mathbf{q} = \pm n \mathbf{p}, \text{ т. е. } \sin \frac{\theta}{2} = \frac{n\lambda}{2d}. \quad (68c)$$

Эти максимумы отклонения называют „спектрами“, а число n — порядком данного диффракционного спектра. Максимумы тем резче, чем больше размеры диффракционной решетки, т. е. чем больше в ней имеется элементов. Так как число этих элементов всегда остается конечным, то, строго говоря, решетку следует рассматривать не как вполне периодическую и представлять ее не в виде ряда, а в виде интеграла Фурье. При этом наряду с несколько расплывчатым дискретным „линейным спектром“ (68c) получается еще непрерывный спектр, интенсивность которого при уменьшении размеров решетки возрастает за счет дискретного спектра.

Решетка только что рассмотренного типа называется одномерной пространственной решеткой. При двух- и трехмерных пространственных решетках имеем соответственно

два или же три семейства равноотстоящих плоскостей вместо одного семейства, рассмотренного выше. В случае ортогональной трехмерной гармонической решетки имеем например вместо (68):

$$a = a_0 \frac{\cos(p_1 x_1)}{\sin(p_1 x_1)} \frac{\cos(p_2 x_2)}{\sin(p_2 x_2)} \frac{\cos(p_3 x_3)}{\sin(p_3 x_3)} \quad (69)$$

Таким образом эта решетка по своей структуре аналогична системе трех взаимно перпендикулярных стоячих синусоидальных волн. При этом получаем не 2, а $2^3 = 8$ диффракционных максимумов в направлениях, косинусы углов которых с координатными осями определяются равенствами

$$q_i = \pm p_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

В случае сложных решеток этого типа наряду с предыдущими 8 основными спектрами получается еще ряд спектров высшего порядка в направлениях.

$$q_i = \pm n_i p_i \quad (n_1, n_2, n_3 \text{ — целые числа}) \quad (69a)$$

или, согласно (66b),

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{d_1^2} + \frac{n_2^2}{d_2^2} + \frac{n_3^2}{d_3^2}} \quad \left(d_i = \frac{2\pi}{p_i} \right). \quad (69b)$$

Такие и еще более сложные (косые) трехмерные пространственные решетки осуществляются различными естественными кристаллическими телами, и служат, как известно, для исследования коротковолновых рентгеновых лучей.

В оптике применяются исключительно одномерные плоские решетки (или вообще поверхностные решетки), которые служат, как известно, для спектрального разложения сложного света и для измерения длин волн (волны различной длины отклоняются здесь, так же как и в случае пространственной решетки, по различным направлениям). При этом получаются соотношения такого же вида, как и в случае пространственных решеток.

Диффракцию света от экрана и отверстия можно исследовать точно так же по методу гармонических поверхностных решеток, причем амплитудные множители a должны быть представлены обычным способом интегралами Фурье (или в случае кривых поверхностей несколько сложнее).

Например в рассмотренном выше случае плоского прямоугольного экрана со сторонами l_1, l_2 имеем

$$x = a_0 = \text{const} \quad \text{для} \quad -\frac{1}{2}l < x'_1 < +\frac{1}{2}l, \quad -\frac{1}{2}l_2 < x'_2 < +\frac{1}{2}l_2.$$

и $a=0$, если x'_1 и x'_2 лежат вне этих пределов. Полагая

$$a = \int \int A(p_1, p_2) \cdot e^{i(p_1 x'_1 + p_2 x'_2)} dp_1 dp_2, \quad (-\infty < x'_1, x'_2 < +\infty),$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} A(p_1, p_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-i(p_1 x'_1 + p_2 x'_2)} dx'_1 dx'_2 = \\ &= \frac{a_0}{4\pi^2} \int_{-\frac{1}{2}l_1}^{+\frac{1}{2}l_1} e^{-ip_1 x'_1} dx'_1 \int_{-\frac{1}{2}l_2}^{+\frac{1}{2}l_2} e^{-ip_2 x'_2} dx'_2, \end{aligned}$$

т. е.

$$A(p_1, p_2) = \frac{a_0}{\pi^2 p_1 p_2} \sin \frac{p_1 l_1}{2} \sin \frac{p_2 l_2}{2}.$$

Диффракционная картина от экрана определяется следовательно формулой:

$$\frac{a_0}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}l_1}^{+\frac{1}{2}l_1} \frac{1}{p_1} \sin \frac{p_1 l_1}{2} e^{i(p_1 - q_1) x'_1} dp_1 dx'_1 \int_{-\frac{1}{2}l_2}^{+\frac{1}{2}l_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_2} \sin \frac{p_2 l_2}{2} e^{i(p_2 - q_2) x'_2} dp_2 dx'_2.$$

Выполняя интегрирование по x_1 и x_2 , получаем

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{4a_0}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin p_1 \frac{l_1}{2}}{p_1} \frac{\sin(p_1 - q_1) \frac{l_1}{2}}{p_1 - q_1} dp_1 \cdot \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin p_2 \frac{l_2}{2}}{p_2} \frac{\sin(p_2 - q_2) \frac{l_2}{2}}{p_2 - q_2} dp_2. \end{aligned}$$

Интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(p) \frac{\sin(p - q) \frac{l}{2}}{p - q} dp,$$

вследствие быстрого спадания множителя

$$\frac{\sin(p - q) \frac{l}{2}}{p - q}$$

около максимального значения при $p = q$, сводится практи-

чески к

$$F(q) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(p-q) \frac{l}{2}}{(p-q) \frac{l}{2}} d(p-q) \frac{l}{2} = \pi F(q).$$

Таким образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin p_1 \frac{l_1}{2}}{p_1} \frac{\sin(p_1 - q_1) \frac{l_1}{2}}{p_1 - q_1} dp_1 = 2\pi \frac{\sin q_1 \frac{l_1}{2}}{q_1},$$

и следовательно

$$\psi = -16a_0 \frac{\sin q_1 \frac{l_1}{2}}{q_1} \frac{\sin q_2 \frac{l_2}{2}}{q_2},$$

что практически совпадает с прежде полученной формулой (60).



ГЛАВА VI.

ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЙ, НЕ СВЯЗАННЫХ С ИЗЛУЧЕНИЕМ (КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ И КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ) В ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ.

§ 1. Основы приближенной теории квазистационарных процессов (не связанных с излучением).

В предыдущей главе мы занимались главным образом такими колебательными явлениями, которые связаны с излучением энергии.

Как мы видели, это излучение отсутствует только в следующих трех случаях:

1) если электромагнитные колебания происходят внутри идеально проводящей замкнутой оболочки;

2) если они распространяются вдоль поверхности раздела двух (или нескольких) неидеально проводящих тел (поверхностные волны);

3) если их частота равна нулю.

Первый случай не представляет никакого практического интереса, и в дальнейшем мы его рассматривать не будем.

Второй случай нами уже исследован довольно подробно (заметьте, что его можно было бы трактовать как случай направленного излучения).

Что касается третьего случая, то его можно включить в общую теорию колебательных явлений лишь чисто формальным путем. Фактически он соответствует явлениям, не зависящим от времени — статическим и стационарным, — которые представляют известные особенности и нуждаются в специальном исследовании. Однако, на ряду с этими явлениями, мы рассмотрим также примыкающие к ним медленные колебательные процессы не так, как это сделано в предыдущей главе, но по упрощенному методу, совершенно достаточному для практических целей, причем этот метод может быть применен к ряду таких важных частных случаев, в которых строгая теория оказывается беспомощной.

1. Приближенные уравнения поля. Смысл упомянутого метода, коротко говоря, заключается в пренебрежении запаздыванием электромагнитных дальностей

ствии $\dot{\mathbf{y}}$.¹ Таким образом последние будут описываться в дальнейшем не запаздывающими, а „мгновенными“ потенциалами

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{R} dV' \quad (R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (1)$$

удовлетворяющими дифференциальным уравнениям

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}. \quad (1a)$$

Напряженности электрического и магнитного поля будут выражаться через эти электромагнитные потенциалы обычным образом, т. е. посредством формул

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1b)$$

Такие процессы, которые с достаточной точностью можно трактовать при помощи приведенных уравнений, обычно называют квазистатическими или квазистационарными. Мы будем их называть просто процессами без излучения, так как наиболее общий их признак заключается именно в отсутствии обычного, вытекающего из точных уравнений, излучения энергии.

Из (1b) непосредственно получаем

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

т. е. первую группу максвелловых уравнений электромагнитного поля в точной форме.

Так как на основании закона сохранения электричества должно иметь место соотношение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0,$$

а следовательно по (1a) и соотношение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0,$$

то из (1) и (1a) имеем

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

и

$$\text{div } \mathbf{E} = -\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = -\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

¹ Так как до Максвелла запаздывание было неизвестно, то исторически упомянутый метод был развит ранее строгого метода.

т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = 4\pi \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2a)$$

вместо точных уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho.$$

Таким образом мы видим, что ошибка, связанная с выражениями (1), оказывается тем меньше, чем медленнее изменяется с течением времени напряженность электрического поля. Для достаточно медленных колебаний величиной $\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ всегда можно пренебречь. Соответственно этому можно положить $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ и далее $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$ и $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho$. Получающиеся при этом соотношения однако отличны от соответствующих соотношений, характерных для строго статических и стационарных явлений, в том отношении, что по (1b) или (2) напряженность электрического поля, наряду с обычной статической частью, содержит еще часть, обусловленную индукцией $\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$.

Заметим, что величиной $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, без множителя $\frac{1}{c}$ пренебречь нельзя. В противном случае электростатическое поле нужно было бы считать строго постоянным. Здесь, как и при других электрических величинах (\mathbf{E} , φ) — но не при магнитных (\mathbf{H} , \mathbf{A}) — скорость c можно считать бесконечно большой.

Далее следует обратить внимание на то, что в предыдущих формулах ρ и \mathbf{j} означают полные (свободные + связанные) плотности заряда и токов. В случае однородного изотропного тела в рассматриваемом приближении можно, следовательно, положить

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mu_0 \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0, \quad (2b)$$

пренебрегая, таким образом, током смещения по сравнению с током проводимости. Плотность свободных зарядов не входит в последнее уравнение потому, что свободные заряды могут находиться лишь на поверхности тела (или поверхности раздела двух различных тел). Что касается пространственного распределения тока, то приближенно оно определяется уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (3)$$

Это уравнение является точным лишь в случае строго стационарных полей, обусловленных неизменными во времени электро-

статическими силами. В этом случае, на основании соотношения $\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E}$, имеем

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (3a)$$

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (3b)$$

Таким образом внутри всякого однородного проводника электростатический потенциал должен удовлетворять тому же уравнению (Лапласа), как и при отсутствии тока.

Квазистационарные токи могут быть вызваны либо меняющимися с течением времени электростатическими полями, либо переменными магнитными полями, т. е. соответствующими электрическими силами индукции. В последнем случае электростатическим полем иногда можно пренебречь (оно может также совершенно отсутствовать) и просто положить

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4)$$

Учитывая магнитную восприимчивость, уравнение $\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j}$ следует заменить более общим

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi\mu\mathbf{j}, \quad (4a)$$

как это непосредственно следует из первого уравнения (2b). Так как

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

то отсюда получается

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4b)$$

или по (4a)

$$\nabla^2 \mathbf{j} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (4c)$$

Как уже отмечалось в § 1 гл. IV, это уравнение совершенно аналогично основному уравнению теории теплопроводности; оно, следовательно, выражает тот факт, что электрический ток и электромагнитное поле проникают внутрь тела тем хуже, чем больше частота колебаний (скин-эффект).

В предельном случае очень медленных колебаний можно просто положить $\nabla^2 \mathbf{j} = 0$ [что не равносильно уравнению (3)!].

Заметим, что диэлектрическая постоянная выпадает из основных уравнений (2b), а именно из первого (или скорее из соответствующего уравнения $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{H}}{\mu} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}$) в виду малости $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, а из второго — в виду предположенной однород-

ности тела. Она может, следовательно, входить лишь в граничные условия, которые связывают напряженности электрического поля на поверхности соприкосновения двух таких тел.

2. Граничные условия. Эти граничные условия тождественны с соответствующими условиями точной теории. Они, следовательно, имеют вид (ср. § 7, гл. 1)

$$\Delta \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 4\pi\eta, \quad \Delta \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \Delta \frac{\mathbf{H}}{\mu} \times \mathbf{n} = 4\pi\mathbf{k}, \quad (5a)$$

причем поверхностную плотность свободного тока (\mathbf{k}), вообще говоря, равна нулю.

Однако теперь, при переходе к стационарным токам, мы должны еще принять во внимание условие

$$\Delta \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

получающееся из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

точно таким же образом, как и первая формула (5) получается из уравнения $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 4\pi\rho$.

После подстановки $\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E}$ написанное выше соотношение принимает вид

$$\Delta \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (6)$$

В случае гармонических колебаний, когда все электромагнитные величины содержат множитель $e^{-i\omega t}$, равенство (6) сводится к соотношению

$$\Delta \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = i\omega\eta. \quad (6a)$$

В предыдущей главе вместо соотношений (5) и (6a) мы пользовались иным соотношением, получающимся путем умножения (6a) на $\frac{4\pi i}{\omega}$ и сложения его с (5)

$$\Delta \left(\varepsilon + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

в которое плотность заряда η совершенно не входит. В случае квази-стационарных токов в металлических телах величиною σ по сравнению с $\frac{\sigma}{\omega}$ можно пренебречь и просто положить

$$\Delta \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6b)$$

(что очевидно соответствует пренебрежению величиной $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ по сравнению с η). Это условие, которое в случае стационарных токов выполняется строго, играет ту же роль, как и условие $\Delta \varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0$ для идеальных изоляторов. В связи со вторым уравнением (5) оно определяет „преломление“ электрических силовых линий или линий тока на границе двух рассматриваемых тел. А именно, если обозначить угол наклона этих линий относительно нормали к поверхности соответственно через θ_a и θ_b , то получим

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_a}{\operatorname{tg} \theta_b} = \frac{\sigma_a}{\sigma_b}. \quad (6c)$$

Если b есть металл или электролит, а a — изолятор, т. е. $\sigma_a = 0$, то отсюда следует

$$\theta_b = \frac{\pi}{2}.$$

Линии тока в проводнике должны следовательно идти параллельно поверхности раздела. Однако в диэлектрике они могут иметь любой отличный от нуля наклон к этой поверхности, в зависимости от величины поверхностного заряда, которая определяется первым уравнением (5). Величина напряженности поля в металле должна следовательно всегда быть меньше, чем в окружающем диэлектрике, и притом тем меньше, чем больше проводимость.

3. Энергия. Выражения для электромагнитной энергии, сил, излучения и количества движения, которые были даны в главе II, могут быть также сохранены и в рассматриваемом приближении. Однако напряженности поля, определяемые формулами (1) и (1b), не дают излучения в бесконечность, как это можно видеть уже из того факта, что по этим формулам напряженность магнитного поля должна убывать обратно пропорционально не первой степени, а по крайней мере квадрату расстояния. Напротив, напряженность электрического поля, обусловленного магнитной индукцией $\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}\right)$, содержит член, обратно пропорциональный первой степени расстояния. Поэтому целесообразно этот член при определении энергии отбрасывать. Тогда энергия распадается на две части, соответственно потенциальной и кинетической энергии обычной механики, — точно так же, как это имеет место в статических и стационарных явлениях (ср. т. I, гл. VII, §§ 1 и 2). Однако не следует забывать, что магнитная энергия получается именно благодаря работе электрических индукционных сил.

Эту неполную „механическую“ энергию в простейшем случае системы проводников в отсутствие каких бы то ни было связанных зарядов и токов можно представить в виде

$$W = \sum \left(\frac{1}{2} \int \varphi \eta dS + \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \right) \quad (7)$$

или также в другой эквивалентной форме

$$W = \frac{1}{8\pi} \int [(\nabla\varphi)^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2] dV = \frac{1}{8\pi} \int (E_{\text{стат}}^2 + H^2) dV, \quad (7a)$$

причем в последнем случае интегрирование распространяется на все пространство.

Если рассматриваемый проводник помещен в непроводящую среду, то выражение для полной энергии (7a) остается неизменным (поскольку не принимается во внимание различие между средними значениями полной и эффективной напряженностей поля). Однако величина энергии изменяется вполне определенным образом в зависимости от электромагнитных свойств (ϵ , μ) среды.

Рассмотрим, например, электростатическую энергию системы заряженных проводников, находящихся в однородной бесконечно-протяженной среде с диэлектрической постоянной ϵ . При этом, как легко видеть, величина и распределение свободных зарядов от ϵ не зависит (см. ниже § 6). Однако сюда добавляются еще связанные заряды, которые уменьшают результирующую плотность зарядов на поверхности проводника, а следовательно напряженность электрического поля и потенциал во всем пространстве в отношении $\epsilon : 1$ (ибо для каждого элемента поверх-

ности имеет место соотношение $E = \frac{4\pi\eta_r}{\epsilon}$). Таким образом мы видим, что полная электрическая энергия уменьшится в отношении $\epsilon^2 : 1$. Напротив, энергия, соответствующая свободным зарядам, уменьшится лишь в отношении $\epsilon : 1$. Следовательно мы имеем

$$U' = \frac{U}{\epsilon^2}, \quad U'_r = \frac{U}{\epsilon}, \quad U'_g = -\frac{1}{\epsilon^2} (\epsilon - 1) U = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) U'_r, \quad (7b)$$

где U относится к случаю $\epsilon = 1$. Точно таким же образом для магнитной энергии системы стационарных токов, при учете связанных поверхностных токов в окружающей однородной среде с проницаемостью μ , получаются формулы

$$T' = \frac{T}{\mu^2}, \quad T'_r = \frac{T}{\mu}, \quad T'_g = -\frac{1}{\mu^2} (\mu - 1) T. \quad (7c)$$

§ 2. Электрические колебания в линейном проводнике.

1. Электрические силы и ток в не совсем замкнутом проводнике. Изложенный выше приближенный метод приводит к особенно простым и важным результатам в случае медленных колебаний в линейных проводниках. При этом последние не обязательно должны быть совершенно замкнутыми, подобно линейным проводникам, рассмотренным в первом томе. Напротив того, они могут прерываться в нескольких местах, причем мы должны только допустить, что места разрыва очень коротки по сравнению со всей длиной рассматриваемого проводника. В этих местах, которые мы будем называть конденсаторами, приближенные уравнения не справедливы. А именно, здесь могут быть очень сильные электростатические поля, создаваемые накопившимися на обоих концах (обкладках конденсатора) противоположными зарядами, изменение которых с течением времени играет роль силы тока, как это следует из уравнения

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}.$$

„Медленными“ считаются такие колебания, длина волны которых очень велика по сравнению с размерами соответственного проводника. В этом случае фаза колебаний во всем контуре тока должна быть практически одной и той же. А это как раз является основанием для того, чтобы можно было пренебречь запаздыванием электрических дальностей.

Вопрос о распределении тока в каком-либо поперечном сечении проводника мы оставим пока совершенно открытым. Мы должны только допустить, что плотность тока (приблизенно) удовлетворяет условию стационарности

$$\text{div } \mathbf{j} = 0.$$

Отсюда следует, что сила тока

$$J = \int j_n ds$$

для всех поперечных сечений (s) имеет одно и то же значение, зависящее только от времени. Для таких поперечных сечений (S), которые проходят через места разрыва, сила тока, разумеется, равняется нулю. Однако, согласно вышесказанному, здесь можно положить

$$J = \int \frac{e}{4\pi c} \frac{\partial E_n}{\partial t} dS = \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int e E_n dS \quad (8)$$

и с другой стороны, согласно уравнению

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0,$$

$$J = \frac{1}{c} \frac{de}{dt}, \quad (8a)$$

где $\pm e$ означает свободные электрические заряды соответствующих обкладок конденсатора (рис. 37). Формулы (8) и (8a) фактически друг другу эквивалентны; именно из $\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 4\pi \rho$ следует:

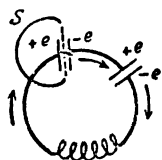


Рис. 37.

$$\oint \varepsilon E_n dS = \pm 4\pi e$$

для каждой поверхности S , замыкающей на конечном расстоянии или в бесконечности.

Сила тока J определяется с помощью формулы

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{grad} \varphi$$

E обозначает здесь напряженность электрического поля внутри проводника. Если последний однороден ($\sigma = \text{const}$), то вследствие равенства $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, напряженность поля должна удовлетворять уравнению $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, которое выражает просто отсутствие свободных зарядов внутри проводника [ср. (2b)]. Вышеприведенное уравнение выражает кроме того тот факт, что электрические силовые линии направлены в проводнике вдоль его оси и что электрический поток $\int E_n ds$ через любое поперечное сечение (s) имеет одно и то же значение

$$\int E_n ds = \frac{c}{4\pi} J. \quad (8b)$$

Чем больше проводимость, тем меньше должна быть напряженность внутреннего электрического поля или, вернее, отношение внутреннего потока F^i к внешнему $F^e = \int E_n ds$. А именно, в случае гармонических колебаний с частотой $\frac{\omega}{2\pi}$ ($J = J_0 e^{\pm i\omega t}$), это отношение согласно (8) и (8b), равно

$$\left| \frac{F^i}{F^e} \right| = \frac{\omega \varepsilon}{4\pi \sigma} = 2\pi \frac{\tau_0 \varepsilon}{\tau},$$

где $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ — период колебаний, а $\tau_0 = \frac{1}{4\pi\sigma}$ — время релаксации проводника (если диэлектрическую постоянную последнего положить равной 1). Для металлических проводников время τ_0 имеет порядок $10^{-15} \text{ сек}^{-1}$, следовательно чрезвычайно мало по сравнению с периодом „медленных“ технических колебаний.

Мы будем предполагать, что ток распределяется по различным поперечным сечениям равномерно („скин-эффект“ отсутствует). Тогда и напряженность электрического поля в каждом поперечном сечении, согласно (8a), должна иметь одно и то же значение

$$E = \frac{c}{4\pi\sigma} J.$$

Умножим это выражение на элемент длины проводника dl и проинтегрируем по всей его длине, за исключением могущих в нем встретиться мест разрыва. Это дает

$$\oint E dl = J \oint \frac{c}{\sigma S} dl$$

или

$$J = \frac{V}{R}, \quad (9)$$

где для сокращения положено

$$V = \oint E dl \quad (9a)$$

и

$$R = \oint \frac{c}{\sigma S} dl. \quad (9b)$$

Соотношение (9) представляет собой обычную (элементарную) форму закона Ома. При этом V называется электродвижущей силой, а R (омическим) сопротивлением рассматриваемого проводника.

Согласно (1b) внутреннее электрическое поле складывается из двух частей: электростатической части

$$\mathbf{E}^e = -\nabla\varphi$$

и электромагнитной

$$\mathbf{E}^m = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Соответственно этому имеем

$$V = V^e + V^m, \quad (10)$$

где V^e есть сумма падений скалярного потенциала φ в отдельных отрезках проводника (или, что то же самое, в местах разрыва), а V^m означает индуцированную электродвижущую силу. При отсутствии внешних электродвижущих сил можно очевидно положить

$$V^e = -\frac{e}{K} \quad \text{и} \quad V^m = -\frac{L}{c} \frac{dJ}{dt}. \quad (10a)$$

L представляет собой не что иное, как коэффициент самоиндукции проводника, введенный уже в первом томе (стр. 213); K называется емкостью проводника. Последняя зависит главным образом от мест разрыва и поэтому называется емкостью конденсаторов, включенных в электрическую цепь. Напротив, коэффициент самоиндукции от этих мест разрыва (поскольку они достаточно коротки) практически не зависит.

2. Собственные и вынужденные колебания почти замкнутого проводника. При наличии внешней электродвижущей силы V^e мы, следовательно, имеем

$$J = -\frac{1}{R} \left(\frac{e}{K} + \frac{L}{c} \frac{dJ}{dt} - V^e \right), \quad (10b)$$

или по (8а)

$$\frac{L}{c^2} \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{R}{c} \frac{de}{dt} + \frac{e}{K} = V^a. \quad (11)$$

Этим уравнением определяются вынужденные колебания, а при $V^a = 0$ — собственные колебания рассматриваемого проводника или электрической цепи, причем тем точнее, чем меньше частота этих колебаний.

Уравнение (11) имеет такой же вид, как и неоднократно уже разбиравшееся уравнение (35), гл. III, для затухающих колебаний квази-упруго связанного электрона. При этом массе его (m) соответствует коэффициент самоиндукции $\left(\frac{L}{c^2}\right)$, коэффициенту трения (ϑ) — омическое сопротивление $\left(\frac{R}{c}\right)$ и, наконец, коэффициенту связи (k) — величина, обратная емкости $\left(\frac{1}{K}\right)$.

Таким образом, не производя дальнейших вычислений, мы по формуле (35а) и (35b) получаем следующие выражения для резонансной частоты $\frac{\omega_0}{2\pi}$, собственной частоты $\frac{\omega'}{2\pi}$ и декремента затухания ω''

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{c}{\sqrt{KL}}, \\ \omega' &= \sqrt{\frac{c^2}{KL} - \frac{R^2}{4L}}, \\ \omega'' &= \frac{Rc}{2L}. \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

Далее для вынужденных колебаний, вызываемых гармонически колеблющейся внешней силой $V^a = V_0 e^{i\omega t}$ (гл. III, § 4), получаем следующее выражение:

$$e = \frac{c^2 V^a}{L(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega'')}$$

и следовательно

$$J = \frac{c i \omega V^a}{L(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega'')} = \frac{V^a}{R + i\left(\frac{L\omega}{c} - \frac{c}{\omega K}\right)}, \quad (11b)$$

$$J = \frac{V_0^a e^{i(\omega t - \varphi)}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{c} - \frac{c}{\omega K}\right)^2}}, \quad (11c)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L \frac{\omega}{c} - \frac{c}{\omega K}}{R}.$$

Работа \bar{Q} , производимая внешними силами в среднем за единицу времени, выражается вещественной частью произведения $\frac{1}{2} cJ^* V^a$ [ср. (38a) гл. III]. Эта работа

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} J_0 \cdot V_0^a \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{V_0^{a2} \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{c} - \frac{c}{\omega K}\right)^2}} \quad (12)$$

равна Джоулеву теплу, выделяющемуся в проводнике в единицу времени. Этот же результат можно получить при помощи общей формулы

$$\bar{Q} = \int \sigma \bar{E}^2 c dv = \frac{1}{2} \int \sigma E_0^2 dv = \frac{1}{2} J_0 \cdot V_0, \quad (12a)$$

где E — полная (внешняя + внутренняя) напряженность электрического поля. А именно, согласно (10a)

$$V = V^a - \frac{e}{K} - \frac{L}{c} \frac{dJ}{dt} = V^a - i \left(\frac{L\omega}{c} - \frac{c}{\omega K} \right) J. \quad (12b)$$

Следовательно внутренняя электродвижущая сила, представленная вторым членом, при вещественном ω смещена (по фазе) относительно силы тока на $\frac{\pi}{2}$ и поэтому в среднем не производит никакой работы. В случае собственных колебаний ее работа пропорциональна мнимой части ω , т. е. декременту затухания ω'' .

Работа, произведенная за время dt , согласно (12b), выражается следующим образом:

$$cJVdt = cJV^a dt - \frac{e}{K} cJdt - LJ \frac{dJ}{dt}.$$

Так как

$$cJdt = de \text{ и } V = RJ,$$

то мы получаем:

$$cJV^a = \frac{dW}{dt} + cRJ^2, \quad (12c)$$

где

$$W = \frac{e^2}{2K} + \frac{1}{2} L J^2. \quad (12d)$$

Последняя формула представляет „механическую“ энергию проводника в вышеупомянутом смысле [ср. ф-лу (7)], причем величина $\frac{1}{2} L J^2$ равна магнитной (кинетической), а $\frac{e^2}{2K}$ — электростатической (потенциальной) энергии. Формула (12с) выражает тот факт, что одна часть работы внешней силы идет на увеличение этой энергии, а другая часть переходит в Джоулево тепло.

Более подробного обсуждения предыдущие формулы не требуют, поскольку это было сделано для совершенно аналогичных формул § 4, гл. III.

Таким образом, для полного решения задачи о собственных или вынужденных колебаниях линейного контура в рассматриваемом приближении необходимо знать только коэффициенты R , L и K . При этом сопротивление R определяется интегралом (9b). Коэффициент самоиндукции, согласно формулам (12) и (14а) стр. 215 и 217 I тома, можно представить при помощи распространенного по объему проводника интеграла:

$$L = \frac{1}{J^2} \int \int \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}'}{r} dv dv' \quad (13)$$

(r — расстояние между dv и dv'). При постоянном поперечном сечении ($s = \text{const}$) и при равномерном распределении тока эта формула принимает вид:

$$L = \frac{1}{s^2} \int \int \int \int \frac{\cos \theta}{r} ds ds' dl dl', \quad (13a)$$

где θ обозначает угол между линейными элементами dl и dl' .

Что же касается, наконец, емкости, то она зависит исключительно от свойств мест разрыва.

Для разъяснения этого понятия представим себе подобное место разрыва в виде двух параллельных пластин с одинаковой площадью S , находящихся друг от друга на сравнительно очень малом расстоянии d . Тогда мы можем представить себе, что заряды $\pm e$ распределены равномерно по обеим пластинам с поверхностной плотностью $\pm \eta = \pm \frac{e}{S}$, так что между пластинами

образуется однородное электрическое поле $E = 4\pi\eta = \frac{4\pi e}{S}$. Соответствующая разность потенциалов φ равна произведению $E \cdot d$.

Таким образом, согласно определению $K \left(= \frac{e}{\varphi} \right)$, мы имеем

$$K = \frac{S}{4\pi d}. \quad (13b)$$

Приближенное значение коэффициента самоиндукции легко получается в том (важном для практики) случае, когда проводник имеет вид „катушки“ или „соленоида“. Внутри этого соленоида имеется (почти) однородное магнитное поле $H = 4\pi nI$, где n обозначает количество витков на единицу длины [ср. формулу (13) на стр. 78 I тома]. Умножением H на полное число витков $N = n \cdot l_s$ (l_s — длина соленоида) и на площадь S витка (поперечное сечение соленоида) мы получаем полный магнитный поток сквозь рассматриваемый проводник. Но так как этот поток можно, согласно определению, представить в виде произведения силы тока на коэффициент самоиндукции, то для последнего получаем выражение

$$L = 4\pi S n N = 4\pi S l_s n^2 = \frac{4\pi S N^2}{l_s}. \quad (13c)$$

Это выражение тем точнее, чем меньше поперечные размеры соленоида по сравнению с его длиной и чем меньше толщина слоя, в котором протекает ток, по сравнению с этими поперечными размерами.

Если рассматриваемый конденсатор заполнен диэлектриком, а соленоид — намагничивающимся телом, то полученные выше значения K и L нужно умножить соответственно на диэлектрическую постоянную ϵ и на магнитную проницаемость μ . Резонансная частота ω_0 по (18a) уменьшится при этом в отношении $\sqrt{\epsilon\mu} : 1$. Существование этой зависимости собственной частоты колебаний от свойств окружающей непроводящей среды мы уже установили в предыдущей главе (§ 6) более строгим путем в случае идеального проводника.

Совершенно замкнутый проводник можно формально охарактеризовать, приписав ему емкость, равную бесконечности [так, например, по (13b) $K = \infty$ при $d = 0$]. В таком проводнике собственные электрические колебания невозможны. Однако, формулы (11b, c) и (12) для вынужденных колебаний остаются справедливыми также и в этом случае, если положить в них $\frac{1}{K} = 0$.

При этом можно перейти к предельному случаю неизменной во времени внешней силы, причем получается постоянный ток — что при незамкнутой электрической цепи невозможно.

Если ввести внезапно, скажем в момент $t = 0$, внешнюю электродвижущую силу постоянной величины, то сила тока будет возрастать согласно дифференциальному уравнению

$$RJ + \frac{L}{c} \frac{dJ}{dt} = V^a (= \text{const}).$$

Интегрирование этого уравнения при условии $J = 0$ в начальный момент $t = 0$ дает

$$J = \frac{V^a}{R} (1 - e^{-\frac{Rc}{L} t}).$$

При внезапном исчезновении V^a ток будет спадать, начиная со своего максимального значения $J_0 = \frac{V^a}{R}$ по формуле

$$J = J_0 e^{-\frac{Rc}{L}t}.$$

3. Распространение электромагнитных колебаний в проводниках и кабелях. Если удерживать величины первого порядка относительно $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$, то изложенный метод можно применить к случаю распространения электромагнитных колебаний вдоль бесконечно протяженных линейных проводников (проводок или кабелей) и к подобным же квази-стационарным процессам, протекающим однако без излучения. При этом, понятно, силу тока нужно рассматривать как функцию не только времени, но также и положения, именно как функцию расстояния z рассматриваемого поперечного сечения от произвольно выбранной начальной точки (провод, впрочем, не обязательно должен быть прямолинейным). Далее, при отсутствии каких бы то ни было мест разрыва, где могут накапливаться большие электрические заряды, нужно принимать во внимание изменение плотности заряда с течением времени в каждом элементе длины провода. Если линейную плотность заряда (заряд на единицу длины) обозначить через e , то по закону сохранения электричества имеем соотношение

$$\frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Положим далее

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{K} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{L}{c} \frac{\partial J}{\partial t}, \quad (14a)$$

где K и L — емкость и коэффициент самоиндукции, отнесенные к единице длины (напряженность электрического поля E можно также трактовать как электродвижущую силу на единицу длины). Равенство (14a) имеет точно такую же форму, как и (10a), однако смысл его несколько иной, ибо e и J обозначают здесь заряд и ток в определенном месте, к которому относится значение E .

Наконец по (9) мы имеем

$$J = \frac{E}{R},$$

где $R = \frac{c}{\sigma S}$ обозначает сопротивление на единицу длины. Таким образом по (14a)

$$J = -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{K} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{L}{c} \frac{\partial J}{\partial t} \right),$$

или, если это уравнение продифференцировать по t и заменить $\frac{\partial e}{\partial t}$, согласно (14), через $-c \frac{\partial J}{\partial z}$:

$$\frac{L}{c} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} - \frac{c}{K} \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} + R \frac{\partial J}{\partial t} = 0. \quad (14b)$$

Подставляя сюда

$$J = J_0 e^{-i(\omega t - \alpha z)}, \quad (14c)$$

получим

$$-\frac{L}{c} \omega^2 + \frac{c}{K} q^2 - i\omega R = 0,$$

т. е.

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{KL} \sqrt{1 + i \frac{Rc}{L\omega}}. \quad (14d)$$

Уравнение (14b), обычно называемое „телеграфным уравнением“, а также его решение (14c, d) для гармонических колебаний имеет точно такой же вид, как и соответствующие точные формулы, которые мы вывели в предыдущей главе. При надлежащем выборе коэффициентов K, L, R они, следовательно, могли бы дать совершенно точные результаты. Однако как раз в этом месте делают пренебрежение, которое является характерным для рассматриваемого здесь метода. А именно K, L, R определяют для случая $q=0$ (при данном ω), что соответствует бесконечно большой скорости распространения электромагнитных дальностей. Еще более грубое приближение получается в том случае, если положить одновременно $q=0$ и $\omega=0$, т. е. рассматривать статическое распределение зарядов и стационарные токи.

Для примера мы остановимся здесь на рассмотренном уже в предыдущей главе случае кабеля, который состоит из внутреннего провода с круговым поперечным сечением радиуса a и из внешнего очень тонкого цилиндра со внутренним радиусом b_1 и внешним b_2 (рис. 38)¹. При этом представим себе, что внутренняя и внешняя обкладки этого кабеля всегда находятся в противоположных фазах и что заряд $+e$ на поверхности провода и противоположный $-e$ на внутренней поверхности цилиндра распределены равномерно. Тогда электрический потенциал цилиндра равен нулю (так как электрическое поле снаружи последнего обращается в нуль), а провода

$$\varphi = 2e \lg \frac{b_1}{a}$$

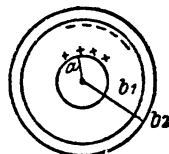


Рис. 38.

¹ Кабель может быть не прямолинейным, однако радиус кривизны его должен быть велик по сравнению с поперечными размерами.

(ср. (33b) гл. IV). Отсюда согласно определению следует

$$K = \frac{1}{2 \lg \frac{b_1}{a}}. \quad (15)$$

Что касается распределения тока, то мы рассмотрим два предельных случая. Если колебания настолько быстры, что ток течет в очень тонком слое, на проводе и внутренней стороне цилиндра (крайний скин-эффект, соответствующий идеальным проводникам), то для векторного потенциала провода получаем

$$A = 2J \lg \frac{b_1}{a}$$

и, следовательно, по определению L_a [см. формулу (14a)]

$$L_a = 2 \lg \frac{b_1}{a} = \frac{1}{K}. \quad (15a)$$

Сопротивлением кабеля в рассматриваемом случае можно пренебречь, так что формула (14d) дает

$$q = \frac{\omega}{c}.$$

Это означает, что колебания распространяются без затухания со скоростью $\frac{\omega}{q} = c$.

В противоположном предельном случае (очень медленных колебаний) мы можем себе представить, что ток равномерно распределен по поперечному сечению провода и цилиндра. При этом цилиндр мы будем считать бесконечно тонким ($b_1 \cong b_2 = b$), так что изменение потенциала должно быть учтено лишь для провода. Снаружи провода сохраняет силу прежнее выражение

$$A = 2J \lg \frac{b}{r} \quad (r > a).$$

Внутри же него имеем по (1a)

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = -4\pi j = -\frac{4J}{a^2},$$

т. е.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) = -\frac{4J}{a^2},$$

откуда, принимая во внимание, что A остается конечным при $r = 0$, а при $r = a$ переходит во внешний потенциал $2J \lg \frac{b}{a}$, получаем

$$A = J \left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + 2 \lg \frac{b}{a} \right].$$

Магнитная энергия на единицу длины может быть представлена в следующих двух видах:

$$\frac{1}{2} LJ^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \int_0^a AjdS.$$

Так как в рассматриваемом случае ($j = \text{const}$), $jdS = J \frac{2rdr}{a^2}$, то получаем следующее выражение для L :

$$L = 2 \lg \frac{b}{a} + \frac{1}{2}. \tag{15b}$$

Следовательно в этом случае скорость распространения колебаний в кабеле оказывается несколько меньше c ; если пренебречь затуханием, то для нее получается выражение

$$\frac{\omega}{q} = c \left(1 + \frac{1}{4 \lg \frac{b}{a}} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

При малых сопротивлениях ($R = \frac{c}{\pi \sigma a^2}$) (14d) можно заметить приближенным выражением

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{KL} + i \frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}}.$$

Продольное затухание колебаний, т. е. уменьшение их амплитуды при распределении вдоль кабеля, выражается следующей формулой:

$$J = J_0 e^{-qz},$$

где

$$q'' = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}}. \tag{15c}$$

В действительности распределение тока по сечению провода имеет характер промежуточный между двумя только что рассмотренными предельными случаями. Зависимость этого распределения от частоты, т. е. „скин-эффект“, в рассматриваемом приближении определяется следующим уравнением:

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj}{dr} + i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} j = 0.$$

Это уравнение получается из (4b) или из точного уравнения (39b), гл. V, если положить в нем $k^2 = i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$ и $q = 0$.

Определения электродвижущей силы и омического сопротивления, данные выше для электрической цепи конечной длины,

справедливы лишь при равномерном распределении тока. При наличии скин-эффекта эти величины следует определить так, чтобы формулы

$$J = \frac{V}{R} \quad \text{и} \quad Q = cRJ^2 = cJ \cdot V$$

для силы тока и Джоулева тепла остались бы ненарушенными. Таким образом, имея в виду общие формулы

$$J = \frac{\sigma}{c} \int E ds \quad \text{и} \quad Q = \sigma \int E^2 dv = \sigma \int \int E^2 ds dl,$$

получаем

$$V = \frac{Q}{cJ} = \frac{\int \int E^2 ds dl}{\int E ds} \quad \text{и} \quad R = \frac{V}{J} = \frac{c \int \int E^2 ds dl}{\left(\int E ds \right)^2}.$$

Изложенная теория может быть обобщена также на случай распространения колебаний или вернее на случай стоячих колебаний в проволочках и кабелях конечной длины. При этом одновременно получается обобщение развитой ранее теории колебаний в „почти замкнутых“ электрических цепях. А именно концы проводника можно рассматривать как места разрыва со сравнительно малой емкостью и одновременно трактовать их как узлы электрического тока. Проведенное в § 7 предыдущей главы исследование собственных колебаний прямолинейного провода, при которых излучение вначале не было учтено (и принято во внимание лишь впоследствии), непосредственно примыкает к вышеупомянутой элементарной теории линейного проводника. Однако настоящую область применения этой теории представляют такие замкнутые или почти замкнутые проводники, размеры которых малы по сравнению с длиной волны, т. е., иными словами, такие колебания, при которых фаза во всем проводнике имеет практически одно и то же значение, зависящее только от времени. В этом случае можно говорить не только об отсутствии излучения, но также и о квазистационарном характере рассматриваемых процессов. В дальнейшем мы ограничимся исключительно такими квази-стационарными или квази-статическими процессами.

§ 3. Электрические колебания в системе линейных проводников (квази-стационарные линейные токи)

1. Индуктивно связанные проводники. Представим теперь себе систему замкнутых или почти замкнутых электрических цепей, связанных между собою силами взаимной индукции. Эту „индуктивную“ или „электромагнитную“ связь двух произвольных электрических цепей (α) и (β) можно количественно охарактеризовать заданием их коэффициентов взаимной ин-

дукции $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$ (т. I, стр. 213 и след.). Дополнительная электрическая индукционная сила $V_{\alpha\beta}^{(m)}$, которая обуславливается в (α) изменением силы тока J_β в (β) выражается при этом формулою

$$V_{\alpha\beta}^{(m)} = -\frac{1}{c} L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt}. \quad (16)$$

Если далее обозначить через V_α^a действующую в α внешнюю электродвижущую силу, то для силы тока J_α получается следующее уравнение [ср. 10b)]:

$$J_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \left(V_\alpha^a - \frac{e_\alpha}{K_\alpha} - \frac{1}{c} \sum_{\beta=1}^n L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} \right),$$

($n =$ числу проводников), т. е.

$$\frac{e_\alpha}{K_\alpha} + \frac{1}{c} \sum_{\beta=1}^n L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} + R_\alpha J_\alpha = V_\alpha^a \quad (16a)$$

или

$$\frac{1}{c^2} \sum_{\beta=1}^n L_{\alpha\beta} \frac{d^2 e_\beta}{dt^2} + \frac{R_\alpha}{c} \frac{de_\alpha}{dt} + \frac{e_\alpha}{K_\alpha} = V_\alpha^a \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \quad (16b)$$

Эти уравнения относятся к тому случаю, когда рассматриваемые электрические цепи находятся в (относительном) покое. В общем случае мы должны положить

$$V_{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (L_{\alpha\beta} J_\beta) = -\frac{L_{\alpha\beta}}{c} \frac{dJ_\beta}{dt} - \frac{J_\beta}{c} \frac{dL_{\alpha\beta}}{dt},$$

где изменение коэффициентов индукции $L_{\alpha\beta}$ обуславливается поступательным движением, вращением, а также возможной деформацией соответствующего проводника.

В дальнейшем мы будем предполагать, что электрические цепи находятся в покое. Ради простоты ограничимся случаем $n=2$, который имеем в трансформаторах и индукционных катушках.

Далее предположим, что в первой цепи действует гармоническая внешняя сила $V_1^a = V_0^a e^{i\omega t}$, тогда как $V_2^a = 0$, и рассмотрим вынужденные колебания обеих цепей, синхронные с этой силой. При этом будем иметь

$$\frac{dJ_\alpha}{dt} = i\omega J_\alpha, \quad e_\alpha = \frac{cJ_\alpha}{i\omega}$$

и следовательно по (16а):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{i\omega}{c} L_{11} + \frac{c}{i\omega K_1} + R_1 \right) J_1 + \frac{i\omega}{c} L_{12} J_2 &= V_1^a, \\ \frac{i\omega}{c} L_{12} J_1 + \left(\frac{i\omega}{c} L_{22} + \frac{c}{i\omega K_2} + R_2 \right) J_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Эти уравнения легко разрешаются. А именно, полагая для сокращения

$$\rho_1 = R_1 + i \left(\frac{\omega}{c} L_{11} - \frac{c}{\omega K_1} \right), \quad \rho_2 = R_2 + i \left(\frac{\omega}{c} L_{22} - \frac{c}{\omega K_2} \right), \quad (17a)$$

имеем:

$$J_1 = \frac{V_1^a}{\rho_1 \left(1 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{L_{12}^2}{\rho_1 \rho_2} \right)}; \quad J_2 = - \frac{\frac{i\omega}{c} L_{12} V_1^a}{\rho_1 \rho_2 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{c^2}} = - \frac{\frac{i\omega}{c} L_{12}}{\rho_2} J_1. \quad (17b)$$

Таким образом действие первой цепи на вторую эквивалентно внешней электродвижущей силе

$$- \frac{\frac{i\omega}{c} L_{12} V_1^a}{\rho_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{L_{12}^2}{\rho_2}},$$

а обратное действие (2) на (1) выражается в уменьшении фактически действующей силы V_1^a в отношении $1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{c^2 \rho_1 \rho_2} : 1$. Это взаимное возмущение обеих систем тем больше, чем больше „коэффициент связи“

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{L_{12}^2}{\rho_1 \rho_2}.$$

При совершенно замкнутых цепях ($K_1 = K_2 = \infty$) с небольшими сопротивлениями приближенно имеем

$$k_0^2 = \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}}. \quad (17c)$$

Если первая цепь не замкнута, а вторая замкнута, то, пренебрегая R_2 , имеем далее

$$J_1 = \frac{V_1^a}{R_1 + i \left\{ \left(\frac{\omega}{c} L_{11} - \frac{c}{\omega K_1} \right) - \frac{\omega L_{12}^2}{c L_{22}} \right\}}.$$

Приравнивая нулю мнимую часть знаменателя, мы получаем следующее выражение для резонансной частоты, соответствующей максимальному значению $\frac{V_1}{R_1}$ тока J_1 ,

$$\omega_0^{(1)} = \frac{c}{\sqrt{L_{11}K_1 \left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11}L_{22}}\right)}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - k_0^2}}, \quad (17d)$$

где ω_1 обозначает „невозмущенную“ резонансную частоту первой электрической цепи.

Если мы хотим определить влияние связи на свободные колебания рассматриваемой системы, то в уравнениях (17) нужно положить $V_1^a = 0$ и принять во внимание условие совместности

$$\begin{vmatrix} \rho_1, & i \frac{\omega}{c} L_{12} \\ i \frac{\omega}{c} L_{12}, & \rho_2 \end{vmatrix} \equiv \rho_1 \rho_2 + \frac{\omega^2}{c^2} L_{12}^2 = 0. \quad (18)$$

В простейшем случае, когда $R_1 = R_2 = 0$, это уравнение принимает следующий вид:

$$\left(\omega^2 - \frac{c^2}{L_{11}K_1}\right) \left(\omega^2 - \frac{c^2}{L_{22}K_2}\right) = \omega^4 \frac{L_{12}^2}{L_{11}L_{22}},$$

т. е.

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) - \omega^4 \frac{L_{12}^2}{L_{11}L_{22}} = 0,$$

где ω_1 и ω_2 обозначают невозмущенные собственные (или резонансные) частоты рассматриваемых цепей. Решая это уравнение, получаем

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2(1 - k_0^2)}}{1(1 - k_0^2)}$$

или

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k_0^2\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1 - k_0^2)}. \quad (18a)$$

Таким образом всегда получаются две различные собственные частоты [ибо подрадикальное выражение в (18a) является существенно положительной величиной]. В частности при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ имеем

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k_0}}. \quad (18b)$$

Рассмотрим еще эти соотношения для предельного случая очень слабой связи при помощи приближенного метода.

При этом мы будем предполагать частоты ω_1 и ω_2 различными и рассматривать разности

$$\omega_0^{(1)} - \omega_1 = \Delta\omega_1 \quad \text{и} \quad \omega_0^{(2)} - \omega_2 = \Delta\omega_2$$

как бесконечно малые величины. Считая сопротивления R_1 и R_2 попережнему равными нулю, имеем по формулам (17а) $\rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2 = 0$, так что в уравнении (18) можно положить

$$\rho_\alpha(\omega_0^{(\alpha)}) = \left(\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_\alpha} \cdot \Delta\omega_\alpha, \quad \rho_\alpha(\omega_0^{(\beta)}) = \rho_\alpha(\omega_\beta) \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

и далее во втором члене $\omega^2 = \omega_\alpha^2$ (в виду предполагаемой малости L_{12}). Это дает

$$\Delta\omega_1 = \frac{\omega_1^2 L_{12}^2}{c^2 \rho_2(\omega_1) \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_1}}$$

и аналогичную формулу для $\Delta\omega_2$. Так как

$$\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_1} = i \left(\frac{L_{11}}{c} + \frac{c}{\omega_1^2 K_1} \right) = 2i \frac{L_{11}}{c} \quad (\text{в виду } \omega_1^2 = \frac{c}{K_1 L_{11}})$$

и

$$\rho_2(\omega_1) = i \left(\frac{L_{22} \omega_1}{c} - \frac{c}{\omega_1 K_2} \right) = i L_{22} \frac{\omega_1}{c} \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \right),$$

то

$$\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} = \frac{k_0^2}{2 \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1 \right)}$$

и точно так же

$$\frac{\Delta\omega_2}{\omega_2} = \frac{k_0^2}{2 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1 \right)}.$$

При $\omega_2 > \omega_1$ имеем таким образом $\Delta\omega_1 > 0$ и $\Delta\omega_2 < 0$, т. е. смещение собственных частот навстречу друг другу. Эти смещения относятся одно к другому как $\omega_1^3 : -\omega_2^3$. Отношение $J_2 : J_1$ для первого собственного колебания по (17b) равно:

$$\frac{J_2}{J_1} = - \frac{i \omega_1 L_{12}}{c \rho_2(\omega_1)} = - \frac{L_{12}}{L_{22} \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1 \right)}.$$

Таким образом J_2 очень мало по сравнению с J_1 . Аналогично для $\omega = \omega_0^{(2)}$ имеем

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{L_{12}}{L_{11} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1 \right)} \ll 1.$$

Само собой понятно, что эти формулы справедливы только в том случае, когда обе электрические цепи способны колебаться ($\omega_1 \neq 0$ и $\omega_2 \neq 0$). При $\omega_2 = 0$ имеем по (18a):

$$\omega_0^{(1)} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - k_0^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\Delta \omega_1}{\omega_1} \cong \frac{1}{2} k_0^{(2)},$$

в согласии с (17d) и $\omega_0^{(2)} = \Delta \omega_2 = 0$.

Противоположный рассмотренному выше предельный случай двух замкнутых и сильно связанных электрических цепей осуществляется в технике медленных электрических колебаний (переменных токов) в виде трансформаторов. Как известно, последние применяются для преобразования сильного переменного тока малого напряжения (т. е. электродвижущей силы) в слабый ток высокого напряжения или наоборот. Это достигается надлежащим соотношением коэффициентов самоиндукции (а частично также сопротивлений) при возможно большем коэффициенте взаимной индукции. Для этой цели пользуются двумя соленоидальными проводниками или катушками с общим замкнутым железным сердечником, в котором проходят силовые линии результирующего магнитного поля (рис. 39).¹

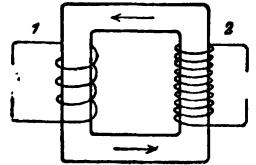


Рис. 39.

При этом внешняя электродвижущая сила в первой катушке относится к индуцированной силе во второй примерно как числа их витков N_1 и N_2 . В самом деле, если обозначить магнитный поток сквозь какое либо поперечное сечение железного сердечника, т. е. сквозь один виток „первичной“ или „вторичной“ катушки, через Φ , то соответствующие полные потоки равны $N_1\Phi$ и $N_2\Phi$; индуцированные электромагнитные силы равны следовательно

$$-\frac{1}{c} N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{c} N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (19)$$

При этом индуцированная в первой цепи сила при малом сопротивлении приближенно противоположна внешнему напряжению V_1 .

При отсутствии железного сердечника напряженность магнитного поля, возбужденного внутри соленоида, равна $4\pi Jn$, где

¹ См. ниже § 7.

n обозначает число витков на единицу длины соленоида. При наличии сердечника она должна быть в μ раз больше. Таким образом для напряженности результирующего поля, создаваемого обеими катушками, получаем

$$H = 4\pi\mu (J_1 n_1 + J_2 n_2),$$

и соответственно этому

$$\Phi = 4\pi\mu S (J_1 n_1 + J_2 n_2) \quad (19a)$$

(S — поперечное сечение катушек или железного сердечника). Если выражения (19) для индуцированных напряжений сравнить с обычными выражениями

$$-\frac{1}{c} \left(L_{11} \frac{dJ_1}{dt} + L_{12} \frac{dJ_2}{dt} \right), -\frac{1}{c} \left(L_{12} \frac{dJ_1}{dt} + L_{22} \frac{dJ_2}{dt} \right)$$

то получим:

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= 4\pi\mu S N_1 n_1, & L_{22} &= 4\pi\mu S N_2 n_2, \\ L_{12} &= 4\pi\mu S N_1 n_2, & L_{21} &= 4\pi\mu S N_2 n_1. \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

Для того, чтобы равенство последних коэффициентов выполнялось точно, обе катушки должны иметь одну и ту же длину. В действительности предыдущие формулы только тогда справедливы с достаточным приближением, если соленоиды замкнуты, т. е. намотаны на весь сердечник.

Коэффициент связи (17с) в этом случае равен

$$k_0^2 = 1$$

и это очевидно есть максимальное значение, какого он может вообще достигать.

2. Электростатическая и гальваническая связь (сеть токов). До сих пор мы рассматривали лишь электромагнитно связанные системы. Однако незамкнутые (или почти замкнутые) электрические цепи могут быть связаны между собою электростатически, например посредством общих или лежащих друг около друга мест разрыва (конденсаторов). Электростатическое напряжение (падение потенциала), действующее в одной электрической цепи (α), в этом случае должно зависеть не только от заряда e_α , но также и от зарядов e_β , аккумулярованных в местах разрыва другой электрической цепи. Так как эта зависимость должна иметь линейный характер (потому что потенциал пропорционален обуславливающим его зарядам), то ту часть электростатического напряжения в (α), которая обусловлена e_β , мы можем представить в форме, аналогичной (15),

$$V_{\alpha\beta}^{(e)} = -q_{\alpha\beta} e_\beta. \quad (20)$$

Коэффициенты $q_{\alpha\beta}$ называются электростатическими индукционными коэффициентами рассматриваемой си-

стемы. При этом электростатические коэффициенты самоиндукции $q_{\alpha\alpha}$ являются просто величинами обратными соответствующим емкостям K_{α}

$$q_{\alpha\alpha} = \frac{1}{K_{\alpha}}.$$

Таким образом при учете электростатической и электромагнитной индукции вместо (15а) и (15б) получаем следующие более общие уравнения

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^n \left(q_{\alpha\beta} e_{\beta} + \frac{1}{c} L_{\alpha\beta} \frac{dJ_{\beta}}{dt} \right) + R_{\alpha} J_{\alpha} = V_{\alpha}^a \\ \text{или} & \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{L_{\alpha\beta}}{c^2} \frac{d^2 e_{\beta}}{dt^2} + q_{\alpha\beta} e_{\beta} \right) + \frac{R_{\alpha}}{c} \frac{de_{\alpha}}{dt} = V_{\alpha}^a, \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

которые в случае двух электрических цепей, колеблющихся под влиянием действующей в одной из них гармонической силы, сводятся к выражениям

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{i\omega}{c} L_{11} + \frac{c}{i\omega K_{11}} + R_1 \right) J_1 + \left(\frac{i\omega}{c} L_{12} + \frac{c}{i\omega} q_{12} \right) J_2 = 0, \\ & \left(\frac{i\omega}{c} L_{21} + \frac{c}{i\omega} q_{21} \right) J_1 + \left(\frac{i\omega}{c} L_{22} + \frac{c}{i\omega K_2} + R_2 \right) J_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20b)$$

Мы не будем исследовать более подробно эти уравнения а удовлетворимся замечанием, что при гармонических колебаниях электростатическая связь совершенно эквивалентна электромагнитной. А именно, вместо определяемой коэффициентом q_{12} электростатической связи можно ввести связь электромагнитную с коэффициентом взаимной индукции

$$L_{12} = -\frac{c^2}{\omega^2} q_{12}, \quad (20c)$$

не внося этим никаких изменений в результирующий колебательный процесс.

Наоборот, при

$$L_{12} = +\frac{c^2}{\omega^2} q_{12} \quad (20d)$$

получаем взаимную компенсацию обоих типов колебаний, так что в этом случае электрические цепи колеблются таким образом, как если бы они были совершенно не связаны друг с другом.¹

При этом коэффициенты $q_{\alpha\beta}$ и $q_{\beta\alpha}$, точно так же, как и соответствующие электромагнитные индукционные коэффициенты,

¹ Такая компенсация очевидно не всегда возможна.

должны быть равны друг другу. Произведения $q_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta$ и $q_{\beta\alpha} e_\beta e_\alpha$ в действительности представляют одну и ту же величину, а именно, взаимную электростатическую энергию электрических цепей α и β (см. ниже).

Наряду с рассмотренными выше индуктивными или динамическими связями между различными электрическими цепями можно ввести еще третью — геометрическую или „гальваническую“ связь, которая заключается в том, что рассматриваемые электрические цепи имеют общую часть (рис. 40). Этим обстоятельством вводится дополнительное условие, что ток, протекающий в этой общей части, должен быть равным алгебраической сумме отдельных токов или, иными словами, в каждой точке разветвления алгебраическая сумма притекающих токов равна нулю (правило Кирхгофа).

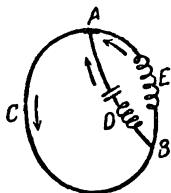


Рис. 40.

Разделение всей сети токов на отдельные цепи является неоднозначным, т. е. может быть произведено различными способами. Например можно себе представить, что система, изображенная на рис. 40, состоит из двух цепей $ACBDA$ и $BEACB$ с общей частью ACB или же из цепей $ACBDA$ и $ADBEA$ с общей частью ADB или, наконец, из $ACBEA$ и $ADBEA$ с общей частью AEB . Вследствие этого, является целесообразным совсем не производить разделения сети токов на замкнутые или почти замкнутые электрические цепи, а рассматривать каждый неразветвленный участок отдельно, принимая во внимание, что для различных точек разветвления должно выполняться условие

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{(s)} J_\alpha = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m). \quad (21)$$

Коэффициенты $\lambda_\alpha^{(s)}$ равны $+1$, если ток (α) течет к рассматриваемой точке разветвления, -1 , если он имеет противоположное направление, и нулю, если он в эту точку не попадает вообще.

На первый взгляд может казаться, что определение силы токов J_α или зарядов e_α для отдельных участков электрической сети должно производиться согласно прежним уравнениям. Однако это не верно, как можно видеть уже из того обстоятельства, что число уравнений [(20а) и (21)] $n + m$ больше, чем число неизвестных (n).

Это объясняется тем, что входящие в (20а) внешние и электростатические силы (напряжения) имеют вполне определенный смысл лишь для замкнутых или почти замкнутых электрических цепей. Так, например, $q_{11}e_1$ обозначает полное электростатическое напряжение, которое вызывается конденсатором или конденсаторами, включенными в первый участок тока. Какая

часть этого напряжения приходится именно на рассматриваемый отрезок (α) — остается совершенно неопределенным.

Таким образом, напряжение V'_α , действующее на самом деле в (α), вообще говоря отлично от выражения

$$V_\alpha = V_\alpha^a + V_\alpha^t = V_\alpha^a - \sum_{\beta=1}^n \left(q_{\alpha\beta} e_\beta + \frac{1}{c} L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} \right).$$

Можно показать, что разность $V'_\alpha - V_\alpha$ должна иметь вид

$$V'_\alpha - V_\alpha = \sum_{s=1}^m \lambda_\alpha^{(s)} M_s,$$

где M_s обозначают некоторые покамест неопределенные множители. Таким образом, в виду соотношения $V'_\alpha = R_\alpha J_\alpha$, имеем:

$$\sum_{\beta=1}^n \left(q_{\alpha\beta} e_\beta - \frac{1}{c} L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} \right) + R_\alpha J_\alpha = V_\alpha^a + \sum_{s=1}^m \lambda_\alpha^{(s)} M_s. \quad (21a)$$

Из этих уравнений, представляющих обобщение (20a), в связи с условиями (21) или эквивалентными условиями

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{(s)} e_\alpha = 0, \quad (21b)$$

можно однозначно определить $n + m$ неизвестных

$$J_1, \dots, J_n, M_1, \dots, M_m.$$

3. Применение общего вариационного принципа Гамильтона к сети токов. Наиболее простое доказательство соотношений (21a) получается в том случае, если задачу распределения токов и зарядов в рассматриваемой системе сформулировать в виде вариационного принципа. Этот вариационный принцип был введен нами уже в первом томе, и притом в двух различных формах — соответственно тому, шла ли речь об определении электромагнитного поля при заданном распределении зарядов и токов или же о движении электронов в заданном внешнем поле. Рассматриваемая здесь задача соответствует последней „механической“ форме вариационного принципа. А именно, мы видели, что уравнения движения электрона получаются из вариационного уравнения

$$\delta \int L dt = 0, \quad (22)$$

если Лагранжу функцию L определить по формуле

$$L = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\varphi.$$

(т. I, стр. 367).¹

Поскольку электромагнитные взаимодействия рассматриваются как мгновенные, движение любой системы электронов может быть определено на основании того же вариационного уравнения (22) при следующей форме Лагранжовой функции для всей системы:

$$L = Q + T - U, \quad (22a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q &= \sum \frac{1}{2} m_0 v^2, \\ T &= \frac{1}{2} \sum \frac{e\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} = \sum \frac{e\mathbf{v} \cdot e'\mathbf{v}'}{c^2 r}, \\ U &= \frac{1}{2} \sum e\varphi = \sum \frac{ee'}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (22b)$$

Q обозначает здесь кинетическую энергию электронов в обычном, чисто механическом смысле, T — их взаимную кинетическую энергию, а U — взаимную потенциальную энергию. С точки зрения макроскопической электромагнитной теории Q в случае покоящихся тел рассматривается как источник тепловой энергии, T как магнитная, а U как электрическая или, вернее, электростатическая энергия всей системы (само собой разумеется, что это относится лишь к рассматриваемому нами здесь приближению).

В случае системы линейных связанных электрических токов при отсутствии внешних сил, T можно представить, согласно формулам (10) и (14a) главы VII тома I (стр. 214 и 217), в следующей форме:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} J_{\alpha} J_{\beta}. \quad (23)$$

Аналогичным образом для U получается выражение

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} q_{\alpha\beta} e_{\alpha} e_{\beta}. \quad (23a)$$

Что касается тепловой энергии, то нам нужно знать не полное ее значение, а только тепло, выделяемое в единицу времени

$$-\frac{dQ}{dt} = c \sum_{\alpha} R_{\alpha} J_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} R_{\alpha} J_{\alpha} \frac{de_{\alpha}}{dt}. \quad (23b)$$

¹ Мы ограничиваемся случаем малых скоростей.

Таким образом Лагранжева функция имеет вид:

$$L = L(e_1, e_2, \dots, e_n; \dot{e}_1, \dot{e}_2, \dots, \dot{e}_n), \left(\dot{e}_\alpha = \frac{de_\alpha}{dt} = cJ_\alpha \right),$$

т. е. является функцией зарядов e_α , играющих роль обобщенных координат обычной механической системы, и соответствующих „скоростей“ $\frac{de_\alpha}{dt}$. Кроме того, благодаря коэффициентам $L_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$, она может содержать также обычные координаты положения различных электрических цепей или их элементов. Однако эти координаты положения (x_1, x_2, \dots) принимаются во внимание лишь в том случае, когда эти проводники подвижны — чего мы пока рассматривать не будем.

Вывод „электрических уравнений движения“ для зарядов из вариационного принципа Гамильтона (20) производится точно таким же образом, как и в случае одного электрона, рассмотренном в первом томе. Но основное достоинство этого вывода заключается как раз в том обстоятельстве, что добавочные условия (21) и (21b) совершенно не затрудняют решение этой задачи.

Эти условия можно учесть двумя различными способами.

Во-первых, при вариировании зарядов e_α их можно сначала рассматривать как независимые друг от друга величины. При этом получаем:

$$\delta L = \delta Q + \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} \delta \dot{e}_\alpha - \frac{\partial U}{\partial e_\alpha} \delta e_\alpha \right), \quad (24)$$

где

$$\delta Q = - \sum R_\alpha J_\alpha \delta e_\alpha, \quad (24a)$$

и далее, так как $\delta \dot{e}_\alpha = \frac{d}{dt} \delta e_\alpha$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} \delta \dot{e}_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} \delta e_\alpha \right) - \delta e_\alpha \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha}.$$

Таким образом имеем

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \left[\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} \delta e_\alpha \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} + \frac{dU}{de_\alpha} + R_\alpha J_\alpha \right) \delta e_\alpha dt = 0.$$

Вариации δe_α связаны между собою по (21b) соотношениями

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{(s)} \delta e_\alpha = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m) \quad (24b)$$

и на границах интеграла, т. е. при $t = t_0$ и $t = t_1$ должны исчезать; помимо этих условий, их можно рассматривать как совер-

шенно произвольные бесконечно малые величины. Отсюда по известному методу неопределенных множителей Лагранжа следует:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial e_\alpha} + R_\alpha J_\alpha = \sum_{s=1}^m \lambda_\alpha^{(s)} M_s. \quad (24c)$$

Но это как раз суть уравнения (21a) в отсутствии каких-либо внешних сил. В приведенном выводе последние могут быть учтены путем прибавления к $\delta T - \delta U$ в выражении (24) для δL их работы

$$\delta L_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n V_\alpha^a \delta e_\alpha. \quad (24d)$$

Во-вторых, условия (21b) можно учесть до вариирования, путем введения $n-m$ независимых переменных e'_1, \dots, e'_{n-m} и трактовки n зарядов e_1, \dots, e_n как функций этих „обобщенных“ координат. Мы, следовательно, полагаем

$$e_\alpha = f_\alpha(e'_1 \dots e'_{n-m}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

так, чтобы тождественно выполнялись условия (21b) (в остальных функции f_α могут быть совершенно произвольны); затем выражаем величину

$$L_t = T - U$$

как функцию этих обобщенных электрических координат и соответствующих скоростей

$$\dot{e}'_\beta = \frac{de'_\beta}{dt}$$

и, наконец, имея в виду формулы

$$\frac{de_\alpha}{dt} = \sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\beta} \frac{de'_\beta}{dt}$$

и $\delta e_\alpha = \sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\beta} \delta e'_\beta$, полагаем

$$-\delta Q = \sum_\beta \sum_\gamma R_{\beta\gamma} J'_\gamma \delta e'_\beta \quad \left(J'_\gamma = \frac{1}{c} \dot{e}'_\gamma, \quad R_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha=1}^n R_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\gamma} \right) \quad (25a)$$

$$\delta L_\alpha = \sum V'_\beta^{(\alpha)} de'_\beta \quad \left(V'_\beta^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^n V_\alpha^a \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\beta} \right). \quad (25b)$$

После вариирования получаем в этом случае

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_t}{\partial \dot{e}'_\beta} - \frac{\partial L_t}{\partial e'_\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n-m} R_{\beta\gamma} J'_\gamma = V'_\beta^{(\alpha)}. \quad (25c)$$

Если функции (25) линейны, то такими же будут и последние уравнения. В частности, при помощи этих уравнений можно определить электрические колебания в различных замкнутых (или почти замкнутых) электрических цепях, на которые может быть разложена рассматриваемая сеть токов. Число таких электрических цепей очевидно как раз равно $n - m$, т. е. числу уравнений (25с).

Уравнения (21а) допускают ряд интересных толкований, касающихся распределения электрического тока между отдельными частями рассматриваемой сети токов. В простейшем случае стационарного тока они принимают вид:

$$R_{\alpha} J_{\alpha} = V_{\alpha}^a + \sum \lambda_{\alpha}^{(g)} M_{\alpha}$$

и выражают тот факт, что распределение токов соответствует минимуму выделения тепла в сети ($\sum_{\alpha} R_{\alpha} J_{\alpha}^2$) при заданной работе внешних сил в единицу времени ($\sum_{\alpha} V_{\alpha}^a J_{\alpha}$). Действительно, если искать минимум функции $\sum_{\alpha} R_{\alpha} J_{\alpha}^2$ при условиях (21) и добавочном условии

$$\sum_{\alpha} V_{\alpha}^a J_{\alpha} = \text{const},$$

то получим предыдущую систему уравнений.

При очень быстрых собственных колебаниях сети уравнения (24с) приближенно сводятся к

$$\frac{i\omega}{c} \frac{\partial T}{\partial J_{\alpha}} \cong \sum \lambda_{\alpha}^{(g)} M_{\alpha}.$$

Таким образом в этом случае распределение тока соответствует минимуму кинетической (магнитной) энергии.

Для разъяснения полученных выше результатов мы применим их к простейшей цепи токов, изображенной на рис. 40. Силы токов в ACB , ADB и AEB обозначим J , J_1 , J_2 . Положительными направлениями в двух последних ветвях мы будем считать направления от B к A , так что можно говорить просто о разветвлении тока J на J_1 и J_2 . Условия (21) для точек A и B сводятся при этом к

$$J = J_1 + J_2. \quad (26)$$

Ради простоты мы исключим какие бы то ни было конденсаторы и пренебрежем электромагнитной связью (1) и (2) с ACB . Тогда при $J = J_0 e^{i\omega t}$ и $V_1^a = V_2^a = 0$ уравнения (21а) примут вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{i\omega}{c} L_{11} + R_1 \right) J_1 + \frac{i\omega}{c} L_{12} J_2 &= M, \\ \frac{i\omega}{c} L_{12} J_1 + \left(\frac{i\omega}{c} L_{22} + R_2 \right) J_2 &= M. \end{aligned}$$

Вычитая одно уравнение из другого и принимая во внимание (26), получим

$$J_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} J, \quad J_2 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} J, \quad (26a)$$

где для сокращения положено

$$\rho_1 = R_1 + \frac{i\omega}{c} (L_{11} - L_{12}), \quad \rho_2 = R_2 + \frac{i\omega}{c} (L_{22} - L_{12}). \quad (26b)$$

При $\omega = 0$ ток J распределится в (1) и (2) обратно пропорционально соответствующим сопротивлениям, а это как раз есть условие минимума $R_1 J_1^2 + R_2 J_2^2$ при заданном значении $J_1 + J_2 = J$. При очень высоких частотах колебаний и слабой связи силы токов обратно пропорциональны коэффициентам самоиндукции. Но если разность $L_{22} - L_{12}$ мала, то $|J_2|$ может оказаться очень большим не только по сравнению с $|J_1|$, но также и по сравнению с $|J|$.

4. Механические силы между переменными токами; движущиеся проводники с током; динамомашины. Если в общем выражении Лагранжевой функции L (или L_1) на ряду с „электрическими“ координатами и скоростями принять во внимание также обычные „механические“ координаты x_1, x_2, \dots и скорости $y_1 = \dot{x}_1, y_2 = \dot{x}_2, \dots$, то кроме электрических уравнений движения (25с) мы получим совершенно аналогичные механические уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = F_\alpha^a, \quad (27)$$

где F_α^a обозначает обобщенную внешнюю силу, соответствующую координате x_α .

Эта сила определяется тем, что произведение $F_\alpha^a \cdot \delta x_\alpha$ равно работе, производимой обычными внешними силами при бесконечно малом изменении x_α (в случае наличия сил трения последние тоже следует рассматривать как внешние). Координаты x входят в выражение L не явно, а через коэффициенты взаимной индукции $L_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$; скоростям \dot{x} соответствует добавочный чисто механический член в L , выражающий обычную кинетическую энергию рассматриваемой системы.

До сих пор мы принимали, что последняя находится в покое. Тогда (27) сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T - U) + F_\alpha^{(a)} = 0, \quad (27a)$$

в котором первый член выражает внутреннюю силу $F_\alpha^{(i)}$, соответствующую координате x_α . При дифференцировании по x_α

все остальные механические и электрические координаты должны рассматриваться как постоянные.

Если мы хотим вычислить не мгновенную, а среднюю силу взаимодействия между двумя гармонически колеблющимися индуктивно связанными электрическими цепями, то для этого нужно продифференцировать по x среднее значение $T-U$ по времени. Рассмотрим, например, случай электромагнитной связи и, следовательно, положим $U=0$ и $T=L_{\alpha\beta}J_\alpha J_\beta$. Средняя сила, с которой (β) действует на (α), равна (если J_α и J_β рассматривать как комплексные величины):

$$\overline{F_{\alpha\beta}^{(t)}} = \frac{1}{2} R(J_\alpha J_\beta^*) \cdot \frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = -\overline{F_{\beta\alpha}^{(t)}}. \quad (27b)$$

В связи с формулой (28a) интересно отметить следующее обстоятельство. В начале (т. I, гл. II) мы ввели магнитную энергию как энергию потенциальную, и для взаимной энергии двух линейных токов нашли выражение

$$U_m = -J_\alpha \int H_{\beta n} dS_\alpha = -L_{\alpha\beta} J_\alpha J_\beta.$$

Позже мы показали, что если на ряду с поперечными (пондеромоторными) силами принять во внимание также силы продольные (электромоторные), то магнитная энергия должна рассматриваться как кинетическая, причем по величине она оказывается равной „потенциальной“ энергии, но противоположна ей по знаку. Формула (27a) показывает, что поскольку дело касается пондеромоторных сил, оба толкования магнитной энергии совершенно эквивалентны; для этих сил получается одно и то же выражение как при $T=L_{\alpha\beta}J_\alpha J_\beta$, $U=0$, так и при $T=0$, $U=-L_{\alpha\beta}J_\alpha J_\beta$.

Однако при определении электродвижущих сил рассматривать магнитную энергию как потенциальную не имеет смысла, потому что она совершенно не зависит от электрических координат (e_α) и является квадратичной функцией соответствующих скоростей (\dot{e}_α).

В первом томе мы применяли формулу (27b) исключительно к стационарным токам. Мы применим ее теперь к рассмотренному выше случаю, когда ток в (α), индуцируется вынужденными колебаниями в β ($\beta=1$ соответствует первичной, а $\alpha=2$ — вторичной электрической цепи). При этом согласно второй формуле (17b) имеем, если пренебречь сопротивлением R_2 (чтобы получить максимальный эффект),

$$J_2 = -\frac{\dot{e}_{12}}{L_{22}} J_1$$

и следовательно по (27b)

$$\overline{F_{21}^{(t)}} = -\frac{1}{2} |J_1|^2 \frac{1}{L_{22}} \frac{\partial (L_{12}^2)}{\partial x_2}$$

или

$$\overline{F_{21}^{(4)}} = -\overline{T_{11}} \frac{\partial (k^2)}{\partial x_2}, \quad (27c)$$

где $T_{11} = \frac{1}{2} L_{11} |\overline{J_1}|^2$ — собственная кинетическая энергия первичной электрической цепи, а k — коэффициент связи. Коэффициенты самоиндукции L_{11} и L_{22} считаются независимыми от координаты x_2 , характеризующей относительное положение 1 и 2.

Положим, например, что x_2 обозначает расстояние между цепями 1 и 2. Тогда коэффициент связи, независимо от их относительной ориентации, с увеличением x_2 должен убывать. Таким образом $\overline{F_{21}^{(4)}} > 0$, что соответствует взаимному отталкиванию обеих электрических цепей. В действительности формула (27c) по своему содержанию совершенно аналогична рассмотренным в гл. III, § 2 формулам для диамагнитных действий.

Представим себе теперь, что вторая электрическая цепь содержит ротор, движущийся каким-либо образом под действием заданной внешней силы, например вращающийся вокруг определенной неподвижной оси, как это на самом деле происходит в динамомашинах (и электромоторах). Индуцированный ток J_2 в этом случае определяется уравнением

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (L_{12} J_1) + \frac{L_{22}}{c} \frac{dJ_2}{dt} + R_2 J_2 = 0$$

или

$$\frac{1}{c} L_{12} \frac{dJ_1}{dt} + \frac{1}{c} L_{22} \frac{dJ_2}{dt} + R_2 J_2 = -\frac{1}{c} J_1 \frac{dL_{12}}{dt}. \quad (28)$$

Это уравнение можно включить в общую схему „электрических уравнений движения“ (21a) или (25c), если величину

$$V = -\frac{1}{c} J_1 \frac{dL_{12}}{dt},$$

т. е. обусловленное движением индуцированное напряжение рассматривать как внешнюю электродвижущую силу. В данном случае можно положить

$$V = -\frac{1}{c} J_1 \frac{\partial L_{12}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad (28a)$$

где $\theta = x_2$ обозначает угол поворота ротора.

Если далее ввести обычную механическую энергию ротора

$$T_{\text{мех}} = \frac{1}{2} A \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

(A — момент инерции вокруг оси) и обозначить через F момент внешней вращающей силы, то, полагая

$$L = T + T_{\text{мех}} = \frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 + \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2,$$

по (27) находим

$$A \frac{d^2 \theta}{dt^2} - J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \theta} = F. \quad (28b)$$

Если сопротивлением ротора можно пренебречь, то, как и раньше, получаем:

$$J_2 = - \frac{L_{12}}{L_{11}} J_1.$$

и, следовательно, по (28b)

$$A \frac{d^2 \theta}{dt^2} + T_{11} \frac{\partial (k^2)}{\partial \theta} = F \quad \left(T_{11} = \frac{1}{2} L_{11} J_1^2 \right).$$

Этот случай однако не представляет практического интереса, потому что динамомшины всегда „нагружены“, т. е. обладают значительным сопротивлением во вторичной цепи. Если первым и вторым членами с левой стороны уравнения (28) пренебречь по сравнению с третьим (что соответствует очень большой нагрузке), то получаем просто

$$J_2 = - \frac{J_1}{cR_2} \frac{\partial L_{12}}{\partial \theta} \dot{\theta}. \quad (28c)$$

Далее по (28b) имеем

$$A \ddot{\theta} + \frac{J_1^2}{cR_2} \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial \theta} \right)^2 \cdot \dot{\theta} = F.$$

В квазистационарном состоянии получается почти равномерное вращение ротора с угловой скоростью

$$\dot{\theta} \cong \frac{cR_2 F}{J_1^2 \cdot \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial \theta} \right)^2}. \quad (28d)$$

В действительности первичный ток обычно вызывается вторичным (динамомшины с самовозбуждением) и именно таким образом, что он всегда имеет одно и то же направление, а величина его пропорциональна абсолютному значению вторичного тока (это достигается автоматической коммутацией последнего). Если, например, положить $J_1 = |J_2|$ (что соответствует последовательному соединению первичной и вторичной цепи) и $L_{12} = L_0 \cos n\theta$, то по (28c) получаем:

$$J_2 = |J_2| \frac{L_0}{cR_2} \sin n\theta \cdot n\dot{\theta}, \text{ т. е. } |J_2^2| = \frac{L_0^2}{c^2 R_2^2} |J_2|^2 \sin^2 n\theta \cdot (n\dot{\theta})^2.$$

и далее по (28d)

$$\dot{\theta} \cdot \overline{|J_2|^2 \sin^2 n\theta} \frac{n^2 L_0^2}{cR_2} \cong F.$$

Таким образом в этом случае, в виду $\overline{|J_2^2|} = \overline{|J_2|^2}$ и $\overline{\sin^2 n\theta} = \frac{1}{2}$, получаем переменный ток (средней) частоты

$$\omega \cong n\dot{\theta} \cong \frac{V\sqrt{2} \cdot cR_2}{L_0},$$

не зависящей от величины внешней вращающей силы F ; сила же этого тока равна

$$|J_2| \cong \sqrt{\frac{F}{nL_0}}.$$

§ 4. Теория индукционных токов в массивных (трехмерных) проводниках и в проводящих пластинках

1. Приближенный метод определения индукционных токов. Приближенную теорию собственных колебаний в трех- и двумерных проводниках нельзя развить последовательным образом потому, что в этом случае нужно было бы учесть изменение во времени электростатических величин не только в некоторых особых местах, подобно местам разрыва почти замкнутых линейных проводников, но также и во всем теле. Поэтому в случае пространственно-протяженных тел мы ограничимся рассмотрением лишь вынужденных колебаний или токов.

Мы не будем останавливаться на общем случае первичного электромагнитного поля с быстро колеблющейся электростатической частью (φ^0) и рассмотрим лишь следующие два предельные случая: квазистатическое электрическое поле $\mathbf{E}^0 = -\nabla\varphi^0$ и электрическое поле $\mathbf{E}^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^0}{\partial t}$, индуцированное меняющимся во времени заданным первичным магнитным полем $\mathbf{H}^0 = \text{rot } \mathbf{A}^0$. В первом случае вторичное электрическое поле \mathbf{E}' должно быть тоже статическим или квази-статическим ($\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \cong 0$). Во втором случае вместе с „кинетической“ частью $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$ оно должно содержать вообще еще статическую $-\nabla\varphi'$. Однако имеется ряд явлений, где последняя исчезает. В этом параграфе мы будем рассматривать главным образом явления этого типа.

Представим себе изолированный металлический проводник, находящийся в заданном первичном поле \mathbf{A}^0 . Для определения

вторичного поля A' и результирующего распределения тока можно воспользоваться следующим приближенным методом.¹ Пренебрежем в первом приближении влиянием вторичного поля на искомое распределение тока (т. е. самоиндукцией тела) и вычислим плотность тока по формуле

$$\mathbf{j}^{(1)} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E}^0 = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}^0}{\partial t}. \quad (29)$$

Внутри тела должно быть $\nabla^2 \mathbf{A}^0 = 0$, так что

$$\nabla^2 \mathbf{A}^{(1)} = -4\pi \mathbf{j}^{(1)},$$

т. е.

$$\mathbf{A}^{(1)} = \int \frac{\mathbf{j}^{(1)} dV}{R} = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{A}^0}{R} dV. \quad (29a)$$

Если поверхность тела остается незаряженной, то вторичное поле в первом приближении определяется последней формулой. В общем же случае нужно принять во внимание заряд, образующийся на этой поверхности. Он определяется уравнением

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = c j_n.$$

Следовательно в первом приближении:

$$\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial A_n^0}{\partial t},$$

т. е.

$$\eta^{(1)} = -\frac{\sigma}{c} A_n^0, \quad (29b)$$

если для $t=0$ положить $\mathbf{A}^0 = 0$. Отсюда по формуле

$$\varphi^{(1)} = \int \frac{\eta^{(1)}}{R} dS = -\frac{\sigma}{c} \int \frac{A_n^0}{R} dS \quad (29c)$$

мы получаем соответствующий скалярный потенциал вторичного поля. Если последний определен в первом приближении, то при помощи формулы

$$\mathbf{j}^{(2)} = \frac{\sigma}{c} (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{(1)}) \quad (29d)$$

можно определить распределение тока во втором приближении и т. д. В случае гармонически колеблющегося внешнего поля ($\mathbf{A}^0 \sim e^{i\omega t}$) можно определить φ' из \mathbf{A}' при помощи уже неоднократно применявшегося соотношения

$$\frac{i\epsilon_0 \mu_0 \omega \varphi'}{c} + \operatorname{div} \mathbf{A}' = 0.$$

¹ Ср. метод, который в гл. V § 8 применен при рассмотрении задачи дифракции.

2. Аксиальное (меридиональное) переменное магнитное поле. В дальнейшем мы ограничимся тем случаем, когда $\varphi' = 0$, т. е. когда поверхность тела остается незаряженной. Это условие выполняется, например, в тех случаях, когда рассматриваемый проводник и первичное поле обладают симметрией вращения вокруг одной и той же оси, причем линии A^0 — суть параллельные круги. В этом случае электрические силовые линии первичного и вторичного полей должны иметь такой же точно вид, тогда как магнитные силовые линии должны лежать в меридиональных плоскостях.

Заметим, что при рассмотрении собственных колебаний в проводнике с вращательной симметрией (гл. V) предполагалось, что электрическое поле меридиональное, а магнитное направлено по кругам широт. При рассматриваемой теперь симметрии дополнительного типа какие бы то ни было собственные колебания невозможны, потому что электрические силовые линии идут параллельно поверхности тела и поверхностных зарядов создавать не могут.

Представим себе, например, что первичное поле вызывается практически бесконечно длинным прямолинейным соленоидом, содержащим цилиндрический, также бесконечный, металлический сердечник, с круговым поперечным сечением. Тогда первичное магнитное поле будет однородным, а вторичное поле вне цилиндра должно обращаться в нуль. Индуцированные в цилиндре круговые токи возбуждают такое же точно магнитное поле, как и множество коаксиальных соленоидов, которые, как известно, во внешнем пространстве не дают никакого поля.

Результирующее поле в этом случае можно определить легче всего путем интегрирования, получающегося из (4b) дифференциального уравнения

$$\nabla^2 H = \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2} H \quad (H = H_z, H_\alpha = H_r = 0), \quad (30)$$

при условии $H = H^0$ для $r \geq a$ (a — радиус металлического цилиндра, r — расстояние от его оси). В виду осевой симметрии рассматриваемого поля получаем

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + H = 0 \quad \left(\rho = kr, k^2 = -\frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2} \right). \quad (30a)$$

Это уравнение по внешнему виду тождественно с уравнением (45b), гл. V, определяющим распределение векторного потенциала при распространении электрических колебаний в проводе с круговым сечением. В рассмотренном там случае линии A были параллельны оси провода, а линии H — были кругами. Здесь же дело обстоит как раз наоборот. Решением уравнения (30a) с вышеупомянутыми граничными условиями выражается формулой

$$H = H^0 \frac{J(kr)}{J(ka)} \quad (r \leq a). \quad (30b)$$

Так как $J(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \dots$, то для малых значений $|ka|$ приближенно имеем

$$H = H^0 \left[1 - i \frac{\mu_0 \omega}{4c^2} (a^2 - r^2) \right], \quad (30c)$$

а для $|kr| \gg 1$

$$H = H^0 \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-\sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2c^2} (1+i)} (a-r)}. \quad (30d)$$

Плотность тока можно вычислить отсюда по формуле $\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi\mu} \text{rot } \mathbf{H}$, т. е.

$$j = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial r} \quad (j = j_a, \quad H = H_z) \quad (31)$$

[ср. формулу $H_a = -\frac{\partial A}{\partial r}$ (52a), гл. V]. Так как радиальная и продольная составляющие векторного потенциала обращаются в нуль, то, беря циркуляцию A по окружности радиуса r , имеем

$$\oint A_z d\sigma = 2\pi r A = \int_0^r H 2\pi r dr,$$

откуда:

$$H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r} A \quad (H = H_z, \quad A = A_z). \quad (31a)$$

Таким образом из (30b), принимая во внимание соотношение $\int \xi J(\xi) d\xi = \xi J_1(\xi)$, получаем

$$A = \frac{H^0}{k} \frac{J_1(kr)}{J(ka)}. \quad (31b)$$

Эта формула, так же как и (30b), справедлива лишь при $r \leq a$. Вне цилиндра ($r > 0$) потенциал A определяется уравнением $\nabla^2 A = 0$ в связи с условием, что при $r = a$ он принимает значение $A_a = \frac{H^0 J_1(ka)}{kJ(ka)}$, а в бесконечности ($r = \infty$) совпадает с A^0 . Его значение можно определить, как и выше, при помощи формулы

$$\oint A_z d\sigma = \int H 2\pi r dr,$$

примененной к кругу с радиусом $r > a$. А именно, таким путем получаем

$$rA = \int_0^a H r dr + \int_a^r H^0 r dr,$$

т. е.

$$A = \frac{a}{r} A_a + \frac{1}{2r} H^0 (r^2 - a^2). \quad (31c)$$

Величина

$$\frac{1}{2} H^0 r = A^0 \quad (31d)$$

представляет здесь не что иное, как первичный потенциал однородного поля

$$\left(A^0 = \frac{1}{2} H^0 \times r, \quad \text{rot } A^0 = H^0 \right).$$

Вторичный потенциал, следовательно, равен

$$A' = \frac{a}{r} (A_a - A_a^0), \quad (31e)$$

а соответствующее индуцированное электрическое поле

$$E' = -\frac{i\omega}{c} A' \quad (E' = E'_a).$$

Замечательно, что в то время как снаружи цилиндра H' обращается в нуль, E' остается там отличным от нуля (следовательно $\text{rot } E' = 0$ для $r > a$). Эти индуцированные электрические силы обуславливают кажущееся увеличение сопротивления и уменьшение коэффициента самоиндукции окружающей катушки.

Если рассматриваемое тело не обладает цилиндрической формой, так что магнитные силовые линии первичного поля пересекают его поверхность, то для точного определения вторичного поля следует применить способ, изложенный вкратце в начале § 8, гл. V. Таким образом внутри тела имеем

$$\frac{\partial^2 H'_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H'_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 H'_z}{\partial z^2} + k^2 H'_z = -k^2 H_z^0 \quad (32)$$

с приближенным значением (30а), для k^2 ; вне тела, в виду того, что $k_0^2 \cong 0$, должно быть

$$\nabla^2 H'_z \equiv \frac{\partial^2 H'_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H'_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 H'_z}{\partial z^2} = 0 \quad (32a)$$

и, наконец, на его поверхности

$$\Delta E'_a = 0, \quad \Delta H' \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \Delta \frac{H'}{\mu} \times \mathbf{n} = -\Delta \frac{H^0}{\mu} \times \mathbf{n}. \quad (32b)$$

При $\mu = 1$ (немагнитное тело) первичное поле совершенно выпадает из граничных условий.

Вместо векторного потенциала $A = A_a$ можно также ввести скалярный магнитный потенциал, т. е. отыскивать \mathbf{H} в виде

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m. \quad (33)$$

Этот потенциал очевидно должен удовлетворять тем же уравнениям, как и осевая составляющая напряженности магнитного поля $H_z = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}$. Заметим, что последняя связана с напряженностью электрического поля ($E = E_z$) уравнением

$$H_z = -\frac{i\omega}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE), \quad (33a)$$

получающимся из уравнения (31a), если принять во внимание соотношение $E = -\frac{i\omega}{c} A$. Для однородного первичного поля $H^0 = H_z^0$ очевидно имеем

$$\varphi_m^0 = -H^0 z \quad (33b)$$

вместо формулы (31c) для векторного потенциала.

Эти формулы не следует смешивать с теми, которые относятся к „дополнительной“ задаче поля вращательной симметрии с меридиональными электрическими и круговыми магнитными силовыми линиями. А именно в последнем случае имеем

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}$$

и

$$E_z = \frac{c}{4\pi\sigma\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_z)}{\partial r},$$

в виду уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \mathbf{E}$; граничные условия тоже приобретают совершенно иной вид.

В предельном случае идеально проводящего тела граничные условия (32b) следует заменить соотношениями

$$E' = -E^0, \quad H'_n = -H_n^0,$$

тогда как третье условие переходит в известную формулу

$$\Delta \frac{\mathbf{H}}{\mu} \times \mathbf{n} = 4\pi\mathbf{k}$$

для поверхностной плотности тока. Разумеется внутри тела $\psi' = -\psi^0$ ($\psi = E, \mathbf{H}$). Для идеально проводящего шара с радиусом a , находящегося в однородном первичном поле H^0 ($\sim e^{i\omega t}$), при этом получается решение того же вида, как и для однородного постоянного электрического поля со вторичным потенциалом $\varphi'_m = +H^0 \cdot z$ внутри и

$$\varphi'_m = -\mathbf{m}' \cdot \nabla \frac{1}{R}$$

снаружи шара. При этом m' обозначает индуцированный магнитный момент шара $= -\frac{1}{2} H^0 \cdot a^3$.

При $\omega = 0$ это решение теряет всякий смысл. Случай статического магнитного поля при $\mu \neq 1$ мы рассмотрим ниже в § 7.

3. Поперечное переменное магнитное поле. Вращающиеся поля и трехфазные моторы. Наряду с аксиальным переменным магнитным полем представляет теоретический интерес (в виду его простоты) и практическую важность (благодаря применениям в трехфазных двигателях) случай поперечного, т. е. перпендикулярного оси z первичного магнитного поля, напряженность которого не зависит от координаты z . Как легко видеть, такое поле соответствует продольному векторному потенциалу, удовлетворяющему условию $\frac{\partial A_z^0}{\partial z} = 0$ ($A_x^0 = A_y^0 = 0$).

При этом имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} H_x^0 &= \frac{\partial A_z^0}{\partial y}, & H_y^0 &= -\frac{\partial A_z^0}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 A_z^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z^0}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

которые показывают, что в рассматриваемой области пространства A_z^0 можно определить как мнимую часть некоторой аналитической функции A^0 комплексного переменного $\zeta = x + iy$, причем составляющие H_x^0 и H_y^0 получаются как вещественная и мнимая части комплексного выражения

$$H^0 = \left(\frac{\partial A^0}{\partial \zeta} \right)^* \quad (34a)$$

Комплексный векторный потенциал A^0 аналогичен комплексному скалярному потенциалу $f = \varphi + i\psi$ ($\psi = \varphi_m$), который мы ввели в § 4 гл. V при рассмотрении распространения волн вдоль идеально проводящих проводов. Однако вместо связанного с H поперечного электрического поля, мы имеем теперь чисто продольное поле E_z^0 , которое равно мнимой части выражения

$$E^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} A^0.$$

Представим себе, что в такое поле помещен бесконечно длинный цилиндр, параллельный оси Z и имеющий произвольное поперечное сечение. Тогда в этом цилиндре будут индуцироваться продольные, „аксиальные“ электрические токи, которые, очевидно, оставляют его поверхность незаряженной. В этом случае вторичное электромагнитное поле можно, следовательно, пред-

ставить через комплексный векторный потенциал A' (индекс z мы теперь отбросим), который снаружи цилиндра должен удовлетворять уравнению (34), т. е. является аналитической функцией ζ , обращаясь на бесконечности в нуль.

Внутри цилиндра он должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial y^2} + k^2 A' = -k^2 A^0, \quad (34b)$$

причем оба решения, согласно первому условию (32b), должны непрерывным образом переходить друг в друга [два других условия (32b) при $\Delta A' = 0$ удовлетворяются сами собой].

Особенно простые соотношения получаются в предельном случае идеально проводящего цилиндра. В этом случае внутри и на поверхности последнего функция A' равна $-A^0$, тогда как во внешнем пространстве она однозначно определяется условием $A' = -A^0$ для поверхности цилиндра, в связи с условием исчезновения на бесконечности.

Если, например, первичное магнитное поле однородно, то по (34a) при $\zeta = re^{i\alpha}$ имеем

$$A^0 = H^0 \zeta = r H^0 e^{i\alpha}. \quad (35)$$

Так как вещественная и мнимая части H^0 равны составляющим напряженности магнитного поля соответственно по осям X и Y , то, определяя зависимость H^0 от времени при помощи комплексного множителя $e^{i\omega t}$, т. е. полагая

$$H^0 = B e^{i\omega t} = B \cos \omega t + i B \sin \omega t, \quad (35a)$$

где B — вещественное число, получаем

$$H_x^0 = B \cos \omega t, \quad H_y^0 = B \sin \omega t.$$

Формула (35) определяет, следовательно, однородное магнитное поле, „колеблющееся по кругу“, т. е. равномерно вращающееся вокруг оси Z . Такие вращающиеся поля применяются в технике для многих целей, в частности в двигателях трехфазного тока. Комплексный векторный потенциал вращающегося поля с амплитудой B равен следовательно

$$A^0 = B r e^{i(\alpha - \omega t)}.$$

Переходя к вещественным величинам, имеем следовательно:

$$A_z^0 = B r \sin(\alpha - \omega t), \quad (35b)$$

т. е.

$$A_z^0 = -B r \sin \alpha \cos \omega t + B r \cos \alpha \sin \omega t$$

или, так как $r \sin \alpha = y$, $r \cos \alpha = x$:

$$A_z^0 = B(x \sin \omega t - y \cos \omega t).$$

Это соответствует электрическому полю

$$E_z^0 = \frac{\omega}{c} Br \cos(\alpha - \omega t) = \frac{\omega}{c} B(x \cos \omega t + y \sin \omega t),$$

пропорциональному проекции \mathbf{r} на равномерно вращающуюся прямую. В случае кругового цилиндра с радиусом сечения a , вторичный потенциал при $r > a$ однозначно определяется мнимой частью функции

$$A' = \frac{C}{r} e^{+i\omega t} = \frac{C}{r} e^{i(\omega t - \alpha)},$$

т. е.

$$A'_z = -\frac{C}{r} \sin(\alpha - \omega t).$$

Действительно, при $r = \infty$ эта функция обращается в нуль, а при $r = a$ совпадает с $-A_z^0$, если положить $C = a^2 B$.

Таким образом

$$A'_z = -\frac{a^2 B}{r} \sin(\alpha - \omega t) = -\frac{a^2}{r^2} A_z^0. \quad (35c)$$

Азимутальные составляющие напряженности первичного и вторичного магнитного поля на внешней стороне цилиндрической поверхности равны:

$$H_\alpha^0 = -\frac{\partial A_z^0}{\partial r} = -B \sin(\alpha - \omega t)$$

$$H'_\alpha = -\frac{\partial A'_z}{\partial r} = -\frac{a^2}{r^2} B \sin(\alpha - \omega t) = H_\alpha^0,$$

в то время как нормальные составляющие, так же, как и напряженности электрического поля, взаимно уничтожаются.

Отсюда для поверхностной плотности тока получается выражение

$$k_z = \frac{1}{4\pi} 2H_\alpha^0 = -\frac{1}{2\pi} B \sin(\alpha - \omega t),$$

что соответствует радиально направленному давлению, равному $\frac{1}{2} k_z H = \frac{H^2}{8\pi}$.

При учете конечной проводимости цилиндра, на ряду с этим давлением, не приводящим ни к какой результирующей силе или моменту, получаются еще азимутальные механические силы, обуславливающие вращательный момент, который совпадает по направлению с направлением оси вращения магнитного поля.

Для того, чтобы показать это, определим сначала полное поле для этого случая. Для внешнего пространства мы должны

очевидно сохранить решение в прежней форме, т. е. положить

$$A = \left(Br - \frac{C}{r} \right) e^{i(\alpha - \omega t)} \quad (r > a), \quad (36)$$

где C означает пока неопределенный коэффициент. Для полного (комплексного) потенциала внутри цилиндра имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + k^2 A = 0 \quad (r < a)$$

или в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} + k^2 A = 0.$$

Чтобы удовлетворить условию непрерывности ($\Delta A = 0$, при $r = a$), A должно зависеть от α через множитель $e^{i\alpha}$. Это дает

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = -A,$$

и следовательно

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) A = 0 \quad (\xi = kr),$$

т. е.

$$A = DJ_1(kr) e^{i(\alpha - \omega t)} \quad (r < a). \quad (36a)$$

Граничные условия $\Delta E_s = 0$ и $\Delta H_a = 0$ ($\mu = 1$) дают следующие два уравнения для определения постоянных C и D :

$$\left. \begin{aligned} B \cdot a - \frac{C}{a} &= DJ_1(ka), \\ B + \frac{C}{a^2} &= kDJ_1'(ka). \end{aligned} \right\}$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} C &= Ba^2 \frac{akJ_1'(ka) - J_1(ka)}{akJ_1'(ka) + J_1(ka)}, \\ D &= \frac{2Ba}{kaJ_1'(ka) + J_1(ka)}. \end{aligned} \right\} \quad (36b)$$

Этими формулами задача полностью решается.

Для малых значений ka ($\ll 1$) мы получаем в первом приближении [принимая во внимание, что $J_1(\xi) \cong \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{8} \right)$]:

$$\left. \begin{aligned} A &= B \left(r - \frac{i\omega a^4}{8c^2} \frac{1}{r} \right) e^{i(\alpha - \omega t)} \quad (r > a), \\ A &= Br \left[1 - \frac{i\omega}{8c^2} (r^2 - 2a^2) \right] e^{i(\alpha - \omega t)} \quad (r < a). \end{aligned} \right\} \quad (36c)$$

Плотность тока внутри цилиндра вычисляется по этим двум формулам согласно уравнению

$$j_s = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} = +\frac{i\omega\sigma}{c^2} A.$$

Умножая это выражение на радиальную составляющую напряженности магнитного поля

$$H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{i}{r} A,$$

или, вернее, на

$$H_r^* = -\frac{i}{r} A^*,$$

мы получаем упомянутую выше среднюю азимутальную силу на единицу объема. Соответствующий вращательный момент следовательно равен:

$$\bar{m}_s = \frac{1}{2} \frac{\omega\sigma}{c^2} |A|^2. \quad (36d)$$

Полный вращательный момент на единицу длины цилиндра будет

$$M_s = \int_0^a \bar{m}_s 2\pi r dr,$$

или с достаточным приближением, если положить $|A| = Br$,

$$M_s = \frac{\pi\omega\sigma}{4c^2} B^2 a^4. \quad (36e)$$

Напомним при этом, что B обозначает напряженность вращающегося магнитного поля.

4. Относительность вращательного движения; тонкие диски в поперечном и продольном магнитном поле. Такие же самые результаты получаются в том случае, когда цилиндр вращается в постоянном однородном магнитном поле с угловой скоростью $\omega_s = \omega$ (или, вернее, $-\omega$), поскольку линейная скорость (ωa) остается малой по сравнению со скоростью света. Эта относительность движения тела и поля представляется непосредственным следствием относительности поступательного движения в той специальной форме, которую мы назвали в § 2 гл. V, т. I „относительностью скорости“.

Электромагнитная сила $\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}^0$, действующая на единицу заряда, движущегося со скоростью \mathbf{v} в постоянном поле \mathbf{H} , принимает в рассматриваемом случае ($\mathbf{v} = \omega_s r$) вид:

$$E_s = \frac{\omega}{c} r H^0 \cos \alpha,$$

где $\alpha = \omega t$ означает угол между \mathbf{r} и \mathbf{H} . Это выражение фактически совпадает с напряженностью электрического поля $E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z^0}{\partial t}$, индуцируемого вращением магнитного поля в неподвижном теле.

Таким образом формулу (36e) можно распространить на случай вращения поля и цилиндра, если под ω понимать угловую скорость поля относительно цилиндра.

Эти результаты справедливы только для таких цилиндров, длина которых очень велика по сравнению с их поперечными размерами. А именно, на основаниях цилиндра должны образовываться электрические заряды, создающие электростатическое поле, которое необходимо учитывать. В предельном случае цилиндрического диска, т. е. тонкой пластинки, это электростатическое поле можно рассматривать как продольное и определить его напряженность по формуле:

$$\begin{aligned} -\varepsilon E_z'' &= 4\pi\eta = 4\pi c \int j dt = 4\pi c \int (E_z^0 + E_z' + E_z'') dt = \\ &= -\frac{4\pi\sigma}{c} A_z + 4\pi c \int E_z'' dt. \end{aligned}$$

Переходя опять к комплексным величинам, получаем

$$\left(\varepsilon + 4\pi \frac{\sigma}{i\omega} \right) E'' = \frac{4\pi\sigma}{c} A,$$

или при $\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon$:

$$E'' = \frac{i\omega}{c} A = -(E^0 + E').$$

Таким образом в этом „нулевом“ приближении индукционное электрическое поле уничтожается электростатическим полем. В первом приближении имеем:

$$E'' = -(E^0 + E') (1 + i\beta), \quad \beta = \frac{\omega\sigma}{4\pi\varepsilon} = 2\pi \frac{\tau_0}{\tau}$$

(где τ_0 — время релаксации, τ — период вращения), т. е.

$$E = -i\beta (E^0 + E').$$

Результирующее электрическое поле, и, следовательно, сила тока уменьшаются таким образом в отношении $\beta:1$. Механический эффект (средняя вращательная сила) должен, однако, полностью исчезнуть, так как сила тока сдвинута теперь по фазе относительно радиальной составляющей магнитного поля на $\frac{\pi}{2}$.

Интересно упомянуть еще случай, когда металлическая пластинка вращается в „продольном“, т. е. перпендикулярном к ее основаниям магнитном поле \mathbf{H} . При этом получается ради-

ально направленное индукционное электрическое поле с напряженностью

$$E_r^0 = \frac{v}{c} H = \frac{\omega}{c} r H, \quad (37)$$

которое эквивалентно электростатическому полю, определяемому скалярным потенциалом

$$\varphi^0 = \pm \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} H r^2 \quad (37a)$$

(\pm в зависимости от направления поля). Если соединить проволокой две различные точки пластинки при помощи скользящих контактов, то в проволоке появится ток, сила которого соответствует („внешней“) электродвижущей силе $\varphi_1^0 - \varphi_2^0$ („униполярная индукция“). В этом случае очевидно не может быть речи об относительном вращении пластинки и поля. Если представить себе, например, что внутри катушки возбуждено однородное поле H , то вращением катушки вокруг ее оси не будет вызвано никакого добавочного поля. На этом примере можно ясно видеть, что формулированная в гл. V первого тома „теория относительности“ безусловно справедлива только для поступательного (прямолинейного и равномерного) движения. Для более сложных движений она может иметь силу лишь в виде исключения, именно во всех тех случаях, когда зависимость магнитного поля от времени может быть представлена движением поля как целого (например в рассмотренном выше случае вращающегося поля).

О настоящем „движении“ магнитного, а также электрического поля в обычном механическом смысле, строго говоря, не может быть и речи. Это понятие совсем не фигурирует в общей электромагнитной теории и поэтому им нужно пользоваться с большой осторожностью.

5. Неограниченная плоская пластинка в произвольном переменном магнитном поле. Теорию индукционных токов в тонких неподвижных пластинках можно развить в совершенно общей и сравнительно очень простой форме, в частности для того случая, когда пластинка является плоской и бесконечной.

Представим себе, что такая пластинка, ограниченная плоскостями $z = +\frac{\delta}{2}$ и $z = -\frac{\delta}{2}$, находится в заданном переменном поле, характеризуемом векторным потенциалом A^0 . Как было показано на примере вращающегося поля, составляющая по оси z этого потенциала или, вернее, соответствующего индукционного электрического поля $-\frac{1}{c} \frac{\partial A_z^0}{\partial t}$, вызывает электростатическое поле, которое практически компенсирует его, допуская совершенно незначительный ток в направлении z . Поэтому мы можем огра-

ничиться рассмотрением составляющих плотности тока по осям x и y . При не слишком быстрых колебаниях и для достаточно тонких пластинок эти составляющие практически не зависят от координаты z . Мы введем поэтому вместо обыкновенной плотности тока величину

$$\mathbf{J} = \delta \cdot \mathbf{j}, \quad (38)$$

которая очевидно эквивалентна „поверхностной плотности“ и которую мы будем называть просто силой тока.

Она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad (38a)$$

и должна быть связана с составляющими напряженности электрического поля соотношениями

$$J_x = \frac{\sigma \delta}{c} E_x, \quad J_y = \frac{\sigma \delta}{c} E_y. \quad (38b)$$

Здесь E означает полную напряженность электрического поля, т. е. сумму

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial A'}{\partial t} \right). \quad (39)$$

При этом составляющая A' по оси z должна очевидно обращаться в нуль, так что вторичное магнитное поле может быть определено формулами

$$H'_x = -\frac{\partial A'_y}{\partial z}, \quad H'_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z}. \quad (39a)$$

Разность значений H' на обеих сторонах пластинки связана с силой тока J соотношением

$$\Delta H' \times \mathbf{n} = 4\pi J,$$

(где \mathbf{n} указывает направление z). Соответствующие граничные напряженности вторичного магнитного поля должны быть очевидно равны и противоположно направлены; поэтому можно положить

$$H'_x = \pm 2\pi J_y, \quad H'_y = \mp 2\pi J_x, \quad \left(z = \pm \frac{\delta}{2} \right) \quad (39b)$$

в то время как изменением H^0 и других первичных величин для $\Delta z = \delta$ можно пренебречь. Принимая во внимание (38b), (39) и (39a), можно представить последние уравнения в следующем виде:

$$\frac{\partial A'}{\partial z} \mp \frac{2\pi\sigma\delta}{c^2} \frac{\partial A'}{\partial t} = \pm \frac{2\pi\sigma\delta}{c^2} \frac{\partial A^0}{\partial t}, \quad (z = \pm \delta) \quad (40)$$

где A^0 означает проекцию первичного векторного потенциала на плоскость xy .

Этим „граничным условием“ и уравнением

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial z^2} = 0, \quad (40a)$$

имеющем место вне пластинки, вторичное поле однозначно определяется во всем пространстве и для всех моментов времени.

Представим себе, что первичное поле, менявшееся вначале совершенно произвольным образом, в момент $t=0$ становится постоянным, причем $\frac{\partial A^0}{\partial t}$ для $t > 0$ равно нулю. Тогда согласно (40) получаем

$$\frac{\partial A'}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A'}{\partial t} = 0, \quad \text{где } u = \frac{c^2}{2\pi\sigma\delta}. \quad (40b)$$

Это уравнение относится только к пластинке, т. е. к плоскости $z=0$. Так как, однако, потенциал A' должен удовлетворять во всем пространстве уравнению (40a), в которое время явно не входит, то для этого потенциала получается следующая общая формула

$$A' = F(x, y, z \pm ut), \quad (40c)$$

причем верхний знак соответствует $z > 0$, а нижний для $z < 0$.

Эта формула показывает, что спадание вторичного поля в любом месте ($z = \text{const.}$) и в частности в самой пластинке происходит так, как если бы поле, соответствующее моменту $t=0$ равномерно перемещалось параллельно оси z со скоростью u по направлению к пластинке таким образом, что в момент t в плоскости $z=0$ существует такое же поле, какое существовало в момент 0 на расстоянии $z=ut$ от нее. Разумеется, поле должно быть совершенно симметричным относительно пластинки. Для $\sigma = \infty$ получается $u=0$; это значит, что индукционные токи и возбуждаемое ими вторичное поле после исчезновения первичного электрического поля, так сказать, „застывают“, т. е. сохраняют достигнутое в этот момент значение. Едва ли нужно упоминать, что пластинка в этом случае ведет себя как идеальный экран; первичное поле A^0 тока, находящегося по одну сторону такой пластинки (например, в верхнем полупространстве), индуцирует в последней такие поверхностные токи, которые уничтожают это поле во всем полупространстве, лежащем по другую сторону пластинки.

В виду соотношения (38a), имеющего место между составляющими тока, можно положить

$$J_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad J_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (41)$$

где ψ есть так называемая функция тока a . Разность $\psi_2 - \psi_1$ для двух произвольных точек пластинки равна полной силе тока $\int J_n ds$, текущего через какую-либо линию (или, вернее, цилиндрическую поверхность), связывающую эти точки. В самом деле, имеем

$$\int J_n ds = \int \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \psi_2 - \psi_1.$$

Следовательно, линии тока можно определить как линии $\psi = \text{const}$.

Функция тока связана с поверхностными значениями H' согласно (39b) соотношением

$$H' = \mp \nabla (2\pi\psi) \quad (z = \pm \frac{1}{2} \delta) \quad (41a)$$

и может быть представлена, таким образом, как поделенный на 2π скалярный магнитный потенциал на пластинке. В этом смысле ее можно считать аналитически продолженной также вне пластинки по одну или — с противоположным знаком — по другую ее сторону.

§ 5. Постоянные (гальванические) токи и переход к электростатике

1. Распределение тока в электролитах (идеально проводящих телах) в присутствии металлических (идеально проводящих) электродов. Как было уже упомянуто в начале этой главы, строго постоянные токи могут вызываться только электростатическими силами. В трехмерных телах такие токи наблюдаются главным образом при сравнительно небольших электропроводностях (электролиты, земля в целом ряде геофизических исследований). В качестве источников тока (или приемников) при этом служат металлические электроды гораздо более высокой проводимости, соединенные посредством очень тонких металлических проводов с какими-нибудь гальваническими элементами, аккумуляторными батареями и т. д., находящимися вне рассматриваемой области пространства. Влиянием этих проводов на распределение потенциала и тока можно в таких случаях пренебрегать и рассматривать электроды как идеально проводящие ($\sigma = \infty$). Электрическое поле внутри последних должно очевидно при этих условиях исчезать (так как конечная напряженность вызвала бы бесконечно большой ток); поэтому каждый электрод должен обладать определенным электростатическим потенциалом φ_α ($\alpha = 1, 2, \dots$). Помимо этого потенциала каждый электрод характеризуется еще током J_α , подводимым к нему (или вытекающим из него), который мы будем считать положительным или отрицательным, смотря по тому, течет ли он наружу или внутрь.

Величины $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и J_1, \dots, J_n (n — число электродов) не независимы друг от друга. Именно, так как $J_\alpha = \oint j_n dS_\alpha$, то в виду соотношений $\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E}$ и $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, силы тока J_α должны быть линейными функциями электродных потенциалов и наоборот. Поэтому можно положить

$$\left. \begin{aligned} J_\alpha &= \sum_\beta s_{\alpha\beta} \varphi_\beta, \\ \varphi_\alpha &= \sum_\beta R_{\alpha\beta} J_\beta, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где коэффициенты $s_{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta}$ определяются при полном решении задачи распределением тока и потенциала вне электродов, — иначе говоря — в окружающем или заключенном между ними электролите.

В последующем мы будем всегда предполагать, что этот электролит или совершенно однороден, или состоит из нескольких однородных частей. Однако сначала мы будем рассматривать только первый случай.

Представим себе таким образом, что некоторое число электродов данной формы и величины погружено в однородный электролит.

Потенциалы электродов или соответствующие силы токов мы предполагаем известными. Требуется определить распределение потенциала φ в электролите. Распределение тока вычисляется по формуле

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{c} \nabla \varphi.$$

При этом функция φ внутри электролита должна оставаться непрерывной, удовлетворять уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (43)$$

и граничным условиям на электродах:

$$\varphi = \varphi_\alpha \quad (\text{известная постоянная величина}) \quad (43a)$$

или

$$\varphi = \text{const} \quad (\text{неизвестная величина})$$

и

$$\left. \begin{aligned} & - \oint \frac{\sigma}{c} \nabla_n \varphi dS_\alpha = J_\alpha \quad (\text{известные величины}) \end{aligned} \right\} \quad (43b)$$

Постоянство потенциала на каждом электроде требуется также и в том случае, когда его значение неизвестно. Отсюда вытекает, что градиент φ на поверхности электрода направлен перпендикулярно к нему. Мы можем поэтому в (43b) положить $\nabla_n \varphi = \pm |\nabla \varphi| = \pm E$, со знаком $+$ или $-$ в зависимости от направления поля.

Если имеется не один, а несколько электролитов, граничащих друг с другом вдоль определенных поверхностей Σ , то помимо граничных условий (43a) или (43b) для этих поверхностей принимаются во внимание еще граничные условия

$$\Delta E_{\tau} = 0, \quad \Delta(\sigma E_{\tau}) = 0, \quad (\mathbf{E} = -\nabla\varphi), \quad (43c)$$

где E_{τ} означает нормальную, а E_{τ} — касательную составляющие напряженности \mathbf{E} . Первое условие выполняется при этом само собой, поскольку φ представляет непрерывную функцию места, что мы всегда будем предполагать ($\Delta\varphi = 0$). Диэлектрические постоянные электролитов совсем не входят в эти граничные условия. Они позволяют определить только плотность свободных зарядов, собирающихся на поверхностях Σ , по формуле:

$$\Delta(\epsilon E_{\tau}) = 4\pi\eta; \quad (43d)$$

однако это соотношение для решения сформулированной выше задачи значения не имеет.

Эта формулировка задачи становится частично или совершенно бессмысленной, если проводимость некоторых или всех тел, называемых нами электролитами, равна нулю, т. е. при переходе от плохо проводящих тел к идеальным изоляторам. Условия $\Delta(\sigma E_{\tau}) = 0$ обращаются при этом в тождества, в то время как „несущественные соотношения“ (43d) ввиду того, что $\eta = 0$, берут на себя их роль, и поэтому вместо (43c) получаем следующие граничные условия:

$$\Delta E_{\tau} = 0, \quad \Delta\epsilon E_{\tau} = 0. \quad (44)$$

Если только одно тело, граничащее вдоль Σ , представляет совершенный изолятор, в то время как другие обладают конечной проводимостью, то мы должны учитывать еще условие $\Delta(\sigma E_{\tau}) = 0$; в этом случае однако для второго (проводящего) тела оно приводится к условию

$$E_{\tau} = 0, \quad (44a)$$

тогда как для первого существует соотношение

$$\epsilon E_{\tau} = 4\pi\eta. \quad (44b)$$

2. Распределение электростатических потенциалов и их отношение к гальваническим. Если все „электролиты“ являются на самом деле изоляторами, то вопрос о распределении тока теряет смысл, так как при этом электрический ток вообще не может иметь места. Если же потенциалы электродов попрежнему считать известными величинами, то на основании уравнений (43), (43a) и (44) получаем определенное распределение потенциала, очевидно точно совпадающее с тем, которое получилось бы, если бы изоляторы с диэлектрическими постоянными ϵ были заменены элек-

тролитами с проводимостями $\sigma = \epsilon$. При этом, однако, вместо силы тока J_α получаем из граничных условий (44a, b) электрический заряд электродов

$$e_\alpha = \oint \eta dS_\alpha.$$

Таким образом первоначальная „гальваническая“ задача при $\sigma = 0$ превращается в формально тождественную, но по существу отличную электростатическую задачу. Последняя допускает еще вторую формулировку, соответствующую случаю, когда заданы не потенциалы, а заряды электродов.

В этом случае граничные условия (43a) заменяются условиями, аналогичными (43b)

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_\alpha = \text{const} \text{ (неизвестные величины)} \\ - \int \frac{\epsilon}{4\pi} \nabla_n \varphi dS_\alpha = e_\alpha \text{ (известные величины)} \end{array} \right\} \quad (44c)$$

При этом электроды могут не быть идеальными проводниками; даже если проводимость их незначительна, условие (44a), т. е. $\varphi = \text{const}$ на их поверхности и внутри, также должно выполняться (при наличии равновесия). Провода в этом случае очевидно не нужны, так как электроды изолированы друг от друга; поэтому обычно их называют просто „проводниками“.

В электростатических задачах проводники могут находиться в пустом пространстве, которое можно трактовать как изолятор с диэлектрической постоянной $\epsilon = 1$. При этом, так же как и в случае $\epsilon > 1$, центр тяжести задачи лежит обычно не в распределении потенциала в пространстве или в диэлектрике, а в распределении зарядов e_α на поверхности проводников, т. е. в определении поверхностной плотности зарядов η . Если электрическое поле известно, то последняя определяется по формуле (44b).

Наоборот, зная η можно вычислить электрическое поле согласно формуле $\varphi = \sum \int \frac{\eta dS_\alpha}{R}$.

В гальванической задаче поверхностной плотности заряда соответствует величина $j_n = -\frac{\sigma}{c} \nabla_n \varphi = \pm j$, т. е. объемная плотность электрического тока на поверхности данного электрода; роль диэлектрической постоянной играет в этом случае величина $\frac{4\pi\sigma}{c}$. Мы выразим это обстоятельство символической формулой

$$\epsilon = \frac{4\pi\sigma}{c}.$$

Заряды e_α должны быть связаны с потенциалами φ_α согласно (44b) линейными соотношениями такого же вида, как

силы тока J_α в гальванической задаче. Мы можем следовательно положить

$$\left. \begin{aligned} e_\alpha &= \sum_\beta p_{\alpha\beta} \varphi_\beta, \\ \varphi_\alpha &= \sum_\beta q_{\alpha\beta} e_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Последняя формула в несколько ином смысле уже применялась нами ранее [см. (2)], § 3], именно для электрических напряжений в системе электростатически связанных электрических цепей, при этом коэффициенты $q_{\alpha\beta}$ (с противоположными знаками) мы называли индукционными коэффициентами. Это наименование сохраним также и здесь. Обратные им величины $p_{\alpha\beta}$ называются емкостными коэффициентами данной системы проводников. Им соответствуют в гальванической задаче „коэффициенты проводимости“ $s_{\alpha\beta}$, а индукционным коэффициентам $q_{\alpha\beta}$ — „коэффициенты сопротивления“ $R_{\alpha\beta}$.

В последующем мы будем измерять силу тока в электростатических единицах и соответственно этому положим $c=1$. Предыдущее символическое соотношение между ε и σ приводится при этом к виду

$$\varepsilon = 4\pi\sigma. \quad (45a)$$

Если электрическая задача для данной системы проводников и диэлектриков решена, то отсюда тотчас же получаем решение соответствующей гальванической задачи, заменяя заряды e_α токами J_α и диэлектрические постоянные ε величинами $4\pi\sigma$.

Отсюда следует, что в простейшем случае одной единственной изолирующей или проводящей (электролитической) среды статические и гальванические коэффициенты p , q и соответственно s , R должны быть связаны друг с другом формулами

$$\left. \begin{aligned} s_{\alpha\beta}'' &= \frac{4\pi\sigma''}{\varepsilon'} p'_{\alpha\beta}, \\ R_{\alpha\beta}'' &= \frac{\varepsilon'}{4\pi\sigma''} q'_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (45b)$$

Штрихи здесь указывают на то, что постоянные ε и σ относятся к различным телам.

3. Случай однородного электролита. Если ограничиваться этим случаем, то своеобразная разрывность, характеризующая переход от гальванической задачи к электростатической при $\sigma=0$, не представляет никакой помехи. Если, например, заданы потенциалы φ_α , то согласно уравнению (43) электрическое поле однозначно определяется во всем пространстве, безразлично, заполнено ли это пространство изолятором или электролитом. В первом случае получается согласно (44b) определенное

распределение зарядов на поверхности электродов при отсутствии тока; во втором случае — такое же распределение зарядов и сверх того пропорциональное ему распределение тока ($j = \sigma E$). При этом заряды и токи связаны друг с другом соотношением

$$J_\alpha = \frac{4\pi\sigma}{s} e_\alpha = \frac{e_\alpha}{\tau}, \quad (46)$$

где τ означает уже неоднократно рассматривавшееся время релаксации данного электролита.

Почти так же просто ставится задача и в том случае, когда заданы не потенциалы, а заряды e_α для определенного момента $t=0$ и отсутствуют какие бы то ни было провода, соединяющие электроды с внешними источниками тока. При $\sigma=0$ устранение этих проводов не существенно, и мы имеем перед собой обыкновенную электростатическую задачу (во второй формулировке). Если однако $\sigma > 0$ (как это бывает на самом деле у всех неидеальных изоляторов), то металлические проводники должны разряжаться, причем силы тока оказываются связанными с соответствующими зарядами соотношением

$$J_\alpha = -\frac{de_\alpha}{dt}. \quad (46a)$$

Вместе с тем, однако, должно сохраняться также и соотношение (46), так как оно вытекает из формул

$$\frac{\varepsilon E_n}{4\pi} = \eta, \quad j_n = \sigma E_n,$$

всегда имеющих место на поверхности электродов.

Таким образом получаем

$$-\frac{de_\alpha}{dt} = \frac{e_\alpha}{\tau},$$

т. е.

$$e_\alpha = e_\alpha^0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (46b)$$

Разряд электродов происходит следовательно по тому же гочно закону, как и рассасывание первоначально имевшегося свободного объемного заряда

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

4. Случай двух различных электролитов. Положение дела значительно усложняется, когда имеется не один, а несколько электролитов (или неидеальных изоляторов). Согласно неполной (не учитывающей времени) теории для поверхности их раздела получаются два, вообще говоря, несовместимых друг с другом граничных условия $\Delta \varepsilon E_n = 0$ и $\Delta \sigma E_n = 0$, причем при

$\sigma=0$ остается в силе первое условие, тогда как при $\sigma > 0$ становится существенным второе. Учет временного фактора позволяет очень простым и естественным способом разрешить эти противоречия. Именно, можно утверждать следующее: если системе электродов сообщить потенциалы φ_a , то сначала устанавливается статическое распределение потенциала, удовлетворяющее уравнению $\nabla^2 \varphi = 0$ и граничным условиям (44); постепенно однако оно переходит в гальваническое распределение, которое определяется тем же самым уравнением $\nabla^2 \varphi = 0$ и граничными условиями (43с). Время перехода от статического распределения к гальваническому совпадает по порядку величины с временем релаксации для различных „электролитов“ и „изоляторов“. Для идеальных изоляторов оно бесконечно велико.

Точная зависимость потенциала φ от времени определяется на основании общих граничных условий

$$\Delta E_\tau = 0, \quad \Delta \left(\sigma + \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_n = 0, \quad (47)$$

причем последнее условие получается из уравнений (5) и (6), т. е. из

$$\Delta \frac{\epsilon}{4\pi} E_n = \eta \quad \text{и} \quad \Delta (\sigma E_n) = - \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

посредством дифференцирования первого по t и сложения со вторым. К ним нужно, однако, еще присоединить условие, что первоначально имеется чисто электростатическое распределение потенциала, т. е. что в момент $t=0$ $\varphi = \varphi^0$, где φ^0 соответствует случаю $\sigma=0$. При достаточно малых значениях σ переход от электростатического к гальваническому распределению происходит настолько медленно, чтобы можно было пренебречь индукционными эффектами, обусловленными изменением во времени векторного потенциала электрического тока. Такие процессы мы будем называть квазистатическими.

Рассмотрим для примера следующий случай. Пусть электроды представляют собой две параллельные, бесконечно протяженные пластинки, совпадающие с плоскостями $x=0$ и $x=l$. У первого электрода находится электролит (или неидеальный изолятор) a в виде слоя толщины $l_a = x_1$; с ним граничит второй электролитический слой толщины $l_b = l - l_a$ (рис. 42). Потенциалы электродов φ_1 и φ_2 предполагаем постоянными.

Потенциал φ внутри a и внутри b должен удовлетворять уравнению $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$, решение которого имеет вид

$$\varphi = c_1 x + c_2,$$

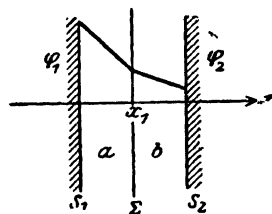


Рис. 41.

где коэффициенты c_1 и c_2 имеют для a и b различные значения, определенным образом зависящие от времени.

Эта формула соответствует однородному электрическому полю. Обозначая его напряженности в a и b соответственно через E_a и через E_b , будем иметь согласно (47)

$$\left(\sigma_a + \frac{\varepsilon_a}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_a = \left(\sigma_b + \frac{\varepsilon_b}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_b. \quad (47a)$$

С другой стороны между обеими напряженностями должно существовать соотношение

$$l_a E_a + l_b E_b = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const.} \quad (47b)$$

Исключая E_b из (47a) и (47b), получаем следующее дифференциальное уравнение для E_a

$$\frac{1}{4\pi} (\varepsilon_a l_b + \varepsilon_b l_a) \frac{dE_a}{dt} + (\sigma_a l_b + \sigma_b l_a) E_a = \sigma_b (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Его интегрирование дает

$$E_a = \frac{\gamma}{\beta} + A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}, \quad (48)$$

где для краткости положено

$$\alpha = \frac{\varepsilon_a l_b + \varepsilon_b l_a}{4\pi}, \quad \beta = \sigma_a l_b + \sigma_b l_a, \quad \gamma = \sigma_b (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (48a)$$

A означает неизвестную пока постоянную интегрирования.

Согласно (48) при $t = \infty$ получаем

$$E_a^\infty = \frac{\sigma_b (\varphi_1 - \varphi_2)}{\sigma_a l_b + \sigma_b l_a}.$$

Это соответствует окончательному гальваническому распределению. Чтобы получить в первоначальный момент соответствующее статическое распределение потенциала

$$E_a^0 = \frac{\varepsilon_b (\varphi_1 - \varphi_2)}{\varepsilon_a l_b + \varepsilon_b l_a}, \quad (48b)$$

мы должны положить

$$A = E_a^0 - E_a^\infty. \quad (48c)$$

Этими формулами наша задача решается полностью.

Интересно отметить, что рассматриваемый процесс имеет такой же экспоненциальный характер по отношению к своей зависимости от времени, как разряд системы металлических проводников, находящихся в однородной плохо проводящей среде. Эффективное время установления гальванического распределения

$$\tau = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon_a / l_a + \varepsilon_b / l_b}{4\pi (\sigma_a / l_a + \sigma_b / l_b)}$$

играет при этом такую же роль, как время разрядки, и приближается к последнему, когда толщина одного из обоих слоев уменьшается. При этом оно странным образом стремится к времени релаксации, соответствующему исчезающему слою, а не тому, который остается.

Этот парадокс объясняется тем обстоятельством, что изложенная теория не учитывает диффузионных сил, всегда появляющихся при рассматриваемых явлениях, а также свободных объемных зарядов, обусловленных пространственным разделением различных сортов ионов. Последние должны собираться главным образом у электродов и поверхностей раздела между различными электролитами в виде очень тонких „поляризационных слоев“.

В первом приближении эти слои можно трактовать как электрические двойные слои, характеризующиеся определенными скачками потенциала. Эти скачки потенциала можно фактически определить, пользуясь изложенной в гл. III, § 8 общей теорией электролитической поляризации. Однако эта теория требует некоторых поправок и дополнений, ибо она приводит к тому результату, что в состоянии равновесия электрическое поле практически полностью концентрируется в прилежащих к электродам поляризационных слоях, где оно может достигать необычайно больших значений, в то время как вне этих слоев напряженность электрического поля практически исчезает. В действительности, однако, скачки потенциала в электродных слоях вскоре после пуска тока достигают определенных, практически постоянных значений $\Delta\varphi_a$, а результирующее распределение потенциала и тока — по крайней мере для очень больших промежутков времени — определяется на основании эффективных потенциалов электродов $\varphi'_a = \varphi_a - \Delta\varphi_a$ по описанному методу, с добавочным условием, что при переходе через поверхность раздела двух различных электролитов потенциал также испытывает постоянный скачок.

5. Термоэлектронные явления и влияние свободного объемного заряда на электростатическое распределение потенциала. В заключение мы должны указать еще на одно усложнение, которое может возникнуть, когда электроды помещены в идеальный изолятор, например в вакуум, и когда, следовательно, ожидается чисто статическое распределение потенциала. Именно, при очень высоких температурах у всех металлических проводников имеет место „испарение свободных электронов“. Последние вылетают из металла в том большем количестве и с тем большими скоростями, чем выше температура. Мы вкратце рассмотрим влияние того объемного заряда, который образуется вблизи поверхности металла, благодаря выходу „термоэлектронов“. ¹ При этом

¹ До сих пор мы полагали, что объемная плотность свободного заряда равна нулю.

будем представлять себе, что электроды поддерживаются при постоянных потенциалах и что вылетающие электроны могут свободно двигаться в окружающем диэлектрике. Необходимо различать при этом два случая, смотря по тому, находятся ли электроны в настоящем материальном диэлектрике, например в не очень разреженной газе, или же в вакууме. В первом случае скорость v , а во втором ускорение w электронов должны быть пропорциональны напряженности электрического поля. Соответственно этому для результирующей плотности тока j в первом случае получаем

$$j = \sigma E = \frac{e^2 n}{\vartheta} E, \quad (49)$$

где n — концентрация свободных электронов и ϑ — коэффициент их трения $\left(\sigma = \frac{e^2 n}{\vartheta} \right)$ — эффективная проводимость среды), а во втором случае

$$j = en v, \quad \frac{1}{2} m v^2 = e\varphi + \text{const}, \quad (49a)$$

причем заряд электрона обозначен через $-e$. Последняя формула для определения силы тока вообще недостаточна, так как она оставляет неизвестным направление движения электронов. Однако эта неопределенность исчезает во всех тех случаях, где из соображений симметрии явствует, что электрические силовые линии должны быть прямолинейны.¹

Рассмотрим, например, простейший случай двух плоско-параллельных электродов в предположении, что только первый из них нагрет и испускает термоэлектроны. Число испускаемых (или „испаряемых“) единиц поверхности в единицу времени электронов обозначим через N . Скорость, с которой они вылетают, можно не принимать во внимание, так как она или тотчас же уничтожается (при наличии материального изолятора), или же очень мала по сравнению со скоростью, сообщаемой им электрическим полем (при отсутствии такого изолятора, т. е. в вакууме).

Сила (или, вернее, плотность) тока $J = env$ должна быть при этом не больше общего электрического заряда $nv = N$, теряемого за единицу времени первым электродом. Если выполнено условие

$$env < eN,$$

то часть термоэлектронов должна возвращаться к первому электроду. Напротив, при $nv = N$ все они переходят ко второму

¹ В противном случае вместо уравнения энергии мы должны рассматривать обыкновенные уравнения движения.

электроду. Соответствующее максимальное значение или значение насыщения тока равно следовательно

$$J_{\max} = eNv. \quad (49b)$$

Допустим сначала, что $J < J_{\max}$ и ограничимся стационарным распределением тока, при котором J не зависит от x .

Потенциал φ определяется в этом случае уравнением Пуассона

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 4\pi ne, \quad (50)$$

причем в правой части должно быть положено или

$$ne = \frac{J\vartheta}{eE} = \frac{J\vartheta}{e \frac{d\varphi}{dx}} \quad (50a)$$

согласно (49), или

$$ne = \frac{J}{\sqrt{\frac{2e\varphi}{m} + \text{const}}} \quad (50b)$$

согласно (49a). В первом случае это дает

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{4\pi J\vartheta}{e} x + \text{const} \equiv \alpha x + c_1, \quad (51)$$

и следовательно

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3\alpha} (\alpha x + c_1)^{\frac{3}{2}} + c_2, \quad (51a)$$

где c_1 и c_2 — две постоянные, которые можно выразить через потенциалы φ_1 и φ_2 обоих электродов.

Во втором случае, если положить постоянную в (50b) равной нулю, что при $\varphi_1 = 0$ соответствует исчезающей скорости выхода электронов, получаем

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{d\varphi'}{dx} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} \varphi' = -\frac{\beta}{\sqrt{\varphi}},$$

где

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{4\pi J}{\sqrt{\frac{2e}{m}}}.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2} \frac{d(\varphi'^2)}{d\varphi} = \frac{\beta}{\sqrt{\varphi}},$$

т. е.

$$\varphi'^2 = E^2 = c + 4\beta \sqrt{\varphi}.$$

Так как при $x=0$ $\varphi = \varphi_1 = 0$, то c_1 равно квадрату напряженности E_0 электрического поля в непосредственной близости к первому электроду. Таким образом имеем

$$E^2 - E_0^2 = 4\beta \sqrt{\varphi}. \quad (52)$$

Это уравнение интегрируется дальше без труда. В простейшем случае, представляющем наибольший практический интерес, можно положить $E_0 = 0$ (электрическое поле у катода совершенно аннулируется объемным отрицательным зарядом, образуемым находящимися около него электронами). Мы получаем при этом

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{4\beta} \varphi^{\frac{1}{4}}, \text{ т. е. } x = \sqrt{4\beta} \int_0^{\varphi} \varphi^{-\frac{1}{4}} d\varphi = \frac{2}{3\sqrt{\beta}} \varphi^{\frac{3}{4}}$$

или согласно определению β :

$$J = \frac{9\sqrt{\frac{2e}{m}}}{4\pi l^2} (\varphi_2 - \varphi_1)^{\frac{3}{2}}, \quad (52a)$$

где $\varphi_2 - \varphi_1$ обозначает разность потенциалов между обоими электродами, а l — расстояние между ними.

При $J = Ne$ эта формула (впервые выведенная Лангмюиром) дает наименьшую разность потенциалов, необходимую для прохождения всех термоэлектронов от накаливаемого электрода к холодному.

§ 6. Общие принципы электро- и гальваностатики

1. Однозначность решения электростатической задачи и теоремы о минимальном значении. В последующем, отвлекаясь от усложнений, возникающих от электролитической поляризации и термоэлектронного эффекта, мы подробно исследуем статическое или гальваническое распределение потенциала, согласно принципам, изложенным в начале предыдущего параграфа. Так как оба эти распределения формально тождественны, причем первое переходит во второе, если заряды электродов e_α заменить силами токов J_α , а диэлектрические постоянные ϵ_α — проводимостями σ_α , умноженными на 4π , то мы можем ограничиться только исследованием электростатической задачи.

Покажем сначала, что эта задача в обеих вышеприведенных формулировках решается однозначно.

Для простейшего случая, когда все электроды или „металлические проводники“ находятся в пустом пространстве, искомого доказательство однозначности фактически уже было проведено в томе I, гл. IV, § 5 (стр. 119) при рассмотрении вопроса об эквивалентном распределении зарядов, возбуждающих вне и внутри данных поверхностей заданное электрическое поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа.

Это доказательство легко обобщается на тот случай, когда наряду с проводниками имеется произвольное число изоляторов или диэлектриков, расположенных между ними или окружающих их.

Представим себе всю систему заключенной в добавочную поверхность S_0 и разобьем весь объем V , заключенный между этой поверхностью и поверхностями данных проводников S_α , на отдельные объемы V_i , заполненные однородными диэлектриками и разграниченные их поверхностями раздела и поверхностями S_α ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, n$). Для каждого такого объема V_i применим формулу преобразования

$$\oint \psi \nabla_n \varphi dS_i = \int \psi \nabla^2 \varphi dV_i + \int \nabla \psi \cdot \nabla \varphi dV_i \quad (53)$$

[см. (20) стр. 120, т. I), затем положим $\psi = \varepsilon_i \varphi$ и просуммируем по i .

Если φ удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \varphi = 0$ и граничным условиям (44), то интегралы, взятые по поверхностям раздела различных диэлектриков, взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \int \varepsilon \varphi \nabla_n \varphi dS_\alpha = \int \varepsilon (\nabla \varphi)^2 dV. \quad (53a)$$

Что касается направления нормали, то по отношению к объему V берется внешняя, а следовательно по отношению к ограничивающим его поверхностям проводников S_1, S_2, \dots — внутренняя нормаль.

Поэтому имеем $(\varepsilon \nabla_n \varphi)_\alpha = +4\pi \eta_\alpha$, и так как $(\varphi)_\alpha = \varphi_\alpha = \text{const}$, то

$$\sum_{\alpha > 0} \int \varepsilon \varphi \nabla_n \varphi dS_\alpha = 4\pi \sum_{\alpha > 0} \varphi_\alpha e_\alpha. \quad (53b)$$

При определении значения интеграла по поверхности S_0 мы должны различать два случая в зависимости от того, окружена ли фактически рассматриваемая система проводников снаружи проводящей оболочкой или нет. В первом случае мы примем за S_0 внутреннюю поверхность этой оболочки и тогда для соответствующего интеграла получим значение $4\pi \varphi_0 e_0$. Во втором же случае удалим эту поверхность в бесконечность; при этом соответствующий интеграл обратится в нуль. Таким образом в обоих случаях согласно (53a) получаем

$$\sum_i \frac{1}{2} \varphi_\alpha e_\alpha = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 dV. \quad (54)$$

Заметим, что для поверхности S_0 , лежащей внутри внешней металлической оболочки, существует следующее соотношение, вытекающее из уравнения $\operatorname{div} \varepsilon E = 4\pi\rho$,

$$\oint \varepsilon E_n dS_0 = 4\pi \sum_0^n e_\alpha = 0,$$

так как E очевидно равно нулю. Это значит, что заряд, находящийся на внутренней поверхности металлической оболочки (если таковая существует), равен с обратным знаком алгебраической сумме зарядов внутренних проводников.

Правая часть формулы (54) представляет энергию W_f свободных электронов (см. гл. II, § 1). Левая часть имеет следовательно такое же самое значение, причем оно соответствует „субстанциальному представлению“ или „теории дальнего действия“.

Впоследствии к этому вопросу мы еще вернемся. Пока же воспользуемся формулой (54) для доказательства вышеупомянутой теоремы однозначности. Для этой цели представим себе, что φ' и φ'' являются двумя различными непрерывными решениями уравнения Лапласа, удовлетворяющими одним и тем же граничным условиям. Тогда их разность $\varphi = \varphi' - \varphi''$ должна также представлять решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (44); на поверхности проводников это решение или обращается в нуль, или во всяком случае принимает постоянное значение, причем в последнем случае заряды $e_\alpha = e'_\alpha - e''_\alpha$ должны быть равны нулю. Согласно формуле (54) интеграл $\int \varepsilon (\nabla\varphi)^2 dV$ в обоих случаях обращается в нуль, а так как диэлектрические постоянные ε представляют собою положительные числа, то это возможно только в том случае, когда $\nabla\varphi$, а следовательно также и φ , во всем объеме V обращаются в нуль, т. е. когда $\varphi' \equiv \varphi''$.

Допустим теперь, что φ ($= \varphi' = \varphi''$) представляет собой единственное решение рассматриваемой задачи, и сравним значение „интеграла энергии“

$$W_f = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 dV \quad (54a)$$

с тем значением $W'_f = W_f + \Delta W_f$, которое соответствует другому, варьированному полю $E' = -\nabla\varphi'$, $\varphi' = \varphi + \delta\varphi$. Это варьированное поле должно удовлетворять граничным условиям (44) для поверхностей раздела различных диэлектриков; что же касается уравнения $\nabla^2\varphi = 0$ и условий (43a) или (43b), то мы пока оставим их без внимания.

Рассмотрим прежде всего ту часть ΔW_f , которая соответствует некоторой однородной части объема V_i ; при этом получаем (см. т. I, стр. 120):

$$8\pi (\Delta W_f)_i = 2 \int \varepsilon \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi dV_i + \int \varepsilon (\nabla\delta\varphi)^2 dV.$$

Согласно (53) можно представить первый интеграл правой части в виде

$$\oint \varepsilon \delta\varphi \nabla_n \varphi dS_i - \int \varepsilon \delta\varphi \nabla^2 \varphi dV_i$$

или

$$\oint \varepsilon \varphi \nabla_n \delta\varphi dS_i - \int \varepsilon \varphi \nabla^2 \delta\varphi dV_i.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу и суммируя по i , получаем, принимая во внимание граничные условия для соприкасающихся диэлектриков

$$\begin{aligned} \Delta W_r = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \oint \varepsilon \delta\varphi \nabla_n \varphi dS_{\alpha} - \frac{1}{4\pi} \varepsilon \delta\varphi \nabla^2 \varphi dV + \\ + \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon (\nabla \delta\varphi)^2 dV \end{aligned} \quad (54b)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \Delta W_r = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \oint \varepsilon \varphi \nabla_n \delta\varphi dS_{\alpha} - \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon \varphi \nabla^2 \delta\varphi dV + \\ + \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon (\nabla \delta\varphi)^2 dV. \end{aligned} \quad (54c)$$

Второй интеграл правой части (54b) обращается в нуль в виду того, что $\nabla^2 \varphi = 0$. Если подобрать варьированный потенциал φ' таким образом, чтобы на поверхности проводников он принимал те же самые значения φ_0 , как и φ , то первый интеграл также обратится в нуль. Следует заметить, что при этих условиях φ' не может удовлетворять во всем объеме V уравнению Лапласа, ибо иначе мы имели бы просто $\varphi' \equiv \varphi$. Так как третий интеграл имеет существенно положительное значение, то W_r' должно быть всегда больше, чем W_r . Этот результат можно формулировать следующим образом.

Если потенциалы проводников (электродов) удерживаются постоянными, то энергия свободных электрических зарядов принимает минимальное значение в том случае, когда эти заряды распределяются исключительно на поверхности проводников.

Аналогичная минимальная теорема получается на основании формулы (54c). Представим себе теперь, что варьированная потенциальная функция, так же как и первоначальная, удовлетворяет уравнению Лапласа (так что свободные заряды остаются распределенными на поверхности проводников). В таком случае, следовательно, первый объемный интеграл в (54c) должен обращаться в нуль. Так как, далее, на поверхности каждого проводника потенциал φ принимает постоянное значение,

которое впрочем может быть неизвестным, то рассматриваемые интегралы приводятся к произведению этих значений на

$$\int \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_n \delta\varphi dS_\alpha = \delta \int \frac{e}{4\pi} \nabla_n \varphi dS_\alpha = \delta e_\alpha,$$

т. е. к нулю, если заряды e_α остаются неизменными.

Итак, если заряды проводников удерживаются постоянными, то соответствующая энергия W_f приобретает минимальное значение при таком распределении этих зарядов, при котором потенциалы проводников принимают постоянные значения. Другими словами: равновесное распределение зарядов на поверхности проводников соответствует минимуму их потенциальной энергии.

Этот результат, полученный впервые в вышеприведенной форме В. Томсоном, представляется непосредственно понятным и совершенно аналогичен общим условиям равновесия обыкновенной статики. Он представляет собой простейший частный случай приведенного в первом томе вариационного принципа Шварцшильда, из которого, как известно, непосредственно следуют общие уравнения поля и уравнения движения произвольной системы электронов.

Обе формулировки электростатической задачи, характеризующиеся условиями (43а) или (44с), могут быть следовательно заменены двумя предыдущими вариационными формулировками, т. е. общим принципом

$$W_f = \text{minimum}$$

с добавочным условием $\varphi_\alpha = \text{заданному}$ ($\delta\varphi_\alpha = 0$) или $e_\alpha = \text{заданному}$ ($\delta e_\alpha = 0$). Кроме того в обоих случаях должны удовлетворяться граничные условия (44).

2. Гальваностатическая задача и ее связь с электростатической в случае двух электродов. Благодаря формальной тождественности электростатической и гальваностатической задач, мы можем тотчас же распространить эти результаты на последнюю. В частности, если вместо энергии W_f ввести функцию

$$Q = \int \sigma E^2 dV, \quad (55)$$

означающую Джоулево тепло, выделяемое в единицу времени во всем рассматриваемом объеме, то можно утверждать, что стационарное распределение электрического тока в этом объеме соответствует минимуму Q при заданных (постоянных) потенциалах электродов φ_α или силах токов J_α . Этот результат в несколько отличной форме мы нашли уже в § 3 для случая линейной электрической сети.

Мы можем далее [см. (54)] представить Джоулево тепло в виде

$$Q = \sum \varphi_\alpha J_\alpha. \quad (55a)$$

Этой формулой оно определяется как работа, совершаемая электрическими силами в единицу времени.

Алгебраическая сумма токов, подводимых от всех электродов, в случае стационарного распределения тока должна равняться нулю. Этому условию

$$\sum J_{\alpha} = 0$$

соответствует в электростатической задаче нейтральность всей системы проводников. При этом в простейшем случае двух проводников получается

$$Q = (\varphi_1 - \varphi_2) J \quad (J = J_1 = -J_2). \quad (55b)$$

В соответствующей же электростатической задаче согласно (54) имеем:

$$W_r = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) e \quad (e = e_1 = -e_2). \quad (55c)$$

Подставляя в эти выражения значения φ_1 и φ_2 согласно формулам (42) или (45), получаем

$$Q = RJ^2 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{R}, \quad (56)$$

где

$$R = R_{11} + R_{22} - R_{12} - R_{21}$$

и

$$W_r = \frac{1}{2} \frac{e^2}{K} = \frac{1}{2} K (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad (56a)$$

где

$$\frac{1}{K} = q_{11} + q_{22} - q_{12} - q_{21}.$$

Коэффициенты R и K называются соответственно сопротивлением и емкостью данной системы. В гальваническом случае обыкновенно говорят о сопротивлении среды, окружающей электроды, а в электростатическом — о емкости „конденсатора“, образуемого обоими проводниками, причем диэлектрической среде между проводниками приписывается подчиненная роль. В случае одной лишь однородной среды с проводимостью σ и соответственно диэлектрической постоянной ϵ коэффициенты R и K (при той же форме и относительном положении электродов) связаны друг с другом соотношением

$$RK = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}. \quad (56b)$$

Это соотношение можно вывести непосредственно, если представить себе, что речь идет об одной и той же среде и что рассматриваемый конденсатор разряжается через эту среду. При

этом электрическая энергия должна переходить в Джоулево тепло согласно уравнению

$$Q = -\frac{dW_f}{dt}, \quad (57)$$

откуда следует [см. (56) и (56a)], что

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = -K \frac{d}{dt} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (57a)$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const } e^{-\frac{t}{RK}}. \quad (57b)$$

Сравнивая эту формулу с (46b), получаем

$$RK = \tau = \frac{s}{4\pi\sigma}.$$

Связь между Q и W_f для общего случая произвольного числа электродов, разряжающихся через какую угодно плохо проводящую среду, должна очевидно выражаться тем же самым уравнением (57).

3. Детальное рассмотрение электростатической энергии в связи с индукционными и емкостными коэффициентами. Из уравнения (57), в связи с (55a) и $J_\alpha = -\frac{de_\alpha}{dt}$, вытекает формула

$$dW_f = \sum \varphi_\alpha de_\alpha. \quad (58)$$

Легко однако видеть, что эта формула остается в силе не только для вышеприведенного процесса разряда, но и для произвольных квази-статических процессов. Это непосредственно следует из определения потенциала φ в связи с тем обстоятельством, что при таких процессах потенциал каждого проводника (электрода) сохраняет все время одно и то же значение во всех точках.

Сравнение (58) с формулой

$$W_f = \frac{1}{2} \sum \varphi_\alpha e_\alpha \quad (58a)$$

показывает,¹ что W_f является однородной квадратичной функцией зарядов и что, следовательно, потенциалы должны быть связаны с последними однородными линейными соотношениями, как это и было предположено вначале.

Только что приведенный энергетический вывод этого результата позволяет уточнить упомянутые соотношения в одном важ-

¹ Принимая во внимание известную теорему Эйлера о однородных функций.

ном отношении. Именно, если трактовать энергию W_f как функцию зарядов, то согласно (58) имеем

$$\varphi_\alpha = \left(\frac{\partial W_f}{\partial e_\alpha} \right)_{e_\beta}$$

и следовательно

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial e_\beta} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial e_\alpha},$$

т. е. согласно (45)

$$q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}.$$

Таким образом электростатические индукционные коэффициенты симметричны по отношению к обоим индексам (точно так же, как и электромагнитные коэффициенты $L_{\alpha\beta}$). Таким же свойством симметрии должны очевидно обладать и емкостные коэффициенты $p_{\alpha\beta}$, а также коэффициенты $R_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\beta}$. Что касается первых, то это можно непосредственно доказать таким же точно способом, как и в случае коэффициентов $q_{\alpha\beta}$.

Именно, перепишем уравнение (58) следующим образом:

$$dW_f = d(\sum \varphi_\alpha e_\alpha) - \sum e_\alpha d\varphi_\alpha,$$

откуда согласно (58a) следует

$$dW_f = \sum e_\alpha d\varphi_\alpha, \quad (58b)$$

т. е.

$$e_\alpha = \left(\frac{\partial W_f}{\partial \varphi_\alpha} \right)_{\varphi_\beta}$$

и

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial \varphi_\beta} = \frac{\partial e_\beta}{\partial \varphi_\alpha}$$

или

$$p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}.$$

При помощи коэффициентов $q_{\alpha\beta}$ и $p_{\alpha\beta}$ получаются следующие выражения для энергии W_f как функции одних лишь зарядов или одних лишь потенциалов:

$$\left. \begin{aligned} W_f &= \frac{1}{2} \sum \sum q_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta, \\ W_f &= \frac{1}{2} \sum \sum p_{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (58c)$$

Отдельные слагаемые $q_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta$ и соответственно $p_{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta$ представляют части этой энергии, происходящие от взаимодействия соответствующих пар проводников. Уже из одного этого обстоятельства можно сделать вывод, что $q_{\alpha\beta}$ и $p_{\alpha\beta}$ — симметричны относительно обоих значков.

Эти коэффициенты зависят только от формы и положения проводников и, разумеется, от свойств диэлектрической среды, но не от отношений $e_\alpha : e_\beta$ или $\varphi_\alpha : \varphi_\beta$. Если бы, например, коэффициенты $q_{\alpha\beta}$ были однородными функциями „нулевой степени“ от e_1, e_2, \dots , то согласно (58с) мы имели бы

$$\begin{aligned} dW_f &= \sum_\alpha \left(\sum_\beta q_{\alpha\beta} e_\beta \right) de_\alpha + \frac{1}{2} \sum \sum e_\alpha e_\beta dq_{\alpha\beta} = \\ &= \sum \varphi_\alpha de_\alpha + \frac{1}{2} \sum \sum e_\alpha e_\beta dq_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

что при $dq_{\alpha\beta} \neq 0$ несовместимо с (58).

Предыдущие результаты можно конечно установить, не вводя понятия об энергии. Например, постоянство коэффициентов q, p (в вышеупомянутом смысле) легко выводится из аддитивности различных решений электростатической задачи, соответствующих различным значениям потенциалов φ_α или зарядов e_α . Действительно, если $\varphi = \varphi'$ и $\varphi = \varphi''$ представляют потенциалы, получающиеся в объеме V при заданных потенциалах отдельных проводников $\varphi_\alpha = \varphi'_\alpha$ (или заданных зарядах $e_\alpha = e'_\alpha$) и соответственно $\varphi_\alpha = \varphi''_\alpha$ ($e_\alpha = e''_\alpha$), то их сумма $\varphi' + \varphi''$ представляет потенциал того поля, которое получилось бы при наличии у проводников потенциалов $\varphi_\alpha = \varphi'_\alpha + \varphi''_\alpha$ (или зарядов $e_\alpha = e'_\alpha + e''_\alpha$). Представим себе теперь, что сначала только первый электрод имеет заряд e_1 , в то время как другие остаются незаряженными. Последние, однако, должны при этом получить пропорциональные этому заряду потенциалы $\varphi_1 = q_{11} e_1, \varphi_2 = q_{21} e_1, \dots$. На это поле мы накладываем затем поле, соответствующее заряду e_2 второго проводника при условии нейтральности всех остальных и т. д. Мы получим таким образом для потенциала φ_α суммы вида $q_{\alpha 1} e_1 + q_{\alpha 2} e_2 + \dots$, причем независимость коэффициентов $q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2}, \dots$ от отношений $e_1 : e_2 : \dots$ совершенно очевидна. Подобным же образом доказывается их симметрия.

Из того факта, что энергия W_f должна представлять существенно положительную величину, независимо от знака зарядов $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ (или потенциалов), можно установить ряд неравенств для индукционных коэффициентов $q_{\alpha\beta}$ и емкостных коэффициентов $p_{\alpha\beta}$.

В-первых коэффициенты $q_{\alpha\alpha}$ и $p_{\alpha\alpha}$, точно так же, как и различные определители вида

$$\left| \begin{array}{cccc} q_{\alpha_1 \alpha_1} & q_{\alpha_1 \alpha_2} & \dots & q_{\alpha_1 \alpha_m} \\ q_{\alpha_2 \alpha_1} & q_{\alpha_2 \alpha_2} & \dots & q_{\alpha_2 \alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{\alpha_m \alpha_1} & q_{\alpha_m \alpha_2} & \dots & q_{\alpha_m \alpha_m} \end{array} \right| \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{cccc} p_{\alpha_1 \alpha_1} & p_{\alpha_1 \alpha_2} & \dots & p_{\alpha_1 \alpha_m} \\ p_{\alpha_2 \alpha_1} & p_{\alpha_2 \alpha_2} & \dots & p_{\alpha_2 \alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{\alpha_m \alpha_1} & p_{\alpha_m \alpha_2} & \dots & p_{\alpha_m \alpha_m} \end{array} \right| \quad (59)$$

(где $m \leq n$) должны быть положительны, как это известно из общей теории квадратичных форм.

Однако благодаря специальным условиям рассматриваемой задачи, которые связаны с уравнением $\nabla^2 \varphi = 0$, можно установить ряд других неравенств, еще более ограничивающих значения коэффициентов $q_{\alpha\beta}$ и $p_{\alpha\beta}$. Именно, предыдущее уравнение показывает, что потенциал φ вне проводников не может иметь ни максимума ни минимума, так как при этом, наряду с уравнением $\nabla \varphi = 0$, должны были бы иметь место неравенства

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} > 0,$$

т. е.

$$\nabla^2 \varphi < 0 \quad \text{или} \quad \nabla^2 \varphi > 0.$$

Следовательно наибольшие и наименьшие значения потенциала φ должны достигаться на проводниках. При этом необходимо еще принять во внимание то обстоятельство, что на бесконечности $\varphi = 0$.

Представим себе теперь, что $e_1 = 1$, в то время как $e_2 = \dots = e_n = 0$. Тогда очевидно максимальное (положительное) значение потенциала принадлежит первому электроду, в то время как остальные электроды имеют положительные, но меньшие значения потенциала. Это приводит к неравенствам

$$q_{\alpha\alpha} - q_{\alpha\beta} > 0, \quad q_{\alpha\beta} > 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (59a)$$

Допустим теперь, что потенциал первого электрода равен единице, а потенциал других — нулю. Тогда заряды их равны соответственно $e_1 = p_{11}$, $e_2 = p_{21}$, \dots , $e_n = p_{n1}$. Очевидно теперь заряд e_1 должен быть положительным, а остальные „индуцированные“ заряды — отрицательными, причем их сумма по абсолютному значению не может быть больше e_1 . Это следует из того обстоятельства, что все электрические силовые линии в рассматриваемом случае начинаются на первом электроде и кончаются частично на двух других электродах, частично же уходят в бесконечность. Таким образом имеем

$$p_{\alpha\beta} < 0, \quad p_{\alpha 1} + p_{\alpha 2} + \dots + p_{\alpha n} > 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (59b)$$

Подобные результаты остаются в силе и для гальванических коэффициентов сопротивления $R_{\alpha\beta}$ и проводимости $s_{\alpha\beta}$. Благодаря формальной эквивалентности электростатической и гальванической задач, мы можем не вдаваться в более подробное рассмотрение этого вопроса.

4. Электростатические силы. Если коэффициенты $q_{\alpha\beta}$ или $p_{\alpha\beta}$ являются известными функциями координат x_1, x_2, \dots , определяющих относительное положение проводников, то при помощи выражений (58с) для энергии легко вычислить действующие на проводники механические силы $F_1^{(m)}, F_2^{(m)}, \dots$, в

направлении этих координатных осей. Если заряды проводников удерживаются постоянными, то

$$F_i^{(m)} = - \left(\frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_e = - \frac{1}{2} \sum \sum \frac{\partial q_{\alpha\beta}}{\partial x_i} e_\alpha e_\beta. \quad (60)$$

Эти выражения для механических сил остаются очевидно справедливыми также в том случае, когда удерживаются постоянными не заряды, а потенциалы проводников. При этом рассматриваемая система не может быть изолированной, но должна быть связанной с внешними источниками потенциала. Определяемое величиной dx_i перемещение проводников связано, вообще говоря, с притоком или отводом электричества из этих источников, причем внешними электродвижущими силами совершается некоторая работа $F_i^e dx_i$. Следовательно мы должны иметь в этом случае вместо (60), соотношение

$$F_i^{(m)} + F_i^{(e)} = - \left(\frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_\varphi = - \frac{1}{2} \sum \sum \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \varphi_\alpha \varphi_\beta. \quad (60a)$$

и кроме того тождество

$$\frac{1}{2} \sum \sum q_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta + \frac{1}{2} \sum \sum p_{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta = \sum e_\alpha \varphi_\alpha$$

относительно переменных e_α , φ_β , x_i .

Рассматривая эти переменные как независимые друг от друга, получаем, дифференцируя по x_i :

$$\frac{1}{2} \sum \sum \frac{\partial q_{\alpha\beta}}{\partial x_i} e_\alpha e_\beta + \frac{1}{2} \sum \sum \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \varphi_\alpha \varphi_\beta = 0,$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_e + \left(\frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_\varphi = 0. \quad (60b)$$

Отсюда следует согласно (60a)

$$F_i^{(e)} = + \left(\frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_e - F_i^{(m)} = - 2F_i^{(m)}.$$

Следовательно работа электродвижущих сил при неизменных потенциалах вдвое больше механической работы и имеет противоположный знак. Механическую силу, соответствующую заданным потенциалам проводников, можно представить, таким образом, согласно (60) и (60b), в виде

$$F_i^{(m)} = + \left(\frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_\varphi = + \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \varphi_\alpha \varphi_\beta.$$

Не трудно исследовать также общий случай, когда у некоторых проводников заданы и поддерживаются постоянными заряды, а у других — потенциалы.

Механические силы, испытываемые отдельными проводниками со стороны других, можно определить для каждого данного положения не зная коэффициентов q и p , поскольку известно поле (E) у их поверхности или же поверхностное распределение зарядов (η). Для этой цели можно воспользоваться полученным в главе II общим выражением для тензора напряжений 2T_p , соответствующего свободным электронам. Так как электрические силовые линии направлены перпендикулярно к поверхностям, то мы получаем направленную по внешней нормали силу, значение которой на единицу поверхности совпадает с объемной плотностью энергии W_p , т. е. с

$$\xi_r = \frac{eE^2}{8\pi}. \quad (61)$$

Следовательно полная сила, действующая на произвольный проводник, равна

$$F = \frac{1}{8\pi} \oint p_e E^2 dS. \quad (61a)$$

Силы, с которыми действуют друг на друга различные элементы собственного поверхностного заряда этого проводника, разумеется, должны при интегрировании взаимно уничтожиться.

Выражение (61a) можно вывести совершенно элементарно, если рассмотреть несколько подробнее условие равновесия распределенного на поверхности проводника заряда. Именно представим себе, что напряженность электрического поля, действующая в непосредственной близости к элементу поверхности s , разложена на две составные части — первую E' , обусловленную зарядом ηs , находящимся на этом элементе поверхности, и вторую E'' , обусловленную совокупностью всех остальных зарядов. На расстояниях, очень малых по сравнению с линейными размерами элемента s , можно считать s бесконечно протяженным и положить E' равным $\pm p \cdot 2\pi\eta$. Так как внутри проводника результирующая напряженность равна нулю и так как далее при переходе изнутри наружу напряженность E'' не должна испытывать заметного изменения, то эта „внешняя“ напряженность с наружной стороны s должна быть равна половине результирующей напряженности. Таким образом ¹

$$E'' = E' = \frac{1}{2} E = 2\pi\eta. \quad (61b)$$

В этой формуле η обозначает полную поверхностную плотность электрического заряда, обусловленную как свободными

¹ См. гл. II, § 2, формула (13a).

электронами, так и связанными электронами окружающего диэлектрика. Принимая во внимание соотношение

$$\eta = \frac{\eta_f}{\epsilon}, \quad (61c)$$

получаем обычную формулу

$$\epsilon E = 4\pi\eta_f.$$

Сила, действующая на единицу поверхности одного лишь проводника (но не на диэлектрик), равна следовательно

$$E^* \cdot \eta_f = n \cdot \frac{1}{2} E \cdot \frac{\epsilon E}{4\pi} = n \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$$

в согласии с (61). Соответствующая полная поверхностная сила, т. е. сила, действующая на проводник и на диэлектрик, в ϵ раз меньше и равна, таким образом, $\frac{E^2}{8\pi}$ как и в случае пустого пространства.

Сила, действующая только на диэлектрик, рассчитанная на единицу объема, как известно, равна

$$(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} = \frac{\epsilon-1}{8\pi} \nabla(E^2),$$

т. е. согласно (61)

$$\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \nabla \xi_f,$$

где ξ_f означает плотность энергии, соответствующей связанным электронам (не учитывая поправки Лорентца). Полная сила \mathbf{F}_f , действующая на диэлектрическое тело a конечной величины, выражается согласно формулам (23b, c) и (24b) гл. II суммой интеграла $\int (\mathbf{P}\nabla)\mathbf{E} dV_a$ и поверхностного интеграла $\frac{1}{2} \oint P_n \Delta E dS_a$ ($\Delta E = \mathbf{E}^b - \mathbf{E}^a$; b означает окружающую среду, например пустое пространство). Принимая во внимание, что поляризация \mathbf{P} не только внутри, но также и на поверхности равна $\chi_a \mathbf{E}_a$ ($\chi_a = \frac{\epsilon_a - 1}{4\pi}$), имеем

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_a - 1}{8\pi} \oint [nE^a{}^2 + E_n^a (\mathbf{E}^b - \mathbf{E}^a)] dS_a. \quad (62)$$

Так как тангенциальная составляющая \mathbf{E} на граничной поверхности остается непрерывной, то разность $\mathbf{E}^b - \mathbf{E}^a$ сводится к разности нормальных составляющих $n(E_n^b - E_n^a)$. В виду соотношения $\epsilon_b E_n^b = \epsilon_a E_n^a$ имеем

$$E_n^b - E_n^a = E_n^a \left(\frac{\epsilon_a}{\epsilon_b} - 1 \right),$$

и следовательно

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon_a - 1}{8\pi} \oint \mathbf{n} \left[E^{a2} + E_n^{a2} \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} - 1 \right) \right] dS_a,$$

или окончательно

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon_a - 1}{8\pi} \oint \left[E_n^{a2} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} E_n^{a2} \right] \mathbf{n} \cdot dS_a. \quad (62a)$$

В однородном изотропном диэлектрике $\operatorname{div} \mathbf{E}$ и следовательно $\operatorname{div} \mathbf{P}$ должны обращаться в нуль. Таким образом в этом случае объемные силы ($-\operatorname{div} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$) отсутствуют, и рассматриваемую силу согласно (24с) гл. II можно также представить в виде

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon_a - 1}{8\pi} \oint E_n^a (\mathbf{E}^a + \mathbf{E}^b) dS_a. \quad (62b)$$

Соответственно этому для результирующего вращательного момента получаем

$$\frac{\varepsilon_a - 1}{8\pi} \oint E_n^a \mathbf{r} \times (\mathbf{E}^a + \mathbf{E}^b) dS_a.$$

§ 7. Основные задачи и общие методы электро-, гальвано- и магнитостатики.

Определение результирующей напряженности поля при учете взаимодействия между различными проводниками и изоляторами (поскольку последние не образуют неограниченной однородной среды) представляет в общем весьма трудную задачу. Ее решение можно подыскать последовательными приближениями, не принимая сначала во внимание указанного взаимодействия; из соответствующего „невозмущенного“ распределения зарядов на отдельных проводниках (η_a^0) определяют поле в „нулевом приближении“ (\mathbf{E}^0); затем это поле трактуют как внешнее (первичное) и определяют обусловленные им изменения в распределении зарядов на проводниках и поляризацию диэлектриков; из улучшенного таким образом распределения зарядов и поляризации вычисляют поле в первом приближении и т. д.

При помощи этого метода последовательных приближений общая электростатическая задача сводится к следующим двум основным задачам:

1. Определение распределения зарядов на одном проводнике, находящемся в пустом пространстве (или в однородном диэлектрике) при отсутствии всех других проводников.

2. Определение распределения зарядов, или поляризации, которые возбуждаются („индуцируются“) заданным первичным полем на проводнике или изоляторе конечной величины. Случай проводника можно трактовать при этом как предельный случай изолятора при $\varepsilon = \infty$.

Второй электростатической задаче соответствует, наряду с гальваностатической, еще третья формально тождественная — магнитная задача определения „индуцированного“ намагничивания. Некоторое различие между этими тремя задачами существует лишь постольку, поскольку соответствующие параметры ϵ , μ , σ могут принимать различные предельные значения; а именно $\epsilon \geq 1$, $\mu > 0$, $\sigma \geq 0$.¹

Сформулированные две электростатические задачи соответствуют очевидно рассмотренным выше задачам о свободных и вынужденных электрических колебаниях и могут трактоваться как частные или, точнее, предельные случаи этих задач при исчезающе малых частотах. Общая электростатическая задача соответствует задаче о собственных колебаниях системы связанных проводников (и изоляторов); описанный выше метод приближений может быть с успехом применен к ее решению только в случае слабой связи. В противном случае совокупность проводников и диэлектриков необходимо рассматривать как одно целое.

1. Проводящие тела произвольной формы (пространственные задачи). Общих методов решения этих задач или обеих основных задач, к которым они обыкновенно приводятся, не существует. В случае одного изолированного проводника проще всего приходят к цели (определение распределения свободных и индуцированных зарядов) посредством введения соответствующих форме данного тела координат (ξ, η, ζ) таким образом, чтобы поверхность проводника совпала с одной из „координатных поверхностей“, например $\xi(x, y, z) = \xi_0 = \text{const}$.

Если удастся подобрать эти координаты так, чтобы все поверхности семейства $\xi = \text{const}$ совпали с эквипотенциальными поверхностями (соответствующими распределению свободных зарядов), то задача практически решена; при этом остается только найти выражение для φ как функции от ξ . Заметим, что функции $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ переменных ξ, η, ζ , удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими по отношению к этим переменным.

При помощи этих функций можно также без особенного труда определить распределение зарядов, индуцированных произвольным первичным полем, и соответствующее вторичное поле.

Этот метод „криволинейных координат“ будет рассмотрен позднее, в применении не только к статическим задачам, но также и к задачам о колебаниях. В последнем случае вместо гармонических функций появляются более общие функции, удовлетворяющие уравнению $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$. Однако основная трудность в обоих случаях состоит в нахождении соответствующей системы координат.

¹ Напомним, что величины, связываемые этими коэффициентами и соответствующие друг другу, следующие: напряженность электрического поля (E) и магнитная индукция (B), с одной стороны, и электрическая индукция (D), плотность тока (j) и магнитная напряженность (H) — с другой ($D = \epsilon E$, $j = \sigma E$, $H = \mu B$).

Если не делать заранее никакого определенного предположения о форме проводника, то ряд электростатических задач решается следующим образом. Выбираем какую-нибудь известную функцию $\varphi(\mathbf{r})$, непрерывную в определенной конечной или бесконечной области пространства, и „гармоническую“, т. е. удовлетворяющую уравнению $\nabla^2\varphi = 0$, например

$$\varphi = \sum \frac{e_a}{R_a} \quad \text{или} \quad \varphi = \sum \sum e_a (n_1 n_2 n_3) \frac{\partial^n \left(\frac{1}{R_a} \right)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \quad \text{и т. д.}$$

Эту функцию рассматриваем как потенциал проводника или системы проводников, поверхности которых совпадают с некоторыми из поверхностей $\varphi = \text{const}$. Представим себе например, что поверхности $\varphi = \text{const}$ замкнуты и лежат одна в другой (они не могут пересекаться, так как потенциал φ должен быть однозначной функцией координат x, y, z). Если вместо „геометрической“ поверхности $\varphi = \varphi_0$ ввести физическую проводящую поверхность S_{φ_0} с распределенным на ней зарядом

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \nabla_n \varphi$$

(на единицу поверхности), то на рассматриваемой поверхности и вне ее этот заряд должен возбуждать точно такое же поле, какое там фактически существует, в то время как внутри S_{φ_0} потенциал будет сохранять постоянное значение φ_0 . Этот результат представляет непосредственное следствие закона однозначности, доказанного в предыдущем параграфе, согласно которому значения гармонической функции φ вне S_{φ_0} однозначно определяются ее граничными значениями (в предположении, что φ и $\nabla\varphi$ остаются непрерывными).

Напомним в связи с этим, что заряды, находящиеся внутри какой-нибудь поверхности S , по отношению к полю, возбуждаемому ими во внешнем пространстве, всегда эквивалентны определенному поверхностному заряду на S (см. т. I, стр. 117). Для того, чтобы получить характерное для проводящего тела распределение зарядов, мы должны ограничиться эквипотенциальными поверхностями. Заметим далее, что проводящие поверхности, совпадающие с различными поверхностями семейства $\varphi = \text{const}$, возбуждают вне наибольшей из них, при одном и том же полном заряде одно и то же электрическое поле, т. е. по отношению к этому внешнему полю эквивалентны друг другу.

В качестве примера напомним простейший случай $\varphi = \frac{e}{R}$; поверхности S_{φ_0} представляют в этом случае концентрические сферы.

Если бы две различные поверхности $\varphi = \text{const}$ были „материальными“, то мы получили бы замкнутый „конденсатор“; между его

„обкладками“ (несущими равные и противоположные заряды) имелось бы заданное поле φ , тогда как вне последних, т. е. внутри внутренней и вне наружной поверхности, потенциал принимал бы соответствующие постоянные граничные значения φ_1 и φ_2 .

Если поверхности $\varphi = \text{const}$ частично замкнуты, частично бесконечны, то посредством „материализации“ одной из замкнутых поверхностей (рис. 42) можно получить решение более общей задачи, именно о наложении находящегося на этой поверхности S свободного заряда и заряда, индуцированного заданным первичным полем. В этом случае φ представляет потенциал результи-

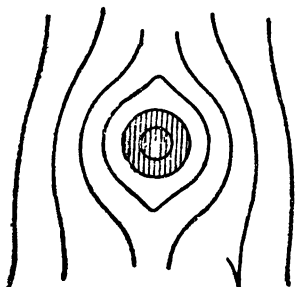


Рис. 42.

рующего поля. Для того чтобы разложить последнее на „первичное“ φ^0 и вторичное φ' , мы должны сначала вычислить φ' по формуле

$$\varphi' = \oint \frac{\eta}{R} dS,$$

где η имеет указанное выше значение; при этом первичное поле получается простым вычитанием ($\varphi^0 = \varphi - \varphi'$). Если полный заряд $e = \oint \eta dS$ отличен от нуля, то φ' , строго говоря, следует рассматривать не как вторичное поле (т. е. обусловленное потенциалом φ^0), а как сумму последнего и „собственного“ поля, соответствующего равновесному распределению заряда e на поверхности S .

Для примера рассмотрим поле, определяемое при помощи функции

$$\varphi = -E^0 x + \frac{e}{R} - p \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} = \frac{e}{R} + \left(\frac{p}{R^3} - E^0 \right) x. \quad (63)$$

Его можно представить, очевидно, как наложение однородного поля E^0 в направлении оси X , поля точечного заряда e и поля, находящегося в той же точке диполя с момен-

том p (также параллельным X). Предыдущая формула показывает, что при

$$R = \sqrt[3]{\frac{p}{E^0}} = a \quad (63a)$$

$$\varphi = \frac{e}{a} = \text{const.}$$

Следовательно одна из поверхностей $\varphi = \text{const}$ представляет собой шар с радиусом a . „Материализуя“ эту поверхность, мы получаем решение задачи о распределении заряда на шаровом проводнике, находящемся во внешнем однородном поле E^0 . Результирующая плотность заряда определяется в этом случае по формуле

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)_{R=a}.$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{p}{a^3} = E^0,$$

получаем

$$\eta = \frac{e}{4\pi a^2} + \frac{3px}{4\pi a^4} = \frac{e}{4\pi a^2} + \frac{3p}{4\pi a^3} \cos \theta = \frac{e}{S} + \frac{p}{V} \cos \theta, \quad (63b)$$

где S означает поверхность шара, V — его объем и θ — угол между радиусом-вектором рассматриваемой точки и осью X . Отношение $\frac{e}{S}$

равно плотности свободного заряда; отношение $\frac{p}{V}$ соответствует поляризации (электрическому моменту на единицу объема), а его произведение на $\cos \theta$ представляет плотность индуцированного заряда. Возбужденное последним поле внутри шара должно быть равно и противоположно первичному полю; таким образом мы получаем уже известный нам результат

$$E' = -\frac{p}{a^3} = -\frac{4\pi}{3} \frac{p}{V}$$

($R < a$, см. гл. II, § 4).

Само собою разумеется, что в приведенном примере можно было бы материализовать вместо шара $R = a$ какую-нибудь другую замкнутую поверхность $\varphi = \text{const}$ и решить ряд новых электростатических задач. Недостаток описанного метода состоит в том, что он, давая нам в общем случае множество решений, в которых мы не нуждаемся, позволяет только случайно находить решение для проводника заданной формы.

2. Цилиндрические проводники (плоские задачи). Отыскание наиболее удобных для материализации потенциальных поверхностей чрезвычайно облегчается в случае

цилиндрического проводника (с произвольным сечением) или некоторого числа таких проводников с параллельными образующими (например система параллельных проводов), если их длину можно считать, бесконечно большой. В этом случае потенциал φ сводится к функции от двух координат x, y , так что третью (направленную по длине) можно не принимать во внимание. При этом мы приходим к двумерной или плоской задаче, состоящей в отыскании гармонической функции $\varphi(x, y)$, принимающей на определенных граничных кривых s_1, s_2, \dots постоянные значения $\varphi_1, \varphi_2, \dots$.

Как уже было показано в гл. V, § 4 при рассмотрении волн в проводах, эту функцию можно определить как вещественную часть функции $f(\zeta)$ комплексного переменного $\zeta = x + iy$, причем напряженность электрического поля получается из этого комплексного потенциала по формуле

$$E^* = - \frac{df}{d\zeta},$$

где

$$E = E_x + iE_y.$$

Мнимая часть функции f , которая в случае волн в проводах означает скалярный магнитный потенциал, для статической задачи не имеет значения.

Всякая аналитическая функция $f(\zeta)$ дает при помощи „метода материализации“ множество более или менее интересных результатов, которые при их систематическом изучении могут оказаться очень полезными для решения определенных плоских задач. Однако, пользуясь этим методом, нельзя отыскать решение таких задач в каждом данном частном случае. Здесь необходимо применять намеченный выше метод криволинейных координат, с тем весьма существенным упрощением, что после нахождения соответствующих координат задача решается без какого бы то ни было интегрирования. Для этого необходимо только найти новые координаты в форме $\xi + i\eta = \zeta(x + iy)$ так, чтобы граничная линия данного проводника (или вернее его сечения) соответствовала постоянному значению одной из новых координат, напр. ξ . Последняя, будучи гармонической функцией координат x, y , должна при этом совпадать, с точностью до постоянного множителя, с искомым потенциалом φ .

Приведенные соображения можно перенести без всяких изменений на гальваностатические задачи, в которых речь идет о распределении тока в однородном теле. Мы должны только указать на то обстоятельство, что плоским электростатическим задачам соответствуют две математически тождественные, но физически несколько различные гальванические задачи.

Это, во-первых, задача о распределении тока в однородном плохе проводящем „электролите“ с параллельными цилиндрическими электродами, и во-вторых, задача о распределении тока в практически бесконечно тонких плоских металлических пла-

стинках. В последнем случае ток притекает (или отводится) из третьего измерения через определенные места на поверхности данной пластинки, причем эти места играют роль электродов. В непосредственной близости к таким „поверхностным“ электродам распределение тока значительно усложняется и во всяком случае не является плоским; однако, чем тоньше пластинка, тем меньше отклоняются линии тока у каждого электрода от направления, перпендикулярного к ограничивающей его линии (что соответствует постоянству потенциала вдоль этих линий).

Теория индукционных токов в плоских металлических пластинках была уже кратко изложена в § 4.

Гальванические токи этого рода вне электродов должны удовлетворять тому же уравнению, как и индукционные токи, т. е. уравнению

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0,$$

откуда, в виду соотношений

$$J_x = \sigma \delta E_x \quad \text{и} \quad J_y = \sigma \delta E_y,$$

получается аналогичное уравнение для напряженности электрического поля, и наконец на основании соотношения $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ (заменяющего прежнее соотношение $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$) — уравнение для электростатического потенциала:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом мы получаем в этом случае те же соотношения, как и при гальванических задачах с бесконечно длинными цилиндрическими электродами в неограниченном электролите.

Не лишне будет напомнить, что каждой обыкновенной плоской гальванической задаче можно сопоставить вторую задачу, в которой электрические токи текут вдоль цилиндрических проводов, в то время как в окружающей среде токи отсутствуют. Мнимая часть комплексного потенциала $f = \varphi + i\psi$, так же как и в теории волн в проводах, может быть использована при этом в качестве скалярного магнитного потенциала.

Следует заметить, что в плоских задачах роль обыкновенного кулонова потенциала покоящегося точечного заряда $\varphi = \frac{e}{R}$ (R — пространственное расстояние) играет логарифмический потенциал

$$\varphi = 2e \lg \frac{1}{r} \tag{64}$$

(r — плоское расстояние)

Этот потенциал (представляющий вещественную часть $f = 2e \lg \frac{1}{\zeta}$) обусловлен бесконечно длинным прямолинейным электродом с распределенным на нем зарядом e на единицу поверхности или — в случае гальванических токов в пластинках — практически точечным поверхностным электродом. Однако в последнем случае величина e не имеет ничего общего с действительным зарядом электрода и связана с притекающим к нему (или оттекающим от него) током J соотношением

$$e = \frac{J}{\sigma \delta}. \quad (64a)$$

Потенциал произвольного числа линейных электродов или точечных поверхностных электродов представляется суммой выражений (64) или соответствующим интегралом. Так например, в случае двух равных и противоположных зарядов

$$e_1 = -e \text{ и } e_2 = +e$$

имеем

$$\varphi = 2e \lg \frac{r_2}{r_1}. \quad (64b)$$

Если алгебраическая сумма зарядов, составляющих рассматриваемую систему, обращается в нуль, то φ всегда можно привести к виду (64b), в котором под знаком логарифма стоит безразмерная величина; в противном случае потенциал определяется только с точностью до произвольной, зависящей от выбора единицы заряда, постоянной.

Развитая в гл. IV тома I теория потенциала и примыкающая к ней теория мультиполей при замене $\frac{1}{R}$ на $2 \lg \frac{1}{r}$ может быть перенесена почти без изменения на плоские электростатические и гальванические задачи. Но это едва ли является необходимым, так как теория аналитических функций представляет гораздо более удобное и могущественное средство для решения таких задач, чем теория мультиполей.

3. Диэлектрические и намагничивающиеся тела в заданном первичном поле. В предыдущих рассуждениях речь шла о проводниках (электродах), находящихся в пустом пространстве или в однородном диэлектрике (электролите или металлической пластинке). В присутствии нескольких граничащих друг с другом диэлектриков (и соответственно в случае нескольких прилегающих друг к другу электролитов или металлических пластинок из различного материала) задача определения результирующего поля вообще чрезвычайно усложняется. Именно, при этом необходимо представить потенциал φ в виде отдельных частей, соответствующих отдельным однородным

телам и переходящих друг в друга непрерывным образом, в то время как их нормальные производные на пограничных поверхностях (или линиях в плоских задачах) испытывают скачок, определяемый условием

$$\Delta \left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = 0.$$

Так как потенциал может изменяться вдоль каждой из этих граничных поверхностей неизвестным заранее образом, то оказывается невозможным отыскать его вид для отдельных областей пространства (независимо друг от друга). При таком положении вещей упомянутый выше метод приближений, основанный на определении поляризации, обусловленной заданным первичным полем, представляется единственным общим путем для решения подобного рода задач.

Для простоты представим себе, что рассматриваемое диэлектрическое тело находится в пустом пространстве. Потенциал φ , так же как и его составные части φ^0 (потенциал заданного первичного поля) и φ' (потенциал искомого вторичного поля) должны удовлетворять уравнению Лапласа как вне тела, так и внутри его. Для определения вторичного поля остаются еще граничные условия, которые имеют вид

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \Delta (\varepsilon \nabla_n \varphi) = 0,$$

или так как

$$\Delta \varphi^0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta E^0 = 0,$$

$$\Delta \varphi' = 0, \quad \Delta (\varepsilon E'_n) = -E_n^0 \Delta \varepsilon = +(\varepsilon - 1) E_n^0; \quad (65)$$

К ним нужно присоединить еще одно весьма существенное добавочное условие, что на бесконечности вторичное поле обращается в нуль (или что результирующее поле на бесконечности тождественно с первичным в случае, если последнее определяется во всем пространстве).

Знак Δ в (65) означает разность соответствующих граничных значений ($\Delta \psi = \psi_{\text{снаружи}} - \psi_{\text{внутри}}$), взятую в направлении внешней нормали. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ второе условие (65) сводится к

$$(E'_n + E_n^0)_{\text{внутри}} = 0.$$

Отсюда согласно тождеству (53) при $\psi = \varphi$ и $E = -\nabla \varphi$, следует, что напряженность электрического поля внутри рассматриваемого тела равна нулю. Таким образом последнее ведет себя в этом случае как металлический проводник.

Выше мы показали, что вторичное поле металлического шара, находящегося в однородном первичном поле $E^0 (= E_x^0)$, выражается формулами

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{\text{снаружи}} &= \frac{px}{R^3} \\ \varphi'_{\text{внутри}} &= -E'_{\text{внутри}} x \end{aligned} \right\}, \quad (65a)$$

где

$$p = E^0 a^3 \quad \text{и} \quad E'_{\text{внутри}} = -E^0.$$

Этими формулами дается также решение задачи о поляризации диэлектрического шара в предельном случае $\epsilon = \infty$. Легко показать, что они остаются справедливыми также при конечных значениях ϵ , если индуцированный момент p и внутреннюю напряженность $E'_{\text{внутри}}$ уменьшать в определенном, зависящем от ϵ отношении. Именно, вводя выражения (65a) в граничные условия (65) и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial x}{\partial R} = \frac{x}{R} = \cos \theta,$$

получаем

$$E'_{\text{внутри}} = -\frac{p}{a^3}$$

и

$$\frac{2p}{a^3} - \epsilon E'_{\text{внутри}} = (\epsilon - 1) E^0.$$

Следовательно эти граничные условия фактически удовлетворяются, если положить

$$\begin{aligned} E'_{\text{внутри}} &= -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E^0, & E_{\text{внутри}} &= \frac{3}{\epsilon + 2} E^0, \\ p &= \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 E^0, & P &= \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E^0 \end{aligned} \quad (65b)$$

Если рассматриваемое ограниченное диэлектрическое тело (a) находится не в пустом пространстве, а в неограниченной однородной диэлектрической среде с диэлектрической постоянной ϵ_b , то мы должны положить в (65, a, b)

$$\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b}. \quad (65c)$$

Введение среды эквивалентно следовательно уменьшению диэлектрической постоянной тела в отношении $\epsilon_b : 1$. Эта „эффек-

тивная" или относительная диэлектрическая постоянная (тела a по отношению к b) может оказаться меньше 1; в этом случае a ведет себя как диамагнитное тело (с отрицательной электрической восприимчивостью).

Если в предыдущих формулах заменить E на B (магнитная индукция) и ϵ на μ („относительная" магнитная проницаемость), то они будут определять „индуцированное намагничивание", т. е. магнитную поляризацию намагничивающегося тела в заданном первичном магнитном поле B^0 , если последнее может быть описано в рассматриваемой области пространства с помощью однозначного скалярного потенциала. Так, например, в случае шара в однородном магнитном поле имеем:

$$\left. \begin{aligned} H_{\text{внутри}} &= \mu_a B_{\text{внутри}} = \frac{3\mu_a}{\mu + 2} B^0, \\ m &= \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 B^0, \quad M = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} B^0, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

где

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_b} \quad \text{и} \quad B^0 = \frac{H^0}{\mu_b}.$$

Такие же самые формулы определяют гальваническое явление, аналогичное электрической и магнитной поляризации, именно изменение первоначально заданного распределения тока в однородной проводящей среде (b), обусловленное внесением в последнюю проводника a конечной величины с иной проводимостью. В частности, формулы (65b) остаются совершенно неизменными, если заменить в них ϵ „относительной проводимостью" тела a

$$\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_b}. \quad (66a)$$

Величины p и P сохраняют при этом такое же самое значение, как и в соответствующей электростатической задаче; следует только принять во внимание, что они зависят не от перемещения связанных зарядов, а от определенного распределения свободных зарядов (электронов, ионов) на шаровой поверхности. Поверхностная плотность этих зарядов связана с „эффективной поляризацией" P соотношением:

$$\eta = P_n = P \cos \theta.$$

Выписывая его более подробно, мы получаем формулу

$$\eta = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a + 2\sigma_b} \cdot E^0 \cos \theta. \quad (66b)$$

4. Магнитные цепи. В теории индуцированного намагничивания следует принимать во внимание еще то обстоятельство, что первичная магнитная напряженность H^0 (или индукция B^0)

не всегда может быть представлена в рассматриваемой области пространства при помощи однозначного скалярного потенциала. Это бывает например в том случае, когда магнитные силовые линии являются замкнутыми кривыми, проходящими внутри кольцеобразного тела через ряд различно намагничивающихся тел. Такая система называется магнитной цепью.

Особенно важными в техническом отношении являются магнитные цепи, состоящие из катушки (соленоид) с замкнутым или почти замкнутым („разрезанным“) железным сердечником. Магнитные силовые линии проходят в этом случае почти полностью внутри железного сердечника даже тогда, когда намагничивающая катушка охватывает только часть последнего (рис. 43). Лучше всего, пожалуй, это можно понять с помощью

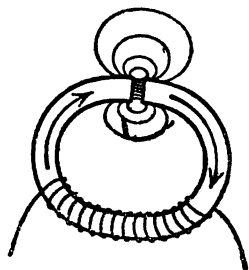


Рис. 44.

упомянутой уже выше „гальваномангнитной аналогии“, которая проявляется здесь особенно ясно. Именно, заменяя магнитные величины H , B , μ ($H = \mu B$) соответствующими гальваническими j , E , σ ($j = \sigma E$), получаем следующую задачу. В неограниченной однородной среде с очень малой проводимостью $\sigma = 1$ (магнитная проницаемость пустого пространства) возбуждается первичное электрическое поле E^0 (первичная магнитная индукция B^0), линии которого образуют внутри катушки сильный и приблизительно однородный поток, в то время как во внешнем

пространстве поле очень слабое. В это поле вводится кольцеобразный металлический сердечник с очень высокой проводимостью $\sigma \cong 1000$ (магнитная проницаемость железа) так, чтобы главный поток поля прошел сквозь него. Возбуждаемый при этом электрический ток очевидно должен иметь место главным образом внутри металлического проводника, так что лишь очень малая часть линий тока будет проникать через поверхность проводника в окружающую плохо проводящую среду. Это следует непосредственно из основных условий $\Delta E_r = 0$, $\Delta z E_n = 0$, соответствующих магнитным граничным условиям $\Delta B_r = 0$, $\Delta \mu B_n = 0$.

Первичная индукция B^0 удовлетворяет уравнению $\text{rot } B^0 = 4\pi j^0$, где j^0 означает плотность первичного тока в намагничивающей катушке. Поскольку при намагничивании новые свободные токи не индуцируются, результирующая индукция должна удовлетворять тому же самому уравнению $\text{rot } B = 4\pi j^0$, откуда для вторичной индукции получается тождественное уравнение $\text{rot } B' = 0$. Мы можем таким образом положить

$$B' = -\nabla \phi'_m, \quad (67)$$

хотя в рассматриваемом случае B^0 вычисляется не из скалярного, а из векторного потенциала согласно формуле $B^0 = \text{rot } A^0$.

В отдельных однородных телах мы должны, далее, иметь уравнения $\text{div } \mathbf{B}^0 = \text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{B}' = 0$ и следовательно согласно (67)

$$\nabla^2 \varphi'_m = 0. \quad (67a)$$

Граничные условия для \mathbf{B}' принимают при этом форму аналогичную электростатическим условиям (65)

$$\Delta \varphi'_m = 0, \quad \Delta \mu B'_n = (\mu - 1) B_n^0. \quad (67b)$$

Определение \mathbf{B}' производится, следовательно, тем же самым способом, как в случае $\mathbf{H}^0 = -\nabla \varphi^0$, так и в случае $\mathbf{H}^0 = \text{rot } \mathbf{A}^0$.

Если поперечные размеры железного сердечника малы по сравнению с его длиной, его можно трактовать как линейный проводник. Далее, с известным приближением, совершенно достаточным для практических целей, можно положить магнитную проницаемость пустого пространства, помимо могущих встречаться узких зазоров, равной нулю, что соответствует пренебрежению проводимостью рассмотренной выше плохо проводящей среды по сравнению с проводимостью металлического проводника. Магнитные линии должны при этом проходить внутри этого проводника в продольном направлении точно так же, как линии тока в соответствующей гальванической задаче. Силе тока ($J = \int j_n dS$) в магнитной задаче соответствует магнитный поток $\Phi = \int H_n dS = HS$, проходящий через поперечное сечение сердечника (или через имеющийся в последнем зазор). Этот поток для всех сечений должен иметь одно и то же значение. Мы можем при этом положить, аналогично формулам (9, a, b),

$$\Phi = \frac{V_m}{R_m}, \quad (68)$$

где

$$R_m = \oint \frac{dl}{\mu S} \quad (68a)$$

(магнитное сопротивление) и

$$V_m = \oint B_t dl \quad (68b)$$

(магнитодвижущая сила). Так как благодаря уравнению (67) линейный интеграл для \mathbf{B}' тождественно обращается в нуль, то для „магнитодвижущей силы“ или „магнитного напряжения“ получаем выражение

$$V_m = \int E_i^0 dl, \quad (68c)$$

которое остается справедливым также для незамкнутых катушек.

Если длина катушки (l_s) не слишком мала, то для получающейся внутри последней индукции (или напряженности при отсутствии сердечника) можно воспользоваться формулой

$$B^0 = 4\pi in,$$

где i —сила первичного тока и n —число витков на единицу длины катушки. Это дает

$$V_m = 4\pi inl_s = 4\pi iN$$

(N —общее число витков).

В простейшем случае замкнутого однородного сердечника с постоянным сечением S имеем

$$R_m = \frac{l_k}{\mu S},$$

(l_k —длина сердечника), и следовательно

$$\Phi = 4\pi in\mu S \frac{l_s}{l_k}$$

[см. (19а) § 3]. Если сердечник содержит зазор толщиной δ с магнитной проницаемостью 1, то его магнитное сопротивление уже при очень малых значениях δ значительно возрастет. Именно, согласно (68а) в этом случае имеем

$$R_m = \frac{l_k}{S} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{\delta}{l_k} \right).$$

Соответствующий магнитный поток Φ , умноженный на число витков $N = nl_s$ и разделенный на силу тока i , дает, как известно, коэффициент самоиндукции L (первичной) катушки. Таким образом имеем

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l_k \left(1 + \mu \frac{\delta}{l_k} \right)}.$$

Эта формула легко обобщается на случай магнитной цепи, состоящей из нескольких ферромагнитных тел и содержащей несколько зазоров.

§ 8. Электростатические задачи, решаемые элементарными приемами.

Существует весьма ограниченное число электростатических задач, разрешимых в конечном виде. В этом параграфе мы рассмотрим простейшие задачи этого рода, относящиеся главным образом к сферическим и эллипсоидальным телам, которые решаются совершенно элементарными, но, к сожалению, только к таким задачам применимыми методами.

1. Распределение заряда на проводящем эллипсоиде. Простейшей задачей электростатики является распределение электрического заряда на поверхности проводящего шара. Если последний совершенно изолирован, то его заряд e распределяется равномерно с плотностью $\eta = \frac{e}{4\pi a^2}$ (a — радиус шара) и действует вне шара точно так же, как если бы он был сконцентрирован в центре шара, в то время как внутри шара электрическое поле равно нулю. Соответствующие значения потенциала равны:

$$\varphi = \frac{e}{R} \quad (R \geq a) \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{e}{a} - 2\lambda \quad (R \leq a).$$

Отсюда следует, между прочим, что емкость изолированного шара равна его радиусу.

Тот факт, что равномерное распределение заряда на шаровой поверхности соответствует исчезновению поля внутри шара, доказывается совсем элементарно. Мы приведем это доказательство, данное еще Ньютоном, так как оно может быть без труда перенесено на эллипсоид. Представим себе конус $Q_1 P Q_2$, с вершиной, находящейся в произвольной точке P внутри шара, с произвольным направлением оси и очень малым отверстием (рис. 44). Лучи, образующие этот конус, пересекают шаровую поверхность в Q_1 и Q_2 под одним и тем же углом. Отсюда следует, что вырезываемые ими элементы поверхности S_1 и S_2 должны относиться друг к другу как квадраты соответствующих расстояний $PQ_1 = R_1$ и $PQ_2 = R_2$. Умножая обе стороны уравнения

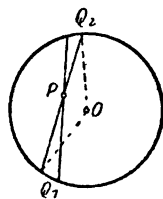


Рис. 44.

$$\frac{S_1}{R_1^2} = \frac{S_2}{R_2^2}$$

на (постоянную) поверхностную плотность заряда η , получаем математическое выражение того факта, что напряженности в точке P , происходящие от зарядов в Q_1 и Q_2 , равны друг другу и противоположны, и следовательно взаимно уничтожаются. Так как это равенство имеет место для всех направлений конуса, то результирующая напряженность в P должна быть равна нулю.

Тот же самый результат получается, если заряд e распределен не по шаровой поверхности, а в тонком шаровом слое, ограниченном двумя концентрическими сферами с радиусами a и $a + \delta a$, с равномерной объемной плотностью

$$\rho = \frac{e}{4\pi a^2 \delta a} = \frac{\eta}{\delta a}.$$

Представим себе теперь, что этот слой подвергается линейной деформации, т. е. такой деформации, при которой составляющие перемещения каждой точки являются линейными функциями координат. Шаровые поверхности превращаются при

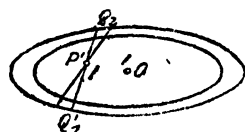


Рис. 45.

этом в эллипсоиды, а сферический слой в эллипсоидальный, заключенный между двумя подобными, одинаково ориентированными эллипсоидами. Известно, что прямые линии при таком преобразовании остаются прямыми, а параллельные прямые остаются параллельными друг другу; поэтому первоначально равные углы между прямыми $Q_1 P Q_2$ и нормальными в Q_1 и Q_2 после деформации также остаются равными друг другу (рис. 45). Следовательно имеем, как и раньше,

$$\frac{S_1'}{R_1'^2} = \frac{S_2'}{R_2'^2}.$$

Обозначая далее толщину деформированного слоя у Q_1' и Q_2' соответственно через $\delta a_1'$ и $\delta a_2'$, имеем соотношения

$$\frac{\delta a_1'}{R_1'} = \frac{\delta a_1}{R_1}, \quad \frac{\delta a_2'}{R_2'} = \frac{\delta a_2}{R_2},$$

а так как

$$\frac{R_1'}{R_2'} = \frac{R_1}{R_2} \text{ и } \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a,$$

то

$$\delta a_1' = \delta a_2'.$$

(При этом следует помнить, что отношение $\frac{\delta a}{R}$ и отверстие конуса рассматриваются как бесконечно малые величины). Так как заряд, первоначально распределенный с постоянной объемной плотностью ρ , после преобразования остается также равномерно распределенным с некоторой, вообще говоря, отличной объемной плотностью ρ' , мы получаем

$$\rho' \frac{S_1' \delta a_1'}{R_1'^2} = \rho' \frac{S_2' \delta a_2'}{R_2'^2},$$

т. е. внутри рассматриваемого эллипсоидального слоя напряженность электрического поля остается всегда — при произвольной форме обоих эллипсоидов (поскольку они остаются подобными друг другу и концентрическими) — равной нулю.

Переходя теперь снова к предельному случаю $\delta a \rightarrow 0$, получим вместо первоначального равномерного распределения поверх-

ностного заряда неравномерное распределение заряда с поверхностной плотностью

$$\eta' = \lim \rho' \cdot \delta a'.$$

При этом распределении заряда на поверхности соответствующего эллипсоида потенциал внутри последнего должен принимать постоянное значение. Опираясь на приведенное в предыдущем параграфе доказательство однозначности, мы можем утверждать, что найденное распределение заряда является единственным удовлетворяющим условию равновесия $\varphi = \text{const}$.

Напишем уравнение рассматриваемого эллипсоида в виде

$$f \equiv Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = \text{const} = D. \quad (69)$$

Оставляя коэффициенты A, B, C постоянными и изменяя параметр D , мы получаем целое семейство подобных эллипсоидов. Расстояние $\delta a'$ между рассматриваемым эллипсоидом и эллипсоидом $D + \delta D$ связано со значением вектора ∇f в соответствующей точке формулой $\nabla f = \frac{\delta D}{\delta a'}$. Таким образом мы имеем

$$\eta' \approx \delta a' \approx \frac{1}{(\nabla f)},$$

т. е.

$$\eta' = \frac{\alpha}{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}}, \quad (69a)$$

где α означает коэффициент пропорциональности.

Этой формулой и решается вопрос о распределении заряда на проводящем эллипсоиде. Следует заметить, что плотность заряда тем больше, чем больше кривизна эллипсоида в соответствующей точке. Однако простого соотношения между плотностью заряда и кривизной не существует.

В общем случае трехосного эллипсоида вычисление потенциала

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\eta'}{R} dS' \quad (\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (69b)$$

приводит, согласно формуле (69a), к эллиптическому интегралу, который мы здесь рассматривать не будем (см. Дополнение).

2. Потенциал эллипсоида вращения. В случае эллипсоида вращения интегрирование выполняется сравнительно просто. Именно, полагая $A = B \neq C$ (z — ось вращения) и $x' = r' \cos \theta$, $y' = r' \sin \theta$ (r' — расстояние от оси), получаем при $D = 1$

$$\begin{aligned} Ar'^2 + Cz'^2 &= 1, \\ Ar' dr' + Cz' dz' &= 0, \quad \frac{dr'}{dz'} = -\frac{Cz'}{Ar'}, \\ ds' &= \sqrt{dr'^2 + dz'^2} = \frac{1}{Ar'} \sqrt{A^2r'^2 + C^2z'^2} dz', \end{aligned}$$

где ds' означает элемент дуги „меридионального эллипса“. Отсюда

для элемента поверхности эллипсоида получается следующая формула:

$$dS' = r' ds' d\theta = \sqrt{A^2 r'^2 + C^2 z'^2} \frac{dz'}{A} d\theta. \quad (70)$$

Мы должны прежде всего выразить постоянную α в (69а) через заряд эллипсоида. Согласно (70) имеем

$$e = \int \eta' dS' = \alpha \int \int \frac{dz' d\theta}{A} = \frac{2\pi\alpha}{A} \cdot \frac{2}{\sqrt{C}},$$

где $\frac{1}{\sqrt{C}} = c$ означает полуось вращения. Таким образом

$$\alpha = \frac{A\sqrt{C}}{4\pi} e = \frac{e}{4\pi a^2 c} = \frac{e}{3V} \quad (70а)$$

($a = b = \frac{1}{\sqrt{A}}$ — экваториальная полуось, $V = \frac{4\pi}{3} abc$ — объем эллипсоида).

Для потенциала в какой-нибудь (внешней) точке $P(r, 0, z)$ получаем, согласно (69b) и (70):

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{3VA} \int \int \frac{dz' d\theta}{R} = \\ &= \frac{ea^2}{3V} \int_{-c}^{+c} \int_0^{2\pi} \frac{dz' d\theta}{\sqrt{(z-z')^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta + r^2}}. \end{aligned} \quad (70b)$$

Мы вычислим этот интеграл только для случая $r=0$ (это соответствует точке, лежащей на оси вращения). Принимая во внимание, что

$$r'^2 = \frac{1 - Cz'^2}{A} = a^2 - \frac{a^2}{c^2} z'^2,$$

получим

$$\varphi(z) = \frac{2\pi ea^2}{3V} \int_{-c}^{+c} \frac{dz'}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) z'^2 - 2zz' + z^2 + a^2}},$$

т. е. при $c > a$ (вытянутый эллипсоид вращения):

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{e}{2c\gamma} \lg \frac{z + \gamma c}{z - \gamma c} \\ \left(\gamma &= \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} \text{ — эксцентриситет} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

Эта формула остается справедливой также при $c < a$ (сжатый эллипсоид); при этом γ становится мнимым. Пользуясь соотношением

$$\operatorname{arctg} \xi = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + i\xi}{1 - i\xi},$$

где ξ — вещественное число и полагая $\gamma = i\xi$, получаем

$$\varphi(z) = \frac{e}{c\xi} \operatorname{arctg} \frac{\xi c}{z} \quad \left(\xi = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1} \right). \quad (71a)$$

При $z = c$ формулы (71) и (71a) дают значение потенциала на поверхности и внутри соответствующего эллипсоида. Отсюда, согласно определению емкости $\left(K = \frac{e}{\varphi} \right)$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{2c\gamma}{\lg \frac{1+\gamma}{1-\gamma}}, \quad (c < a) \\ K &= \frac{c\xi}{\operatorname{arctg} \xi}, \quad (c > a) \end{aligned} \right\}. \quad (71b)$$

Легко показать, что внешнее поле вытянутого эллипсоида вращения тождественно с полем, которое было бы возбуждено зарядами, равномерно распределенными вдоль фокальной линии. Действительно, полагая

$$\varphi(r) = \frac{e}{2\zeta} \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{dz'}{R},$$

где

$$\zeta = c\gamma = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad R^2 = (z - z')^2 + r^2, \quad (72)$$

получаем:

$$\varphi = \frac{e}{2\zeta} \lg \frac{z + \zeta + R_1}{z - \zeta + R_2}, \quad (72a)$$

где R_1 и R_2 — расстояния данной точки от фокусов ($z = \pm \zeta$). Уравнение $\varphi = \text{const}$, т. е.

$$\frac{z + \zeta + R_1}{z - \zeta + R_2} = \alpha = \text{const} \quad (72b)$$

представляет собою семейство софокусных вытянутых эллипсоидов вращения (причем заряженная линия фокусов является предельным случаем этого семейства). Это следует из того известного факта, что радиусы-векторы R_1, R_2 различных точек такого эллипсоида с большой полуосью c и эксцентриситетом γ выражаются линейно через их абсциссы формулами

$$R_1 = c + \gamma z, \quad R_2 = c - \gamma z.$$

Подставляя эти выражения в (72b), получаем

$$z[(1 + \gamma) - \alpha(1 - \gamma)] + \zeta + c + \alpha(\zeta - c) = 0,$$

или, принимая во внимание, что $\zeta = c\gamma$:

$$(z + c) \left(\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} - \alpha \right) = 0, \quad (72c)$$

т. е. в самом деле постоянное значение для α

$$\alpha = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}.$$

Таким образом, согласно (72a) и (76b), φ можно представить как функцию эксцентриситета данной поверхности $\varphi = \text{const}$ по формуле

$$\varphi = \frac{e}{2\zeta} \lg \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}.$$

Эта формула эквивалентна первой формуле (71b) для емкости вытянутого эллипсоида вращения. Однако она обобщает формулу (71b), так как она определяет потенциал не только на поверхности данного эллипсоида, но также и в окружающем пространстве. Заметим, что при $r=0$ формула (72c) переходит в (71). Тот факт, что она представляет обобщение последней, можно, разумеется, доказать, вычисляя интеграл (70b). Но это было бы утомительно и бесполезно, так как из совпадения обоих потенциалов на поверхности рассматриваемого проводника следует, что они должны совпадать и во всем внешнем пространстве.

Подобные же соотношения получаются и в случае сжатого эллипсоида вращения. Предельной формой последнего можно считать круглый диск; однако он должен быть заряжен не равномерно, как прямолинейный отрезок, представляющий предельную форму вытянутого эллипсоида, а с поверхностной плотностью, пропорциональной выражению

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_0^2}}}$$

(a_0 = радиусу диска).

Этот результат получается из общей формулы (69a), если перейти к пределу $c \rightarrow 0$, т. е. $C \rightarrow \infty$. При этом $\eta \approx \frac{1}{z/c}$ или, согласно уравнению

$$\frac{z'^2}{c^2} + \frac{r^2}{a_0^2} = 1, \quad \eta \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_0^2}}}. \quad (73)$$

(При противоположном предельном переходе $c = \text{const}$, $a, b \rightarrow 0$ получаем таким же способом $\eta = \text{const}$).

Эквипотенциальные поверхности такого диска представляют собою сжатые эллипсоиды вращения

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 - c^2 = a_0^2 = \text{const} \quad (73a)$$

с общим „фокальным кругом“ и различными „эксцентриситетами“ $\xi = \frac{a_0}{c}$; соответствующие значения потенциала выражаются через ξ по формуле

$$\varphi = \frac{e}{a_0} \arctg \xi, \quad (73b)$$

которая принципиально тождественна со второй формулой (71b). Потенциал на диске остается конечным и достигает здесь ($\xi = +\infty$) предельного значения $\frac{\pi e}{2a_0}$. Отсюда следует, что рассматриваемый диск обладает емкостью

$$K = \frac{2a_0}{\pi}. \quad (73c)$$

Заметим, что емкость стержня или проволоки с круглым сечением приближается к емкости весьма вытянутого эллипсоида вращения с той же длиной ($2c$) и малой полуосью, равной радиусу поперечного сечения a . В этом случае можно положить при

$$\frac{a}{c} \ll 1 \quad \gamma = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} \cong 1 - \frac{a^2}{2c^2},$$

и следовательно, согласно (71b),

$$K = \frac{c}{\lg \frac{2c}{a}}. \quad (73d)$$

Величину

$$K_1 = \frac{1}{2 \lg \frac{2c}{a}}$$

можно определить как емкость единицы длины проволоки; она совпадает с емкостью (на единицу длины) кабеля с внутренним радиусом a и внешним $2c$ [см. (33b) гл. V, § 4; это значение K_1 следует подставить в формулу (52b) для определения декремента затухания прямолинейной антенны].

3. Эллиптический цилиндр. Изложенный метод определения распределения заряда на эллипсоиде можно применить к соответствующей плоской задаче, именно к определению распределения заряда на бесконечно длинном цилиндре с эллиптиче-

ским сечением. В этом случае электрическая напряженность обратно пропорциональна не второй, а первой степени расстояния ($E = \frac{2e}{r}$); вместе с тем цилиндрическая поверхность, вырезаемая очень малым плоским углом (или соответствующая граничная линия) также пропорциональна первой, а не второй степени расстояния. Таким образом, для поверхностной плотности распределенного на эллиптическом цилиндре заряда мы получаем такую же самую формулу

$$\eta' = \lim \rho' \delta a',$$

как и в случае эллипсоида, с той разницей, что $\delta a'$ означает здесь толщину плоского слоя, ограниченного двумя подобными концентрическими эллипсами. Выражая η' через координаты x' и y' эллиптического сечения данного цилиндра

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

получаем следующую формулу, аналогичную (69а):

$$\eta' = \frac{a}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}.$$

Элемент дуги эллипса равен

$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2} = dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2} = b^2 \frac{dx'}{y'} \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}.$$

Следовательно для заряда цилиндра на единицу длины получим

$$e = \oint \eta' ds' = b^2 a \int \frac{dx'}{y'} = a b \int_{-a}^{+a} \frac{dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} = a \pi a b = a S,$$

где S — площадь его поперечного сечения. Таким образом окончательно имеем:

$$\eta' = \frac{e}{\pi a b \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}.$$

Потенциал цилиндра во внешней точке (x, y) выражается интегралом

$$\varphi = 2 \oint \eta' \lg \frac{1}{r} ds' = \frac{2b}{\pi a} e \int_{-a}^{+a} \frac{1}{y'} \lg \frac{1}{r} dx',$$

где

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

На вычислении этого интеграла мы не будем останавливаться, так как при помощи теории аналитических функций φ определяется без всякого интегрирования (см. приложение § 3).

4. Два проводящих шара; метод электрических изображений. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых частных случаев систем, состоящих из нескольких проводников, имея при этом в виду некоторые простейшие случаи электростатической индукции.

Простейшая система этого рода — так называемый шаровой конденсатор — состоит из двух concentрических шаров. Обозначая заряды обоих шаров через $e_1 = e$, $e_2 = -e$ и их радиусы через a_1 , a_2 ($a_1 < a_2$), получаем следующие значения для потенциала, как функции расстояния от их общего центра

$$\begin{aligned} r \leq a_1, \quad \varphi_1 &= \frac{e_1}{a_1} + \frac{e_2}{a_2} = e \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right), \\ a_1 \leq r \leq a_2, \quad \varphi &= \frac{e_1}{r} + \frac{e_2}{a_2} = e \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_2} \right), \\ r \geq a_2, \quad \varphi_2 &= \frac{e_1}{r} + \frac{e_2}{r} = 0. \end{aligned}$$

Индукционные коэффициенты $q_{\alpha\beta}$ этой системы равны:

$$q_{11} = \frac{1}{a_1}, \quad q_{12} = \frac{1}{a_2} = q_{21}, \quad q_{22} = \frac{1}{a_2}.$$

Емкость конденсатора $\left(\frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} \right)$

$$K = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \quad (74)$$

тем больше, чем меньше расстояние $a_2 - a_1 = d$ между поверхностями обоих шаров. В предельном случае $d \ll a_1, a_2$ можно положить

$$K = \frac{a^2}{d} = \frac{S}{4\pi d}, \quad (74a)$$

где S — поверхность шара. Такой же самой формулой очевидно определяется емкость „почти плоского“ конденсатора с поверхностью S , вырезанного из шарового конденсатора.

Аналогичные результаты получаются для эллипсоидального конденсатора, образованного двумя эллипсоидами, принадлежащими к одному и тому же семейству эквипотенциальных поверхностей. Так, например, в случае двух софокусных вытянутых эллипсоидов с эксцентриситетами γ_1 и γ_2 ($< \gamma_1$) имеем, согласно (72с),

$$\varphi_1 = \frac{e}{2c} \left\{ \lg \left(\frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} \right) - \lg \left(\frac{1 + \gamma_2}{1 - \gamma_2} \right) \right\}, \quad \varphi_2 = 0,$$

что соответствует емкости

$$K = \frac{2\epsilon}{\lg \frac{(1 + \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{(1 - \gamma_1)(1 + \gamma_2)}}. \quad (74b)$$

Возвратимся снова к случаю двух шаров, которые однако теперь будем считать расположенными друг относительно друга произвольным образом. При этом представим себе сначала, что один шар настолько мал по сравнению с другим, что он может рассматриваться как точечный заряд.

В первом томе (стр. 113) мы показали, что два гармонически сопряженные по отношению к шару S с радиусом a точечных заряды

$$\frac{e}{e'} = \frac{\rho}{a} = \frac{a}{\rho'} \quad (75)$$

(a — радиус шара; ρ и ρ' — расстояния обеих точек от центра шара O ; e и e' — их заряды) создают на поверхности шара одинаковые потенциалы. Меняя теперь знак одного из этих зарядов на обратный — причем этот заряд называют „электрическим изображением“ другого — и складывая их потенциалы, получаем таким образом результирующий потенциал φ , принимающий постоянное значение, равное нулю на поверхности данного шара. Материализуя эту поверхность, получаем решение следующей задачи.

Вне (или внутри) „отведенного к земле“ шара с потенциалом 0 находится точечный заряд e . Какова величина и распределение электрического заряда, индуцируемого на поверхности шара первичным полем этого заряда $\varphi^0 = \frac{e}{R}$? Ответ гласит: вторичное поле индуцированного заряда снаружи (и соответственно внутри) шара определяется потенциалом $\varphi' = -\frac{e'}{R'}$ электрического изображения e ; внутри (и соответственно вне) — потенциалом $-\varphi = -\frac{e}{R}$. Плотность заряда вычисляется отсюда обычным способом, т. е. по формуле

$$\eta' = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (\varphi = \varphi^0 + \varphi')$$

или

$$\eta' = \frac{1}{4\pi} (E_n^0 + E_n'),$$

причем в случае внешнего заряда напряженности должны быть определены на внешней стороне шаровой поверхности, а в противоположном случае — на внутренней стороне.

Из рис. 46 следует, что если A означает точку на внешней стороне шара, то

$$E_n^0 = -\frac{e}{R^2} \cos \psi, \quad E_n' = -\frac{e'}{R'^2} \cos \psi'$$

($R = PA$, $R' = P'A$, ψ и ψ' — углы между OA с одной стороны и AP и соответственно AP' — с другой), или, в виду равенства $\frac{e}{R} = \frac{e'}{R'}$, получаем

$$E_n = E_n^0 + E_n' = -\frac{e}{R} \left(\frac{\cos \psi}{R} + \frac{\cos \psi'}{R'} \right).$$

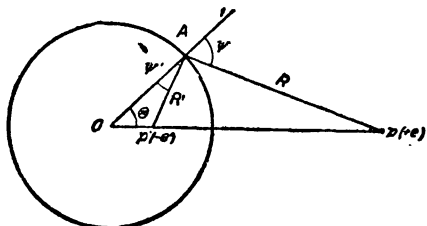


Рис. 46.

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= a^2 + R^2 + 2Ra \cos \psi, \quad \rho'^2 = a^2 + R'^2 - 2aR' \cos \psi', \\ \frac{\cos \psi}{R} + \frac{\cos \psi'}{R'} &= \frac{\rho^2 - a^2 - R^2}{2aR^2} + \frac{a^2 + R'^2 - \rho'^2}{2aR'^2} = \\ &= \frac{\rho^2 - a^2}{2aR^2} + \frac{a^2 - \rho'^2}{2aR'^2} = \frac{\rho^2 - a^2}{aR^2}, \end{aligned}$$

принимая во внимание, что

$$\frac{R}{R'} = \frac{\rho}{a} = \frac{a}{\rho'}.$$

Таким образом

$$E_n = -\frac{e}{R^2} \cdot \frac{\rho^2 - a^2}{aR},$$

и следовательно

$$\eta = -\frac{e}{4\pi R^2} \frac{\rho^2 - a^2}{Ra} \tag{75a}$$

или, так как

$$\rho^2 - a^2 = \rho \left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right) = \rho(\rho - \rho') = 2h\rho,$$

где через $2h$ обозначено расстояние PP_1 ,

$$\eta = -\frac{eh}{2\pi R^2} \cdot \frac{\rho}{a}. \tag{75b}$$

Увеличивая неограниченно радиус шара a при неизменном h , получим плотность заряда, индуцированного зарядом e на проводящей плоскости, отстоящей от него на расстоянии

$$h \left(\eta = -\frac{eh}{2\pi R^3} \right).$$

Изображение e принимает при этом равную и противоположную величину ($e' = -e$) и симметричное по отношению к плоскости положение. Этот результат, являющийся здесь предельным случаем общей теории „шаровых изображений“, можно, как известно, обобщить на случай произвольно движущихся точечных зарядов, если отражающую плоскость трактовать как идеальный проводник (гл. V, § 4). Однако в случае идеально проводящего шара область применения теории изображений ограничивается только электростатическими (или гальваностатическими) явлениями.

Если рассматриваемый шар изолирован и не имеет результирующего заряда, то из вышеприведенных выражений для плотности заряда следует вычесть величину $-\frac{e'}{4\pi a^2}$, представляющую плотность равномерно распределенного индуцированного заряда. Это дает

$$\eta' = -\frac{ep}{4\pi a} \left(\frac{2h}{R^3} - \frac{1}{\rho^2} \right),$$

причем шар получает потенциал $\frac{e'}{a} = \frac{e}{\rho}$. В отношении своего внешнего поля в этом случае шар очевидно эквивалентен диполю, состоящему из заряда $+e'$ в точке O , и из противоположного заряда $-e'$ в точке P' . Неограниченно увеличивая расстояние ρ при неизменной величине первичной напряженности $E^0 = \frac{e}{\rho^2}$ в центре шара, можно считать первичное поле практически однородным, а индуцированный диполь можно считать элементарным диполем с моментом

$$p = e'\rho' = \frac{ea}{\rho} \cdot \frac{a^2}{\rho} = \frac{e}{\rho^2} a^3 = E^0 a^3.$$

Таким образом мы снова получили уже известный результат [см. (63а)] как частный случай более общей задачи.

Шар и индуцирующий заряд должны взаимно притягиваться. Для больших расстояний $\left(\frac{R}{a} \gg 1 \right)$ сила притяжения, если шар „заземлен“, определяется формулой

$$F \approx \frac{ee'}{\rho^2} = \frac{e^2 a}{\rho^3}, \quad (75c)$$

или формулой

$$F \approx \frac{2pe}{\rho^3} = \frac{2e^2 a^3}{\rho^5}, \quad (75d)$$

если он остается нейтральным. Взаимная энергия точечного заряда и шара в первом случае равна $-\frac{1}{2} \frac{e^2 a}{\rho^2} = \frac{ee'}{2\rho}$, а во втором $-\frac{e^2 a^3}{2\rho^4} = -\frac{ee'}{2\rho} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2$. Если представить себе вместо точечного заряда очень малый шар радиуса a_0 и пренебречь изменением распределения заряда на последнем, обусловленным воздействием большого шара, то для их полной энергии W в первом случае получаем $\frac{e^2}{2a_0} - \frac{e^2 a}{2\rho^2}$. Согласно общей формуле $W = \frac{e^2}{2K}$ это соответствует эффективной емкости

$$K = \frac{1}{\frac{1}{a_0} - \frac{a}{\rho^2}} \approx a_0 \left(1 + \frac{aa_0}{\rho^2}\right)$$

Метод электрических изображений позволяет рассмотреть также случай двух или нескольких произвольно больших шаров, находящихся в произвольных относительных положениях. При этом следует пользоваться описанным в начале предыдущего параграфа методом приближений, который называется здесь методом „последовательных изображений“. Если имеем два шара S_1, S_2 с заданными (постоянными) зарядами e_1, e_2 , то равновесное распределение этих зарядов можно определить следующим образом. Представим себе сначала, что заряды e_1, e_2 распределены на соответствующих шарах равномерно (первое приближение). По отношению к своим внешним действиям они эквивалентны зарядам, с концентрированным в центрах шаров O_1, O_2 . Определим теперь изображение e_1 в S_2 ($-e_1^{(1)}$) и изображение e_2 в S_1 ($-e_2^{(1)}$). Если потенциалы шаров поддерживаются постоянными, то в первом приближении можно характеризовать их внешние поля точечными зарядами ($e_1, -e_1^{(1)}$) и соответственно ($e_2, -e_2^{(1)}$). Напротив, если оба шара изолированы, т. е. их заряды остаются постоянными, то центральные заряды необходимо кроме того еще пополнить зарядами, которые равны по абсолютной величине и противоположны по знаку индуцированным. Этот способ можно продолжать сколь угодно далеко, так что точное решение задачи о взаимном влиянии двух шаров может быть представлено в виде бесконечного ряда. При этом полезно считать постоянными сначала не заряды, а потенциалы шаров, и только потом компенсировать добавочные (индуцированные) заряды равными и противоположными центральными зарядами.

В простейшем случае двух равных шаров ($a_1 = a_2 = a$) с про-

тивоположными зарядами $e_1 = -e_2 = e$ получаем таким путем следующие рекуррентные соотношения для зарядов последовательных изображений и их расстояний от центра соответствующего шара:

$$e^{(n)} = e^{(n-1)} \frac{\rho^{(n)}}{a}, \quad \rho^{(n)} = \frac{a^2}{\rho - \rho^{(n-1)}},$$

где $\rho = \rho^0$ — расстояние между центрами. Следует заметить, что эта задача ¹ полностью эквивалентна задаче о взаимной индукции шара и плоскости. Емкость рассматриваемой системы определяется в первом приближении уравнением

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2e \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\rho} \right) = \frac{e}{K}$$

и равна таким образом

$$K = \frac{a\rho}{2(\rho - a)}.$$

5. Применение метода изображений к цилиндрическому проводнику. Метод электрических изображений применим также в чрезвычайно простой форме к плоским задачам. Именно, в этом случае для потенциала двух линейных зарядов e и $-e'$ получаем выражение

$$\varphi = 2e \lg \frac{1}{r} - 2e' \lg \frac{1}{r'},$$

которое при $e \neq e'$ круговых эквипотенциальных линий не дает. Напротив, при $e = e'$ все линии $\varphi = \text{const}$ являются кругами, уравнение которых может быть написано в виде $\frac{r}{r'} = \text{const}$. Следовательно, электрическое изображение заряженной прямой P в параллельном к ней круговом цилиндре представляется гармонически сопряженной по отношению к этому цилиндру прямой с равным и противоположным зарядом (на единицу длины).

Потенциал (постоянный) цилиндра выражается при этом, в виду соотношения

$$\frac{r}{r'} = \frac{\rho}{a} = \frac{a}{\rho'}, \quad (76)$$

формулой

$$\varphi = 2e \lg \frac{\rho}{a}. \quad (76a).$$

Результирующая напряженность на его поверхности равна

$$E = E_n^0 + E_n' = -2e \left(\frac{\cos \psi}{r} + \frac{\cos \psi'}{r'} \right),$$

¹ Если оба шара не охватывают друг друга и не пересекаются,

т. е. (см. соответствующее выражение для шара):

$$E = -\frac{2e}{r} \frac{\rho^2 - a^2}{ar},$$

а плотность заряда

$$\eta = -\frac{e}{2\pi r} \frac{\rho^2 - a^2}{ar} = -\frac{eh}{\pi r^2} \frac{\rho}{a}. \quad (76b)$$

В предельном случае проводящей („отражающей“) плоскости эта формула сводится к

$$\eta = -\frac{eh}{\pi r^2}.$$

Если результирующий заряд цилиндра равен нулю, то к (76b) необходимо прибавить величину $\frac{e}{2\pi a}$. При этом во внешнем пространстве цилиндр возбуждает такое же поле, как „диполь“, образованный двумя противоположно заряженными прямыми, с моментом

$$p = ep' = \frac{ea^2}{\rho} = \frac{1}{2} a^2 E^0$$

на единицу длины, где E^0 означает напряженность первичного поля в точках оси цилиндра.

Метод последовательных изображений в случае цилиндрических проводников становится особенно простым, так как при этом мы всегда имеем дело с одними и теми же зарядами. Однако именно по этой причине соответствующие ряды медленно сходятся. Это затруднение исчезает, когда общий заряд рассматриваемого проводника равен нулю. В случае, например, двух изолированных параллельных проволок с противоположными зарядами получают в первом приближении только две отраженные линии, смещенные друг относительно друга на отрезки $\rho^{(1)} = \frac{a^2}{\rho}$, тогда как первоначальные осевые заряды компенсируются. Во втором приближении эти эффективные линии зарядов перемещаются еще дальше, и в окончательном решении они оказываются на расстоянии

$$\rho^{(\infty)} = \frac{a^2}{\rho - \frac{a^2}{\rho - \frac{a^2}{\rho - \dots}}}$$

от осей соответствующих проволок. Это расстояние можно легко вычислить. Действительно, имеем

$$\rho^{(\infty)} = \frac{a^2}{\rho - \rho^{(\infty)}},$$

откуда следует

$$\rho^{(\infty)} = \frac{1}{2}\rho - \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - a^2} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}\rho + \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - a^2}}. \quad (77)$$

Если радиусы проволок малы по сравнению с расстоянием друг от друга, то можно положить $\sqrt{\frac{\rho^2}{4} - a^2} \cong \frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{2a^2}{\rho^2}\right)$, что для $\rho^{(\infty)}$ дает значение первого приближения ($\rho^{(1)}$).

Этот результат можно получить еще проще, рассматривая потенциал, обусловленный двумя противоположно заряженными линиями,

$$\varphi = 2e \lg \frac{r'}{r}$$

и материализуя две поверхности $\varphi = \text{const}$.

В предыдущей формуле r и r' означают расстояния данной точки не от осей проволок, а от эффективных линейных зарядов. Для таких точек, которые лежат в плоскости, проходящей через обе оси, очевидно имеем, при обычных значениях r и r' :

$$\varphi = 2e \lg \frac{r' - \rho^{(\infty)}}{r - \rho^{(\infty)}}, \quad r + r' = \rho \equiv 2h.$$

Для потенциалов обеих проволок ($r = a$ и соответственно $r' = a$) согласно (77) получаем отсюда следующие значения:

$$\varphi = \pm 2e \lg \frac{\rho - a - \rho^{(\infty)}}{a - \rho^{(\infty)}} = \pm 2e \lg \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + h - a}{\sqrt{h^2 - a^2} - h + a},$$

что соответствует емкости

$$K = \frac{1}{4 \lg \frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{h - a}{h + a}}. \quad (77a)$$

на единицу длины. В предельном случае $a \ll h$, $\beta \approx 1 - \frac{a}{h}$ эта формула превращается в следующую:

$$K = \frac{1}{4 \lg \frac{2h}{a}} = \frac{1}{4 \lg \frac{\rho}{a}}. \quad (77b)$$

Заметим, что емкость телеграфной проволоки, протянутой на высоте h над землей ($\varphi = 0$), равна удвоенному значению (77a).

6. Диэлектрические тела; несовершенное изображение в плоскости; эллипсоид в однородном поле. Метод изображений может быть распространен до неко-

торой степени и на диэлектрические тела, однако только на такие, которые ограничены плоскими поверхностями. Представим себе однородную диэлектрическую среду, ограниченную сверху (в положительном направлении оси Z) плоскостью $z=0$ и поляризованную точечным зарядом, находящимся в пустом пространстве на расстоянии $z=h>0$ (рис. 47). При бесконечно большой диэлектрической постоянной ϵ этой среды получаем такие же соотношения, как и в случае проводника, т. е. индуцированный связанный поверхностный заряд, эквивалентный вне диэлектрика электрическому изображению e , а внутри — заряду, противоположному e .

Легко видеть, что подобное распределение связанного поверхностного заряда имеет место также при конечных значениях ϵ , с той разницей, что величина этого заряда — e' по абсолютному значению меньше $|e|$. Этот заряд действует внутри таким образом, как если бы он был (при отсутствии диэлектрика) сосредоточен в точке P , а действие его снаружи таково, как если бы он находился в отраженной точке P' .

Для доказательства рассмотрим граничные условия

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta(\epsilon E_n) = 0.$$

Первое из них очевидно удовлетворяется. Если обозначить расстояние какой-нибудь точки A на поверхности от P и P' через R , то второе дает:

$$(e + e') \frac{h}{R^3} = \epsilon(e - e') \frac{h}{R^3}.$$

Следовательно ему можно тождественно удовлетворить, положив

$$\epsilon(e - e') = e + e',$$

т. е.

$$e' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} e. \quad (78)$$

Этот результат нельзя однако распространить на какие угодно другие поверхности, в частности на шаровые, по той причине, что при этом должно приниматься во внимание отражение первичного заряда не только на передней, но, вследствие неполного экранирования его поля, — также и на противоположной стороне этой поверхности. Если бы например диэлектрик был ограничен не только сверху, но также и снизу, то для нахождения распределения заряда и соответствующего вторичного поля на обеих границах диэлектрического слоя понадобилось бы вместо одного отражения ввести бесконечный ряд последовательных неполных отражений,

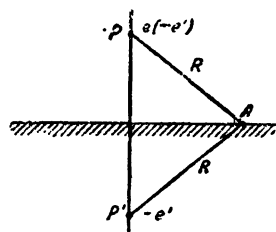


Рис. 47.

Действие однородного первичного поля на диэлектрический шар, как мы видели в предыдущем параграфе, определяется весьма просто. Обобщим теперь найденный там результат на случай эллипсоида. При этом будем исходить из предположения (подтверждаемого дальнейшими исследованиями), что поляризация, возбуждаемая в однородном диэлектрическом теле эллипсоидальной формы однородным первичным полем, также однородна, — подобно тому как мы это нашли для частного случая шара.

Так как поляризация связана с результирующей внутренней напряженностью соотношением

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}, \quad \chi = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}$$

и так как далее первичная напряженность постоянна, то из нашего предположения следует, что вторичная напряженность внутри тела также должна иметь постоянное значение E' . Это значение, как и соответствующее значение для внешнего пространства E^a , можно вычислить как функцию от \mathbf{P} при помощи известного выражения для потенциала вторичного поля:

$$\varphi' = \int \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}{R^3} dV' = - \int \mathbf{P} \cdot \nabla \frac{1}{R} dV'.$$

В виду предполагаемого постоянства \mathbf{P} получаем

$$\varphi' = -\mathbf{P} \cdot \nabla \psi', \quad \psi' = \int \frac{dV'}{R}, \quad (79)$$

где ψ' означает потенциал эллипсоида рассматриваемой формы, равномерно заряженного по объему с плотностью $\rho = 1$.

В общем случае эллипсоида с (различными) полуосями a, b, c для потенциала имеет место следующее параметрическое представление:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(b)} &= \pi abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t} \right) \frac{dt}{T(t)}, \\ \psi^{(a)} &= \pi abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t} \right) \frac{dt}{T(t)}, \end{aligned} \right\} \quad (79a)$$

причем в обоих случаях

$$T = \sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)},$$

а s означает положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1, \quad (79b)$$

т. е. параметр того эллипсоида из семейства (79b), который проходит через данную внешнюю точку (x, y, z) .

Выражения (79а) получаются наиболее простым путем, если проинтегрировать уравнение $\nabla^2\psi' = -4\pi\rho$ при $\rho = 1$ внутри и $\rho = 0$ вне данного эллипсоида ($s = 0$), написав предварительно это уравнение в соответствующих „эллипсоидальных“ координатах. Ограничимся здесь его проверкой, состоящей в том, что как $\psi^{(s)}$ и $\psi^{(a)}$, так и их первые производные по координатам при $s = 0$ должны непрерывно переходить друг в друга, тогда как их вторые производные должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla^2\psi^{(s)} = -4\pi, \quad \nabla^2\psi^{(a)} = 0. \tag{79c}$$

Доказательство непрерывности не представляет никаких трудностей, и мы не будем на нем останавливаться. Дифференцируя два раза выражения (79а), — при этом нижний предел в выражении для $\varphi^{(a)}$ рассматривается как функция координат x, y, z , — получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi^{(s)} &= -2\pi abc \int_0^\infty \left(\frac{1}{a^2+t} + \frac{1}{b^2+t} + \frac{1}{c^2+t} \right) \frac{dt}{T} = \\ &= -4\pi abc \int_0^\infty \frac{dT}{T^2} = -\frac{4\pi abc}{T(0)} = -4\pi \end{aligned}$$

и аналогичным образом

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi^{(a)} &= \left\{ -4\pi \frac{abc}{T(s)} + 2\pi \frac{abc}{T(s)} \left(\frac{x}{a^2+s} \frac{\partial s}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{y}{b^2+s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{z}{c^2+s} \frac{\partial s}{\partial z} \right) \right\}_{s=0}. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем согласно (79b)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2x}{a^2+s} \cdot \left[\frac{x^2}{(a^2+s)^2} + \frac{y^2}{(b^2+s)^2} + \frac{z^2}{(c^2+s)^2} \right].$$

Отсюда видно, что для выражения в круглых скобках в предыдущей формуле получается значение 2; таким образом $\nabla^2\psi^{(a)}$ действительно обращается в нуль.

Выражение (79а) для $\psi^{(s)}$ можно представить как функцию координат в форме

$$\psi^{(s)} = -\frac{1}{2} (Ax^2 + By^2 + Cz^2) + \text{const}$$

с коэффициентами

$$A = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t)T} \text{ и т. д.} \tag{80}$$

Отсюда согласно (79) следует

$$\varphi^{(s)} = AP_x x + BP_y y + CP_z z$$

и далее для напряженности вторичного поля внутри равномерно поляризованного эллипсоида:

$$E_x^{(i)} = -AP_x, \quad E_y^{(i)} = -BP_y, \quad E_z^{(i)} = -CP_z. \quad (80a)$$

Этим оправдывается наше основное предположение (относительно постоянства P). Исключая $E^{(i)}$ из этих уравнений и уравнения $P = \chi(E^0 + E^{(i)})$, получаем следующие выражения для главных составляющих поляризации, как функции напряженности первичного поля:

$$P_x = \frac{\chi E_x^0}{1 + \chi A} \text{ и т. д.} \quad (80b)$$

Поляризацию эллипсоида можно характеризовать некоторым симметричным тензором поляризации α_{ik} с главными составляющими

$$\frac{\chi V}{1 + \chi A}, \quad \frac{\chi V}{1 + \chi B}, \quad \frac{\chi V}{1 + \chi C};$$

$$V = \frac{4\pi}{3} abc$$

— объем эллипсоида; полный момент $p = PV$ эллипсоида относительно произвольной системы координат выражается формулой

$$p_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} E_k^0.$$

Заметим, что в теории намагничивания коэффициенты A, B, C называются „коэффициентами размагничивания“.

Если все три оси рассматриваемого эллипсоида равны друг другу, т. е. в случае шара, мы имеем согласно (80)

$$A = B = C = 2\pi a^3 \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2 + t)^{3/2}} = \frac{4\pi}{3}$$

и следовательно, согласно (80b),

$$P = \frac{\chi E^0}{1 + \frac{4\pi}{3} \chi} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E^0,$$

т. е. уже ранее выведенную формулу (65b).

При $a = b < c$ (вытянутый эллипсоид вращения) получаем

$$A = B = 2\pi a^2 c \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2 + t)^2 \sqrt{c^2 + t}}.$$

При помощи подстановки $c^2 + t = u^2$ последний интеграл приводится к следующему виду:

$$\int_0^\infty \frac{2du}{(u^2 - \zeta^2)^2} = \frac{c}{\zeta^2(c^2 - \zeta^2)} - \frac{1}{2\zeta^3} \lg \frac{c + \zeta}{c - \zeta} \quad (\zeta^2 = c^2 - a^2).$$

Таким образом, полагая $\zeta : c = \gamma$ (эксцентриситет), будем иметь:

$$A = B = 2\pi \left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1-\gamma^2}{2\gamma^3} \lg \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right] \quad (80c)$$

и аналогичным образом

$$C = 4\pi(1-\gamma^2) \left[\frac{1}{2\gamma^3} \lg \frac{1+\gamma}{1-\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

При очень больших эксцентриситетах эта формула сводится к

$$C = 4\pi \frac{a^2}{c^2} \left(\lg \frac{2c}{a} - 1 \right). \quad (80d)$$

Соответствующие формулы для сжатого эллипсоида мы не выписываем, так как они не представляют практического интереса.

Выведенные в п. 2 формулы для потенциала и емкости заряженного проводящего эллипсоида вращения можно обобщить, пользуясь выражением (79а), на случай трехосного эллипсоида. Распределение поверхностного заряда соответствует равномерно заряженной оболочке, ограниченной двумя подобными коаксиальными (т. е. имеющими общую ось) эллипсоидами. Потенциал φ последней равен разности потенциалов ψ двух заряженных по объему эллипсоидов с полуосями a, b, c и $a(1+\delta), b(1+\delta), c(1+\delta)$. При бесконечно малом δ можно следовательно положить

$$\varphi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} a + \frac{\partial \psi}{\partial b} b + \frac{\partial \psi}{\partial c} c \right) \rho \delta. \quad (81)$$

При этом объемная плотность ρ заряда определяется через полный заряд e по формуле

$$e = \left(\frac{\partial V}{\partial a} a + \frac{\partial V}{\partial b} b + \frac{\partial V}{\partial c} c \right) \rho \delta = 4\pi abc \rho \delta. \quad (81a)$$

Подставляя в (81) выражение (79а), получаем в результате простых вычислений следующие формулы

$$\varphi^{(b)} = \frac{e}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{T(t)}, \quad \varphi^{(a)} = \frac{e}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{T(t)}. \quad (81b)$$

Следовательно в общем случае емкость эллипсоида выражается формулой:

$$K = 2: \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}. \quad (81c)$$

При $a = b \neq c$ отсюда получаются уже известные формулы (71b) для емкости вытянутого или сжатого эллипсоида вращения,

Индукционное действие, испытываемое проводящим эллипсоидом со стороны однородного первичного поля, может быть выведено из соответствующих формул для диэлектрического эллипсоида, если положить в них $\kappa = \infty$. В частности для составляющих индуцированного момента $\mathbf{p} = PV$ имеем, согласно (80b),

$$\mathbf{p}_x = \frac{VE_x^0}{A} = \frac{2}{3 \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t)T(t)}} E_x^0 \text{ и т. д.}$$

Так как направление этого момента как у проводящего, так и у диэлектрического эллипсоида вообще отлично от направления первичного поля, то эллипсоид должен испытывать вращательное усиление с моментом

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}^0, \quad (82)$$

стремящимся совместить наибольшую ось с направлением поля. Этому вращательному моменту соответствует потенциальная энергия

$$U = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^0,$$

т. е. согласно (80b)

$$U = -\frac{\kappa}{2} V \left(\frac{E_x^{02}}{1+\kappa A} + \frac{E_y^{02}}{1+\kappa B} + \frac{E_z^{02}}{1+\kappa C} \right), \quad (82a)$$

достигающая при вышеупомянутой ориентировке своего минимума. Последняя формула остается приблизительно справедливой также в случае не вполне однородного поля, и определяет действующую на эллипсоид движущую силу. Составляющие последней равны

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \kappa V \left[\frac{E_x^0 \frac{\partial E_x^0}{\partial x}}{1+\kappa A} + \frac{E_y^0 \frac{\partial E_y^0}{\partial x}}{1+\kappa B} + \frac{E_z^0 \frac{\partial E_z^0}{\partial x}}{1+\kappa C} \right] \text{ и т. д.}$$

В частном случае шара получаем

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot a^3 \nabla (E^{02}) \quad (82b)$$

[см. (65b) § 7]. Подставляя сюда $E^0 = \frac{e}{R^2}$, получаем приближенное выражение для силы притяжения между точечным зарядом и поляризованным им диэлектрическим (или при $\epsilon = \infty$ проводящим) шаром. Формула (82b) справедлива только в том случае, когда радиус шара a мал по сравнению с расстоянием R . Когда заряд находится в непосредственной близости от шаровой

поверхности, последняя действует как неограниченная плоскость, т. е. как электрическое изображение рассматриваемого точечного заряда $e' = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} e$. Следовательно в этом случае сила притяжения равна

$$F = \frac{ee'}{(2h)^2} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \cdot \frac{e^2}{4h^2}, \quad (82c)$$

что соответствует взаимной энергии

$$U = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \cdot \frac{e^2}{4h}$$

где h — расстояние заряда e от плоскости отражения.



ДОПОЛНЕНИЕ.

§ 1. Криволинейные ортогональные координаты.

Обозначим через x, y, z координаты различных пространственных точек в заданной прямоугольной и прямолинейной координатной системе. Вместо этих координат мы введем три взаимно однозначно и непрерывно связанные с ними независимые переменные ξ, η, ζ . На геометрическом языке это значит, что каждой точке P соответствуют вполне определенные значения ξ, η, ζ или, еще нагляднее, что различные поверхности

$$\xi(x, y, z) = \text{const}$$

(и точно так же $\eta = \text{const}$ или $\zeta = \text{const}$) взаимно не пересекаются, тогда как каждая поверхность $\xi = \text{const}$ пересекается с каждой из поверхностей $\eta = \text{const}$ или $\zeta = \text{const}$. В таком геометрическом смысле переменные ξ, η, ζ называются новыми пространственными координатами. Поверхности $\xi = \text{const}$ называются координатными поверхностями (η, ζ); линии пересечения поверхностей $\eta = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ представляют соответствующие координатные линии ξ . Координатными линиями являются следовательно линии

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta),$$

которые соответствуют изменению одной из координат при неизменных значениях двух других. Так как эти линии, вообще говоря, искривлены, координаты ξ, η, ζ называются „криволинейными“.

Мы ограничимся в дальнейшем только ортогональными криволинейными координатами, т. е. такими, в которых различные семейства поверхностей $\xi, \eta, \zeta = \text{const}$ взаимно перпендикулярны. В качестве простейших и важнейших примеров таких координат могут служить уже неоднократно нами применявшиеся цилиндрические координаты (r, α, z) , или полярные координаты (R, θ, α) .

Бесконечно малому изменению одной какой-нибудь координаты — скажем ξ — при неизменных значениях двух других соответствует бесконечно малое смещение соответствующей точки вдоль одноименной координатной линии на отрезок $h_\xi d\xi$, где коэффициент h_ξ зависит от характера координатных линий.

Если вид функций $x(\xi, \eta, \zeta)$ и т. д. известен, то этот коэффициент можно вычислить по формуле

$$h_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}. \quad (1)$$

Проекция бесконечно малого смещения ds , соответствующего изменению ξ, η, ζ на $d\xi, d\eta, d\zeta$, на координатные направления, т. е. на касательные к координатным линиям, пересекающимся в точке (ξ, η, ζ) , равны $h_\xi d\xi, h_\eta d\eta, h_\zeta d\zeta$. Так как эти направления согласно нашему предположению взаимно перпендикулярны, то имеем следующую формулу для элемента дуги:

$$ds^2 = h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 + h_\zeta^2 d\zeta^2. \quad (1a)$$

Элементы поверхности, соответствующие попарно взятым дифференциалам, будучи

$$dS_\xi = h_\eta h_\zeta d\eta d\zeta, \quad dS_\eta = h_\xi h_\zeta d\xi d\zeta, \quad dS_\zeta = h_\xi h_\eta d\xi d\eta, \quad (1b)$$

а объем элементарного параллелепипеда с теми же сторонами

$$dV = h_\xi h_\eta h_\zeta d\xi d\eta d\zeta. \quad (1c)$$

Представим себе некоторое векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и обозначим проекции вектора \mathbf{A} в заданной точке $\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)$ на соответствующие координатные направления (отсчитываемые в сторону увеличения, ξ, η, ζ) через A_ξ, A_η, A_ζ . Поскольку мы ограничиваемся одной точкой, кривизна проходящих через нее координатных линий не играет роли. Для сумм, разностей и произведений двух различных векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} , относящихся к одной и той же точке, остаются действительными те же формулы, что и для обычных прямоугольных координат, а именно

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})_\xi = A_\xi \pm B_\xi \text{ и т. д.} \quad (2)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\xi B_\xi + A_\eta B_\eta + A_\zeta B_\zeta \quad (2a)$$

(в частности $A^2 = A_\xi^2 + A_\eta^2 + A_\zeta^2$) и

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\xi = A_\eta B_\zeta - A_\zeta B_\eta. \quad (2b)$$

Последние формулы справедливы только в том случае, когда три координатных направления в каждой точке образуют положительную или правую систему.

Если векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} относятся к различным точкам P и P' , обычные формулы, вообще говоря, уже неприменимы, так как координатные направления в P и P' различны. Желая, например, определить приращение $d\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \mathbf{A}$, испытываемое рассматриваемой векторной величиной при переходе от заданной точки P к соседней точке P' , нужно учесть то обстоятельство, что в действительности одному и тому же вектору \mathbf{A} в P и P' соответствуют различные составляющие A_ξ и A_ζ , и наоборот, постоян-

ным значениям составляющих $A_\xi = A'_\xi$, и т. д. соответствуют разные значения вектора \mathbf{A} .

На этом основании координатное представление дифференциальных операций $\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A}$ и $\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}$ в форме, подобной (2b) (как это имеет место в случае обычных прямоугольных координат) в случае криволинейных координат невозможно. Соответствующее представление получается проще всего тем же путем, что и в случае прямолинейных координат, а именно применением общих формул

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim \frac{1}{V} \oint A_n dS_n$$

и

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim \frac{1}{V} \oint \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS$$

или

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim \frac{1}{V} \oint A_\tau d\sigma_\tau$$

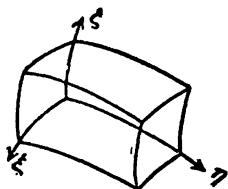


Рис. 48.

определяющих операции векторного дифференцирования (ср. т. I, стр. 10) к бесконечно малому искривленному параллелепипеду или прямоугольнику, образованному около рассматриваемой точки тремя парами координатных поверхностей ($\xi = \xi', \xi''$; $\eta = \eta', \eta''$; $\zeta = \zeta', \zeta''$) или двумя парами координатных линий (т. е. поверхностью координатного параллелепипеда) (рис. 48).

При этом из (1b) получаем

$$\oint A_n dS = \sum (A''_{\xi''} h''_{\eta''} h''_{\zeta''} - A'_{\xi'} h'_{\eta'} h'_{\zeta'}) \Delta \eta \Delta \zeta,$$

где знаки суммирования относятся к различным парам поверхностей и

$$\Delta \xi = \xi'' - \xi', \quad \Delta \eta = \eta'' - \eta', \quad \Delta \zeta = \zeta'' - \zeta';$$

т. е. по (1c)

$$\oint A_n dS = \sum \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi h_\eta h_\zeta) \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \zeta = \sum \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi h_\eta h_\zeta) \frac{\Delta V}{h_\xi h_\eta h_\zeta}$$

или

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\zeta A_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\zeta h_\xi A_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi h_\eta A_\zeta) \right]. \quad (3)$$

Для составляющих вектора $\text{rot } \mathbf{A}$ точно таким же путем находим следующие формулы:

$$\text{rot}_\xi \mathbf{A} = \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_\zeta A_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\eta A_\eta) \right] \text{ и т. д.} \quad (3a)$$

Что касается, наконец, составляющих вектора $\nabla\varphi$, то они определяются формулой

$$(\nabla\varphi)_\xi = \frac{\partial\varphi}{\partial s_\xi},$$

где ds_ξ и т. д. означают элементы координатных линий или по (1a):

$$\nabla_\xi\varphi = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial\varphi}{\partial \xi}. \quad (3b)$$

Подставляя эти выражения для составляющих вектора $\mathbf{A} = \nabla\varphi$ в (3), получаем оператор Лапласа в криволинейных координатах

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} \frac{\partial\varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\zeta h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial\varphi}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta} \frac{\partial\varphi}{\partial \zeta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3c)$$

Мы выпишем теперь вышеприведенные формулы для наиболее употребительных криволинейных координат.

1. Цилиндрические координаты (r, α, z) . Координатными поверхностями здесь являются: семейство коаксиальных цилиндров $r = \text{const}$, семейство плоскостей $\alpha = \text{const}$, проходящих через общую ось этих цилиндров (α — угол между этими меридиональными плоскостями и одной определенной из них) и, наконец, семейство плоскостей $z = \text{const}$, перпендикулярных к оси. Координатными линиями являются: двойное семейство радиальных прямых, двойное семейство коаксиальных кругов и двойное семейство осевых прямых, параллельных оси цилиндров.

Выражение для элемента дуги в цилиндрических координатах имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2. \quad (4)$$

Таким образом $h_r = 1$, $h_\alpha = r$, $h_z = 1$ и, следовательно,

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \\ \text{rot}_\alpha \mathbf{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \\ \text{rot}_z \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

$$\nabla_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \nabla_\alpha \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \nabla_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (4c)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4d)$$

2. Пространственные полярные или сферические координаты (R, θ, α) . Координатные поверхности следующие: семейство концентрических шаров $R = \text{const}$; семейство конусов $\theta = \text{const}$ с общей вершиной и осью (полярная ось); семейство меридиональных плоскостей $\alpha = \text{const}$.

Координатные линии: (R) — радиальные прямые, (θ) — меридиональные круги, (α) — параллельные круги. Элемент дуги выражается формулой

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\alpha^2, \quad (5)$$

что соответствует следующим значениям коэффициентов h :

$$h_R = 1, \quad h_\theta = R, \quad h_\alpha = R \sin \theta.$$

Отсюда далее следует:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_R \mathbf{A} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\alpha) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha} \right], \\ \text{rot}_\theta \mathbf{A} &= \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial R} (R A_\alpha) \right], \\ \text{rot}_\alpha \mathbf{A} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial (R A_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

$$\nabla_R \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial R}, \quad \nabla_\theta \varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \nabla_\alpha \varphi = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad (5c)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (R \varphi)}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5d)$$

Эти формулы мы отчасти уже применяли в главах V и VI, в особенности формулы (4b) и (5b) для $\text{rot}_z A$ в цилиндрических и сферических координатах и формулу (4d).

3. Конформно отображающие координаты (ξ, η, z) . Эти координаты получаются из обычных координат преобразованием вида

$$\xi + i\eta = F(x + iy) \quad \text{или} \quad x + iy = f(\xi + i\eta), \quad (6)$$

где F и f — произвольные аналитические функции. Полагая например

$$x + iy = re^{i\alpha} = e^{\lg r + i\alpha},$$

получим координаты $\xi = \lg r$, $\eta = \alpha$, которые от цилиндрических отличаются только тем, что радиус-вектор r заменен его логарифмом. Продифференцировав (6) и умножив на комплексно-сопряженное выражение, получим

$$(d\xi + id\eta)(d\xi - id\eta) = F'F'^*(dx + idy)(dx - idy)$$

т. е.

$$d\xi^2 + d\eta^2 = |F'|^2(dx^2 + dy^2)$$

или, проделав то же самое со вторым уравнением (6),

$$dx^2 + dy^2 = |f'|^2(d\xi^2 + d\eta^2), \quad (6a)$$

где f' и F' производные f и F по соответствующим комплексным аргументам:

$$x + iy = w \quad \text{и} \quad \xi + i\eta = \omega.$$

Квадрат элемента дуги

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

выражается следовательно в новых координатах формулой

$$ds^2 = |f'|^2(d\xi^2 + d\eta^2) + dz^2. \quad (6b)$$

Отсюда видно, во-первых, что новые координаты всегда, т. е. при произвольном виде функции F (или f), ортогональны, и во-вторых, что каждая бесконечно малая фигура на плоскости x, y преобразуется, или, как говорят, „отображается“ в совершенно подобную себе (в смысле равенства соответствующих углов) фигуру на плоскости ξ, η , причем величина

$$|f'| = \frac{1}{|F'|} = h \quad (6c)$$

играет роль масштабного множителя. Такое отображение называется конформным. Его специальный характер обуславливается тем, что координатные коэффициенты h_ξ и h_η равны, а именно по (6b) имеем

$$h_\xi = h_\eta = |f'|, \quad h_z = 1.$$

Формулы (3а, б, с, d) принимают при этом следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (hA_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (hA_\eta) \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_\xi \mathbf{A} &= \frac{1}{h} \frac{\partial A_z}{\partial \eta} - \frac{\partial A_\eta}{\partial z}, & \operatorname{rot}_\eta \mathbf{A} &= \frac{\partial A_\xi}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial A_z}{\partial \xi}, \\ \operatorname{rot}_z \mathbf{A} &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial (hA_\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial (hA_\xi)}{\partial \eta} \right], \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

$$\nabla_\xi \varphi = \frac{\partial \varphi}{h \partial \xi}, \quad \nabla_\eta \varphi = \frac{\partial \varphi}{h \partial \eta}, \quad \nabla_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (7b)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (7c)$$

Полагая здесь $\xi = \lg r$, $\eta = \alpha$, $h = r$, получим уже выведенные выше формулы для цилиндрических координат.

Другая часто применяемая координатная система определяется преобразованием

$$\omega = a_0 \cos i\omega, \quad \text{т. е. } x + iy = a_0 \cos (i\xi - \eta) \quad (8)$$

с вещественным коэффициентом a_0 , который представляет определенную длину (ξ и η — безразмерные числа).

Переходя к вещественным величинам и пользуясь формулами

$$\cos i\xi = \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2} = \cosh \xi, \quad \sin i\xi = i \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2} = i \sinh \xi,$$

получим

$$x = a_0 \cosh \xi \cos \eta, \quad y = a_0 \sinh \xi \sin \eta, \quad (8a)$$

или, в виду соотношений $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$, $\cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a_0^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{a_0^2 \sinh^2 \xi} &= 1, \\ \frac{x^2}{a_0^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{a_0^2 \sin^2 \eta} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

Последние уравнения показывают, что координатные поверхности $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ представляют собой конфокальные, (т. е. имеющие общие фокусы) эллиптические и гиперболические цилиндры с фокусным расстоянием $2a_0$. Линии ξ — гиперболы, линии η — эллипсы (рис. 49); они соответствуют прямым и кругам цилиндрической системы координат (r, α, z) .

Масштабный множитель рассматриваемой „эллиптической“ или „конфокальной“ системы координат равен

$$h = a_0 |\sin (i\xi - \eta)| = a_0 \sqrt{\sinh^2 \xi \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta}. \quad (8c)$$

Вместо координат (ξ, η) обычно вводят в качестве „эллиптических координат“ величины

$$u = \cosh \xi, \quad v = \cos \eta. \quad (9)$$

Умножив их на a_0 , получим полуоси x пересекающихся в точке (ξ, η) эллипса и гиперболы (8б). Обозначая расстояния точки пересечения от обоих фокусов через r_1 и r_2 , имеем следовательно

$$u = \frac{r_1 + r_2}{2a_0}, \quad v = \frac{r_1 - r_2}{2a_0}. \quad (9a)$$

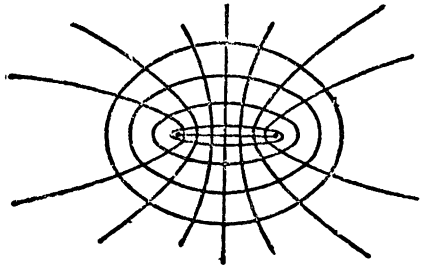


Рис. 49.

Так как u зависит только от ξ , а v только от η , то координатные плоскости и линии обеих систем (ξ, η) и (u, v) одни и те же. Далее, согласно (9) и (8с)

$$\begin{aligned} du &= \sinh \xi d\xi = \sqrt{u^2 - 1} d\xi, \\ dv &= -\sin \eta d\eta = -\sqrt{1 - v^2} d\eta, \\ h^2 &= a_0^2 [(u^2 - 1)v^2 + u^2(1 - v^2)] = a_0^2 (u^2 - v^2), \end{aligned}$$

откуда, в виду (6б)

$$ds^2 = a_0^2 (u^2 - v^2) \left(\frac{du^2}{u^2 - 1} + \frac{dv^2}{1 - v^2} \right) + dz^2, \quad (9b)$$

т. е.

$$h_u = a_0 \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{u^2 - 1}}, \quad h_v = a_0 \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{1 - v^2}}, \quad h_z = 1.$$

Мы не будем выписывать формул (3а, б, с, д) для этих систем координат, тем более что они непосредственно получаются из (7а, б, с), и ограничимся лишь выражением для $\nabla^2 \varphi$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{a_0^2 (u^2 - v^2)} \left[\sqrt{u^2 - 1} \frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{u^2 - 1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 - v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{1 - v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (9c) \end{aligned}$$

4. Координаты с осевой симметрией вращения (ξ, η, α) . Вращением плоской системы координат, имеющей ось симметрии (как например оси x или y в только что рассмотренной эллиптической системе координат), вокруг этой оси и добавлением азимутального угла α в качестве третьей координаты получается пространственная система координат с осевой симметрией. Ось вращения мы назовем осью z и будем рассматривать цилиндрическую систему координат (z, r, α) как основную систему этого рода. При этом в каждой меридиональной пло-

скости $\alpha = \text{const}$ величины (z, r) играют точно такую же роль, как и прямоугольные координаты (x, y) ; различные преобразования координат, при которых сохраняется осевая симметрия относительно оси z , сводятся к плоскому преобразованию

$$(z, r) \rightarrow (\xi, \eta)$$

точно также, как и в предыдущем случае. Разница заключается в том, что для элемента дуги мы получаем в рассматриваемом случае выражение

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\alpha^2,$$

вместо прежнего

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

В частности, для конформного преобразования вида

$$z + ir = f(\xi + i\eta) = f_1(\xi, \eta) + if_2(\xi, \eta) \quad (10)$$

вместо (6b) получаем

$$ds^2 = h^2 (d\xi^2 + d\eta^2) + f_2^2 d\alpha^2, \quad (10a)$$

где попрежнему h обозначает модуль производной $f(\xi + i\eta)$ по $\xi + i\eta$. Это приводит к тому, что формулы для $\text{div } \mathbf{A}$, $\text{rot } \mathbf{A}$ и т. д. имеют вид, значительно отличающийся от (7a, b, c), а именно по (3a, b, c, d):

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{rh^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (rhA_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (rhA_\eta) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \quad (10b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_\xi \mathbf{A} &= \frac{1}{hr} \frac{\partial}{\partial \eta} (rA_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_\eta}{\partial \alpha}, \\ \text{rot}_\eta \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_\xi}{\partial \alpha} - \frac{1}{hr} \frac{\partial (rA_\alpha)}{\partial \xi}, \\ \text{rot}_\alpha \mathbf{A} &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (hA_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (hA_\xi) \right], \end{aligned} \right\} \quad (10c)$$

$$\nabla \varphi = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \nabla_\eta \varphi = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \nabla_\alpha \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad (10d)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{rh^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (10e)$$

В случае сферидальных координат (u, v, α) , определяющихся формулами

$$z + ir = a_0 \cos i(\xi + i\eta) = a_0 [uv + i\sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)}], \quad (11)$$

$$(u = \cosh \xi, \quad v = \cos \eta),$$

т. е.

$$z = a_0 uv, \quad r = a_0 \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{1 - v^2}, \quad (11a)$$

мы получаем, например, следующее выражение для $\nabla^2\varphi$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{a_0^2(u^2 - v^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[(u^2 - 1) \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[(1 - v^2) \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right] \right\} + \frac{1}{a_0^2(u^2 - 1)(1 - v^2)} \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}. \quad (11b)$$

Стоящее в скобках выражение отличается от соответствующего выражения в (9с) членами

$$u \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - v \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}.$$

Заметим что поверхности $u = \text{const}$ представляют собой вытянутые конфокальные эллипсоиды вращения с фокусным расстоянием $2a_0$, а поверхности $v = \text{const}$ — ортогональные к ним двуполые гиперболоиды вращения.

Переставляя выражения (11а) для z и r , т. е. с помощью преобразования

$$i(z + ir) = iz - r = a_0 \cos i(\xi + i\eta) = a_0 \cos(i\xi - \eta), \\ \cosh \xi = u, \quad \cos \eta = v,$$

получим вместо вытянутых сплюснутые эллипсоиды вращения с общим „фокусным диском“ в виде перпендикулярного к оси вращения круга радиуса a_0 .

5. Эллипсоидальная (конфокальная) система координат. Представим себе трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (12)$$

и рассмотрим семейство поверхностей, получающихся из него изменением a^2, b^2, c^2 на одну и ту же величину s , т. е. соответствующие „конфокальные поверхности“

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1. \quad (12a)$$

Мы будем считать, что a означает наибольшую, b — среднюю и c — наименьшую полуоси эллипсоида (12), т. е. что

$$a > b > c.$$

Пока параметр s меняется в интервале $(-c^2, +\infty)$, поверхности (12а) представляют собой эллипсоиды; при крайних значениях этого интервала получаем бесконечно большой шар ($s = \infty$) или лежащий в плоскости xu эллипс с полуосями $a^2 - c^2, b^2 - c^2$. Изменению s в интервале $(-b^2, -c^2)$ соответствует семейство однополых гиперболоидов

$$\frac{x^2}{|a^2 + s|} + \frac{y^2}{|b^2 + s|} - \frac{z^2}{|c^2 + s|} = 1,$$

крайними формами которых являются вышеуказанный эллипс и (при $s = -b^2$) лежащая в плоскости xu гипербола

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1.$$

При дальнейшем уменьшении s получим двупольные гиперболоиды, которые при $s = -a^2$, уходят в бесконечность. Отрицательным значениям s , меньшим чем $-a^2$, соответствуют мнимые точки.

Таким образом, семейство поверхностей (12а) состоит фактически из трех различных семейств. При этом через каждую точку проходит по одной поверхности каждого семейства, т. е. один эллипсоид, один однополюый и один двупольный гиперболоид. Три значения s , которыми характеризуются эти пересекающиеся в точке P поверхности, могут, следовательно, рассматриваться как координаты этой точки. Мы обозначим их через u , v , w ; они являются тремя корнями уравнения (12а) при заданных значениях x , y , z . При этом u означает корень, лежащий в интервале $(-c^2, +\infty)$, v соответствует интервалу $(-b^2, -c^2)$ и w — интервалу $(-a^2, -b^2)$.

Легко показать, что определенная таким образом система координат ортогональна. Мы сначала выразим x , y , z через u , v , w . Это проще всего сделать следующим образом. Функция

$$(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s) \left[1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right]$$

является целым полиномом третьей степени с главным членом s^3 и с тремя корнями u , v , w . Она, следовательно, должна быть равна произведению

$$(s - u)(s - v)(s - w).$$

Мы имеем таким образом тождество

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} = \frac{(s - u)(s - v)(s - w)}{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}. \quad (12b)$$

Умножая его на $a^2 + s$ и полагая затем $s = -a^2$, получим

$$x^2 = \frac{(a^2 + u)(a^2 + v)(a^2 + w)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}. \quad (13)$$

Подобные же выражения получаются для y^2 и z^2 . Отсюда, путем дифференцирования по u , v , w , будем иметь:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_u = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + u}, \quad x_v = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + v}, \quad x_w = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + w},$$

$$y_u = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2 + u}, \quad y_v = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2 + v} \text{ и т. д.}$$

Эти величины определяют, очевидно, направляющие косинусы координатных линий в рассматриваемой точке (x, y, z) . Далее имеем

$$x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \\ = \frac{1}{4} \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + u)(a^2 + v)} + \frac{y^2}{(b^2 + u)(b^2 + v)} + \frac{z^2}{(c^2 + u)(c^2 + v)} \right\},$$

т. е. по (13)

$$x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \\ = \frac{1}{4} \left\{ \frac{a^2 + w}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + \frac{b^2 + w}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \right. \\ \left. + \frac{c^2 + w}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \right\} \equiv 0.$$

Тем самым доказана ортогональность нашей системы координат. Таким же путем получаем

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right\},$$

т. е.

$$h_u^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(a^2 + v)(a^2 + w)}{(a^2 + u)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + \frac{(b^2 + v)(b^2 + w)}{(b^2 + u)(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \right. \\ \left. + \frac{(c^2 + v)(c^2 + w)}{(c^2 + u)(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \right\},$$

или, наконец

$$\left. \begin{aligned} h_u^2 &= \frac{(u - v)(u - w)}{4(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)} \\ h_v^2 &= \frac{(v - u)(v - w)}{4(a^2 + v)(b^2 + v)(c^2 + v)} \\ h_w^2 &= \frac{(w - u)(w - v)}{4(a^2 + w)(b^2 + w)(c^2 + w)} \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

Положив для сокращения $T_s = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}$, получим согласно (3d) следующее выражение для Лапласова оператора:

$$\nabla^2 \varphi = 4 \left\{ \frac{T_u}{(u - v)(u - w)} \frac{\partial}{\partial u} \left(T_u \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \right. \\ \left. + \frac{T_v}{(v - u)(v - w)} \frac{\partial}{\partial v} \left(T_v \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{T_w}{(w - u)(w - v)} \frac{\partial}{\partial w} \left(T_w \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right\} \quad (13b)$$

Соответствующих выражений для $\operatorname{div} \mathbf{A}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ мы выписывать не будем.

Так как величины T_u, T_v, T_w зависят только от соответствующих координат u, v, w , то представляется естественным вместо последних ввести переменные

$$\xi = \int_u^{\infty} \frac{du}{T_u}, \quad \eta = \int_v^{\infty} \frac{dv}{T_v}, \quad \zeta = \int_w^{\infty} \frac{dw}{T_w}. \quad (13c)$$

Тогда $\nabla^2 \varphi$ принимает следующий вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{4}{(u-v)(v-w)(w-u)} \left\{ (w-v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + (u-w) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (v-u) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right\}. \quad (13d)$$

§ 2. Статические задачи; разложение по основным гармоническим функциям.

1. Постановка задачи и простейший метод решения. Электростатические (точно так же как магнитостатические и гальванические) проблемы с математической точки зрения сводятся к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (14)$$

при определенных условиях, которые могут быть сформулированы следующим образом:

1) Функция φ в рассматриваемой (конечной или бесконечной) области пространства должна быть конечна, однозначна и непрерывна.

2) На границах этой области или на заданных поверхностях S_α , которые отделяют друг от друга различные однородные тела, нормальная составляющая градиента φ должна претерпевать скачок. Граничные значения потенциала или величина скачка при этом, вообще говоря, не задаются, а определяются косвенно из уравнений

$$\varphi = \varphi_\alpha + c, \quad (14a)$$

$$\Delta (\mathbf{n} \nabla \varphi) = f_\alpha. \quad (14b)$$

Граничное условие (14a) соответствует случаю проводящей поверхности, причем φ_α означает заданную функцию (если φ представляет собой потенциал вторичного поля, соответствующий данному первичному полю) и c неопределенную постоянную (или нуль, если φ_α является заданной постоянной), а условие (14) относится к поверхности раздела двух диэлектриков, причем f_α есть заданная функция [например $(\epsilon - 1)E_n^0$].

3) В бесконечности функция φ должна либо исчезать (вторичное поле) либо принимать заданное значение (первичный потенциал).

Решение этой задачи проще всего достигается, если удастся найти соответствующую поверхностям разрыва систему координат. Чтобы это показать, рассмотрим случай заряженного изолированного проводника эллипсоидальной формы (с полуосями a, b, c). Вводя координаты, определяемые (13с), получим для его поля уравнение

$$(w - v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + (u - w) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (v - u) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Простейшие частные интегралы последнего будут

$$\varphi = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi = \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta,$$

где α, β, γ означают постоянные коэффициенты. При этом помноженная на постоянную координата ξ сразу дает искомое решение, так как на поверхности рассматриваемого эллипсоида она принимает постоянное значение

$$\xi = \int_0^{\infty} \frac{du}{T_u}$$

и на бесконечности исчезает. Мы можем следовательно положить

$$\varphi = \alpha \int_u^{\infty} \frac{du}{T_u},$$

причем постоянная α определяется общим зарядом эллипсоида e , так, чтобы для очень удаленных точек потенциал φ имел вид $\frac{e}{R}$. Так как такие точки соответствуют очень большим значениям u , то

$$\varphi \cong \alpha \int_u^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{u}};$$

В этом случае u , очевидно, есть не что иное, как квадрат расстояния [согласно определяющему уравнению (12а)]. Мы получаем, следовательно, $2\alpha = e$ в согласии с формулой (81b) последней главы.

2. Общие свойства основных гармонических функций; шаровые функции. Очень существенное вспомогательное средство для решения более сложных статических задач при определенных (ортогональных) координатах ξ, η, ζ представляют относящиеся к этим координатам основные гармонические функции. Так называются простейшие

функции $\psi(\xi, \eta, \zeta)$, которые вместе со своим градиентом остаются однозначными, конечными и непрерывными во всем пространстве и удовлетворяют уравнению $\nabla^2\varphi = 0$ за исключением отдельных точек, линий или поверхностей (но не объемов), положение которых определяется характером рассматриваемой системы координат. Эти „особенные места“ или „полюсы“ могут лежать как в конечной области, так и на бесконечности. Соответственно этому следует различать два рода основных функций. Функции второго рода $\psi^{(2)}(\xi, \eta, \zeta)$ имеют полюс (или несколько полюсов) в конечной области, тогда как в бесконечности они исчезают. Функции первого рода $\psi^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$, напротив, в конечной области ведут себя регулярно и имеют полюс в бесконечности (где они достигают бесконечно больших значений).

Мы примем, что поверхности $\xi = \text{const}$ замкнуты и, следовательно, лежат одна в другой. Самая внутренняя из них должна очевидно стягиваться к одной точке (центр шара в случае полярных координат с $\xi = R$) или к линии (например ось цилиндра $r = 0$ в случае цилиндрических координат или фокусная линия при вытянутых эллипсоидах) или, наконец, к поверхности, не охватывающей никакого объема (например эллипсы $u = -c^2$ в эллипсоидальной системе координат u, v, w). Значение ξ для какой-либо поверхности $\xi = \text{const}$ дает, следовательно, меру ее удаления от этой самой внутренней вырожденной „нулевой поверхности“. Две другие координаты η, ζ определяют при этом положение рассматриваемой точки на поверхности $\xi = \text{const}$, т. е. они играют роль угловых координат, к которым они сводятся в случае полярной системы координат.

Гармонические основные функции обоих родов в большинстве случаев могут быть представлены в виде произведения функций $U(\xi)$ от „координаты расстояния“ ξ и функции $T(\eta, \zeta)$ от обеих „угловых координат“ η, ζ . При этом легко показать, что каждой функции $T(\eta, \zeta)$ соответствуют две различные функции $U^{(1)}(\xi)$ и $U^{(2)}(\xi)$ с особенным местом либо на нулевой поверхности либо на бесконечности. Это следует из того, что согласно (3с) функция расстояния $U(\xi)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d}{d\xi} \left(p(\xi) \frac{dU}{d\xi} \right) + q(\xi) U = 0 \quad (15)$$

(см. ниже).

Если $U^{(1)}$ есть одно из решений этого уравнения, то второе независимое от него решение можно искать в виде $U^{(2)} = U^{(1)}A$, причем для неизвестной функции $A(\xi)$ получается уравнение

$$U^{(1)} \frac{d}{d\xi} \left(p \frac{dA}{d\xi} \right) + 2p \frac{dU^{(1)}}{d\xi} \frac{dA}{d\xi} = 0.$$

Отсюда следует, если положить $p \frac{dA}{d\xi} = E$

$$\frac{dB}{B} + \frac{2dU^{(1)}}{U^{(1)}} = 0,$$

т. е. $B = \frac{1}{U^{(1)2}}$; далее $A = \int \frac{d\xi}{pU^{(1)2}}$ или, окончательно,

$$U^{(2)} = U^{(1)} \int \frac{d\xi}{pU^{(1)2}}. \quad (15a)$$

Если функция $U^{(1)}$ выбрана так, что на бесконечности она становится бесконечно большой, то интегрирование должно производиться от рассматриваемой точки ξ до бесконечности. При этом функция $U^{(2)}$ обращается в бесконечность на „нулевой поверхности“, и на бесконечности исчезает. Функции

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) &= U^{(1)}(\xi) \cdot T(\eta, \zeta) \\ \psi^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) &= U^{(2)}(\xi) \cdot T(\eta, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

таким образом действительно представляют собой обе относящиеся к основной функции T основные гармонические функции.

Рассмотрим, например, случай полярной системы координат ($\xi = R, \eta = \theta, \zeta = \alpha$). Согласно (5d) имеем при $\varphi = U(R)T(\theta, \alpha)$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{T}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dU}{dR} \right) + \frac{U}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{U}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$-\frac{1}{U} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dU}{dR} \right) = \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} \right\} = -C, \quad (16)$$

где C означает постоянную, независимую от R, θ и α .

Полагая

$$U^{(1)} = R^n \quad (n \text{ — положительное число или нуль}), \quad (16a)$$

получаем

$$\frac{1}{U^{(1)}} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dU^{(1)}}{dR} \right) = n(n+1) = C,$$

так что функция $U^{(1)}$ действительно является решением рассматриваемого уравнения. Второе решение, относящееся к той же угловой функции T , согласно (15a) выражается с точностью до постоянного множителя следующим образом:

$$U^{(2)} = \frac{1}{R^{n+1}}. \quad (16b)$$

Что же касается угловой функции, то она определяется уравнением

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + n(n+1)T = 0. \quad (17)$$

В первом томе (гл. IV, §§ 3 и 4) мы показали, что потенциал произвольной системы электрических зарядов, находящихся вне (или внутри) некоторого шара, т. е. любую функцию φ , которая внутри (или вне) этого шара остается регулярной и удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

можно разложить в ряд вида

$$\varphi = \frac{H_0}{a} + H_1 \frac{R}{a^3} + H_2 \frac{R^2}{a^5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{R}{a^{2n+1}}$$

или

$$\varphi = \frac{H_0}{R} + \frac{H_1}{R^2} + \frac{H_2}{R^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{R^{n+1}},$$

причем коэффициенты этого ряда являются определенными функциями направляющих косинусов вектора \mathbf{R} или угловых переменных θ , α ; мы их назвали шаровыми функциями соответственного порядка. Каждый член этого ряда (φ_n) по определению должен удовлетворять уравнению $\nabla^2 \varphi_n = 0$ [ср. формулы (7) и (8), т. I, стр. 107]. Отсюда следует, что шаровые функции n -го порядка H_n должны удовлетворять дифференциальному уравнению (17) или, другими словами, что это уравнение при целом n представляет дифференциальное уравнение шаровых функций.

Можно легко показать, что хотя оно имеет смысл при нецелочисленных значениях n , однако соответствующие обобщенные шаровые функции многозначны. Такие нецелочисленные значения n исключаются следовательно условием однозначности, которому должен удовлетворять потенциал φ . В этом смысле можно сказать, что значения параметра C в (16)

$$C = n(n+1)$$

(n — целое число), представляют „собственные значения“ второго уравнения (16), а шаровые функции — соответствующие собственные или „характеристические“ функции (ср. гл. V, § 5).

Если ввести вместо θ переменную $v = \cos \theta$, то уравнение (17) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(1 - v^2 \right) \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{1}{1 - v^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + n(n+1)T = 0. \quad (17a)$$

При $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0$ оно сводится к уравнению

$$\frac{d}{dv} (1 - v^2) \frac{dT}{dv} + n(n+1)T = 0, \quad (17b)$$

решением которого являются определенные в I томе полиномы Лежандра [стр. 105, формула (5b)], как легко непосредственно убедиться, положив

$$T = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$$

Полиномы Лежандра, которые мы в дальнейшем будем обозначать символом $P_n(v)$, являются простейшими частными решениями уравнения (17a). Более общие решения получаются в виде

$$T = V(v) W(x),$$

что дает

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dv} (1 - v^2) V + \frac{1}{1 - v^2} \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{dx^2} + n(n+1) = 0, \quad (18)$$

т. е.

$$\frac{1}{W} \frac{d^2 W}{dx^2} = C = \text{const} \quad (18a)$$

и

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dv} [(1 - v^2)V] + \frac{C}{1 - v^2} + n(n+1) = 0. \quad (18b)$$

Чтобы функция W была однозначна и конечна, нужно, очевидно, положить $C = -m^2$, где m целое число (положительное или нуль). При этом будем иметь

$$W = \cos mx, \quad W = \sin mx \quad \text{или} \quad W = e^{\pm imx} \quad (18c)$$

(постоянные множители мы опускаем). Соответствующими решениями уравнения (18b), как легко показать, являются функции

$$V = (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dv^m} P_n(v) \equiv P_n^{(m)}(v). \quad (18d)$$

На доказательстве этой формулы мы не будем останавливаться¹ и ограничимся лишь указанием на то, что каждому значению n соответствует $(2n + 1)$ различных независимых (конечных и однозначных) частных решений уравнения (17a), а именно:

$P_n(v)$, $P_n^{(1)}(v) \cos \alpha$, $P_n^{(1)}(v) \sin \alpha$, . . . , $P_n^{(n)}(v) \cos n\alpha$, $P_n^{(n)}(v) \sin n\alpha$. [P_n полином n -го порядка, так что $P_n^{(n+1)}(v) = 0$]. С другой сто-

¹ Оно может быть получено, например, разложением V в степенной ряд и сравнением таких рядов для двух последовательных значений m (при неизменном n).

роны мы видели в I томе, что каждая шаровая функция n -го порядка характеризуется совокупностью $2n + 1$ независимых постоянных, а именно $2n$ углами $\theta_k, \alpha_k (k=1, \dots, n)$, определяющими направление ее n осей, и абсолютным значением ее момента ($p^{(n)}$). Следовательно, произвольную шаровую функцию n -го порядка можно представить в виде суммы вышеприведенных специальных шаровых функций того же порядка:

$$T_n = A_0 P_n + \sum_1^m (A_m \cos m\alpha + B_m \sin m\alpha) P_n^{(m)}(\vartheta) \quad (19)$$

с надлежащим образом выбранными коэффициентами A_m, B_m .

Эти специальные шаровые функции $T_n^{(m)}$ отличаются тем, что все они друг к другу „ортогональны“ в смысле соотношения

$$\oint T_n^{(m)} T_{n'}^{(m')} dS = 0, \quad (19a)$$

при $n \neq n'$ или $m \neq m'$. Здесь $dS = \sin \theta d\theta da$ означает элемент поверхности единичного шара.

Формула (19a) остается справедливой и в случае $n = n'$ и $m = m'$, если одна из функций имеет множитель $\cos m\alpha$, а другая $\sin m\alpha$.

Приведенные результаты легко обобщаются на случай произвольных угловых функций $T(\eta, \zeta)_1$. А именно, пусть

$$\psi_1 = U_1(\xi) T_1(\eta, \zeta)$$

и

$$\psi_2 = U_2(\xi) T_2(\eta, \zeta)$$

будут две основные гармонические функции рассматриваемой координатной системы, соответствующие двум различным функциям расстояния $U(\xi)$ первого рода.

Тогда к любой лежащей на конечном расстоянии области применима формула преобразования:

$$\int (\psi_1 \nabla^2 \psi_2 - \psi_2 \nabla^2 \psi_1) dV = \oint \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right) dS$$

или, так как $\nabla^2 \psi_1 = \nabla^2 \psi_2 = 0$,

$$\oint \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Теперь представим себе, что поверхность S совпадает с поверхностью $\xi = \text{const}$ ($= \xi_0$). Тогда

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{h\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{T}{h\xi} \frac{dU}{d\xi},$$

и следовательно

$$\oint \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right) dS = \left(U_1 \frac{dU_2}{d\xi} - U_2 \frac{dU_1}{d\xi} \right) \oint T_1 T_2 \frac{dS}{h\xi}.$$

или, наконец,

$$\oint T_1 T_2 \frac{dS}{h_\xi} = \int \int T_1 T_2 \frac{h_\eta h_\xi}{h_\xi} d\eta d\xi = 0. \quad (19b)$$

Можно далее показать, что каждой функции расстояния $U_n(\xi)$ соответствует (при правильном индицировании) $2n+1$ независимых угловых функций T_n^m , которые также могут быть ортогонализированы в смысле уравнения (19b). Так как эти функции определяются лишь с точностью до постоянного множителя, мы можем ввести дополнительные „нормирующие условия“, т. е. входящие в (19b) интегралы при $T_1 = T_2$ положить равными 1.

3. Решение электростатических задач разложением потенциала по гармоническим основным функциям. Посредством „нормированных“ угловых функций и нормированных с помощью условия $U=1$ для $\xi=\xi_0$ функций расстояния любую гармоническую функцию, ведущую себя регулярно внутри или вне поверхности $\xi=\xi_0$, можно представить в виде ряда

$$\varphi = \sum_n \sum_m C_n^m U_n T_n^m, \quad (20)$$

где $U=U^{(1)}$ в первом и $U=U^{(2)}$ во втором случае, а C_n^m — определенные коэффициенты, характеризующие свойства функции φ . Если граничные значения этой функции (φ_ξ) известны, то эти коэффициенты можно определить формулой

$$C_n^m = \oint \varphi_\xi T_n^m \frac{dS}{h_\xi}, \quad (20a)$$

которая является непосредственным следствием ортогональности функций T_n^m и их нормировки.¹

Таким путем можно, например, решить задачу о действии заданного первичного поля φ^0 на проводник, потенциал которого поддерживается постоянным, т. е. имеет определенное значение φ_ξ .

Если электрические заряды, создающие первичное поле, находятся вне рассматриваемой проводящей поверхности $\xi = \text{const}$, то их потенциал внутри этой поверхности, а также на самой поверхности может быть представлен рядом

$$\varphi^0 = \sum_n \sum_m C_n^m U_n^{(1)} T_n^m, \quad (20b)$$

коэффициенты которого могут быть выражены через φ_ξ^0 (граничные значения φ^0) по формуле (20a).

¹ Функции T_n^m , соответствующие различным значениям m , мы будем считать различными.

Значения вторичного потенциала внутри проводника должны очевидно равняться

$$\varphi'_{\text{внутри}} = \varphi_{\xi} - \varphi^0 = \varphi_{\xi} U_0^{(1)} - \sum \sum C_n^m U_n^{(1)} T_n^m \quad (20c)$$

(при условии $U_0^{(1)} = 1$ и $T_0 = 1$). Граничные значения получаются из этой формулы, если положить $U_n^{(1)} = 1$; чтобы определить внешнее поле проводника, нам нужно просто заменить функции расстояния первого рода функциями второго рода (если на поверхности $\xi = \text{const}$, $U^{(2)} = 1$). Мы имеем следовательно:¹

$$\varphi'_{\text{снаружи}} = \varphi_{\xi} U_0^{(2)} - \sum \sum C_n^m U_n^{(2)} T_n^m. \quad (20d)$$

Плотность заряда вычисляется отсюда обычным путем, т. е. по формуле

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\text{снаружи}} \quad (\varphi = \varphi^0 + \varphi')$$

или по (20b) и (20d):

$$\eta = -\frac{1}{4\pi h_{\xi}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{4\pi h_{\xi}} \left\{ -\varphi_{\xi} \frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} + \sum \sum C_n^m \left(\frac{dU_n^{(2)}}{d\xi} - \frac{dU_n^{(1)}}{d\xi} \right) T_n^m \right\}.$$

Нужно заметить, что функция $U_0^{(2)}(\xi)$ представляет внешний потенциал проводника, если его поверхность имеет потенциал 1 при $\varphi^0 = \text{const}$, т. е. при отсутствии первичного поля. Соответствующий заряд равен очевидно емкости проводника K . Для последней мы, следовательно, получаем формулу:

$$K = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right) \int \frac{dS}{h_{\xi}} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right) \int \int \frac{h_{\eta} h_{\zeta}}{h_{\xi}} d\eta d\zeta.$$

Рассмотрим теперь несколько более общую задачу однородного диэлектрика с поверхностью $\xi = \text{const} = \xi_0$ в заданном первичном поле.

Формула (20b) остается при этом неизменной. Однако для вторичного потенциала мы должны ввести новые коэффициенты D_n^m , т. е. положить:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{\text{внутри}} &= \sum \sum D_n^m U_n^{(1)} T_n^m, \\ \varphi'_{\text{снаружи}} &= \sum \sum D_n^m U_n^{(2)} T_n^m. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Эти коэффициенты мы определим из граничного условия

$$\nabla_n'_{\text{снаружи}} - \epsilon \nabla_n'_{\text{внутри}} = (\epsilon - 1) \nabla_n \varphi^0, \quad (\xi = \xi_0),$$

¹ Ср. т. I, стр. 114, 119.

которое в рассматриваемом случае принимает вид:

$$D_n^m \left(\frac{dU_n^{(2)}}{d\xi} - \varepsilon \frac{dU_n^{(1)}}{d\xi} \right)_0 = (\varepsilon - 1) C_n^m \left(\frac{dU_n^{(1)}}{d\xi} \right)_0. \quad (21a)$$

Эту задачу легко обобщить еще далее, а именно на случай диэлектрической оболочки, ограниченной изнутри поверхностью $\xi = \xi_1$ а извне поверхностью $\xi = \xi_2 > \xi_1$ (например сферическая или эллипсоидальная оболочка и т. д.). При этом для вторичного потенциала мы должны положить:

$$\left. \begin{aligned} (\xi \leq \xi_1): \quad \varphi' &= \sum \sum A_n^m U_n^{(1)} T_n^m, \\ (\xi_2 \geq \xi \geq \xi_1): \quad \varphi' &= \sum \sum (A_n^m U_n^{(1)} + B_n^m U_n^{(2)}) T_n^m, \\ (\xi \geq \xi_2): \quad \varphi' &= \sum \sum B_n^m U_n^{(2)} T_n^m, \end{aligned} \right\} \quad (21b)$$

с условиями

$$\left. \begin{aligned} A_n^m U_n^{(1)} &= A_n^m U_n^{(1)} + B_n^m U_n^{(2)}, \\ \varepsilon \left(A_n^m \frac{dU_n^{(1)}}{d\xi} + B_n^m \frac{dU_n^{(2)}}{d\xi} \right) - A_n^m \frac{dU_n^{(1)}}{d\xi} &= -(\varepsilon - 1) C_n^m \frac{dU_n^{(1)}}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (21c)$$

для $\xi = \xi_1$ и

$$\left. \begin{aligned} A_n^m U_n^{(1)} + B_n^m U_n^{(2)} &= B_n^m U_n^{(2)}, \\ -\varepsilon \left(A_n^m \frac{dU_n^{(1)}}{d\xi} + B_n^m \frac{dU_n^{(2)}}{d\xi} \right) + B_n^m \frac{dU_n^{(2)}}{d\xi} &= (\varepsilon - 1) C_n^m \frac{dU_n^{(1)}}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (21d)$$

для $\xi = \xi_2$.

Например, в случае сферической оболочки с радиусами a_1 и a_2 , находящейся в однородном первичном поле, имеем, если полярную ось ($\theta = 0$) направить по полю:

$$\varphi^0 = C_1^0 U_1^{(1)} T_1^0 = -E^0 R \cos \theta,$$

и соответственно этому:

$$\begin{aligned} (R \leq a_1): \quad \varphi' &= AR \cos \theta, \\ (a_2 \geq R \geq a_1): \quad \varphi' &= \left(A'R + \frac{B'}{R^2} \right) \cos \theta, \\ (R \geq a_2): \quad \varphi' &= \frac{B}{R^2} \cos \theta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Aa_1 &= A'a_1 + \frac{B'}{a_1^2}, \quad \varepsilon \left(A' - \frac{2B'}{a_1^3} \right) - A = (\varepsilon - 1) E^0, \\ A'a_2 + \frac{B'}{a_2^2} &= \frac{B}{a_2^2}, \quad -\varepsilon \left(A' - \frac{2B'}{a_2^3} \right) - \frac{2B}{a_2^3} = -(\varepsilon - 1) E^0. \end{aligned}$$

Отсюда после простого вычисления получаем следующее выражение для полной напряженности поля $E^0 + E'$ во внутренней полости ($R < a_1$):

$$E = \frac{E^0}{1 + \frac{2}{9} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^3 \right]}.$$

Если ε очень велико, то E очень мало и притом тем меньше, чем меньше $\frac{a_1}{a_2}$, т. е. чем толще оболочка.

Хотя изложенный метод особенно удобен при рассмотрении тел, поверхность которых совпадает с одной (или с двумя) из координатных поверхностей $\xi = \text{const}$, он может применяться и в тех случаях, когда поверхность S более или менее отличается от этих поверхностей. Мы получаем при этом своего рода „возмущенную“ задачу, которая последовательными приближениями может быть решена сколь угодно точно.

Мы примем сперва, что указанное отклонение очень мало и разложим разность $\xi' - \xi_0$, где ξ' — координата точки S , а ξ_0 — соответствующей точки поверхности $\xi = \text{const}$, в ряд

$$\xi' - \xi_0 = \sum \sum E_n^m T_n^m(\eta, \zeta), \quad (22)$$

коэффициенты которого будем рассматривать как бесконечно малые первого порядка.

Предположим, что S есть проводящая поверхность с заданным потенциалом, равным 1, и что речь идет об определении распределения заряда и создаваемого им внешнего поля.

Для потенциала этого поля мы положим

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \sum \sum C_n^m U_n^{(2)}(\xi) T_n^m(\eta, \zeta)$$

и определим коэффициенты C_n^m так, чтобы

$$\varphi(\xi', \eta, \zeta) = 1.$$

Для этого разложим $U_n^{(2)}(\xi')$ по степеням разности $\xi' - \xi_0$ и сохраним лишь величины первого порядка относительно коэффициентов E_n^m .

При этом получим:

$$U_n^{(2)}(\xi') = U_n^{(2)}(\xi_0) + \left(\frac{dU_n^{(2)}}{d\xi} \right)_0 \sum_{n'} \sum_{m'} E_{n'}^{m'} T_{n'}^{m'}$$

и следовательно при $U_n^{(2)}(\xi_0) = 1$:

$$1 = \sum_n \sum_m C_n^m \left[1 + \left(\frac{dU_n^{(2)}}{d\xi} \right)_0 \sum_{n'} \sum_{m'} E_{n'}^{m'} T_{n'}^{m'} \right] T_n^m. \quad (22a)$$

Произведения $T_n^m T_{n'}^{m'}$ могут быть представлены как линейные комбинации угловых функций различного порядка (до $n+n'$), так что правая сторона этого уравнения может быть преобразована в простой ряд вида $\sum_n \sum_m D_n^m T_n^m$, с коэффициентами D , выражающимися линейно через неизвестные коэффициенты C_n^m . При этом должно быть $D_n^m = 0$ для всех значений n и m , за исключением $n=m=0$, когда $D=1$ ($T_0^0=1$). Из этих уравнений можно определить коэффициенты C_n^m .

Последние, за исключением C_0^0 , должны быть того же порядка величины, что и коэффициенты E_n^m . Действительно, приведенный выше ряд для $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ при $E_n^m=0$, т. е. при $\xi'=\xi_0$, сводится к единственному члену $U_0^{(2)} T_0^0 = U_0^{(2)}$. Мы можем поэтому в первом приближении заменить формулу (22a) через

$$1 = C_0^0 + C_0^0 \left(\frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right)_0 \sum_n \sum_m' E_n^m T_n^m + \sum_n \sum_m' C_n^m T_n^m, \quad (22b)$$

где штрих при знаке суммы означает отсутствие члена с $n=m=0$. Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} & C_0^0 \left[1 + \left(\frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right)_0 E_0^0 \right] = 1 \\ & C_n^m = -C_0^0 \left(\frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right)_0 E_n^m \end{aligned} \right\} \quad (22c)$$

Этот метод легко обобщается на случай наличия произвольного первичного поля. А именно в этом случае нужно левую сторону (22a) заменить на $\varphi_\xi - \varphi^0$ (φ_ξ — результирующий потенциал проводника), а первичный потенциал φ^0 разложить в ряд обычного вида (20b), но уже с известными коэффициентами вместо коэффициентов C_n^m .

Подобным путем можно решать и более сложные задачи с диэлектрическими телами или оболочками.

Мы рассмотрим, например, случай сферического конденсатора, когда внешний шар (радиуса b) не вполне концентричен с внутренним (радиуса a). Обозначим смещение внешнего шара через δ ; тогда в первом приближении его поверхность можно представить уравнением:

$$R = b + \delta \cdot P_1 = b + \delta \cos$$

(P_1 — полином Лежандра первого порядка). Для потенциала в промежуточном пространстве положим

$$\varphi = \frac{A}{R} + \frac{B}{R^2} \cos \theta + C + DR \cos \theta,$$

где B и D — малые величины, с граничными условиями $\varphi = 1$ на внутреннем и $\varphi = 0$ на внешнем шаре. Это дает:

$$1 = \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} \cos \theta + C + Da \cos \theta$$

и (в первом приближении)

$$0 = \frac{A}{b} \left(1 - \frac{\delta}{b} \cos \theta\right) + \frac{B \cos \theta}{b^2} + C + Db \cos \theta.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при $\cos \theta$, находим

$$\frac{A}{a} + C - 1 = 0, \quad \frac{B}{a^2} + Da = 0, \quad \frac{A}{b} + C = 0,$$

$$-\frac{\delta A}{b^2} + \frac{B}{b^2} + Db = 0.$$

Для коэффициента A получается при этом „невозмущенное“ значение $\frac{b-a}{ab}$, откуда следует, что емкость сферического конденсатора в первом приближении не меняется от небольшого относительного смещения шаров. Легко показать, что этот результат справедлив для конденсаторов любой формы.

4. Основные гармонические функции для сферических и цилиндрических координат. Мы видим, таким образом, что основные проблемы электростатики (ср. гл. VI, § 7) могут быть решены без затруднений, если: 1) найдена такая ортогональная система координат, чтобы поверхности $\xi = \text{const}$ по крайней мере приблизительно совпадали с поверхностями раздела рассматриваемых тел и 2) если найдены основные гармонические функции этой координатной системы, т. е. все независимые друг от друга частные решения уравнения $\nabla^2 \psi = 0$ вида

$$\psi = U(\xi) T(\eta, \zeta) = U(\xi) V(\eta) W(\zeta).$$

Нужно заметить, что не все системы координат допускают такого рода решения „с разделенными переменными“. Координаты (переменные), для которых это возможно, называются разделимыми. Изложенный метод разложения по гармоническим основным функциям применим, конечно, только к таким разделимым координатам.

Нужно строго различать системы, имеющие замкнутые координатные поверхности, т. е. вырожденные „нулевые поверхности“ конечной или исчезающей величины и такие системы

координат, как например цилиндрическая, которые таких поверхностей не имеют.

Наряду с полярной системой координат, которую мы уже рассмотрели подробно, мы рассмотрим еще вкратце в качестве примера систем первого типа сферическую систему координат. Уравнение $\nabla^2 \psi = 0$ гласит в этом случае, согласно (11b):

$$\frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} (1 - v^2) \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{u^2 - v^2}{(u^2 - 1)(1 - v^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (23)$$

Положив здесь

$$\psi = U(u)V(v)W(\alpha), \quad (23a)$$

и разделив на ψ , получим:

$$\frac{(u^2 - 1)(1 - v^2)}{u^2 - v^2} \left[\frac{1}{U} \frac{d}{du} (u^2 - 1) \frac{dU}{du} + \frac{1}{V} \frac{d}{dv} (1 - v^2) \frac{dV}{dv} \right] + \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = 0.$$

Единственное решение этого уравнения, совместимое с условием однозначности, получается, точно так же, как в случае полярных координат, при $\frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = \text{const} = -m^2$ (m — целое число), т. е. при

$$W = W_m = \cos m\alpha, \sin m\alpha \text{ или } e^{\pm im\alpha}. \quad (23b)$$

Далее, так как

$$\frac{u^2 - v^2}{(u^2 - 1)(1 - v^2)} = \frac{(u^2 - 1) + (1 - v^2)}{(u^2 - 1)(1 - v^2)} = \frac{1}{1 - v^2} + \frac{1}{u^2 - 1},$$

$$\frac{1}{U} \frac{d}{du} (u^2 - 1) \frac{dU}{du} - \frac{m^2}{u^2 - 1} = -\frac{1}{V} \frac{d}{dv} (1 - v^2) \frac{dV}{dv} + \frac{m^2}{1 - v^2} = C',$$

т. е.

$$\frac{d}{du} (1 - u^2) \frac{dU}{du} - \frac{m^2 U}{1 - u^2} + C' U = 0,$$

$$\frac{d}{dv} (1 - v^2) \frac{dV}{dv} - \frac{m^2 V}{1 - v^2} + C' V = 0.$$

Эти уравнения тождественны с уравнением (18b) для функции P_n^m , если там положить $C = m$ и здесь $C' = n(n + 1)$ (и то и другое нужно рассматривать как следствия условия однозначности).

Имеем следовательно, как и раньше

$$U = P_n^m(u), \quad V = P_n^m(v). \quad (23c)$$

Так как u здесь играет роль координаты расстояния ($v = \text{arc cos } \eta$ имеет значение угловой координаты, а именно соответствует полярному углу θ), то наряду с функцией $U = P_n^m(u)$, которая является очевидно функцией расстояния первого рода,

мы должны еще ввести соответствующую функцию второго рода. Согласно общей формуле (15а) получаем (переменив знак p)

$$U^{(2)}(u) = P_n^m(u) \int_u^{\infty} \frac{du}{(u^2 - 1) [P_n^m(u)]^2} = Q_n^m(u). \quad (23d)$$

Можно доказать, что $Q_n^m(u)$ точно так же, как и $P_n^m(u)$, представляет помноженную на $(1 - u^2)^{\frac{m}{2}}$ m -ую производную функции $Q_n(u)$, которая удовлетворяет тому же уравнению, что и $P_n(u)$:

$$\frac{d}{du} (1 - u^2) \frac{dU}{du} + n(n + 1)U = 0 \quad (24)$$

и может быть найдена из нее квадратурой:

$$Q_n(u) = P_n(u) \int_u^{\infty} \frac{du}{(u^2 - 1) [P_n(u)]^2} \quad (24a)$$

(„присоединенная“ функция Лежандра n -го порядка).

Эта квадратура при $n = 0$ и $n = 1$ легко выполняется, что дает:

$$Q_0(u) = \frac{1}{2} \lg \frac{u+1}{u-1}, \quad Q_1(u) = \frac{1}{2} u \lg \frac{u+1}{u-1} - 1. \quad (24b)$$

Определение функций более высокого порядка проще всего производится посредством следующей рекурсионной формулы, вытекающей из (24) и справедливой как при $U_n = P_n$, так и при $U_n = Q_n$:

$$(n + 1)U_{n+1} = (2n + 1)uU_n - nU_{n-1}. \quad (24c)$$

Мы перейдем теперь к системам координат, не имеющим замкнутых координатных поверхностей.

Простейшим примером такой системы служит, как уже указывалось, цилиндрическая система координат (r, α, z) . Соответствующее ей уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (25)$$

Полагая

$$\psi = U(r)V(z)W(\alpha),$$

получим

$$\frac{1}{rU} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) + \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = 0,$$

т. е., как и раньше,

$$W = W_m = \cos m\alpha, \sin m\alpha \text{ или } e^{\pm im\alpha}$$

и далее

$$\frac{1}{rU} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} = -\frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dz^2} = -c, \quad (25a)$$

Здесь, в противоположность прежде рассмотренным случаям, постоянная c условием однозначности не определяется. При этом

$$V = e^{\pm \sqrt{c} z} \quad (25b)$$

и

$$U = J_m(\sqrt{c} r) \text{ или } K_m(\sqrt{c} r), \quad (25c)$$

где $J_m(u)$ означает первую и $K_m(u)$ вторую Бесселеву функцию m -го порядка.¹ Они выражаются одна через другую согласно формулам

$$K_m(\sqrt{c} r) = J_m(\sqrt{c} r) \int_r^\infty \frac{dr}{r J_m^2},$$

$$J_m(\sqrt{c} r) = K_m(\sqrt{c} r) \int_0^\infty \frac{dr}{r K_m^2}.$$

Для того чтобы получить решения уравнения (25), исчезающие на бесконечности и в частности при $z = \pm \infty$, нужно положить $c = k^2$ (положительное число) и в (25a) выбрать нижний знак для $z > 0$ и верхний для $z < 0$. В частности при $c = 0$ получается

$$V = \text{const}, \quad \psi = VW_m,$$

где

$$U^{(1)} = r^m \text{ и } U^{(2)} = \frac{1}{r^m} \text{ или } \lg r \text{ для } m = 0.$$

Это соответствует следующему разложению решения двумерного уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (26)$$

остающемуся регулярным внутри или вне круглого цилиндра заданного радиуса:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum r^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi); \quad r < a \\ \varphi &= A_0 \lg \frac{1}{r} + \sum \frac{1}{r^m} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi), \quad r > a \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

¹ Согласно нашим общим обозначениям мы должны были бы вместо $J_m(\sqrt{c} r)$ писать $J_c^m(r)$. Следует отметить, что Бесселевы функции можно рассматривать как предел соответствующих шаровых функций Лежандра, согласно формуле

$$J_m(\varphi) = (-1)^m \lim P_n^m \left(\cos \frac{\varphi}{n} \right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Эти формулы являются двухмерным аналогом разложения трехмерного потенциала по шаровым функциям (или, точнее, по гармоническим функциям пространственной полярной системы координат).

Рассматривая выражение

$$A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi$$

как вещественную часть комплексного выражения $C_m e^{im\varphi}$, из первой формулы (26а) получим

$$\varphi = R(f), \quad f = \sum_0^{\infty} C_m w^m, \quad w = re^{i\varphi} = x + iy, \quad (26b)$$

а из второй

$$\varphi = R\left(\sum_1^{\infty} \frac{C_m}{w^m} + C_0 \lg \frac{1}{w}\right). \quad (26c)$$

„Комплексный потенциал“ f для области, заключенной между двумя круглыми цилиндрами, может быть представлен рядом

$$f = \sum_0^{\infty} (C'_m w^m + C''_m w^{-m}) + C''_0 \lg \frac{1}{w}. \quad (26d)$$

Угловые координаты и координаты расстояния соединяются в рассматриваемом случае в одну единственную векторную или комплексную координату.

5. Плоские задачи и аналитические функции. Формулы (26с) и (26d) представляют известные ряды Тэйлора и Лорана для произвольной аналитической функции комплексного переменного w . Действительно, мы уже видели, что вещественная (или мнимая) часть каждой такой функции представляет решение уравнения (26). Поэтому при решении двухмерных статических задач не нужно и даже нецелесообразно разлагать искомую гармоническую функцию в ряд по основным гармоническим функциям соответствующей системы координат. Когда эта координатная система найдена, задачу можно считать практически решенной.

Рассмотрим например случай проводящего эллиптического цилиндра с полуосями a , b . Соответствующие конформные координаты (ξ, η) определяются, как известно, преобразованием

$$x + iy = a_0 \cos i(\xi + i\eta), \quad a_0^2 = a^2 - b^2 \text{ [ср. (8) § 1]}.$$

Те из них, которые являются однозначными функциями x и y , представляют, очевидно, с точностью до постоянного множителя, потенциал изолированного заряженного цилиндра во внешнем пространстве. В рассматриваемом случае это будет координата ξ ,

так как кривая, ограничивающая цилиндр, согласно первому уравнению (8b) определяется формулой

$$\cosh \xi = \frac{a}{a_0} \quad \left(\text{или } \sinh \xi_0 = \frac{b}{a_0} \right).$$

Вводя вместо конформных координат (ξ, η) обыкновенные эллиптические координаты u, v по (9) и решая равенство

$$\cosh \xi = \frac{1}{2} (e^\xi + e^{-\xi}) = u$$

относительно ξ , получим

$$\xi = \lg (u + \sqrt{u^2 - 1}),$$

или в силу (9a):

$$\xi = \lg \frac{1}{2a_0} (r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4a_0^2}).$$

Для очень больших расстояний эта формула сводится к

$$\xi \cong \lg \frac{2r}{a_0} \quad (r \cong r_1 \cong r_2).$$

Сравнивая это выражение с потенциалом заряженной линии:

$$\varphi = 2e \lg \frac{1}{r} + \text{const},$$

где e означает заряд на единицу длины, мы видим, что искомый потенциал (эллиптического цилиндра) равен $-2e\xi$.

Если рассматриваемый цилиндр находится в первичном поле с комплексным потенциалом $f^0(w)$, определенным внутри цилиндра и вблизи него, то вторичный комплексный потенциал индуцированного заряда внутри и на поверхности цилиндра должен равняться

$$f'(w) = c - f^0(w), \quad (27)$$

где c — комплексная постоянная. Значения $f'(w)$ вне цилиндра получаются аналитическим продолжением этой функции во внешнее пространство при условии, что на бесконечности она принимает вид $2e \lg \frac{1}{w} + \text{const}$. Это аналитическое продолжение проще всего получается разложением f' в ряд типа (26d) по отрицательным степеням комплексного переменного $\rho = \xi + i\eta$:

$$f' = C_0 \lg \frac{1}{\rho} + \sum_0^{\infty} \frac{C_m}{\rho^m}, \quad (27a)$$

причем коэффициенты C_0, C_1, \dots находятся обычным путем, а именно

$$C_m = \frac{1}{2\pi i} \oint f'(\rho) \rho^{m-1} d\rho,$$

где интеграл берется по ограничивающей линии в отрицательном направлении. Подстановкой $\rho = \frac{1}{\sigma}$ эта „внутренняя задача“ приводится к „внешней“, причем коэффициенты C_m могут быть вычислены непосредственно по методу вычетов.

6. Пространственные задачи и функции Грина. Подобный же метод применим (по крайней мере принципиально) и к решению пространственных электростатических задач того же рода. Рассмотрим проводящее тело произвольной формы, находящееся в заданном первичном поле. Мы будем предполагать, что источники этого поля лежат вне поверхности тела S ; тогда первичный потенциал φ^0 внутри S должен представлять собой гармоническую функцию ($\nabla^2 \varphi^0 = 0$).

Если результирующий потенциал на S равен нулю („заземленный“ проводник), то вторичный потенциал внутри и на поверхности S непосредственно определится по формуле

$$\varphi' = -\varphi^0.$$

„Аналитическое продолжение“ этого внутреннего вторичного потенциала во внешнюю область производится по методу, развитому в I томе, гл. VI § 6 при определении „эквивалентного поверхностного заряда“. Там речь шла об определении поверхностной плотности η^0 такого распределенного по S , заряда, который внутри (или вне) S создает заданное поле φ^0 , происходящее от внешней (или внутренней) системы зарядов. Если S представляет собой заземленную проводящую поверхность, то плотность η' индуцированного на ней заряда должна очевидно быть равна по величине и противоположна по знаку указанному эквивалентному поверхностному заряду

$$\eta' = -\eta^0.$$

Когда внешний вторичный потенциал известен, η' можно найти обычным путем, т. е. с помощью дифференцирования. Эта задача сводится, как было показано в томе I к определению функции Грина для рассматриваемой поверхности. Если удалось определить эту функцию $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ (\mathbf{r}^* означает радиус-вектор рассматриваемой внешней точки), то для $\varphi'_{\text{внеш.}}$ получаем следующее общее выражение:

$$\varphi'(\mathbf{r}^*) = -\frac{1}{4\pi} \oint \varphi^0 \nabla_{\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) dS$$

[ср. (21с), стр. 123, т. I; входящий там поверхностный потенциал $\bar{\varphi}$ мы заменили через $\varphi' = -\varphi^0$, и „внешнюю“ по отношению к наружной области нормаль — противоположно направленной внешней нормалью в обычном смысле].

Функция Грина имеет очень простой и наглядный физический смысл. А именно, согласно данному в томе I определению она представляет результирующий потенциал, создаваемый еди-

ничным точечным зарядом, находящимся внутри (или вне) рассматриваемой заземленной поверхности.

Так как фактическое определение функции Грина в конечном виде вообще невозможно (за исключением простейшего случая шаровой поверхности), описанный метод имеет лишь принципиальное значение. На практике метод криволинейных координат и разложения по основным гармоническим функциям является наиболее удобным. Это в особенности относится к общей задаче действия заданного первичного электрического поля на диэлектрическое тело; проводящие тела, как известно, могут рассматриваться как диэлектрики с бесконечно большой диэлектрической постоянной.

§ 3. Задачи о колебаниях; разложение по характеристическим функциям.

Задача определения свободных электрических колебаний в металлическом проводнике (или связанной системе таких проводников) сводится, как было показано в гл. V, § 6, к интегрированию дифференциального уравнения вида

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_s \mu = k_0^2 \epsilon_s \mu = k_0^2 p^2, \quad (28)$$

где постоянная p (комплексный показатель преломления) для различных частей пространства (например внутри и вне проводников или диэлектриков) принимает различные значения, тогда как ω является неизвестным параметром (частота колебаний), имеющим для всей системы одно и то же значение. Интегрирование (28) должно производиться с учетом известных граничных условий для поверхностных значений электрической и магнитной напряженности, причем обычное требование однозначности, конечности и непрерывности потенциалов (φ , \mathbf{A} , \mathbf{Z}) в связи с этими граничными условиями приводит к определенным дискретным „характеристическим значениям“ параметра ω и соответствующим особым „характеристическим решениям“ уравнения (28) („характеристическим функциям“).

Статическое распределение заряда (если таковой имеется) на рассматриваемых проводниках и соответствующее статическое поле могут рассматриваться как простейшее характеристическое решение уравнения (28), а именно как решение, соответствующее собственной частоте $\omega = 0$. Это решение, которое нами подробно рассмотрено в предшествующем параграфе, мы сейчас оставим в стороне.

Наряду со свободными колебаниями нужно еще рассматривать вынужденные колебания, вызываемые заданным первичным гармонически колеблющимся полем. В этом случае уравнение (28) можно писать также в виде

$$\nabla^2 \psi' + k^2 \psi' = -(k^2 - k_0^2) \psi^0 \quad (k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}) \quad (28a)$$

(ср. гл. V, § 7). Таким образом, для вторичного поля при $\omega > 0$ (ω — частота вынужденных колебаний) получается неоднородное уравнение, в противоположность соответствующему статическому случаю.

Мы представим себе, что рассматриваемые тела имеют конечное протяжение в пространстве, и что первичное поле задано лишь в занимаемой ими конечной области V . Интегрирование (28а) нужно, следовательно, произвести для этой конечной области, причем нужно учитывать граничные значения функции ψ и ее производных, точно так же как и граничные условия на поверхности раздела между различными телами.

Второе существенное различие между статической и колебательной задачей заключается в том, что последняя не может быть охарактеризована одним скалярным потенциалом φ , как первая; здесь нужно рассматривать векторный потенциал \mathbf{A} (или поляризационный потенциал \mathbf{Z}). Следовательно ψ в (28) и (28а) означает вообще векторную величину, что, при введении криволинейных координат, а отчасти и при интегрировании (28а), является очень существенным.

1. Вид характеристических функций в случае координат с симметрией вращения (сферические и сфероидальные координаты). Мы ограничимся в дальнейшем случае одного тела, находящегося в пустом пространстве (внешняя задача) и введем, точно так же как и в статической задаче, систему координат, в которой одна из поверхностей $\xi = \text{const}$ совпадает с поверхностью тела. Рассмотрим сперва простейший случай свободных колебаний идеально проводящего тела, обладающего осевой симметрией, и примем, что составляющие векторного потенциала, перпендикулярные к оси симметрии (z), исчезают. При этом ψ можно рассматривать как скалярную величину, а именно положить $\psi = A_z = \dot{A}$ или $\psi = \varphi$, причем A и φ связаны между собой известным соотношением:

$$ik\varphi = \frac{\partial A}{\partial z} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}, \quad \varphi \sim e^{-i\omega t} \right).$$

Попытаемся выразить характеристические функции через основные гармонические функции, обобщением которых они являются, положив

$$\psi_k(\xi, \eta, \alpha) = U(\xi) \cdot T(\eta, \alpha) = U(\xi)V(\eta)W(\alpha). \quad (29)$$

Это, вообще говоря, возможно для всех тех координат, в которых разделяется уравнение $\nabla^2\psi = 0$ ($k = 0$).

Мы имеем, например, в случае полярной системы координат

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi + k^2\psi = & \frac{T}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dU}{dR} \right) + \frac{U}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \\ & + \frac{U}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + k^2 U T = 0, \end{aligned}$$

и следовательно [ср. (16)]:

$$\frac{1}{U} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dU}{dR} \right) + k^2 R^2 = -\frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} \right\} = +C.$$

Это дает при $C = n(n+1)$ (в силу условия однозначности) прежнее уравнение (17) для T и уравнение

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dU}{dR} \right) + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{R^2} \right] U = 0. \quad (29a)$$

Последнее уравнение подстановкой $U = \frac{Z}{\sqrt{R}}$ приводится к уже знакомому нам дифференциальному уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 Z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dZ}{dR} + \left[k^2 - \frac{n(n+1) + \frac{1}{4}}{R^2} \right] Z = 0,$$

или

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dZ}{dR} \right) + \left[k^2 - \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2}{R^2} \right] Z = 0.$$

Мы имеем следовательно [ср. (25a) и (25b)]:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)} &= U_n^{(1)} T_n = \frac{1}{\sqrt{R}} Z_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR) T_n(\theta, \alpha), \\ \psi^{(2)} &= U_n^{(2)} T_n = \frac{1}{\sqrt{R}} Z_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR) T_n(\theta, \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (29b)$$

Здесь T_n означает шаровую функцию n -го порядка, а $Z_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}$ и $Z_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}$ — две цилиндрические функции полуцелого порядка, первая из которых при $R=0$ остается регулярной, тогда как вторая в этой точке обращается в бесконечность, а на бесконечности представляет (при вещественных значениях k) расходящиеся волны, т. е. ведет себя как функция Ханкеля первого рода $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}$:

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)} \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} e^{i\rho} i^{-(n+\frac{1}{2})} (\rho \rightarrow \infty),$$

так что, при $R \rightarrow \infty$,

$$U_n^{(2)} \cong \frac{C}{R} e^{ikR}. \quad (29c)$$

Цилиндрические функции полуцелого порядка при любых (конечных) значениях аргумента могут быть выражены через

показательные или тригонометрические функции. Это проще всего показать, переписав уравнение (29а) в виде

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RU) + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{R^2} \right] U = 0.$$

Полагая при этом

$$RU_n = \sqrt{R} Z_{n+\frac{1}{2}} = S_n \text{ и } kR = \rho,$$

получим

$$\frac{d^2 S_n}{d\rho^2} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{\rho^2} \right] S_n = 0. \quad (30)$$

Общее решение этого уравнения для случая $n=0$ имеет вид:

$$S_0 = C_1 e^{i\rho} + C_2 e^{-i\rho}.$$

Если функция S_n известна, то функцию S_{n+1} можно вычислить по вытекающей из (30) рекурсионной формуле;

$$S_{n+1} = i \left[(n+1) \frac{S_n}{\rho} - \frac{dS_n}{d\rho} \right].$$

Если положить $S_0^{(2)}(\rho) = e^{+i\rho}$, то эта формула дает:

$$S_n^{(2)}(\rho) = e^{i\rho} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m! n!} \frac{i^m}{2^m \rho^m}, \quad (30a)$$

что можно также записать в виде:

$$S_n^{(2)}(\rho) = i^n \rho^{n+1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^n \left[\frac{e^{i\rho}}{\rho} \right].$$

Соответствующие функции первого рода, как легко видеть, могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n^{(1)}(\rho) &= \frac{1}{2i} \left[\frac{S_n(\rho)}{i^n} - \frac{S_n(-\rho)}{(-i)^n} \right] = \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{(n-m)! m!} \frac{\sin \left[\rho - (n-m) \frac{\pi}{2} \right]}{(2\rho)^m}. \end{aligned} \quad (30b)$$

Действительно, если разложить показательные функции $e^{i\rho}$ и $e^{-i\rho}$ в ряд по степеням ρ , то отрицательные степени ρ сокращаются и получается следующий ряд с вещественными коэффициентами:¹

$$S_n^{(1)}(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \rho^{n+2m+1}}{(2m+1)! (2m+3) (2m+5) \dots (2m+2n+1)}. \quad (30c)$$

¹ Ср. G. Mie, Ann. d. Physik, 25, 1908.

Следовательно, можно положить

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{\rho} S_n^{(1)}(\rho) T_n(\theta, \alpha), \quad \psi^{(2)} = \frac{1}{\rho} S_n^{(2)}(\rho) T_n(\theta, \alpha), \quad (\rho = kR), \quad (30d)$$

причем рассматриваемое характеристическое значение $k (= k_n)$, соответствующее порядку n , определяется уже затем из граничных условий задачи.

В качестве второго примера определения характеристических функций может служить случай эллипсоидального тела. В случае вытянутого эллипсоида вращения имеем по (11b)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi + k^2 \psi = & \frac{1}{a_0(u^2 - v^2)} \left[\frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} (1 - v^2) \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] + \\ & + \frac{1}{a_0^2 (u^2 - 1)(1 - v^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + k^2 \psi = 0. \end{aligned}$$

Полагая

$$\varphi_k = U(u) V(v) \frac{\cos m\alpha}{\sin m\alpha}, \quad (31)$$

получим [ср. выше уравнение (23) и следующие]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{U} \frac{d}{du} \left((u^2 - 1) \frac{d}{du} U \right) - \frac{m^2}{u^2 - 1} + a_0^2 k^2 (u^2 - 1) = \\ & = - \frac{1}{V} \frac{d}{dv} (1 - v^2) \frac{dV}{dv} + \frac{m^2}{1 - v^2} - a_0^2 k^2 (1 - v^2) = C, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{d}{du} \left[(u^2 - 1) \frac{d}{du} U \right] + [a_0^2 k^2 (u^2 - 1) - \frac{m^2}{u^2 - 1} - C] U = 0, \quad (31a)$$

и такое же уравнение для $V(v)$ с той лишь разницей, что u меняется в интервале $(1, +\infty)$ а v в интервале $(-1, +1)$. Нужно заметить, что когда найдена часть характеристической функции первого рода $U^{(1)}$, зависящая от расстояния, то соответствующая часть характеристической функции второго рода может быть определена по той же формуле

$$U^{(2)} = U^{(1)} \int \frac{du}{(u^2 - 1)[U^{(1)}]^2}, \quad (31b)$$

как и в случае основных гармонических функций. Это относится, в частности и к случаю полярной системы координат. Так например функцию $S_n^{(1)}$ можно выразить через функцию $S^{(2)}$ согласно формуле

$$S_n^{(1)} = S_n^{(2)} \int \frac{dR}{(S_n^{(2)})^2},$$

которая получается из общей формулы (15a) при $\rho = R^2$ и $U = \frac{S}{R}$. Вопрос о пределах интегрирования должен решаться

в каждом отдельном случае особо. В предшествующей формуле, например, нужно интегрировать от $-R$ до $+R$.

Входящая в (31а) „постоянная разделения“ C должна определяться одновременно с k из условий конечности и однозначности в связи с граничными условиями, для чего нужно знать соответствующие выражения для напряженностей поля.

2. Собственные колебания при наличии симметрии вращения. Для полного определения собственных колебаний с осевой симметрией необходимо наряду с видом характеристических функций знать характеристические значения, т. е. значения соответствующих частот колебаний. Они находятся, как известно, подстановкой общих выражений для напряженностей поля в граничные условия. В случае цилиндрической системы координат последние в виду (4б, с) выражаются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &= -\frac{\partial A}{\partial r} \quad (H_\xi = H_\eta = 0), \\ E_r &= -\frac{1}{ik} \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial r}, \quad E_\alpha = -\frac{1}{ik} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + ikA \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

[ср. (47а) гл. V].

Переход от этих формул к соответствующим формулам для других координатных систем с осевой симметрией, не представляющий, конечно, никаких принципиальных затруднений, является однако довольно громоздким, так как при этом нужно вводить направляющие косинусы координатных линий (ξ , η) по отношению к оси Z . Мы это сделали в гл. V, § 7, при переходе от цилиндрических координат к полярным.

Наиболее общий и простой метод рассмотрения полей с осевой симметрией состоит в следующем.¹ Мы исходим из уравнений поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H},$$

которые в координатной системе с осевой симметрией (ξ , η , α) согласно (3а) принимают вид

$$\begin{aligned} -ikE_\xi &= \frac{1}{h_\eta r} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (rH_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\eta H_\eta) \right], \\ -ikE_\eta &= \frac{1}{h_\xi r} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\xi H_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (rH_\alpha) \right], \\ -ikE_\alpha &= \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta H_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi H_\xi) \right] \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

¹ Ср. М. Абрагам, *Enz. d. math. Wiss.*, Bd. V, 2, S. 498 ff.

Если поле обладает той же осевой симметрией, что и наши координаты, то эти уравнения распадаются на две независимые группы, а именно

$$\left. \begin{aligned} ikE_{\xi} &= -\frac{1}{h_{\xi}r} \frac{\partial}{\partial \eta} (rH_{\alpha}), & ikE_{\eta} &= \frac{1}{h_{\xi}r} \frac{\partial}{\partial \xi} (rH_{\alpha}), \\ ikH_{\alpha} &= \frac{1}{h_{\xi}h_{\eta}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_{\eta}E_{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_{\xi}E_{\xi}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

и

$$\left. \begin{aligned} ikH_{\xi} &= \frac{1}{h_{\eta}r} \frac{\partial}{\partial \eta} (rE_{\alpha}), & ikH_{\eta} &= -\frac{1}{h_{\xi}r} \frac{\partial}{\partial \xi} (rE_{\alpha}), \\ -ikE_{\alpha} &= \frac{1}{h_{\xi}h_{\eta}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_{\eta}H_{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_{\xi}H_{\xi}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33a)$$

Первая группа, содержащая только составляющие H_{α} , E_{ξ} , E_{η} (остальные можно положить равными нулю), определяет электрические колебания меридионального типа, тогда как вторая соответствует стационарным замкнутым токам.

Мы можем, следовательно, в дальнейшем ограничиться рассмотрением уравнений (33). При этом вместо потенциалов A или φ мы введем величину

$$Q = rH_{\alpha} = -r \frac{\partial A}{\partial r}, \quad (33b)$$

которая играет роль потенциала по отношению к электрической напряженности. Подставляя соответствующие выражения для составляющих E :

$$E_{\xi} = -\frac{1}{ikrh_{\eta}} \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad E_{\eta} = \frac{1}{ikrh_{\xi}} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \quad (33c)$$

в третье уравнение (33), получаем следующее дифференциальное уравнение для нового потенциала:

$$\frac{r}{h_{\xi}h_{\eta}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}}{rh_{\xi}} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}}{rh_{\xi}} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) \right] + k^2 Q = 0. \quad (34)$$

Нужно заметить, что это уравнение существенно отличается от соответствующего уравнения

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

для A или φ ; а именно последнее уравнение, при независимости этих величин (ψ) от α , принимает вид:

$$\frac{1}{rh_{\xi}h_{\eta}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_{\eta}r}{h_{\xi}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{\xi}r}{h_{\eta}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] + k^2 \psi = 0. \quad (34a)$$

Величина Q имеет очень наглядное значение: линии $Q = \text{const}$ представляют собой не что иное, как электрические силовые

линии. Она, следовательно, соответствует функции тока, или скалярному магнитному потенциалу для случая плоской задачи.

Характеристические функции, соответствующие уравнению (34), само собой разумеется, несколько отличаются от тех, которые получаются из уравнения (34а) при тех же значениях k .

Так, например, в случае полярных координат

$$(h_\xi = 1, h_\eta = R, h_\alpha = r = R \sin \theta)$$

имеем по (34):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + k^2 Q = 0.$$

Решение этого уравнения, соответствующее найденной прежде характеристической функции

$$\psi_{k, n} = Z_{n+\frac{1}{2}}(kR) P_n(\cos \theta) = S_n(kR) P_n(\cos \theta),$$

имеет вид

$$Q_{k, n} = S_n^{(2)}(kR) \sin^2 \theta P_n'(\cos \theta).$$

С помощью этого выражения непосредственно вычисляются соответствующие характеристические значения параметра k ($= k_n$), т. е. частоты и декременты затухания соответствующих собственных колебаний. Именно, общее граничное условие для поверхности $\xi = \xi_0$ ($= \text{const}$) идеально проводящего тела гласит $E_\eta = 0$, т. е. по (33с)

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} \right)_0 = 0. \quad (34b)$$

В рассматриваемом случае это дает уравнение

$$\frac{d}{dR} S_n^{(2)}(kR) = 0, \quad (\text{для } R = a)$$

откуда при $n = 1$ непосредственно получается первое характеристическое значение k , соответствующее основному колебанию шара, а при $n > 1$ — характеристические значения обертонов.

В случае вытянутого эллипсоида вращения уравнение (34) в координатах (u, v, α) принимает следующий вид:

$$(u^2 - 1) \frac{\partial^2 Q}{\partial u^2} + (1 - v^2) \frac{\partial^2 Q}{\partial v^2} - (u^2 - v^2) (a_0 k)^2 Q = 0. \quad (35)$$

Отсюда, полагая $Q = U(u) V(v)$, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 U}{du^2} - \left(a_0^2 k^2 + \frac{C}{u^2 - 1} \right) U &= 0, \\ \frac{d^2 V}{dv^2} - \left(a_0^2 k^2 - \frac{C}{1 - v^2} \right) V &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35a)$$

и далее по (33с)

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{U(u) V'(v)}{\sqrt{(u^2-1)(u^2-v^2)}}, & E_v &= -\frac{U'(u) V(v)}{\sqrt{(u^2-v^2)(1-v^2)}}, \\ H_u &= -\frac{kU(u) V(v)}{\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (35b)$$

Для того чтобы E_v и H_u оставались конечными на оси симметрии, функция $V(v)$ должна исчезать при $v = \pm 1$. Из этого условия конечности (которое совпадает с условием однозначности) и граничного условия $E_v = 0$, т. е. $U'(u) = 0$ при $u = u_0$ (поверхность эллипсоида), могут быть определены возможные значения постоянной $C (= C_1, C_2, \dots)$ и соответствующие характеристические значения $k (= k_1, k_2, \dots)$.

При этом для очень вытянутого „стержнеобразного“ эллипсоида получаем в первом приближении

$$C = 0, \quad k = \frac{\pi n}{2a} = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где a означает большую полуось эллипсоида, а l — его длину. Этот результат совпадает с полученным в гл. V, § 6, для собственных колебаний прямолинейной проволоки при пренебрежении затуханием.

Влияние затухания может быть здесь (так же, как и там) определено без добавочного исследования простым переходом к более высоким приближениям. А именно, во втором приближении имеем

$$k_n = \frac{\pi n}{l} + i\gamma_n K,$$

где

$$K = \frac{1}{4 \lg \frac{2l}{b}}$$

(т. е. приблизительно половина емкости, приходящейся на единицу длины) и

$$\gamma_n = \int_0^{2\pi n} \frac{1 - \cos x}{x} dx = \lg 2\pi n + 0,577 + \frac{1}{(2\pi n)^2} - \dots$$

3. Общая теория собственных электрических колебаний в неидеально проводящем шаре. Общий случай электромагнитных колебаний в неидеально проводящих телах может быть сравнительно просто исследован лишь в случае сферических тел.

Мы ограничимся поэтому рассмотрением колебаний в однородном шаре. Уравнения поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_s \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}$$

с вводимыми для краткости обозначениями

$$\frac{\omega}{c} = k, \quad \varepsilon_s = p^2, \quad Rkp = \rho \quad (36)$$

могут быть переписаны в полярных координатах следующим образом [ср. (5b)]:

$$\left. \begin{aligned} -ikH_R R \sin \theta &= \frac{\partial E_\theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\alpha), \\ -ikH_\theta R \sin \theta &= \sin \theta \frac{\partial (RE_\alpha)}{\partial R} - \frac{\partial E_R}{\partial \alpha}, \\ -ikH_\alpha R &= \frac{\partial E_R}{\partial \theta} - \frac{\partial (RE_\theta)}{\partial R} \end{aligned} \right\} \quad (36a)$$

и

$$\left. \begin{aligned} ikp^2 E_R R \sin \theta &= \frac{\partial H_\theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\alpha), \\ ikp^2 E_\theta R \sin \theta &= \sin \theta \frac{\partial (RH_\alpha)}{\partial R} - \frac{\partial H_R}{\partial \alpha}, \\ ikp^2 E_\alpha R &= \frac{\partial H_R}{\partial \theta} - \frac{\partial (RH_\theta)}{\partial R} \end{aligned} \right\} \quad (36b)$$

Мы прибавим сюда еще уравнения $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_R) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 H_R) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\theta) + \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

которые являются следствием предшествующих. С их помощью без труда получаются следующие уравнения для радиальных составляющих электрической и магнитной напряженности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (\rho^2 E_R) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial E_R}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E_R}{\partial \alpha^2} + \rho^2 E_R &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial R^2} (\rho^2 H_R) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 H_R}{\partial \alpha^2} + \rho^2 H_R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36c)$$

Отсюда видно, что электромагнитное поле может быть разложено на две независимые части, а именно на „электрическую“, в которой

$$E_R \neq 0, \quad H_R = 0,$$

и на „магнитную“

$$H_R \neq 0, \quad E_R = 0.$$

Мы можем поэтому обе части рассматривать в отдельности. Нужно отметить, что электрическая часть представляет обобщение рассмотренных выше электрических колебаний меридионального типа. Величина E_R играет при этом роль потенциала, так как остальные величины могут быть выражены через нее по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho E_\theta) + \rho E_\theta &= \frac{\partial^2 E_R}{\partial \theta \partial \rho}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho \sin \theta E_\alpha) + \rho \sin \theta E_\alpha &= \frac{\partial^2 E_R}{\partial \alpha \partial \rho}, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\theta) &= -i \rho E_\alpha, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\alpha) = i \rho E_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Подобные же формулы получаются и для магнитной части.

Первое из уравнений (36с) для E_R совпадает с уравнением

$$\frac{1}{k^2 \rho^2} \nabla^2 \psi + \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\rho \psi) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \psi = 0$$

при

$$\psi = \rho E_R.$$

Найденным раньше характеристическим функциям соответствуют, таким образом, следующие „характеристические решения“ этого уравнения:

$$E_R^{(n)} = \frac{E_0 S_n(\rho)}{\rho^2} T_n(\theta, \alpha) \quad (H_R = 0). \quad (37a)$$

Подставляя это выражение в формулы (37), получаем для E_θ и E_α уравнения вида

$$\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \psi = C \frac{d}{d\rho} \left(\frac{S_n}{\rho^2} \right),$$

где C зависит только от угловых координат.

Далее, по (30)

$$\frac{d^2 S_n}{d\rho^2} + S_n = n(n+1) \frac{S_n}{\rho^2},$$

и следовательно

$$\frac{d^2 S'_n}{d\rho^2} + S'_n = n(n+1) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{S_n}{\rho^2} \right) \quad \left(S'_n = \frac{dS_n}{d\rho} \right).$$

Сравнивая это уравнение с предшествующим, находим

$$\psi = \frac{C}{n(n+1)} S'_n.$$

Таким образом в случае электрических колебаний ($H_R = 0$) из уравнений (37) получаем:

$$\left. \begin{aligned} E_\theta^{(n)} &= \frac{E_0}{n(n+1)} \frac{S'_n}{\rho} \frac{\partial T_n}{\partial \theta}, & E_\alpha^{(n)} &= \frac{E_0}{n(n+1)} \frac{S'_n}{\rho \sin \theta} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha} \\ H_\theta^{(n)} &= \frac{-ipE_0}{n(n+1)} \frac{S_n}{\rho \sin \theta} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha}, & H_\alpha^{(n)} &= \frac{ipE_0}{n(n+1)} \frac{S_n}{\rho} \frac{\partial T_n}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (37b)$$

Вследствие симметрии уравнений (30a, b), которая нарушается лишь множителем $-p^2 = (ip)^2$, мы можем сразу выписать соответствующие формулы для „магнитных“ колебаний. А именно, если $E_R = 0$ и $H_R^{(n)} = H_0 \frac{S_n}{\rho^2} T_n(\theta, \alpha)$, то

$$\left. \begin{aligned} H_\theta^{(n)} &= \frac{H_0}{n(n+1)} \frac{S'_n}{\rho} \frac{\partial T_n}{\partial \theta}, & H_\alpha^{(n)} &= \frac{H_0}{n(n+1)} \frac{S'_n}{\rho \sin \theta} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha} \\ E_\theta^{(n)} &= -\frac{H_0}{ipn(n+1)} \frac{S_n}{\rho} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha}, & E_\alpha^{(n)} &= \frac{H_0}{ipn(n+1)} \frac{S_n}{\rho} \frac{\partial T_n}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (37c)$$

Разумеется, шаровые функции T_n в (37b) и (37c) не обязаны быть теми же самыми.

Нужно заметить, что уравнения (37b) соответствуют вектору потенциалу \mathbf{A} следующего вида:

$$\mathbf{A} = E_0 L_{n+1} \nabla \varphi_n, \quad (38)$$

где

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \varphi_n &= T_n \rho^n \quad \text{или} \quad \frac{T_n}{\rho^{n+1}} \\ L_n &= \frac{S_n^{(1)}}{\rho^{n+1}} \quad \text{или} \quad S_n^{(2)} \rho^n \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

Таким образом φ_n представляет собою основную гармоническую функцию (скалярный потенциал) для пространства внутри или вне шара, соответствующую рассматриваемой характеристической функции. На доказательстве этих формул мы не будем останавливаться: его можно получить без затруднений с помощью уравнения $\nabla^2 \varphi_n = 0$ и рекурсионной формулы

$$S_{n+1} = i \left[(n+1) \frac{S_n}{\rho} - S'_n \right].$$

Формулы (37а, в, с) позволяют определить свободные колебания однородного сферического проводника, не делая никаких ограничений относительно их характера или относительно величины проводимости. Электрические собственные колебания n -го порядка выражаются с помощью (37а) следующим образом:

$$S_n = E_1 S_n^{(1)}(\rho), \quad p = \sqrt{\epsilon_0 \mu} \cong \sqrt{4\pi i \frac{\sigma \mu}{\omega}} \cong (1+i) \sqrt{\frac{\sigma \mu}{c k}}, \quad \rho = kpR,$$

для пространства внутри шара ($R < a$) и

$$S_n = E_2 S_n^{(2)}(\rho), \quad p = 1, \quad \rho = kR,$$

вне его ($R > a$)

При этом должны выполняться граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_\theta = 0, & \quad \Delta E_\alpha = 0, \\ \Delta \frac{H_\theta}{\mu} = 0, & \quad \Delta \frac{H_\alpha}{\mu} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Это по (37b) дает, при $R = a$:

$$\begin{aligned} E_1 \left(\frac{1}{\rho} \frac{dS_n^{(1)}}{d\rho} \right)_{\text{внутри}} &= E_2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{dS_n^{(2)}}{d\rho} \right)_{\text{снаружи}}, \\ E_1 \left(\frac{p S_n^{(1)}}{\mu \rho} \right)_{\text{внутри}} &= E_2 \left(\frac{S_n^{(2)}}{\rho} \right)_{\text{снаружи}} \end{aligned}$$

или при $\mu = 1$:

$$\left. \begin{aligned} E_1 \frac{1}{p} \frac{dS_n^{(1)}}{d\rho} &= E_2 \frac{dS_n^{(2)}}{d\rho}, \\ E_1 S_n^{(1)} &= E_2 S_n^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (39a)$$

Разделив эти уравнения одно на другое, получаем уравнение

$$\frac{1}{p S_n^{(1)}} \frac{dS_n^{(1)}}{d\rho} = \frac{1}{S_n^{(2)}} \frac{dS_n^{(2)}}{d\rho}, \quad (39b)$$

из которого могут быть определены характеристические значения k , т. е. частоты колебаний и декременты затухания. В предельном случае идеально проводящего шара имеем $|p| = \infty$, и следовательно

$$\left(\frac{dS_n^{(2)}}{d\rho} \right)_{R=a} = 0,$$

как уже было найдено раньше.

С помощью формул

$$S_1^{(2)} = \frac{i}{\rho} e^{i\rho} \quad \text{и} \quad S_1^{(1)} = -\cos \rho + \frac{\sin \rho}{\rho}$$

можно, например, вычислить значение k для основного электрического колебания шара. А именно, при конечных значениях p получается следующее трансцендентное уравнение для k :

$$\frac{1}{\sin(pka) - pka \cos pka} \left[\sin pka + \frac{\cos pka}{pka} - \frac{\sin pka}{(pka)^2} \right] = \\ = \frac{ie^{ika}}{ka + ie^{ika}} \left(1 + \frac{i}{ka} - \frac{1}{(ka)^2} \right),$$

которое может быть решено последовательными приближениями, если в качестве нулевого приближения взять его решение для случая $|p| = \infty$.

Нужно отметить, что специальный вид шаровых функций $T_n(\theta, \alpha)$, входящих в предшествующие уравнения, остается совершенно неопределенным. Это очевидно означает, что все собственные колебания типа

$$T_n^m = P_n^m(\cos \theta) e^{\pm im\alpha}$$

относятся к одному и тому же значению k , т. е. имеют одну и ту же частоту и затухание. Это явление, т. е. совпадение характеристических значений для нескольких различных собственных колебаний, принято называть вырождением. Так как функция T_n может быть представлена в виде суммы $(2n+1)$ линейно независимых шаровых функций с произвольными коэффициентами, т. е. путем суперпозиции $(2n+1)$ независимых частных колебаний с любыми амплитудами, то при этом говорят о вырождении $(2n+1)$ -го порядка или о $(2n+1)$ -кратном вырождении. Оно связано очевидно с особым характером шаровой поверхности. Если эту последнюю слегка деформировать, то вырождение устраняется.

4. Вынужденные колебания шара в поле плоских электромагнитных волн. Случай вынужденных колебаний может быть разобран с помощью характеристических функций рассматриваемого тела точно тем же путем, как и действие постоянного во времени первичного поля с помощью соответствующих основных гармонических функций. А именно, каждую величину $\psi^0 \sim e^{-i\omega t}$, характеризующую первичное поле, нужно при этом разложить в ряд по характеристическим функциям первого рода для области, лежащей внутри тела, причем вместо k нужно подставлять уже не соответствующие характеристические значения, а заданное значение $\omega c \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)$ — частота вынужденных колебаний). Далее, искомую вторичную величину ψ' нужно разложить по тем же характеристическим функциям для внутренней области и по характеристическим функциям второго рода для внешнего пространства и притом с тем же „первичным“ или вынужденным значением k . С помощью граничных условий (39) для результирующей (полной) напряженности поля можно найти

коэффициенты обоих рядов для ψ' , приравнявая коэффициенты отдельных угловых функций. При этом предполагается, что последние сохраняют такой же вид, как и в соответствующей статической задаче, оставаясь ортогональными и так же, как и функции расстояния, определенным образом нормированными.

В качестве примера мы рассмотрим действие плоских линейно-поляризованных электромагнитных волн на проводящий шар и связанное с этим действием явление диффракции.¹

Составляющие первичных напряженностей по x, y, z обозначим (отбрасывая множитель $e^{-i\omega t}$) через:

$$E_x^0 = e^{ikz}, E_y^0 = E_z^0 = 0; H_x^0 = 0, H_y^0 = e^{ikz}, H_z^0 = 0;$$

(z , следовательно, означает направление распространения).

Переходя теперь к полярной системе координат, полярная ось которой совпадает с осью z , а плоскость xz — с плоскостью $\alpha = 0$, мы получим следующие выражения для радиальных составляющих

$$E_R^0 = e^{ikR \cos \theta} \sin \theta \cos \alpha, H_R^0 = e^{ikR \cos \theta} \sin \theta \cos \alpha. \quad (40)$$

Остальные составляющие мы здесь можем не выписывать, так как они выражаются обычным образом через E_R^0 и H_R^0 .

Выражения (40) вблизи начала координат ($R=0$), т. е. внутри шара, можно разложить в ряд по соответствующим характеристическим функциям первого рода, а именно:

$$e^{ikR \cos \theta} \sin \theta \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sum_1^n (2n+1) i^{n-1} \frac{S_n^{(1)}(\rho)}{\rho^n} P_n^1(\cos \theta) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (40a)$$

где ($\rho = kR$), а

$$P_n^1(\cos \theta) = \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)}$$

означает первую присоединенную функцию Лежандра.

Эти формулы или охватывающую их формулу

$$e^{i\rho v} = \sum_1^\infty (2n+1) i^{(n-1)} \frac{S_n^{(1)}}{\rho^2} \frac{dP_n(v)}{dv}$$

можно вывести различными путями, — проще всего исходя из соответствующих дифференциальных уравнений и известных рекурсионных формул для функций $S_n^{(1)}$ и P_n .

Для определения вторичного поля мы представим себе радиальные составляющие E' и H' разложенными в ряды вида (40a) с неопределенными коэффициентами. Разумеется при этом для внутренней области должна применяться функция первого рода, а для внешнего пространства — второго рода. В обоих

¹ Эта задача была подробно разобрана Г. Мж (I, с.) и П. Дебаем.

случаях ρ можно определить как произведение R на $k = \frac{\omega}{c}$; таким образом постоянную $p = \sqrt{\epsilon_s \mu}$, характеризующую электромагнитные свойства рассматриваемого тела, можно учитывать только при составлении граничных условий, точно так же, как это делалось в соответствующих статических задачах.

Мы полагаем следовательно:

$$\left. \begin{aligned} E'_R &= \sum_0^{\infty} A_n^{(1)} \frac{S_n^{(1)}(\rho)}{\rho^2} P_n^1(\cos \theta) \cos \alpha, \\ H'_R &= \sum_1^{\infty} B_n^{(1)} \frac{S_n^{(1)}(\rho)}{\rho^2} P_n^1(\cos \theta) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (40b)$$

для $R < a$ и

$$\left. \begin{aligned} E'_R &= \sum_1^{\infty} A_n^{(2)} \frac{S_n^{(2)}(\rho)}{\rho^2} P_n^1(\cos \theta) \cos \alpha, \\ H'_R &= \sum_1^{\infty} B_n^{(2)} \frac{S_n^{(2)}(\rho)}{\rho^2} P_n^1(\cos \theta) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (40c)$$

для $R > a$. Затем вычисляем тангенциальные составляющие (по θ и α) векторов E^0 , H^0 и E' , H' [складывая выражения (37b) и (37c), причем нужно положить $p = 1$] и наконец подставляем все эти составляющие в граничные условия (39) и условия

$$\Delta \epsilon_s E_R = 0, \quad \Delta H_R = 0. \quad (40d)$$

Из этих 6 условий в действительности необходимы лишь 4; остальные 2 при этом выполняются тождественно. Мы здесь имеем точно такие же соотношения, как и в теории отражения и преломления плоских волн на плоских поверхностях (гл. V, §§ 1 и 2). При этом формулы (40c) представляют отраженные, а выражение (40b), взятое вместе с первичной (падающей) волной — преломленные волны.

Намеченный здесь метод в одном отношении может быть немного изменен. А именно, при определении внутреннего электромагнитного поля незачем рассматривать отдельно первичные и вторичные напряженности; вместо этого можно рассматривать результирующую напряженность (которая соответствует проходящим волнам обычной оптической теории), характеризуя ее выражением вида (40b) с отличным от 1 значением p , т. е. с $p = kR \sqrt{\epsilon_s \mu}$. При этом поле вне шара определяется наложением „отраженных“ волн (40c) и „падающих“; последние в этом случае должны быть разложены по характеристическим функциям второго рода с $p = 1$. Это разложение получается из (40a),

если заменить $S_n^{(1)}$ на $S_n^{(2)}$ при нормирующем условии $S_n^{(1)}(ka) = S_n^{(2)}(ka)$.

Оба метода, само собой разумеется, вполне эквивалентны друг другу.

Нужно заметить, что отдельные члены (40а) представляют падающие волны простейшего по отношению к шаровой поверхности типа; в этом смысле они соответствуют плоским волнам для случая плоской поверхности раздела. С другой стороны их можно рассматривать как первичные „элементарные“ волны, соответствующие различным характеристическим колебаниям рассматриваемого тела.

Поскольку, следовательно, эти собственные колебания, т. е. характеристические решения волнового уравнения $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ определены в координатной системе, соответствующей поверхности тела, задачу вынужденных колебаний для произвольных первичных волн и соответствующие задачи преломления, отражения, дифракции или рассеяния последних можно решить без особых затруднений. В отношении этих волн рассматриваемое тело ведет себя как система гармонических осцилляторов, которые возбуждаются тем сильнее, чем ближе вынуждающая частота к соответствующей резонансной частоте (ср. гл. V, § 5).

5. Нахождение вынужденных колебаний при помощи квадратур. Существует еще второй метод решения задачи вынужденных колебаний, определяемых неоднородным дифференциальным уравнением (28а), не имеющий аналога в теории статической индукции. А именно, частное решение уравнения (28а) может быть представлено интегралом

$$\psi' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(k^2 - k_0^2)}{R} \psi^0 e^{ikR} dV' \quad (R = r - r'). \quad (41)$$

Здесь k и ψ^0 рассматриваются как заданные функции от r , а интегрирование распространяется лишь по внутреннему пространству, где $k \neq k_0$. Если заменить k_0 на k , а k на kp , в согласии с предыдущими обозначениями, то это решение примет следующий вид:

$$\psi'(r) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(p^2 - 1)k^2}{|r - r'|} \psi^0(r') e^{ipk|r - r'|} dV'. \quad (41a)$$

Это частное решение необходимо, однако, дополнить общим решением соответствующего однородного уравнения, которое должно быть найдено с учетом граничных условий [ср. формулу (58а), § 7, гл. V].

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- Абрагама М.** теория распространения волн в проводках 327 и след.
— — — собственных колебаний при наличии симметрии вращения 530
Адиабатические процессы 110
Активности вектор 166, 167, 237
Активность оптическая 165, 237
Ампера теория диамагнетизма 143
Амплитуда переменная 244, 328
Аналитические функции в теории распространения волн в проводках 331
Аналитические функции, применение к плоским электростатическим задачам 462, 522 и след.
Анизотропия кинематическая 217
— оптическая 161
Анизотропные тела 41, 46, 48, 217, 239, 293, 303
Антенна магнитная 310
— электрическая 309, 310
— — вертикальная 310, 312 и след.; 324 и след.
Асимметрия молекул оптическая 270
Ацентрические кристаллы 130
Бабине принцип 369
Бесселевы функции 319, 323, 324, 373, 521
Бесселя дифференциальное уравнение 527
Биения 177, 246
Био-Савар 59
Больцмана закон распределения 138, 181, 183, 190, 202, 204, 274
Борн М. 165
Бриллюэн Л. 193
де Бройли 260
Брюстера угол поляризации 299
Бурсиан В. 24
Вектор активности 166, 167, 237
— гирации 158, 160, 166, 294
— дифракционный 376
— затухания 211
— излучения 62
— импульса и работы, четырехмерный 101
— потока энергии излучения 222
Вектор скорости поступательного движения, четырехмерный 46
— фазовый 211
Векторный потенциал комплексный 424, 425
Вейсс П. 150, 154
Взаимной индукции коэффициенты 400, 401
Вириала теорема 192
Волновая группа линейная 243, 244
— — пространственная 250
Волновое уравнение 209, 256, 348
— — возмущенное 263
Волновой пакет 250, 251, 252
Волновые пучки монохроматические 253
Волны плоские (синусоидальные) 210, 212, 215 и след.
— — затухающие 210
— — отраженные и падающие 286, 287, 288 и след.
— — проходящие 289
— — стоячие 249, 250
— — поверхностные плоские 315, 317
— — цилиндрические 318, 319, 321
Волны рассеянные 262
— стоячие незатухающие 346
— шаровые 253, 261
Волны шаровые стоячие 253
— элементарные плоские 241, 242, 244, 245
— — шаровые 261, 262
Восприимчивости коэффициенты 51
— тензор 90, 92, 94, 95, 105, 132, 281
Восприимчивость диамагнитная 146, 148
— комплексная 90
— магнитная 36, 37, 39
— электрическая 36, 37, 51, 133
Вращение плоскости поляризации 158, 160, 236, 283
Время релаксации 39, 185, 198, 390, 438, 450
— элементарное 188, 190
Вырождение 538
Гальванических потенциалов распределение 435, 436, 437
Гальванический элемент 201
Гамильтон 260

- Гамильтона вариационный принцип 409, 411
 — Якоби уравнение 257
 Гармонические функции 458, 459
 — — основные 507, 508, 518, 526
 Гаусса формула 25, 31, 70
 Гейзенберг 154
 Гидростатического равновесия закон 182, 195
 Гирации вектор 158, 160, 166, 294
 Гирация 158, 160, 166, 283
 Гиrotропные тела 161, 294
 Гиrotропия 230 и след.
 Гистерезис магнитный 113, 130
 Главные коэффициенты поляризации 136
 — скорости распространения волн 219
 — составляющие поляризации 490
 Главные составляющие тензоров 42
 Граничные условия 17, 18, 19, 41, 67, 307, 386
 — — в четырехмерной форме 21
 Грина функция 524, 525
 Гука закон 7, 8, 13, 36, 50, 53, 54, 70
 Гюйгенса волны элементарные 261, 262
 — принцип 261, 304, 370
 Даламбера уравнение 208
 Дальнействия теория 284, 286, 446
 Движение вращательное дипольных молекул 11, 183
 — поступательное ионов 12
 Движущиеся тела 21, 22, 43, 44, 45, 215, 216, 217
 Двойное лучепреломление 303, 304
 Двойной слой 24, 33, 115, 204
 Дебай П. 137, 140, 180, 184, 539
 Деполяризация рассеянного излучения 270, 273
 Дефект массы 56
 Деформация линейная 472
 — молекул квазиэластическая 131
 — упругая 120, 124, 130
 Джоулево тепло 63, 393, 394, 400, 448
 Джоуля закон 186
 Диамагнетизм 143, 146, 416
 Диамагнитные тела 467
 Динамомашинa 416, 417
 Диполь элементарный 14, 74, 100, 103, 131
 — магнитный 18, 74
 Дипольные молекулы 11, 33, 136
 Дисперсия кривая 172
 Дисперсия 49, 171, 246
 Дифференциальные операции в криволинейных координатах 496, 497
 — — в сферических координатах 498
 Дифференциальные операции в цилиндрических координатах 497, 498
 Дифракционная решетка 377, 379
 Дифракционный вектор 376
 Диффракция 340, 368 и след., 539
 Диффузии коэффициент 180, 187, 188, 189, 191
 Диффузионный ток 180, 195
 Диффузия 180, 181
 Диэлектрики 464—466, 487
 Диэлектрическая постоянная 39, 45, 53, 140
 — — комплексная 41, 45, 93, 291, 295
 — — относительная 467
 Диэлектрические постоянные главные 163
 Диэлектрической постоянной тензор 132
 Единицы электромагнитные и электростатические 37
 Емкостные коэффициенты 437, 451, 452, 453
 Емкость проводника 391, 394, 449
 — эллипсоида 491
 Законы отражения и преломления света 297
 Затухание вследствие излучения 173
 — — поглощения 265
 — — рассеяния 265
 — — столкновений 174, 175, 178, 179
 — естественных колебаний осциллятора 11
 — собственных колебаний провода 357
 Затухания вектор 211
 — влияние на распространение света 239
 — коэффициент 210
 Зеркало идеальное 308
 Зоммерфельд А. 318, 333, 362, 368
 Излучение направленное 311
 — пустотное 118, 119
 — рассеянное 262, 265, 267, 269, 270, 275
 Излучения вектор 62
 Изображение зеркальное 308, 310, 312
 Изображений электрических метод 480, 483, 484 и след.
 Изотермические процессы 110, 112
 Изотропные тела 37, 46, 132, 288, 293, 296
 — — однородные 65, 66, 73, 206 и след.
 Импульс электрический провода 357
 Индукционные электростатические коэффициенты 406, 437, 451, 452, 453
 Индукция магнитная 16, 19, 39

- Индукция электрическая** 16, 39, 52, 341
 — электромагнитная 143
 — электростатическая 143
Интегральное уравнение распро-
 странения волн 284
Ионы 12, 15, 16, 84, 136
Ионные слои 197
Испарение свободных электронов
 441
Кабель 339, 397, 398
Квазиоднородные тела 255, 256; 258
Квазистатические процессы 383, 400,
 439, 450
Квазистационарные процессы 383,
 400
Керра эффект 53, 161
 — магнитный 294, 295
Кирхгофа правило 408
Клаузиуса формула 120
Колесания гармонические 10, 40, 52,
 90, 278
 — — затухающие 11, 90, 93, 94,
 168 и след.
Колесания дипольные 359, 361
 — когерентные 254, 277
 — негармонические 10, 241 и след.
 — незатухающие 167, 175, 176
 — некогерентные 254, 264, 265
 — собственные 340, 342, 343, 344,
 345, 346 и след.
 — электрические вынужденные 365,
 366 и след.; 525, 538, 541
 — — собственные в металлах 340,
 342, 343 и след.; 525
 — электрической цепи вынужден-
 ные 392, 394, 418
 — — — собственные 392, 394
Конденсатор 389, 390, 449, 459
 — шаровой 479
Конформное отображение 499
Координатные линии 494
 — поверхности 494, 458
Координаты конфокальные 500, 503
 — конформно отображающие 499
 — криволинейные 458
 — — ортогональные 494
 — расстояния 508
 — с симметрией вращения 501, 526
 — сферические 498, 526
 — сфероидальные 502, 519, 526
 — угловые 508
 — цилиндрические 497, 501, 520
 — эллипсоидальные 503, 504
 — эллиптические 500, 501, 523
Козрцитивная сила 113, 153
Коэффициент отражения 290, 292
Коэффициент поглощения 210, 240,
 292, 306
 — прохождения 290, 292
 — рассеяния 270, 277
- Кристаллы ацентрические** 130
 — двуосные и одноосные 229, 239
 — положительные и отрицательные
 229
Критическая температура 113, 151, 152
Кюри температура 113, 151, 152
Лагранжа метод неопределен-
 ных множителей 225, 412
 — ряд 30
 — функции 410, 411, 414
Лангмюир 444
Ланжевена теория магнитной
 поляризации 138, 140, 149—154
Лапласа оператор в конфокаль-
 ных координатах 505
 — — в криволинейных координа-
 тах 497
 — уравнение 434, 444, 446, 447, 458,
 465, 521
 — — в цилиндрических координа-
 тах 520
Лармор 368
Лармора прецессия 146
Лежандра полиномы 185, 511,
 518
 — функция присоединенная 520, 521,
 539
Линейного расширения коэффициен-
 ты 124
Линии узловые 342, 343, 354
Лорана ряд 522
Лоренц 151, 194
Лоренца поправки 79, 96, 106,
 107, 456
 — преобразования 21, 47, 98, 105
 — принцип движения 57
 — теория затухания 175, 176, 179
 — формула для диэлектрической
 постоянной 133
Лучевая скорость 222, 224
Лучи обыкновенные и необычно-
 венные 229, 230, 303, 304
 — световые 258, 260
Магнетострикция 122, 130
Магнитная проницаемость 39
 — цепь 468, 470
 — энергия 144
Магнитное поле переменное акси-
 альное 420
 — — — поперечное 424
 — — — вращающееся 425
Магнитодвижущая сила 469
Максвелл 49, 383
Максвелла-Больцмана ста-
 тистика 192
 — закон распределения 137
 — Лоренца уравнения 13, 383
Масштабный множитель 499
Материализации метод 460, 461, 462
Ми Г. 528, 539
Минковский Г. 46

- Модуль сдвига 126
 — сжатия 127
 — упругости 126
 Молекулярное поле Вейсса 154
 Момент вращательный единицы объема 75
 — дипольный 8, 24, 71, 103, 136
 — квадрупольный 24, 25, 27
 — магнитный электрона прецессирующего 146, 147
 — — — свободного 36, 144
 — — — связанного 144
 — молекулы магнитный 8, 11, 33
 — — — электрический 8, 11
 М о п е р т ю и принцип наименьшего действия 260
 Мотор трехфазный 425
 Мультиполи 351
 Мутные тела 255, 262, 264, 265
 Намагничение спонтанное 151, 154, 155, 156
 Напряженность полная усредненная 69, 79
 — средняя поля молекулы 77, 78, 79
 — эффективная 60, 67, 69, 76, 79, 81, 167
 Насыщения явления 53
 Н е р н с т 200
 Нормированные характеристические функции 348
 Н ь ю т о н И. 471
 Обратимые процессы 108
 О м а закон 12, 13, 37, 38, 49, 54, 186, 391
 Опалесценция 275
 Оптика волновая 260
 — лучевая или геометрическая 260, 369
 Оптическая активность 165, 237
 — асимметрия молекул 270
 Ориентация дипольных молекул 11, 131, 136, 137
 Ортогональности характеристических функций, условие 347, 348
 Оси оптические кристалла 225, 228
 — электрические и магнитные 42, 43
 Основные колебания 218, 220, 221, 234, 242
 — — — поляризационные по кругу 234
 — — — эллиптически поляризованные 232, 235, 240
 Основных колебаний направления 220, 224 и след., 305
 Остаточное намагничение 113, 151, 153
 Острога резонанса 172
 Осциллятор изотропный 170, 171
 — квадрупольный 354
 — линейный 8
 Осциллятор магнитный 309, 315
 — электрический 309
 — элементарный 267, 268, 309
 Отражение плоской волны 376
 — полное 300, 302, 306
 Отражения коэффициент 290, 292
 Парамагнетизм 148, 153
 П а у л и В. 137
 П а у л и - Ф е р м и статистика 193, 205
 П е л ь т ь е тепло 116
 П л а н к М. 173, 358, 359
 Плоскость идеально проводящая 306, 308, 309
 Плотность потока лучистой энергии 214
 — — — электромагнитной энергии 88, 100, 214
 — — — электромагнитного количества движения полного 88, 100, 222
 — — — — свободных электронов 64
 — — — — связанных электронов 73, 84
 Плотность энергии полная 86
 — — — свободных электронов 61, 62, 223
 — — — связанных электронов 70, 80
 Поверхностная плотность заряда 17, 67, 307, 328
 — — — тока 17, 68, 307, 328
 Поверхностные эффекты 97, 107
 Поверхностный заряд свободный 198, 199
 Поверхность лучей 226, 227
 — нормалей 226, 227, 239
 — разрыва 17
 Поглощение 171
 — волн 283
 Поглощения коэффициент 210, 240, 292, 306
 Подвижность 12
 Поле на далеком расстоянии 357
 — электростатическое 341
 Полость металлическая 362
 Полупроводники 191, 204
 Полос 608
 Поляризации коэффициент динамический 10
 — — — комплексный 157, 170
 — — — статический 9, 133, 134, 156, 157, 162, 185
 — — — коэффициент средний геометрический 133, 134, 136, 141
 — — — статистический 141, 142
 Поляризации тензор 21, 28, 98, 132, 136, 157, 158, 165
 Поляризационный потенциал 279, 312, 314
 Поляризационные слои 196, 441
 Поляризация диамагнитная 142, 143

- Поляризация магнитная 8, 11, 14, 18, 19, 33, 36, 142 и след. 237
 — — второго и высших порядков 27
 — ориентационная 11, 137, 139, 184
 — остаточная 130
 — парамагнитная 142, 148, 149
 — рассеянного излучения 269
 — света линейная 299
 — электрическая 8, 11, 14, 20, 29, 132 и след.
 — — второго и высших порядков 24, 25, 50
 — электролитическая 196 и след.; 441
 — эллипсоида 490
 Пондеромоторное действие 71, 148
 Постоянная решетки 378
 Потенциал комплексный 331, 424, 462, 522
 — контактный 204
 — кулонов 463
 — поляризационный 279, 312, 314
 — термодинамический 109
 Потенциал электростатический 433
 Преломление электрических силовых линий 41, 387
 Преломления показатель 208, 297
 Провода идеальные 327 и след.
 — неидеальные 333 и след.
 — прямолинейные 354 и след.
 Проводимости коэффициенты 437
 Проводник идеальный 306
 — цилиндрический 462 и следующие: 484
 Прозрачные тела 208, 214, 237, 242, 255, 297
 Пучности поверхностной плотности заряда 342
 Пучность волны 250
 Пьезомагнетизм 130
 Пьезоэлектрический эффект 130
 Работа сил, действующих на свободные электроны 61
 — — — связанные электроны 69, 70
 Разделимые переменные 518
 Размагничивание коэффициенты 490
 Распространение радиоволн 312 и след.
 — электромагнитных колебаний 208
 Рассеяния коэффициент 270, 277
 Резерфорда модель атома 158, 192
 Резонанс 169—172
 Резонансная кривая 171, 172
 Рентгена ток 23
 Рефракция коническая 299, 303
 Ротор 416, 417
 Рэлея дифракционная решетка 377
 Рэлея формула для рассеянного излучения 267
 Самоиндукции коэффициент 391, 394, 395
 Сверхпроводимость 194
 Световое давление 117, 163, 174
 Связи коэффициент 402
 Связь электрических цепей гальваническая 408
 — — — индуктивная 400
 — — — электростатическая 406
 Сила объемная 69, 72, 73, 75, 84
 — поверхностная 67, 68, 75
 — собственная 57
 — трения 358, 359
 — четырехмерная, действующая на вращающийся электрон 103
 — — — свободные электроны 102
 — — — связанные электроны 101, 102
 — — — полная 99
 Силы электродвижущие индуцированные 71, 143, 391
 — — электрической поляризации 201
 Скин-эффект 339, 385, 399
 Скорость групповая 244, 246, 247, 252
 — лучевая 222, 224
 — распространения колебаний в движущихся телах 216, 217
 — — электромагнитного возмущения 248, 249
 — смещения 191
 — фазовая 244, 246, 247
 Смещение элементарное 188, 190
 Собственная энергия электронов 56
 Собственные колебания пустого пространства 362, 363
 — — электрической цепи 392, 394
 — — эллипсоида 532, 533
 Соленоид 395, 405, 406
 Сопротивление омическое 391
 — системы 449
 Сопротивления коэффициенты 437
 Сохранения электричества принцип 38
 Спектр дифракционный 378
 — процесса 243
 — — непрерывный 246
 — электрический 343
 Спонтанное намагничение 151, 154, 155, 156
 Среднее временное квадратичной величины 91
 Среднее значение микроскопическое 5
 — статистическое значение 138
 — — — энергии 141, 142
 Стационарность тока 389

- Стационарные явления 382
 Степень деполаризации рассеянного излучения 273
 Стефана-Больцмана формула 119
 Тамм И. 46
 Телеграфное уравнение 397
 Тензор восприимчивости 90, 92, 94, 96, 106, 132, 281
 — вращательного момента 104
 — деформации 125, 126
 — диэлектрической постоянной 132
 — единичный антисимметрический 52
 — моментов электромагнитный 50
 — напряжений 64, 65, 66, 87, 88
 — напряжений для свободных электронов 64, 65, 66
 — — связанных электронов 73, 74, 84
 — поляризации 21, 28, 98, 132, 136, 157, 158, 165
 — упругого напряжения 125, 126, 127
 — электромагнитного поля 45
 — электромагнитной индукции 20, 21, 29, 46
 — энергии и напряжений четырехмерный 97
 Тензора четырехмерные третьего и четвертого ранга 46
 — энергии условие расщепления 104
 Теорема о минимальном значении 447, 448
 Теплоемкость удельная 112
 Термодинамика 108 и след.
 — электромагнитного излучения 116, 119
 Термодинамические соотношения для контактных явлений 115, 116
 — — поляризации 111, 112
 Термоэлектроны 441, 442
 Тейлора ряд 31, 522
 Ток гальванический 463
 — диффузионный 180, 195
 — индукционный 418, 419, 430
 — квазистационарный 385
 — конвекционный 49, 181
 — насыщения 443
 — проводимости 12, 13, 49, 186
 — четырехмерный 20, 28, 48
 Тока функция 443
 Томсон В. 448
 Томсона Д. Д. 338, 351
 Трансформатор 405
 Трения коэффициент 12, 173, 181, 184
 Угол преломления комплексный 300, 313
 Узловые линии 342, 343, 354
 — плоскости 249
 Упругости коэффициент 126
 Уравнения макроскопические электромагнитного поля 13, 28, 36
 Условия существования энергии 62, 89, 90, 91
 Фазовая скорость 244, 246, 247
 Фарадея эффект 53, 160, 236
 Ферма принцип 260
 Ферромагнитные тела 113, 143, 150, 154
 Флюктуации объема 274
 — ориентации 262, 270, 271
 — плотности 262, 266, 267, 273—275
 — поляризации 268
 Фраунгофера диффракция 372
 Френеля диффракция 374
 — оваллоид 225
 — уравнение для волновых скоростей 220, 239, 293, 305
 — формулы для отраженных волн 299, 312
 Функция действия 258
 Фурье интеграл 10, 242, 323, 324, 377—379
 — ряд 10, 242, 377, 378
 Ханкеля функции 527
 Характеристические значения 346, 348, 525, 530, 532
 — функции 346—348, 525, 526, 529
 Хевисайд 368
 Холла ток 38, 53
 Ценник 315
 Цилиндрические функции 527, 528
 Частота колебаний комплексная 11, 168
 — резонансная 157, 169, 170, 367, 403
 Четырехмерная сила 99, 101, 102, 103
 — форма уравнений поля 20, 45
 Четырехмерный вектор импульса и работы 101
 — потенциал усредненный 49
 — тензор третьего и четвертого ранга 46
 — — электромагнитной поляризации 27
 — — энергии и напряжений 97
 Четырехмерный ток 20, 28, 48
 Шар в однородном поле 466
 — проводящий 351, 471
 Шара вынужденные колебания 538
 — собственные колебания 349 и след., 533 и след.
 Шаровые функции 510, 512, 538
 Шварцшильда вариационный принцип 448
 Шредингер Е. 260
 Электрические уравнения движения 411, 412, 416
 Электроды 433, 436, 464
 Электролиты 434, 435, 437 и след.
 — жидкие 200

- Электроны валентные 192
 — свободные 12, 13, 58, 59, 60, 62, 64, 163, 191, 192
 — связанные 11, 12, 13, 18, 58, 69, 163
 Электропроводность 45, 186, 187
 — газов 189
 — металлов 191, 193
 — полупроводников 191
 — удельная 37
 — электролитов 190, 191
 — эффективная 93, 206
 Электростатических потенциалов распределение 435, 436, 437
 Электрострикция 121, 129, 130
 Элемент дуги в криволинейных координатах 495
 — — — сферических координатах 498
 — — — цилиндрических координатах 497
 — — — эллиптических координатах 501
 Эллипсоид в однородном поле 488
 Эллипсоид проводящий 471, 473
 Эллипсоида потенциал 473 и следующие
 — собственные колебания 532, 533
 — уравнение 224
 Эллиптический цилиндр 477, 478
 Энергия внутренняя 109
 — лучистая 117
 — механическая 359, 388, 394
 — поверхностная 115
 — свободная 109, 110, 115, 127
 — системы покоящихся электронов 55
 — электронов свободных 63
 — — — связанных 69, 70, 108, 109
 — — — собственная 56
 — электростатическая проводника 388, 394
 Энтропия 108, 109, 116
 Э р м и т а условия 90, 105, 157, 230
 Эйлера теорема об однородных функциях 450
 Эйнштейн 180, 182, 184, 187
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

Общие принципы макроскопической теории

Глава I. Основные уравнения макроскопического электромагнитного поля

	Стр.
§ 1. Зависимость усредненных величин, характеризующих поле, от усредненных субстанциальных величин	
1. Определение средних значений различных величин	3
2. Определение средних величин, характеризующих поле	5
§ 2. Зависимость усредненных субстанциальных величин от усредненных величин поля	6
1. Общие положения и введение материальных постоянных	7
2. Колебательные явления по квази-упругой теории	8
3. Вращательное движение дипольных молекул и поступательное движение ионов	11
§ 3. Дифференциальные уравнения макроскопического поля	
1. Разделение частей, соответствующих свободным и связанным электронам. Индукционные величины	13
2. Поверхности разрыва и граничные условия	16
3. Обратный характер обычного определения магнитной индукции	18
§ 4. Четырехмерная форма основных уравнений и применение их к медленно движущимся телам	20
§ 5. Электромагнитная поляризация второго и высшего порядка	
1. Объемные и поверхностные заряды, эквивалентные электрической поляризации высшего порядка	24
2. Релятивистское обобщение	27
§ 6. Геометрическая интерпретация макроскопического распределения электричества при помощи моделей молекулы	
1. Электрическая поляризация и плотность заряда	29
2. Магнитная поляризация и релятивистское обобщение	33
§ 7. Простейшая форма уравнений электромагнитного поля для изотропных и анизотропных тел	
1. Электромагнитные константы изотропных тел	36
2. Основные уравнения и граничные условия	40
§ 8. Обобщение уравнений поля для движущихся тел	
1. Непосредственный учет скорости движения	43
2. Релятивистское обобщение электромагнитных материальных констант	46

	Стр.
§ 9. Различные усложнения теории для реальных тел	49
1. Усложнения, обусловленные поляризацией высших порядков	50
2. Усложнения, нарушающие линейность уравнений	53

Глава II. Энергия и силы

§ 1 Предварительные замечания	
1. Физическое значение энергии в макроскопической электродинамике	55
2. Физический смысл макроскопических электромагнитных сил	57
3. Разделение квадратичных величин соответственно отношению чисел свободных и связанных электронов	58
§ 2. Квадратичные величины свободных зарядов (энергия, силы, напряженность)	
1. Эффективные силы, действующие на свободные электроны, и их работа	59
2. Преобразование работы. Электромагнитная энергия свободных электронов	61
3. Преобразование сил; тензор напряжения, соответствующий свободным электроном	64
4. Граничные поверхности и поверхностные силы	66
§ 3. Квадратичные величины, соответствующие связанным электронам	69
1. Энергия связанных электронов	69
2. Силы и напряжения	72
§ 4. Соотношение между усредненной, полной и эффективной напряженностями поля в случае связанных электронов; уточнение результатов предыдущих параграфов	
1. Эффективные напряженности поля в центре нейтральной молекулы; поправки к плотности энергии и излучения	76
2. Градиент эффективной напряженности поля центра молекулы; поправка для сил и напряжений	80
3. Эффективные напряженности поля в случае смеси различного рода молекул	84
§ 5. Полные квадратичные величины и обобщенные условия их расщепления	
1. Полный тензор энергии и напряжений	86
2. Средние значения квадратичных величин для случая гармонических колебаний. Эрмитовы условия для тензоров восприимчивости	90
3. Затухающие колебания и сведение затухания к кажущейся проводимости	93
§ 6. Четырехмерная форма тензора энергии и напряжений	
1. Поверхностные эффекты и добавочные члены, появляющиеся вследствие требования инвариантности	96
2. Расщепление четырехмерного тензора энергии и напряжений на части, соответствующие свободным и связанным электронам	101
3. Релятивистское исследование поправок Лоренца	106
§ 7. Электромагнитная энергия и термодинамика	
1. Общие принципы и основные величины. Значение энергии связанных электронов	108
2. Основные термодинамические соотношения для случая явлений, связанных с электрической и магнитной поляризацией	111

3. Термодинамические соотношения для контактных явлений, зависящих от свободных электронов	115
4. Термодинамика электромагнитного излучения	116
§ 8. Электромагнитные силы и теория упругости	
1. Электро- и магнитострикция в газообразных и жидких телах	120
2. Основы теории упругости твердых тел	123
3. Явления электро- и магнитострикции в твердых телах	127
 Глава III. Квазимикроскопическая теория электромагнитных свойств материальных тел	
§ 1. Электростатическая поляризация (электрическая восприимчивость в случае постоянных во времени полей)	
1. Вычисление восприимчивости диэлектрических тел исходя из тензора поляризации отдельных молекул	131
2. Вычисление тензора поляризации молекул исходя из коэффициентов поляризации отдельных атомов	134
3. Поляризация, обусловленная ориентацией дипольных молекул	136
4. Эффект ориентации в случае неполярных молекул	140
§ 2. Магнитоэлектрическая поляризация (диа- пара- и ферромагнитные явления)	142
1. Сущность диамагнетизма	143
2. Вычисление диамагнитной восприимчивости	146
3. Парамагнетизм	148
4. Ферромагнитные явления	150
5. Спонтанное намагничение	154
§ 3. Электрическая поляризация в случае гармонически колеблющихся полей. Вращение плоскости поляризации и оптическая активность	
1. Тензор поляризации и вектор <i>гирации</i>	156
2. Гирация, обусловленная дополнительным магнитным полем	159
3. Оптическая анизотропия, обусловленная дополнительным электрическим полем	159
4. Влияние магнитных колебаний на электрическую поляризацию	163
5. Влияние пространственной периодичности электрического поля. Оптическая активность	164
§ 4. Электрическое затухание	
1. Формальная теория затухания и его влияние на тензор электрической поляризации при гармонических колебаниях	167
2. Затухание, обусловленное излучением	173
3. Затухание вследствие столкновений	174
§ 5. Ориентационная поляризация и соответствующее ей затухание в гармонически колеблющихся полях	180
1. Общая теория диффузионного движения с трением	180
2. Приложение к теории ориентационной поляризации	182
§ 6. Электрическая проводимость	
1. Общая теория электрической проводимости	186
2. Электрическая проводимость газов	188
3. Проводимость жидких и твердых электролитов	190
4. Проводимость металлов	191

§ 7. Электролитическая поляризация и контактные потенциалы	
1. Диффузионные силы и поляризационные слои	195
2. Электролитическая поляризация в случае одного подвижного сорта ионов (твердые электролиты и металлы)	196
3. Электролитическая поляризация в случае двух подвижных сортов ионов	200
4. Контактные потенциалы	204

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

Общие проблемы макроскопической теории

Глава IV. Распространение электромагнитных колебаний (волн) в неограниченной среде.

§ 1. Однородные изотропные тела	
1. Общие дифференциальные уравнения	206
2. Плоские волны. Скорость распространения и коэффициент поглощения	209
3. Плоские волны: амплитуды и энергия	212
4. Распространение плоских волн в движущихся телах	215
§ 2. Плоские волны в однородных анизотропных телах	217
1. Скорость волн как функция волновой нормали. Основные колебания D	218
2. Скорость лучей как функция направления лучей света. Основные колебания E	221
3. Графическое определение направлений основных колебаний при помощи поверхностей (σ, ϵ) и (μ, d)	224
4. Поверхность лучей и поверхность нормалей	226
5. Одноосные кристаллы	229
§ 3. Плоские волны в гиротропных телах; обобщение на произвольные однородные тела	230
1. Общая теория оптической гиротропии; скорость распространения волн и типы основных колебаний	230
2. Более подробное рассмотрение предыдущих результатов	232
3. Вращение плоскости поляризации; эффект Фарадея	235
4. Общая теория прозрачных тел	237
5. Влияние затухания	239
§ 4. Негармонические колебательные процессы в однородных телах; линейные и пространственные волновые группы	
1. Представление произвольных электромагнитных процессов путем наложения плоских синусоидальных гармонических волн	241
2. Линейные (плоские) волновые группы	243
3. Дисперсия плоских волн	246
4. Стоячие плоские волны	249
5. Пространственные волновые группы; волновые пакеты, монохроматический пучок лучей	250
6. Дополнения	253
§ 5. Электромагнитные волны в квази-однородных телах	
1. Общее исследование волнового уравнения	255
2. Короткие волны; геометрическая оптика и ее аналогия с механикой	257
3. Дополнения; волновая оптика и элементарные волны Гюйгенса	260

	Стр.
§ 6. Рассеяние электромагнитных волн в мутных средах	261
1. Определение рассеянного излучения при помощи приближенного решения „возмущенного“ волнового уравнения	262
2. Элементарное определение рассеянного излучения, вызываемого колебаниями плотности и его поляризации	267
3. Рассеянное излучение, вызываемое колебаниями ориентации, и его деполаризующее действие	270
4. Колебания плотности в жидких твердых телах	273
5. Кажущееся поглощение, вызываемое рассеянием первичных волн (затухание)	275
§ 7. Исследование распространения воды в однородных телах прямым методом теории запаздывающего дальнего действия	
1. Предварительные замечания	277
2. Вторичное излучение, вызываемое слоем материи, параллельным первичным волнам	278
3. Приближенная форма законов распространения волн в однородных телах и их наглядное толкование	281
4. Точное решение задачи с помощью интегрального уравнения	284
Глава V. Электромагнитные колебания в ограниченных телах	
§ 1. Отражение и прохождение плоских волн при перпендикулярном падении на плоскую поверхность раздела двух однородных сред	
1. Исследование по методу теории дальнего действия	286
2. Рассмотрение задачи обычным методом; изотропные тела	288
3. Анизотропные и гиротропные тела	293
§ 2. Отражение и преломление плоской волны при наклонном падении на плоскость раздела	
1. Изотропные прозрачные тела	296
2. Полная поляризация, полное отражение, поглощение	299
3. Анизотропные тела; двойное лучепреломление и коническая рефракция; графическое построение преломленных волн и лучей	303
§ 3. Отражение и преломление сферических волн на плоской граничной поверхности; распространение волн в беспроводной телеграфии.	
1. Идеально проводящая плоскость	306
2. Электрическая и магнитная антенна в случае идеально проводящей земли	309
3. Распространение радиоволн от вертикальной электрической антенны	312
§ 4. Поверхностные волны и более точная теория распространения радиоволн вблизи земной поверхности.	
1. Плоские поверхностные волны	315
2. Цилиндрические поверхностные волны и представление производного волнового процесса посредством их суперпозиции	318
3. Применение общих формул к случаю вертикальной электрической антенны	322
§ 5. Волны в проводках	
1. Идеальные проводки	327
2. Не идеально проводящие проводки	333
3. Изолированный провод с круглым сечением; кабель	336
§ 6. Электромагнитные колебания в телах, ограниченных со всех сторон. Общая теория собственных колебаний	
1. Механизм собственных электрических колебаний в проводящих телах	340

	Стр.
2. Собственные колебания по теории поля и по субстанциальной теории	343
3. Некоторые общие свойства собственных колебаний; ортогональность характеристических функций при внутренней задаче	346
§ 7. Важнейшие частные случаи собственных колебаний	
1. Шар	349
2. Прямолинейный провод конечной длины	354
3. Полость (прямолинейный ящик)	362
§ 8. Вынужденные колебания и явления диффракции	
1. Общий способ рассмотрения	365
2. Качественное рассмотрение двух предельных случаев	366
3. Простейшие задачи диффракции; диффракция света от экранов и отверстий	368
4. Элементарная теория диффракции в случае параллельных первичных и вторичных лучей	375
5. Диффракционная решетка как физический и математический прибор	377
 Глава VI. Теория явлений, не связанных с излучением (квазистационарных и квазистатических) в ограниченных телах	
§ 1. Основы приближенной теории квазистационарных процессов (не связанных с излучением)	382
1. Приближенные уравнения поля	383
2. Граничные условия	386
3. Энергия	387
§ 2. Электрические колебания в линейном проводнике	
1. Силы и ток в не совсем замкнутом проводнике	389
2. Собственные и вынужденные колебания почти замкнутого проводника	391
3. Распространение электромагнитных колебаний в проводах и кабелях	396
§ 3. Электрические колебания в системе линейных проводников (квазистационарные линейные токи)	
1. Индуктивно связанные проводники	400
2. Электростатическая и гальваническая связь (сети токов)	406
3. Применение общего вариационного принципа Гамильтона к сети токов	409
4. Механические силы между переменными токами; движущиеся проводники с током; динамомашинны	414
§ 4. Теория индукционных токов в массивных (трехмерных) проводниках и пластинках	
1. Приближенный метод определения индукционных токов	418
2. Аксиальное (меридиональное) переменное магнитное поле	420
3. Поперечное переменное магнитное поле; вращающиеся поля и трехфазные моторы	424
4. Относительность вращательного движения; тонкие диски в поперечном и продольном магнитном поле	428
5. Неограниченная плоская пластинка в произвольном переменном магнитном поле	430
§ 5. Постоянные (гальванические) токи и переход к электростатике	
1. Распределение тока в электролитах (в не идеально проводящих телах) в присутствии металлических (идеально проводящих) электродов	433

	Стр.
2. Распределение электростатических потенциалов и их отношение к гальваническому	435
3. Случай однородного электролита	437
4. Случай двух различных электролитов	438
5. Термoeлектрические явления и влияние свободного объемного заряда на электростатическое распределение потенциала	441
§ 6. Общие принципы электро- и гальваностатики	
1. Однозначность решения электростатической задачи и теорема о минимальном значении	444
2. Гальваностатическая задача и ее связь с электростатической в случае двух электродов	448
3. Детальное рассмотрение электростатической энергии в связи с индукционными и емкостными коэффициентами	450
4. Электростатические силы	453
§ 7. Основные задачи и методы электро-, гальвано- и магнитостатики	457
1. Проводящие тела произвольной формы	458
2. Цилиндрические проводники (плоские задачи)	461
3. Диэлектрические и намагничивающиеся тела в заданном первичном поле	464
4. Магнитные цепи	467
§ 8. Электростатические задачи, решаемые элементарными способами	
1. Распределение заряда на проводящем эллипсоиде	471
2. Потенциал эллипсоида вращения	473
3. Эллиптический цилиндр	477
4. Два проводящих шара; метод электрических изображений	479
5. Применение метода изображений к цилиндрическому проводнику	484
6. Диэлектрические тела; несовершенное изображение в плоскости; эллипсоид в однородном поле	486

Математические дополнения

§ 1. Криволинейные ортогональные координаты	
1. Цилиндрические координаты (r, α, z)	497
2. Пространственные полярные или сферические координаты R, θ, α	498
3. Конформно отображающие координаты (ξ, η, ζ)	499
4. Координаты с осевой симметрией вращения	501
5. Эллипсоидальная (конфокальная) координатная система	503
§ 2. Статические задачи; разложение по основным гармоническим функциям	
1. Постановка задачи и простейший метод решения	506
2. Общие свойства основных гармонических функций (шаровые функции)	507
3. Решение электростатических задач разложением потенциала по основным гармоническим функциям	513
4. Основные гармонические функции для сфероидальных и цилиндрических координат	518
5. Плоские задачи и аналитические функции	522
6. Пространственные задачи и функция Грина	524
3. Задачи о колебаниях; разложение по характеристическим функциям	
1. Вид характеристических функций в случае координат с симметрией вращения (сферические и сфероидальные координаты)	526
2. Собственные колебания при наличии симметрии вращения	530
3. Общая теория собственных электрических колебаний не идеально проводящего шара	533
4. Вынужденные колебания шара в поле плоских электромагнитных волн	538
5. Нахождение вынужденных колебаний при помощи квадратур	541
Указатель	542

Редактор *А. В. Князев.*

Техн. редактор *Р. В. Эмдина.*

Лзд. № 374. Тираж 7 000. Подп. в печать с матриц 8/VII 1935 г. Формат бумаги 62×94 . Авторск. лист. 39,23. Бумажн. лист. $17\frac{3}{8}$. Печатных зн. в бумажн. листе 106 848. Заказ № 827. Ленгорлит № 13292. Выход в свет июль 1935 г.

3-я тип. ОНТИ им. Бухарина. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

538

Ф-87

№2

Проф. Я. И. ФРЕНКЕЛЬ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ТОМ ВТОРОЙ

ОНТИ—1935