А. А. Фридман

МИР
как пространство и время

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Издательство «Наука»
Москва 1965

1

ПРОСТРАНСТВО

2

ВРЕМЯ И МИР

3

ТЯГОТЕНИЕ И МАТЕРИЯ

Книга принадлежит перу выдающегося русского ученого Александра Александровича Фридмана (1888—1925). Это—первое на русском языке популярное изложение теории относительности, написанное более сорока лет назад. За это время появилось много популярных и непопулярных работ о теории Эйнштейна, но книга А. А. Фридмана не утратила своей ценности. Она с интересом и пользой будет прочитана всеми, кто изучает новую физику и ее историю.

ВСТУПЛЕНИЕ

Однажды, когда ночь покрыла небеса своею епанчою, знаменитый французский философ Декарт, у ступенек домашней лестницы своей сидевший и на мрачный горизонт с превеликим вниманием смотрящий,— некий прохожий подступил к нему с вопросом: «С к а ж и, м у д р е ц, с к о л ь к о з в е з д н а с е м н е б е?» —«М е р з а в е ц!— ответствовал сей,— н и к т о н е о б ъ я т н о г о о б н я т ь н е м о ж е т!» Сии, с превеликим огнем произнесенные, слова возымели на прохожего желаемое действие.

«Гисторические материалы
Федота Кузьмича Пруткова (деда)»

1. В только что приведенном разговоре Декарта с прохожим прохожий «вразумился» и успокоился; но на самом деле в человеческой истории стремление «счесть звезды», иначе говоря, построить картину мира, никогда не давало людям покоя, и, как бы ничтожна ни была сумма людских знаний, всегда находились среди мыслящего человечества и любопытные прохожие и более, нежели Декарт, обходительные мудрецы, пытающиеся, на основании постоянно ничтожных научных данных, воссоздать картину мира.

В XX веке человек попытался снова, на основании тех сведений о мире, которые естествознание ко времени нашей эпохи накопило, создать общую картину мира, правда, мира чрезвычайно схематизированного и упрощенного, напоминающего настоящий мир лишь постольку, поскольку тусклое отражение в зеркале схематического рисунка Кельнского собора может напомнить нам сам собор. Эта попытка «счесть звезды» и создать общую картину мира носит мало соответствующее название *принципа относительности*.

2. Мир, схематическая картина которого создается принципом относительности, есть мир естествоиспытателя, есть совокупность лишь таких объектов, которые могут быть измерены или оценены числами, поэтому этот мир бесконечно у́же и меньше мира-вселенной философа; а раз это так, то, конечно, и значение принципа относительности для философии не должно быть переоцениваемо. Вероятнее всего, что значение принципа относительности для философии не больше, чем значение для нее космогонических гипотез современной астрономии. Но из сказанного не следует делать и другого крайнего вывода и отрицать начисто для философии схемы мира, даваемой принципом относительности. Грандиозный и смелый размах мысли, характеризующий общие концепции и идеи принципа относительности, затрагивающие такие объекты, как пространство и время (правда, измеримое), несомненно, должен произвести известное впечатление, если даже не влияние, на развитие идей современных философов, часто стоящих слишком выше «измеримой» вселенной естествоиспытателя.

3. Указанное побуждает меня считать, что *действительное* ознакомление с идеями принципа относительности на страницах философского журнала[1], быть может, и не явится излишним; говоря о действительном ознакомлении, я противопоставляю подобное ознакомление разнообразным попыткам популяризовать, совершенно не поддающийся популяризации принцип относительности; эта популяризация достигается или ценой полного затемнения идей, лежащих в основе принципа относительности, или же, что, пожалуй, еще хуже, ценой извращения этих идей. Из сказанного видно, что изложение настоящей

---

[1] Эта статья предназначалась для журнала «Мысль».

статьи ни в каком случае не претендует быть популярным и требует, что совершенно необходимо по существу дела, основательного знания по крайней мере элементов высшей математики.

4. Я разделил настоящую статью на три главы. Первая глава посвящена учению об общих свойствах пространства. Для простоты рассматривается пространство трех и даже часто двух измерений, но все выводы могут быть путем простых, хотя иногда и не строгих аналогий, распространены на пространство любого числа измерений, в том числе и на пространство четырехмерное. Эту главу я начинаю с разбора вопроса об оценке и измерении, вопроса, весьма важного для правильного понимания многих концепций теории относительности. Излагая далее основные свойства геометрического пространства (метрика, направление, угол, параллельное перемещение, прямая, вектор кривизны и т. п.), я подробно останавливаюсь на вопросе интерпретации геометрического пространства, с помощью пространства физического; указывая на произвольность этой интерпретации, я устанавливаю вместе с тем, какой смысл приобретает вопрос экспериментального исследования свойств нашего пространства; следует отметить, что этот вопрос не имеет, конечно, никакого смысла, раз упомянутая интерпретация не установлена.

Вторая глава трактует об одном из труднейших вопросов теории относительности, а именно о времени, о невозможности самостоятельного существования времени и пространства в отдельности и об объединении их в четырехмерный физический мир, который может определенным способом интерпретировать мир геометрический. Само собой разумеется, что в указанной главе рассматривается не время философов, а скромное «измеримое» время естествоиспытателей. Особое внимание обращено на подробное выяснение полного произвола установления этого «измеримого» времени.

Мир, т. е. соединение пространства и времени, разобран во второй главе с достаточной подробностью: большое внимание уделено мною вопросу о *постулате инвариантности*, дающем правильную идею при установлении физических законов нашего мира. Постулат вещественности и связанные с ним вопросы причинности тоже подвергнуты достаточно подробному рассмотрению. Не меньшее внимание уделено разнице физического и геометрического мира и произвольности интерпретации одного мира другим. Заметим, что историческое соединение пространства и времени в четырехмерный мир произошло с помощью так называемого специального принципа относительности; логически специальный принцип относительности можно, без особого ущерба для дела, оставить почти целиком в стороне. Я так и поступлю, имея в виду, что этот принцип относительности не раз с достаточной подробностью освещался как в общей, так и в специальной научной литературе.

Третья глава будет содержать в себе описание методов, с помощью которых принцип относительности пытается построить картину мира. Эту главу я начинаю с изложения общих основ старой и новой механики и главным образом с установления закона инерции, имеющего место в новой общей механике. Затем я перехожу к изложению ряда гипотез, с помощью которых Эйнштейн связал вопрос о силе тяготения с вопросом геометрии мира; экспериментальные подтверждения этих гипотез служат свидетельством правильности их, по крайней мере, в общих чертах.

Связь тяготения со свойствами нашего мира является одной из блестящих идей Эйнштейна, хотя генезис этой идеи восходит к более отдаленным временам, а именно ко времени появления известной работы Римана. Германский математик Weyl, исходя из концепций Римана, пользуясь идеями Hilbert'a и обобщая и расширяя идеи

Эйнштейна, предположил, что между свойствами материи, заполняющей мир, и свойствами мира точно так же имеет место теснейшая связь, позволяющая, экспериментируя с материей, установить более детально свойства нашего мира; идеям Weyl'я я считаю нужным отвести соответствующее место в третьей главе.

Конец третьей главы будет посвящен вопросу об общем устройстве нашей (само собой разумеется, материальной) Вселенной. Как бы ни были шатки наши соображения, касающиеся этой области, но обширность задачи заставляет отнестись к ним с необычайным интересом. Этот вопрос о Вселенной я считаю особо необходимым осветить с должной подробностью, так как, благодаря «моде» на принцип относительности и большому количеству популярных книг и лекций, трактующих об этом принципе, не только в «обществе», но и в более узких специальных кругах распространены совершенно превратные сведения о конечности, замкнутости, кривизне и т. п. свойствах нашего пространства, которые будто бы устанавливаются принципом относительности.

5. Дабы избежать образования у читателя неправильного представления о настоящей статье, автор ее должен предупредить, что он ни в какой мере не философ и к изложению принципа относительности приступает с чисто математической точки зрения. Весьма возможно, что это единственная точка зрения, с которой можно, более или менее ясно, представить себе основания принципа относительности.

Бесполезно подробно указывать литературу по тем или иным вопросам принципа относительности, так как популярная литература ничего не разъясняет, а специальная требует для правильного понимания своего огромного математического аппарата. Укажу все же несколько специальных книг и статей, посвященных принципу относительности.

1. Hermann W e y l. Raum — Zeit — Materie. Vierte Auflage. Berlin, 1921.

2. L a u e. Die relativitäts Theorie. Zweites Band. Braunschweig, 1921.

3. E d d i n g t o n. Espace, Temps et Gravitation. Paris, 1921.

4. H i l b e r t. Die Grundlagen der Physik. Göttinger Nachrichten. 1916.

Глава 1

ПРОСТРАНСТВО

Вся мерою и числом сотвори еси.
«Книга Премудрости Соломоновой».

§ 1. Измерение величин

1. Рассматривая различные *свойства*, присущие объектам материального мира, мы можем сгруппировать эти свойства в особые *классы*, относя к одному классу свойства, обладающие каким-либо общим признаком. Свойства, отнесенные к одному классу, образуют *многообразие*, которое может обладать той или иной мощностью, иначе говоря, может быть в большинстве случаев приведено в одно-однозначное соответствие или с многообразием целых чисел, или с многообразием всех чисел, или с многообразием пар, троек и т. п. всех чисел. Каждому свойству данного класса будет отвечать одно и только одно число (или одна и только одна пара чисел, или одна и только одна тройка чисел и т. д.) числового многообразия, и обратно. Установление правил, пользуясь коими можно по данному свойству класса отыскивать соответствующее ему число (или пару, или тройку чисел) и по данному числу (или по данной паре, или тройке и т. п. чисел) отыскивать отвечающее ему (им) свойство класса, назовем, ради краткости, *арифметизацией данного класса.*

Приведем пару простейших примеров. Люди обладают свойством иметь пол; сопоставим свойству человека быть женщиной число 0, а свойству человека быть мужчиной число 1; установление этого правила даст нам арифметизацию данного класса свойств. Все материальные тела обладают свойством иметь объем; определяя объем обычными приемами в кубических метрах, найдем правило сопоставления чисел с объемами данных объектов, иначе говоря, получим арифметизацию класса объемов.

2. Арифметизация данного класса свойств может производиться всегда совершенно произвольно. Пусть, однако, свойства данного класса будут таковы, что к ним можно будет применить понятие больше или меньше (соответственно, конечно, определенные); свойства такого класса условимся называть *интенсивностями*. Если арифметизация данного класса произведена так, что большей интенсивности отвечает большее число, то такая арифметизация называется *оценкой*. Степень познания учащихся есть интенсивность (предполагается, что мы умеем определять бóльшую или меньшую степень познания) — пяти, или двенадцатибалльная система отметок есть арифметизация класса степени познания учащихся, названная нами оценкой.

Само собою разумеется, что всякий класс свойств станет классом интенсивностей, коль скоро мы определим, так или иначе, понятие больше или меньше в приложении к свойствам данного класса. Большинство свойств, нами изучаемых, относится непосредственно к разряду интенсивностей, так как, при самом определении данного класса свойств, уже устанавливается понятие больше или меньше в приложении к свойствам этого класса. Иногда, однако, свойства представляются в таком виде, что перевод их в разряд интенсивности требует дополнительных определений; примером может служить свойство монохроматического луча иметь цвет; с первого взгляда кажется явно бессмысленным считать цвет интенсивностью, однако, введя дополнительное определение, мы можем считать, что тот цвет больше, который имеет бóльшую длину волны; коль скоро определение это будет введено — цвет станет интенсивностью, и нетрудно будет арифметизировать этот класс свойств так, чтобы арифметизация стала бы оценкой. Итак, перевод класса свойств в разряд класса интенсивностей целиком зависит от наших определений и, следовательно, от нашего произвола. Вопросов целесообразности применения термина интенсивности к тому или иному свойству я, конечно, не касаюсь.

3. Среди интенсивностей выделяется исключительная группа, обладающая характерными свойствами, позволяющими производить особую оценку (арифметизацию), называемую измерением. Пусть A_1, A_2, A_3, ... будут интенсивностями данного класса A; так как мы имеем дело с интенсивностями, то у нас имеется определение того, что означает суждение: A_1 меньше A_2. Положим, что для интенсивностей класса A мы, так или иначе, *определим* понятие о *трех равноотстоящих интенсивностях*; при этом под тремя равноотстоящими интенсивностями будем подразумевать такие интенсивности A_1, A_2, A_3, что A_1 настолько меньше A_2, насколько A_2 меньше A_3. Условимся интенсивности класса A, к которым применимо понятие о равноотстоящих интенсивностях (так или иначе нами определенное), называть *измеримыми интенсивностями*.

Само собой разумеется, что введением соответствующего определения можно любой класс интенсивностей сделать классом измеримых интенсивностей; подобно тому, как это имело место для перевода свойств в разряд интенсивностей, и в настоящем случае могут представиться две возможности: или, при самом установлении какого-либо класса интенсивностей, будет дано определение понятия о равноотстоящих интенсивностях, и тогда мы, с самого начала, будем иметь дело с измеримыми интенсивностями; или, при установлении класса интенсивностей, понятие о равноотстоящих интенсивностях определено не будет, в таком случае данный класс интенсивностей мы можем перевести в разряд измеримых лишь после дополнительного введения упомянутого понятия о равноотстоящих интенсивностях. Примером интенсивности, с самого установления своего являющейся интенсивностью измеримой, может служить объем материального тела или длина отрезка прямой; в самом деле, устанавливая понятие об объеме или о длине отрезка прямой, мы с самого начала даем определение того, что́ следует понимать под бо́льшим объемом или бо́льшей длиной, а также, что́ следует понимать под тремя равноотстоящими длинами трех отрезков. Наоборот, интенсивность степени познания учащихся, с самого установления своего, не является измеримой, и до сего времени определение понятия равноотстоящих степеней познания учащихся не установлено.

4. Произведем арифметизацию (оценку) класса измеримых интенсивностей, но эту оценку произведем таким

образом, чтобы последовательные разности чисел, отвечающих любым трем равноотстоящим интенсивностям, были бы равны между собой; иначе говоря, если a_1, a_2, a_3 суть числа, отвечающие при оценке трем равноотстоящим и увеличивающимся интенсивностям A_1, A_2, A_3, то $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.

Подобного рода оценку класса измеримых интенсивностей будем называть *измерением*. Мы видели, что арифметизацию данного класса свойств можно произвести совершенно произвольным образом, в оценке данного класса интенсивностей произвол несколько меньше, но все же чрезвычайно значителен; посмотрим, какой произвол может быть допущен при измерении данного класса измеримых интенсивностей. Пусть данный класс A измеримых интенсивностей измерен двумя различными способами: при первом способе измерения интенсивностям A_1, A_2, A_3... отвечают числа a_1, a_2, a_3..., при втором — числа $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$... Из свойств арифметизации следует, что $\bar{a} = f(a)$, где f — определенная однозначная функция a; если A_1, A_2, A_3 три какие-либо равноотстоящие величины, то, по основному свойству, $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ и, одновременно, $\bar{a}_3 - \bar{a}_2 = \bar{a}_2 - \bar{a}_1$; таким образом, при $a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2}$ имеет место равенство $\bar{a}_2 = \frac{\bar{a}_3 + \bar{a}_1}{2}$, но, так как $\bar{a} = f(a)$, то мы будем иметь $f(a_2) = \frac{f(a_3) + f(a_1)}{2}$, или $f\frac{(a_3 + a_1)}{2} = \frac{f(a_3) + f(a_1)}{2}$, при всех a_1, a_3, заменяя a_1 на x, a_3 — на y, найдем, что при всех x и y будем иметь следующее функциональное соотношение:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{1}$$

Можно доказать, что решение функционального уравнения (1) представится в следующем виде:

$$f(a) = \mu a + h,$$

где μ и h — постоянные числа.

Найденное выражение для $f(a)$, очевидно, удовлетворяет уравнению (1)

$$\mu \frac{x+y}{2} + h = \frac{1}{2}(\mu x + h + \mu y + h) = \frac{1}{2}\mu(x + y) + h.$$

Таким образом, мы нашли общий вид $f(a)$, позволяющий от одного способа измерения переходить к другому

$$\bar{a} = f(a) = \mu a + h. \tag{2}$$

Эта общая формула перехода от одного способа измерения к другому содержит в себе две постоянные. Постоянная h характеризует собой произвольность *начального значения*; иначе говоря, произвольность той интенсивности, которая отвечает нулевому значению измеряющего ее числа.

Постоянная μ характеризует собой произвольность *единицы измерения*, иначе говоря, произвольность тех двух интенсивностей, разность чисел, измеряющих которые, равняется 1. Задав начальное значение и единицу измерения, мы, как легко видеть, определим вполне и единственным образом обе постоянные μ и h, входящие в формулу (2), иначе говоря, определим единственным образом измерение интенсивностей данного класса. В самом деле, пусть интенсивность A_0 класса A есть начальное значение (т. е. при измерении должна отвечать 0), и пусть интенсивности A_1 и A_2 определяют собой единицу измерения (т. е. пусть при измерении разность чисел, измеряющих A_1 и A_2, будет равна 1); произведем каким-либо образом измерение класса A; положим, что при этом измерении интенсивности A_0, A_1, A_2 будут отвечать числа a_0, a_1, a_2, тогда искомое измерение даст нам числа $\bar{a}$, связанные с полученными при введенном измерении числами a соотношением (2), нам остается подобрать μ и h так, чтобы $\bar{a}_0 = 0$, $\bar{a}_2 - \bar{a}_1 = 1$, иначе говоря, так, чтобы удовлетворялись равенства

$$\mu a_0 + h = 0, \quad \mu (a_2 - a_1) = 1,$$

откуда

$$\mu = \frac{1}{a_2 - a_1}, \quad h = -\frac{a_0}{a_2 - a_1}.$$

5. В обычной практике измерений мы чрезвычайно часто сталкиваемся с произволом единицы измерений и гораздо реже с произволом начального значения, что проистекает вследствие практического удобства выбирать за начальное значение такую интенсивность данного

класса, которая обладает некоторыми особыми свойствами. Так, например, при измерении длины отрезка за начальное значение всегда берут длину отрезка прямой между совпадающими точками (длину точки), тогда как за единицу измерения берут самые разнообразные разности длин (аршины, футы, метры и т. п.).

Существует, однако, интенсивность, в которой практикой узаконено большое разнообразие начальных значений, — эта интенсивность — температура. В самом деле, для измерения температуры в градусах Цельсия и Реомюра за начальное значение мы берем температуру тающего льда, тогда как при измерении температуры в градусах Фаренгейта мы приписываем температуре тающего льда число 32, а при измерении температуры в градусах абсолютной шкалы — число 273. Само собой разумеется, что и единица измерения температуры меняется: так, для градусов Цельсия мы имеем, что разность чисел, отвечающих температурам паров кипящей воды и тающего льда, будет равна 100, а для градусов Реомюра это число определяется всего в 80.

6. Я остановился столь подробно на вопросе об измерении по двум причинам. С одной стороны, нам непрерывно в дальнейшем придется противопоставлять процесс простой арифметизации процессу измерения, а с другой стороны, в вопросе измерения, столь простом по существу, замечается значительная недоговоренность во многих курсах механики и физики, ставших классическими; установить бо́льшую определенность в этом вопросе и вместе с тем показать, сколь большой произвол имеет место при установлении измерения, и было моей задачей[1].

Итак, всякий класс свойств может быть арифметизирован; если свойства эти делаются (путем нашего определения) интенсивностями, то мы можем не только арифметизировать их, но и оценить их числами; наконец, если интенсивности данного класса делаются (опять-таки путем нашего определения) измеримыми интенсивностями, то мы можем не только оценить их числами, но измерить; измерение будет включать в себе известный произвол, который устраняется, если мы установим начальное значение и единицу измерения.

---

[1] См. прекрасную статью: Runge, Maass und Messen. Encyclopedie d. Mathemat. Wissenschaften, Bd. V.

§ 2. Арифметизация пространства

1. Геометрическое пространство, или просто пространство, есть совокупность вещей, называемых точками, линиями, поверхностями, углами, расстояниями и т. п., стоящих между собой в определенных отношениях, устанавливаемых системой аксиом и вытекающих из этих аксиом теорем[1]. Геометрическому пространству может отвечать физическое материальное пространство в том смысле, что каждой вещи геометрического пространства может соответствовать какой-либо образ пространства физического; соответствие физического пространства геометрическому может быть осуществлено весьма многоразличными и часто фантастическими способами: достаточно вспомнить многообразные интерпретации так называемых неэвклидовых геометрий, интерпретации, оперирующие с простейшими физическими образами. Мы увидим ниже, что и теория относительности есть тоже грандиозная интерпретация геометрического пространства четырех измерений, интерпретация, оперирующая уже не с простыми, а с весьма сложными физическими образами. Необходимо здесь же указать, что физическое пространство есть пространство *материальное*, что все образы пространства геометрического интерпретируются в физическом пространстве или *материальными объектами* или же материальными действиями с ними.

Точки нашего (трехмерного) пространства обладают все свойством иметь определенное положение в пространстве, иначе говоря, могут отличаться друг от друга. Арифметизируем этот класс свойств, приписав каждой точке пространства определенную тройку чисел; каждой тройке чисел будет отвечать одна и только одна точка пространства. Подобную арифметизацию назовем, ради краткости, *арифметизацией пространства.* Процесс арифметизации пространства совершенно произволен; выбор упомянутых троек чисел ничем наперед не ограничен. Установим, каким образом, выбрав один способ арифметизации пространства, мы можем перейти к какому-либо другому способу арифметизации. Пусть в первом случае точке P пространства отвечала тройка чисел x_1, x_2, x_3; пусть во

[1] См.: Hilbert. Grundlagen der Geometrie.

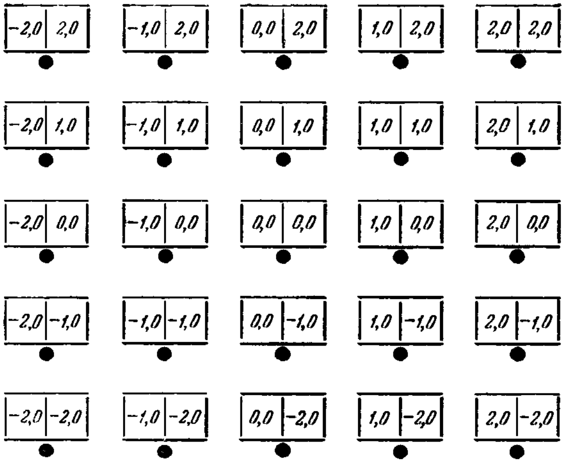
втором способе той же точке P пространства будет отвечать другая тройка чисел $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$; тогда очевидно, что по первой тройке можно будет определить вторую тройку; сделав подобное определение для всех точек P, будем иметь следующее соотношение:

$$\bar{x}_1 = f_1 (x_1, x_2, x_3),$$
$$\bar{x}_2 = f_2 (x_1, x_2, x_3),$$
$$\bar{x}_3 = f_3 (x_1, x_2, x_3).$$

Тройки чисел, при помощи коих мы арифметизируем пространство, называются *координатами* (обобщенными); переход от одного способа арифметизации пространства к другому называется *преобразованием координат.*

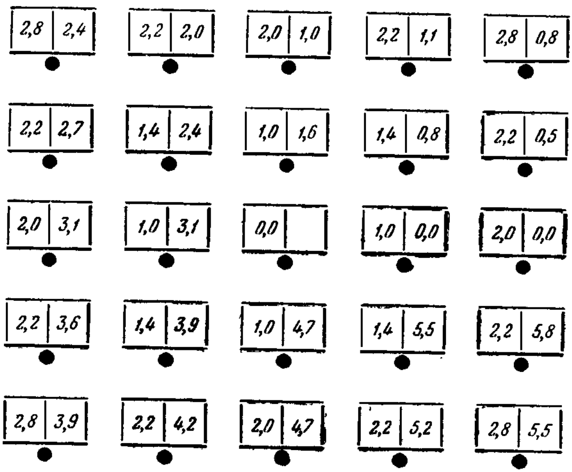
2. Весьма важно с должной ясностью представить себе полный произвол арифметизации пространства и не связывать арифметизацию пространства с установлением определенной обычной системы координат, например прямоугольных, прямолинейных, полярных или вообще криволинейных координат. В самом деле, установление той или иной системы координат требует уже знания известных свойств вещей, составляющих пространство; так, например, установление прямоугольных прямолинейных координат требует знания прямой линии, свойств перпендикулярности и длины прямолинейного отрезка, следовательно, требует целого ряда аксиом и вытекающих из них свойств. Между тем арифметизация пространства не требует детального знания его свойств и может быть произведена без того, чтобы наперед установить характер пространства. На прилагаемых чертежах (рис. 1 и 2) произведена арифметизация пространства (для простоты пространство взято двумерным) двумя разными способами, причем около каждой точки написана пара цифр, ей отвечающих, для первого и второго способов арифметизации; нетрудно, путем испытания, установить, что переход от первой арифметизации (x_1, x_2) ко второй ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) совершается по следующим формулам:

$$\bar{x}_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_1 = \bar{x}_1 \cos \bar{x}_2;$$
$$\bar{x}_2 = \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$
$$x_2 = \bar{x}_1 \sin \bar{x}_2;$$



-2,0 2,0
-1,0 2,0
0,0 2,0
1,0 2,0
2,0 2,0
-2,0 1,0
-1,0 1,0
0,0 1,0
1,0 1,0
2,0 1,0
-2,0 0,0
-1,0 0,0
0,0 0,0
1,0 0,0
2,0 0,0
-2,0 -1,0
-1,0 -1,0
0,0 -1,0
1,0 -1,0
2,0 -1,0
-2,0 -2,0
-1,0 -2,0
0,0 -2,0
1,0 -2,0
2,0 -2,0

Рис. 1



2,8 2,4
2,2 2,0
2,0 1,0
2,2 1,1
2,8 0,8
2,2 2,7
1,4 2,4
1,0 1,6
1,4 0,8
2,2 0,5
2,0 3,1
1,0 3,1
0,0
1,0 0,0
2,0 0,0
2,2 3,6
1,4 3,9
1,0 4,7
1,4 5,5
2,2 5,8
2,8 3,9
2,2 4,2
2,0 4,7
2,2 5,2
2,8 5,5

Рис. 2

формулы эти характеризуют обычный переход от прямоугольных прямолинейных координат к полярным на плоскости[1].

3. Физическое пространство, отвечающее геометрическому, становится арифметизированным вместе с этим последним. По выполнении арифметизации около каждой «точки» физического пространства выставляется «доска» с написанными на ней тремя числами, отвечающими этой точке. Мы так свыклись с этой арифметизацией физического пространства, что совершенно не вдумываемся и не замечаем ни ее сущности, ни ее произвола. Между тем названия или нумерация улиц, домов, этажей, квартир являет собой пример арифметизации физического пространства, поражающий своим произволом (особенно в наших уездных городах и в Москве); точно так же верстовые столбы и межевые или триангуляционные знаки также являются арифметизацией части физического пространства около нашей Земли; еще более полно арифметизация отражается на градусной системе географических карт.

Следует отметить, что арифметизация пространства не имеет ничего общего ни с измерением, ни даже с оценкой, так как мы не определяем, что́ означает понятие больше или меньше в приложении к положению точки в пространстве.

4. Устанавливая вещи, составляющие пространство, и выясняя их взаимные отношения, мы можем разделить свойства вещей пространства на два разряда. Одни будут целиком зависеть от избранной (всегда по нашему произволу!) арифметизации пространства, другие останутся неизменными, как бы мы ни арифметизировали пространство. Первые вещи и свойства условимся называть *несобственными*, вторые *собственными*. Изучая в геометрическом или физическом пространстве несобственные его свойства,

---

[1] Следует отметить, что вводимый нами способ арифметизации плоскости, сводящийся к применению полярных координат, имеет в одной из точек (именно в так называемом начале координат) *особенность*. Действительно, в точке $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ формулы, определяющие переход от x_1, x_2 к $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, не дают определенного значения для $\bar{x}_2$; предположение, которое мы сделали на рис. 2, положив (в целях большей определенности) для указанной точки $\bar{x}_2 = 0$, имеет весьма существенные недостатки, связанные с понятием непрерывности. Подробнее на этом обстоятельстве останавливаться здесь не представляется возможным.

мы, в сущности говоря, будем исследовать данный способ арифметизации пространства и только когда мы перейдем к собственным свойствам, только тогда мы будем изучать пространство, как таковое, вне зависимости от произвольно установленной нами его арифметизации. Из сказанного понятно, насколько важно для нас установление собственных вещей и их свойств в пространстве: не следует, однако, думать, что изучение несобственных вещей и свойств есть ненужный балласт и ошибка; без знания сферической астрономии невозможно было бы устанавливать законы движения небесных тел, а между тем сферическая астрономия имеет предметом своим как раз несобственные свойства, определенным образом арифметизированного, физического звездного пространства.

Собственные свойства пространства могут быть выражены суждениями, форма которых не изменяется, при переходе от одной арифметизации пространства к другой, по формулам (3). Этого рода обстоятельство выражают словами, что собственные свойства пространства *инвариантны* по отношению к преобразованиям координат по формулам (3). Мы увидим в дальнейшем, каким образом на наших формулах и рассуждениях отразится указанная инвариантность собственных свойств пространства.

5. После того, как пространство тем или иным способом арифметизировано, не трудно аналитически определить кривую поверхность пространства. *Кривой* будет называться совокупность точек, для которых координаты определяются равенствами

$$x_1 = \varphi_1(u),\ x_2 = \varphi_2(u),\ x_3 = \varphi_3(u), \tag{4}$$

поверхностью будет называться совокупность точек, для которых координаты определяются равенствами

$$x_1 = \psi_1(u, v),\ x_2 = \psi_2(u, v),\ x_3 = \psi_3(u, v), \tag{5}$$

причем u, v являются произвольными параметрами (переменными). Исключая из равенства (4) параметр u, получим уравнения кривой в виде двух равенств

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = 0,\ \Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Исключая из равенств (5) параметры u, v, получим уравнение поверхности в виде равенства: $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$;

из только что сказанного ясно, что две поверхности пересекаются по кривой и что всякая кривая есть пересечение двух поверхностей.

Таким образом, установление понятий о кривой и о поверхности требует лишь арифметизации пространства, но не требует знания никаких свойств пространства; вместе с тем очевидно, что вид уравнений (4) и (5) существеннейшим образом зависит от способа арифметизации пространства. Возвращаясь к арифметизации пространства, указанной рис. 1 и 2, мы видим, что кривая

$$x_1 = 1, \ x_2 = u$$

и кривая

$$\bar{x}_1 = 1, \ \bar{x}_2 = u$$

являются совершенно различными друг от друга (первая в обычной геометрии — прямая, вторая — окружность). Нетрудно видеть, что свойство кривой содержать в себе некоторую точку пространства (проходить через точку) есть свойство собственное, точно так же свойство поверхности содержать в себе некоторую кривую (проходить через кривую) есть свойство собственное, инвариантное, по отношению к преобразованию координат.

§ 3. Метрика пространства

1. Двум любым точкам пространства P и P' сопоставляется особое число, называемое *расстоянием этих точек*. Так как это число вполне определяется, коль скоро дано положение точек P и P', т. е. их координаты:

$$(x_1, x_2, x_3) \text{ и } (x_1', x_2', x_3'),$$

то расстояние двух точек P и P' будет функцией указанных шести чисел (двух троек чисел); обозначая число, выражающее расстояние двух точек P и P', символом (P, P'), будем иметь:

$$(P, P') = D(x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3'), \tag{6}$$

при этом мы будем считать расстояние инвариантным свойством двух точек; функция D будет, само собой разумеется, зависеть от выбора координат, т. е. от способа арифметизации пространства. Если при выбранной арифметизации пространства нами устанавливается функция D, то мы говорим, что *метрика пространства определена*; само собой ясно, что, определив метрику для одной системы координат, нетрудно уже, при помощи формул (3), определить метрику для любого другого способа арифметизации пространства.

Обращаясь к рис. 1 и 2, определим для первого способа арифметизации двумерного пространства расстояние точек

$$P\,(x_1,\, x_2) \text{ и } P'\,(x_1',\, x_2')$$

следующим образом:

$$(P,\, P') = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2},$$

тогда для второго способа арифметизации двумерного пространства будем иметь:

$$(P,\, P') = \sqrt{\bar{x}_1'^2 + \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_1'\bar{x}_1 \cos(\bar{x}_2' - \bar{x}_2)};$$

обе эти формулы дают нам наше обычное (эвклидово) расстояние двух точек в прямоугольных прямолинейных и в полярных координатах.

2. Трудность изучения расстояния двух точек зависит прежде всего от большого числа переменных, входящих в функцию D. Чтобы упростить изучение расстояний, рассмотрим расстояния точек P', близких к точке P от этой самой точки, и посмотрим, как в этом случае выразится функция D; мы увидим, что в рассматриваемом случае, когда P' близко к P, выражение расстояния этих точек будет как-то зависеть от координат точки P и весьма просто[1] зависеть от очень малых (бесконечно малых) разностей координат точек P' и P. Предварительно, однако, введем в рассмотрение не расстояние точек P' и P, а квадрат этого расстояния и ограничимся не тремя, а всего лишь двумя координатами[2]

$$(P,\, P')^2 = D^2 = \Delta\,(x_1,\, x_2;\, x_1',\, x_2').$$

Чтобы определить функцию D или Δ, нам, конечно, необходимо установить известные ограничения, которые мы

---

[1] В первом приближении, конечно.

[2] Этот переход к двумерному пространству делается нами исключительно в целях упрощения.

наложим на понятие расстояния: ограничения эти, само собой разумеется, будут играть роль аксиом в той системе геометрии, которую мы развиваем. Итак, положим, что расстояние точек (P, P') будет обладать следующими свойствами:

1) Расстояние не зависит от порядка следования точек:

$$(P, P') = (P', P),\ \Delta\ (x_1, x_2; x_1', x_2') = \Delta\ (x_1', x_2'; x_1, x_2).$$

2) Расстояние двух совпадающих точек (точек с одинаковыми координатами) равно 0

$$(P, P) = 0,\ \Delta\ (x_1, x_2; x_1, x_2) = 0.$$

3) Квадрат расстояния двух достаточно близких точек разлагается в ряд Тейлора по степеням разностей координат этих точек

$$\begin{aligned}(7)\quad \Delta\ (x_1, x_2; x_1', x_2') &= g_0 + g_1 (x_1' - x_1) + g_2 (x_2' - x_2) + \\ &+ g_{11} (x_1' - x_1)^2 + g_{12} (x_1' - x_1)(x_2' - x_2) + \\ &+ g_{21} (x_2' - x_2)(x_1' - x_1) + g_{22} (x_2' - x_2)^2 + \ldots,\end{aligned}$$

где

$$g_0, g_1, \ldots, g_{11}, g_{12}, \ldots$$

зависят, конечно, от x_1, x_2, как это и полагается в ряде Тейлора.

Так как

$$\Delta\ (x_1, x_2; x_1, x_2) = g_0$$

по формуле (7), то на основании свойства 2) g_0 обратится в 0. С другой стороны, при очень малых разностях:

$$x_1' - x_1,\ x_2' - x_2$$

члены с первыми степенями этих величин в формуле (7) будут играть главную роль, коль скоро g_1, g_2 не будут одновременно обращаться в нуль, но члены с первыми степенями изменяют свой знак, когда мы координаты поменяем местами: таким образом (P, P') и (P', P) для достаточно близких между собой точек будут различны по знаку, что будет противоречить свойству 1) расстояний; значит, непременно мы должны предположить, что

$$g_1 = g_2 = 0.$$

Полагая, что

$$x'_1 = x_1 + \Delta x_1,\ x'_2 = x_2 + \Delta x_2,$$

и считая, что

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2$$

достаточно малы, будем иметь:

$$\Delta = g_{11}\Delta x_1^2 + g_{12}\Delta x_1 \Delta x_2 + g_{21}\Delta x_2 \Delta x_1 + g_{22}\Delta x_2^2 + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

полученная формула для квадрата расстояний содержит 4 члена, но в этой формуле есть подобные члены; приводя их и заменяя Δx_1, Δx_2 на dx_1, dx_2 (величины бесконечно малые), будем иметь окончательно:

$$\Delta = ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2, \tag{8}$$

где $2g_{12}$ заменяет выражение $g_{12} + g_{21}$; следовательно, g_{ik} симметрично по отношению к своим значкам, т. е. $g_{ik} = g_{ki}$; очевидно, что g_{ik} зависит от x_1, x_2. Величину Δ мы обозначаем через ds^2; таким образом, ds будет расстояние (в первом приближении) двух бесконечно близких точек.

Итак, квадрат расстояния двух бесконечно близких точек является квадратной функцией от бесконечно малых разностей координат этих точек с коэффициентами, зависящими от координат основной точки. Значение этих трех коэффициентов для любой из точек двумерного пространства вполне определит метрику расстояний в нашем пространстве в непосредственной близости к данной точке; можно показать[1], что значение этих коэффициентов даст возможность так определить квадрат расстояния любых двух точек, чтобы выражение (8) давало бы расстояние двух бесконечно близких точек. Заметив, что изучение расстояний в физическом пространстве, в свою очередь, будет базироваться на расстояниях весьма близких друг к другу точек, условимся считать *метрику расстояний простран-*

[1] На доказательстве этого утверждения мы останавливаться здесь не имеем возможности.

ства определенной, коль скоро нам при данной арифметизации пространства заданы g_{ik}, как функции координат точек нашего пространства.

Совокупность g_{ik}, как функций координат точки P, называется *фундаментальным метрическим тензором.*

Для трехмерного пространства будем иметь не три, а шесть коэффициентов g_{ik}, и формула (8) перепишется по аналогии так:

$$(9) \qquad ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + 2g_{23}dx_2dx_3 + \\ + 2g_{31}dx_3dx_1 + 2g_{12}dx_1dx_2;$$

таким образом, для трехмерного пространства фундаментальный метрический тензор будет состоять из шести функций координат нашей точки.

3. Ввиду чрезвычайной важности для всего дальнейшего понятия о фундаментальном метрическом тензоре, рассмотрим определенные выше расстояния в двух указанных ранее способах арифметизации двумерного пространства.

В первом способе имеем

$$\Delta = (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2,$$

иначе говоря:

$$g_0 = 0,\ g_1 = 0,\ g_2 = 0,\ g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{21} = 0, \\ g_{22} = 1,\ ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2,$$

мы получаем обычные формулы аналитической геометрии для квадрата расстояния и для квадрата элемента дуги.

Несколько более сложны вычисления для арифметизации по второму способу; не приводя этих вычислений, заметим, что для второго способа арифметизации

$$\bar{g}_0 = 0,\ \bar{g}_1 = 0,\ \bar{g}_2 = 0,\ \bar{g}_{11} = 1,\ \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = 0,\ \bar{g}_{22} = \bar{x}_1^2, \\ ds^2 = d\bar{x}_1^2 + x_1^2 d\bar{x}_2^2,$$

в каковой формуле мы узнаем элемент дуги в полярных координатах.

4. Совершенно ясно, что, зная Δ или ds для любых точек бесконечно мало разнящихся от точки P, мы будем знать фундаментальный метрический тензор в точке P; в то же время мы можем, с помощью фундаментального

метрического тензора, определить длину дуги заданной кривой между двумя точками P_1 и P_2; поместим между P_1 и P_2 на кривой бесчисленное множество точек и просуммируем взаимные их расстояния, в результате получим число, которое и назовем длиной дуги нашей кривой между точками P_1 и P_2. Пользуясь обычными формулами интегрального исчисления, будем для длины дуги кривой между точками P_1 и P_2: S_{P_1,P_2} иметь следующее выражение:

$$S_{P_1, P_2} = \int\limits_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{11}\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 + \ldots du},$$

где u_1, u_2—значения параметра u нашей кривой для точек P_1 и P_2.

5. Посмотрим, каким образом изучение физического пространства может нам указать (по крайней мере, принципиально), какова зависимость фундаментального метрического тензора от координат точек и какова, следовательно, метрика расстояний того геометрического пространства, в соответствие которому приведено наше физическое пространство и для которого, следовательно, наше физическое пространство является интерпретацией. Положим, что мы устанавливаем для наших физических «точек», лежащих на физической кривой, особое свойство иметь физическое расстояние по кривой. Положим, что с помощью определенных физических манипуляций мы переводим это свойство в разряд сначала интенсивностей, а затем и измеримых интенсивностей; напомним, что для этого надо установить, по отношению к этому физическому расстоянию по кривой, понятия больше или меньше и понятие равноотстоящих интенсивностей. Положим далее, что путем определенного выбора начального значения и единицы измерений мы измеряем введенную нами интенсивность. Результатом измерения будет некоторое число, каковое число мы будем называть *физической длиной дуги по данной кривой между точками* P_1 и P_2. Если физическая длина дуги является интерпретацией, определенной выше в п. 4 геометрической длины дуги (или просто длины дуги), то, очевидно, оба числа, дающие геометрическую и физическую длину дуг, должны (по крайней мере, при некотором выборе начального значения и единицы измерения) совпасть между собой. Так как геометрическая длина

дуги между двумя совпадающими точками равна нулю [по свойству интеграла (10)], то очевидно, что за начальное значение должна быть выбрана физическая длина дуги между двумя совпадающими точками; выбор единицы измерения ничем не должен быть ограничиваем[1].

Положим теперь, что через данную физическую точку P мы проводим ряд кривых и на каждой из этих кривых берем очень близкую к P точку P'; измеряя физическую длину дуги по каждой из этих кривых между точками P и бесконечно к ней близкой, мы получим ряд чисел Δs_1, $\Delta s_2, \ldots$, которые можно будет отождествить с соответствующими геометрическими длинами дуг, а так как дуги очень малы, то их длины можно отождествить с расстояниями очень близких точек, и эти расстояния вычислить по формуле (9), заменяя в ней dx_1, dx_2, dx_3 на очень малые величины Δx_1, Δx_2, Δx_3, представляющие разности координат точек P' и P. В формуле (9) величины g_{ik} будут нам не известны, но зато $\Delta x_1, \ldots$, а также левые части полученных равенств будут нам известны; сделав достаточное число промеров, мы в состоянии будем установить достаточное число уравнений, из которых и определим g_{ik}; для трехмерного пространства нам нужно будет, очевидно, не менее шести промеров, а для двумерного не менее трех.

6. Чтобы сделать яснее процесс физического исследования метрики, разберем его подробнее для случая двумерного пространства. Только что мы видели, что нам

---

[1] Этот произвол единицы измерения чрезвычайно характерен. Weyl использует его для установления особого понятия произвольности масштаба. Измеряя физическую длину, мы можем пользоваться произвольной и притом меняющейся от точки к точке единицей измерения; спрашивается, при какой же единице измерения наша физическая длина будет идентична с длиной геометрической? Если этот вопрос оставить неопределенным (а так и приходится, в сущности, делать, ибо единица измерения зависит от нашего произвола), то физическая длина определит нам не ds, а μ (x_1, x_2, x_3) ds, где μ — неопределенная функция координат. Существуют свойства пространства, на которые произвол μ не влияет, эти свойства называются обладающими *масштабной инвариантностью*. Они играют большую роль в теории Weyl'я. Мы, однако, не будем останавливаться на вопросе о масштабной инвариантности, так как это перегрузит нашу статью новыми понятиями и терминами, которые будут лишены какого-либо конкретного содержания, ибо ни математическим аппаратом, ни примерами они подкреплены не будут.

нужны три промера. Таким образом, выберем, кроме точки P, еще три точки — P_1, P_2, P_3, весьма к ней близкие; сделав промеры, определим три расстояния (очень малые длины дуг кривых) s_1, s_2, s_3 точки P до точек P_1, P_2, P_3. Для выяснения метрики пространства нам нужно будет так или иначе пространство арифметизировать; выберем какой-либо способ арифметизации; пусть при этом способе точка P имеет координаты (x_1, x_2), а точки P_1, P_2, P_3 пусть имеют координаты $(x_1 + h_1, x_2 + k_1)$, $(x_1 + h_2, x_2 + k_2)$, $(x_1 + h_3, x_2 + k_3)$, тогда формула (8) даст нам три равенства

$$s_1 = g_{11}h_1^2 + 2g_{12}h_1k_1 + g_{22}k_1^2,$$

$$s_2 = g_{11}h_2^2 + 2g_{12}h_2k_2 + g_{22}k_2^2,$$

$$s_3 = g_{11}h_3^2 + 2g_{12}h_3k_3 + g_{22}k_3^2;$$

решая эту систему уравнений относительно g_{11}, g_{12}, g_{22}, определим метрику пространства. Решить эту систему уравнений всегда возможно, если точки не совпадают друг с другом; на этом детальном пункте я, к сожалению, подробнее остановиться не могу. То, что было сейчас с достаточным педантизмом описано, происходило в Египте, когда практическая жизнь и религиозные потребности устанавливали основания нашей эвклидовой метрики. Вообразим на минуту, что мы неестественно сплющились и, подобно поверхностным теням, живем на большом шаре[1]; положим, что, перейдя в двумерное существование теней, мы все же умеем измерять физические длины дуг; положим, что для арифметизации нашего двумерного пространства (шаровой поверхности) мы применяем числа следующим образом: вводим обычными приемами дополнение до 90° широты φ и долготу λ на нашем шаре радиуса R, затем для любой точки P выбираем два числа x_1 и x_2 по формулам $x_1 = R\varphi$, $x_2 = R\sin\varphi_0\lambda$, где φ_0 есть дополнение 90° широты некоторой точки $P_0(x_{10} = R\varphi_0)$, в окрестности которой мы производим свои наблюдения. Положим, что весьма большой ряд тщательно произведенных промеров

[1] Это сравнение указывал в одной из своих, по обыкновению блестящих, популярных лекций по принципу относительности профессор О. Д. Хвольсон.

дал нам следующее выражение для ds^2:

$$ds^2 = dx_1^2 + \frac{\sin^2 \frac{x_1}{R}}{\sin^2 \frac{x_{10}}{R}} dx_2^2.$$

Формула эта, как легко видеть, является обычной формулой, выражающей длину бесконечно малой дуги на сфере: $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \sin^2\varphi d\lambda^2$. Если радиус сферы не велик по сравнению с областью, населенной тенями, то полученная формула вскоре, при достаточно большом числе промеров в разных точках мира теней, даст тамошним геометрам возможность определить R, т. е. радиус сферы, и, таким образом, значительно подвинуться в изучении того двумерного пространства, которое эти тени занимают. Но дело для наших теней значительно ухудшается, если занимаемая ими область будет очень мала по отношению к радиусу R сферы, тогда отношение $\dfrac{\sin^2 \frac{x_1}{R}}{\sin^2 \frac{x_{10}}{R}}$ будет близко к 1, ибо x_1 будет близко к x_{10}, т. е. $x_1 - x_{10}$ будет очень мало по сравнению с R, значит, все будет происходить так, как будто $R = \infty$, и сфера превращается в плоскость; наши сферические тени склонны будут подвергать гонению вольнодумцев, которые усомнятся в том, что их пространство не есть плоскость, а является сферой, только сферой весьма большого радиуса, и понадобится много сферических веков, чтобы тени толпы поняли бы сферичность своего мира. Мы, трехмерные существа, находимся в положении, аналогичном двумерным теням, живущим на сфере очень большого радиуса, ибо все наши промеры непрестанно убеждают нас в превосходном согласии метрики нашего пространства с эвклидовой метрикой, и нужны были огромные астрономические расстояния или те идеи, которые внесла с собой теория относительности, чтобы мы поставили под сомнение вопрос о метрике нашего пространства.

7. Итак, с первого взгляда кажется, что, исследуя наше физическое пространство и физическую длину, мы имеем возможность без какого-либо произвола однозначно судить о метрике того геометрического пространства, картиной которого (интерпретацией) является изучаемое

нами физическое пространство. Но не следует упускать из вида целый ряд произвольных условностей, вводимых нами, когда мы, с одной стороны, интерпретируем геометрическое пространство и его образы при помощи образов физического пространства, а с другой стороны, когда мы отождествляем физическую длину с геометрической.

В физическом материальном пространстве мы интерпретируем геометрические точки, с помощью тех или иных материальных объектов; довольствуясь грубой интерпретацией, мы «изображаем» точки, помощью малых материальных тел, расположенных в нашем физическом пространстве (сравним точки на бумаге, геодезические знаки на земной поверхности и, наконец, для больших областей пространства — небесные тела), интерпретируя более тонко, мы определяем точки, как места пересечения двух достаточно узких световых пучков, т. е. то же, при помощи более тонких, но все же материальных объектов. Мы можем, однако, интерпретировать геометрические точки совершенно иными образами материального мира и при такой интерпретации получить, даже в узких, нам доступных, областях нашего физического пространства, совершенно иные представления о его геометрических свойствах, правильнее — о свойствах геометрического пространства, которое интерпретируется пространством физическим.

Еще больший произвол заключается в установлении физической длины. Здесь, если не вставать на точку зрения целесообразности, возможны самые разнообразные методы установления физической длины, а тем самым возможны и разнообразные определения метрики того пространства, интерпретацией которого является наше физическое пространство. Интерпретируя геометрическую точку не обычным образом в нашем физическом пространстве, устанавливая особое понятие о физической длине, мы экспериментально придем без всякого затруднения к тому, что метрика нашего пространства не есть метрика Эвклидова, а есть метрика Лобачевского или какая-либо иная.

Таким образом, приходится отбросить возможность однозначного и не зависящего от нашего произвола ответа на вопрос о метрике (а равно, конечно, и о других свойствах) геометрического пространства, отвечающего нашему физическому. Этот вопрос вообще приобретает смысл лишь после того, как установлена интерпретация вещей геометрического пространства, помощью физических материальных образов, а равным образом после того, как определена физическая длина и сделано предположение об идентичности ее с длиной геометрической. Раз это уже установлено, тогда только возникает вопрос об определении метрики пространства; задача геометра-естествоиспытателя заключается в установлении более точных методов исследования метрики пространства, позволяющих менее грубыми приемами, чем это описано в предыдущих пунктах, установить его метрику; мы увидим, как принцип относительности, введя в рассмотрение всемирное тяготение, позволил по столь тонким явлениям, как незначительное, оставшееся необъясненным, движение перигелия Меркурия или как ничтожное отклонение солнечного луча, проходящего вблизи солнечной поверхности, сделать ряд заключений о метрике нашего пространства.

Естественно возникает вопрос, чем же обусловлена та или иная физическая интерпретация геометрического пространства и вещей, в нем находящихся? Здесь, вероятно, темные принципы целесообразности или экономия мышления играют первостепенную роль — я не буду и пытаться разбираться в этих сверхнатуральных вопросах, да и для темы настоящей статьи разбираться в них не представляется необходимым. Мы принимаем, как нечто готовое, ту интерпретацию геометрии, с которой свыклись физики[1]. Коснувшись вопроса о физическом пространстве, мне представляется полезным обратить внимание на то обстоятельство, что физическое пространство, как пространство материальное, по самому существу своему немыслимо без материи; пустое физическое пространство есть просто nonsens, ибо в таком пространстве нельзя будет изобразить, интерпретировать, ни одну из вещей геометрического пространства — ведь в физическом пространстве мы условились интерпретировать вещи геометрического пространства *материальными образами*.

---

[1] Так, например, очень малое материальное тело интерпретирует (с известным приближением) точку геометрического пространства; луч света интерпретирует прямую и т. п.

§ 4. Кривизна пространства

1. *Приступая к изложению* одного из наиболее трудных геометрических представлений, а именно представления о кривизне пространства, считаю необходимым предупредить, что в настоящем параграфе будут изложены лишь самые элементарные начала учения о кривизне, так как более основательное знакомство с теорией кривизны пространства требует гораздо более тяжеловесного математического аппарата, нежели тот, которым мы пользуемся в настоящей статье.

Проведя через данную точку P трехмерного пространства различные кривые, мы каждой кривой сопоставляем особое понятие о *направлении* этой кривой к точке P. Выбрав на кривой точку P', бесконечно близкую к точке P, мы определим направление нашей кривой двумя числами, характеризующими отношение бесконечно малых приращений координат, которое эти последние испытывают, когда мы переходим от точки P к бесконечно ей близкой точке P'.

Ограничиваясь, в целях простоты, примером двухмерного пространства и приписывая точке P координаты x_1, x_2, а точке P' — координаты $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, мы в этом случае определим направление нашей кривой единственным отношением: $\frac{dx_2}{dx_1}$.

Очевидно, что направление будет нами определено, коль скоро нам будут заданы точка P и ей бесконечно близкая точка P', т. е. будут заданы разности координат этих точек. В трехмерном пространстве таких разностей будет три: dx_1, dx_2, dx_3; в двухмерном — две (dx_1, dx_2). Условимся называть вещь, вполне определенную указанными двумя точками или разностями их координат, *бесконечно малым вектором в точке P*, сами разности будем называть *составляющими бесконечно малого вектора в точке P*. В случае обычной нашей геометрии бесконечно малый вектор можно интерпретировать как отрезок прямой от P до P', а его составляющие будут тогда проекции этого отрезка на оси прямоугольных, прямолинейных координат. Из сказанного выше ясно, что направление какой-либо кривой в точке P вполне определится, раз мы зададим соответствующий бесконечно малый вектор в точке P. Таким образом, вместо того, чтобы говорить о направлении кривой в точке P, мы можем теперь говорить *о направлении бесконечно малого вектора в точке P.*

2. Направления двух каких-либо кривых, проходящих через точку P, определяют собою новое понятие об *угле* этих направлений. Так как направления кривых совпадают с направлениями двух соответствующих бесконечно малых векторов, то можно говорить *об угле двух бесконечно малых векторов в точке P.* Этот угол будет некоторым числом, которое определяется по составляющим обоих бесконечно малых векторов и по значениям фундаментального метрического тензора в точке P. Чтобы пояснить, каким образом определяется указанное число, обратимся опять к двумерному пространству. Положим сначала, что двумерное наше пространство есть обычная эвклидова плоскость, причем арифметизация ее произведена с помощью введения прямоугольных прямолинейных координат (как на рис. 1). Тогда расстояние двух бесконечно близких точек P и P' определится по формуле

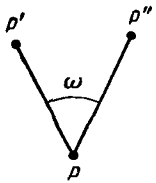


Рис. 3

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2;$$

иначе говоря, для фундаментального метрического тензора в этом случае мы будем иметь:

$$g_{11} = 1, \; g_{12} = g_{21} = 0, \; g_{22} = 1.$$

Возьмем теперь (см. рис. 3) два бесконечно малых вектора (dx_1, dx_2) и (δx_1, δx_2), изображаемые двумя отрезками PP' и PP''; по правилам аналитической геометрии угол ω между этими двумя векторами определится, как некоторое число, по следующей формуле:

$$\cos\omega = \frac{dx_1\delta x_1 + dx_2\delta x_2}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}\cdot\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}}.$$

Переходя к иной арифметизации нашей эвклидовой плоскости или рассматривая с более общей точки зрения двумерное пространство с иными, нежели эвклидова плоскость, свойствами, определим угол двух векторов

$(dx_1,\ dx_2)$, $(\delta x_1,\ \delta x_2)$ как число, получаемое по формуле

$$\cos\omega = \\ = \frac{g_{11}dx_1\delta x_1 + g_{12}(dx_1\delta x_2 + dx_2\delta x_1) + g_{22}dx_2\delta x_2}{\sqrt{g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2}\cdot\sqrt{g_{11}\delta x_1^2 + 2g_{12}\delta x_1\delta x_2 + g_{22}\delta x_2^2}}.$$

Из этой формулы видно, что два вектора в точке P будут между собой составлять угол, отличный от того угла, который эти же самые вектора (с прежними составляющими)

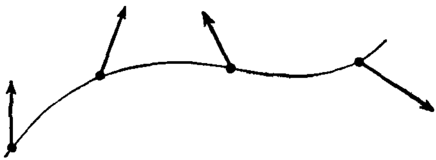


Рис 4

имеют в другой точке P_0, ибо g_{11}, g_{12}, ... зависят, вообще говоря, от координат точки P и, значит, меняются, когда от точки P переходим к точке P_0. Из этого замечания видно, что пространства с иными свойствами, нежели эвклидово (с иной метрикой), отличаются коренным образом от того пространства, с которым мы привыкли оперировать. Можно доказать, что определенный нами угол двух бесконечно малых векторов совершенно не зависит от способа арифметизации пространства.

3. Общеизвестна роль эвклидова постулата о параллельных в развитии геометрических идей, особенно в XIX и XX столетиях. Понятие о параллельности играет огромную роль в пространствах, отличных по своим метрическим свойствам от пространства эвклидова; оно должно быть, однако, соответствующим образом обобщено и определено. Такое обобщение понятия параллельности мы имеем в идее *параллельного перемещения*, развитой итальянским математиком Levi-Civita.

Представим себе, что по некоторой кривой перемещается (рис. 4) бесконечно малый вектор, изменяясь по некоторому закону. Закон этого изменения должен быть таков, что, задав бесконечно малый вектор в некоторой точке кривой, мы сможем определить вектор, соответствующий заданному в любой другой точке нашей кривой; далее, закон этого изменения должен давать нам возможность произвести указанное перемещение вектора по любой кривой нашего пространства. Условимся только что описанную манипуляцию с вектором называть *сопряжением*. *Параллельным перемещением* вектора мы назовем определенным образом выбранное сопряжение. Смотря по тому, каким образом мы выберем это сопряжение, мы будем иметь те или иные геометрические свойства нашего пространства: иначе говоря, определенное параллельное перемещение определит собой особый класс пространства.

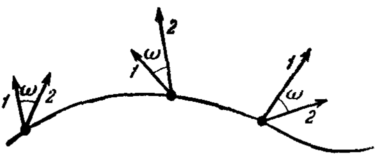


Рис. 5

Можно, как я уже сказал, произвольным образом выбирать параллельное перемещение; мы, однако, остановимся на параллельном перемещении, наиболее близком к нашим обычным представлениям, а именно, на таком *параллельном перемещении, которое оставляет неизменным угол двух параллельно перемещающихся по одной и той же кривой векторов* (рис. 5)[1].

Расстояние двух бесконечно близких точек P и P', определяющих вектор, зависит, как мы видели, от фундаментального метрического тензора и от составляющих нашего вектора; условимся это расстояние называть *величиной вектора*. Величина вектора при параллельном его перемещении, вообще говоря, меняется и лишь в особо исключительных случаях остается неизменной. Условимся называть пространства, в которых величина вектора не меняется при параллельном перемещении, *пространствами Римана*[2], те же пространства, в которых величина вектора меняется при его параллельном перемещении,— *пространствами Weyl'я*. Пространства Римана обладают чрезвычайно любопытной особенностью: в них параллель-

[1] Рассматривая пространство, мы должны определенным образом выбрать параллельное перемещение; тот или иной выбор определенного параллельного перемещения обусловит собой целый ряд свойств нашего пространства.

[2] От пространства Римана следует отличать пространства постоянной римановой кривизны, являющиеся лишь весьма частным видом пространства Римана.

ное перемещение определяется вполне знанием метрики пространства (т. е. знанием фундаментального метрического тензора). С пространствами Weyl'я дело обстоит сложнее: для них установление параллельного перемещения требует, помимо знания фундаментального метрического тензора, знания еще некоторых величин; совокупность этих величин называется *масштабным вектором*. Для трехмерного пространства масштабный вектор состоит из трех величин, для двумерного — из двух[1].

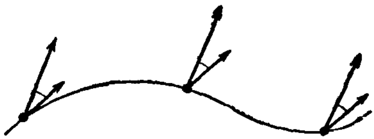


Рис. 6

Чтобы дать более ясное представление о параллельном перемещении, рассмотрим это понятие для обычной эвклидовой плоскости, определив параллельное перемещение вектора как обычный параллельный перенос вектора из одной точки в другую (рис. 6), перенос, при котором величина вектора не меняется, а прямые линии, на которых лежит вектор до и после перемещения, остаются параллельными (в обычном смысле). Само собой разумеется, что указанное параллельное перемещение вектора можно определить аналитически следующим способом: вектор (dx_1, dx_2) перемещается параллельно, если вектор $(\delta x_1, \delta x_2)$, в который он перейдет, определится равенствами

$$\delta x_1 = dx_1, \ \delta x_2 = dx_2;$$

из этого определения параллельности перемещения можно будет определить понятие параллельности и вывести ряд свойств, присущих этому понятию в эвклидовой геометрии. Нетрудно видеть, что, при только что установленном определении параллельного перемещения, угол для двух параллельно перемещающихся векторов не меняется, равно как не меняется и величина параллельно перемещающегося вектора; таким образом, эвклидово параллельное перемещение характеризует пространство, являющееся частным случаем пространства Римана.

---

[1] Мы не имели здесь возможности входить в большие подробности относительно структуры понятия о масштабном векторе.

4. Параллельное перемещение может дать возможность ввести понятие о *прямой* линии. В каждой точке кривой эта кривая имеет определенное направление, характеризуемое направлением бесконечно малого вектора.

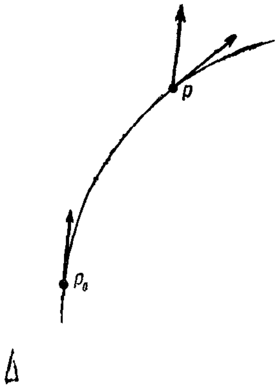


Рис. 7

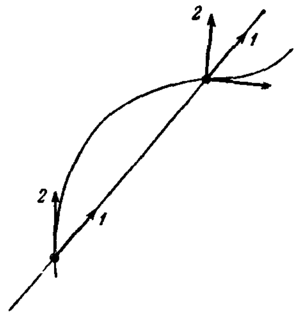


Рис. 8

Возьмем в некоторой точке P_0 нашей кривой бесконечно малый вектор, определяющий направление в этой точке кривой (рис. 7); переместим параллельно этот бесконечно малый вектор в какую-либо точку P кривой, тогда, в большинстве случаев, направление перемещенного в точке P вектора не будет совпадать с направлением нашей кривой в этой точке. Кривую, обладающую тем исключительным свойством, что направление параллельно перемещенного в любую точку P указанного только что вектора совпадает с направлением кривой в этой точке, условимся называть *прямой линией*; прямая линия отличается от всех других кривых тем исключительным свойством, что направление ее вдоль по самой линии параллельно перемещается. Само собой разумеется, что для различных определений параллельного перемещения мы будем иметь и разное определение прямых линий. Обратимся теперь к эвклидовой плоскости. В ней, очевидно, будут иметься кривые, не обладающие тем свойством, что их направление вдоль по кривой перемещается параллельно (рис. 8), но будут и определенные выше прямые линии, каковые *«прямые» совпадут с обычным определением эвклидовой* прямой линии.

Прямая, определенная при помощи параллельного перемещения, обладает для пространств Римана характерным свойством быть кратчайшей линией, соединяющей две какие-либо на ней расположенные точки, иначе говоря, длина дуги по прямой от P_1 до P_2 короче, чем длина дуги по любой другой кривой. На рис. 9 я нарочно изобразил «прямую» не обычной прямой, имея в виду, что этот чертеж изображает не эвклидову плоскость, а, следовательно, метрика в нем настолько отлична от эвклидовой, что длина дуги $P_1 P_2$ по «прямой» A короче, чем длина дуги P_1P_2 (в новом мероопределении) по эвклидовой прямой B.

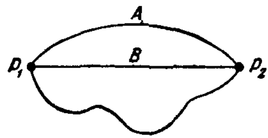


Рис. 9

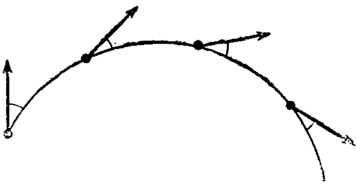


Рис. 10

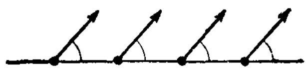


Рис. 11

Итак, *прямые римановых пространств суть линии кратчайших расстояний* (геодезические); этим свойством не обладают прямые пространств Weyl'я.

С помощью определения прямой нетрудно осуществить параллельное перемещение какого-либо вектора вдоль по прямой, по крайней мере в пространстве Римана; бесконечно малый вектор направления, по определению, перемещается вдоль по прямой параллельной; угол между двумя параллельно перемещающимися векторами, как мы знаем, не меняется, значит, для осуществления параллельного перемещения по прямой нашего вектора достаточно следить за тем, чтобы он оставлял всегда одинаковый угол с направлением нашей прямой линии и не менялся бы по величине. На рис. 10 и 11 осуществлено параллельное перемещение вектора, причем в одном случае взята за прямую обычная прямая, а в другом — некоторая кривая линия.

На эвклидовой плоскости параллельное перемещение по обычной прямой характеризуется тем, что переместившийся вектор будет, в обычном смысле, параллелен исходному своему положению (см. рис. 11). На сфере кратчайшей линией служит, как известно, дуга большого круга;

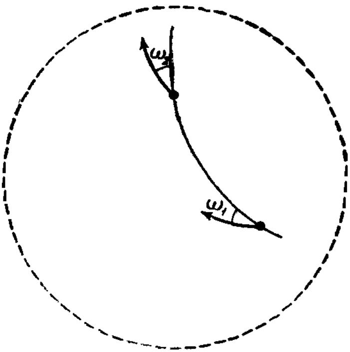


Рис. 12

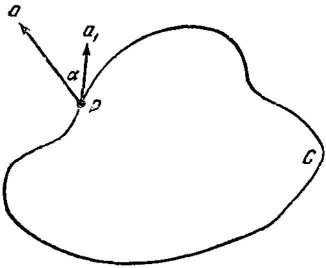


Рис. 13

на рис. 12 изображено параллельное перемещение бесконечно малого вектора по дуге большого круга; отметим еще раз: угол ω_1, составляемый вектором с дугой в начальной точке, одинаков с углом ω_2, составляемым параллельно переместившимся вектором с дугой в конечной точке.

5. Проведем через заданную точку P какую-либо замкнутую линию — контур C (рис. 13), возьмем некоторый бесконечно малый вектор a в точке P и будем параллельно перемещать его вдоль по линии C, пока снова не вернемся в исходную точку P; наш вектор превратится в вектор a_1, причем и по величине (в пространствах Weyl'я) и по направлению (как в пространстве Weyl'я, так и в пространстве Римана) вектор a, вообще говоря, не должен совпасть с вектором a_1. Случай, когда a_1 совпадает с a и по величине и по направлению, будет случаем исключительным.

Назовем через α угол, который a_1 будет образовывать с a. От каких величин может, вообще говоря, зависеть этот угол? Само собой разумеется, что угол этот будет зависеть от свойств рассматриваемого пространства (ибо само параллельное перемещение характеризует пространство), и от вида замкнутой линии C. Проводя через точки P суживающиеся сомкнутые линии, мы можем заметить, что вид сомкнутой линии будет влиять все меньше и меньше на угол α; для двумерного пространства этот угол α окажется пропорциональным площади s[1], ограниченной сомкнутой кривой, причем множитель пропорциональности будет меняться в зависимости от положения точки P. Этот множитель пропорциональности и называется *векториальной кривизной или просто кривизной двумерного пространства в точке P*; обозначая кривизну буквой K, будем иметь

$$(11) \qquad K = \lim_{s \to 0} \frac{a}{s} .$$

Аналогично определяется кривизна и для трехмерного пространства; было бы слишком сложно останавливаться на этом определении кривизны в трехмерном пространстве подробно. Для нас достаточно будет знать, что угол α, который вектор, возвратившийся в исходную точку после параллельного перемещения, образует с вектором исходным, характеризует *среднюю кривизну* той области пространства, где расположена наша сомкнутая кривая. Чем этот угол будет больше, тем больше будет упомянутая средняя кривизна. Равенство нулю этого угла будет означать, что средняя кривизна пространства в рассматриваемой его части будет 0.

Чтобы дать наглядное представление о кривизне, вообразим себя снова в виде двумерных теней, живущих на сфере радиуса R. На этой сфере образуем сферический треугольник ABC из трех «прямых» линий (рис. 14), т. е. из дуг большого круга (пространство на сфере относится нами к пространствам Римана); пусть A, B, C означают три внутренних угла нашего треугольника. Возьмем

---

[1] Понятие площади нуждается, конечно, в определении. Не входя в детальные подробности, отметим, что для двумерного пространства площадью части этого пространства, ограниченной замкнутой кривой, будем называть число, определенное с помощью интеграла $\iint \sqrt{g}\, dx_1 dx_2$, где $g = g_{11}g_{22} - g^2_{12}$, а интеграл распространен на область, ограниченную нашей замкнутой кривой. Для эвклидовой плоскости понятие площади, таким образом, определенное, совпадает с обычным; то же будет и для площади фигуры на сфере.

в точке *A* *бесконечно малый* вектор a, совпадающий по направлению с направлением дуги AB (прямой); переместим параллельно этот вектор по сомкнутой линии, образующей треугольник ABC; в точку A наш вектор вернется в виде вектора a' с уже изменившимся направлением.

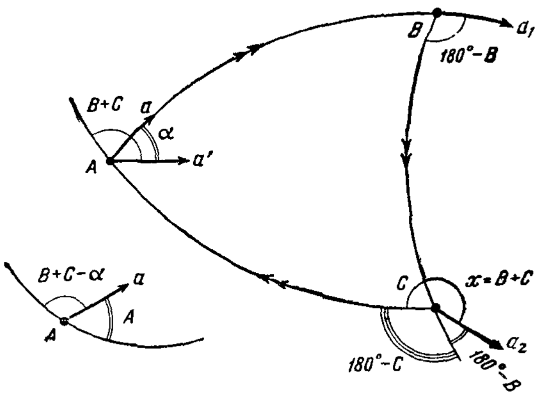


Рис. 14

Вычислим угол α между векторами a и a'. Для этого произведем последовательно параллельное перемещение вектора a по дуге AB, по дуге BC и по дуге CA. Так как AB прямая, то вектор a, переместившись в точку B в виде вектора a_1, будет иметь направление дуги AB в той же точке B и, значит, с дугой BC будет образовывать угол в $180° - B$. Перемещая параллельно вектор a_1 по прямой BC, мы, сообразно сказанному в п. 4, должны сохранять неизменным угол между вектором a_1 и прямой BC; таким образом, угол вектора a_2, в который превратился после параллельного перемещения вектор a_1, с дугой BC, будет тот же, что и угол вектора a_1, с этой дугой, т. е. будет равен $180° - B$; определим угол x вектора a_2 с дугой CA, по которой ему предстоит параллельно перемещаться; из чертежа видно, что сумма

$$x + (180° - B) + (180° - C)$$

образует угол в 360°, откуда

$$x - B - C + 360° = 360° \text{ и } x = B + C;$$

таким образом, угол a_2 с дугой CA будет $B + C$; этот угол сохранится, когда a_2 параллельно переместится по дуге «прямой» CA и займет положение вектора a'; таким обраэом, a' с другой CA будет иметь угол, равный $B + C$, если α будет углом между a и a', то из чертежа видно, что $B + C - \alpha$ будет угол, который a образует с дугой CA; с другой стороны, a с дугой AC образует угол A; сумма этих углов равна 180°, таким образом

$$B + C - \alpha + A = 180°,$$
$$\alpha = A + B + C - 180°,$$

иначе говоря, угол α есть так называемый сферический избыток, равный, как известно из сферической тригонометрии, отношению площади s сферического треугольника ABC к квадрату радиуса R сферы

$$\alpha = \frac{s}{R^2}, \quad \frac{\alpha}{s} = \frac{1}{R^2};$$

таким образом, по определению кривизны K, будем иметь

$$K = \frac{1}{R^2},$$

т. е. кривизна нашего сферического двумерного пространства обратно пропорциональна квадрату радиуса сферы. Проделывая то же самое построение с плоским треугольником, мы нашли бы, что угол $\alpha = 0$, ибо сумма углов в плоском треугольнике равна двум прямым (180°), в соответствии с этим мы получили бы, что кривизна плоскости равна 0.

Только что произведенное построение показывает большую связь кривизны с вопросом о сумме углов треугольника, а, как известно, сумма углов треугольника теснейшим образом связана с постулатом Эвклида; к сожалению, однако, я не могу остановиться более подробно на этом обстоятельстве. Исследование, которое только что выполнили сферические двумерные существа, дало бы возможность определить кривизну их пространства, а следовательно, и радиус той сферы, помощью которой они могли бы интерпретировать свою геометрию. К этому замечанию мы еще вернемся далее.

6. Когда вектор, параллельно перемещаясь из точки P по замкнутой кривой C, вернулся в виде вектора a'

в ту же точку, то величина его, вообще говоря, изменится. Для римановых пространств, как уже было указано выше, величина вектора при параллельном его перемещении не изменится, поэтому величина a' будет равна величине a; иначе будет обстоять дело с пространствами Weyl'я, там величина a' будет отлична от величины a. Исследуем это изменение величины параллельно перемещающегося вектора. Оно будет зависеть от трех причин: во-первых, от первоначальной величины вектора, а во-вторых, от вида сомкнутой кривой C и, в-третьих, от свойств нашего пространства. Пусть l, l' будут величинами векторов a и a', $\Delta l = l' - l$ будет изменением величины вектора a при параллельном перемещении его по сомкнутой кривой, $\lambda = \frac{\Delta l}{l}$ будет *относительным изменением величины вектора a при параллельном перемещении его по сомкнутой кривой C.*

Обратимся снова к двумерному пространству; относительное изменение λ величины вектора a будет при достаточно малом C пропорционально площади s, ограничиваемой кривой C, причем множитель пропорциональности будет меняться в зависимости от положения исходной точки P. Этот множитель пропорциональности называется Weyl'ем *метрической кривизной*[1] *двумерного пространства в точке P*; обозначая метрическую кривизну буквой L, будем иметь

$$L = \lim_{s \to 0} \frac{\lambda}{s}. \tag{12}$$

Для трехмерного пространства метрическая кривизна определяется вполне аналогичным манером. Для нас достаточно знать, что относительное удлинение характеризует *среднюю метрическую кривизну* той области пространства, в которой расположена сомкнутая линия C. Само собой разумеется, что метрическая кривизна риманова пространства равна 0, но следует тут же отметить, что метрическая кривизна может быть нулем и для пространств, отличных от римановых.

---

[1] То, что здесь называется метрической кривизной, сейчас называют кривизной гомотетии. Ср.: М. А. Тоннела. Основы электромагнетизма и теории относительности. М., 1962, стр. 422.— *Прим. ред.*

Как векториальная, так и метрическая кривизна пространства не меняются от точки к точке в пространстве. Векториальная кривизна вполне определяется по фундаментальному метрическому тензору и по масштабному вектору, тогда как метрическая кривизна требует для своего вычисления знания лишь одного масштабного вектора. Само собой разумеется, что и векториальная и метрическая кривизны суть собственные свойства пространства и не зависят от способа его арифметизации. Мы, все время говоря о пространстве, имели в виду трехмерное пространство и обращались к двумерному пространству лишь в целях иллюстраций. Нетрудно, однако, обобщить определения наших понятий и их свойств на пространство любого числа измерений. Формально мы не встретимся ни с какими затруднениями, за исключением лишь увеличения числа g_{ik} для фундаментального метрического тензора и числа величин, определяющих масштабный вектор. Для двумерного пространства мы имеем три величины для определения фундаментального метрического тензора и второй величины для определения масштабного вектора; в трехмерном (обычном) пространстве мы будем иметь шесть величин для определения фундаментального метрического тензора и три величины для определения масштабного вектора; наконец, в четырехмерном пространстве число величин, нужных для определения метрического тензора, увеличится до десяти (число различных комбинаций значков 1, 2, 3, 4 по два), а число величин, необходимых для определения масштабного вектора, дойдет до четырех.

7. Обратимся теперь снова к физическому пространству и посмотрим, как можем мы с помощью физических манипуляций установить кривизну того геометрического пространства, коего физическое пространство служит интерпретацией. Для этого необходимо прежде всего установить те вещи физического пространства, которые соответствуют понятиям направления, вектора, угла в геометрическом пространстве. Так как физическое пространство есть пространство материальное, то указанные вещи должны быть связаны с определенными материальными объектами, иначе говоря, направление должно осуществляться с помощью материальных тел или процессов (например, при помощи светового луча), угол должен получаться в результате определенной манипуляции с мате-

риальными телами (физическое измерение угла). Далее, для установления кривизны необходимо определить процесс в физическом пространстве, отвечающий параллельному перемещению вектора; установив этот процесс, мы можем с помощью действий с материальными телами осуществить параллельное перемещение вектора и, кроме того, сможем определять его величину и определять углы, составляемые им с какими-либо иными векторами или направлениями. Установив указанные понятия и действия в физическом пространстве, мы сможем произвести ряд экспериментов для изучения кривизны нашего пространства: наметим целый ряд замкнутых путей и станем производить (на самом деле, материально) параллельное перемещение векторов по этим путям; вернувшись в исходную точку, смерим угол α, на который отклонился наш материальный вектор от своего исходного положения, и определим относительное удлинение λ нашего вектора; зная эти величины, для большого числа сомкнутых линий, мы можем определить среднюю векториальную и метрическую кривизны пространства в различных его местах.

Положим, что мы смогли бы выполнить (по крайней мере, принципиально) этот эксперимент; ниже я укажу, что этот эксперимент, равно как и определение фундаментального метрического тензора в трехмерном пространстве, выполнить нельзя (даже мысленно). Для малых сомкнутых линий результат в нашем пространстве получился бы весьма сомнительный, углы α и величины λ были бы очень малы и измерить их не было бы никакой возможности. Знаменитое измерение Гаусса суммы углов треугольника и является, как мы выше видели, производством только что указанного эксперимента для определения угла α. Треугольник был взят на земной поверхности, значит, имел сравнительно малую площадь и результатом явилась столь малая величина α, что ее нельзя было измерить. Дело, конечно, могло бы измениться, если бы за сомкнутую линию мы взяли бы контур, простирающийся от нашей солнечной системы до туманности Андромеды, площадь такого контура была бы очень велика, и, как бы малы ни были кривизны нашего пространства, угол α и величина λ оказались бы настолько значительными, что их легко было бы измерить; произведя эти измерения, соединяя их с измерениями, нужными для определения метрики пространства, мы смогли бы без труда установить свойства того геометрического пространства, интерпретацией которого *при некоторых соглашениях и произвольных* (не с точки зрения целесообразности, конечно) *условиях* является наше физическое пространство. Имея в виду целесообразность выбранной нами интерпретации, мы могли бы сказать попросту, что наше физическое пространство обладает такими-то и такими свойствами. Иначе говоря, мы бы создали *физику* пространства или, если угодно, *физическую геометрию*.

Однако, как я уже упомянул выше, выполнение подобных экспериментов совершенно немыслимо, а причиной этому является то обстоятельство, что никаких физических действий в трехмерном пространстве мы производить не можем, ибо все эти действия нам приходится производить еще во времени, ибо все живущее и могущее производить физические действия живет во времени: τιαντα ρει και ουδεν μηνει.

Нет ни одного физического явления, могущего произойти мгновенно; мы не можем перемещать вектор по кривой с бесконечно большой скоростью (мгновенно), а значит, когда вектор вернется в исходную точку, и мы смерим угол между ним и исходным вектором, то это не наш старый угол α, а нечто совершенно новое, ибо за то время, пока наш вектор путешествовал до Андромеды и обратно, прошло много десятков тысяч лет, как бы быстро, хотя бы так же быстро, как свет, ни перемещался наш вектор, и, следовательно, оба наши вектора — исходный и вернувшийся успели порядком постареть.

Против указанного можно возразить, что, уменьшая длину пути для путешествующего вектора, мы, при большой его скорости, уменьшим его постарение. Совершенно верно; так и было сделано в опыте Гаусса с измерением углов треугольника: углы измерялись (принципиально, конечно) почти мгновенно, ибо при измерении пользовались световым лучом, обегавшим весь треугольник в малые доли секунды; но уменьшение длины пути сейчас же скажется на уменьшении охватываемой сомкнутым контуром площади, а это, в свою очередь, уменьшит α и λ настолько, что их нельзя будет измерить.

Итак, мы совершенно не можем производить физические действия, нужные для экспериментального установления физической геометрии в трехмерном пространстве;

для нас эти действия столь же невозможны, сколь невозможны для нас физические действия в двумерном пространстве, где нельзя поместить наших приборов и где мы не можем поместиться сами. Причина этих затруднений — *время*, без которого нет пространства и которое обусловливает не физическое трехмерное пространство, а физическое четырехмерное пространство — мир. К изучению времени мы сейчас и обратимся.

Глава 2

ВРЕМЯ И МИР

Время есть число движения.
Аристотель

Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.
H. Minkovski. «Raum und Zeit»[1].

§ 5. Время

1. Главу о пространстве мы начали с определения абстрактного пространства; мы могли бы также поступить и со временем, сказавши, что время есть совокупность вещей, называемых моментами и стоящих в определенных отношениях между собой и с трехмерным пространством. Я предпочту, однако, другой путь, начав с рассмотрения физического времени; делаю я это потому, что у нас гораздо более ясны представления о пространстве, нежели представления о времени. В физическом пространстве мы встречаемся с особым явлением, называемым *движением*, которое заключается в том, что физическая (материальная) точка меняет свое положение в трехмерном пространстве, иначе говоря, меняет те три числа x_1, x_2, x_3, которые при арифметизации трехмерного пространства служат ей координатами. Геометрическое место положений материальной точки будет некоторая кривая, называемая *траекторией материальной точки*; если точка движется по

---

[1] Отныне пространство само по себе и время само по себе должно обратиться в фикцию (буквально: погрузиться в тень.— *Ред.*) и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность. Г. Минковский. «Пространство и время». (Из сб. «Теория относительности». Л., 1935, стр. 181).

прямой линии, мы будем иметь прямолинейную траекторию, если точка движется по дуге круга, будем иметь круговую траекторию. Задав траекторию, мы еще не устанавливаем положение материальной точки на ней, но если на траектории выбрать определенную начальную точку и от нее по траектории измерять длины дуг положительными числами в одну сторону, отрицательными в другую (рис. 15), то, задав траекторию и задав число t, отвечающее длине дуги, мы вполне определим положение материальной точки, движущейся по траектории.

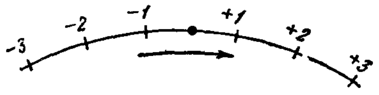


Рис. 15

Сопоставим теперь каждой физической точке M пространства определенное *основное движение* и назовем *часами данной точки* M инструмент, показывающий длины дуг t, проходимых материальной точкой по траектории в основном движении. Следует все время иметь в виду, что выбор основного движения совершенно произволен, равно как совершенно произволен выбор начальной точки на траектории основного движения; т. е. число, показываемое часами данной точки M, есть совершенно произвольная, зависящая от нашего выбора величина. С другой стороны, следует помнить, что мы оперируем все время с физическим пространством и с физическими явлениями, в нем совершающимися, так что часы, нами установленные, могут быть (по крайней мере, в идее) действительно построены с помощью материальных объектов.

Величину t, показываемую часами данной точки M, назовем *физическим местным временем точки* M.

2. Прежде чем отвечать на естественное и всегда делаемое возражение о неравномерности введенного нами движения и о непригодности его для наших часов, покажем несколько примеров установления физического местного времени.

Рассмотрим прежде всего *звездное время*[1]. Для всех точек трехмерного пространства выберем одно основное движение; таким образом, часы для всех точек пространства будут одни и те же. За основное движение примем

[1] Термин «звездное время» употребляется нами не в том смысле, в каком он применяется в астрономии.

движение конца стрелки определенной длины, направленной из центра Земли на какую-либо звезду. Звездное время t_* будет длина пути, описываемого концом указанной стрелки. Звездное время t_* будет одно и то же во всех точках пространства, это будет *универсальное время*. Это, кроме того, будет очень удобное время, ибо весьма большое число движений будет совершаться так, что длины дуг, проходимых точкой по траектории, будут пропорциональны разности звездных времен

$$s = at_* + b,$$

где a и b — постоянные. Такие движения будем называть *равномерными по отношению к звездному времени*. Повторяю, очень большое число движений будет или равномерно или практически равномерно по отношению к звездному времени. Поэтому исследование движений значительно упрощается, когда за время выбрано звездное время. Как раз это время и было впервые избрано человеком и выбор именно этого времени был исторически, конечно, совершенно необходим и естествен уже по одному тому громадному религиозно-мистическому впечатлению, которое звездное время и его величавое движение производило, да и сейчас еще производит, на человеческую душу. Выбор звездного времени за время универсальное оказал громадное влияние на всю историю культуры и, конечно, на создание основных законов механики, как об этом сказано будет ниже. Этот выбор, с нашей точки зрения совершенно произвольный, казался единственно истинным и священным, а звездное время, наделенное рядом мистических свойств, сделалось временем вообще, таинственным и малопостижимым. Конечно, не всякое движение является равномерным по отношению к звездному времени; падение тел около земной поверхности или, лучше сказать, падение тел в постоянном поле тяготения является примером неравномерного (равноускоренного), по отношению к звездному времени, движения. Длина дуги, проходимая точкой в этом движении, выражается, в зависимости от звездного времени, следующей формулой:

$$s = at_*^2 + b,$$

a и b — постоянные, причем a зависит от ускорения силы тяжести: $a = \frac{g}{2}$, где g — ускорение силы тяжести в нашем постоянном поле тяготения.

3. Рассмотрим теперь другое время, которое мы, для краткости, назовем *гравитационным временем*. Основное движение и для этого выбора времени будет одним и тем же для всех точек, а, значит, часы будут одни и те же, и гравитационное время будет универсальным. Положим, что материальная точка падает в постоянном поле тяготения и выберем это движение за основное; часы покажут длину пути t_g, пройденную этой точкой. Эта величина и будет гравитационным временем. Сравним гравитационное время со звездным; для этого достаточно будет поставить в предыдущую формулу вместо s величину t_g

$$t_g = at_*^2 + b,$$

откуда

$$t_* = \sqrt{\frac{t_g - b}{a}};$$

значит, если s есть путь, проходимый концом стрелки наших часов, меряющих звездное время, то

$$s = \sqrt{\frac{t_g - b}{a}};$$

таким образом, по отношению к гравитационному времени звезды движутся неравномерно; стрелки наших часов также движутся неравномерно; зато тяжелый снаряд падает равномерно, хотя различно под разными широтами Земли. Само собой разумеется, что, приняв гравитационное время за истинное время, нам пришлось бы коренным образом перестроить всю механику; механика сделалась бы от этой переделки значительно сложнее, ибо масса простейших и чаще всего встречающихся движений оказалась бы движениями неравномерными и происходящими по сравнительно сложным законам. Конечно, введение гравитационного времени явилось бы действием нецелесообразным, но, помимо принципа целесообразности и удобства, гравитационное время могло бы с тем же правом служить временем, как и время звездное.

Введем, наконец, еще третий сорт времени — *время маятниковое.* Построим значительное количество одинаковых часов с маятником и примем за основное движение для любой точки земной поверхности движение конца секундной стрелки часов с маятником, помещенных в этой точке. Путь, пройденный концом секундной стрелки наших часов с маятником от некоторой начальной точки, обозначим через t_m и назовем *маятниковым временем.* Для каждой точки земной поверхности маятниковое время будет пропорционально звездному времени, так что движение, равномерное по отношению к звездному времени, будет равномерным и по отношению к маятниковому времени, и обратно. Но в отличие от универсального времени или гравитационного времени маятниковое время будет местным и на разных широтах будет разным.

4. Из сказанного выше вытекает вместе с тем и ответ на всегда делаемое указание о преимуществах звездного времени, так как звездное время якобы основано на движении равномерном. В самом деле, понятие равномерности движения уже предполагает наличность времени, а выражение «движение звезд совершается равномерно» означает только то, что мы *называем* движение звезд равномерным. Равномерность движения есть понятие совершенно относительное,— можно говорить о равномерности одного движения по отношению к другому, и когда мы говорим о равномерном движении, то подразумеваем под этим движение равномерное, относительно движения звезд, что звучит еще более одиозно, равномерное относительно вращения Земли. В признании за звездным временем особого мистического значения кроется нежелание человека понять всю нецентральность и скромность положения планеты, на которой, волею судеб, ему пришлось жить. Идея произвольности времени была установлена еще блаженным Августином в следующих поразительных словах: «Audivi a quondam homino docto, quod solis et lunae ac siderum motus ipsa sint tempora, et nil annui. Cur enim non potius omnium corporum motus sint tempora? An vero si cessarent coeli lumina, et moveretur rota figuli, non esset tempus, quo metiremur eos gyros, et diceremus, aut aequalibus morulis agi, aut si alios tardius, alios velocius moveretur alios magis diuturnos esse, alios minus?... Sunt et sidera et luminaria coeli in signis et in temporibus

et in annis et in diebus. Sunt vero; sed nec ego dixerim circuitum illius ligneonale rotae diem esse; nec tamen ideo tempus non esse, ille dixerit... Nemo ergo mihi dicat coelestium corporum motus esse tempora, quia et cuiusdam voto cum sol stetisset, ut victoriosum proelium perageret, sol stabat, sed tempus ibat»[1] (S. A u r e l i i A u g u s t i n i. Confessiones, L.XI.C.XXIII).

Мы, конечно, не касаемся здесь, как и всюду в настоящей статье, вопроса целесообразности звездного времени, вопроса о преимущественности этого времени, как следствия целесообразности его введения. Эти вопросы стоят вне рамок тех методов, коими мы в настоящей статье пользуемся.

Установив тем или иным способом физическое местное время (выбрав основное движение), нам уже будет не трудно определить любое движение как изменение координат движущейся точки с течением времени. Совершенно ясно, что перемена одного времени на другое будет соответствовать замене числа t, являющимся первым временем, на число $\bar{t}$, являющееся вторым временем, причем замена эта будет, конечно, совершаться разными способами в разных точках пространства. Иначе говоря, формула для замены t на $\bar{t}$ должна быть написана следующим образом:

$$\bar{t} = f(x_1, x_2, x_3; t); \tag{13}$$

эта формула дает первое указание на значительно бóль-

---

[1] «Я слышал, как говорили одному ученому: „Движение луны, солнца и звезд — вот время". Я, однако, не согласен.

Почему, в самом деле, движения других тел не могли бы быть также временем? Если бы, действительно, все светила небесные остановились, а какое-либо колесо гончара продолжало бы вращаться, разве тогда не было бы времени, при помощи которого мы стали бы измерять обороты этого колеса? Мы бы сказали, что обороты происходят или в одинаковые промежутки времени, или, если бы одни из них были быстрее, а другие медленнее,— что они длятся дольше, а другие меньше?... Светила небесные — это знаки, определяющие время, годы, дни; это правда, но, остерегаясь сказать, что оборот деревянного колеса — и есть день, я все-таки не стал бы спорить, что это не время. Пусть же не говорят мне: время — это движения небесных тел. Когда, по молитве, солнце было остановлено, чтобы человек мог одержать победу, то солнце стояло, но время шло».

шую близость времени к пространству, чем это обычно предполагается. Очевидно, что физическое местное время в данной точке арифметизируется помощью многообразия чисел; таким образом, физическое время в данной точке может служить интерпретацией одномерного пространства. Так как выбор физического местного времени в данной точке произволен, что соответствует произвольности арифметизации того «одномерного пространства», интерпретацией которого служит время, то, конечно, собственные свойства времени (физического) должны быть в данной точке пространства инвариантны, относительно преобразований, установленных формулой (13). Одним из таких собственных свойств физического времени является *промежуток между двумя моментами времени*,— понятие, аналогичное для одномерного «пространства» времени понятию физического расстояния в трехмерном физическом пространстве.

5. Промежуток между двумя моментами времени рассматривается всегда при условии, что мы имеем дело с одной и той же точкой пространства и с различными значениями физического местного времени, отвечающими разным моментам. Промежуток между двумя моментами времени есть измеримая интенсивность. Начальное значение промежутка времени есть промежуток между двумя совпадающими моментами. Единица измерения избирается определенным образом, в связи со скоростью движения света. Промежуток между двумя моментами, различающимися друг от друга на бесконечно малое физическое местное время, назовем *бесконечно малым промежутком*. Так как нам нужны будут в дальнейшем лишь промежутки между двумя бесконечно близкими моментами, то мы и остановимся лишь на определении сих последних.

Для установления понятия о промежутке между двумя бесконечно близкими моментами времени опишем прежде всего особый инструмент, так называемые *световые часы*[1]. Они состоят (рис. 16) из источника света S,

---

[1] Световые часы есть идеальный инструмент, совершенно отличный от того, что выше мы назвали часами в данной точке. Часы в данной точке служили нам лишь в качестве вспомогательного прибора, световые часы будут, наоборот, играть существенную роль, связанную с особой ролью, которую играет свет.

посылающего луч света по определенному направлению; зеркала m, перпендикулярного лучу (правильнее, отражающего луч по направлению, прямо противоположному направлению падающего луча) и могущего быть передвигаемым на любое расстояние $\frac{\tau}{2}$ от S, и, наконец, приемника S', находящегося в той же точке, как и S, и регистрирующего прибытие в S' отраженного луча. Условимся длину, равную удвоенному расстоянию зеркала от источника света, называть *длиной светового луча.*

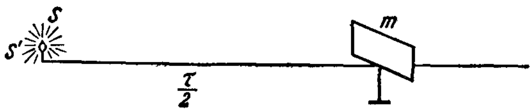


Рис. 16

Бесконечно малым промежутком между двумя моментами времени в данной точке M пространства мы называем такую бесконечно малую длину $d\tau$ светового луча в световых часах, при которой источник S дает сигнал в первый момент, а приемник S' регистрирует отраженный сигнал во второй момент. Очевидно, что в разных точках M пространства $d\tau$ будет различным, ибо, вообще говоря, скорость движения света будет в разных местах различна. Если мы при измерении интенсивности промежутка возьмем другую единицу измерения, то число, измеряющее промежуток, будет уже не $d\tau$, а $ld\tau$, что, сáмо собою разумеется, не существенно. Сравнивая бесконечно малый промежуток $d\tau$ с бесконечно малым приращением местного физического времени dt, мы будем иметь

$$(14) \qquad d\tau = T\,(x_1, x_2, x_3;\, t)\, dt,$$

где T зависит, конечно, как от положения точки M (от координат x_1, x_2, x_3), так и от момента t. Функцию T мы экспериментально определим, воспользовавшись нашими световыми часами для разных точек пространства и в различные моменты времени. Промежуток, конечно, не зависит от способа установления физического местного времени. Если мы, в самом деле, закрепим зеркало m в световых часах так, чтобы длина светового луча равнялась бы $d\tau$, то, каким бы образом мы ни вводили физическое местное время, всегда промежуток между моментом светового сигнала и моментом регистрации возвратившегося сигнала будет (по определению) равен $d\tau$; это обстоятельство можно выразить в виде требования инвариантности скорости света по отношению к преобразованиям вида (13). Так как промежуток времени мы связали с движением света, то тем самым мы приписали свету особую роль; в этом нет ничего удивительного, ибо при определении физической длины нам пришлось бы (ввиду элементарности вопроса мы в соответствующем месте статьи на этом подробно не останавливались) приписать особую роль либо тому же свету, либо инструментам (твердым телам), служащим для измерения физического расстояния. Удобство и важное свойство световых часов заключается в том, что ими можно пользоваться в любой точке материального пространства, ибо свет (электромагнитные колебания и ток) движется (распространяется) во всех материальных телах. Аналогичным образом постоянные звуковые часы не могли бы быть использованы, например, в тех частях материального пространства, которые заполнены только лучистою энергией. Они не могли бы служить для определения промежутков времени в межпланетном пространстве или в пространстве между молекулами, и, таким образом, понятие промежутка времени, установленное с помощью звуковых часов, вовсе отсутствовало бы во многих точках пространства.

§ 6. Движение

1. Рассматривая физическое пространство и время в отдельности, мы видели, каким образом произвольность арифметизации как пространства, так и времени заставляет признать, что собственные свойства пространства и времени, т. е. свойства, не зависящие от способа арифметизации, должны быть инвариантны по отношению к следующим преобразованиям чисел x_1, x_2, x_3 и t, арифметизирующих пространство и время одним способом, в числа $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ и $\bar{t}$, арифметизирующие пространство и время другим

способом

$$(15)\qquad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{t} &= f(x_1, x_2, x_3; t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что эти преобразования особо выделяют роль времени и не являются самыми общими преобразованиями одной четверки чисел, арифметизирующих пространство и время в другую четверку чисел.

Уже самый неестественный вид формул (15) показывает на необходимость дальнейшего их обобщения. Это вполне естественное обобщение может быть без труда получено, когда мы рассмотрим ближе связь физического пространства с физическим временем, — связь, выражающуюся движением. Движение какой-либо материальной точки аналитически может быть выражено тем обстоятельством, что координаты этой точки будут функциями физического времени.

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t).$$

Свойства движения изучаются в особом отделе механики — *кинематике*, которую, по справедливости, называют *геометрией движения* и которая становится действительной геометрией, если мы интерпретируем три координаты x_1, x_2, x_3 и время t, как четыре координаты некоторого четырехмерного пространства: при такой интерпретации движение любой материальной точки будет нам задано в виде *кривой* в этом четырехмерном пространстве; эта кривая вполне определит нам движение, т. е. жизнь нашей материальной точки, и, может быть поэтому и названа кривою жизни материальной точки. Мы, следуя установившейся терминологии, будем называть эту кривую *мировой линией, отвечающей нашей точке*. Чтобы яснее представить себе только что указанную интерпретацию движения, сводящую кинематику к геометрии, упростим наше пространство до двумерной эвклидовой плоскости и арифметизируем это пространство введением прямоугольных прямолинейных координат (x_1, x_2). Чтобы интерпретировать движение, совершающееся в нашей плоскости, введем в рассмотрение трехмерное эвклидово пространство, арифметизировав его помощью введения прямоугольных прямолинейных координат так, чтобы две координаты были бы x_1, x_2, а третья была бы временем t (рис. 17). Движение в нашей плоскости будет выражено равенствами:

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t);$$

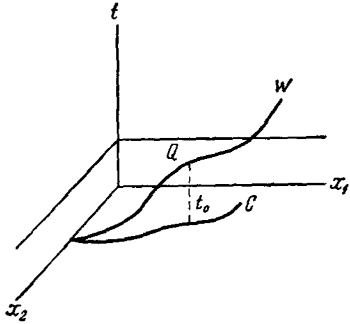


Рис. 17

геометрическое место положений движущейся точки даст нам траекторию C, но траектория не определяет вполне движения, ибо мы не можем по одной только траектории судить, в какой ее точке будет к данному моменту находиться наша материальная точка. Наоборот, мировая линия W, которая в нашем случае явится кривой в пространстве, вполне определит собой движение. В самом деле, взяв какую-либо точку Q на линии W, мы, опуская перпендикуляр на плоскость x_1x_2, найдем точку траектории, в которой будет находиться наша материальная точка к моменту t, определяемому длиной этого перпендикуляра. Плоскость $t = t_0$ будет плоскостью, параллельной нашей плоскости; пересечение плоскости $t = t_0$ с мировой линией W определит собой как раз положение на плоскости нашей материальной точки. Таким образом, движение всех точек нашей плоскости вполне определится, если мы будем пересекать систему мировых линий наших точек плоскостями $t = t_0$ и придавать t_0 разные значения.

Положим (рис. 18), что двое идут по оси x_1, один с постоянной скоростью a, другой с постоянной скоростью b; оба к моменту $t = 0$ выходят из начала координат. Траектории у обоих пешеходов будут одинаковые, но мировые линии (прямые I и II) будут различны; нетрудно также видеть (рис. 19), что мировая линия точки, движущейся равномерно по кругу, будет винтовая линия. Все, что сказано было для частного вида арифметизации двумерного пространства и времени, применимо и к общему случаю произвольной арифметизации пространства и времени.

Задавая в четырехмерном пространстве определенную мировую линию, мы для каждой точки этой линии будем знать все ее четыре координаты, т. е. числа x_1, x_2, x_3 и t,

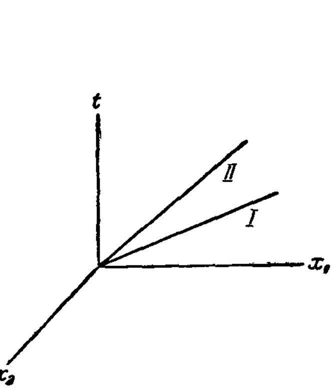


Рис. 18

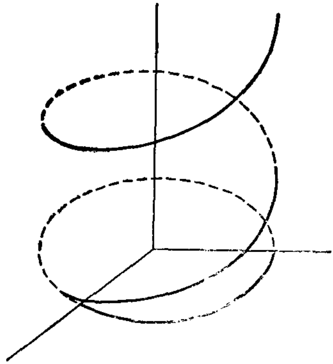


Рис. 19

следовательно, будем знать положение нашей точки к моменту t. Положение всех точек трехмерного мира к моменту $t = t_0$ мы получим, если систему мировых линий, отвечающих этим точкам, пересечем трехмерным пространством, получаемым из нашего четырехмерного, полагая $t = t_0$; такое пространство будет частным видом того, что мы в дальнейшем условимся называть *гиперповерхностью* пространства четырех измерений. Таким образом, вся жизнь нашего физического пространства, сводящаяся к движению материальных тел, его составляющих, может быть выражена системою мировых линий четырехмерного пространства.

2. Говоря о движении, мы рассматривали движения в физическом пространстве, т. е. в пространстве, заполненном материальными телами, в котором положение точки фиксируется помощью определения материальных тел или процессов; поэтому движение, нами рассматриваемое, есть *движение относительное*, по отношению к тем материальным телам, которые служат «координатной решеткой» для нашего физического пространства. Но, очевидно,

что физическое пространство мы смогли бы арифметизировать не при помощи тех тел, которые неподвижны, а при помощи тел движущихся, тогда вторые тела образовали бы физическое пространство, по отношению к которому двигались бы тела, сначала признанные нами неподвижными. Бесполезно было бы пытаться ответить на вопрос о том, какие же тела движутся и какие неподвижны, ибо самый термин «движется» может иметь смысл только относительный: можно рассматривать движение одной системы тел по отношению к другой системе. Решить вопрос, какое же движение истинное, эквивалентно решению бесполезного вопроса о том, что к чему привешено: хвост ли к собаке или собака к хвосту.

Спрашивается теперь, каким же образом осуществляется движение всех точек нашего трехмерного мира? Для осуществления этого движения из каждой точки трехмерного пространства (x_1, x_2, x_3) необходимо провести мировую линию; эта мировая линия изобразит собой движение нашей точки; пусть ко времени t наша точка, постоянно лежащая на мировой линии, будет иметь координатами

$$\bar{x}_1 = \varphi_1(t),\ \bar{x}_2 = \varphi_2(t),\ \bar{x}_3 = \varphi_3(t);$$

так как каждой точке трехмерного мира соответствует своя мировая линия, то, очевидно, форма функций φ_1, φ_2, φ_3 будет разная для разных точек пространства, и, значит, функции будут зависеть не только от t, но и от x_1, x_2, x_3

$$\bar{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3; t),\ \bar{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3; t),$$
$$\bar{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3; t).$$

Один из способов арифметизации пространства состоит в сопоставлении каждой его точке чисел x_1, x_2, x_3; при этом способе, относительно точек нашего пространства, материальные точки двигались, согласно предыдущим формулам, но мы могли бы считать эти последние точки неподвижными и тогда можно было бы арифметизировать пространство, сопоставив каждой его точке три новых числа — $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$. Таким образом, пространство и время мы можем арифметизировать двумя способами, помощью четверки чисел x_1, x_2, x_3 и t или помощью четверки чисел $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ и $\bar{t}$, при этом переход от одного способа арифметизации к другому выразится следующими формулами:

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3; t),\\
\bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3; t),\\
\bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3; t),\\
\bar{t} &= f(x_1, x_2, x_3; t).
\end{aligned}
$$

Все собственные свойства пространства и времени должны иметь инвариантную форму по отношению к преобразованиям (16); в этих преобразованиях роль времени ничем особым не отличается от роли пространственных координат и достаточно обозначить время t через x_4, а функцию f через f_4 для того, чтобы даже внешняя форма преобразований (16) перестала бы указывать на особое положение времени; приняв только что указанные обозначения, мы перепишем формулу (16) в таком виде:

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
\bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
\bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
\bar{x}_4 &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4).
\end{aligned}
$$

Таким образом, время свергается со своего пьедестала. Исполняются слова великого немецкого математика Минковского, поставленные эпиграфом к настоящему отделу, и физический мир предстает пред нами в своем истинном свете, как совокупность вещей, называемых *явлениями*, характеризуемых при арифметизации четырьмя числами x_1, x_2, x_3, x_4. *Физический мир* может служить, на основании сказанного, интерпретацией пространства четырех измерений; *явление* физического мира становится интерпретацией точки четырехмерного геометрического пространства. Вместе с этой новой точкой зрения на физический мир отпадают и те трудности исследования его, на которые мы указывали в конце предыдущего отдела: время перестает мешать нашим исследованиям, наоборот, потеряв свое преимущественное положение, смешавшись с пространственными координатами, время становится деятельным помощником при исследовании уже *не физическо-*

го пространства и не физического времени, которых самих по себе нет, а совокупности пространства-времени — физического мира.

Собственные свойства этого физического мира инвариантны, относительно преобразований (17), и, если мы признаем, что все процессы физического мира происходят по законам, не зависящим от способа арифметизации физического мира, то все *эти физические законы являтся собственными свойствами физического мира и будут иметь форму инвариантную, относительно преобразований* (*17*). Положение это, которое мы будем называть постулатом инвариантности, играет огромную роль в вопросе исследования и установления физических законов.

3. Полезно остановиться, хотя бы вкратце, на историческом пути, приведшем к представлению о четырехмерности физического мира и к постулату инвариантности. Этот исторический путь, являясь тернистым путем открытия истины, был совершенно отличен от того логического пути, который был изложен нами в предыдущих строках.

Вопрос о произвольности физического времени сначала не поднимался вовсе, время было одно — универсальное время, которое показывали нам звезды. Иначе обстояло дело с координатной системой для пространства; в течение многих веков казалось незыблемым прочное и преимущественное положение Земли, в течение долгих веков господствовала птоломеева картина мира. Коперник, один из первых толкнувший Землю в пространство и заставивший ее двигаться, перенес координатную систему на Солнце и, относительно этой системы, предложил изучать движение физического мира. Галилей и Ньютон, установившие начала механики, выяснили и формулировали всем известный и всеми ощущаемый закон инерции; истинный смысл этого закона заключался в том, что с помощью законов механики нет возможности узнать прямолинейное и равномерное движение; в двух физических пространствах, из которых одно неподвижно по отношению к третьему пространству, а другое движется прямолинейно и равномерно, все механические явления будут происходить *совершенно одинаково*. Выбрав для арифметизации пространства систему прямоугольных прямолинейных координат и предполагая, что движение одной системы относительно другой совершается по оси x_1

с постоянной скоростью v, выразим закон инерции, как требование инвариантности законов механики, по отношению к преобразованиям следующего вида:

$$\bar{x}_1 = x_1 - vt,\ \bar{x}_2 = x_2,\ \bar{x}_3 = x_3,\ \bar{t} = t. \tag{18}$$

С развитием наших знаний о физическом мире к законам, касающихся явлений механических, прибавились законы об явлениях электромагнитных и в том числе о распространении света — этого особого вида электромагнитных волн. Выяснилось экспериментально, что пространство (эфир), где распространяются электромагнитные (световые) волны, не движется вместе с Землей (опыт Физо и др.); таким образом, хотя с помощью механических явлений и нельзя было, сидя в замкнутом помещении на земной поверхности, определить почти прямолинейное на малых участках пути и равномерное движение Земли по ее орбите, но казалось, что с помощью световых явлений это сделать будет нетрудно, ибо свет распространяется в пространстве, которое вместе с Землей не движется, а значит по отношению к свету так же будет легко заметить движение Земли, как легко замечается движение лодки (сколь бы равномерно оно ни было) относительно неподвижных берегов реки. В 1881 г. Майкельсон произвел свой знаменитый опыт, долженствовавший обнаружить движение Земли относительно пространства, в котором распространяется свет. Результат опыта Майкельсона оказался отрицательным: не удалось подметить никакого влияния движения Земли на световые волны, распространяющиеся в *движущейся вместе* с Землей лаборатории. Приходилось допустить, что скорость эта совершенно одинакова, рассматриваем ли мы распространение света, относительно неподвижного пространства или относительно пространства, движущегося прямолинейно и равномерно. Эта гипотеза, в связи с законом инерции, дала возможность исправить формулы (18), выражающие преобразования, происходящие с координатами при прямолинейном и равномерном движении, ввести в эти формулы некоторые малые величины, в обычных случаях на результат численно почти не влияющие, но имеющие колоссальное принципиальное значение. Указанная поправка впервые поставила время на одну доску с координатами, и именно начиная с этой ничтожной поправки, наступил конец царствования времени. Формулы (18), со введением указанной поправки, должны были быть написаны так:

$$(19)\quad \bar{x}_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ \bar{x}_2 = x_2,\ \bar{x}_3 = x_3,\ \bar{t} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где c — скорость света; величина $\frac{v}{c}$ ничтожно мала при малых наших обычных скоростях, поэтому формулы (19) практически почти ничем не отличаются от формул (18). Принципиально, однако, разница огромная, ибо последняя из формул (19) имеет характер формулы (13) и вводит сразу понятие о местном времени; кроме того, в формулах (19) время уже перестает играть ту исключительную роль, как в формулах (18). Формулы (19) положили начало так называемому *специальному принципу относительности*, введенному Эйнштейном и названному так за утверждение этой теории о невозможности определить прямолинейное равномерное движение пространства, находясь внутри этого самого пространства. Специальный принцип относительности впервые стал рассматривать не пространство и время в отдельности, а соединение их в виде физического мира, законы которого должны иметь форму, инвариантную по отношению к преобразованиям (19).

Специальный принцип относительности дал целый ряд следствий, интерпретация которых в физическом мире подверглась экспериментальной проверке и блестяще выдержала это испытание.

В связи со специальным принципом относительности, отвергавшим всякую возможность путем физического эксперимента определить изнутри движение пространства, движущегося прямолинейно и равномерно, могла возникнуть, и у Эйнштейна действительно возникла, мысль о невозможности определить изнутри системы ее движения. Положим, что система A движется по отношению к системе B. Если A будет двигаться неравномерно и прямолинейно, а по кривому пути или вообще с ускорением, то в системе A будут происходить явления, которых не будет происходить в системе B; например, ускоренный в первый момент подъем лифта прекрасно ощущается человеком; наблюдения над качающимся маятником (опыт

Фуко и Пантеоне) показывает вращение Земли, все точки которой, описывая круговые траектории, движутся, конечно, с ускорением (центростремительным). Допустим, что, экспериментируя, мы нашли ряд явлений в системе A, совершающихся таким образом, как будто бы система A двигалась бы с ускорением по отношению к системе B; можем ли мы отсюда заключить, что система A движется, по отношению к системе B, а не наоборот? Имеет ли вообще какой-нибудь смысл это утверждение? Если в системе A возникнут, вследствие предполагаемого ее движения, силы, действующие на тела, в A находящиеся, каковых сил в системе B не будет, то мы, конечно, можем заключить, что A движется с ускорением относительно B; но можем и, наоборот, признать, что силы, действующие в системе A, имеют место всюду; они действовали бы в системе B, если бы только B не двигалось бы, относительно A, ускоренно, но ускоренное движение B уничтожит всюду действующие силы. Чтобы еще яснее представить себе наше затруднение, вообразим, что мы, обладая прекрасными приборами, заметили бы на Земле так называемую отклоняющую силу вращения Земли, или силу Кориолиса, действующую на все, находящиеся в движении около земной поверхности тела. Если бы Земля всегда была покрыта слоем облаков, не пропускающих света звезд, планет, Луны и Солнца, то можно безошибочно утверждать, что самая мысль — приписать силу Кориолиса эффекту вращения Земли, казалось бы и нелепой, и бесполезной; эта кориолисова сила была бы свойством движущихся материальных тел, таким же свойством, каким мы признаем свойство всемирного тяготения. В системах, где отсутствовала бы сила Кориолиса, мы объяснили бы это отсутствие как раз соответствующим движением этой системы, относительно нашей, не видящей небесного света, Земли. Изложенное показывает, что мы не только не можем, сидя внутри системы, установить ее равномерное и прямолинейное движение, но не можем и решить: из двух систем, движущихся ускоренно друг относительно друга, которая движется и которая стоит неподвижно. Невозможно решить, кто прав — Птоломей или Коперник; невозможно, если, конечно, не прибегать к раз навсегда оставленным в настоящей статье принципам целесообразности, экономии мышления и т. п. Одно из остроумнейших доказательств правильности коперниковой системы приведено в следующем стихотворении Ломоносова:

О движении Земли

(*Эпиграмма на противников системы Коперника*)

Случились вместе два Астронома в пиру
И спорили весьма между собой в жару.
Один твердит: «Земля, вертясь, круг Солнца ходит»;
Другой, что Солнце все с собой планеты водит.
Один Коперник был, другой слыл Птоломей.
Тут повар спор решил усмешкою своей.
Хозяин спрашивал: «Ты звезд теченье знаешь?
Скажи, как ты о сем сомненье рассуждаешь?»
Он дал такой ответ: «Что в том Коперник прав,
Я правду докажу, на Солнце не бывав.
Кто видел простака из поваров такова,
Который бы вертел очаг кругом жаркова?»

Принцип целесообразности ясно проглядывает в этих остроумных словах.

Итак, законы физического мира должны быть инварианты по отношению к преобразованию координат, отвечающих любому движению; отсюда лишь один шаг до постулата инвариантности. Этот шаг может быть сделан, как выше мы видели, помощью внимательного рассмотрения идеи физического времени. Таким образом, исторический более длинный путь привел нас также к четырехмерному физическому миру и к постулату инвариантности.

4. *Физическое пространство и физическое время объединились в физический мир, интерпретирующий геометрическое пространство четырех измерений. Законы физического мира суть собственные его свойства и подчинены постулату инвариантности.* Время ничем не отличается от других координат.

Правильно ли это последнее заключение? Более внимательное рассмотрение вопроса покажет, что последнее заключение нельзя признать вполне правильным и что на постулат инвариантности, равно как и на способы арифметизации физического мира, должны быть наложены известные ограничения, возвращающие времени его исключительное положение. Я не могу подробно останавливаться на этом детальном вопросе, сравнительно мало разработанном в учении об относительности. Замечу только, что поводом к возвращению времени его исключительного значения служит *принцип причинности*, согласно одному из требований которого нельзя, изменяя арифметизацию физического мира, сделать так, чтобы причина и следствие поменялись бы местами. Этот принцип (формулированный, конечно, ясно и строго, а не так, как это сейчас сделано) должен наложить известные ограничения:

1) на способы арифметизации физического мира, при которых имеет место постулат инвариантности; арифметизировать можно, конечно, как угодно, но не для всякой арифметизации постулат инвариантности будет иметь место;

2) на свойства геометрического четырехмерного пространства, интерпретацией которого служит физический мир;

3) на выбор той из координат физического мира, которой будет приписана (связанная с принципом причинности) роль времени.

Не останавливаясь более на все же, по-видимому, сохраняющихся особенностях времени и выяснив с достаточной подробностью понятие физического пространства, времени, движения и мира, перейдем к геометрической, если можно так выразиться, их интерпретации.

§ 7. Мир

1. Рассматриваемое с совершенно абстрактной точки зрения *время* есть совокупность вещей, называемых *моментами* и стоящих между собой и к пространству (трехмерному) в определенных отношениях, могущих быть установленными особыми кинематическими аксиомами и следствиями из них. Рассматриваемое само по себе время образует то, что можно было бы назвать «пространством» одного измерения, рассматриваемое в связи с трехмерным пространством время образует пространство четырех измерений. Время (абстрактное) может быть арифметизировано совершенно произвольным образом; всякому моменту будет всегда отвечать определенное число t. Переход от одной арифметизации времени, рассматриваемого само по себе, к другой выразится заменой числа t на $\bar{t} = f(t)$. Абстрак-

тное время, как «пространство» одного измерения, будет иметь свою метрику; условимся бесконечно малое «расстояние» двух моментов называть бесконечно малым промежутком времени и обозначать $d\tau$; если при арифметизации времени указанным моментам отвечают числа t и $t + \Delta t$, то $d\tau = T dt$, где T зависит от t; само собой разумеется, что промежуток времени $d\tau$ не зависит от способа арифметизации времени. Если, однако, рассматривать абстрактное время не само по себе, а в связи с трехмерным пространством, то пространство-время может быть, опять-таки произвольным образом арифметизировано с помощью четверок чисел; тогда определенной точке трехмерного пространства и определенному моменту абстрактного времени будет отвечать одна, и только одна, четверка чисел: x_1, x_2, x_3, x_4. Переход от одного способа арифметизации к другому выразится заменой одной четверки чисел x_1, x_2, x_3, x_4 другой четверкой: $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$; так как одна четверка вполне определяет другую и обратно, то мы будем иметь следующие формулы перехода:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
\bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
\bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
\bar{x}_4 &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4).
\end{aligned} \tag{20}$$

Четырехмерное пространство, о котором мы только что говорили [1] (пространство-время), условимся называть *геометрическим миром* или просто *миром*.

Определенной точке мира, которую мы будем называть иногда *явлением*, отвечает одна определенная точка пространства и один определенный момент времени. Все сказанное в предыдущей главе может быть перенесено на четырехмерное пространство, и, таким образом, может быть установлена геометрия этого четырехмерного пространства, иначе говоря, *геометрия мира*. Несобственные свойства мира будут зависеть от способа его арифметизации, собственные свойства мира (например, величины расстояния двух точек, векториальная и метрическая кривизна) не будут зависеть от способа арифметизации мира и

[1] В отличие от разобранного выше мира физического.

будут, следовательно, выражены в форме *инвариантной* (в установленном выше смысле этого слова) относительно преобразований координат, указанных формулами (20). Условимся называть *интервалом* расстояния двух точек (явлений) нашего мира; расстояние двух бесконечно близких точек нашего мира будет *бесконечно малым интервалом*; метрика мира (а значит и определение бесконечно малого интервала) будет зависеть от десяти величин, составляющих фундаментальный метрический тензор. Параллельное перемещение в нашем мире может зависеть, помимо этих десяти величин, еще от четырех величин масштабного вектора. Следует заметить, что с термином «интервал» пока не должно связывать никакого конкретного содержания.

2. Выберем, пока совершенно произвольно, одну из координат мира за *временну́ю координату*; условимся так нумеровать координаты, чтобы брать за временну́ю координату всегда x_4. Остальные координаты x_1, x_2, x_3 условимся называть *пространственными координатами*. В нашем мире мы различаем, как и в трехмерном пространстве, два геометрических места точек; одно из таких геометрических мест будет состоять из точек, удовлетворяющих соотношению

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0;$$

назовем это геометрическое место (аналогичное поверхности нашего пространства) *гиперповерхностью мира*. Не трудно конечно, заметить, что гиперповерхность мира будет обладать свойством пространства трех измерений, однако термин пространства мы сохраним для других надобностей и не будем прилагать его к гиперповерхности вообще. Из гиперповерхностей особый интерес может представить для нас гиперповерхность, уравнение которой имеет вид $x_4 = x_{40}$ и которое получается, полагая временну́ю координату постоянной; эта гиперповерхность будет геометрическим местом явлений мира, отвечающих определенному значению временно́й координаты; точки этой гиперповерхности будут иметь произвольные пространственные координаты, и мы условимся называть эту гиперповерхность *пространством*, отвечающим данному моменту x_{40}. Другое геометрическое место точек нашего мира будет аналогично кривой нашего пространства и будет называться *мировой кривой.* Мировая кривая будет геометрическим местом точек, определяемых равенствами

$$x_1 = \varphi_1(u),\ x_2 = \varphi_2(u),\ x_3 = \varphi_3(u),\ x_4 = \varphi_4(u),$$

где u — произвольный параметр; исключая параметр u из указанных четырех уравнений, получим три соотношения между координатами x_1, x_2, x_3, x_4 мира. Простейшей мировой кривой является кривая, в которой упомянутые три соотношения сводятся к приравниванию пространственных координат постоянным величинам

$$x_1 = x_{10},\ x_2 = x_{20},\ x_3 = x_{30},$$

временная координата на такой кривой произвольна, различным точкам этой кривой будут отвечать различные значения временно́й координаты; такую мировую кривую назовем *временем, отвечающим данной точке* (x_{10}, x_{20}, x_{30}) *пространства.* Мировые кривые делятся естественно на два класса. Те мировые кривые, у которых временна́я координата постоянна $x_4 = x_{40}$ (не зависит от параметра u), называются *пространственными линиями или траекториями.* Пространственная линия целиком лежит в пространстве, отвечающем некоторому моменту (именно на гиперповерхности $x_4 = x_{40}$), и является типичным образцом упоминавшихся уже нами кривых в пространстве трех измерений. Мировые кривые, не принадлежащие к пространственным линиям, образуют другой класс кривых, в них временна́я координата x_4 зависит от параметра u; значит, u может быть выражено в зависимости от x_4, и уравнения мировой кривой, по исключению u, дадут следующие соотношения:

$$x_1 = \psi_1(x_4),\ x_2 = \psi_2(x_4),\ x_3 = \psi_3(x_4),$$

соотношения, которые совершенно совпадают (если заменить x_4 на t) с теми уравнениями, что в предыдущем параграфе служили для определения мировой линии в физическом мире. Мировые кривые этой второй категории будем называть *временны́ми мировыми линиями* или просто *мировыми линиями*; *движением* будем называть вещь, вполне определенную *мировой линией*; таким образом, выражение «задано движение» будет вполне эквивалентно выражению «задана мировая линия».

Не трудно видеть, что все наши определения подобраны так, чтобы объект, называемый соответствующим термином в физическом мире, служил бы интерпретацией понятия, обозначенного этим же термином в мире геометрическом. Так, например, движение в мире физическом является интерпретацией движения в мире геометрическом, мировая линия в физическом мире интерпретирует мировую линию мира геометрического. Геометрическое пространство не имеет самостоятельного значения, являясь лишь гиперповерхностью геометрического мира, что вполне соответствует отсутствию самостоятельного существования у физического пространства, которое немыслимо без физического времени.

3. Перейдем теперь к вопросу о метрике мира, иначе говоря, к вопросу об определении бесконечно малого интервала, который, в целях краткости, обозначим через $d\sigma$; квадрат бесконечно малого интервала зависит от квадратов и произведений по два приращений dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, а также от фундаментального метрического тензора мира. Выпишем выражение для интервала

$$(21)\quad d\sigma^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + 2g_{23}dx_2dx_3 + \\ + 2g_{31}dx_3dx_1 + 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{14}dx_1dx_4 + 2g_{24}dx_2dx_4 + \\ + 2g_{34}dx_3dx_4 + g_{44}dx_4^2.$$

Уже из способа написания квадрата интервала видно, что временнáя координата выделена нами особо. Не трудно видеть, что в двух частных случаях наш интервал превращается или в нечто, напоминающее расстояние ds, или же в нечто, напоминающее промежуток между двумя моментами $d\tau$. Рассмотрим бесконечно малый интервал $d\sigma_1$ двух явлений, имеющих *одну и ту же* временнýю координату, т. е. находящихся в некотором (одном и том же) пространстве, в вышеупомянутом смысле, этого термина. Для этих явлений x_4 будет постоянно, значит dx_4 будет равно нулю и формула для $d\sigma^2$ превратится в формулу (9) для квадрата бесконечно малого расстояния ds^2: $d\sigma_1^2 = ds^2$ или $d\sigma_1 = ds$ (ибо знаком мы всегда можем соответственно распорядиться). Так как мы рассматриваем пространство лишь как гиперповерхность мира, то можем условиться метрику пространства определять тем $ds = d\sigma_1$, который получается из $d\sigma$, полагая $dx_4 = 0$.

Рассмотрим теперь бесконечно малый интервал $d\sigma_2$ двух явлений, имеющих одинаковые пространственные координаты, т. е. таких, которые разнятся друг от друга лишь временно́й координатой и в которых, следовательно, $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$; интервал таких двух явлений определяется формулой $d\sigma_2^2 = g_{44}dx_4^2$; так как мы рассматриваем время лишь как некоторую мировую линию, то можем условиться метрику времени определять тем промежутком $d\tau$, квадрат которого получается, полагая в $d\sigma^2$, $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$ и *переменяя в полученном выражении знак*; иначе говоря, для $d\tau^2$ получим равенство $d\tau^2 = d\sigma_2^2 = -g_{44}dx_4^2$, $d\tau = \sqrt{-g_{44}}dx_4$. Сравнивая эту формулу с выражением (14) для $d\tau$ в § 5, найдем, что $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{-g_{44}}$, причем в формуле (14) заменено t на x_4.

Из сказанного видно, что метрика мира определяет сама собой и метрику пространства для любого момента времени и метрику времени для любой точки пространства. Метрика мира не является вполне произвольной; мы требуем, чтобы расстояния в пространстве выражались вещественными (не мнимыми) числами, точно так же вещественным числом должен выражаться промежуток времени; это требование может быть выражено в следующем *постулате вещественности* пространства и времени [1].

Метрика мира должна быть такова, чтобы 1) интервал был бы вещественен во всех точках мира и для всех явлений, имеющих общую временну́ю координату (квадрат интервала при этих условиях должен быть положительным), и чтобы 2) интервал был бы чисто мнимым во всех точках мира и для всех явлений, имеющих общие пространственные координаты (квадрат интервала в этих условиях должен быть отрицательным).

Постулат вещественности пространства и времени имеет чрезвычайно сильное влияние на метрику мира;

---

[1] Постулат мною несколько упрощен, дабы сделать его более наглядным; на самом деле его следовало бы дополнить теми условиями, кои вытекают из применения так называемого «закона инерции» к форме для $d\sigma^2$. См., например: H i l b e r t. Die Grundlagen d. Physik, 2-te Mitteilung.

с этим постулатом ближайшим образом связан принцип причинности. Этот же постулат позволяет направления мировых кривых разделить на два класса: *пространственно-подобные* и *время-подобные направления*; первые характеризуются тем, что величина бесконечно малого четырехмерного вектора, их характеризующего (соответствующий интервал), положительна, тогда как для вторых эта величина отрицательна. Всякая пространственная линия имеет пространственно-подобное направление, всякая мировая кривая, названная нами временем, имеет, наоборот, время-подобное направление. Пространственно-подобные направления отличаются от время-подобных направлений особой гиперповерхностью (чем-то вроде конуса); на этой гиперповерхности, называемой *нулевым конусом*, интервалы ее точек все обращаются в нуль. Переход через нулевой конус соответствует переходу от пространства ко времени. Не имея возможности останавливаться на разбираемых вопросах более подробно, отмечу, что понятие «угла», имеющее вполне определенный смысл для двух пространственно-подобных или для двух время-подобных направлений, должно быть видоизменено при рассмотрении угла пространственно-подобного и время-подобного направления. Словом, нулевой конус образует в мире как бы границу, отделяющую одну часть этого мира от другой, имеющей совсем особые свойства [1].

Постулат вещественности налагает известные условия на арифметизацию мира: арифметизация должна быть такова, чтобы в новой координатной системе также можно было бы выделить пространственную и временнýю координаты, причем и в новых координатах постулат вещественности должен иметь место; такую арифметизацию назовем *избранной*.

С помощью постулата вещественности можно было бы доказать, что два явления, лежащие на мировой линии, относящиеся к разным моментам времени, не могут, с помощью изменения арифметизации, превратиться в явления одновременные, коль скоро арифметизация, при своем изменении, не перестанет быть избранной; таким образом, два явления, могущие быть рассматриваемыми,

[1] Нулевой конус своего рода особенность в пространстве для многозначных функций $(\sqrt{})$.

как причина и следствие, никогда нельзя сделать, помощью изменения арифметизации, одновременными, иначе говоря, такие два явления всегда будут находиться [1] друг к другу в отношении причины к следствию.

4. Нам остается перейти теперь к вопросу о том, каким образом, исследуя экспериментально физический мир, мы смогли бы установить метрику того геометрического мира, для которого наш физический мир является интерпретацией. Прежде всего нам нужно было бы условиться, каким образом физический мир интерпретирует мир геометрический. Положим, что мы выполнили это требование и составили словарь, помощью которого можно выяснить, какой объект физического мира интерпретирует определенное понятие (вещь) мира геометрического. Словарь этот целиком зависит от нашего произвола; таким образом, мы можем интерпретировать геометрический мир, тем или иным способом, при помощи мира физического. Но положим, что нами выбран определенный способ интерпретации и условимся одним и тем же термином обозначать и понятие (вещь) геометрического мира, и интерпретирующий его объект мира физического.

Раз это сделано, то, измеряя интервалы в физическом мире, мы будем иметь возможность экспериментально исследовать метрику мира геометрического (см. § 3). Далее, параллельно перемещая вектор по сомкнутой линии в мире физическом, мы определим его векториальную и метрическую кривизны, а значит, установим масштабный вектор и свойства параллельного перемещения мира геометрического (см. § 4). Принципиально, таким образом,

---

[1] Следует отметить, что любые два явления A и B, имеющие разные временные координаты, рассматриваются нами как причина и следствие, причем A можно рассматривать и как причину и как следствие B; если A есть причина B, т. е. если

$$x_{4A} < x_{4B},$$

то, заменяя

$$x_4 \text{ на } \bar{x}_4 = -x_4,$$

каковое преобразование дает нам опять-таки избранную арифметизацию, мы будем иметь, что $\bar{x}_{4A} > \bar{x}_{4B}$, т. е. B будет причиной A; таким образом, изменяя знак у времени, мы всегда можем изменять следствие на причину; если последовательность причины-следствия должна остаться неизменной, то, помимо постулата вещественности, необходимы другие еще добавочные ограничения свойства мира и произвола его арифметизации.

вопрос изучения геометрического мира, данной (условленной) интерпретацией которого является мир физический, решен. Однако сразу же возникает вопрос: сможем ли мы, люди, производить указанные эксперименты или же для их производства нужно перестать быть людьми и стать богами? Ответ на этот вопрос может быть дан утешительный: указанные эксперименты мы производить можем (не практически, конечно, а принципиально). В самом деле, время, являющееся для нас помехой при изучении физического пространства, время, разбившее даже самую идею об отдельно существующем физическом пространстве,— это же время будет служить нам прекрасным помощником при определении интервала, куда разность входит наравне с пространственными разностями.

Однако в измерении интервала мы прежде всего столкнемся с тем обстоятельством, что произвольно распоряжаться временем мы будем не в состоянии; таким образом, мы можем экспериментально определить метрику мира лишь для весьма ограниченного времени.

Далее, принципиальная возможность изучения геометрического мира сталкивается с существенным дефектом нашей экспериментальной техники, а именно с затруднениями при измерении интервала. Нам нужно, так или иначе, обойти оба указанные затруднения и найти те величины, измерять которые во всем мире было бы доступно нашим техническим средствам и которые в то же время могли бы установить свойства геометрического мира. Эти величины нашла гениальная мысль Римана, развитая Эйнштейном и Weyl'ем, мысль о связующих силах, определяющих свойства мира; в движении и в силах, возникающих и действующих во время движения, нужно было искать те способы, помощью которых можно было бы определить геометрию мира. Разбору этого вопроса я посвящу следующую главу.

ТЯГОТЕНИЕ И МАТЕРИЯ

Es muss also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht worden.

Riemann. «Ueber die Hypotesen, welche der Geometrie zugrunde liegen»[1].

§ 8. Старая и новая механика

1. Изучая движение, иначе говоря, рассматривая мировые линии, мы разделяем движения на два класса: к одному классу мы относим *движение по инерции*, относительно другого класса мы говорим, что движение в нем *происходит под действием сил*. Деление движений на эти два класса вполне произвольно и в нашей воле; на самом деле, мы производим указанное деление, повинуясь, конечно, принципам целесообразности. Произведя это деление, мы устанавливаем, каким образом может быть арифметизирована сила, отвечающая какому-либо из движений не по инерции. Не трудно видеть, что деление на указанные два класса составляет содержание закона инерции, или первого закона Ньютона, тогда как определенный способ арифметизации силы является не чем иным,

---

[1] Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же надо пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реально. Риман. «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». (Из сб. «Об основании геометрии...». М., 1956, стр. 324.—*Прим. ред.*)

как вторым законом Ньютона. Условимся называть *принципом инерции* указанное деление движений на два класса и посмотрим, как вводился в старой механике этот принцип. По поводу деления движений на два класса невольно вспоминается учение Аристотеля о «совершенных движениях» (круговые движения считались совершенными); прав Соломон, восклицая: «Что было, то и будет, и что делалось, то и будет делаться — и нет ничего нового под солнцем...» (Екклезиаст).

При установлении в старой механике принципа инерции предполагалось прежде всего, что пространство наше является пространством эвклидовым, а за физическое время принималось время звездное. Движение прямолинейное и равномерное (по отношению к звездному) относилось к первому классу движений, к движениям по инерции. Все остальные движения назывались движениями под действием силы, причем силой называлось определенное понятие, отвечающее каждому движению материальной точки и арифметизировавшееся определенным образом (пользуясь ускорением).

Посмотрим, как с помощью идеи о мировых линиях может быть выражен принцип инерции Ньютона. Обратимся, ради простоты, снова к двумерному пространству — плоскости, арифметизировав его, помощью введения прямоугольных, прямолинейных координат; тогда прямолинейное и равномерное движение выразится формулами: $x_1 = a_1 t + b_1$, $x_2 = a_2 t + b_2$, где a_1, a_2, b_1, b_2 — постоянные, а t — звездное время. Переходя к миру для нашего двумерного пространства, т. е. пользуясь трехмерным эвклидовым пространством, в котором ось t перпендикулярна осям x_1, x_2 (см. рис. 17), найдем, что движению по инерции соответствует мировая линия в виде прямой; если мировая линия, отвечающая данному движению, не прямая, то движение происходит (по определению) под действием сил.

Указанный нами выше постулат вещественности делает невозможным столь наглядное, аналогичное только что приведенному, изображение мира; нам достаточно, однако, того обстоятельства, что старая механика требует особых геометрических свойств нашего мира; не входя в обсуждение того, какие это свойства, условимся мир с этими геометрическими свойствами называть эвклидовым [1]; принцип инерции в старой механике, при указанном согласовании, можно будет формулировать следующим образом:

В эвклидовом физическом мире лишь те движения происходят по инерции, мировые линии которых суть прямые линии. Все остальные движения будут движениями, происходящими под действием сил.

Следует при этом отметить, что термин «прямая линия» должно разуметь в указанном выше смысле (см. § 4, где говорится о параллельном перемещении); в самом деле, можно без труда доказать, что эти «прямые линии» в эвклидовом мире суть как раз обычные прямые, уравнения которых в прямоугольных, прямолинейных координатах будут: $x_1 = a_1 t + b_1$, $x_2 = a_2 t + b_2$, $x_3 = a_3 t + b_3$. Принцип инерции старой механики налагает наперед известные ограничения на физический мир, требуя, чтобы он был миром эвклидовым; освобождение от этого ограничения и является характерной чертой новой механики Эйнштейна, Hilbert'а и Weyl'я.

2. В новой механике принцип инерции формулируется так же, как и принцип инерции в старой механике, нужно только отбросить требование (в сущности, произвольное) для мира быть эвклидовым; таким образом, новая механика устанавливает следующий принцип инерции:

Движениями по инерции называются такие движения, мировые линии которых суть прямые нашего мира. Все другие движения суть движения под действием сил.

Остается теперь в новой механике, как и в старой, установить арифметизацию силы. К сожалению, мы не можем входить в достаточные подробности по этому вопросу, так как детальное развитие понятия силы в новой механике требует довольно большого математического аппарата. Для наших целей, однако, является совершенно достаточным отметить, что арифметизация силы зависит от величин двух сортов: прежде всего эта арифметизация зависит от тех чисел (их будет четыре), которые характеризуют степень отклонения мировой линии, отвечающей нашему движению от прямой; эти числа называются *ускорением*; для эвклидова мира эти числа сведутся

---

[1] В этом эвклидовом мире мы будем иметь $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$, при соответственно выбранной арифметизации мира.

к обычному понятию об ускорении. Но так как одно и то же движение может быть совершаемо различными материальными точками, то второй величиной, входящей в арифметизацию силы, является число, отличающее одну материальную точку от другой и называемое *массой материальной точки.* С помощью числа, являющегося массой материальной точки, образуют понятие массы материального тела, пользуясь же некоторыми геометрическими свойствами тела (объемом), образуют понятие плотности. Физическое пространство, заполненное все материальными телами, обладает в каждой точке своей к заданному моменту определенной плотностью; таким образом, в физическом мире каждой точке сопоставляется особое число ρ — плотность; очевидно, что для разных точек мира ρ может быть разное, поэтому ρ является функцией координат точек мира: $\rho = \theta(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Изучая мировые линии материальных точек в физическом мире, мы могли бы, зная геометрию мира, определить, когда наши материальные точки движутся по инерции и когда на них действуют силы. Далее, разбираясь в указанных мировых линиях, мы могли бы определить силы, действующие на наши материальные точки. При этом легко было бы, произведя достаточное число экспериментов, выяснить, что каждой точке мира соответствует одна и только одна сила. Таким образом, мир явился бы своеобразным *полем сил*; конечно, в пространстве, в одной и той же его точке, силы бы менялись и непосредственно в зависимости от времени, и в зависимости от времени в силу того, что через данную точку пространства в разное время проходили бы разные материальные точки. Но можно установить, что в мире каждой его точке (явлению) будет отвечать одна и только одна сила: в одной и той же точке пространства не может одновременно быть и отсутствовать какая-либо сила [1]. Для того, однако, чтобы иметь возможность определить указанное поле сил в мире, нам нужно было бы установить геометрию мира, а мы видели, что это сопряжено с весьма большими труд-

[1] Во избежание недоразумений считаю необходимым заметить, что силу, действующую в данный момент и в данной точке пространства, конечно, можно разделить на несколько сил составляющих; но все они дадут одну и только одну, определенную для данного момента в данной точке, равнодействующую силу.

ностями. Невозможность сейчас экспериментально решить вопрос о геометрии мира заставляет нам делать на счет этой геометрии определенные гипотезы. Старая механика сразу же делает чрезвычайно узкую гипотезу о том, что наш мир есть эвклидов. Сделав это весьма сильное ограничение, старая механика много выиграла; ее законы приобрели необычайно простой характер, и этой простоте мы обязаны грандиозным развитием наших знаний, нашей технической культуры. Новая механика сначала пытается обойтись без дополнительных гипотез о геометрическом характере нашего мира. Она может это сделать, но будет обречена тогда на жалкое и бесплодное существование в течение многих веков. Чтобы стать плодотворной, новой механике, по ограниченности наших экспериментальных средств, так же как и механике старой, нужны дополнительные гипотезы о геометрическом характере нашего мира. Эти гипотезы и были сделаны сначала Эйнштейном (гипотеза тяготения), а затем, в более общей форме, Weyl'ем (гипотеза материи). Характер этих гипотез сильно отличается от гипотезы старой механики об эвклидовом мире; главное отличие новых гипотез, как это и следовало ожидать, сообразно прогрессу науки, в их большей широте и обширности; они не определяют сразу метрики мира, как это делает старая механика, а указывают лишь известные свойства этой метрики, предоставляя опыту установить метрику окончательно. Перейдем теперь к изучению указанных гипотез.

§ 9. Тяготение

1. Посмотрим прежде всего, что́ старая механика извлекает из своей гипотезы об эвклидовом характере геометрии мира. Рассмотрим, с точки зрения старой механики, движения материальной точки в материальном пространстве, значит, при наличности других материальных тел. В одних областях этого пространства материальная точка будет двигаться почти по инерции, в других ее движение по инерции будет нарушаться, и мы будем констатировать действие силы. Особые материальные объекты, которые мы зовем тяготеющими массами (например, Солнце, планеты и т. п.), вызовут чрезвычайно значительные силы. Исследуя отклонения от движения по инерции нашей точ-

ки в присутствии материальных объектов, названных нами тяготеющими массами, мы в состоянии будем установить действие на нашу точку особых сил, связанных с этими тяготеющими массами. Если наша материальная точка будет характеризоваться помощью лучей света, то указанное действие тяготеющих масс будет ничтожно и едва измеримо; но, если наша материальная точка будет сама принадлежать к разряду тяготеющих масс, дело в корне изменится, и ее движение будет сильно отличаться от движения по инерции. Исследуя эти различия, мы придем к законам всемирного тяготения. Именно таким путем шел Ньютон, изучавший, помощью законов Кеплера, движения материальной точки, тяготеющей массы — планеты Марса, вокруг тяготеющей массы — Солнца. В обычных терминах эвклидовой геометрии и старой механики закон всемирного тяготения может быть, как известно, формулирован следующим образом: *на каждую из двух тяготеющих масс действует сила притяжения, направленная от одной к другой тяготеющей массе и по величине прямо пропорциональная массам тяготеющих масс и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.*

Если материальная точка движется не вблизи тяготеющих масс, а вблизи каких-либо иных материальных тел, например в потоке электромагнитных волн (света), то таковая точка также не будет двигаться по инерции, на нее будет действовать, например, сила светового давления; таким образом, помимо силы всемирного тяготения, могут быть и разного рода иные силы. Если наша точка будет двигаться вблизи материальных объектов электромагнитного характера, то условимся называть указанные силы *электромагнитными.* Могут быть и еще какие-либо силы, которые назовем *дополнительными.* Мы приходим, таким образом, к заключению, что на материальную точку могут действовать три сорта сил: 1) сила всемирного тяготения, 2) электромагнитные силы и 3) силы дополнительные. Изучение действия этих сил составляет содержание самой механики и физики; по-видимому, все силы, действующие на всякого сорта материальные точки (будут ли эти точки тяготеющими массами или нет), сводятся или к силам всемирного тяготения, или к силам электромагнитным. При этом, само собой разумеется, что арифметизация нашего мира проводится определенным образом; например, выбирается звездное время, а координатная система строится с помощью так называемых неподвижных звезд. Ни о каком принципе инвариантности, в его общей форме, в старой механике не может быть и речи; раз координатная система определенным образом выбрана, то силы, возникающие вследствие вращения Земли, явятся, конечно, силами фиктивными и в перечень указанных выше сил не попадут.

2. Оставаясь в рамках старой механики, остановимся более подробно на силе всемирного тяготения. Пользуясь этой силой, оказалось возможным с величайшей подробностью и точностью изучить и, если так можно выразиться, объяснить движение планет нашей системы, а затем и ряд движений звездных систем (двойные звезды и т. п.). Конечно, планеты нашей системы, находящиеся под совокупным влиянием многих тяготеющих масс и к тому же являющиеся вовсе не точками, движутся гораздо более сложным и запутанным образом, чем материальные точки, подчиненные простому закону всемирного тяготения при наличности одной тяготеющей массы. Однако небесная механика превосходно справилась со всеми затруднениями, и огромное большинство движений планет уложилось в рамки закона всемирного тяготения. Существовали, тем не менее, маленькие детали движения планет, ускользавшие от объяснения их помощью обычных методов небесной механики. Такой деталью являлся необъяснимый остаток движения перигелия Меркурия. Ближайшая к Солнцу точка, в которой бывает Меркурий из года в год, перемещается (рис. 20), и остаток этого маленького перемещения (43″ в 100 лет) [1] не был до последнего времени удовлетворительно объяснен помощью законов классической небесной механики; заметим, что Меркурий ближе всех планет к Солнцу, и как раз в движении этой планеты оказалась наибольшая невязка с принципами небесной механики. Выше мы отметили, что старая механика должна была, при арифметизации пространства мира, выбрать определенную, связанную со звездною, координатную систему. Можно было для фантастического объяснения всемирного тяготения предполо-

[1] Современная экспериментальная величина для движения перигелия Меркурия 42″, 56 ± 0″, 94.— *Прим. ред.*

жить, что для старой механики *нужно* брать не указанную координатную систему, а какую-то другую, относительно которой координатная система, связанная со звездами, определенным образом движется; под влиянием этого движения появляются кажущиеся силы, и именно эти силы

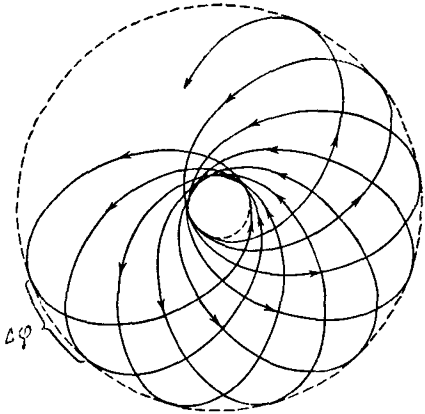


Рис. 20

мы замечаем в явлении всемирного тяготения. Само собой разумеется, что в рамках старой механики эта гипотеза явилась бы фантастической и не трудно было бы показать, что нельзя придумывать никакого движения нашей координатной системы, как целого, которое объясняло бы явление всемирного тяготения. Дело было бы значительно проще, если бы всемирное тяготение выродилось бы в постоянную и постоянно одинаково направленную силу, равную по величине массе на *постоянное* ускорение g силы тяжести. Вот такую, выродившуюся силу всемирного тяготения (лучше уж сказать «всемирной тяжести») не трудно было бы объяснить кинематически. В самом деле, если бы наша звездная координатная система двигалась бы прямолинейно и равноускоренно с ускорением g, относительно координатной системы старой механики, то в такой движущейся системе мы получили бы кажущуюся силу, совпадающую с нашей силой всемирной тяжести. Я не останавливаюсь на этом подробнее, так как этот пример «всемирной тяжести» излагается во всех популярных брошюрах и книгах по принципу относительности. Пример этот характерен *лишь в качестве* указания на возможность кинематически объяснять некоторые силы, но он дает совершенно превратное впечатление, будто бы в рамках старой механики можно кинематически объяснить силу тяготения, что совершенно неверно.

Для кинематического объяснения силы тяготения большую роль, по крайней мере исторически, сыграл тот экспериментально, с большою точностью подтвержденный факт, что масса, входящая в формулировку законов всемирного тяготения (масса гравитационная), идентична с массой, упоминаемой во втором законе Ньютона (масса инерционная), согласно которому масса на ускорение равняется силе. Eotvös чрезвычайно остроумными измерениями показал, что с точностью до $\frac{1}{10^8}$ эти две массы, гравитационная и инерционная, идентичны. Если это обстоятельство не случайно, то естественно появляется желание объяснить силу тяготения кинематически и счесть ее силой кажущейся, или (сообразно началу Деламбера) силой инерции; в силу инерции множителя входит масса инерционная, в силу тяготения — масса гравитационная; обе эти массы тождественны — быть может, сила тяготения есть сила кинематическая. Эта гипотеза невозможна в рамках старой механики и старых воззрений на эвклидов характер мира. Нельзя ли использовать ее в рамках новой механики и, с помощью этой механики, сделать известного рода общие предположения о геометрии мира, связать, помощью этих предположений, метрику мира с явлением тяготения и, таким образом, вовлечь астрономию и небесную механику, с их поразительно точными методами, в круг вопросов экспериментального установления геометрии мира? Таким представляется путь, который приводит к установлению основных положений эйнштейнова общего принципа относительности.

3. Перейдем теперь к установлению гипотез, делаемых в теории Эйнштейна[1] о некоторых свойствах мира физического и о геометрии того мира, условной интерпрета-

---

[1] Эйнштейн мало обращает внимания на логическую сторону дела, поэтому в его работах указанные гипотезы с полной отчетливостью не формулированы.

цией которого и является наш физический мир. Эти гипотезы можно формулировать в виде трех положений:

1) *Геометрия мира есть риманова геометрия.* Значит, прямая линия мира есть вместе с тем кратчайшая линия, масштабный вектор отсутствует, и метрическая кривизна мира равна 0.

2) *Материальная точка, под действием тяготеющих масс, движется по инерции.*

Иначе говоря, мировая линия материальной точки, находящейся под действием тяготеющих масс, является прямой для нашего мира; эта вторая гипотеза является гипотезой, коль скоро нами установлен процесс, отвечающий в физическом мире параллельному перемещению мира геометрического; если этот процесс установлен, то тем самым определена и прямая нашего физического мира. Но мы можем на указанную гипотезу смотреть, как на установление того процесса, который будет отвечать параллельному перемещению в геометрическом мире. Положим, в самом деле, что мы определили прямую физического мира, как мировую линию точки, находящейся под действием тяготеющих масс, положим также, что мы умеем определять физические направления, вектора и углы между ними, положим, что из точки M_1 в точку M по кривой C (рис. 21), в физическом мире, нам нужно вектор a переместить параллельно; для выполнения указанного перемещения разобъем кривую C точками на бесконечно малые части и между каждыми соседними проведем прямую (т.е. мировую линию точки, под действием соответственных тяготеющих масс находящейся). Вдоль по каждой прямой переместить параллельно наш вектор a будет не трудно, достаточно будет сохранить постоянным его угол с направлением прямой (см. § 4), совершив перемещение по каждой прямой, мы переведем наш вектор в точку M, причем указанный процесс тем ближе будет под-

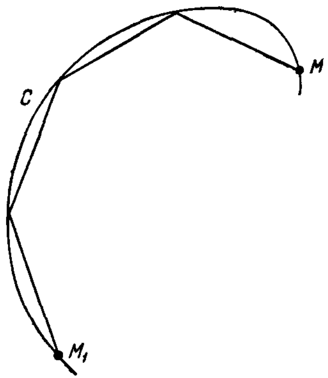


Рис. 21

ходить к параллельному перемещению по кривой, чем на большее число кусков будет разбита эта кривая. Таким образом, вторая гипогеза может быть действительно рассматриваема, как устанавливающая в физическом мире процесс, отвечающий параллельному перемещению в мире геометрическом. Мы предпочли формулировать указанное положение в виде гипотезы, так как физическое параллельное перемещение могло бы быть определено и каким-либо иным способом, внешне отличным от способа нашей гипотезы.

Первая и вторая указанные гипотезы налагают сравнительно мало ограничений на геометрию мира; наибольшие ограничения налагаются следующей третьей гипотезой:

3) *Между фундаментальным метрическим тензором и величинами, характеризующими материю (тяготеющие массы, электромагнитные явления и т. п.), имеют место определенные соотношения, называемые мировыми уравнениями.*

Само собой разумеется, что было бы необходимо, для придания определенности указанной третьей гипотезе, условиться, какие величины характеризуют материю, и выписать все те соотношения, которые названы нами мировыми уравнениями. Сделать, однако, этого мы не можем, так как установление мировых уравнений, и даже простое их объяснение, требует слишком большого математического аппарата. Для того чтобы хоть несколько охарактеризовать общий характер мировых уравнений, сделаем ряд замечаний. Мировые уравнения суть дифференциальные уравнения, неизвестными функциями в которых являются, с одной стороны, величины g_{ik}, составляющие фундаментальный метрический тензор, а с другой стороны, те величины, которые характеризуют материю. Независимыми переменными в этих уравнениях являются мировые координаты x_1, x_2, x_3, x_4.

Постулат инвариантности требует, чтобы мировые уравнения выражали бы собой собственные свойства мира и обладали бы, в известной мере, инвариантным характером относительно преобразований мировых координат. Последнее требование налагает жесткие условия на произвол мировых уравнений и в значительной мере оправдывает тот их вид, который принят в третьей гипотезе. Как и всякие уравнения естествознания, мировые уравнения могут рассматриваться с большей или меньшей подробностью; эта большая или меньшая подробность рассмотрения мировых уравнений скажется главным образом на той их части, которая зависит от материи. Если мы примем в соображение из материи только тяготеющие массы, то в мировых уравнениях нам не придется пользоваться величинами, характеризующими электромагнитные процессы мира; форма мировых уравнений в этом случае будет такова, что, как следствие их, мы получим для мировой линии материальной точки прямую линию; этого и нужно было ожидать, так как, в противном случае, вторая гипотеза стала бы в противоречие с третьей. В частности, если тяготеющие массы будут неподвижны, то единственной величиной, которая, со стороны материи, войдет в мировые уравнения, будет плотность $\rho = \theta\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$.

Если мы, становясь на точку зрения электромагнитной теории материи, примем, что вся материя сведется к электромагнитным процессам, то в наших уравнениях величинами, характеризующими материю, будут: электрическая плотность, три составляющих электрического тока, электростатический потенциал и три составляющих электромагнитного (векторного) потенциала — всего восемь величин. Принимая далее точку зрения Mie на теорию материи, мы все электромагнитные процессы сведем к наличности электромагнитного поля, и тогда в наших мировых уравнениях будет всего лишь четыре величины, характеризующих материю: электростатический потенциал и три составляющих электромагнитного потенциала; в этом случае, как показал Hilbert, следствием мировых уравнений будут уравнения Maxwell'a, управляющие, как известно, всеми электромагнитными явлениями.

Каким образом устанавливаются мировые уравнения? Подробно невозможно, из-за технических трудностей, ответить здесь на этот вопрос, но два слова сказать об этом нужно. Эвристический метод установления мировых уравнений состоит в получении их из так называемых *вариационных принципов*, аналогичных известному принципу наименьшего действия в механике. Следует остерегаться видеть в этих принципах нечто большее, чем эвристический метод; соблазнительно связать их, конечно, с идеями телеологическими, но этого в настоящее время даже, с формальной стороны, сделать нельзя. Сущность этих принципов заключается в том, что избирается некоторое выражение, имеющее большое значение для геометрии мира (например, средняя кривизна), минимум которого ищется. Необходимыми, но недостаточными, условиями этого минимума служат мировые уравнения; так как эти уравнения недостаточны, чтобы указанное выражение было бы минимумом, то и нельзя высказывать, соблазнительное с телеологической точки зрения, суждение об устройстве мира с наименьшей кривизной и т. п. Эвристический метод установления мировых уравнений, конечно, не может служить доказательством их правильности. Мировые уравнения устанавливаются как всякий закон природы. Установление их есть гипотеза, которая должна, после соответствующей интерпретации, подвергнуться экспериментальной проверке. Посмотрим, каким же образом указанные три гипотезы, которые мы будем называть *гипотезами тяготения*, могут быть проверяемы на опыте, и какая интерпретация их будет нам нужна для этой проверки.

4. Как известно, всегда можно выбрать координаты мира так, чтобы в данной точке и в непосредственной близости [1] ее мы имели бы мир с эвклидовой метрикой и эвклидовыми свойствами. Указанные координаты носят название римановых координат. Римановы пространственные координаты для данной точки можно изобразить в виде обычных прямоугольных, прямолинейных координат. Будем этими же прямолинейными, прямоугольными координатами пользоваться не только для данной точки, но и в ближайших окрестностях точки; более определенно условимся считать, что ближайшие окрестности точки обладают эвклидовой метрикой, и примем введенные нами пространственные координаты за прямоугольные, прямолинейные координаты, а временну́ю координату будем считать звездным временем. Предположение об эвклидовой метрике будет, само собой разумеется, неправильным, но, чем меньше будут окрестности точки, тем ближе будет геометрия мира около этой точки подходить к геометрии

[1] Выражение «в непосредственной близости» следует понимать в том смысле, что свойства нашего мира, при указанном выборе координат, будут близки к эвклидовым, не только в данной точке, но и в окрестностях ее. Точную математическую формулировку отмеченного обстоятельства приводить здесь мы не считаем возможным.

эвклидова мира. Назовем мир, таким образом построенный, *условным* миром. В этом условном мире материальная точка, находящаяся под действием тяготеющих масс, будет обладать мировой линией, отличной от прямой условного мира. В самом деле, согласно второй гипотезе тяготения, указанная мировая линия будет прямой нашего физического, отличного от только что введенного условного мира, и, значит будет отличаться от прямой мира условного. Таким образом, точка в условном мире будет обладать ускорением, следовательно, согласно принципу инерции старой механики, мы сможем определить силы, действующие в соответствии с законами старой механики на точку, со стороны тяготеющих масс, иначе говоря, мы сможем определить силу всемирного тяготения старой механики. Эта сила будет зависеть, конечно, от тяготеющих масс, ибо она определится из того обстоятельства, что мировая линия точки будет прямой физического мира и, следовательно, некоторой кривой мира условного, вид которой будет зависеть от метрики физического мира, т. е., согласно третьей гипотезы, от материи и, в частности, от тяготеющих масс. Что мы должны ожидать получить в силу указанных соображений? Как первое приближение, мы должны получить закон Ньютона, затем мы должны, вообще говоря, получить поправку к закону всемирного тяготения тем бо́льшую, чем в большей близости к обширным тяготеющим массам находится наша материальная точка.

Изучая движение точки около тяготеющей массы Солнца, Эйнштейн обнаружил в первом приближении, как и следовало ожидать, закон Ньютона; но к этому закону присоединилась некоторая поправка. Применение этой поправки дало как раз то остаточное движение перигелия Меркурия, которое оставалось необъясненным. Необъясненным оставалось движение перигелия в 43″ в 100 лет; вычисления Эйнштейна дали величину 42″, 89 в 100 лет; близость этих двух чисел становится особенно замечательной, если вспомнить, каким обходным путем мы пришли ко второму числу [1].

---

[1] Я изложил здесь обычную точку зрения, позволяющую, оперируя при помощи эвклидовой геометрии и старой механики, находить в физическом пространстве экспериментальные соотношения, служащие поверкой гипотезы тяготения. Эта обычная точка зрения лишена, к сожалению, надлежащей ясности и строгости. Правиль-

Путь для дальнейшей поверки гипотезы тяготения был открыт. Тяготеющая масса должна, изменяя метрику мира, оказывать влияние почти на все физические явления. Так, например, свет, проходя мимо тяготеющей массы и имея мировой своей линией особые прямые (так называемые нулевые линии) физического мира, в мире условном должен отступать от прямолинейного распространения в условном пространстве и должен изгибаться от действия тяготеющей массы. Экспедиция, снаряженная для наблюдения последнего полного солнечного затмения в мае 1919 г., обнаружила смещение положения звезд, свет которых проходил вблизи закрытого Луной Солнца; это наблюдение смещения прекрасно согласовалось с тем, которое было предвычислено Эйнштейном.

Периоды колебания электронов на Солнце вблизи большой тяготеющей массы должны, в силу изменения метрики мира вблизи тяготеющей массы (а метрика коснется ведь и промежутков времени), быть длиннее таковых же периодов на Земле. Вычисления показывают, что это

нее было бы рассуждать следующим образом. Геометрические величины в области мира, около данной точки (явления), разлагаются в ряд по степеням разностей мировых координат точек этой области и данной точки. Ограничиваясь самым грубым приближением, мы получаем эвклидову геометрию пространства, старую механику и закон тяготения Ньютона. Идя дальше в наших приближениях, мы должны получить поправку как к эвклидовой геометрии и старой механике, так и к закону тяготения. Пользуясь условным миром, мы считаем, что поправка к эвклидовой геометрии более высокого порядка малости (более мала), нежели поправка к закону тяготения, таким образом, мы получаем движение перигелия Меркурия; здесь нельзя не указать на опасность, часто в приближенных вычислениях и соображениях встречающуюся, а именно на опасность объяснения тех или иных явлений, путем сохранения одних малых величин и отбрасывания других, того же порядка малости, могущих уничтожить влияние первых. С этой точки зрения вопрос остается невыясненным в теории относительности; более того, на него не обращается вовсе никакого внимания, вероятно, здесь никаких затруднений не встретится; но, если вообразить на мгновение, что мы, устанавливая наши приближенные соображения, поступаем неправильно и отбрасываем члены некоторого порядка малости, сохраняя при этом члены того же порядка малости, то может случиться, что никакого движения перигелия Меркурия мы объяснить будем не в состоянии. Повторяю, что это мало вероятно, но я все же счел полезным обратить внимание на указанное соображение, нуждающееся в более подробном освещении и таящее в себе известные опасности для возможности экспериментального подтверждения теории относительности.

удлинение будет сказываться на смещении темных линий спектра к красному концу на $2 \cdot 10^{-6}$ длины волны линии; наблюдения дают в среднем число для смещения, равное $1{,}85 \cdot 10^{-6}$ длины волны. Существует еще ряд экспериментальных фактов, подтверждающий правильность указанной гипотезы тяготения и, значит, правильность теории Эйнштейна, известной под именем *общего принципа относительности*. Необходимо все же отметить, что указанная правильность подтверждена пока лишь в весьма грубых чертах; не следует на принцип относительности смотреть, как на нечто вполне установившееся; конечно, многие детали теории Эйнштейна, особенно относящиеся к установлению мировых законов, могут и должны будут видоизмениться, как под влиянием новых экспериментальных фактов, так и под действием непрерывно совершенствующегося математического анализа. Важно лишь то обстоятельство, что теория Эйнштейна в своих общих чертах блестяще выдержала экспериментальное испытание, не только объяснив многое, казавшееся необъяснимым, но и предсказав, по примеру классических теорий, ряд новых явлений.

§ 10. Материя и строение Вселенной

1. Для теории Эйнштейна электромагнитные явления, характеризуясь особыми величинами, не интерпретируют никакого свойства геометрического мира. Немецкий математик Weyl, развивая теорию Эйнштейна, дал систему, в которой и электромагнитные явления физического мира интерпретируют при некоторых дополнительных предположениях (признание теории Mie) известные свойства геометрического мира; эти дополнительные предположения не столь существенны; соответственным обобщением геометрии можно от них освободиться [1]. Существенной чертой теории Weyl'я является грандиозность его концепции, сводящей все совершающиеся в физическом мире к интерпретации некоторых свойств мира геометрического. Посмотрим, какими гипотезами характеризуется теория Weyl'я.

---

[1] По этому вопросу имеются работы Eddington'a, Schouten'a и автора настоящей статьи.

Первое ее теоретическое преимущество перед гипотезами тяготения заключается в уменьшении числа гипотез и в придании им более общего характера. Ограничения, требующие, чтобы геометрия мира была бы римановой геометрией, в теории Weyl'я отпадает. В то же время движение по инерции захватывает более широкий круг движений; третья гипотеза тяготения претерпевает изменение в том смысле, что в ее формулировке, сообразно общей идее теории, совершенно отсутствует указание на роль величин, характеризующих материю. Гипотезы Weyl'я, которые мы, ради краткости, будем называть *гипотезами материи*, формулируются следующим образом:

1) *материальная точка под действием как тяготеющих масс, так и электромагнитных явлений движется по инерции.*

2) *Между фундаментальным метрическим тензором и масштабным вектором имеют место определенные соотношения, называемые мировыми уравнениями.*

Если в физическом мире нет ничего, кроме электромагнитных явлений и тяготеющих масс, или если все сводится только к электромагнитным явлениям, то первая гипотеза может быть выражена просто требованием, чтобы всякое движение материальной точки было бы движением по инерции (в смысле новой механики, конечно). Из комбинации второй и первой гипотез следует, что все величины, характеризующие электромагнитные явления (при этом предполагается справедливость теории материи Mie), зависят от геометрических величин геометрического мира. В самом деле, жизнь любой материальной точки определяется прямой мировой линией, а прямая, в свою очередь, зависит только от фундаментального метрического тензора и масштабного вектора, каковые величины, согласно второй гипотезе, связаны друг с другом и ни с чем более. Weyl делает более определенное предположение, говоря, что четыре величины, определяющие масштабный вектор, интерпретируются в физическом мире электромагнитными и электростатическими потенциалами; это частное предположение не является, однако, существенно необходимым для теории Weyl'я.

Мировые уравнения устанавливаются приемом, аналогичным получению мировых уравнений в теории Эйнштейна; единственным существенным отличием мировых уравнений теории Weyl'я являются более суровые требования инвариантности их. К обычному принципу инвариантности добавляются еще дополнительные требования *инвариантности масштабной*. Остановимся на этих дополнительных требованиях; условимся называть *изменением масштаба* (см. выше § 3) операцию различного для различных точек изменения величины бесконечно малых векторов, иначе говоря, операцию помножения составляющих фундаментального метрического тензора g_{ik} на величину μ, функцию координат x_1, x_2, x_3, x_4. В этой операции нет ничего нового или экстраординарного: переезжая из страны в страну, нам приходится изменять масштаб, т. е. мерить в России аршинами, в Германии — метрами, в Англии — футами. Вообразим, что подобную *перемену масштаба нам пришлось* бы делать от точки к точке, тогда мы и получим описанную выше операцию *изменения масштаба*. Изменению масштаба в мире геометрическом будут, в физическом мире, отвечать различные способы измерения длины (величины вектора); эти различные способы будут все пользоваться одним и тем же начальным значением, но зато будут, от точки к точке, менять единицу измерения. Таким образом, изменению масштаба будет в физическом мире отвечать перемена, от точки к точке, единицы измерения длины, каковая перемена, как мы выяснили в § 3, всегда имеет место.

Собственные свойства мира делятся на два класса: одни не зависят от упомянутого изменения масштаба, лучше сказать, не *меняют своей формы* ни при каких изменениях масштаба; другие будут при изменении масштаба менять свою форму. Условимся собственные свойства мира, принадлежащие к первому классу, называть *масштабно-инвариантными*.

Weyl расширяет постулат инвариантности, добавляя к нему требование, чтобы *все физические законы были бы не только собственными, но и масштабно-инвариантными свойствами физического мира*.

Сообразно такому расширению постулата инвариантности, приходится потребовать, чтобы и мировые уравнения выражались бы в форме, удовлетворяющей требованию не только координатной, но и масштабной инвариантности.

2. Существенным отличием теории Weyl'я от теории Эйнштейна является отсутствие экспериментального под-

тверждения теории Weyl'я. Я считаю, что требование признания теории Mie не существенно для общей идеи теории Weyl'я; но если взять теорию Weyl'я в том виде, как она излагается автором, то признание теории Mie неизбежно, что теория Mie не находится в должном согласии с экспериментальными фактами. Как бы то ни было, гипотеза материи Weyl'я ждет еще своего экспериментального подтверждения.

Существенной поддержкой теории Weyl'я является получение из его мировых уравнений, установленных даже в самой общей форме, системы уравнений Maxwell'a. Равным образом, как из теории Эйнштейна, так и из теории Weyl'я вытекает закон сохранения энергии, что представляет собой также лишний шанс в пользу теории Weyl'я. Будущее сможет решить, в состоянии ли теория Weyl'я оправдать себя перед судом эксперимента в том виде, в каком она сейчас развита, или потребуются новые изменения и дополнения в развитии указанной теории. Не эта сторона дела важна, однако, в теории Weyl'я — важно то утверждение этой теории, которое *все материальные явления физического мира почитает лишь своеобразной интерпретацией свойств и образов мира геометрического*.

Обратим внимание на некоторые следствия гипотезы тяготения и гипотезы материи, следствия, которые дадут нам более яркое представление об интерпретации материей геометрических свойств мира. Тяготеющая масса связана с векториальной кривизной; чем больше тяготеющих масс, тем больше векториальная кривизна; электромагнитные явления связаны, наоборот, с кривизной метрической; чем более интенсивны электромагнитные явления, тем больше метрическая кривизна. Векториальная кривизна около Солнца[1] значительно более, нежели в областях межпланетного пространства, далеких от каких-либо звезд; метрическая кривизна около мощного генератора

---

[1] Это выражение не вполне точно; не следует упускать из вида, что и векториальная и метрическая кривизны относятся к *четырехмерному* миру. Мы, однако, допустим здесь сознательно неточность выражений ради бо́льшей наглядности.

В сущности говоря, нам следует рассматривать кривизну гиперповерхности четырехмерного мира $x_4 = x_{40}$, т. е. кривизну пространства, отвечающего моменту x_{40}.

тока значительно больше, чем метрическая кривизна вдали от больших масс электромагнитной энергии; метрическая кривизна в луче сильного прожектора значительно больше, нежели кривизна в луче настольной лампы. Значительная векториальная кривизна около Солнца скажется, когда мы будем параллельно перемещать вектор по сомкнутой кривой и следить за его направлением; метрическая кривизна около мощного генератора скажется на значительном изменении длины вектора, параллельно перемещаемого по сомкнутой кривой около указанного генератора. Таким образом, наш физический мир отличается в различных частях своих большим разнообразием векториальной и метрической кривизны. Пространство наше является особой гиперповерхностью мира; оно будет обладать как векториальной, так и метрической кривизной, чрезвычайно различной в различных своих частях и к тому же все время меняющейся с течением времени. Нужны очень детальные сведения о жизни нашего материального пространства, чтобы все время следить за изменяющимися его геометрическими свойствами; мы этих сведений не имеем, между тем представляется чрезвычайно интересным установить свойства пространства, в котором мы живем и в котором движутся и живут небесные светила. Посвятим несколько слов изложению попыток решения этого вопроса, вопроса о строении Вселенной [1].

3. Подходя к вопросу о строении Вселенной, мы должны прежде всего вспомнить, что Вселенная наша, т. е. материальное пространство, пространство, где движутся звезды, как мы видели, самостоятельного существования не имеет и может лишь рассматриваться как гиперповерхность мира, отвечающего определенному значению временнóй координаты. Говоря о геометрических свойствах Вселенной, мы должны, сообразно только что сказанному, установить сначала геометрические свойства мира, а потом уже рассмотреть в этом мире гипер-

---

[1] Попытки свести электромагнитные явления к геометрическим свойствам пространства не привели к успеху, так что надежды, высказываемые в этом параграфе, не подтвердились.

О теориях Ми и Вейля лучше всего прочесть в книге З. Паули «Теории относительности». М.— Л., 1947; о других попытках в этом направлении — в статье Паули «Единая теория поля» (в книге «Теоретическая физика XX века»). М., 1962.— *Прим. ред.*

поверхности, отвечающие разным значениям временно́й координаты и изучить геометрию этих гиперповерхностей.

Геометрические свойства мира, интерпретацией коего является физический мир, согласно как гипотезе тяготения, так и гипотезе материи, вполне определятся, коль скоро мы будем знать материю, заполняющую этот мир, иначе говоря, коль скоро будем мы знать материю, заполняющую физическое пространство и ее движение с течением времени. Трудность решения в общем виде вопроса о геометрических свойствах мира заставляет нас сделать ряд упрощающих предположений, касающихся прежде всего свойств материи, заполняющей мир. Первое из этих упрощающих предположений, принятое в настоящее время при исследовании Вселенной, с точки зрения теории Эйнштейна, заключается в совершенном игнорировании электромагнитных явлений и в сведе́нии всей материи, заполняющей мир, к тяготеющим массам. Тогда, ввиду гипотезы тяготения, мировые уравнения дадут нам возможность по величинам, характеризующим тяготеющие массы мира, определить g_{ik}, т. е. фундаментальный метрический тензор мира и, значит, метрику и прочие геометрические с ней связанные свойства мира. Величинами, характеризующими материю мира, когда она сводится к тяготеющим массам, служат неизвестная плотность тяготеющих масс $\rho = \theta(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и те данные, которые определят мировые линии этих тяготеющих масс; выше было уже указано, что, как следствие мировых уравнений, мы получим отнесение мировых линий тяготеющих масс к числу прямых линий мира. Не вдаваясь в большие подробности, замечу только, что данные, определяющие мировые линии тяготеющих масс, сведутся, в конечном счете, к трем неизвестным функциям координат мира. Таким образом, десять мировых уравнений должны будут служить для определения четырнадцати неизвестных величин: десяти величин фундаментального метрического тензора, одной плотности и трех величин, определяющих жизнь тяготеющих масс. Так как нас могут интересовать лишь собственные свойства мира, то мы можем одну координатную систему мира заменить на другую; тогда, как это доказывается в дифференциальной геометрии, из десяти величин фундаментального метрического тензора четырем величинам мы можем, помощью соответственного преобразования координат, приписать некоторые, наперед заданные, в зависимости от координат, значения; таким образом, из всех величин фундаментального метрического тензора; определению подлежат только шесть величин (10—4); значит, наши десять мировых уравнений, по существу дела, будут служить для определения десяти (6 + + 1 + 3) неизвестных функций координат и времени, и решение задачи определения геометрии мира, принципиально по крайней мере, становится возможным. Если мы указанные десять функций определим, то будем знать и геометрию мира и распределение тяготеющих масс с их мировыми линиями. Следует впрочем, оговориться, что до сего времени никто еще не решал поставленной только что задачи во всей ее общности и не был еще исследован вопрос о возможности определения из десяти мировых уравнений упомянутых десяти функций. Можно даже, на основании имеющегося материала по изучению мировых уравнений, утверждать, что вполне определенными, указанные десять величин из мировых уравнений получить будет нельзя. Таким образом, нужны или дополнительные принципы для определения этих величин, или же привлечение астрономических данных, чтобы задачу изучения Вселенной сделать определенной.

Если бы, однако, нам удалось определить какой-либо вид, хотя бы частную форму, этих десяти функций, то, при наличии более подробных астрономических сведений о нашей Вселенной, мы могли бы иметь превосходный и детальный метод экспериментальной поверки теории Эйнштейна и указанного частного решения нашей задачи. В самом деле, наши мировые уравнения определили бы нам плотность тяготеющих масс, иначе говоря, мы имели бы к любому моменту времени *распределение тяготеющих масс в физическом пространстве*; и, наконец, определив мировые линии тяготеющих масс, наши уравнения дали бы нам сведения о движении тяготеющих масс в пространстве к любому моменту времени; иначе говоря, наши уравнения дали бы нам к любому моменту времени *распределение в физическом пространстве скоростей тяготеющих масс*; распределение тяготеющих масс было бы нами точно проверено с помощью астрономических исследований распределения звезд во Вселенной, а распределение скоростей мы проверили бы, опять-таки, на астрономических исследованиях скоростей, наблюдающихся в нашей звездной Вселенной.

Перепробовав все частные решения мировых уравнений, мы, с помощью указанных астрономических данных, определили бы геометрию мира и распределение, и жизнь тяготеющих масс Вселенной.

К сожалению, намеченный, идеально правильный путь, неприменим практически; с одной стороны, математическое исследование десяти мировых уравнений пока не может быть проведено во всей полноте, а с другой стороны, и астрономические данные не достаточны для упомянутой экспериментальной проверки.

4. Приходится идти другим путем. Для упрощения математической стороны вопроса приходится делать произвольные гипотезы, сводящие мировые уравнения к более простым. Для экспериментальной поверки приходится выводить некоторые простые следствия из устройства Вселенной, намеченной исследованием упрощенных мировых уравнений, и уже эти простые следствия подвергать сравнению с имеющимися астрономическими данными и проверять, таким образом, экспериментально развитую математически теорию. Основываясь на сказанном, следует считать изучение Вселенной в целом в настоящее время в самой младенческой стадии развития; ко всем без исключения выводам, вытекающим из изучения Вселенной, должно в настоящее время относиться с полным недоверием; это недоверие к тому же подкрепляется крайней шаткостью и ненадежностью наших астрономических сведений о Вселенной.

Упрощающие предположения, полагаемые в настоящее время в основу при изучении мира, касаются двух сторон вопроса: прежде всего, делаются упрощающие предположения относительно тяготеющих масс; *относительные скорости тяготеющих масс считаются равными нулю*, тяготеющие массы считаются неподвижными; с первого взгляда это предположение кажется явно абсурдным, но, вспомнив,— что скорости тяготеющих масс, как показывают наблюдения, в большинстве случаев ничтожны, по отношению к скорости света, мы сможем мировые уравнения с большой точностью привести действительно к такому виду, в котором скорости равны нулю. Относительно плотности тяготеющих масс никаких дополнительных предположений можно не делать.

Второй класс предположений относится к геометрии мира. Предполагается прежде всего, что геометрия мира обладает свойством давать пространства (гиперповерхности), в которых кривизна в любой их точке одинакова и меняется лишь с течением времени. Далее, делается еще одно дополнительное предположение о метрике мира, предположение, упрощающее значительно вычисления, но смысл которого до сего времени не ясен; не желая входить в детали, я не буду останавливаться подробно на этом предположении.

Сделав указанные предположения, можно прийти прежде всего к двум типам Вселенной [1]: 1) *стационарный тип* — кривизна пространства не меняется с течением времени и 2) *переменный тип* — кривизна пространства меняется с течением времени. Иллюстрацией первого типа Вселенной может служить шар, радиус которого не меняется с течением времени, двумерная поверхность этого шара будет как раз двумерным пространством постоянной кривизны. Наоборот, второй тип Вселенной может быть изображен меняющимся все время шаром — то раздувающимся, то уменьшающим свой радиус и как бы сжимающимся. Стационарный тип Вселенной дает всего лишь два случая Вселенной, которые были рассмотрены Эйнштейном и De Sitter'ом. Первый определил, по имеющимся астрономическим данным, радиус кривизны Вселенной в 10^{12}—10^{13} расстояний Земли до Солнца, а плотность φ (повсюду постоянную) в 10^{-26} *г/см*^{3}. De Sitter для своей Вселенной получил полное отсутствие плотности тяготеющих масс ($\rho = 0$).

Переменный тип Вселенной представляет большое разнообразие случаев: для этого типа возможны случаи, когда радиус кривизны мира, начиная с некоторого значения, постоянно возрастает с течением времени; возможны далее случаи, когда радиус кривизны меняется периодически: Вселенная сжимается в точку (в ничто), затем, снова из точки, доводит радиус свой до некоторого значения, далее опять, уменьшая радиус своей кривизны, обращается в точку и т. д. Невольно вспоминается сказание индусской мифологии о периодах жизни; является возможность также

[1] Вопрос о строении Вселенной разбирается Эйнштейном, De Sitter'ом и др.

говорить о «сотворении мира из ничего», но все это пока должно рассматривать как курьезные факты, не могущие быть солидно подтвержденными недостаточным астрономическим экспериментальным материалом; бесполезно, за отсутствием надежных астрономических данных, приводить какие-либо цифры, характеризующие «жизни» переменной Вселенной; если все же начать подсчитывать, ради курьеза, время, прошедшее от момента, когда Вселенная создавалась из точки до теперешнего ее состояния, начать определять, следовательно, время, прошедшее от создания мира, то получатся числа в десятки миллиардов наших обычных лет [1].

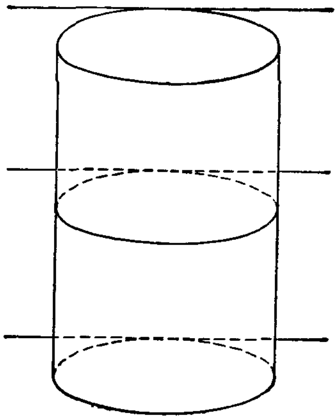


Рис. 22

Остается еще, в заключение вопроса о строении Вселенной, остановиться на одном недоразумении, повторяющемся не только в статьях и книгах популярного характера, но и в более серьезных и специальных работах, посвященных принципу относительности. Я имею в виду пресловутый вопрос о *конечности Вселенной*, т. е. о конечности нашего физического, занятого блистающими звездами пространства. Утверждают, что, найдя постоянную продолжительную кривизну Вселенной, можно якобы заключить о ее конечности и прежде всего о том, что прямая во Вселенной имеет «конечную длину», что объем Вселенной является тоже конечным и т. п. Это утверждение может быть основано или на недоразумении или на дополнительных гипотезах. *Из метрики мира оно ни в коем случае не вытекает*, а только метрика может быть выяснена мировыми уравнениями. Простые примеры могут

[1] Напомним, что явление разбегания туманностей открыто было Хабблом лишь в 1927 г., так что А. А. Фридман проявил здесь исключительную прозорливость, предсказывая роль нестационарных моделей.— *Прим. ред.*

убедить нас в этом. Метрика поверхности цилиндра и метрика плоскости одинаковы, между тем на цилиндре существуют «прямые» конечной длины (круг, см. рис. 22), тогда как таких прямых нет вовсе на плоскости. Вопрос конечности пространства зависит не только от метрики его, но и от условия, когда две системы координат определяют одну и ту же точку. Это условие в значительной мере произвольно; даже рациональное его ограничение, о котором мы не имеем возможности здесь говорить, оставляет достаточно места произволу в вопросе об одинаковости и различности точек пространства. Таким образом, одна метрика мира не дает нам никакой возможности решить вопрос о *конечности* Вселенной. Для решения этого вопроса нужны дополнительные теоретические и экспериментальные исследования. Разумеется, при соответствующих соглашениях вопрос исследования конечности Вселенной не является безнадежным. Положим, что этим вопросом занялись тени, живущие на поверхности сферы; они могли бы решить этот вопрос, отправив в путь одного из сферических путешественников; держась все время прямой линии и проходя ее в одном направлении, наш путешественник, наблюдая около себя характер местности, видел бы, что этот характер во все время его путешествия менялся бы; ему попадались бы иные ландшафты и сферические города, мало напоминающие города его родины; однако, приближаясь с другого конца к своему городу, откуда он вышел, путешественник заметил бы, что окружающая его местность становится все более и более похожей на ту, которую он, отправляясь в далекое путешествие, покинул. Вернувшись в исходную точку, путешественник, путем тщательных наблюдений, мог бы констатировать, что точка, в которую он пришел, совершенно совпадает с точкой, откуда он вышел; таким образом, была бы при установлении, конечно, целого ряда соглашений, выяснена конечность Вселенной сферы; для этого нужны были бы дополнительные соглашения и дополнительные исследования, одна метрика сферы решить вопрос о ее конечности была бы не в состоянии.

Итак, из постоянства и положительности кривизны Вселенной ни в какой мере не следует, что наша Вселенная конечна.

§ 11. Общие выводы принципа относительности

1. Представляется небесполезным в сжатом виде перечислить выводы, к которым нас привел принцип относительности. Я это сделаю в настоящем параграфе, отметив лишь самое существенное, опустив все детали и сопутствующий им математический аппарат.

Пространство любого числа измерений может быть произвольным образом арифметизировано так, чтобы каждой точке пространства отвечала бы комбинация нескольких чисел, называемых *координатами* данной точки пространства. Способ арифметизации совершенно произволен.

Свойства пространства могут быть *собственными*, т. е. не зависеть от способа арифметизации пространства или *несобственными*. О собственных свойствах говорят, что они инварианты по отношению к переходу от одного способа арифметизации пространства к другому. Собственные свойства пространства не зависят от нашего произвола — выбора способа арифметизации пространства. Несобственные свойства суть скорее свойства данной арифметизации пространства.

В пространстве определяется *расстояние* двух его точек и, соответственно, величина *бесконечно малого вектора в данной точке пространства*. Это последняя величина зависит от *фундаментального метрического тензора*. Для четырехмерного пространства расстояние называется *интервалом*, а фундаментальный метрический тензор зависит *от десяти величин* g_{ik}.

В пространстве определяется также *параллельное перемещение вектора*, служащее основанием для определения *прямых* пространства и *кривизны* его. Параллельное перемещение вектора зависит не только от фундаментального метрического тензора, но еще от совокупности некоторых величин, называемых *масштабным вектором*; для четырехмерного пространства масштабный вектор составляют четыре величины. Изменение направления вектора, при параллельном его перемещении, дает начало понятию *векториальной кривизны пространства*, а изменение величины вектора определяет *метрическую кривизну* пространства.

Если величина вектора не меняется при его параллельном перемещении, то пространство называется *римановым.* В римановом пространстве масштабный вектор отсутствует, метрическая кривизна равна *нулю*, а прямая линия является линией кратчайшей; прочие пространства называются пространствами Weyl'я; в них прямая уже не есть кратчайшая линия.

2. Помимо геометрического пространства мы вводим *физическое трехмерное пространство* и *физическое время*,— причем, вводим их не в отдельности, когда их физическое существование немыслимо, а в их совокупности, составляющей физический мир. Физический мир состоит *из материи* (толкуя слово это в самом широком смысле), к материи принадлежат и тяготеющие массы, и электромагнитные процессы. Напомню, что именно мир состоит из материи, потому что материя в пространстве и без времени физически немыслима. Мы уславливаемся об особой интерпретации геометрического мира (пространства четырех измерений) при помощи мира физического. Каждой вещи геометрического мира сопоставляется интерпретирующий ее объект (материальный) мира физического. *Интерпретация эта совершенно условна и зависит от нашего произвола.* Условившись в определенной интерпретации, будем называть четырехмерное пространство, интерпретацией коего служит физический мир, просто *геометрическим миром.* В физическом мире мы выделяем группу свойств, которые называем *физическими законами.* Для этих физических законов мы устанавливаем *постулат инвариантности*, заключающийся в том, что физические законы инвариантны, относительно перехода от одного способа арифметизации к другому, и отвечают, следовательно, *собственным свойствам* мира геометрического.

С известной точки зрения, постулат инвариантности мог бы служить определением физических законов.

Три координаты физического мира выделяем в особую группу *пространственных координат*, а четвертую координату называем *временно́й.* Для метрики геометрического мира устанавливаем особый *постулат вещественности*, сущность которого сводится к определенным свойствам вещественности и мнимости, которыми должен обладать интервал двух точек одновременных и двух точек, имеющих одинаковые пространственные координаты. Постулат вещественности налагает ограничительные условия не только на метрику мира, но и на произвол его арифметизации, ибо при всякой арифметизации, в силу постулата вещественности, должна иметь место возможность выделения временно́й координаты. Постулат вещественности играет весьма большую роль в так называемом *принципе причинности*; согласно этому постулату, два *разновременных явления* не могут быть, с помощью арифметизации, подчиняющейся постулату вещественности, приведены к одновременности. Таким образом, причина и следствие при одном способе арифметизации мира остаются причиной и следствием также при другом способе введения мировых координат.

Изменение пространственных координат с течением времени называем *движением*. Движение характеризуется и определяется *мировой линией точки*.

Когда установлена условная интерпретация геометрического мира, помощью мира физического, то является возможность, путем *экспериментального изучения физического мира, определить геометрию мира геометрического*. Простейшим по идее, но труднейшим по выполнению является экспериментальное определение интервалов в физическом мире; оно даст нам метрику мира геометрического. Экспериментальное изучение изменения длины вектора, при его параллельном перемещении, даст нам возможность определить масштабный вектор геометрического мира. Но, кроме указанных простейших по идее экспериментов, можно, помощью экспериментального изучения любых иных свойств физического мира, сделать определенное заключение о мире геометрическом; всякий физический закон, согласно постулата инвариантности, определит собой некоторое собственное свойство геометрического мира; изучая какой-либо физический закон экспериментально, мы тем самым, установим определенное свойство геометрического мира. Закон Ньютона всемирного тяготения послужил Эйнштейну для выяснения метрики мира, а законы электродинамики дали возможность Weyl'ю определить не только метрику мира, но и его масштабный вектор.

3. Принцип инерции делит движения материальных точек на два класса: одним соответствует мировая линия — прямая геометрического мира,— это движения по *инерции*; у других движений мировая линия не есть прямая — это движения *под действием сил*. Сила, действую-

щая в таком движении, характеризуется особым числом — *массой* материальной точки, отличающим одну материальную точку от другой, и *величинами* (сравни ускорения), определяющими степень отличия мировой линии нашего движения от прямой мира.

Невозможность изучить геометрический мир, с общей точки зрения, заставляет прибегать к ряду гипотез об его метрике и его свойствах. Наиболее узкой из этих гипотез является гипотеза старой механики, считающая, что геометрический мир *есть эвклидово четырехмерное пространство*. В рамках старой механики нет места экспериментальному изучению метрики мира, ибо она определена наперед указанной гипотезой. Материя, состоящая из тяготеющих масс, с точки зрения старой механики, обладает свойством всемирного тяготения. Материя, состоящая из электромагнитных процессов, управляется уравнениями электродинамики. Теория Эйнштейна пользуется уже гораздо более широкой, нежели старая механика, гипотезой о геометрии мира, гипотезой, которую мы называли *гипотезой тяготения*. Геометрический мир предполагает уже не эвклидовым, а более широким — римановым. *Наличность тяготеющих масс вызывает лишь движение по инерции*, и, значит, сила всемирного тяготения является лишь кажущейся силой. Наконец, метрика пространства связывается с величинами, характеризующими материю, особыми *мировыми уравнениями*. Изучая экспериментальное движение тяготеющих масс, мы определим тем самым метрику геометрического мира.

Теория Weyl'я идет еще дальше теории Эйнштейна. Гипотеза Weyl'я, названная нами *гипотезой материи*, состоит в следующем. Согласно гипотезе материи (при наличности тяготеющих масс и электромагнитных процессов), всякое движение является движением по инерции, а метрика мира и его масштабный вектор определяются особыми мировыми уравнениями. Все свойства материи (состоящей из электромагнитных процессов) получаются из геометрических свойств мира. *Нет ничего, кроме этих геометрических свойств мира*.

Теория Эйнштейна оправдывается на опыте; она объясняет старые, казавшиеся необъяснимыми явления и предвидит новые поразительные соотношения. Вернейший и наиболее глубокий способ изучения, при помощи теории Эйнштейна, геометрии мира и строения нашей Вселенной состоит в применении этой теории ко всему миру и в использовании астрономических исследований. Пока этот метод немногое может дать нам, ибо математический анализ складывает свое оружие перед трудностями вопроса, и астрономические исследования не дают еще достаточно надежной базы для экспериментального изучения нашей Вселенной. Но в этих обстоятельствах нельзя не видеть лишь затруднений временных; наши потомки, без сомнения, узнают характер Вселенной, в которой мы обречены жить... И все же думается, что

> Измерить океан глубокий,
> Сочесть пески, лучи планет,
> Хотя и мог бы ум высокий —
> Тебе числа и меры нет!

5 сентября 1922 г.
г. Петроград

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Эта книга вышла много лет назад — в 1923 году. Она появилась на свет в Петрограде в дни, когда только начинали восстанавливаться научные связи, разорванные долгой войной. В то время, когда лишь немногие физики знали о новой теории, в героическом городе совершается переворот в молодой науке — переворот в наиболее трудном, революционном ее разделе — релятивистской космологии. Немецкий журнал «Zeitschrift für Physik», где публиковалась большая часть физических исследований, — получил в 1922 г. рукопись «О кривизне пространства». Выводы, к которым пришел автор статьи, были настолько неожиданны, что сам Эйнштейн усомнился в их справедливости. В статье утверждалось, что метрика пространства — времени, геометрия нашего мира, изменяется со временем. Лишь семь лет спустя это открытие было подтверждено наблюдениями, когда Хаббл открыл явление разбегания галактик.

Статья «О кривизне пространства» была написана Александром Александровичем Фридманом, которому в то время было 34 года. Это имя впервые тогда прозвучало в физике. А. А. Фридман не один интересовался теоретической физикой. Его статью перевел на немецкий язык В. А. Фок, в спорах с Эйнштейном ее отстоял Ю. А. Крутков. К этому же кругу принадлежал В. К. Фредерикс, П. А. Лукирский и другие физики. В это же время в Петрограде начинали работать А. Ф. Иоффе, Я. И. Френкель, П. Л. Капица. Все они составили ту блестящую плеяду, которая создала великолепную научную школу.

Одним из важных дел было восстановление издания научной литературы. В эти годы и появляются первые книги по физике. Вместе с «Теорией относительности»

Борна в свет выходит и книга об общей теории относительности — «Мир как пространство и время»[1]. Одновременно Фридман вместе с Фредериксом начинает издавать и большой курс «Основы теории относительности». К сожалению, из пяти задуманных выпусков в свет вышел лишь один[2]. Судьба остальных выпусков неизвестна.

Обе книги нисколько не «пострадали» от времени. Их сейчас также полезно читать, как и тогда, когда они были написаны, пришлось лишь сделать несколько примечаний и ссылок.

Читатель, который захочет узнать о дальнейшем развитии идей Фридмана, может прочесть специальный номер журнала «Успехи физических наук» (т. 80, вып. 3, 1963 г.), посвященный 75-летию со дня его рождения. В этом номере помещены также и статьи самого Фридмана о кривизне мира и воспоминания об ученом.

В заключение приведем несколько дат из короткой жизни Александра Александровича Фридмана. Он родился 17 июня 1888 г. в Петербурге. Первую свою работу он опубликовал в 1905 г., будучи еще гимназистом. Окончив в 1909 г. Петербургский университет, он остается на кафедре математики. С 1913 г. он работает в Павловской аэрологической обсерватории.

С 1914 г. А. А. Фридман на фронте. Там он ведет исследования по бомбометанию, проводит испытательные полеты (он имел звание летчика-наблюдателя), ведет метеорологические наблюдения.

В 1918 г., после возвращения в Москву, А. А Фридман получает назначение в Пермский университет. Восстановление учебной жизни в этом Университете — в значительной степени его заслуга[3].

В 1920 г. А. А. Фридман возвращается в Москву. В 1922 г. выходят в свет две его работы: одна — по космологии (о ней мы уже говорили), другая — «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости»[4]. В первой из них были заложены основы релятивистской космологии, во

---

[1] Издательство «Наука и школа». Петроград, 1922.

[2] Издательство «Academia», 1924.

[3] Письма А. А. Фридмана, в частности с фронта и из Перми, опубликованы в «Трудах Института истории естествознания и техники», т. 22, стр. 324—388. Они дают яркое представление об активной деятельности их автора.

[4] Переиздана в 1934 г. под редакцией Н. Е. Кочина.

второй— основы теоретической метеорологии. Имя Фридмана становится широко известным.

Он был одним из первых ученых, представлявших советскую науку за рубежом.

В последние годы жизни интересы А. А. Фридмана концентрируются вокруг метеорологии. В феврале 1925 г. он становится директором Главной геофизической обсерватории. Вскоре он совершает рекордный полет на воздушном шаре (на высоте 7400 м). В это наиболее плодотворное время его деятельности и случилось несчастье: А. А. Фридман заболевает брюшным тифом, который и уносит его в могилу (15 сентября 1925 г.). В одном из некрологов было сказано, что Александр Александрович Фридман «целиком отдавал себя науке; он работал упорно сам и требовал упорной работы от своих учеников».

Я. А. Смородинский

Утверждено к печати
редколлегией научно-популярной литературы
Академии наук СССР

Редактор издательства ***Е. М. Клячс***
Художник ***С. Н. Голубев***
Технический редактор ***Р. М. Денисова***

Темплан НПЛ 1964 г. № 38
Сдано в набор 30/XII 1964 г.
Подписано к печати 23/III 1965 г.
Формат $84\times108^1/_{32}$
Печ. л. 3,5, усл. печ. л. 5,74
Уч.-изд. л. 5,3. Тираж 45000 экз.
Т-05220. Изд. № 5079/64. Тип. зак. № 1659

Цена 20 коп.

Издательство «Наука», Москва, К-62,
Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

СОДЕРЖАНИЕ

Александр Александрович Фридман

Мир как пространство и время

Издание второе