PARTIALLY ORDERED ALGEBRAIC SYSTEMS

by
L. FUCHS
Professor of Mathematics
L. Eötvös University
Budapest

PERGAMON PRESS
Oxford · London · New York · Paris
1963

Л. Фукс

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Перевод с английского
И. В. СТЕЛЛЕЦКОГО
Под редакцией и с предисловием
А. Г. КУРОША

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1965

УДК 519.4

Книга профессора Будапештского университета Л. Фукса представляет собой первый в мировой литературе систематический обзор основных результатов исследований по теории упорядоченных и частично упорядоченных групп, колец и полугрупп. К русскому изданию автором сделаны большие добавления.

Книга будет интересным и ценным пособием для всех алгебраистов, начиная от студентов старших курсов и кончая преподавателями и научными работниками, а также для математиков других специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Истоки теории упорядоченных и частично упорядоченных алгебраических систем лежат в геометрии, в функциональном анализе и в алгебре. За последние десятилетия исследования в этой области велись весьма активно, накопился большой материал и стала ясной необходимость его систематизации. Известный венгерский алгебраист, профессор Будапештского университета Л. Фукс взял на себя эту задачу и вполне успешно с нею справился.

Книга, им написанная, является первой в мировой математической литературе монографией, в которой теория упорядоченных алгебраических образований представлена как единая и уже весьма стройная область алгебры. Конечно, можно было бы указать некоторые вопросы, включение которых в книгу было бы желательным (так, в книге вполне могла бы найти место глава, посвященная теории упорядоченных универсальных алгебр и мультиоператорных групп). Однако и в том виде, какой книга сейчас имеет, она на протяжении ряда лет будет настольной для всех математиков, исследования которых так или иначе связаны с упорядоченными алгебраическими системами. Больше того, именно эта книга будет определять в ближайшие годы направление исследований в этой области.

В связи с подготовкой русского перевода книги автор провел над нею очень большую работу — им внесен в книгу ряд изменений и, главное, добавлен большой новый материал, иногда целые новые параграфы. Все эти добавления, равно как и добавления автора в список литературы, выделены в русском переводе звездочками.

Эта большая работа, проделанная автором, позволила редактору перевода ограничиться совсем немногими примечаниями. С другой стороны, небольшое добавление к списку литературы составлено переводчиком. В этой работе нам существенную помощь оказали П. Г. Конторович (Свердловск), Д. М. Смирнов (Новосибирск) и Я. В. Хион (Тарту).

Москва, ноябрь 1964 г. *А. Курош*

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Издание русского перевода моей книги о частично упорядоченных системах доставляет мне большое удовольствие. Оно показывает интерес советских математиков к этой важной области алгебры и делает возможным для более широкого круга читателей изучение ее на родном языке.

Русский перевод содержит несколько больше материала, чем английский оригинал. Рукопись английского издания была закончена более трех лет назад, а с тех пор в этой теории был получен ряд существенных результатов. Много важных результатов, касающихся линейно упорядоченных групп, было получено членами первоклассных алгебраических школ в Новосибирске и Свердловске, теория структурно упорядоченных групп развивалась дальше американскими математиками, новые результаты были получены разными авторами и в теории структурно упорядоченных колец и полугрупп. Поэтому казалось желательным включить в книгу некоторые из этих результатов.

Мне хотелось бы выразить свою искреннюю признательность переводчику и редактору этого тома за их дружеские усилия, а также ряду коллег за их ценные замечания и любезность, благодаря которой их результаты стали доступными мне до опубликования.

Будапешт, 1 мая 1964 г. Л. Фукс

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы возрастает интерес к изучению частично упорядоченных групп, полугрупп, колец и тел. Большое количество результатов разбросано в многочисленных статьях по разным журналам, а их систематического обозрения не существует. Настоящей книгой я пытаюсь восполнить этот пробел и изложить наиболее важные результаты для тех, кто хочет ознакомиться с этим предметом.

Алгебраические системы, снабженные частичным или линейным порядком, встречаются в различных разделах математики. Так как теория частично упорядоченных алгебраических систем весьма обширна, я должен был, не претендуя на полноту изложения, ограничиться развитием основных алгебраических аспектов теории. По этой причине здесь не рассматриваются некоторые важные темы, такие, как частично упорядоченные линейные или топологические пространства. Более того, некоторые ограничения были необходимы также и при изложении результатов, имеющих чисто алгебраический характер. Чтобы дать возможность читателю узнать о предмете больше, ссылки даются не только на оригинальные источники собранного здесь материала, но и на некоторые важные результаты, включить которые я не имел возможности. Попытки охватить библиографией всю обширную теорию частично упорядоченных алгебраических систем не делаются, но для узкой области, рассмотренной здесь, библиография довольно полна.

Текст распадается на три основные части. Я выбрал в качестве первой части теорию частично упорядоченных групп, ибо как с идейной стороны, так и с точки зрения общей теории она более важна, чем теория частично упорядоченных полугрупп. Вторая часть посвящена изложению теории частично упорядоченных колец и тел, в то время как третья касается частично упорядоченных полугрупп. Некоторое внимание обращается также на неассоциативный случай. Для того чтобы подчеркнуть внутреннюю аналогию, я старался, насколько это возможно, строить все три части параллельно — это видно также из названий глав.

Я стремился сделать изложение независимым и дать полные доказательства результатов. Однако в нескольких местах пришлось предположить предварительное знание некоторых более или менее известных результатов из общей алгебры. В этих случаях либо воспроизводятся необходимые предпосылки, либо делаются ссылки. Разумеется, наиболее привычные алгебраические понятия используются без объяснений.

Моя задача значительно облегчалась трудом Г. Биркгофа «Теория структур», который я использовал в ряде глав в качестве отправной точки. Я пользовался также второй частью хорошо известной книги Дюбрей-Жакотэн, Лесьёра и Круазо «Лекции по теории структур, упорядоченных алгебраических систем и геометрических структур» (Dubreil-Jacotin, Lesieur, Croisot, «Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques»).

Я очень признателен профессору Б. Нейману и профессору Л. Редеи, прочитавшим мою рукопись и сделавшим критические замечания, за их любезную помощь. Критические замечания проф. Неймана, касавшиеся языка и стиля книги, тоже очень помогли мне. Я хочу поблагодарить также профессора П. Конрада за любезную помощь в чтении корректур.

Кроме того, я хочу выразить свою искреннюю благодарность Венгерской академии наук и ее Дому печати за публикацию этого тома.

Будапешт, 31 декабря 1960 г.

Л. Ф.

Таблица обозначений

$A, B, G, H, R, S, \ldots$	алгебраические системы или их подмножества
$a, b, c, d, e, u, v, w, x, y, z$	элементы алгебраических систем
i, j, k, l, m, n	обычно рациональные целые
ε	1 или -1
$x \in A$	x есть элемент множества A
$[x \in A \mid \ldots]$	множество всех $x \in A$ со свойством...
$[x_\lambda]$	множество элементов x_λ
$A \subseteq B (A \subset B)$	A есть (истинное) подмножество B
$A \cap B, A \cup B$	пересечение, объединение множеств A, B
$A \setminus B$	множество всех x из A, но не из B
$\varnothing$	пустое множество
$a \leqq b$	a меньше или равно b
$a \parallel b$	a и b несравнимы
$a \vee b, \vee a_\alpha$	наим. в. г. a и b (или a_α)
$a \wedge b, \wedge a_\alpha$	наиб. н. г. a и b (или a_α)
$a \perp b$	a и b ортогональны
a^+, a^-	положительная и отрицательная части a
$\lvert a \rvert$	модуль a
$a : b, a :: b$	правое и левое частные

$[a, b]$, (a, b)	замкнутый и открытый интервалы
$U(B)$, $L(B)$	множества верхних, нижних граней множества B
$P(G)$, G^+	положительный конус группы G
$a^\wedge$	носитель элемента a
R_+	аддитивная группа кольца R
$[a, b]$	коммутатор $a^{-1}b^{-1}ab$ элементов a и b
$\{S\}$	подгруппа, порожденная множеством S
$\{S\}_\square$	выпуклая подгруппа, порожденная множеством S
$S(a_1, \ldots, a_n)$, $S'(a_1, \ldots, a_n)$	нормальная подполугруппа, порожденная $a_1, \ldots, a_n$ (и e)
$H(A, a_1, \ldots, a_n)$	полукольцо, порожденное 0, $A, a_1, \ldots, a_n$
$\cong_o$	изоморфизм, сохраняющий порядок
Π, Π^*	прямое, полное прямое произведение
Γ	лексикографическое произведение

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

1. Частично упорядоченные множества

Для удобства соберем здесь основные термины и понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Если на множестве A определено бинарное отношение $\leqq$, удовлетворяющее условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \text{P1. (Рефлексивность) } a \leqq a \\ \text{P2. (Антисимметричность) если } a \leqq b \text{ и} \\ \quad b \leqq a, \text{ то } a = b \\ \text{P3. (Транзитивность) если } a \leqq b \text{ и } b \leqq c, \\ \quad \text{то } a \leqq c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{для всех} \\ a, b, c \in A \end{array}$$

то A называется *частично упорядоченным множеством* (сокращенно *ч. у. множество*), а отношение $\leqq$ называется *частичным порядком* на A. *Двойственным* к множеству A называется ч. у. множество A', состоящее из тех же самых элементов, что и A, с частичным порядком $\leqq'$, определяемым следующим образом: $a \leqq' b$ (в A') тогда и только тогда, когда $b \leqq a$ (в A)[1]

Как обычно, можно писать $b \geqq a$ вместо $a \leqq b$ и $a < b$ (или $b > a$), когда $a \leqq b$ и $a \neq b$. Если не имеет места ни $a \leqq b$, ни $b \leqq a$, то a и b называются *несравнимыми*, что обозначается через $a \| b$.

Может случиться, что отношение $\leqq$ удовлетворяет только условиям P1 и P3. В этом случае мы будем говорить, что отношение $\leqq$ является *предпорядком*[2]. Предпорядок индуцирует на A отношение эквивалентности $\sim$, а именно $a \sim b$ тогда и только тогда, когда одновременно $a \leqq b$ и $b \leqq a$. Множество классов a^*, c^*, ... этой

---

[1] Мы часто будем говорить о двойственности утверждений; под этим мы будем понимать, что знаки $\leqq$ и $\geqq$ всюду меняются местами.

[2] Оно называется также *квазипорядком*, см. Биркгоф [3].

эквивалентности может быть частично упорядочено естественным образом: $a^* \leqq c^*$, если для некоторого (и значит для всех) a из a^* и некоторого (и потому также для всех) c из c^* мы имеем $a \leqq c$. Множество A^* классов a^*, c^*, ... является ч. у. множеством.

Частичный порядок на A индуцирует естественным образом частичный порядок на любом непустом подмножестве B из A, именно для a, $b \in B$ будет $a \leqq b$ в B тогда и только тогда, когда $a \leqq b$ при частичном порядке, определенном на A. Этот *индуцированный* частичный порядок на B будет обозначаться тем же самым символом $\leqq$.

(*Замкнутый*) *интервал*[1] $[a, b]$ множества A (где $a \leqq b$) состоит из всех $c \in A$, удовлетворяющих условию $a \leqq c \leqq b$; a и b называются *концевыми точками* интервала $[a, b]$. Подмножества $I_a = [x \in A \mid x \geqq a]$, определенные для каждого $a \in A$, и двойственные им подмножества $J_a = [x \in A \mid x \leqq a]$ также рассматриваются как (замкнутые) интервалы. Подмножество множества A называется *выпуклым*, если оно содержит весь интервал $[a, b]$ всякий раз, когда оно содержит концевые точки a, b. Если мы заменим $\leqq$ на $<$, то получим определение *открытых интервалов* (a, b), ...

Пусть A и A' — ч. у. множества. Отображение $a \to a'$ множества A в множество A' называется *изотонным*, если оно однозначно и *сохраняет порядок* в том смысле, что $a \leqq b$ влечет за собой $a' \leqq b'$. Отображение, взаимно однозначное и изотонное в обоих направлениях, называется *изоморфизмом* (или *изоморфизмом по упорядоченности*) множества A на множество A'; в этом случае A и A' называются *изоморфными* (*изоморфными по упорядоченности*). Если взаимно однозначное соответствие между A и A' меняет порядок (т. е. $a \leqq b$ тогда и только тогда, когда $a' \geqq b'$), то оно называется *дуальным изоморфизмом*.

Предположим, что два частичных порядка $\leqq_1$ и $\leqq_2$ определены на одном и том же множестве A. Тогда $\leqq_2$ является *продолжением* $\leqq_1$, если $a \leqq_1 b$ влечет за собой $a \leqq_2 b$ для всех a, $b \in A$.

A имеет *тривиальный порядок*, если из $a \leqq b$ следует, что $a = b$ для всех a, $b \in A$ (т. е. $a < b$ никогда не выполняется). Отношение порядка $\leqq$ называется *линейным порядком* (или просто *порядком*) в A, а множество A — *линейно упорядоченным множеством* (сокращенно *л. у. множество*), просто *упорядоченным* или *цепью*, если в дополнение к Р1 — Р3 выполнено также условие

Р4. Для всех a, $b \in A$ либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$.

Подмножества л. у. множества являются л. у. множествами относительно индуцированного частичного порядка.

Верхней (*нижней*) *гранью* подмножества B множества A является такой элемент $u \in A$ ($v \in A$), что $b \leqq u$ ($b \geqq v$) для каждого $b \in B$. Подмножество B называется *ограниченным* (в A), если A содержит как верхнюю, так и нижнюю его грани. Множество всех верхних (нижних) граней подмножества B будет обозначаться символом $U(B)$ $(L(B))$. Если B состоит из элементов $x, y, \ldots$, то мы будем часто писать $U(B) = U(x, y, \ldots)$ и $L(B) = L(x, y, \ldots)$. Если B — пустое множество, то $U(B) = L(B) = A$, если же B не имеет верхней грани в A, то $U(B) = \varnothing$.

Заметим, что включение $B \subseteq C$ влечет за собой соотношения $U(B) \supseteq U(C)$ и $L(B) \supseteq L(C)$. Кроме того, $L(U(B)) \supseteq B$ и $U(L(B)) \supseteq B$ и, таким образом,

$$U(L(U(B))) = U(B) \quad \text{и} \quad L(U(L(B))) = L(B).$$

Ч. у. множество A, удовлетворяющее условию

Р5. Для любых a, $b \in A$ множество $U(a, b)$ непусто,

или двойственному условию

Р6. Для любых a, $b \in A$ множество $L(a, b)$ непусто, называется соответственно *u*- или *l-направленным*. Из условия Р5 следует, очевидно, что если B — конечное подмножество в A, то $U(B)$ непусто. Говорят, что A — *направленное множество* (или что оно обладает *свойством Мура — Смита*), если оно удовлетворяет обоим условиям Р5 и Р6[1].

Ч. у. множество A называется $\vee$-*полуструктурой* или $\wedge$-*полуструктурой*, если оно удовлетворяет условию

Р7. Для любых a, $b \in A$ существует такое $c \in A$, что $U(a, b) = U(c)$,

или соответственно

---

[1] Обобщенные интервалы были рассмотрены Берджессом [1].

[1] Часто эта терминология применяется для множеств, называемых автором *u*-направленными. См., например, Биркгоф [3]. — *Прим. перев.*

P8. Для любых $a, b \in A$ существует такое $d \in A$, что $L(a, b) = L(d)$.

Тогда элементы

$$c = a \vee b \text{ и } d = a \wedge b$$

(если они существуют) однозначно определены в A и называются соответственно *объединением* (или *наименьшей верхней гранью*) и *пересечением* (или *наибольшей нижней гранью*)[1] элементов a и b.

Если множество A удовлетворяет обоим условиям P7 и P8, то A называется *структурой*[2]. Структура может быть также определена как алгебраическая система, в которой две операции $\vee$ и $\wedge$ определены так, что

$$\begin{array}{lll}
\text{L1.} & a \vee a = a & \text{и} \quad a \wedge a = a, \\
\text{L2.} & a \vee b = b \vee a & \text{и} \quad a \wedge b = b \wedge a, \\
\text{L3.} & (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) & \text{и} \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \\
\text{L4.} & (a \vee b) \wedge a = a & \text{и} \quad (a \wedge b) \vee a = a
\end{array}$$

для всех $a, b, c \in A$. Действительно, объединение $a \vee b$ и пересечение $a \wedge b$ элементов a и b удовлетворяют условиям L1 — L4. Если же на некотором множестве A операции $\vee$ и $\wedge$ обладают свойствами L1 — L4, то, положив $a \leqq b$ тогда и только тогда, когда $a \vee b = b$ (или, что равносильно, $a \wedge b = a$), мы превращаем A в ч. у. множество, в котором выполнены условия P7 и P8.

Говорят, что л. у. множество W *вполне упорядочено*, если каждое непустое подмножество V из W содержит наименьший элемент, т. е. такой элемент u, что $u \leqq v$ для каждого $v \in V$. Аксиома выбора будет предполагаться справедливой для всех множеств. Тогда по теореме Цермело каждое множество можно вполне упорядочить. Равносильным утверждением является лемма Цорна: если каждое подмножество ч. у. множества A, которое является цепью относительно индуцированного частичного порядка, имеет верхнюю грань в A, то A содержит элемент x, максимальный в том смысле, что если $y \in A$ и $x \leqq y$, то $y = x$.

---

[1] Мы будем пользоваться обычным сокращением наим. в. г. и наиб. н. г.

[2] Нам понадобятся некоторые результаты теории структур; читатель отсылается за ними к Биркгофу [3].

2. Частичный порядок в алгебраических системах

Как обычно, под *алгебраической системой* мы понимаем множество A, в котором определены операции f_α, удовлетворяющие некоторым законам[1]. Таким образом, каждая f_α является однозначной функцией, отображающей декартово произведение $A \times \ldots \times A$ (скажем, с $n = n(\alpha)$ компонентами) в A. Понятия изоморфизма, гомоморфизма и т. д. двух алгебраических систем с одними и теми же операциями будут пониматься в обычном смысле.

Функция $g(x)$, отображающая ч. у. множество A в ч. у. множество A', называется *изотонной*, если $x \leqq y$ в A влечет за собой $g(x) \leqq g(y)$ в A', и *антитонной*, если $x \leqq y$ в A влечет $g(x) \geqq g(y)$ в A'. Функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ более чем одной переменной может быть изотонной по некоторым из переменных, антитонной по другим, изотонной и антитонной одновременно по третьим[2] и, разумеется, может не быть ни изотонной, ни антитонной по остальным переменным.

Следующая формулировка монотонности является достаточно общей и подходит для всех случаев, которые будут здесь рассматриваться.

Мы будем говорить, что операция f алгебраической системы A удовлетворяет *закону монотонности с областью монотонности*[3] C, если:

1. $f(x_1, \ldots, x_n) \in C$ всякий раз, когда $x_1, \ldots, x_n \in C$.

2. f либо изотонна, либо антитонна, либо изотонна и антитонна одновременно по переменному x_i для каждого i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, * если все другие переменные остаются фиксированными в C *.

В соответствии с тем, какая из этих трех альтернатив имеет место, f будет называться операцией *типа* $\uparrow$, $\downarrow$ или $\updownarrow$ по переменному x_i. Мы будем говорить, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет тип $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ в области C, если γ_i ($\uparrow$,

---

[1] Мы можем удовлетвориться этим наивным определением алгебраической системы, так как для наших целей нет необходимости давать более точное определение.

[2] Если A—u-направленное или l-направленное множество, то эта третья альтернатива означает, что функция не зависит от рассматриваемых здесь переменных.

[3] Область монотонности—всегда непустое подмножество в A.

$\downarrow$ или $\updownarrow$) обозначает тип f по переменному x_i. Если никакое γ_i не равно $\updownarrow$, то операция f *не вырождена* в C.

Под *частично упорядоченной алгебраической системой* мы будем понимать множество A, удовлетворяющее условиям: (i) A — алгебраическая система; (ii) A — ч. у. множество; (iii) каждая операция f_α из A удовлетворяет некоторому закону монотонности.

Нас будут преимущественно интересовать группы, кольца и полугруппы, поэтому мы выведем теперь из приведенных определений некоторые следствия для бинарных операций.

a) Ассоциативная операция $f(x, y)$, для которой операция $g(x, y, z) = f(f(x, y), z)$ (рассматриваемая как тернарная операция) не вырождена, должна иметь тип $(\uparrow, \uparrow)$ в любой области монотонности C. Предположим, наоборот, что $f(x, y)$ имеет тип $\downarrow$ по x. Тогда $g(x, y, z)$ имеет тип $\uparrow$ по x, несмотря на то, что $f(x, f(y, z))$ имеет, очевидно, тип $\downarrow$ по x. Те же самые рассуждения применимы и к y.

b) Каждая операция $f(x, y)$, обладающая нейтральным элементом e (т. е. таким элементом, что $f(e, x) = f(x, e) = x$ для всех $x \in A$), имеет тип $(\uparrow, \uparrow)$ в любой области монотонности C, содержащей e. Действительно, $x_1 < x_2$ влечет за собой $f(e, x_1) < f(e, x_2)$ и $f(x_1, e) < f(x_2, e)$.

c) Если $f(x, y)$ имеет тип $(\uparrow, \uparrow)$ и $g(x)$ — операция правого обращения в том смысле, что $f(x, g(x))$ равно фиксированному элементу e из A для каждого $x \in A$, то $g(x)$ имеет тип $\downarrow$ в любой области C.

Мы видим, следовательно, что в лупах, группах, полугруппах (с некоторыми неинтересными исключениями) и кольцах с единицей (необязательно ассоциативных) умножение и сложение имеют тип $(\uparrow, \uparrow)$ в каждой области монотонности, в то время как обращение имеет тип $\downarrow$, а вычитание — тип $(\uparrow, \downarrow)$.

Таким образом, в упомянутых случаях указанное здесь определение частичного порядка является единственно разумным в свете нашего общего определения частично упорядоченных алгебраических систем. Однако в квазигруппах и тем более в группоидах операция может иметь тип $(\uparrow, \downarrow)$ или $(\downarrow, \downarrow)$, как показывает пример целых чисел, если определить операцию $\circ$ посредством равенств $x \circ y = x - y$ и $x \circ y = -x - y$ соответственно.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

Глава

II

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

1. Определения

Частично упорядоченной группой (ч. у. группой) называется такое множество G, что:

G1. G — группа относительно операции умножения[1]),

G2. G — ч. у. множество с отношением порядка $\leqq$,

G3. Справедлив закон монотонности[2]) с областью монотонности G:

если $a \leqq b$, то $ca \leqq cb$ и $ac \leqq bc$ для всех $c \in G$.

Так как группа содержит нейтральный элемент[3]) e и выполняется закон сокращения, любое из следующих условий эквивалентно условию G3:

(1) если $a \leqq b$, то $cad \leqq cbd$ для всех $c, d \in G$;

(2) если $a < b$, то $ca < cb$ и $ac < bc$ для всех $c \in G$ (иначе говоря, отображения $x \longrightarrow cx$ и $x \longrightarrow xc$ для любого $c \in G$ взаимно однозначны и изотонны);

(3) если $a < b$, то $cad < cbd$ для всех $c, d \in G$.

Используя транзитивность отношения $\leqq$, легко показать, что следующие условия эквивалентны предыдущим:

(4) если $a \leqq b$ и $a' \leqq b'$, то $aa' \leqq bb'$;

(5) если $a \leqq b$ и $a' < b'$, то $aa' < bb'$ и $a'a < b'b$.

Отметим еще несколько непосредственных следствий из нашего определения:

(6) если $a \leqq b$, то $a^{-1} \geqq b^{-1}$ [если $a < b$, то $a^{-1} > b^{-1}$];

(7) для всех $a, b \in G$ множества $U(a)$ и $U(b)$, рассматриваемые как ч. у. множества, изоморфны; этот изоморфизм может быть установлен, например, при помощи соответствия $x \longrightarrow ba^{-1}x$;

---

[1]) В большинстве случаев удобнее пользоваться мультипликативной, а не аддитивной терминологией, несмотря на то, что формальные правила больше напоминают правила сложения.

[2]) Он часто называется *законом однородности*.

[3]) e будет всюду обозначать нейтральный элемент группы.

(8) для всех $a \in G$ множества $U(a)$ и $L(a)$ дуально изоморфны как ч. у. множества; таким изоморфизмом будет, например, соответствие $x \longrightarrow ax^{-1}a$;

(9) если G — ч. у. группа, то она останется таковой и тогда, когда ее частичный порядок заменится двойственным.

Заслуживают упоминания следующие обобщения понятия ч. у. группы.

Мацусита [1] и Зайцева [2] рассматривали случай, когда предполагается только половина закона монотонности G3. Сравни также Конрад [10], Кон [1], Конторович и Кокорин [1].

Несколько более общее понятие, чем ч. у. группа, изучалось Бриттоном и Шеппардом [1] под названием «почти упорядоченная группа».

Если ослабить условие G2, потребовав, чтобы G было предупорядоченным множеством, то G3 означает, что

$$x \sim y \text{ тогда и только тогда, когда}$$

$$xy^{-1} \sim e \text{ (или же } y^{-1}x \sim e\text{)},$$

и что

$$x_1 \sim y_1, \quad x_2 \sim y_2 \text{ влечет } x_1x_2 \sim y_1y_2.$$

Отсюда сразу получается, что класс эквивалентности N, содержащий e, является нормальным делителем в G, а другие классы эквивалентности — смежными классами по N. Ч. у. множество классов эквивалентности будет не чем иным, как факторгруппой G/N, которая является теперь ч. у. группой.

Если a, $b \in G$ имеют верхнюю (нижнюю) грань $c \in G$, то обратные им элементы a^{-1} и b^{-1} имеют нижнюю (верхнюю) грань. Значит, ч. у. группа, являющаяся u-направленным (l-направленным) множеством, непременно будет l-направленным (u-направленным) и, таким образом, просто направленным множеством. В этом случае мы будем называть G *направленной группой.*

Более того, если мы предположим просто, что в ч. у. группе G для некоторого фиксированного $a_0 \in G$ и каждого $b \in G$ существует верхняя (нижняя) грань, то G — направленная группа. В самом деле, если a_1 и b_1 произвольны и c — верхняя (нижняя) грань элементов a_0 и $b = a_0a_1^{-1}b_1$, то $a_1a_0^{-1}c$ будет верхней (нижней) гранью элементов a_1 и b_1.

Предложение 1 (Клиффорд [1]). *Если ч. у. группа G содержит такой элемент $a \geqq e$, что $U(a)$ порождает G, то G — направленная группа.*

Обратно, если G — направленная группа, то при любом $a \in G$ каждый элемент b из G может быть записан в виде 1)

$$b = yz^{-1}, \text{ где } y,\ z \in U(a).$$

Достаточно проверить первую часть для $a = e$, так как $U(e) = a^{-1}U(a)$ содержится в подгруппе, порожденной множеством $U(a)$. Если $\{U(e)\} = G$, то любой $b \in G$ имеет вид $b = x_1 \cdot \ldots \cdot x_r$, где x_i или же $x_i^{-1} \in U(e)$. Так как произведение двух элементов из $U(e)$ и сопряженный для каждого элемента из $U(e)$ также принадлежат множеству $U(e)$, то элемент b может быть записан в виде $b = yz^{-1}$, где y, $z \in U(e)$. Тогда $y \geqq e$ и $y \geqq b$, т. е. e и каждый b имеют верхнюю грань и потому G — направленная группа.

Обратно, если G — направленная группа, то e и $b \in G$ имеют верхнюю грань $c \in G$. Пусть $y = ca$ и $z = (b^{-1}c)a$. Тогда y, $z \in U(a)$ и $b = yz^{-1}$ имеет указанный вид, что и требовалось доказать.

Если элементы a, $b \in G$ имеют наим. в. г. $a \vee b$ в G, то обратные им элементы a^{-1} и b^{-1} обладают наиб. н. г. $a^{-1} \wedge b^{-1}$ в G. Действительно, $(a \vee b)^{-1} \leqq a^{-1}$ и b^{-1}, так как $a \vee b \geqq a$, b, если же $x \leqq a^{-1}$, b^{-1}, то $x^{-1} \geqq a$, b, откуда $x^{-1} \geqq a \vee b$, $x \leqq (a \vee b)^{-1}$. Значит $(a \vee b)^{-1}$ является наиб. н. г. элементов a^{-1} и b^{-1}. Следовательно, ч. у. группа G, являющаяся $\vee$-полуструктурой ($\wedge$-полуструктурой), будет в то же время и $\wedge$-полуструктурой ($\vee$-полуструктурой) и потому просто структурой, причем

$$a \wedge b = (a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \text{ и } a \vee b = (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}.$$

Ч. у. группа, являющаяся структурой относительно своего частичного порядка, будет называться *структурно упорядоченной группой* (*с. у. группой* 2)).

---

1) Это несколько уточненная форма результата Клиффорда.

2) Следуя Биркгофу [1], многие авторы используют сокращение *l-группа*.

Если порядок в G линейный, мы будем называть G *линейно упорядоченной группой* (*л. у. группой*).

Перечислим некоторые полезные элементарные правила действий над множествами[1] $U(\ldots, a_\alpha, \ldots)$ и $L(\ldots, a_\alpha, \ldots)$:

(i) $U(\ldots, a_\alpha, \ldots) = \bigcap\limits_\alpha U(a_\alpha)$;

(ii) $xU(\ldots, a_\alpha, \ldots)y = U(\ldots, xa_\alpha y, \ldots)$;

(iii) умножение[2] множеств $U(\ldots, a_\alpha, \ldots)$ ассоциативно;

(iv) $U(\ldots, a_\alpha, \ldots)^{-1} = L(\ldots, a_\alpha^{-1}, \ldots)$;

(v) $L(a, b) = aU(a, b)^{-1}b$;

(vi) $U(\ldots, a_\alpha, \ldots)\cdot U(\ldots, b_\beta, \ldots) \subseteq U(\ldots, a_\alpha b_\beta, \ldots)$;

(vii) $U(x)\cdot U(\ldots, a_\alpha, \ldots) = U(\ldots, xa_\alpha, \ldots)$;

справедливы также двойственные законы для всех a_α, b_β, x, $y \in G$. Доказательства элементарны и могут быть предоставлены читателю.

Если ч. у. группа в то же время является операторной группой с областью операторов Ω, то предполагается, что операторы $\omega \in \Omega$ сохраняют порядок, т. е.

из $a \leqq b$ следует $a^\omega \leqq b^\omega$ для каждого $\omega \in \Omega$.

Ч. у. группа G называется *архимедовой*, если

из $a^n < b$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ следует $a = e$,

т. е. если $\{e\}$ — единственная подгруппа, обладающая верхней гранью в G[3].

---

[1] Здесь множество элементов a_α может быть конечным или бесконечным.

[2] Умножение множеств U определяется как умножение подмножеств в группе; аналогично определяется и U^{-1}.

[3] Другое возможное определение архимедовости требует, чтобы выполнялось условие:

если $a > e$ и $b > e$, то $a^n > b$ для подходящего $n \geqq 1$.

Вообще говоря, ни одно из этих двух свойств архимедовости не влечет другое, но в с. у. группах из свойства, данного здесь, вытекает свойство, сформулированное в тексте, в то время как для л. у. групп эти два определения, очевидно, эквивалентны. Ср. также Жаффар [4].

Ч. у. группа называется *вполне целозамкнутой*, если

из $a^n < b$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следует $a \leqq e$.

Любая вполне целозамкнутая группа архимедова. Ибо если $a^n < b$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то $a^n < b$ и $(a^{-1})^n < b$ $(n = 1, 2, \ldots)$, откуда, в силу полной целозамкнутости, $a \leqq e$ и $a^{-1} \leqq e$. Таким образом, $a = e$. Обратное утверждение в общем случае неверно (см. Эверетт и Улам [1]. ∗Ср. также пример 3c из п. 3.∗), однако оно верно в с. у. группах (см. гл. V, п. 1).

2. Положительный конус

Элемент a ч. у. группы G называется *положительным* (*целым*), если $a \geqq e$, *строго положительным* (*строго целым*), если $a > e$, и *отрицательным*, если $a \leqq e$. Когда групповая операция называется сложением и 0 обозначает нейтральный элемент, положительность имеет обычный смысл $a \geqq 0$.

Множество $P = P(G) = G^+$ положительных (целых) элементов из G, т. е. $P = U(e)$, называется *положительным конусом* (или *целой частью*) группы G. Это понятие является естественным инструментом при изучении частичных порядков. Его роль станет вполне ясной из гл. III.

Частичный порядок $\leqq$ вполне определяется соответствующим положительным конусом P, так как

$$a \leqq b \text{ эквивалентно } ba^{-1} \in P \ (\text{и } a^{-1}b \in P). \qquad (1)$$

Ввиду этого мы можем говорить кратко «частичный порядок P» вместо «частичный порядок с положительным конусом P».

Легко видеть, что рефлексивность отношения $\leqq$ эквивалентна условию $e \in P$, его антисимметричность — тому, что $P \cap P^{-1}$ не содержит элемента, отличного от e, транзитивность — включению $PP \subseteq P$, в то время как закон монотонности эквивалентен тому, что из $ba^{-1} \in P$ следует $(cbd)(cad)^{-1} = c(ba^{-1})c^{-1} \in P$, т. е. $cPc^{-1} \subseteq P$. Мы можем пользоваться условием (1), чтобы определить отношение $\leqq$ через P, если оно задано.

Теорема 2. *Подмножество P группы G является положительным конусом некоторого частичного порядка в G тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим трем условиям:*

α. $P \cap P^{-1} = e$,

β. $PP \subseteq P$,

γ. $xPx^{-1} \subseteq P$ *для всех* $x \in G$[1].

Другими словами, P является инвариантной подполугруппой в G, содержащей e, но не содержащей никакого другого элемента вместе с его обратным.

Этот результат может быть дополнен.

Предложение 3[2]. (a) *G тогда и только тогда будет направленной группой, когда P порождает G;*

(b) *G тогда и только тогда будет с. у. группой, когда P порождает G и P является структурой относительно индуцированного порядка;*

(c) *G тогда и только тогда будет л. у. группой, когда*

$$P \cup P^{-1} = G.$$

Утверждение (a) содержится в предложении 1, в то время как (c) непосредственно следует из того, что G является л. у. в точности тогда, когда для каждого $a \in G$ либо $a \geqq e$, либо $a^{-1} \geqq e$. Необходимость (b) получается из (a) и из того, что P, очевидно, является подструктурой. Наконец, достаточность (b) можно показать, проверив, что $(ac^{-1} \wedge bc^{-1})c$ является наиб. н. г. для $a, b \in G$, где c — нижняя грань элементов a, b (заметим, что ac^{-1}, bc^{-1} и $ac^{-1} \wedge bc^{-1} \in P$).

Заметим, что частичный порядок в G будет тривиальным тогда и только тогда, когда P состоит только из e.

Брак [1] заметил, что в л. у. лупе G множества P и $N = [x \in G \mid x \leqq e]$ имеют следующие характеристические свойства: $P \cap N = e$; $P \cup N = G$; $PP \subseteq P$; $NN \subseteq N$; P (и, следовательно, N) инвариантно в G.

---

[1] Заметим, что в γ включение, очевидно, может быть заменено равенством, и ввиду α то же самое верно для β.

[2] Пункт (a) принадлежит Клиффорду [1], (b) Биркгофу [3]. Другая форма условия (c): P порождает G и линейно упорядочено.

Обратимся теперь к внутренней характеристике положительного конуса. В теореме 2 предполагалось, что P погружено в группу G. В следующей теореме мы избавимся от этого предположения.

Теорема 4 (Биркгоф [1][1]). *Произвольная полугруппа P тогда и только тогда является положительным конусом некоторой ч. у. группы G, когда выполнены условия:*

(i) *в P справедлив закон сокращения;*

(ii) *P содержит нейтральный элемент e;*

(iii) *из $ab = e$ $(a, b \in P)$ следует $a = b = e$;*

(iv) *$Pa = aP$ для всех $a \in P$.*

Мы можем ограничиться доказательством достаточности. Вложим полугруппу P, обладающую свойствами (i)—(iv), в группу G следующим образом. Если даны a, $x \in P$, то по свойствам (iv) и (i) существует ровно один такой элемент $x_a \in P$, что $xa = ax_a$. Соответствие $x \longrightarrow x_a$ (с фиксированным a) является взаимно однозначным и удовлетворяет условиям

$$\text{A) } a_a = a, \quad \text{B) } (xy)_a = x_a y_a, \quad \text{C) } (x_a)_b = x_{ab}.$$

Определим G как множество всех пар (a, b), $a, b \in P$, подчиненное следующим правилам:

a) равенство $(a, b) = (c, d)$ имеет место тогда и только тогда, когда $ad_b = cb$;

b) умножение: $(a, b)(c, d) = (ac_b, db)$.

В силу A), равенство рефлексивно. Оно симметрично, так как из $ad_b = cb$ следует $ad_b d = cbd$. Далее, в силу A)—C), имеем

$$d_b d = dd_{bd} \text{ и } bd = (bd)_{bd} = b_{bd} d_{bd} = b_d d_{bd};$$

сокращая на d_{bd}, мы получаем $ad = cb_d$, т. е. $(c, d) = (a, b)$. Для того чтобы доказать транзитивность, положим $(a, b) = (c, d)$ и $(a, b) = (g, h)$. Тогда из $ah_b = gb$ следует $ah_b d_b = gbd_b$, где левая часть равна $ad_b h_{db} = cbh_{db} = ch_d b$, а правая — gdb. Сокращая на b, получим $ch_d = gd$, т. е. $(c, d) = (g, h)$. Равные элементы (a, b) и (c, d) после умножения на (g, h) дают в произведении

---

[1] Для с. у. групп этот результат принадлежит Дж. Нейману (см. Биркгоф [1]).

снова равные элементы. Из $ad_b = cb$ мы получаем, с одной стороны, что

$$ad_b g_{db} h_b = cbg_{db} h_b, \quad ag_b (hd)_{hb} = cg_d hb,$$

т. е. $(a, b)(g, h) = (c, d)(g, h)$, и, с другой —

$$g(ad_b)_h h_{bh} = g(cb)_h h_{bh}, \ ga_h (dh)_{bh} = gc_h bh,$$

т. е. $(g, h)(a, b) = (g, h)(c, d)$. Ассоциативность умножения является простым следствием условий В) и С). Сразу видно, что (a, a) — нейтральный элемент относительно умножения, а (b, a) — обратный к (a, b) элемент. Следовательно, G — группа, в которую отображение $a \longrightarrow (a, e)$ изоморфно погружает P (после этого пара (a, b) может быть интерпретирована как ab^{-1}). Применение теоремы 2 завершает доказательство.

Назовем элемент $a \in G$ *обобщенно периодическим*, если существуют такие сопряженные с a элементы $a_i = x_i^{-1} a x_i$, что $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = e$. Если a принадлежит центру G, то обобщенная периодичность эквивалентна свойству иметь конечный порядок.

Предложение 5. *Положительный конус P не содержит никакого обобщенно периодического элемента, отличного от e.*

Если $a \in P$ является обобщенно периодическим элементом, то $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = e$, где $a_i = x_i^{-1} a x_i \in P$. Значит, e равно произведению элементов из P. Но это возможно только тогда, когда все множители равны e и, следовательно, когда $a = e$.

Мы будем называть частичный порядок в G *изолированным*, если из $a^n \geqq e$ для некоторого натурального числа n следует $a \geqq e$, и *строго изолированным*, если из $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \geqq e$ вытекает $a_i \geqq e$, где a_i — опять элементы, сопряженные с a. Линейный порядок строго изолирован.

Мы получаем такие следствия: группа, в которой каждый элемент обобщенно периодичен (в частности, периодическая группа), допускает только тривиальный порядок. Группа, допускающая (строго) изолированный частичный порядок, не содержит (обобщенно) периодических элементов.

Если $\leqq_1$ и $\leqq_2$ — два частичных порядка на одной и той же группе G и второй является продолжением первого, то соответствующие положительные конусы P_1 и P_2 удовлетворяют соотношению $P_1 \subseteq P_2$. Верно также и обратное утверждение.

Отметим также, что *условием, необходимым и достаточным для того, чтобы частичный порядок P группы G был и частичным порядком группы H, содержащей G, является инвариантность P относительно всех внутренних автоморфизмов группы H.*

3. Примеры

Теперь мы проиллюстрируем понятие ч. у. группы рядом примеров, на некоторые из которых мы будем иногда ссылаться[1]. P всюду будет обозначать положительный конус группы G.

1. Пусть G — аддитивная группа всех целых или рациональных, или же действительных чисел, а отношение $\leqq$ имеет обычный смысл. Тогда G является л. у. группой с архимедовым порядком.

2. Пусть G — аддитивная группа комплексных (или же комплексных рациональных) чисел и $x + yi \in P$, если либо $x > 0$, либо $x = 0$ и $y \geqq 0$. Тогда G — л. у. группа с неархимедовым отношением порядка.

3. Пусть G — та же самая группа, но P определяется иначе:

(a)[2] $x + yi \in P$, если $x \geqq 0$ и $y \geqq 0$,

(b) $x + yi \in P$, если $x \geqq 0$ и $y > 0$, или $x + iy = 0$,

(c) $x + yi \in P$, если $x > 0$ и $y > 0$, или $x + yi = 0$,

(d) $z = x + yi \in P$, если $\arg z$ принадлежит замкнутому (или полузамкнутому, или же открытому) интервалу $[\alpha, \beta]$, где α и β — фиксированные углы, удовлетворяющие условию $0 \leqq \beta - \alpha < \pi$.

---

[1] Большая часть этих примеров принадлежит Биркгофу [1] и [3].

[2] Аддитивная группа векторов n-мерного евклидова пространства может быть превращена в с. у. группу аналогичным способом.

Все эти группы направленные и архимедовы, первая, кроме того, с. у.

4. Пусть G — мультипликативная группа всех положительных рациональных чисел и P — множество целых чисел. Тогда $a \leqq b$ означает, что b/a — целое число, т. е. b делится на a. Тогда G — с. у. группа, так как в P существуют н. о. д. и н. о. к.; она будет архимедовой.

5. Пусть G — мультипликативная группа всех ненулевых главных идеалов (целых и дробных) коммутативной области целостности R с единицей, а P состоит из всех целых главных идеалов. Группа G направленная, но, вообще говоря, не с. у. группа. (Она будет таковой, если справедлива теорема единственности разложения на множители.)

Если G определяется как мультипликативная группа поля частных области R и P состоит из ненулевых элементов из R, то получается предупорядоченная группа.

6. Пусть G — аддитивная группа всех действительных функций f в интервале $[0, 1]$; положим $f \in P$, если $f(x) \geqq 0$ для всех x на отрезке $[0, 1]$. Можно взять только непрерывные функции или функции с ограниченной вариацией на отрезке $[0, 1]$. В каждом случае мы получаем с. у. группу.

Другой пример дает та же самая группа, но с положительным конусом P, который состоит из всех неубывающих функций f (т. е. таких функций, что из $x \leqq y$ следует $f(x) \leqq f(y)$), удовлетворяющих условию $f(0)=0$.

7. G — аддитивная группа всех полиномиальных функций с действительными коэффициентами и областью определения $[0, 1]$, P содержит только неотрицательные на $[0, 1]$ функции. (Это направленная, но не с. у. группа.)

8. Пусть G — множество всех пар (x, y) действительных чисел с законом композиции

$$(x_1, y_1)\circ(x_2, y_2) = (x_1+x_2,\ e^{x_2}y_1+y_2);$$

пусть, далее, $(x, y) \in P$ означает, что либо $x>0$, либо $x=0$ и $y \geqq 0$. Тогда G — л. у. группа, не являющаяся вполне целозамкнутой.

Другой реализацией этой же группы G будет группа всех линейных преобразований

$x \longrightarrow ax+b$ с действительными a, b, $a > 0$

и обычным законом композиции (изоморфизм с предыдущей группой задается сопоставлением паре $(\ln a, b)$ преобразования $x \longrightarrow ax+b$). Преобразование $x \longrightarrow ax+b$ принадлежит P, если либо $a>1$, либо $a=1$ и $b \geqq 0$.

9. Пусть G — группа действительных матриц вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

относительно умножения, а P состоит из матриц, в которых либо $a>0$, либо $a=0$, $b>0$, либо $a=b=0$, $c \geqq 0$.

10. Предположим, что G — группа с образующими a, b, c и определяющими соотношениями

$$ab=ba, \quad ac=cb, \quad bc=ca.$$

Каждый[1] ее элемент имеет единственную запись вида $a^n b^m c^k$. Положим $a^n b^m c^k \geqq e$, если $k>0$ или $k=0$ и $n \geqq 0$, $m \geqq 0$; тогда G становится с. у. группой.

4. Подгруппы и факторгруппы

Частичный порядок P на G индуцирует частичный порядок на подгруппе H группы G, относительно которого H, очевидно, снова будет ч. у. группой. Положительный конус $P(H)$ этой ч. у. группы H удовлетворяет условию

$$P(H) = H \cap P(G).$$

Это равенство могло бы быть принято в качестве определения индуцированного частичного порядка на H.

Ясно, что индуцированный частичный порядок будет линейным, если первоначальный порядок линеен. Однако аналогичное утверждение уже не обязано быть верным для направленного или структурного порядка[2].

---

[1] Заметим, что элементы a, b, c^2 порождают абелеву подгруппу индекса 2, которая будет прямым произведением циклических групп $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c^2\}$.

[2] Предположим, что G — группа примера 3а и H — подгруппа, порожденная элементом $-1+i$. Тогда H тривиально упорядочена. Заметим, что, даже если подгруппа с. у. группы является структурой относительно индуцированного частичного порядка, она не обязана быть подструктурой.

Выпуклой подгруппой C группы G называется подгруппа, являющаяся выпуклым подмножеством в G. Ниже следуют некоторые из их элементарных свойств.

(a) Подгруппа C тогда и только тогда будет выпуклой подгруппой группы G, когда $P(C)$ — выпуклое подмножество в $P(G)$.

(b) Выпуклая подгруппа выпуклой подгруппы является выпуклой подгруппой всей группы.

(c) Пересечение выпуклых подгрупп также будет выпуклой подгруппой. Мы можем говорить, следовательно, о выпуклой подгруппе, порожденной подмножеством X из G; она будет обозначаться символом $\{X\}_{\Box}$[1].

(d) Если A — подгруппа в G, то

$$\{A\}_{\Box} = AP \bigcap AP^{-1},$$

где P — частичный порядок группы G. Чтобы доказать это, заметим, что из очевидного равенства $AP = PA$ следует, что как AP, так и AP^{-1} будут подполугруппами в G и AP^{-1} состоит из элементов, обратных элементам из AP. Таким образом, $AP \bigcap AP^{-1}$ является подгруппой. Если $e \leqq x \leqq c$ и $c \in AP \bigcap AP^{-1}$, то $x = ex \in AP$ и $x = c(x^{-1}c)^{-1} \in AP^{-1} \cdot P^{-1} = AP^{-1}$, что и доказывает выпуклость. Каждый элемент $ax = by^{-1}$ $(a,\ b \in A,\ x,\ y \in P)$ пересечения принадлежит $\{A\}_{\Box}$, так как $a \leqq ax = by^{-1} \leqq b$.

(e) Всякий раз, когда $P(\{X\}) = e$, мы имеем $\{X\}_{\Box} = \{X\}$. В частности, $\{a\}_{\Box} = \{a\}$ при условии, что $a^n \| e$ при $a^n \neq e$.

(f) Предположим, что подгруппа C является направленной относительно индуцированного в ней частичного порядка. Она будет выпуклой тогда и только тогда, когда из $c \in C$ и $c^{-1} \leqq x \leqq c$ следует $x \in C$.

Частично упорядоченная группа, не содержащая никаких выпуклых нормальных делителей, кроме тривиальных, называется *o-простой*. Например, аддитивная группа действительных чисел является o-простой; существуют даже некоммутативные л. у. o-простые группы[2].

---

[1] Заметим, что выпуклая подгруппа, порожденная инвариантным подмножеством, будет нормальным делителем.

[2] Это было показано Ригером [1] и Нейманом [1]. Чехата [1] дал пример алгебраически простой л. у. группы.

Следующий пример принадлежит Клиффорду [2]. Предположим, что G — группа, порожденная символами $g(r)$, заданными для каждого рационального числа r, и удовлетворяющая определяющим соотношениям

$$g(r)\,g(s) = g\left(\frac{1}{2}(r+s)\right) g(r) \quad \text{при } r > s.$$

Тогда каждый элемент $a \neq e$ из G может быть единственным образом записан в каноническом виде

$$a = g(r_1)^{m_1} \ldots g(r_k)^{m_k} \quad (r_1 < \ldots < r_k),$$

где $m_i \neq 0$. Положим $a \in P$, если либо $a = e$, либо $m_k > 0$. Тогда G — л. у. группа. Если H — выпуклый нормальный делитель группы G и $e < a \in H$, то, записывая a в каноническом виде, мы получим $e < g(r_k) < a^2$, откуда $g(r_k) \in H$. Если $s < r$ и $g(r) \in H$, то $e < g(s) < g(r)$, $g(s) \in H$. Если же $s > r$ и $g(r) \in H$, то, полагая $t = 2s - r$, мы получаем

$$g(t)\,g(r)\,g(t)^{-1} = g\left(\frac{1}{2}(r+t)\right) = g(s) \in H.$$

Таким образом, $H = G$ и группа G является o-простой.

Полезно будет назвать направленный выпуклый нормальный делитель *o-идеалом*.

Факторгруппу G/N ч. у. группы G по выпуклому нормальному делителю N также можно сделать ч. у. группой, определив отношение порядка между смежными классами по следующему правилу: $aN \leqq bN$ тогда и только тогда, когда $a' \leqq b'$ для некоторых $a' \in aN$ и $b' \in bN$[1]. Нижеследующее определение эквивалентно данному и показывает его естественность: $P(G/N)$ является образом $P(G)$ при естественном гомоморфизме G на G/N. Этот частичный порядок в G/N может быть снова назван *индуцированным*[2].

Естественное соответствие между подгруппами из G/N и подгруппами группы G, содержащими N, сохраняет выпуклость.

---

[1] Тогда для каждого $a' \in aN$ существует такое $b' \in bN$, что $a' \leqq b'$.

[2] Круль [2] использовал два вида частичных порядков в факторгруппе.

Важно отметить следующее

Предложение 6 (Леви [3]). *Если N — нормальный делитель абстрактной группы G и как N, так и G/N частично упорядочены, то необходимым и достаточным условием существования в G частичного порядка, индуцирующего заданный порядок в N и G/N, является инвариантность $P(N)$ относительно всех внутренних автоморфизмов G.*

Необходимость очевидна. Достаточность может быть доказана путем непосредственной проверки того, что условия теоремы 2 выполняются для объединения $P(N)$ и тех смежных классов группы G по N, которые лежат в $P(G/N)$, но отличны от N[1].

Мы будем называть ч. у. группу G, частичный порядок которой получается из частичных порядков групп N и G/N описанным только что способом, *лексикографическим расширением* ч. у. группы N при помощи ч. у. группы G/N.

∗Особенно интересен тот случай, когда группа G является лексикографическим расширением при помощи л. у. группы G/N.

Теорема 6а (Леви [1]). *В ч. у. группе G выпуклые нормальные делители N, удовлетворяющие условиям*

(i) *группа G/N является л. у. группой относительно индуцированной упорядоченности;*

(ii) *группа G является лексикографическим расширением группы N при помощи группы G/N,*

образуют л. у. множество $\mathscr{H}$. Это множество $\mathscr{H}$ обладает минимальным элементом N_0, который содержится в каждом N, удовлетворяющем условиям (i) *и* (ii).

Группа N_0 может быть также описана как выпуклая подгруппа группы G, порожденная несравнимыми с единицей e элементами группы G.

Пусть N_0 обозначает выпуклую подгруппу, порожденную несравнимыми с e элементами группы G. Если $aN_0 \neq N_0$, то никакой элемент из aN_0 не может быть несравнимым с e, значит, все элементы из aN_0 будут либо больше, либо меньше чем e. Это доказывает условия (i) и (ii) для подгруппы N_0, которая, очевидно, будет нормальным делителем группы G. Допустим, что N — выпуклый нормальный делитель группы G, обладающий свойствами (i) и (ii). Если $aN \neq N$, то все элементы из N либо больше e, либо меньше e, откуда вытекает, что все несравнимые с e элементы группы G должны содержаться в N. Следовательно, $N_0 \subseteq N$ и, так как в л. у. группе G/N_0 выпуклые подгруппы образуют цепь, множество $\mathscr{H}$ в самом деле будет л. у.

Можно показать (Конрад), что N_0 будет l-идеалом группы G, если G — с. у. группа. N_0 порождается всеми элементами группы G, не являющимися слабыми единицами.∗

5. o-гомоморфизмы

Предположим, что G и H — ч. у. группы. Изотонный гомоморфизм G в H называется *o-гомоморфизмом*[1]). Изотонность гомоморфизма φ группы G в H эквивалентна тому, что φ отображает положительный конус $P(G)$ в положительный конус $P(H)$:

$$\varphi(P(G)) \subseteq P(H).$$

Если к тому же

$$\varphi(G) = H \quad \text{и} \quad \varphi(P(G)) = P(H),$$

то φ будет называться *o-эпиморфизмом G (на H)*[2]). Если же как φ, так и ему обратное отображение φ^{-1} являются o-эпиморфизмами, то φ называется *o-изоморфизмом*, а группы G и H — *o-изоморфными*. Это записывается символом

$$G \cong_o H.$$

o-изоморфизм G на себя называется *o-автоморфизмом*.

o-автоморфизмы ч. у. группы G образуют подгруппу $A_o(G)$ группы всех автоморфизмов группы G. Далее $A_o(G)$ может быть ч. у. группой в том случае, когда G — направленная группа; для этого мы положим $\alpha \geqq \iota$ для o-

---

[1]) Это, вообще говоря, не единственно возможное определение $P(G)$. Ср. Фукс [5].

[1]) Для систематического изучения o-гомоморфизмов (гомоморфизмов по упорядоченности) см. Шимбирёва [1] или Фукс [3].

[2]) Эта терминология заимствована из гомологической алгебры: важно различать между собой o-гомоморфизмы на и o-эпиморфизмы.

автоморфизма α и тождественного отображения ι группы G всякий раз, когда $a^{\alpha} \geqq a$ для всех $a \in P(G)$[1].

Теорема 7. *Нормальный делитель N ч. у. группы G тогда и только тогда является ядром некоторого о-гомоморфизма (о-эпиморфизма), когда он выпуклый. Если отображение φ является о-эпиморфизмом G на $\bar{G}$ с ядром N, то*

$$\bar{G} \cong_o G/N.$$

Если N является ядром о-гомоморфизма ψ группы G, то из $a \leqq x \leqq b$ $(a, b \in N)$ следует $\psi(e) = \psi(a) \leqq \psi(x) \leqq \leqq \psi(b) = \psi(e)$, т. е. $\psi(x) = \psi(e)$, $x \in N$ и, значит, N — выпуклая подгруппа. Если N выпукло, то естественный гомоморфизм G на G/N является, по определению частичного порядка на G/N, о-эпиморфизмом. Наконец, если φ удовлетворяет условиям теоремы, то соответствие $h \to \varphi^{-1}(h)$ является о-изоморфизмом между $\bar{G}$ и G/N.

На ч. у. группы переносятся не обе теоремы об изоморфизмах. Если B и C — подгруппы в G и C нормальна и выпукла в $\{B, C\}$, то, хотя $B \cap C$ нормальна и выпукла в B, $B/(B \cap C)$ и $\{B, C\}/C$, вообще говоря, не будут о-изоморфными. [Противоречащий пример: G — группа из примера 3b, B — действительные числа, C — мнимые числа; тогда $B/(B \cap C) \cong B$ упорядочена тривиально, а $\{B, C\}/C$ — линейно.] Однако отображение $x \to xC$ $(x \in B)$ группы $B/(B \cap C)$ на $\{B, C\}/C$, очевидно, изотонно.

Аналог же второй теоремы об изоморфизмах имеет место[2]: *если φ — некоторый о-эпиморфизм G на $\bar{G}$ и $\bar{C}$ — выпуклый нормальный делитель в $\bar{G}$, то $\varphi^{-1}(\bar{C}) = C$ — выпуклый нормальный делитель в G и*

$$G/C \cong_o \bar{G}/\bar{C}.$$

В самом деле, произведение φ и естественного отображения $\bar{G}$ на $\bar{G}/\bar{C}$ является о-эпиморфизмом и потому наше утверждение следует из теоремы 7.

---

[1] По поводу группы $A_o(G)$ см. Конрад [6] и [9] и Кон [1]. Ср. также Кон [1]. ✱Конрад [10] доказал, что любая группа перестановок упорядоченного множества, сохраняющих порядок, может быть правоупорядочена.✱

[2] См. Шимбирёва [1]. Л. у. случай см. Ригер [1].

Отметим, что аналог теоремы Шрейера об уплотнениях неверен: в приведенном выше примере последовательности выпуклых подгрупп $G \supset B \supset 0$ и $G \supset C \supset 0$ не имеют общего уплотнения, так как G/B, G/C и C — о-простые л. у. группы, а B — тривиально упорядочена.

Аналог шрейеровой проблемы расширения для случая ч. у. групп изучался автором [5]. Частные случаи рассматривали Лунстра [5] и Конрад [9]. По поводу проблемы расширения для с. у. абелевых групп см. Жаффар [7].

6. Прямые произведения

Если ч. у. группа G является прямым произведением своих подгрупп A_λ,

$$G = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda,$$

таких, что $P(G)$ состоит из всех тех элементов, компонента которых с индексом λ принадлежит $P(A_\lambda)$ для всех λ, то G будет называться *прямым* или *кардинальным произведением* ч. у. подгрупп A_λ, а $P(G)$ — прямым или кардинальным произведением конусов $P(A_\lambda)$.

Обратно, если нам заданы ч. у. группы A_λ $(\lambda \in \Lambda)$, то мы можем построить их прямое произведение и определить положительный элемент как такой элемент, все компоненты которого положительны. Исходные группы могут быть о-изоморфно погружены (естественным образом) в построенную группу в качестве выпуклых нормальных делителей. Подобные определения применяются к полному прямому произведению $\Pi^* A_\lambda$ ч. у. групп A_λ, а также к $\mathfrak{m}$-прямому произведению[1])

$$C = \prod_{\lambda \in \Lambda}^{(\mathfrak{m})} A_\lambda,$$

которое определяется как подгруппа полного прямого произведения, состоящая из векторов, мощность множества отличных от e компонент которых меньше $\mathfrak{m}$.

Следующие утверждения очевидны:

(a) $\mathfrak{m}$-прямое произведение л. у. групп не будет л. у., если оно содержит более одной нетривиальной компоненты.

---

[1] $\mathfrak{m}$ обозначает бесконечное кардинальное число. Если $\mathfrak{m} = \aleph_0$, мы получаем прямое произведение, если же $\mathfrak{m}$ превосходит мощность множества Λ, то полное прямое произведение.

(b) $\mathfrak{m}$-прямое произведение ч. у. групп тогда и только тогда будет с. у. (направленным), когда каждый сомножитель с. у. (направлен).

(c) Естественное отображение (проекция) $\Pi^{(\mathfrak{m})}A_\lambda$ на A_λ является o-эпиморфизмом.

Теорема 8 (Шимбирёва [1][1]). *Любые два $\mathfrak{m}$-прямых разложения*

$$G = \prod_{\lambda\in\Lambda}^{(\mathfrak{m})} A_\lambda = \prod_{\mu\in M}^{(\mathfrak{m})} B_\mu$$

направленной группы G имеют общее продолжение. Точнее, мы имеем

$$A_\lambda = \prod_{\mu\in M}^{(\mathfrak{m})} C_{\lambda\mu} \quad \textit{и} \quad B_\mu = \prod_{\lambda\in\Lambda}^{(\mathfrak{m})} C_{\lambda\mu},,$$

где $C_{\lambda\mu} = A_\lambda \cap B_\mu$.

В силу свойства (b), все A_λ, B_μ — также направленные группы. Если P — положительный конус в G, то

$$P_\lambda = A_\lambda \cap P \text{ и } Q_\mu = B_\mu \cap P$$

будут положительными конусами в A_λ и B_μ соответственно. Положим

$$R_{\lambda\mu} = P_\lambda \cap Q_\mu \text{ и } C_{\lambda\mu} = \{R_{\lambda\mu}\}.$$

Очевидно, что $C_{\lambda\mu} \subseteq A_\lambda \cap B_\mu$. Если $a \in P_\lambda$, то мы имеем $a = a_\mu b_\mu$, где

$$a_\mu \in B_\mu \quad \text{и} \quad b_\mu \in \prod_{\nu\neq\mu}^{(\mathfrak{m})} B_\nu$$

определены единственным образом, и $a_\mu = a_{\mu\lambda}\bar{a}_{\mu\lambda}$, $b_\mu = b_{\mu\lambda}\bar{b}_{\mu\lambda}$, где

$$a_{\mu\lambda},\ b_{\mu\lambda} \in A_\lambda \quad \text{и} \quad \bar{a}_{\mu\lambda},\ \bar{b}_{\mu\lambda} \in \prod_{\varkappa\neq\lambda}^{(\mathfrak{m})} A_\varkappa$$

также определены единственным образом. Поэтому $a = (a_{\mu\lambda}b_{\mu\lambda})(\bar{a}_{\mu\lambda}\bar{b}_{\mu\lambda})$, откуда, так как $a \in A_\lambda$, мы получаем равенства $a = a_{\mu\lambda}b_{\mu\lambda}$ и $\bar{a}_{\mu\lambda}\bar{b}_{\mu\lambda} = e$. Ввиду определения частичного порядка в прямом произведении $\bar{a}_{\mu\lambda}$, $\bar{b}_{\mu\lambda} \in P$ и, следовательно, $\bar{a}_{\mu\lambda} = \bar{b}_{\mu\lambda} = e$. Отсюда мы заключаем, что

---

[1] Шимбирёва доказала эту теорему только для прямых и полных прямых произведений. Эта теорема может быть обобщена также на $\mathfrak{m}$- и $\mathfrak{n}$-прямые произведения. Для с. у. групп теорема 8 была доказана Биркгофом [1].

$$a_\mu = a_{\mu\lambda} \in B_\mu \cap A_\lambda \cap P = R_{\lambda\mu},$$

т. е.

$$P_\lambda \subseteq \prod_{\mu}^{(\mathfrak{m})} R_{\lambda\mu}.$$

Выбираем произвольный элемент x из последнего $\mathfrak{m}$-прямого произведения и записываем его в виде $x = \langle \ldots, a_\varkappa, \ldots \rangle$, где $a_\varkappa \in P_\varkappa$. Тогда, в силу выпуклости,

$$a_\varkappa \in \prod_{\mu}^{(\mathfrak{m})} R_{\lambda\mu}$$

для всех $\varkappa \in \Lambda$. Из $a_\varkappa = \langle \ldots, a_{\varkappa\mu}, \ldots \rangle$ $(a_{\varkappa\mu} \in R_{\lambda\mu})$ вытекает $a_{\varkappa\mu} \in R_{\lambda\mu} \cap P_\varkappa = e$ и $a_\varkappa = e$ для всех $\varkappa \neq \lambda$, поэтому $x \in P_\lambda$. Из равенства

$$P_\lambda = \prod_{\mu}^{(\mathfrak{m})} R_{\lambda\mu}$$

и того, что группы направлены, мы заключаем, что

$$A_\lambda = \prod_{\mu}^{(\mathfrak{m})} C_{\lambda\mu}$$

и аналогично

$$B_\mu = \prod_{\lambda}^{(\mathfrak{m})} C_{\lambda\mu}.$$

Следовательно, включение $C_{\lambda\mu} \subseteq A_\lambda \cap B_\mu$ не может быть строгим, что и завершает доказательство.

Якубик [6] дал условие, необходимое и достаточное для того, чтобы любые два прямых разложения с конечным числом компонент произвольной ч. у. группы G имели общее продолжение.

Якубик [2], [4] доказал, что каждая содержащая e выпуклая максимальная цепь C направленной группы G тогда и только тогда будет в G прямым множителем, когда для каждого $c \in C$ и каждого положительного $x \in G$ в G существует $c \wedge x$. В с. у. группах это условие выполняется тривиальным образом. (Ср. теорема 12 a, гл V.)

⁎ Пользуясь теоремой Шимбирёвой, мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 8a (Шик [12]). *Ч. у. множество $\mathfrak{D}$ всех прямых множителей направленной группы G является булевой алгеброй,* Очевидно, что $\mathfrak{D}$ с дополнениями. Если направленная группа G обладает прямыми разложениями

$$G = A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2,$$

то, ввиду теоремы 8,

$$G = (A_1 \cap A_2) \times (A_1 \cap B_2) \times (B_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

также будет прямым разложением. Это показывает, что как $A_1 \cap A_2$, так и $\{B_1, B_2\} = (A_1 \cap B_2) \times (B_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ будут прямыми множителями группы G. Таким образом, $\mathfrak{D}$ — структура. Для того чтобы проверить дистрибутивность, мы установим равенство

$$A \cap \{B_1, B_2\} = \{A \cap B_1, A \cap B_2\}$$

для прямых множителей A, B_1, B_2 группы G. Если A_1, A_2 имеют тот же смысл, что и выше, то благодаря теореме 8 мы имеем

$$A = (A \cap A_1 \cap A_2) \times (A \cap \{B_1, B_2\}) =$$
$$= (A \cap A_1 \cap A_2) \times (A \cap A_1 \cap B_2) \times (A \cap B_1 \cap A_2) \times (A \cap B_1 \cap B_2),$$

откуда

$$A \cap \{B_1, B_2\} = (A \cap A_1 \cap B_2) \times (A \cap B_1 \cap A_2) \times (A \cap B_1 \cap B_2) \subseteq$$
$$\subseteq \{A \cap B_1, A \cap B_2\}.$$

Поскольку обратное включение очевидно, мы доказали, что $\mathfrak{D}$ — булева алгебра. ✱

7. Лексикографические произведения

В теории ч. у. групп существует еще одна важная конструкция, подобная прямому произведению и для случая л. у. групп более важная.

Предположим, что A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ — множество ч. у. групп с л. у. множеством индексов Λ. Возьмем все такие элементы $a = \langle \ldots, a_\lambda, \ldots \rangle$ полного прямого произведения групп A_λ, что множество Λ_a индексов λ, для которых $a_\lambda \neq e$, вполне упорядочено (относительно порядка, определенного в Λ). Мы получим подгруппу полного прямого произведения, содержащую дискретное прямое произведение групп A_λ; положим $a > e$ всякий раз, когда $a_{\lambda_0} > e$ для первого элемента λ_0 множества Λ_a. Ч. у. группа, полученная таким способом, будет называться *лексикографическим произведением*[1]

$$\mathop{\Gamma}_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

групп A_λ.

Пусть σ — такое порядковое число, что сумма и произведение любых двух порядковых чисел, меньших σ, снова меньше σ. В этом случае *лексикографическое σ-произведение*[1]

$$G = \mathop{\Gamma^{(\sigma)}}_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

групп A_λ может быть определено как подгруппа группы ΓA_λ, состоящая из таких элементов a, что порядковый тип множества Λ_a меньше σ.

Компоненты лексикографического произведения, исключая последнюю, если она существует, не выпуклые, но их частичный порядок индуцируется порядком лексикографического произведения. Подгруппы

$$A(\varkappa) = \mathop{\Gamma^{(\sigma)}}_{\varkappa \leqq \lambda} A_\lambda,$$

очевидно, выпуклы в G; $A(\varkappa)$ является выпуклой подгруппой, порожденной подгруппой $A_\varkappa$ в G.

Отметим следующие свойства:

(a) Если G является лексикографическим произведением подгрупп A_1 и A_2, то проекция G на A_1 (но не на A_2) будет o-эпиморфизмом.

(b) Лексикографическое произведение ч. у. групп будет л. у. в точности тогда, когда все сомножители л. у.

(c) Лексикографическое произведение нетривиально упорядоченных групп направлено тогда и только тогда, когда либо нет первого множителя, либо первый множитель направлен.

(d) Лексикографическое произведение тогда и только тогда с. у., когда все множители л. у. (исключая, возможно, последний, если он существует, который может быть произвольной с. у. группой).

---

[1] Лексикографическое произведение впервые использовалось Ханом [1] (см. гл. IV, п. 5); σ-произведения были введены Мальцевым [2].

Теорема 9[1]. *Если A_λ и B_μ — такие направленные группы, что*

$$G = \underset{\lambda \in \Lambda}{\Gamma^{(\sigma)}} A_\lambda = \underset{\mu \in M}{\Gamma^{\sigma}} B_\mu,$$

то эти два лексикографических σ-произведения имеют о-изоморфные уплотнения.

Доказательство мы начнем со следующей леммы.

Лемма. *Пусть*

$$G = \Gamma^{(\sigma)} A_\lambda$$

с направленными группами A_λ. Предположим, кроме того, что G является лексикографическим произведением направленных групп C и D. Тогда

$$C \cong {}_o\Gamma^{(\sigma)} C_\lambda \quad и \quad D = \Gamma^{(\sigma)} D_\lambda, \tag{1}$$

где C_λ — компонента A_λ в C и $D_\lambda = D \cap A_\lambda$. Группы C_λ и D_λ снова направлены.

Предположим, что $g = \langle \ldots, a_\lambda, \ldots \rangle \in G$, где $\alpha_\lambda \in A_\lambda$, и λ_0 — первый из индексов λ, удовлетворяющих условию $a_\lambda \neq e$. Пусть $g > e$, тогда $a_{\lambda_0} > e$. Затем $g \in D$ тогда и только тогда, когда $a_{\lambda_0} \in D$, так как $g^2 > a_{\lambda_0} > e$ и $a_{\lambda_0}^2 > g > e$. Далее, $g \in D$ влечет $h = \langle \ldots, b_\lambda, \ldots \rangle \in D$, если первый индекс λ_1, для которого $b_{\lambda_1} \neq e$, больше чем λ_0. Мы заключаем, что $D_\varkappa \neq e$ влечет $D_\lambda = A_\lambda$ при $\lambda > \varkappa$, а $D_\varkappa = e$ влечет $D_\lambda = e$ при $\lambda < \varkappa$[2]. Таким образом, может существовать самое большее одна группа D_λ, являющаяся нетривиальной подгруппой в соответствующем A_λ. Так как группа D направленна, эта группа D_μ должна быть снова направленной, таким образом, каждая D_λ направленна. Наши доводы показывают, что $D = \Gamma^{(\sigma)} D_\lambda$.

o-изоморфизм в первом из соотношений (1) устанавливается посредством отображения элементов g из G на их C-компоненты $g(C)$. Действительно, отображение

$$g = \langle \ldots, a_\lambda, \ldots \rangle \rightarrow \langle \ldots, a_\lambda(C), \ldots \rangle$$

является o-эпиморфизмом с ядром D, отображающим G на $\Gamma^{(\sigma)} C_\lambda$. Чтобы проверить, что группа C_λ направленна,

---

[1] Эта теорема была доказана Мальцевым [2] для л. у. групп.

[2] То, что D направленна, существенно.

заметим, что

$$G(\varkappa) = \underset{\varkappa \leqq \lambda}{\Gamma^{(\sigma)}} A_\lambda \cong {}_o C_\varkappa^* \times D, \qquad где \qquad C_\varkappa^* = \underset{\varkappa \leqq \lambda}{\Gamma^{(\sigma)}} C_\lambda$$

(для $\varkappa \leqq \mu$), и $G(\varkappa)$ направленна[1]. Это завершает доказательство леммы.

Теперь рассмотрим два σ-произведения, данные в условии теоремы, и обозначим через $C_{\mu\lambda}$ компоненту подгруппы

$$\underset{\nu \geqq \mu}{\Gamma^{(\sigma)}} B_\nu \cap A_\lambda$$

в B_μ. Применяя лемму к первому σ-произведению и к

$$G = C \times D, \quad где\ C = \underset{\nu < \mu}{\Gamma^{(\sigma)}} B_\nu,\ D = \underset{\nu \geqq \mu}{\Gamma^{(\sigma)}} B_\nu,$$

получаем

$$D = \underset{\lambda}{\Gamma^{(\sigma)}} (D \cap A_\lambda);$$

здесь группы $D \cap A_\lambda$ снова направленные. Применяя лемму к последнему разложению D и к

$$D = B_\mu \times \underset{\nu > \mu}{\Gamma^{(\sigma)}} B_\nu,$$

мы получаем

$$B_\mu \cong {}_o \underset{\lambda}{\Gamma^{(\sigma)}} C_{\mu\lambda}.$$

Следовательно, мы получаем o-изоморфизм

$$G = \underset{\mu}{\Gamma^{(\sigma)}} B_\mu \cong {}_o \underset{\mu}{\Gamma^{(\sigma)}} \underset{\lambda}{\Gamma^{(\sigma)}} C_{\mu\lambda}. \tag{2}$$

Далее мы докажем, что из $C_{\mu\lambda} \neq e$ следует $C_{\nu\varkappa} = e$ для $\nu < \mu$ и $\varkappa > \lambda$. Предположим противное, т. е. пусть $C_{\nu\varkappa} \neq e$. Так как по лемме группы $C_{\rho\tau}$ направленны, существуют $a_\lambda = \langle e, \ldots, e, b_\mu, \ldots \rangle$ в A_λ с компонентой $b_\mu > e$ и $a_\varkappa = \langle e, \ldots, e, b_\nu, \ldots \rangle$ в $A_\varkappa$ с компонентой $b_\nu > e$. Относительно лексикографического порядка a_λ, $a_\varkappa > e$. Поскольку из $\varkappa > \lambda$ следует $a_\varkappa < a_\lambda$, тогда как из $\nu < \mu$ вытекает $a_\varkappa > a_\lambda$, получаем противоречие. Мы заключаем, что два σ-произведения в правой части соотношения (2)

---

[1] $C_\lambda = \{e\}$ для $\lambda > \mu$ и $C_\lambda \cong {}_o A_\lambda$ для $\lambda < \mu$.

перестановочны, т. е.

$$A_\lambda^* = \underset{\mu}{\Gamma^{(\sigma)}} C_{\mu\lambda}$$

удовлетворяют условию

$$G \cong {}_o\underset{\lambda}{\Gamma^{(\sigma)}} A_\lambda^*.$$

Теперь предположим, что $\varkappa$ — любой фиксированный индекс и $C_{\mu\varkappa} \neq e$ для некоторого μ. Для каждого $e < b_\mu \in C_{\mu\varkappa}$ существует

$$a_\varkappa = \langle e, \ldots, e, b_\mu, \ldots \rangle \in \underset{\nu \geqq \mu}{\Gamma^{(\sigma)}} B_\nu \cap A_\varkappa.$$

В силу выпуклости, подгруппа

$$A(\varkappa) = \underset{\lambda \geqq \varkappa}{\Gamma^{(\sigma)}} A_\lambda$$

содержит всякий элемент из $C_{\mu\varkappa}$, заключенный между e и b_μ. Так как $C_{\mu\varkappa}$ направленна, мы заключаем, что $C_{\mu\varkappa} \subseteq A(\varkappa)$ для каждого μ и, в силу выпуклости, также $C_{\mu\lambda} \subseteq A(\varkappa)$ для всех $\lambda \geqq \varkappa$ и μ. Следовательно,

$$A^*(\varkappa) = \underset{\lambda \geqq \varkappa}{\Gamma^{(\sigma)}} A_\lambda^* = \underset{\lambda \geqq \varkappa}{\Gamma^{(\sigma)}} \underset{\mu}{\Gamma^{(\sigma)}} C_{\mu\lambda} \subseteq A(\varkappa).$$

Пусть $a \in A(\varkappa)$. Вследствие направленности порядка существует такое $a_\varkappa \in A_\varkappa$, что $a_\varkappa > a$, e. Далее, из $a_\varkappa = \langle e, \ldots, e, b_\mu, \ldots \rangle$ следует, что $b_\mu \in C_{\mu\varkappa}$ и соотношение $b_\mu^2 > a_\varkappa > e$ показывает, что $a_\varkappa \in \{C_{\mu\varkappa}\}_\square \subseteq A^*(\varkappa)$, а поэтому $A^*(\varkappa) = A(\varkappa)$ для каждого $\varkappa$. Мы получаем

$$\underset{\lambda > \varkappa}{\Gamma^{(\sigma)}} A_\lambda^* = \underset{\lambda > \varkappa}{\Gamma^{(\sigma)}} A_\lambda,$$

так как эти группы равны объединениям соответственно $A^*(\lambda)$ и $A(\lambda)$ при $\lambda > \varkappa$. Так как порядок лексикографический, мы приходим к o-изоморфизму $A_\lambda^* \cong {}_o A_\lambda$, что и завершает доказательство теоремы 9.

Мальцев [2] отметил, что существуют л. у. группы, которые не могут быть представлены в виде лексикографического произведения л. у. групп, не имеющего собственных продолжений [1].

∗ 7а. Смешанное произведение

Существует обобщение прямого и лексикографического произведений, которое оказывается полезным для с. у. групп (ср. Конрад [1]).

Пусть Λ — ч. у. множество и каждому $\lambda \in \Lambda$ сопоставлена нетривиальная ч. у. группа A_λ. Образуем полное прямое произведение

$$C = \prod_{\lambda \in \Lambda}^* A_\lambda$$

групп A_λ и определим *несущее множество* $s(v)$ вектора $v = \langle \ldots, a_\lambda, \ldots \rangle \in C$ следующим образом:

$$s(v) = [\lambda \in \Lambda \mid a_\lambda \neq e].$$

Мы определяем *смешанное произведение*

$$A = \underset{\lambda \in \Lambda}{\Omega} A_\lambda$$

как подмножество группы C, состоящее из всех тех векторов v, для которых ч. у. множество $s(v)$ удовлетворяет условию минимальности. Непосредственно видно, что объединение двух подмножеств, удовлетворяющих условию минимальности, а также каждое подмножество множества, удовлетворяющего условию минимальности, снова будут подчинены этому условию. Отсюда следует, что A будет подгруппой в C.

Положим, что $v = \langle \ldots, a_\lambda, \ldots \rangle > e$ тогда и только тогда, когда $a_\lambda > e$ для всех $\lambda \in \Lambda$, являющихся минимальными элементами в $s(v)$; ради краткости мы будем называть такие a_λ *минимальными компонентами* вектора v. Тогда A станет ч. у. группой. Действительно, если P обозначает множество векторов $v \geqq e$ в A, то, очевидно, $P \cap P^{-1} = e$ и из соотношения $s(x^{-1}vx) = s(v)$ вытекает $x^{-1}Px = P$ для каждого $x \in A$. Чтобы показать, что если u, $v > e$, то $uv > e$; предположим, что $u_\lambda v_\lambda$ — минимальная компонента вектора uv. Либо как u_λ, так и v_λ будут минимальными компонентами векторов u и v соответственно, и тогда $u_\lambda > e$, $v_\lambda > e$ влечет $u_\lambda v_\lambda > e$, либо же существует такой индекс $\mu \in \Lambda$, $\mu < \lambda$, что 1) u_μ — минимальная компонента вектора u, а v_μ — минимальная компонента вектора v, или 2) u_μ — минимальная ком-

---

[1] Группа примера 8 и конструкция А. Г. Куроша (Теория групп, М.—Л., 1944, стр. 169—170) могут быть использованы для построения примера такой группы.

понента вектора u, а $v_\mu = e$, или 3) обратно. Никакой из этих случаев не может иметь места, следовательно, A и в самом деле будет ч. у. группой.

Если Λ тривиально упорядочено, то каждое подмножество из Λ удовлетворяет условию минимальности и каждая компонента $a_\lambda \neq e$ вектора v будет минимальной. Тогда смешанное произведение совпадает с прямым произведением ч. у. групп A_λ.

Если Λ — л. у. множество, то подмножество из Λ будет удовлетворять условию минимальности именно тогда, когда оно вполне упорядочено. Это будет случай лексикографического произведения.

Очевидно, что ΩA_λ тогда и только тогда будет л. у. группой, когда Λ — л. у. множество и все множители A_λ — л. у. группы. Более того, нетрудно показать, что ΩA_λ будет с. у. группой тогда и только тогда, когда (1) множество Λ является деревом (т. е. никакая пара несравнимых элементов не имеет общей верхней грани), и (2) каждая группа A_λ является с. у. группой и, кроме того, A_λ — л. у. группа, когда λ не является максимальным элементом в Λ. ✱

8. Внутренние топологии

Существует несколько способов определения топологии по отношению порядка в ч. у. множестве. Если ч. у. группу наделить той или иной из обычных топологий, то мы не получим топологической группы, если не будем налагать некоторых дополнительных условий. Здесь мы рассмотрим два различных способа введения топологии. Первое определение превращает ч. у. группу в топологическое пространство, однако, чтобы обеспечить непрерывность умножения, необходимы два дополнительных условия. Хотя из второго определения и вытекает сразу непрерывность умножения, однако замкнутость элементов обеспечивается только при одном слабом предположении.

Определим так называемую *топологию упорядоченности*¹). Пусть G — произвольная ч. у. группа. Допустим, что множество $[u_\alpha]$ с u-направленным множеством индексов монотонно¹), причем

$$U(\ldots, u_\alpha, \ldots) = U(a) \text{ для некоторого } a \in G.$$

Тогда будем писать $u_\alpha \uparrow a$. Двойственно, положим $v_\alpha \downarrow b$ для множества $[v_\alpha]$ с монотонным множеством v_α^{-1}, если

$$L(\ldots, v_\alpha, \ldots) = L(b) \text{ для некоторого } b \in G.$$

Далее, для множества $[x_\alpha]$ с u-направленным множеством индексов полагаем

$$x_\alpha \longrightarrow a$$

(x_α *сходятся по упорядоченности или о-сходятся к* a, a является *о-пределом* x_α), если существуют такие монотонные множества u_α и v_α^{-1}, что

$$u_\alpha \leqq x_\alpha \leqq v_\alpha, \quad \text{где} \quad u_\alpha \uparrow a, \quad v_\alpha \downarrow a.$$

Имеем:

(a) *Если* $x_\alpha = a$ *для всех* α, *то* $x_\alpha \longrightarrow a$, потому что мы можем взять $u_\alpha = v_\alpha = a$.

(b) *Из* $x_\alpha \longrightarrow a$ *и* $x_\alpha \longrightarrow b$ *следует* $a = b$. Ибо если $u_\alpha \leqq x_\alpha \leqq v_\alpha$, $u_\alpha \uparrow a$, $v_\alpha \downarrow b$, то

$$u_\alpha \in L(\ldots, v_\alpha, \ldots) = L(b), \quad b \in U(\ldots, u_\alpha, \ldots) = U(a);$$

значит, $b \geqq a$. Это и двойственное неравенство вместе приводят к $a = b$.

(c) *Если* $x_\alpha \longrightarrow a$ *и* $[x_\beta]$ — *конфинальное*²) *подмножество в* $[x_\alpha]$, *то и* $x_\beta \longrightarrow a$. Это следует из конфинальности и очевидных соотношений

$$U(\ldots, x_\alpha, \ldots) = U(\ldots, x_\beta, \ldots),$$

$$L(\ldots, v_\alpha, \ldots) = L(\ldots, v_\beta, \ldots).$$

(d) *Если* $x_\alpha \longrightarrow a$ *и* $y_\alpha \longrightarrow b$, *то* $x_\alpha y_\alpha \longrightarrow ab$. Пусть $u_\alpha \leqq x_\alpha \leqq v_\alpha$, $u'_\alpha \leqq y_\alpha \leqq v'_\alpha$, где $u_\alpha \uparrow a$, $v_\alpha \downarrow a$, $u'_\alpha \uparrow b$, $v'_\alpha \downarrow b$. В силу условий (i), (vii) п. 1, мы имеем³)

$$U_\alpha(\ldots, u_\alpha u'_\alpha, \ldots) = U_{\alpha, \beta}(\ldots, u_\alpha u'_\beta, \ldots) =$$

---

¹) Биркгоф [3] определяет топологию упорядоченности в пополнении множества сечениями. Этот метод в случае ч. у. групп не всегда применим, потому что ч. у. группы, вообще говоря, не могут быть погружены в полные ч. у. группы.

¹) Монотонность означает, что из $\alpha \leqq \beta$ следует $u_\alpha \leqq u_\beta$.

²) Подмножество $[x_\beta]$ множества $[x_\alpha]$ конфинально в $[x_\alpha]$, если для каждого α существует такое β, что $\beta \geqq \alpha$.

³) Индекс при U означает переменный индекс.

$$=\bigcap_{\alpha} U_{\beta}(\ldots, u_{\alpha}u'_{\beta}, \ldots)=\bigcap_{\alpha} U(u_{\alpha})\,U_{\beta}(\ldots, u'_{\beta}, \ldots)=$$

$$=\bigcap_{\alpha} U(u_{\alpha})\,U(b)=U(a)\,U(b)=U(ab)$$

и аналогично $L_{\alpha}(\ldots, v_{\alpha}v'_{\alpha}, \ldots)=L(ab)$. Поэтому из $u_{\alpha}u'_{\alpha} \leqq x_{\alpha}y_{\alpha} \leqq v_{\alpha}v'_{\alpha}$ следует наше утверждение.

(e) *Если* $x_{\alpha} \longrightarrow a$, *то* $x_{\alpha}^{-1} \longrightarrow a^{-1}$.

Теперь назовем подмножество A из G *замкнутым* в топологии упорядоченности, если из $x_{\alpha} \in A$ и $x_{\alpha} \longrightarrow a$ следует $a \in A$. Тогда сама G и, в силу свойства (а), элементы группы замкнуты, и очевидно, что пересечение замкнутых множеств снова замкнуто. Если A и B замкнуты и $x_{\alpha} \longrightarrow c$, $x_{\alpha} \in A \cup B$, то множество x_{α}, лежащих в A или в B, будет подмножеством $[x_{\beta}]$, конфинальным в $[x_{\alpha}]$, значит, согласно (с), c лежит либо в A, либо в B, т. е. $A \cup B$ замкнуто. Следовательно; G будет хаусдорфовым топологическим пространством.

Чтобы гарантировать непрерывность умножения, мы предположим выполненными следующие два условия:

(1) Если $[x_{\alpha}]$ — такое подмножество из G с u-направленным множеством индексов, что каждое его конфинальное подмножество содержит o-сходящееся к a конфинальное подмножество, то x_{α} также o-сходится к a.

(2) Пусть $[x_{\alpha\beta}]$ — подмножество в G, в котором индексами являются пары (α, β) и множество индексов u-направленно, когда α или β остается фиксированным[1]. Если $x_{\alpha\beta} \longrightarrow a_{\alpha}$ для каждого фиксированного α и $a_{\alpha} \longrightarrow a$, то в $[x_{\alpha\beta}]$ существует конфинальное подмножество, o-сходящееся к a.

Теорема 10. *Предположим, что G — ч. у. группа, в которой сходимость по упорядоченности удовлетворяет условиям* (1), (2). *Тогда G — топологическая группа относительно топологии упорядоченности.*

Мы уже знаем, что относительно топологии упорядоченности G является топологическим пространством. В силу (d), aX замкнуто всякий раз, когда $a \in G$ и X — замкнутое подмножество из G. Так как, очевидно, $G \setminus aX = a(G \setminus X)$, мы заключаем, что aU открыто для каждого открытого множества U.

Теперь выберем полную систему Σ_e окрестностей элемента e. Элементы U_{α} из Σ_e могут быть перенумерованы при помощи такого u-направленного множества Λ, что $U_{\alpha} \subseteq U_{\beta}$ в точности тогда, когда $\alpha \geqq \beta$ в Λ. Тогда открытые множества aU_{α} образуют полную систему окрестностей элемента a, ибо если $a \in V$ для некоторого открытого множества V, то $e \in a^{-1}V$, где множество $a^{-1}V$ открыто, а поэтому $U_{\alpha} \subseteq a^{-1}V$, $aU_{\alpha} \subseteq V$ для некоторого $U_{\alpha} \in \Sigma_e$.

Допустим, далее, что $[a_{\alpha}]$ имеет u-направленное множество индексов и $a_{\alpha} \longrightarrow a$. Для каждого открытого множества V, содержащего a, существует такой индекс α_0, что $a_{\alpha} \in V$ при $\alpha > \alpha_0$. Действительно, из $a \notin G \setminus V$ следует, что множество всех a_{α}, не лежащих в $G \setminus V$, не является конфинальным подмножеством. Обратно, предположим, что $[a_{\alpha}]$ (с u-направленным множеством индексов) обладает тем свойством, что для каждого открытого множества V, содержащего a, имеется индекс α_0, удовлетворяющий условию $a_{\alpha} \in V$ при $\alpha > \alpha_0$. Если $a_{\alpha} \longrightarrow a$ не имеет места, то, в силу (1), мы можем предположить, что никакое конфинальное подмножество в $[a_{\alpha}]$ не будет o-сходиться к a. Рассмотрим замыкание множества $[a_{\alpha}]$. Должно существовать такое γ, что замыкание X множества элементов $a_{\alpha}\,(\alpha > \gamma)$ не содержит a. Действительно, из (2) следует, что замыкание $[a_{\alpha}]$ состоит из элементов a_{α} и o-пределов o-сходящихся подмножеств из $[a_{\alpha}]$. Если бы для каждого γ подмножество $a_{\alpha}\,(\alpha > \gamma)$ обладало подмножеством, o-предел которого равен a, то, снова согласно условию (2), существовало бы конфинальное подмножество с o-пределом, равным a. Получилось противоречие. Далее, из $a \notin X$ вытекает существование такого открытого множества V, что $a \in V$ и V с X не пересекаются. Это противоречит предположению о множестве $[a_{\alpha}]$ и, следовательно, $a_{\alpha} \longrightarrow a$. Мы заключаем, что o-сходимость и сходимость в смысле топологии упорядоченности эквивалентны.

Теперь мы можем доказать непрерывность умножения. Пусть $ab^{-1}=c$ и $c \in V$, V — открытое множество. Допустим, что никакая пара aU_{α}, $b\,U_{\alpha}$ не удовлетворяет условию $(aU_{\alpha})(bU_{\alpha})^{-1} \subseteq V$. Тогда существуют такие $a_{\alpha} \in aU_{\alpha}$ и $b_{\alpha} \in bU_{\alpha}$, что $a_{\alpha}b_{\alpha}^{-1} \notin V$. Как было доказано в преды-

---

[1] Здесь $(\alpha, \beta) \geqq (\gamma, \delta)$ означает, что $\alpha \geqq \gamma$ и $\beta \geqq \delta$.

дущем абзаце, отсюда следует, что $a_\alpha \to a$ и $b_\alpha \to b$; значит, в силу свойств (d) и (e), $a_\alpha b_\alpha^{-1} \to ab^{-1}$. Мы получаем, что $ab^{-1} \notin V$, а это противоречит предположению, чем и завершается доказательство теоремы 10.

Заметим, что в л. у. группах условия (1) и (2) всегда выполняются.

Другой топологией на ч. у. множестве A является интервальная топология, определяемая посредством задания «замкнутых интервалов» A, $U(a)$, $L(a)$ (для всех $a \in A$) в качестве псевдобазиса замкнутых множеств. Однако относительно этой топологии ч. у. группа уже не будет топологической группой в ряде очень важных случаев, например, в случае некоторых с. у. групп. Мы воспользуемся аналогичным методом введения топологии, методом, который действует при одном слабом условии, но гарантирует, что ч. у. группа будет топологической группой. (Его недостаток заключается в том, что с. у. группа, не являющаяся л. у., будет наделена дискретной топологией).

Возьмем подмножества

$$G,\quad [x \in G \mid x > a],\quad [x \in G \mid x < a] \text{ для всех } a \in G$$

в качестве псевдобазиса Σ открытых множеств, т. е. открытые множества являются объединениями конечных пересечений этих «открытых интервалов». Система Σ определяет хаусдорфову топологию в G тогда и только тогда, когда каждая точка из G замкнута. Нейтральный элемент e тогда и только тогда будет замкнутым подмножеством, когда для каждого $c \in G$, $c \neq e$, в Σ существует открытое множество, содержащее c, но не содержащее e. Если это не верно, то для некоторого c соотношение $a > c$ всегда влечет $a > e$, а из $b < c$ следует $b < e$; или, иначе говоря, $P^*c \subseteq P^*$ и $P^*c^{-1} \subseteq P^*$ (где $P^* = P \setminus e$). Следовательно, $P^*c^n = P^*$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Таким образом, для того чтобы Σ определяла топологию в G, необходимо следующее условие (*):

(*) если $P^*c^n = P^*$ для всех целых n, то $c = e$[1]).

---

[1]) Этому эквивалентно такое условие: если $a > c^n$ для всех $a > e$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то $c = e$. Аддитивная группа комплексных чисел с отношением порядка: $x + yi > 0$ тогда и только тогда, когда $x > 0$, — не удовлетворяет условию (*).

∗Назовем группу G *плотной*, если $a < b$ влечет существование такого $c \in G$, что $a < c < b$. В случае плотных групп легко видеть, что условие (*) также и достаточно.∗ Чтобы показать, что G — топологическая группа относительно этой топологии, которая может быть названа *топологией открытых интервалов*, предположим, что xy^{-1} принадлежит открытому множеству вида (a, b), $a < xy^{-1} < b$. Существуют такие c, $d \in G$, что $ay < c < x < d < by$. Тогда $V = (c, d)$ является окрестностью x, а $W = (b^{-1}d, a^{-1}c)$ — окрестностью y, причем $VW^{-1} \subseteq (a, b)$. Мы получили, таким образом, следующую теорему:

Теорема 11. *Плотная ч. у. группа G тогда и только тогда является топологической группой относительно топологии открытых интервалов, когда G удовлетворяет* (*).

Заметим, что условие (*) справедливо для с. у. групп. Для л. у. групп оно тривиально выполняется. Для других с. у. групп существуют a, $b > e$ с $a \wedge b = e$[1]), и потому $a > c^n$, $b > c^n$ влечет $e \geqq c^n$ для всех n, откуда $c = e$.

Предложение 12. *В л. у. группах топология упорядоченности и топология открытых интервалов эквивалентны. Они нормальны.*

Прежде всего очевидно, что в топологии открытых интервалов множества $U(a)$ и $L(a)$ образуют псевдобазис замкнутых множеств. Ясно также, что $U(a)$ и $L(a)$ замкнуты в топологии упорядоченности. Если бы X было непустым подмножеством в G, замкнутым в топологии упорядоченности, но не замкнутым в топологии открытых интервалов, то существовало бы такое $a \notin X$, что каждый интервал (b, c), содержащий a, пересекал бы X. Отсюда легко получить противоречие при помощи стандартных рассуждений.

Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества в G; тогда дополнение объединения $A \cup B$ является объединением открытых интервалов (c_α, d_α). Выберем $u_\alpha \in (c_\alpha, d_\alpha)$. По предположению, всякое $a \in A$ отделено от B с каждой стороны некоторым интервалом (c_α, d_α). Для каждого $a \in A$ к A добавляем открытый интервал

---

[1]) См. гл. V, п. 4, лемма.

(a, u_α) или (u_α, a), смотря по тому, какой из них имеет смысл. Делая то же самое с B, мы включаем A и B в непересекающиеся открытые множества. По определению, это и означает нормальность[1]).

---

[1]) По поводу некоторых дальнейших результатов о топологии в л. у. группах мы можем отослать читателя к Бэру [2], Исэки [2], Лунстра [1] и особенно к Коэну и Гоффману [1].

Глава
III

ПРОДОЛЖЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ В ГРУППАХ

1. Продолжение до линейного порядка

Предположим, что $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — инвариантная подполугруппа группы G, порожденная элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($\in G$), и определим $S'(a_1, a_2, \dots, a_n)$ как $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ с присоединенной единицей. Эти нормальные подполугруппы будут играть важную роль при изучении продолжений частичных порядков P. Это обстоятельство обусловлено тем, что указанные подполугруппы удовлетворяют следующим очевидным условиям:

(a) из $a \in P$ следует $S'(a) \subseteq P$;

(b) из $a \in P$, $a \neq e$, следует $P \cap S(a^{-1}) = \varnothing$;

(c) $S'(a_1, \dots, a_n) = S'(a_1) \dots S'(a_n)$;

(d) $S(a_1, \dots, a_n)^{-1} = S(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

Следующий результат имеет многочисленные следствия.

Теорема 1 (Фукс [9]). *Частичный порядок группы G тогда и только тогда может быть продолжен до линейного порядка группы G, когда он обладает следующим свойством:*

(*) *для каждого конечного множества элементов $a_1, \dots, a_n$ в G ($a_i \neq e$) можно так подобрать знаки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ($\varepsilon_i = 1$ или -1), что*

$$P \cap S(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_n^{\varepsilon_n}) = \varnothing.$$

Если порядок P может быть продолжен до линейного порядка Q, то предположим, что ε_i выбраны так, что $a_i^{-\varepsilon_i} \in Q$. Тогда $S(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_n^{\varepsilon_n})^{-1} = S(a_1^{-\varepsilon_1}, \dots, a_n^{-\varepsilon_n}) \subseteq Q$, и потому

$$P \cap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \subseteq Q \cap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \varnothing.$$

Для доказательства достаточности нам понадобится

Лемма. *Если P удовлетворяет условию (*) и $a \in G$, то либо $PS'(a)$, либо $PS'(a^{-1})$ определяют частичный порядок P' в G, который снова удовлетворяет условию (*).*

Допустим, что G содержит такие элементы $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m \, (\neq e)$, что для каждого выбора знаков ε_i, η_j имеют место соотношения $P \cap S(a, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \neq \varnothing$ и $P \cap S(a^{-1}, b_1^{\eta_1}, \ldots, b_m^{\eta_m}) \neq \varnothing$. Из этого следует, что пересечение P с $S(a^{\varepsilon}, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n} b_1^{\eta_1}, \ldots, b_m^{\eta_m})$ никогда не пусто в противоречие с условием (*). Таким образом, *либо* (i) для каждого конечного множества $a_1, \ldots, a_n \, (\neq e)$ из G имеются такие знаки $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, что

$$P \cap S(a, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \varnothing;$$

в этом случае мы положим $P' = PS'(a^{-1})$; *либо* (ii) для каждого конечного множества $a_1, \ldots, a_n \, (\neq e)$ из G имеются такие знаки $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, что

$$P \cap S(a^{-1}, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \varnothing;$$

в этом случае мы положим $P' = PS'(a)$. (Если же справедливы одновременно (i) и (ii), то мы можем выбрать любое из приведенных определений P'.) Тогда, например, в случае (i) P' будет, очевидно, нормальной полугруппой с e, которая, кроме того, удовлетворяет условию (*), ибо из

$$PS'(a^{-1}) \cap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \neq \varnothing$$

следует

$$P \cap S(a, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \neq \varnothing.$$

Свойство (*) полугруппы P' показывает, что для всех $b \, (\neq e)$ из G имеет место $P' \cap S(b^{\varepsilon}) = \varnothing$, где $\varepsilon = 1$ или -1, т. е. либо $b \notin P'$, либо $b^{-1} \notin P'$. Таким образом, P' является частичным порядком группы G.

Чтобы завершить доказательство теоремы, предположим, что Q — максимальный элемент в множестве $\mathfrak{P}$ всех частичных порядков группы G, которые являются продолжениями P и удовлетворяют условию (*). Такое Q существует, ибо условие (*) выполняется для объединения возрастающей цепи частичных порядков при условии, что оно выполняется для членов этой цепи. По лемме для каждого $a \in G$ либо $QS'(a)$, либо $QS'(a^{-1})$ также принадлежит к $\mathfrak{P}$. Следовательно, $QS'(a)$ или $QS'(a^{-1})$ совпадает с Q, т. е. $a \in Q$ или $a^{-1} \in Q$, чем доказано, что Q определяет линейный порядок, что и требовалось доказать.

Шик [5] рассматривал случай, когда P имеет только одно линейное продолжение.

2. O-группы

Нас будут интересовать теперь главным образом группы, допускающие линейную упорядоченность. Следуя Нейману [1], мы будем их называть *O-группами*. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы группа обладала этим свойством, может быть непосредственно выведено из теоремы 1.

Теорема 2 (Лось [1], Ониси [2]). *Группа G является O-группой тогда и только тогда, когда по крайней мере для одного выбора знаков $\varepsilon_i = \pm 1$ данные элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из G, $a_i \neq e$, удовлетворяют условию*

$$e \notin S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \text{ 1)}.$$

В группе G пересечение 2^n подполугрупп $S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$ с фиксированными элементами $a_1, \ldots, a_n$ и различными знаками $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ либо является подгруппой, либо пусто. Следовательно, последней теореме может быть дана другая формулировка:

Теорема 3 (Лоренцен [2]). *Условием, необходимым и достаточным для того, чтобы группа G была O-группой, является условие: для каждого конечного множества элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из $G \, (a_i \neq e)$ пере-*

---

1) В работе Смирнова [1] из дополнительной библиографии эта теорема распространена на дистрибутивные мультиоператорные группы. — *Прим. ред.*

сечение 2^n полугрупп $S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$, взятых для всех выборов знаков $\varepsilon_i = \pm 1$, пусто.

Свойство быть O-группой является, таким образом, свойством конечного характера, поэтому справедливо

Следствие 4 (Нейман [3]). *Для того чтобы группа G была O-группой, необходимо и достаточно, чтобы каждая конечно порожденная подгруппа группы G была O-группой.*

Допустим, что H — конечно порожденная абелева группа. Если H является O-группой, то она должна быть группой без кручения. Если она — группа без кручения, то она изоморфна чисто теоретико-групповым образом лексикографическому произведению n экземпляров л. у. группы целых чисел, т. е. является O-группой. Поэтому из следствия 4 вытекает

Следствие 5 (Леви [1]). *Абелева группа тогда и только тогда будет O-группой, когда она группа без кручения.*

Из-за важности этого результата мы дадим независимое доказательство его нетривиальной части.

Предположим, что G — абелева группа без кручения, записанная аддитивно. Согласно хорошо известному результату[1], G может быть погружена в полную группу без кручения D. Очевидно, достаточно показать, что D может быть л. у. Возьмем в D максимальное независимое множество $[g_\alpha]$ и линейно упорядочим его каким-нибудь способом. Каждый элемент $0 \neq x \in D$ может быть единственным образом записан в виде $x = r_1 g_{\alpha_1} + \ldots + r_k g_{\alpha_k}$ с рациональными коэффициентами $r_i \neq 0$, где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \ldots < \alpha_k$. Будем считать, что x положительно, если $r_k > 0$. Легко проверить, что это определение превращает D в л. у. группу.

Факторгруппа G/T абелевой группы G по ее максимальной периодической подгруппе T является группой без кручения и, значит, она допускает линейную упорядоченность. Эта упорядоченность и тривиальный порядок на T индуцируют, согласно предложению 6 гл. II, частичный порядок в G, который превращает G в направленную группу, за исключением того случая, когда $T = G$. Таким образом, справедливо

---

[1] По поводу необходимых результатов из теории абелевых групп мы отсылаем читателя, например, к книге автора Abelian groups, Budapest, 1958.

Следствие 6 (Шимбирёва [1].) *Каждая абелева группа, содержащая элементы бесконечного порядка, допускает направленную упорядоченность.*

✻ Это неверно, вообще говоря, для некоммутативных групп. Противоречащим примером является группа всех перестановок бесконечного множества. Здесь каждый элемент равен некоторому сопряженному со своим обратным, и потому эта группа не имеет частичных порядков, отличных от тривиального. ✻

Аналогичные рассуждения приводят к следующему заключению:

Следствие 7 (Шимбирёва [1]). *Всякая группа, факторгруппа которой по коммутанту непериодична, допускает направленную упорядоченность.*

Из теоремы 1 мы непосредственно получаем

Следствие 8. *Частичный порядок P группы G не имеет собственных продолжений тогда и только тогда, когда для каждого a из $G (a \neq e)$ существует в G такое конечное множество элементов $a_1, \ldots, a_n (\neq e)$, что P пересекает $S(a, a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$ для каждого выбора знаков ε_i.*

Замечание. Если G — операторная группа, то приведенные выше результаты до следствия 4 остаются верными при условии, что $S(a_1, \ldots, a_n)$ обозначает *допустимую* инвариантную полугруппу, порожденную элементами $a_1, \ldots, a_n$.

Виноградов [1] доказал, что свободное произведение O-групп снова будет O-группой.

Нейман и Шепперд [1] показали, что если N — л. у. нормальный делитель конечного индекса группы без кручения G и если внутренние автоморфизмы группы G оставляют инвариантным положительный конус нормального делителя N, то G может быть линейно упорядочена так, что ее порядок продолжает упорядоченность в N.

Теоремы 2 и 3 были обобщены Конрадом [10] на правоупорядоченные группы.

$\ast$ Бесконечная циклическая группа, и вообще любая подгруппа группы рациональных чисел, является O-группой, обладающей только двумя линейными порядками. Примером группы, допускающей ровно четыре линейных порядка, является следующая группа:

$$G = \{a,\ b \mid ba = ab^2\}.$$

В этой группе для каждого натурального числа k справедливо равенство

$$(a^k b a^{-k})^2 = a^{k-1} b a^{-(k-1)}.$$

Если мы положим $a^k b a^{-k} = b^{2^{-k}}$ для $k = 1,\ 2, \ldots$ (что имеет место при $k = 0,\ -1,\ -2, \ldots$), то для каждого двоично-рационального числа α будет справедливо равенство

$$a^{-k} b^{\alpha} a^k = b^{\alpha 2^k} \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

Поэтому элементы группы G могут быть записаны в виде $a^n b^{\alpha}$, где n — целое, а α — двоично-рациональное число, а отсюда следует, что $a^n b^{\alpha} = a^m b^{\beta}$ тогда и только тогда, когда $n = m$, $\alpha = \beta$. Двоичные степени элемента b образуют такой нормальный делитель N группы G, что факторгруппа G/N будет бесконечной циклической группой, порожденной классом aN. Непосредственно проверяется, что если мы возьмем произвольные линейные порядки в N и G/N, то лексикографическое расширение приводит к линейному порядку группы G. Для того чтобы показать, что группа G не допускает никакого другого линейного порядка, кроме таких четырех, заметим, что ввиду равенства

$$b^{-\beta} a^{-m} (a^n b^{\alpha})\, a^m b^{\beta} = a^n b^{-\beta 2^n + \alpha 2^m + \beta}$$

любые два элемента вида ab^{α} с двоично-рациональными α сопряжены. Таким образом, при любом линейном порядке группы G либо $a > b^{\alpha}$ для всех α, либо $a < b^{\alpha}$ для всех α. Следовательно, нормальный делитель N всегда выпуклый и существует не более четырех линейных порядков, соответствующих случаям: $e < b < a$, $e < b^{-1} < a$, $e < b < a^{-1}$, $e < b^{-1} < a^{-1}$. $\ast$

3. Некоторые теоретико-групповые свойства O-групп

Ввиду важности O-групп мы остановимся на некоторых из их теоретико-групповых свойств. Здесь мы будем иметь дело со свойствами элементов, в то время как то, что связано с подгруппами, будет рассматриваться в гл. IV п. 3.

$\ast$ С помощью предложения 5 гл. II мы немедленно получаем первую часть следующего предложения.

Предложение 9. *O-группа G является обобщенной группой без кручения:*

(1) если $e \in S(a)$ для некоторого $a \in G$, то $a = e$. O-группа G удовлетворяет условию: если элементы a, b, $x_1, \ldots, x_n \in G$ таковы, что

(2) $(x_1^{-1} a x_1) \ldots (x_n^{-1} a x_n) = (x_1^{-1} b x_1) \ldots (x_n^{-1} b x_n)$,
то $a = b$.

Действительно, если a и b различны и, например, $a < b$ при некоторой линейной упорядоченности группы G, то левая часть равенства (2) будет меньше правой.

Заметим, что в любой абстрактной группе G условие (2) является следствием условия (1). В самом деле, из равенства (2) следует равенство

$$\prod_{i=1}^{n} (x_n^{-1} b^{-1} x_n) \ldots (x_{i+1}^{-1} b^{-1} x_{i+1})\, x_i^{-1} (b^{-1} a)\, x_i\, (x_{i+1}^{-1} b x_{i+1}) \ldots$$
$$\ldots (x_n^{-1} b x_n) = e,$$

т. е. некоторое произведение элементов, сопряженных с элементом $b^{-1}a$, равно e. Значит, условие (1) гарантирует, что $b^{-1}a = e$, $a = b$.

Свойство (1), вообще говоря, сильнее, чем свойство быть группой без кручения, однако в некоторых классах групп они эквивалентны. Мы покажем, что *нильпотентная группа без кручения G удовлетворяет условию* (1). Пусть k обозначает класс нильпотентности группы G. Если $k = 1$, то G абелева и утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для групп классов меньше k. Пусть Z — центр группы G, тогда G/Z будет нильпотентной группой класса $k - 1$. Докажем, что G/Z — группа без кручения. Если $a \in G$ и $a^n \in Z$ для некоторого целого $n \neq 0$, то $x^{-1} a^n x = a^n$ для всякого $x \in G$. Из последнего абзаца мы заключаем, что $S(a^{-1} x^{-1} a x)$ содержит e. Так как $a^{-1} x^{-1} a x$

принадлежит коммутанту, который является нильпотентной группой класса $k-1$, мы получаем равенство $a^{-1}x^{-1}ax=e$, и потому $a \in Z$. Значит, по предположению индукции G/Z удовлетворяет условию (1). Следовательно, в группе G из условия $e \in S(a)$ следует $a \in Z$. В этом случае $S(a)$ состоит из степеней a^n с положительными n; из того, что данная группа является группой без кручения, следует, что $a=e$, т. е. группа G удовлетворяет условию (1).

В виду предложения 9, O-группа будет R-группой в смысле П. Г. Конторовича. Ливчак [1] дал пример R-группы, не являющейся O-группой.

Пусть L — группа, порожденная элементами a^α, где α — двоично-рациональные числа, и элементом b при условии, что[1]

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad \text{и} \quad ba^\alpha = a^{-2\alpha}b.$$

Тогда мы будем иметь

$$b^k a^\alpha = a^{(-2)^k\alpha}\, b^k$$

для всех целых k и всех двоично-рациональных α. Отсюда следует, что каждый элемент группы L имеет единственную запись в виде $a^\alpha b^k$, где α — двоично-рациональное, а k — целое число. Так как справедливо равенство

$$(a^\alpha b^k)^n = a^{\alpha p(n,\,k)}\, b^{kn},$$

где $p(n, k) = 1+(-2)^k + \ldots + (-2)^{(n-1)k}$, то ясно, что элементы $a^\alpha b^k$ и $a^{\alpha_1} b^{k_1}$ будут равны, если равны их n-е степени для некоторого натурального n. Поэтому L является R-группой. Но она не будет O-группой, потому что произведение $bab^{-1} \cdot a \cdot a$ элементов, сопряженных с элементом $a \neq e$, равно e. ⋇

В следующем утверждении $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ обозначает коммутатор элементов a и b и $[a, b, c] = [[a, b], c]$.

Предложение 10 (**Нейман** [1]). *В O-группе G справедливы следующие утверждения:*

(i) *если* $[a^m, b^n] = e$ *для некоторых* m, $n \neq 0$, *то* $[a, b] = e$;

(ii) *если* $[a^m, b, a^n] = e$ *для некоторых* m, $n \neq 0$, *то* $[a, b, a] = e$.

Из тождеств

$$[a^m, b] = \prod_{i=m-1}^{0} (a^{-i}[a, b]\,a^i) \ \text{при} \ m > 0$$

и $[a^{-1}, b] = a[a, b]^{-1}a^{-1}$ следует, что $[a^m, b]^\varepsilon \in S([a, b])$ и $[a^m, b^n]^\varepsilon \in S([a^m, b])$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, поэтому

$$[a^m, b^n]^\varepsilon \in S([a, b]) \quad \text{для всех} \quad m,\ n \neq 0.$$

Следовательно, (i) выполнено. Для доказательства свойства (ii) воспользуемся тождеством (при $m > 0$)

$$[a^m, b, a] = \Big[\prod_{i=m-1}^{0} a^{-i}[a, b]\,a^i,\ a\Big] =$$

$$= \prod_{i=m-1}^{0} t_i^{-1}[a^{-i}[a, b]\,a^i, a]\,t_i = \prod_{i=m-1}^{0} (a^i t_i)^{-1}[a, b, a]\,(a^i t_i),$$

где t_i равны некоторым произведениям $\prod a^{-i}[a, b]\,a^i$. Аналогичное тождество верно и при $m<0$; таким образом, $[a^m, b, a^n]^\varepsilon \in S([a^m, b, a]^{\varepsilon'}) \subseteq S([a, b, a])$, откуда вытекает свойство (ii).

Можно показать, что $[a^m, b, c] = e$ $(m>1)$ совместимо с $[a, b, c] \neq e$ (Нейман [1]).

Предложение 11 (**Леви** [3]). *Пусть G — конечно порожденная O-группа и K — ее коммутант. Тогда факторгруппа G/K содержит элементы бесконечного порядка.*

Предположим, что $a_1, \ldots, a_n$ — образующие и a — наибольший среди элементов $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_n^{\pm 1}$ относительно некоторого линейного порядка в G. Тогда $\{a\}_{\square} = G$ и объединение H всех выпуклых подгрупп, не содержащих a, является собственной подгруппой в G, причем H инвариантно в G, а G/H o-изоморфно действительной группе (ср. гл. IV, п. 3). Поэтому $K \subseteq H$, откуда и вытекает наше утверждение[1].

---

[1] Группа L может быть также определена, как группа с образующими a и b и определяющим соотношением $ba = a^{-2}b$.

[1] Другое доказательство см. у Чехата [3]

4. O^*-группы

Назовем группу G *O^*-группой*, если каждый ее частичный порядок может быть продолжен до линейного.

Теорема 12 (Ониси [1]). *Группа G тогда и только тогда является O^*-группой, когда она удовлетворяет условиям:*

(i) *если b, $c \in S(a)$, то $S(b)$ и $S(c)$ пересекаются;*

(ii) *если $a \neq e$, то $e \notin S(a)$.*

Предположим, что G—O^*-группа. Тогда (ii) выполняется тривиальным образом. Допустим, что b, $c \in S(a)$ и $S(b) \bigcap S(c)$ пусто. Тогда $P = S'(b) S'(c)^{-1}$ является положительным конусом частичного порядка в G. Он не может быть продолжен до линейного порядка Q, ибо $b \in Q$, $c^{-1} \in Q$, и потому a, $a^{-1} \in Q$ было бы противоречием.

Допустим, что G удовлетворяет условиям (i) и (ii), в то время как частичный порядок P в G не удовлетворяет условию (*) теоремы 1, т. е. существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_n$ в $G (a_i \neq e)$, что $P \bigcap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$ никогда не пусто. Мы покажем, что элементы $a_1, \ldots, a_{n-1}$ снова обладают этим свойством. Ибо если это не так, то для некоторых фиксированных $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ существуют такие элементы $u_1, u_2 \in P$, что $u_1 = t_1 s_1$, $u_2 = t_2 s_2$, где $t_i \in S'(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}})$, $s_1 \in S(a_n)$, $s_2 \in S(a_n^{-1})$ и $s_i \neq e$. Вследствие того, что s_1, $s_2^{-1} \in S(a_n)$, по свойству (i) существует b в $S(s_1) \bigcap S(s_2^{-1})$,

$$b = x_1^{-1} s_1 x_1 \ldots x_k^{-1} s_1 x_k = y_1^{-1} s_2^{-1} y_1 \ldots y_l^{-1} s_2^{-1} y_l.$$

Или $t_1 \neq e$, или $t_2 \neq e$, так как иначе $b \in P$ и $b^{-1} \in P$, откуда $b = e$, что противоречит условию (ii). Несложные выкладки приводят нас к заключению, что

$$x_1^{-1} u_1 x_1 \ldots x_k^{-1} u_1 x_k \, y_l^{-1} u_2 y_l \ldots y_1^{-1} u_2 y_1 \in P \bigcap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}).$$

Следовательно, мы можем допустить, что $n = 0$. Но это невозможно[1]).

Следствие 13 (Лоренцен [1], Шимбирёва [1], Эверетт [2]). *Абелева группа тогда и только тогда является O^*-группой, когда она без кручения.*

---

[1]) Заметим, что для O^*-групп справедлив аналог утверждения достаточности из следствия 4.

В абелевом случае условие (ii) эквивалентно свойству быть группой без кручения, в то время как (i) всегда выполняется, ибо $b = a^m$, $c = a^n (m, n > 0)$ и потому $a^{mn} \in S(b) \bigcap S(c)$.

Заметим, что теорема 12 дословно переносится и на тот случай, когда G имеет область операторов Ω. То же самое справедливо для следствия 13 при условии, что Ω коммутативно.

Следствие 14 (Поддерюгин [2]). *Абелева группа G с коммутативной областью операторов Ω тогда и только тогда является O^*-группой, когда она без Ω-кручения.*

Мы говорим, что G—группа без Ω-кручения, если из $a \neq e$ следует[1]) $e \notin S_\Omega(a)$. Доказательство остается без изменений.

Следствие 15. *Факторгруппа $G/H = G'$ O^*-группы G тогда и только тогда также является O^*-группой, когда она удовлетворяет условию* (ii).

В самом деле, условие (i) наследственно для факторгрупп, так как если b', $c' \in S(a')$, $a \in a'$ (штрих обозначает смежный класс), то для некоторых $b \in b'$, $c \in c'$ имеет место b, $c \in S(a)$. Если же $g \in S(b) \bigcap S(c)$, то, очевидно, $g' \in S(b') \bigcap S(c')$.

Можно отметить следующий интересный результат.

Теорема 16. *Нормальный делитель C O^*-группы G тогда и только тогда может быть представлен в виде пересечения нормальных делителей C_λ, являющихся выпуклыми подгруппами относительно некоторых линейных порядков Q_λ группы G, когда из $a \notin C$ следует $S(a) \bigcap C = \varnothing$.*

Если C может быть представлено таким образом и $a \notin C$, то $a \notin C_\lambda$ для некоторого λ. Следовательно[2]), $S(a) \bigcap C_\lambda = \varnothing$, а отсюда следует необходимость. Если

---

[1]) Через $S_\Omega(a)$ мы обозначаем допустимую инвариантную полугруппу, порожденную элементом a.

[2]) Заметим, что G/C_λ допускает индуцированный линейный порядок.

же условие выполняется и $a \notin C$[1]), то отсюда сразу следует, что $P = CS(a) \cup e$ определяет частичный порядок в G. Если Q_λ — линейный порядок, являющийся продолжением частичного порядка P, то $CS(a) \cap Q_\lambda^{-1} = \varnothing$. Таким образом, $S(a)$ не пересекается с CQ_λ^{-1} и, значит, с $C_\lambda = CQ_\lambda \cap \cap CQ_\lambda^{-1}$, выпуклой подгруппой, порожденной C в Q_λ. А это и доказывает достаточность.

Мальцев [3] доказал, что каждая локально нильпотентная группа, не содержащая элементов конечного порядка, является O^*-группой. Более частные результаты были получены Виноградовым [2].

✳ O^*-Группа может иметь тривиальный центр, как показывает приведенный в конце п. 2 пример группы, которая, очевидно, будет O^*-группой. Кроме того, O^*-группа не обязана быть локально нильпотентной. ✳

✳ Для того чтобы показать, что не все O-группы являются O^*-группами, мы собираемся доказать следующую теорему (ср. теорему 8 гл. IV)[2])

Теорема 16а (Фукс и Сонсяда [1]). *Свободная группа F_n ранга $n \geqq 3$ не является O^*-группой.*

Так как факторгруппа любой группы, удовлетворяющей условию (i) теоремы 12, также удовлетворяет этому условию, то достаточно показать, что группа

$$G = \{x\} * \{y\} * \{z\},$$

являющаяся свободным произведением бесконечной циклической группы $\{x\}$ и двух циклических групп $\{y\}$, $\{z\}$ порядка 2, не удовлетворяет условию (i).

Для элементов $g \in G$ положим, что $\nu_y(g)$ равно числу всех x^k с показателем $k > 0$, расположенных в несократимой записи элемента g между двумя y *минус* число всех x^k с показателем $k < 0$, расположенных между двумя y, $\nu_z(g)$ равно тому же числу, определенному с помощью z вместо y; положим, кроме того, что

$$\nu(g) = \nu_y(g) - \nu_z(g).$$

Например, для элемента

$$g = yx^{-2}yzxyx^3yzx^{-1}zxyzpx^2y$$

---

[1]) Условия $a \notin C$ и $a^{-1} \notin C$ эквивалентны.

[2]) Более общий результат у Каргаполова [3*]. — *Прим. ред.*

мы имеем $\nu_y(g) = 2 - 1 = 1$, $\nu_z(g) = 0 - 1 = -1$ и $\nu(g) = 2$. Отсюда сразу вытекает, что

$$\nu(g^{-1}) = -\nu(g) \quad \text{для каждого } g \in G.$$

Основным свойством функции $\nu(g)$ является следующее свойство:

(*) $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h) + \eta$, *где* $\eta = -1$, *или* 0, *или* 1 *для всех* g, $h \in G$.

Обозначим символом $l(g)$ (длина элемента g) число букв в несократимой записи элемента g. Тогда свойство (*) будет очевидным, если $l(g) \leqq 1$ или $l(h) \leqq 1$. Поэтому мы можем ограничиться тем случаем, когда $l(g) \geqq 2$ и $l(h) \geqq 2$. Так как в этом случае

$$g = g_1yx^k \text{ или } g = g_1zx^k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и

$$h = x^lyh_1 \text{ или } h = x^lzh_1, \text{ где } l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

для некоторых элементов g_1, $h_1 \in G$, таких, что последняя буква элемента g_1 и первая буква элемента h_1 отличны от y или z соответственно, то мы получаем следующую лемму.

Лемма. *Если имеет место неравенство $l(gh) \geqq l(g) + l(h) - 1$, то*

(α) *равенство $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h) - 1$ имеет место тогда и только тогда, когда* либо $g = g_1yx^k$, $h = x^lyh_1$ *и* $k + l < 0$, либо $g = g_1zx^k$, $h = x^lzh_1$ *и* $k + l > 0$;

(β) *равенство $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h)$ имеет место тогда и только тогда, когда* либо $g = g_1yx^k$ *и* $h = x^lzh_1$, либо $g = g_1zx^k$ *и* $h = x^lyh_1$;

(γ) *равенство $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h) + 1$ имеет место тогда и только тогда, когда* либо $g = g_1yx^k$, $h = x^lyh_1$ *и* $k + l > 0$, либо $g = g_1zx^k$, $h = x^lzh_1$ *и* $k + l < 0$.

Доказательство непосредственное и может быть предоставлено читателю.

В случаях, покрывающихся леммой, свойство (*), очевидно, справедливо. Значит, достаточно рассмотреть те случаи, когда $l(gh) < l(g) + l(h) - 1$. В этих случаях мы можем писать

$$g=g_1b \text{ и } h=b^{-1}h_1,$$

где b, b^{-1} — максимальные части элементов g и h, которые сокращаются в произведении gh, т. е. g_1h_1 будет произведением, для которого имеет место равенство $\nu(g_1h_1)=\nu(g_1)+\nu(h_1)+\eta$, где $\eta=0$, -1 или 1. Мы различаем три случая.

Случай I. Пусть $\nu(g_1h_1)=\nu(g_1)+\nu(h_1)-1$. Тогда по лемме мы имеем две возможности, с которыми можно поступать аналогично. Пусть для определенности $g_1=g_2yx^k$ и $h_1=x^lyh_2$, причем $k+l<0$. Рассмотрим один из случаев, в которых $\nu(g)\neq\nu(g_1)+\nu(b)$ [и $\nu(h)\neq\nu(b^{-1})+\nu(h_1)$], именно тот случай, когда $k\neq 0$, $l\neq 0$ и $b=yb_1$. Тогда $\nu(g)=\nu(g_1)+\nu(b)-1$ и $\nu(h)=\nu(b^{-1})+\nu(h_1)-1$, где ставится -1 ввиду того, что k и $l<0$. Мы получаем

$$\nu(gh)=\nu(g_1h_1)=\nu(g_1)+\nu(h_1)-1=\nu(g)-\nu(b)+$$
$$+\nu(h)-\nu(b^{-1})+1+1-1=\nu(g)+\nu(h)+1.$$

Остальные варианты рассматриваются аналогично.

Случай II. Если имеет место равенство $\nu(g_1h_1)=\nu(g_1)+\nu(h_1)+1$, то можно, воспользовавшись леммой, поступить аналогично.

Случай III. Пусть $\nu(g_1h_1)=\nu(g_1)+\nu(h_1)$. Мы можем допустить, что $g_1=g_2yx^k$ и $h_1=x^lzh_2$. Тогда первой буквой элемента b может быть y, z или x^m $(m\neq 0)$. Если первой буквой является y, то $k\neq 0$, а l — любое целое число. Если первой буквой является z, то $l\neq 0$, а k — любое целое число. Если же первой буквой элемента b является x^m, то одно из чисел k и l равно нулю, а другое имеет тот же знак, что и m. Если $b=yb_1$, $k\neq 0$, то $\nu(g)=\nu(g_1)+\nu(b)\pm 1$, где берется $+1$, когда $k>0$, и -1, когда $k<0$, а $\nu(h)=\nu(b^{-1})+\nu(h_1)$ и потому $\nu(gh)=\nu(g_1h_1)=\nu(g)+\nu(h)\pm 1$.

Аналогично рассматривается второй случай. Пусть $b=x^mb_1$. Положим для определенности, что $l=0$, $km>0$. Тогда будем иметь $\nu(g)=\nu(g_1)+\nu(b)\pm 1$ и $\nu(h)=$

$=\nu(b^{-1})+\nu(h_1)$ или же $\nu(g)=\nu(g_1)+\nu(b)$ и $\nu(h)=\nu(b^{-1})+\nu(h_1)\pm 1$, смотря по тому, будет ли первой буквой элемента b_1 буква y или z, тогда как если $b=x^m$, то

$$\nu(g)=\nu(g_1)+\nu(b),\quad \nu(h)=\nu(b^{-1})+\nu(h_1).$$

В любом случае мы имеем условие (*). Этим доказательство условия (*) завершено.

Проверим далее следующее свойство:

(**) $\nu(g^{-1}xyxyg)=1$ *для каждого* $g\in G$.

Это свойство очевидно при $g=e$ или же если первой буквой элемента g является z. Если первой буквой элемента g будет y, то можно рассматривать $yxyx$ вместо $xyxy$. Поэтому единственным интересным случаем будет тот случай, когда $g=x^kg_1$ с $k\neq 0$, $g_1\neq e$. Если g_1 начинается с z, то свойство (**) тривиально. Если же $g=xyg_2$, то $g^{-1}xyxyg=g_2^{-1}xyxyg_2$, и мы имеем более короткое слово g_2, так что остается случай, когда $g=x^kyg_2$ $(k\neq 0, 1)$. Теперь несократимой формой будет

$$g_2^{-1}yx^{-k+1}yxyx^kyg_2,$$

а для этого элемента ν равно 1.

Аналогично мы имеем следующее свойство:

(***) $\nu(g^{-1}xzxzg)=-1$ *для каждого* $g\in G$.

Теперь из свойств (*) и (**) вытекает, что для элементов u_i, сопряженных с $xyxy$, справедливо неравенство

$$\nu(u_1u_2\ldots u_n)\geqq\nu(u_1)+\nu(u_2)+\ldots+\nu(u_n)-(n-1)=1,$$

тогда как для элементов v_i, сопряженных с $xzxz$, ввиду свойств (*) и (***) будет справедливо неравенство

$$\nu(v_1v_2\ldots v_m)\leqq\nu(v_1)+\nu(v_2)+\ldots+\nu(v_m)+(m-1)=-1.$$

Следовательно, полугруппы $S(xyxy)$ и $S(xzxz)$ не пересекаются, хотя $xyxy$, $xzxz\in S(x)$. Это завершает доказательство.

Группа F_1 является O^*-группой, но вопрос, будет ли группа F_2 также O^*-группой, остается открытым.

Так как прямое произведение л. у. групп может быть лексикографически упорядочено, то прямое (и полное прямое) произведение O-групп снова будет O-группой. На тот же вопрос для O^*-групп ответ дается следующей теоремой.

Теорема 16 b (Каргаполов [3*], Кокорин [5*]). *Прямое произведение O^*-групп снова будет O^*-группой.*

Ввиду теоремы 12 группа будет O^*-группой, если ее конечно порожденные подгруппы являются O^*-группами; таким образом, нам надо доказать только, что если A и B — O^*-группы, то их прямое произведение $G = A \times B$ также будет O^*-группой.

Пусть P — максимальный частичный порядок группы G; мы должны показать, что P — линейный порядок. Если $P \cap A$ не является линейным порядком группы A, то существует линейное продолжение Q порядка $P \cap A$ группы A. Теперь QP будет такой нормальной подполугруппой группы G, строго содержащей P, для которой из равенства $qp = e$ $(q \in Q,\ p \in P)$ вытекает $p = q^{-1} \in P \cap A \subset Q$, поэтому $p = q = e$, так что QP было бы частичным порядком, большим, чем порядок P. Значит P индуцирует линейные порядки на A и на B.

Предположим, что элемент $g = ab$ $(a \in A,\ b \in B)$ не является ни положительным, ни отрицательным относительно порядка P. Тогда P пересекает как $S(g)$, так и $S(g^{-1})$; пусть

$$u = x_1^{-1} g x_1 \ldots x_n^{-1} g x_n \in P, \quad v = y_1^{-1} g^{-1} y_1 \ldots y_m^{-1} g^{-1} y_m \in P$$

для некоторых $x_i,\ y_j \in G$. Если элемент $x^{-1}ax$ максимальный среди элементов $x_1^{-1}ax_1, \ldots, x_n^{-1}ax_n$, а элемент $y^{-1}ay$ минимальный среди элементов $y_1^{-1}ay_1, \ldots, y_m^{-1}ay_m$, то

$$x(x_1^{-1}ax_1 \ \ldots \ x_n^{-1}ax_n)x^{-1} \leqq a^n, \ a^m \leqq y(y_m^{-1}ay_m \ \ldots \ y_1^{-1}ay_1)y^{-1},$$

и потому

$$x(x_1^{-1}ax_1 \ldots x_n^{-1}ax_n)^m x^{-1} \leqq y(y_m^{-1}ay_m \ldots y_1^{-1}ay_1)^n y^{-1}.$$

Аналогично мы будем иметь

$$x_*(x_1^{-1}bx_1 \ldots x_n^{-1}bx_n)^m x_*^{-1} \leqq y_*(y_m^{-1}by_m \ldots y_1^{-1}by_1)^n y_*^{-1}$$

для некоторых $x_*,\ y_* \in G$. Мы можем предположить, что $x,\ y \in A,\ x_*,\ y_* \in B$, откуда

$$e \leqq (xx_*u^m x_*^{-1}x^{-1})(yy_*v^n y_*^{-1}y^{-1}) \leqq e.$$

Следовательно, $u = e$, $g = e$, что противоречиво.

Если мы применим предыдущую теорему к прямому произведению абелевой группы без кручения A и произвольной O^*-группы B, то ввиду теоремы 12b получим

Следствие 16c. *Если в O^*-группе G элементы b и c являются соответственно произведениями m и n элементов, сопряженных с элементом $a \in G$, то для некоторого положительного целого числа k произведение некоторых kn элементов, сопряженных с b, будет равно произведению некоторых km элементов, сопряженных с элементом c.* *

Терехов [1] рассматривал группы G, обладающие тем свойством, что каждый линейный порядок всякой подгруппы группы G может быть продолжен до линейного порядка группы G. Он доказал, что нильпотентные группы, обладающие указанным свойством, обязательно абелевы, а локально разрешимые — разрешимы длины 2.

* По поводу дальнейших результатов см. Терехов [2]. Каргаполов [1] доказал, что группа без кручения G обладает указанным свойством тогда и только тогда, когда она содержит такой абелев нормальный делитель A, что факторгруппа G/A абелева и для $a \in A$, $b \in G \setminus A$ элемент $b^{-1}ab$, сопряженный с a, является степенью элемента a с положительным рациональным показателем. Более сильное свойство рассматривалось Кокориным и Копытовым [1]. *

5. Пересечение линейных порядков

Теорема 17 (Лоренцен [3]). *Частичный порядок P группы G тогда и только тогда является пересечением линейных порядков, когда из $a \notin P$ следует, что для каждого конечного множества элементов $a_1, \ldots, a_n \in G$ $(a_i \neq e)$ существуют такие подходящие знаки $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$, что*

$$P \cap S(a,\ a_1^{\varepsilon_1},\ \ldots,\ a_n^{\varepsilon_n}) = \varnothing.$$

Условие необходимо, ибо если $a \notin P$ и P является пересечением линейных порядков Q_ν, то $a \notin Q_\nu$ для некоторого ν, т. е. $a^{-1} \in Q_\nu$, и $PS'(a^{-1})$ может быть продолжено до линейного порядка Q_ν. Таким образом, по теореме 1 для подходящего выбора ε_i мы имеем

$$PS'(a^{-1}) \cap S(a_1^{\varepsilon_1},\ \ldots,\ a_n^{\varepsilon_n}) = \varnothing,$$

откуда вытекает указанное условие. Обратно, если это условие выполнено и $a \notin P$, то $PS'(a^{-1})$ определяет частичный порядок и по теореме 1 имеет линейное продолжение Q_ν, затем из $a^{-1} \in Q_\nu$ следует $a \notin Q_\nu$ и, таким образом, пересечение всех линейных продолжений порядка P равно P.

Следствие 18. *Частичный порядок P O^*-группы тогда и только тогда является пересечением линейных порядков, когда он строго изолирован или, что равносильно, когда из $a \notin P$ следует $P \cap S(a) = \varnothing$*[1].

Как и в доказательстве теоремы 12, отсюда следует, что если какое-нибудь a не удовлетворяет условию предыдущей теоремы для некоторых $a_1, \ldots, a_n$, то это же имеет место и для $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Таким образом, мы окончательно сокращаем n до 0.

Следствие 19[2]. *Для того чтобы частичный порядок P абелевой группы был пересечением линейных порядков, необходимо и достаточно, чтобы P был изолированным.*

Это сразу вытекает из следствия 18.

6. Векторные группы

Ч. у. группа G называется *векторной группой*, если она является подгруппой (полного) прямого произведения $\Pi^* G_\lambda$ л. у. групп G_λ или, иначе говоря, подпрямым произведением л. у. групп G_λ. Соответственно элементы векторной группы — это бесконечные векторы

$$g = \langle \ldots, g_\lambda, \ldots \rangle \quad (g_\lambda \in G_\lambda),$$

причем $g \geqq e$ тогда и только тогда, когда каждое $g_\lambda \geqq e$. Отображение $\varphi_\lambda : g \longrightarrow g_\lambda$ группы G на G_λ является o-гомоморфизмом.

Лемма (Шимбирёва [1]). *Ч. у. группа G тогда и только тогда является векторной группой, когда ее положительный конус P может быть представлен в виде*

$$P = \bigcap_\lambda T_\lambda,$$

где

1) *T_λ — инвариантные выпуклые подполугруппы, содержащие P,*

2) *из $x \in G \setminus T_\lambda$ следует $x^{-1} \in T_\lambda$.*

Если G — подпрямое произведение л. у. групп G_λ, то $T_\lambda = \varphi_\lambda^{-1}(P_\lambda)$, где P_λ — положительный конус группы G_λ, удовлетворяют условиям 1)[1] и 2), а пересечение $\bigcap T_\lambda$ равно P вследствие определения положительности в G. Обратно, если P может быть так представлено, то $N_\lambda = T_\lambda \cap T_\lambda^{-1}$ — выпуклые нормальные делители в G, а $\bigcap N_\lambda = P \cap P^{-1} = e$. Таким образом, G является подпрямым произведением групп $G_\lambda = G/N_\lambda$. Если мы определим частичный порядок на G_λ при помощи $P_\lambda = \varphi_\lambda(T_\lambda)$, то, в силу 2), это будет линейный порядок и, очевидно, $g \in P$ равносильно условию $g \in T_\lambda$ для всех λ, т. е. $g_\lambda \in P_\lambda$ для всех λ.

Теорема 20 (Лоренцен [3]). *Ч. у. группа G тогда и только тогда является векторной группой, когда ее положительный конус P удовлетворяет следующему условию:*

$$\bigcap PS'(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = P \qquad (1)$$

для каждого конечного множества $a_1, \ldots, a_n$ элементов из G, где пересечение распространено на все возможные выборы знаков $\varepsilon_i = \pm 1$.

Предположим, что G является векторной группой и T_λ выбраны как в лемме. Если $a_1, \ldots, a_n \in G$, то для каждого λ можно так выбрать знаки $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, что мы будем иметь $a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n} \in T_\lambda$. Значит, $PS'(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \subseteq T_\lambda$ и условие (1) выполнено. Обратно, если условие (1) удовлетворяется для P и если $a \notin P$, то рассмотрим множество всех таких выпуклых нормальных полугрупп P', содержащих P, что

$$\bigcap P'S'(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$$

---

[1] См. также Мальцев [Алг. и лог., I : 2, 1962]. — *Прим. ред.*

[2] Ср., например, Фукс [2].

[1] Выпуклость следует немедленно: из $e \leqq x \leqq a \in T_\lambda$ вытекает $e = \varphi_\lambda(e) \leqq \varphi_\lambda(x) \leqq \varphi_\lambda(a)$ в G_λ, откуда $\varphi_\lambda(x) \in P_\lambda$, $x \in T_\lambda$.

никогда не содержит a для любого конечного набора элементов $a_1, \ldots, a_n$ из G. Выберем в этом множестве максимальное T_a. Для произвольного $c \in G$, либо $c \in T_a$, либо $c^{-1} \in T_a$; так как иначе[1])

$$a \in \bigcap T_a S'(c)\, S'(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$$

и

$$a \in \bigcap T_a S'(c^{-1})\, S'(b_1^{\eta_1}, \ldots, b_m^{\eta_m})$$

для некоторых $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$; следовательно,

$$a \in \bigcap T_a S'(c^{\pm 1}; a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}, b_1^{\eta_1}, \ldots, b_m^{\eta_m}),$$

что противоречит выбору T_a. Таким образом, T_a обладает свойствами 1), 2) леммы, а так как $a \notin T_a$, то пересечение всех T_a равно P. Применение леммы завершает доказательство.

Благодаря нашей лемме ч. у. группа, частичный порядок которой является пересечением линейных порядков, необходимо будет векторной группой (более того, каждая ее компонента G_λ может быть выбрана так, что сама является группой, наделенной линейным порядком). В случае O^*-групп обратное утверждение также верно.

Следствие 21. *Для O^*-группы G свойство быть векторной группой равносильно тому, что ее частичный порядок строго изолирован.*

В силу следствия 18, достаточно показать, что из условия (1) вытекает, что P строго изолировано. Пусть $a_1 \ldots a_n = u \in P$, где a_i — сопряженные с a. Тогда $a_1 = ua_n^{-1} \ldots a_2^{-1} \in \bigcap PS'(a^{\varepsilon}) = P$, откуда $a \in P$. В частности, мы получаем

Следствие 22 (Клиффорд [1][2]). *Коммутативная ч. у. группа тогда и только тогда является векторной группой, когда ее частичный порядок изолирован.*

Легко показать, что с. у. группа, вообще говоря, не является векторной группой (Шимбирёва [1]). Пусть G — группа примера 10. Здесь элемент $x = a^{-3}b^5$ удовлетворяет условию $x = a^2b^2cx^{-1}c^{-1}$, таким образом, $x \in PS'(x) \bigcap PS'(x^{-1})$, но $x \notin P$.

---

[1]) Заметим, что PS и, значит, T_aS выпукло для каждого подмножества S из G.

[2]) Сравни также Дьедонне [1]. ⚹ Мальцев [5] показал, что то же самое условие справедливо для метабелевых групп, но вообще не для нильпотентных групп. ⚹

Глава

IV

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

1. Архимедовы линейно упорядоченные группы

В качестве введения мы приведем важную классификацию элементов л. у. групп.

Пусть G — л. у. группа. *Модуль* $|a|$ элемента $a \in G$ определяется равенством $|a| = \max(a, a^{-1})$.

Пусть $a, b \in G$. Говорят, что элемент a *бесконечно мал*[1]) *по сравнению с* b, если для всех положительных целых чисел n $|a|^n < |b|$; в этом случае мы будем писать $a \ll b$. С другой стороны, элементы a и b называются *архимедовски эквивалентными*, что записывается символом $a \sim b$, если существуют такие положительные целые числа m и n, что

$$|a| < |b|^m \text{ и } |b| < |a|^n.$$

Отсюда легко следует, что

(i) для каждой пары элементов $a, b \in G$ выполняется одно и только одно из соотношений

$$a \ll b, \quad a \sim b, \quad b \ll a;$$

(ii) из $a \ll b$ следует $x^{-1}ax \ll x^{-1}bx$ для всякого $x \in G$;
(iii) из $a \ll b$ и $a \sim c$ следует $c \ll b$;
(iv) из $a \ll b$ и $b \sim d$ следует $a \ll d$;
(v) из $a \ll b$ и $b \ll c$ следует $a \ll c$;
(vi) из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$.

Архимедова эквивалентность разбивает элементы группы G на непересекающиеся классы, множество которых мы можем линейно упорядочить, полагая, что для классов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ отношение $\varkappa_1 < \varkappa_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для некоторых (и значит, для всех) предста-

---

[1]) По другой терминологии *a несравненно меньше, чем b*. Это понятие часто определяется только для положительных элементов.

вителей $a \in \varkappa_1$ и $b \in \varkappa_2$ мы имеем $a \ll b$. Элемент e сам образует класс; это минимальный класс; все остальные классы содержат бесконечное множество элементов, так как $a \sim a^n (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ясно, что группа G тогда и только тогда архимедова, когда она имеет не более двух архимедовых классов[1]).

Эта архимедова классификация может быть распространена на положительные элементы произвольной ч. у. группы G (Лунстра [3]). Пусть a, b — положительные элементы группы G. Будем писать $a \smile b$, если существуют такие натуральные числа m и n, что $a < b^m$ и $b < a^n$. Если же существует такое m, что $a < b^m$, но не существует числа n, такого, что $b < a^n$, то мы полагаем $a \ll b$. Тогда положительный конус группы также разбивается на классы эквивалентности, между которыми может быть естественным образом определен частичный порядок.

По поводу некоторых свойств ч. у. множеств этих классов архимедовой эквивалентности см. Лунстра [3].

Мы начинаем изучение л. у. групп с архимедова случая. Следующий результат совершенно необходим для дальнейшего развития теории.

Теорема 1 (Гёльдер [1]). *Л. у. группа тогда и только тогда архимедова, когда она о-изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел с естественным порядком. Поэтому все архимедовы л. у. группы коммутативны.*

Часть «тогда» очевидна. Предположим, что G — л. у. группа с архимедовым порядком.

Сначала допустим, что существует такой элемент $g \in G$, что $e < g$ и из $e \leqq x < g$ следует $x = e$. В силу свойства архимедовости, для каждого $a \in G$ существует такое целое число n, что $g^n \leqq a < g^{n+1}$ и потому $e \leqq ag^{-n} < g$. Поэтому $ag^{-n} = e$ и $a = g^n$. Следовательно, отображение $g^n \longrightarrow n$ устанавливает o-изоморфизм группы $G = \{g\}$ на группу целых чисел.

Теперь предположим, что такого g нет; пусть для каждого $x \in G$, $e < x$ мы можем найти такой y, что $e < y < x$. Здесь либо $y^2 \leqq x$, либо $(xy^{-1})^2 \leqq x$, таким образом, для каждого $x > e$ существует $z \in G$, удовлетворяющее условиям $e < z < x$ и $z^2 \leqq x$. Допустим, что a, b — положительные

---

[1]) Дальнейшие свойства архимедовых классов могут быть найдены в работе Лунстра [2].

элементы из G и $ab \neq ba$; пусть, например, $ba < ab$. Положим тогда $x = aba^{-1}b^{-1} > e$ и для этого x выберем z. По свойству архимедовости существуют натуральные числа m и n, удовлетворяющие неравенствам $z^m \leqq a < z^{m+1}$, $z^n \leqq b < z^{n+1}$. Поэтому $x = aba^{-1}b^{-1}$ удовлетворяет условию $x < z^2$, а это противоречит тому, что $z^2 \leqq x$. Таким образом, G коммутативна.

Чтобы построить o-изоморфизм группы G в группу действительных чисел, возьмем $a \in G$, $a > e$ и положим $f(a) = 1$. Для произвольного $b \in G$ рассмотрим множества L, U всех таких рациональных чисел $m/n (n > 0)$, что $a^m \leqq b^n$ и $a^m > b^n$ соответственно. По свойству архимедовости ни L, ни U не пусто и легко видеть, что (L, U) определяет дедекиндово сечение рациональных чисел. Если действительное число β соответствует этому сечению, то полагаем $f(b) = \beta$. Мы имеем $f(bc) = f(b) + f(c)$, так как если m/n и $r/s (n, s > 0)$ принадлежат нижним классам, определенным элементами b и c соответственно, то $a^m \leqq b^n$, $a^r \leqq c^s$. Отсюда следует, что $a^{ms+nr} \leqq (bc)^{ns}$, т. е. $(m/n) + (r/s)$ принадлежит нижнему классу сечения, определенного элементом bc. Подобные рассуждения применимы и к верхним классам. Таким образом, f является гомоморфизмом G в группу действительных чисел. Так как $f(b) = 0$ несовместимо с $b > e$ (в противном случае $a \leqq b^n$ для некоторого n, и потому $1/n$ лежало бы в нижнем классе элемента b) и так как f, очевидно, изотонно, мы заключаем, что f является o-изоморфизмом группы G в группу действительных чисел, что и требовалось доказать.

Это доказательство основано на доказательстве Картана [1]; ср. также Бэр [2], Ригер [1], Шиллинг [1]. Другое доказательство дано у Леви [2]. (Ср. гл. XI, где доказывается соответствующий результат для полугрупп.) Чехата [3] показал, что в л. у. группе коммутатор двух элементов бесконечно мал по сравнению с бóльшим из них, откуда сразу следует коммутативность архимедовых л. у. групп. (Ср. также доказательство теоремы 18 в гл. V.)

По поводу обобщения на лупы см. Исэки [1] и Пикерт [2]. Ср. также Зелинский [1].

Теперь представляется естественным вопрос об o-изоморфизме двух подгрупп группы действительных чисел. Полный ответ может быть дан легко.

Предложение 2 (Хион [1]). *Пусть $A \neq 0$ и B — подгруппы аддитивной группы действительных чисел, снабженные естественным порядком, и φ — о-гомоморфизм (или о-изоморфизм) A в B. Тогда существует такое действительное число $r \geqq 0$, что*

$$\varphi(a) = ra \quad \text{для всех } a \in A.$$

Если[1] $\varphi(a_0) = 0$ для некоторого $a_0 \in A$, $a_0 > 0$, то $\varphi(a) = 0$ для всех $a \in A$, потому что из $0 < a < na_0$ следует $\varphi(a) = 0$. В этом случае $r = 0$. Остается случай, когда из $a_i > 0 \, (a_i \in A)$ следует $\varphi(a_i) > 0$. Допустим, например, что $\varphi(a_1) : \varphi(a_2) < a_1 : a_2$, и возьмем рациональное число $m/n \, (m, n > 0)$ между $\varphi(a_1)/\varphi(a_2)$ и a_1/a_2. Имеем $ma_2 < na_1$, хотя $m\varphi(a_2) > n\varphi(a_1)$, что невозможно. Таким образом, $\varphi(a) : a = r$ постоянно и, очевидно, больше 0.

Для подполугрупп действительных чисел предложение 2 тоже справедливо.

Следствие 3. *о-автоморфизмы архимедовой л. у. группы образуют подгруппу мультипликативной группы положительных чисел.*

Группа $A_0(G)$ всех о-автоморфизмов л. у. абелевой группы G рассматривалась Конрадом [6]. Он установил некоторые достаточные условия, при которых $A_0(G)$ может быть линейно упорядочена. Ср. также Кон [1], Конрад [9].

В заключение мы укажем два простых следствия из основной теоремы.

Следствие 4 (Лунстра [1]). *Непрерывная л. у. группа $G \neq e$ (т. е. группа, каждое дедекиндово сечение которой определяет один и только один элемент) о-изоморфна л. у. группе действительных чисел.*

Допустим, что $a^n \leqq b$ для некоторого $a \geqq e$ и $n = 0, 1, 2, \dots$. Из предположения следует, что существует $\lim\sup a^n = x$, т. е. $U(e, a, \dots, a^n, \dots) = U(x)$. Согласно гл. II, п. 1 (ii), этот x удовлетворяет условию $ax = x$, откуда $a = e$ и группа имеет архимедов порядок. По теореме 1 она о-изоморфна подгруппе группы действительных чисел, которая должна быть снова непрерывной.

---

[1] Мы используем аддитивные обозначения в A и B.

Следствие 5 (Фань [1], Фукс [3], Мичиура [8]). *Если частичный порядок группы G изолирован и G не содержит выпуклых подгрупп, отличных от самой G и e, то G о-изоморфна подгруппе группы действительных чисел (и поэтому линейно упорядочена).*

Пусть $a \in G$, $a \| e$. Тогда по предположению изолированности a — бесконечного порядка и опять $a^n \| e$. Таким образом, $\{a^2\}$ — нетривиальная выпуклая подгруппа. Следовательно, G линейно упорядочена. Если $a^n < b$ для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то b не принадлежит к $\{a\}_\square$, таким образом, $a = e$ и порядок архимедов. Ссылка на теорему 1 завершает доказательство.

2. Линейные порядки на свободных группах

Основной целью этого раздела является доказательство того, что каждая л. у. группа G является о-эпиморфным образом л. у. свободной группы. Основная идея, которая широко используется и в следующем разделе, состоит в построении некоторой цепи подгрупп, обладающей тем свойством, что факторгруппы, определенные соседними членами, легко упорядочиваются.

Убывающая цепь

$$G = C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_\alpha \supset C_{\alpha+1} \supset \dots,$$

где α пробегает порядковые числа, меньшие, чем фиксированное τ, называется *трансфинитным центральным рядом* группы G, если $C_{\alpha+1}$ — (инвариантная) подгруппа в C_α, причем коммутант $[G, C_\alpha]$ содержится в $C_{\alpha+1}$, а для предельного порядкового числа α подгруппа C_α является пересечением всех C_β при $\beta < \alpha$. Ясно, что C_α нормальна в G.

Теорема 6 (Шимбирёва [1], Нейман [1]). *Если группа G обладает трансфинитным центральным рядом, обрывающимся на $C_\tau = e$, все факторгруппы $C_\alpha/C_{\alpha+1}$ которого без кручения, то G — О-группа.*

Из определения следует, что $C_\alpha/C_{\alpha+1}$ абелевы, таким образом, по теореме Леви (гл. III, следствие 5) существуют линейные порядки P_α на $C_\alpha/C_{\alpha+1}$. Определим множество P в G как множество, состоящее из e и всех

$g \in G$ $(g \neq e)$, обладающих свойством: если α — порядковое число, определенное условием[1] $g \in C_\alpha \setminus C_{\alpha+1}$, то смежный класс $gC_{\alpha+1}$ принадлежит P_α. Тогда для элемента $g \in G$ имеет место либо условие $g \in P$, либо $g^{-1} \in P$, но не оба одновременно, если $g \neq e$. Если g, $h \in P$ и α, β — такие порядковые числа, что $g \in C_\alpha \setminus C_{\alpha+1}$, $h \in C_\beta \setminus C_{\beta+1}$, то $gC_{\alpha+1} \in P_\alpha$, $hC_{\beta+1} \in P_\beta$ и, допустив, например, что $\alpha \geqq \beta$, мы получаем $gh \in C_\alpha \setminus C_{\alpha+1}$ и $ghC_{\alpha+1} \in P_\alpha$, $gh \in P$. Наконец, если g определено, как выше, и $x \in G$ произвольно, то $x^{-1}gx = g[g, x] \in gC_{\alpha+1}$, т. е. $x^{-1}gx$ снова принадлежит P. Следовательно, P определяет линейный порядок на G (индуцирующий данные порядки P_α на $C_\alpha / C_{\alpha+1}$).

Теорема 6 была обобщена на лупы Браком [1].

Следствие 7 (Нейман [1]). *Если нижний центральный ряд группы G кончается на e после ω шагов*[2]) *и его факторгруппы без кручения, то G — O-группа.*

Напомним, что члены нижнего центрального ряда группы G определяются условиями ${}^0G = G$, ${}^{n+1}G = [G, {}^nG]$.

Нейман [1] доказал аналогичный результат для верхних центральных рядов.

Теорема 8 (Биркгоф[3]), Ивасава [2], Нейман [1]). *Все свободные группы являются O-группами.*

По теореме Магнуса — Витта[4]) нижний центральный ряд свободной группы удовлетворяет предположениям предыдущего следствия.

Брак [1] заметил, что теорема 8 справедлива и для свободных луп. Результат Виноградова, отмеченный в конце гл. III, п. 2, является важным обобщением теоремы 8[5]).

---

[1] Такое порядковое число существует, потому что если $g \in C_{\beta+1}$ для всех $\beta < \alpha$, то $g \in C_\alpha$, и если $g \in C_{\beta+1}$ для всех $\beta < \tau$, то $g = e$.

[2] Здесь ω обозначает первое бесконечное порядковое число.

[3] Биркгоф отметил этот результат в своем реферате статьи Эверетта — Улама [1] в «Mathematical Reviews». Он также был отмечен Тарским.

[4] *W. Magnus, Math. Ann.*, 111 (1935), 259—280, и E. Witt, *Journ. reine u. angew. Math.*, 177 (1937), 152—160. В случае свободных групп факторы нижнего центрального ряда — свободные абелевы группы и ω-й член равен e.

[5] Теорема 8 перенесена на случай свободных мультиоператорных групп Смирновым [1] (из дополнительной библиографии). — *Прим. ред.*

Теорема 9 (Ивасава [2], Нейман [1].) *Каждая л. у. группа G является о-эпиморфным образом свободной л. у. группы.*

G как абстрактная группа может быть представлена в виде факторгруппы F/R свободной группы F. Введем обозначение $R_n = {}^nF \cap R$, где ${}^nF$ — n-й член нижнего центрального ряда группы F. Группы R_n $(n = 0, 1, \ldots)$ образуют убывающую цепь, пересечение которой равно e, так как $\bigcap R_n \subseteq \bigcap {}^nF = e$. Далее мы имеем

$$[F, R_n] \subset [F, {}^nF] \cap [F, .R] \subseteq {}^{n+1}F \cap R = R_{n+1}$$

и

$$R_n / R_{n+1} = ({}^nF \cap R)/({}^{n+1}F \cap R) \cong$$
$$\cong {}^{n+1}F ({}^nF \cap R)/{}^{n+1}F \subseteq {}^nF/{}^{n+1}F.$$

Таким образом, факторгруппы R_n / R_{n+1} — абелевы группы без кручения, на которых мы можем определить линейные порядки P_n. Точно так же, как в доказательстве теоремы 6, можно определить линейный порядок P на F, используя данный линейный порядок P' группы $G = F/R$ и линейные порядки P_n[1]). Относительно порядка P подгруппа R выпукла и естественный гомоморфизм F на G является о-эпиморфизмом.

Те же рассуждения применяются для того, чтобы доказать

Следствие 10. *Каждая ч. у. группа является о-эпиморфным образом свободной ч. у. группы, причем ядро линейно упорядочено.*

Зайцева [1] и Тревизан [2] описали все неизоморфные линейные порядки на свободной абелевой группе конечного ранга r; существует континуальное множество таких порядков при условии $r \geqq 2$. Отсюда получается (см. Мацусита [2]): если $r \geqq 2$, то свободная группа ранга r имеет континуальное множество различных линейных порядков. Недавно Тэ [1] описал линейные порядки абелевой группы без кручения конечного ранга.

---

[1] Приведенный выше метод не работает, если $g \notin R$, но этот случай очевиден.

3. Цепь выпуклых подгрупп

Теперь мы хотим исследовать систему Σ выпуклых подгрупп л. у. группы G. Эта система играет выдающуюся роль в теории л. у. групп. Основной результат базируется на следующих свойствах системы Σ.

(1) *Σ является цепью, содержащей* $\{e\}$ *и* G; *вместе с подгруппами* $C_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ *система* Σ *содержит также их пересечение* $\bigcap C_\lambda$ *и объединение* $\bigcup C_\lambda$.

Если C и D — выпуклые подгруппы группы G и $c \in C$, $c \notin D$ (пусть, например, $c > e$), то никакой $d \in D$ не может удовлетворять неравенству $e < c < d$. Следовательно, $d < c$ для всех $d \in D$ и потому $D \subseteq C$. Остальные утверждения в (1) очевидны, равно как и условие

(2) *Если* $C \in \Sigma$ *и* $g \in G$, *то* $g^{-1} C g \in \Sigma$.

Под скачком в Σ мы понимаем такую пару подгрупп D и C из Σ, что C строго содержит D и Σ не содержит подгрупп, заключенных между C и D. Мы будем обозначать это символом $D \prec C$[1]).

(3) *Если* $D \prec C$ — *скачок в* Σ, *то* D — *нормально в* C, *а* C/D *изоморфно подгруппе группы действительных чисел.*

Ясно, что из $D \prec C$ следует $a^{-1}Da \prec a^{-1}Ca$ для всех $a \in G$. В частности, если $a \in C$, то $a^{-1}Ca = C$ и, значит, $a^{-1}Da = D$, т. е. D нормально в C. Ввиду того что $D \prec C$, факторгруппа C/D, снабженная линейным порядком, индуцированным порядком группы G, не имеет нетривиальных выпуклых подгрупп; таким образом, она o-изоморфна некоторой группе действительных чисел.

(4) *Если* $D \prec C$ — *скачок, то*[2])

$$[N(D),\ N(D),\ C] \subseteq D.$$

Так как $D \prec C$ влечет $a^{-1}Da \prec a^{-1}Ca$, мы получаем, что если элемент a принадлежит одной из подгрупп $N(C)$

---

[1]) Каждый элемент $g \neq e$ из G определяет скачок в Σ, так как пересечение C всех выпуклых подгрупп, содержащих g, покрывает объединение D всех остальных выпуклых подгрупп. Каждый скачок получается таким способом. Система Σ слабо атомна в том смысле, что из $A \subset B$ $(A,\ B \in \Sigma)$ следует $A \subset D \prec C \subseteq B$ для некоторых $C,\ D \in \Sigma$.

[2]) $N(D)$ обозначает нормализатор D в G, а

$$[A,\ B,\ C] = [[A,\ B],\ C].$$

и $N(D)$, то он принадлежит также и другой, т. е. $N(C) = N(D)$. Трансформирование при помощи элемента $a \in N(D)$ оставляет C и D инвариантными, значит, оно индуцирует автоморфизм $\hat{a}$ группы C/D. Ясно, что $\hat{a}$ сохраняет порядок и потому, в силу (3) и следствия 3, $\hat{a}$ перестановочно со всеми $\hat{b}\,(b \in N(D))$. Это означает, что $a^{-1}b^{-1}cba \equiv b^{-1}a^{-1}cab \pmod D$ или

$$[a^{-1},\ b^{-1},\ c] = bab^{-1}a^{-1}c^{-1}aba^{-1}b^{-1}c \in D$$

для всех $a,\ b \in N(D)$, $c \in C$.

(5) ⁎ *Если* $C \in \Sigma$ *и произведение некоторых элементов, сопряженных с* a, *принадлежат* C, *то один из этих сопряженных принадлежит* C. ⁎

Если бы утверждение не было верным, то каждый элемент, сопряженный с a, был бы больше или меньше любого элемента из C (соответственно тому, имеет ли место $a > e$ или $a < e$). Это было бы верно и для произведения сопряженных в противоречие с предположением.

Теперь мы подошли к следующей теореме.

Теорема 11 (**Ригер** [1], **Поддерюгин** [2]). *Группа* G *тогда и только тогда является* O*-группой, когда она содержит систему подгрупп* Σ, *удовлетворяющую условиям* (1) — (5).

Остается доказать часть «тогда». Допустим, что группа G обладает такой системой подгрупп Σ, что выполнены условия (1) — (5). Называя скачки $D \prec C$ и $D' \prec C'$ сопряженными, если $C' = g^{-1}Cg$, $D' = g^{-1}Dg$ для некоторого $g \in G$, мы разделим скачки в Σ на непересекающиеся классы сопряженных. Из каждого класса выберем скачок $D \prec C$. В силу условий (3) и (4), C/D — абелева группа без кручения, на которой трансформации при помощи элементов из $N(D)$ коммутируют. Мы можем рассматривать C/D как модуль с областью операторов $\Omega = N(D)$. В силу свойства (5) C/D без Ω-кручения[1]) и ввиду коммутативности Ω и следствия 14 гл. III мы можем опре-

---

⁎ [1]) Если произведение сопряженных $x_i^{-1}\,(cD)\,x_i$ $(x_i \in N(D))$ элемента $cD \in C/D$ есть D, то произведение элементов $x_i^{-1} c x_i$ лежит в D, а поэтому, по (5), один из элементов $x_i^{-1} c x_i$ принадлежит D, т. е. $c \in D$, $cD = D$. ⁎

делить линейный Ω-порядок $P(C, D)$ на C/D. Пусть $P(g^{-1}Cg, g^{-1}Dg)$ — индуцированный порядок на $g^{-1}Cg/g^{-1}Dg$. Он совместим с трансформированием при помощи элементов из $g^{-1}N(D)g = N(g^{-1}Dg)$ и не зависит от выбора трансформирующего элемента g.

Теперь мы можем определить P в G. Каждый $x \in G$ $(x \neq e)$ определяет скачок $D \prec C$ в Σ, так как по условию (1) пересечение C всех подгрупп в Σ, содержащих x, и объединение D всех подгрупп из Σ, не содержащих x, принадлежат Σ. Положим, что $x \in P$ тогда и только тогда, когда смежный класс xD принадлежит $P(C, D)$ в C/D; пусть, кроме того, $e \in P$. Отсюда, по существу тем же способом, что и в доказательстве теоремы 6, следует, что P определяет линейный порядок на G. (Единственное отличие имеется в доказательстве инвариантности, которая теперь следует из определения упорядоченности для сопряженных скачков.) Так как подгруппы, отличные от G в Σ, равны либо меньшей подгруппе в скачке, либо пересечению таких подгрупп[1], мы видим, что подгруппы в Σ будут выпуклыми относительно линейного порядка P. Это завершает доказательство.

И все же условий (1)—(5) недостаточно, чтобы обеспечить совпадение Σ с системой всех выпуклых подгрупп в л. у. группе, так как линейные Ω-порядки $P(C, D)$ выбирались не обязательно архимедовыми. (Не известно, следует ли из условий (1)—(5), что это можно сделать.) Однако если мы заменим условия (4)—(5) одним условием (6), имеющим не чисто теоретико-групповой характер, то будет возможно так выбрать линейный порядок на G, что данная система Σ будет в точности множеством всех выпуклых подгрупп.

Пусть $D \prec C$ — скачок. Назовем *главными автоморфизмами* те автоморфизмы факторгруппы C/D, которые являются трансформированиями при помощи элементов из $N(D)$. Главные автоморфизмы порождают в кольце эндоморфизмов $\mathfrak{E}(C/D)$ группы C/D коммутативное подкольцо $\mathfrak{R}(C/D)$, изоморфное, согласно предложению 2, подкольцу поля действительных чисел. Так как главные автоморфизмы соответствуют положительным действительным числам, то, присоединяя их квадратные корни к полю частных кольца $\mathfrak{R}(C/D)$, мы получим подполе $\mathfrak{K}(C/D)$ поля действительных чисел.

(6) *Если $D \prec C$ — скачок в Σ, то главные автоморфизмы факторгруппы C/D порождают область целостности $\mathfrak{R}(C/D)$ в кольце эндоморфизмов $\mathfrak{E}(C/D)$ группы C/D, а поле $\mathfrak{K}(C/D)$, порожденное кольцом $\mathfrak{R}(C/D)$ и квадратными корнями главных автоморфизмов, изоморфно подполю поля действительных чисел*[1].

Теперь мы сформулируем следующий результат.

Теорема 12 (Мальцев [2]). *Система Σ подгрупп группы G является системой всех ее выпуклых подгрупп относительно некоторого линейного порядка в G тогда и только тогда, когда Σ удовлетворяет условиям* (1)—(3) *и* (6).

Доказательство достаточности начинается с замечания, что поле $\mathfrak{K}(C/D)$ может быть отождествлено с подполем поля действительных чисел, следовательно, оно архимедово л. у. поле. $\mathfrak{R}(C/D)$ будет л. у. подкольцом действительных чисел, причем главные автоморфизмы обязательно положительны. Выбираем в C/D и в группе действительных чисел соответственно множества M и N, которые являются максимально независимыми относительно $\mathfrak{R}(C/D)$ (или относительно поля частных кольца $\mathfrak{R}(C/D)$). Благодаря условию (3) существует взаимно однозначное соответствие φ между M и подмножеством из N. Это φ индуцирует очевидным образом $\mathfrak{R}(C/D)$-изоморфизм группы C/D на действительную группу K[2]. Если мы введем отношение порядка в C/D, требуя, чтобы это был o-изоморфизм, то C/D станет такой архимедовой л. у. группой, что положительный конус в C/D инвариантен относительно умножений на положительные элементы из $\mathfrak{R}(C/D)$. Если определить на $g^{-1}Cg/g^{-1}Dg$ индуциро-

---

[1] Это является следствием слабой атомности; ср. сноску 1) на стр. 80.

[1] Подлинное условие Мальцева несколько слабее, чем условие (6): оно требует, чтобы $\mathfrak{K}(C/D)$ было формально действительным. Мы выбрали указанную форму условия, чтобы гарантировать, что Σ будет содержать все выпуклые подгруппы получающейся л. у. группы.

[2] Под *действительной группой* мы понимаем подгруппу аддитивной группы действительных чисел.

ванный порядок, то рассуждения, такие же, как и приведенные выше, покажут, что G может быть л. у. так, что порядок, индуцированный на C/D, совпадает с первоначальным и подгруппы системы Σ выпуклы. Более того, никакая подгруппа $A \notin \Sigma$ не может быть выпуклой. Ибо, согласно условию (1), A определяет тогда такой скачок $D \prec C$ в Σ, что $D \subset A \subset C$ и A/D — нетривиальная выпуклая подгруппа в C/D, что противоречит o-простоте.

Ивасава первым полностью охарактеризовал систему Σ выпуклых подгрупп л. у. группы; см. его статью [2].

Следствие 13. *O-группа обладает разрешимой нормальной системой. Таким образом, она является RN-группой в смысле Куроша-Черникова*[1].

Следствие 14. *Если выпуклые подгруппы л. у. группы удовлетворяют условию минимальности или максимальности, то каждая выпуклая подгруппа является нормальным делителем.*

Первое следствие очевидно, тогда как второе следует из того факта, что в л. у. группах подгруппы, сопряженные с выпуклой подгруппой C, не являющейся нормальным делителем, образуют бесконечную цепь[2].

Порядковый тип Σ является, очевидно, инвариантом л. у. группы G. Он вполне определяется подмножеством Σ_0, состоящим из всех «главных» выпуклых подгрупп. Здесь под главной выпуклой подгруппой C мы понимаем выпуклую подгруппу, порожденную одним элементом: $C = \{a\}_{\square}$. Выпуклая подгруппа C является главной тогда и только тогда, когда она есть бóльший член скачка $D \prec C$. Все остальные выпуклые подгруппы являются объединениями главных. Если Σ задано, то Σ_0 состоит из бóльших членов скачков. Если же дано Σ_0, то Σ можно получить пополнением Σ_0. А именно, для каждой подгруппы $C \in \Sigma_0$, не имеющей непосредственно предшествующей, добавляем к Σ_0 объединение D всех подгрупп, предшествующих C, и полагаем затем $D \prec C$.

---

[1] См., например, Курош, Теория групп, Москва, 1953, стр. 367.

[2] Таким образом, выпуклые подгруппы инфраинвариантны в смысле М. Краснера, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **208** (1939), 1867—1869.

⁎ 3а. Роль центра в O-группах

Кокорин [3] и Кокорин и Копытов [2] указали на выдающуюся роль, которую играет центр в O-группах. Это явление видно из результатов настоящего раздела.

Следует отметить, что следующие далее результаты тривиальны, когда O-группа обладает тривиальным центром. Что это может случиться (даже для O^*-групп), видно из примера конца п. 2, гл. III.

Теорема 14а (Кокорин и Копытов [2]). *Каждая O-группа G может быть вложена в O-группу G^* с полным центром. Если G является O^*-группой, то в качестве G^* может быть выбрана также O^*-группа.*

Пусть Z — центр O-группы G, а Z^* — минимальная полная абелева группа, содержащая Z; Z^* будет группой без кручения. Пусть G^* будет группой, порожденной своими перестановочными подгруппами G и Z^*, причем $G \cap Z^* = Z$. Тогда элементы группы G^* имеют вид au, где $a \in G$, $u \in Z^*$, и элемент au равен элементу $a_1 u_1$ ($a_1 \in G$, $u_1 \in Z^*$) тогда и только тогда, когда некоторый элемент $z \in Z$ удовлетворяет условиям $a_1 = az$, $u_1 = z^{-1}u$. Ясно, что Z^* будет центром группы G^* и $G/Z \cong G^*/Z^*$ относительно соответствия $aZ \longrightarrow aZ^*$ $(a \in G)$.

Для линейного порядка P группы G рассмотрим множество P^*, состоящее из всех таких элементов $au \in G^*$, что $(au)^n = a^n u^n \in P$ для некоторого натурального числа n. Так как некоторая степень элемента au лежит в G, то либо элемент au, либо его обратный принадлежат P^*. Если имеет место как включение $au \in P^*$, так и включение $a^{-1} u^{-1} \in P^*$, то $a^n u^n \in P$ и $a^{-m} u^{-m} \in P$ для некоторых целых чисел n, $m > 0$. Поэтому $a^{nm} u^{nm} \in P$, $a^{-mn} u^{-mn} \in P$ и $a^{nm} u^{nm} = e$. Таким образом, $a^{nm} \in Z$, т. е. $x^{-1} a^{nm} x = a^{nm}$ для каждого $x \in G$. Так как G является R-группой, $x^{-1} a x = a$ для каждого $x \in G$ и потому $a \in Z$, $au = e$. Для того чтобы показать, что P^* — полугруппа, положим au, $bv \in P^*$ $(a,\ b \in G,\ u, v \in Z^*)$ и $a^n u^n$, $b^m v^m \in P$ для целых n, $m > 0$. Если, например, $ab \leqq ba$, то $a^2 b^2 = a(ab)b \leqq$ $\leqq a(ba)b = (ab)^2$ и по индукции мы получаем $a^k b^k \leqq (ab)^k$ для каждого целого $k > 0$. Следовательно, $(aubv)^{nm} =$

$=(ab)^{nm}u^{nm}v^{nm} \geqq (a^{nm}u^{nm})\,(b^{nm}v^{nm}) \geqq e$, откуда вытекает $(au)\,(bv) \in P^*$, т. е. P^* — полугруппа. Ясно, что полугруппа P^* нормальна в G^*, поэтому она определяет линейный порядок в группе G^*. Заметим, что эта полугруппа P^* является единственным линейным продолжением порядка P на группу G^*.

Переходя ко второму утверждению, положим, что G является O^*-группой, а Q^* — произвольный частичный порядок определенной выше группы G^*. Тогда порядок $G \cap Q^* = Q$ может быть продолжен до линейного порядка P группы G. Как было показано, порядок P имеет единственное линейное продолжение P^* на группу G^*. Этот порядок P^* и будет искомым продолжением порядка Q^*, ибо если $au \in Q^*\,(a \in G,\ u \in Z^*)$, то $a^n u^n \in Q^* \cap G = Q \subseteq P$ для некоторого натурального n и потому также $au \in P^*$. Это завершает доказательство.

Пусть, далее, G — л. у. группа, Σ — цепь всех ее выпуклых подгрупп. Если элемент z лежит в центре Z группы G и если z определяет скачок $C \prec D$ в Σ, то как C, так и D будут нормальными делителями в G. В самом деле, элемент $a \in G$ преобразует скачок, определенный элементом z, в скачок $a^{-1}Ca \prec a^{-1}Da$, определяемый элементом $a^{-1}za = z$. Кроме того, в силу архимедовости группы D/C, каждый внутренний автоморфизм группы G индуцирует тождественный автоморфизм группы D/C, откуда $[G, D] \subseteq C$, т. е. D/C лежит в центре группы G/C.

Мы намерены доказать следующую лемму:

Лемма A (Кокорин и Копытов [2]). *Если G — O-группа, а Z_0 — полная подгруппа центра Z группы G, то группа G допускает линейный порядок, при котором Z_0 будет выпуклой подгруппой. Поэтому факторгруппа G/Z_0 будет O-группой.*

Пусть P — произвольный, но фиксированный линейный порядок группы G, а Σ — соответствующая цепь выпуклых подгрупп. Пусть сначала подгруппа Z_0 изоморфна группе рациональных чисел. Тогда элементы, отличные от e, из подгруппы Z_0 определяют один и тот же скачок $D \prec C$ в системе Σ. Вставим между D и C подгруппу DZ_0, чтобы получить новую систему Σ' подгрупп группы G. (Если $DZ_0 = C$, то $\Sigma' = \Sigma$.) Так как D, DZ_0 и C — нормальные делители группы G, система Σ' тривиальным образом удовлетворяет условиям (1)—(4) п. 3. Она также удовлетворяет условию (5), ибо если имеет место равенство $a_1 \ldots a_n = dz\,(d \in D,\ z \in Z_0)$ для некоторых элементов a_i, сопряженных с $a \in G$, то для элемента $u \in Z_0$, такого, что $u^n = z$, некоторые элементы b_i, сопряженные с элементом $b = au^{-1}$, удовлетворяют условию $b_1 \ldots b_n = d \in D$; поэтому $b \in D$ и $a \in DZ_0$. Ввиду теоремы 11 группа G обладает линейным порядком P', при котором подгруппы системы Σ' выпуклы. Заметим, что группа DZ_0 будет лексикографическим произведением подгрупп Z_0 и D, и мы можем поменять ролями подгруппы Z_0 и D, чтобы получить линейный порядок на группе DZ_0, при котором подгруппа Z_0 выпукла. Группа G как лексикографическое расширение группы DZ_0 при помощи G/DZ_0 обладает линейным порядком желаемого вида. Следовательно, G/Z_0 будет O-группой.

Для того чтобы закончить доказательство, нам надо доказать следующую лемму.

Лемма B. *Если $N_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ — такая цепь нормальных делителей группы G, что все факторгруппы G/N_λ являются O-группами, то и факторгруппа G/N, где $N = \bigcup N_\lambda$, также будет O-группой.*

Если бы факторгруппа G/N не была O-группой, то существовали бы такие элементы $a_1, \ldots, a_n \in G$, что $S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \cap N$ не пусто для любого выбора знаков $\varepsilon_i = \pm 1$ (теорема 2, гл. III). Для каждого из 2^n выборов знаков мы подбираем N_λ с непустым пересечением $S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) \cap N_\lambda$, и если N_μ — наибольшая среди этих подгрупп N_λ, то факторгруппа G/N_μ не может быть O-группой.

Теперь доказательство леммы A может быть завершено с помощью замечания, что подгруппа Z_0 является объединением такой вполне упорядоченной по возрастанию цепи нормальных делителей N_λ группы G, что факторгруппы $N_{\lambda+1}/N_\lambda$ изоморфны аддитивной группе рациональных чисел и по индукции G/N_λ являются O-группами.

Лемма A дает нам возможность доказать следующий интересный результат.

Теорема 14b (Кокорин [3], Кокорин и Копытов [2]). *Факторгруппа G/Z О-группы G по ее центру Z снова будет О-группой. Если G является O^*-группой, то и группа G/Z будет O^*-группой.*

Пусть G — O-группа и Z — ее центр. По теореме 14a мы можем вложить группу G в O-группу G^* с полным центром Z^* так, что $G/Z \cong G^*/Z^*$. По лемме A группа G^*/Z^* снова будет O-группой, поэтому и G/Z будет O-группой. Если же, сверх того, группа G является O^*-группой, то ввиду следствия 15 гл. III каждая факторгруппа группы G снова будет O^*-группой при условии, что она является O-группой, что и требовалось доказать.

Последний результат может быть распространен на подгруппы Z_α из верхнего центрального ряда группы G, в частности на гиперцентр группы G. Доказательство проводится по индукции с простым применением леммы B.

Из предыдущей теоремы немедленно получается

Следствие 14c. *Группа G тогда и только тогда будет О-группой, когда как ее центр Z, так и факторгруппа G/Z являются О-группами.*

Заметим, что коммутант K O-группы G ведет себя иначе: например, факторгруппа G/K не обязана быть O-группой. Если группа G определяется следующим образом:

$$G = \{a, b, c \mid ac = ca, bc = cb, [b, a] = c^2\},$$

то группа G будет нильпотентной класса 2. Она будет O-группой, ибо каждый элемент группы G может быть единственным образом записан в виде $a^n b^m c^r$ с целыми n, m, r, и, полагая, $a^n b^m c^r \geqq e$, если $n > 0$, или $n = 0$, $m > 0$ или же если $n = m = 0$, $r \geqq 0$, мы получим линейный порядок в группе G. Далее, $K = \{c^2\}$ и факторгруппа G/K не будет группой без кручения. ⁎

4. Нормирования линейно упорядоченных абелевых групп

Теперь мы будем рассматривать абелевы группы, а операцию будем записывать аддитивно.

Пусть A — л. у. абелева группа и T — л. у. множество с максимальным элементом μ. *Нормой* $w(a)$ $(a \in A)$ на A называется такая функция, определенная на A и принимающая значения в T, что

(i) $w(a) = \mu$ эквивалентно $a = 0$;
(ii) $w(na) = w(a)$ для каждого целого $n \neq 0$;
(iii) $w(a+b) \geqq \min(w(a), w(b))$.

Из условия (iii) при помощи (ii), как обычно, выводится

(iv) если $w(a) \neq w(b)$, то $w(a+b) = \min(w(a), w(b))$.

Пусть Σ_0 — система главных выпуклых подгрупп группы A, снабженных индексами из множества Π. Пусть, кроме того, Π инверсно упорядочено, т. е. если π, $\varrho \in \Pi$ и $\pi \leqq \varrho$, то $C_\rho \subseteq C_\pi$, и обратно. *Естественная норма* $v(a)$ на A определяется следующим образом:

$$v(a) = \pi, \quad \text{где} \quad \{a\}_\square = C_\pi.$$

Пусть $D_\pi \prec C_\pi$ — скачок в Σ и $B_\pi = C_\pi/D_\pi$. B_π — действительные группы. Система

$$[\Pi, B_\pi (\pi \in \Pi)]$$

является инвариантом группы A и называется *скелетом* группы A. Если A — подгруппа л. у. группы A' и группы A и A' имеют один и тот же скелет, то мы будем говорить, что A' — *непосредственное расширение* группы A. Если группа A не имеет собственных непосредственных расширений, то она будет называться *максимально нормированной*. Вообще, если $A \subseteq A'$, существует естественное отображение (погружение) Π в Π'[1]). Если оно отображает Π на Π', мы называем A' *архимедовым расширением* группы A, если же группа A не имеет собственных архимедовых расширений, то она называется *архимедовски полной*. Архимедовски полная группа всегда максимально нормированная.

Так как Π обладает максимальным элементом μ, соответствующим $0 \in \Sigma_0$, мы раз и навсегда согласимся считать, что в скелете всегда $B_\mu = 0$.

Теорема 15 (Хан [1], Рибенбойм [2]). *Для каждого л. у. множества Π с максимальным элементом и каждого множества B_π $(\pi \in \Pi)$ ненулевых л. у. действи-*

---

[1]) Заметим, что если x, $y \in A$ порождают одну и ту же выпуклую подгруппу в A, то и в A' они так же порождают одну и ту же выпуклую подгруппу.

тельных групп существует л. у. абелева группа со скелетом

$$[\Pi,\ B_\pi\,(\pi \in \Pi)].$$

Образуем лексикографическое произведение $A = \Gamma B_\pi$ над множеством индексов Π. Если элемент $a = \langle \ldots, \ldots, b_\pi, \ldots \rangle$ с $b_\pi = 0$ при $\pi < \pi_0$ и $b_{\pi_0} \neq 0$ принадлежит выпуклой подгруппе C, то каждый элемент $a' = \langle \ldots, b'_\pi, \ldots \rangle$ с $b'_\pi = 0$ при $\pi < \pi_0$ также принадлежит C. Поэтому подгруппа $\{a\}_{\square} = C_{\pi_0}$ состоит из всех векторов, компоненты которых исчезают при $\pi < \pi_0$, а предшествующая ей подгруппа D_{π_0} — из всех векторов с нулевыми компонентами при $\pi \leqq \pi_0$. Следовательно, C_{π_0}/D_{π_0} *o*-изоморфно группе B_{π_0}. Естественной нормой будет $v(a) = \pi_0$, а это приводит к заключению, что группа A имеет заданный скелет.

5. Теорема вложения Хана

Этот раздел посвящается наиболее глубокому результату теории л. у. абелевых групп, утверждающему погружаемость этих групп в лексикографическое произведение действительных групп. Начнем с леммы.

Лемма A. *Каждая л. у. абелева группа G о-изоморфна подгруппе л. у. векторного пространства над полем рациональных чисел $\mathfrak{F}$. Среди таких векторных пространств существует минимальное V, содержащее G. Оно единственно с точностью до о-изоморфизма над G и существует естественное взаимно однозначное соответствие между множествами выпуклых подгрупп в G и V.*

Группа G — абелева группа без кручения, поэтому она может быть погружена в минимальную полную группу V (единственную с точностью до изоморфизма над G), которая может рассматриваться как векторное пространство над полем рациональных чисел. Положим $v \geqq 0\ (v \in V)$ тогда и только тогда, когда $nv \geqq 0$ для некоторого натурального n, причем $nv \in G$. Легко проверяется, что это определение превращает V в л. у. векторное пространство над $\mathfrak{F}$, а линейный порядок в V является единственным порядком, индуцирующим данный порядок в G. Каждая выпуклая подгруппа C из G порождает в V такую выпуклую подгруппу C', что $C' \cap G = C$. Этим завершается доказательство.

Ввиду этой леммы не будет потерей общности, если, изучая проблему погружения, *мы будем рассматривать только векторные пространства над $\mathfrak{F}$.*

Пусть G — л. у. векторное пространство над $\mathfrak{F}$, $[\Pi,\ B_\pi\,(\pi \in \Pi)]$ — скелет G, где действительные группы B_π — также л. у. векторные пространства над $\mathfrak{F}$ и $v(x)$ — естественная норма на G.

Умножение элементов из G на произвольные действительные числа, вообще говоря, не определено, но мы можем ввести умножение на некоторые зависящие от элементов действительные числа, как показано ниже. Пусть $x \in G$ и $v(x) = \pi$; пусть, далее, $D \prec C$ — скачок в системе Σ выпуклых подгрупп из G, соответствующий подгруппе B_π. В силу полноты D, мы можем написать[1] $C = B + D$, где $x \in B$ и $B \cong B_\pi$. Подгруппа B может быть отождествлена с действительной группой, и потому каждый элемент из B мы можем записать в виде rx, где r — действительное число.

Согласно предложению 2, действительные числа r, для которых существуют в G элементы rx, однозначно определяются элементом x и группой G; однако следует отметить, что значение rx может зависеть от выбора B и, следовательно, мы должны считать B фиксированным для данного x.

Лемма B. *Если $v(x) = v(y) = \pi$, $y \neq 0$, то существует единственное действительное число r, такое, что*

$$v(y - rx) > v(y).$$

Используя те же обозначения, что и выше, запишем $y = x' + z$, где $x' \in B$, $z \in D$. Тогда $x' = rx$ для некоторого определенного действительного r. Ясно, что $v(z) > \pi$.

Наша основная цель будет достигнута благодаря следующей лемме.

---

[1] Это прямое разложение применимо не только к абстрактным группам, но и к упорядоченным, так как легко видеть, что оно является лексикографической суммой.

Основная лемма (Хауснер—Уэндел [1]). *Пусть* $[\Pi,\ B_\pi (\pi \in \Pi)]$ — *скелет л. у. векторного пространства*[1] G, *и пусть для каждого* $\pi \in \Pi$ *выделено такое* $e_\pi \in G$, *что* $v(e_\pi) = \pi$. *Пусть, кроме того,* f_π *обозначает элемент лексикографической суммы* $W(G)$ *групп* $B_\pi (\pi \in \Pi)$ *с* $b_\pi \in B_\pi$ *на* π-*м месте и* 0 *на остальных местах, где* b_π *соответствует* e_π *в* B_π. *Предположим, что мы имеем собственное подпространство* G_0 *пространства* G, *содержащее все действительные кратные элемента* e_π, *которые имеются в* G, *и такую функцию* F, *отображающую* G_0 *в* $W(G)$, *что*

(i) $F(a+b) = F(a) + F(b)$, $F(sa) = sF(a)$ *для рациональных* s;

(ii) F *отображает* G_0 *взаимно однозначно на некоторое подмножество* $F(G_0)$ *из* $W(G)$;

(iii) F *сохраняет порядок;*

(iv) *Для каждого* $\pi \in \Pi$

$$F(re_\pi) = rf_\pi$$

всякий раз, когда r — *такое действительное число, что* $re_\pi \in G_0$;

(v) *если* $f \in F(G_0)$ *и* C — *любое сечение в* Π, *то*

$$Cf \in F(G_0).$$

[Здесь *сечение* C определяется некоторым $\pi_0 \in \Pi$, так что $Cf = g$ удовлетворяет[2] условию $g(\pi) = f(\pi)$ при $\pi < \pi_0$ и $g(\pi) = 0$ при $\pi \geqq \pi_0$.]

Пусть $x \in G$, $x \notin G_0$ *и* $G_1 = \{G_0, \mathfrak{F}x\}$. *Тогда существует продолжение функции* F, *которое отображает* G_1 *в* $W(G)$ *и снова удовлетворяет условиям* (i)—(v).

Доказательство состоит из ряда шагов.

а) Множество всех $v(x-y)$, где y пробегает G_0, не имеет максимального элемента, так как если $v(x-y) = v(e_\pi)$, то по лемме B существует такое действительное число r, что $v(x-y-re_\pi) > v(x-y)$ и здесь $y + re_\pi \in G_0$. Мы заключаем, что рассматриваемое множество значений $v(x-y)$ обладает вполне упорядоченным конфинальным подмножеством Θ, проиндексированным порядковыми числами α, меньшими, чем некоторое предельное порядковое число θ. Пусть π_α — элементы из Θ и $z_\alpha \in G_0$ — такие элементы, что

$$v(x - z_\alpha) = \pi_\alpha.$$

(b) $\alpha < \beta$ означает, что $v(x-z_\alpha) < v(x-z_\beta)$, откуда $v(z_\alpha - z_\beta) = v(x - z_\alpha) = \pi_\alpha$. Таким образом, $z_\alpha - z_\beta$ и e_{π_α}, а также, в силу условия (iii), $F(z_\alpha - z_\beta)$ и f_{π_α} архимедовски эквивалентны, следовательно, $F(z_\alpha) = z'_\alpha$ и $F(z_\beta) = z'_\beta (\in W(G))$ имеют одни и те же компоненты при $\pi < \pi_\alpha$. Определим

$$x' = \langle \ldots, x'(\pi), \ldots \rangle$$

посредством соглашения $x'(\pi) = z'_\alpha(\pi)$, если существует π_α, большее, чем π, и $x'(\pi) = 0$ в противном случае. Ясно, что x' вполне определен и принадлежит $W(G)$, так как $x'(\pi)$ исчезают, за исключением вполне упорядоченного множества. Продолжим функцию F, полагая $F(sx+y) = sx' + F(y)$ $(y \in G_0)$ для рациональных s. Мы должны теперь проверить, что продолженная функция F удовлетворяет условиям (i)—(v).

(c) Условия (i) и (iv), очевидно, выполняются. Чтобы проверить (v), положим, что C — сечение элементом π_0 и $f \in F(G_1)$. Элемент f имеет вид $f = sx' + y'$, где $y' = F(y)$, и, следовательно, $Cf = sCx' + Cy'$. Если π_0 меньше, чем некоторое $\pi_\alpha \in \Theta$, то $Cx' = Cz'_\alpha$ и потому $Cf = C(sz'_\alpha + y')$ является сечением некоторого элемента из $F(G_0)$. Если π_0 превосходит все $\pi_\alpha \in \Theta$, то $Cx' = x'$ и потому $Cf = sx' + Cy' = sx' + y'_1$ для некоторого $y_1 \in G_0$.

(d) Докажем теперь условие (ii). Мы покажем, что равенство $x' = y' = F(y)$ невозможно для $y \in G_0$. Если бы равенство $x' = y'$ выполнялось, то для $\pi < \pi_\alpha \in \Theta$ имело бы место равенство $y'(\pi) = z'_\alpha(\pi)$ и поэтому $v(y' - z'_\alpha) \geqq \pi_\alpha = v(f_{\pi_\alpha})$. Тогда $\{f_{\pi_\alpha}\}_\square \supseteq \{y' - z'_\alpha\}_\square$ и, в силу условия (iii), мы получили бы $\{e_{\pi_\alpha}\}_\square \supseteq \{y - z_\alpha\}_\square$, откуда $v(y - z_\alpha) \geqq v(e_{\pi_\alpha}) = \pi_\alpha = v(x - z_\alpha)$. Таким образом, $v(x-y) \geqq \min(v(y-z_\alpha),\ v(x-z_\alpha)) = v(x-z_\alpha)$ для всех $\alpha < \theta$. Это противоречит конфинальности Θ и утверждению пункта (а).

---

[1] Здесь рассматриваются только векторные пространства над $\mathfrak{F}$.

[2] $g(\pi)$ обозначает компоненту элемента $g \in W(G)$ в B_π.

(e) Обращаясь, наконец, к доказательству условия (iii), легко заметить, что достаточно показать несовместность неравенств $x > y$ и $x' < y'$ $(y \in G_0)$ (и аналогично $x < y$, $x' > y'$). Предположим противное: пусть они выполняются, и пусть π_0 — первый из тех $\pi \in \Pi$, для которых $x'(\pi) \neq y'(\pi)$, т. е. $x'(\pi_0) < y'(\pi_0)$. Существует такой $\pi_\alpha \in \Theta$, что $\pi_0 < \pi_\alpha$, так как в противном случае x' было бы сечением $\mathrm{C}y'$ элемента y' и, согласно условию (v), $x' = \mathrm{C}y' = y_1'$ в противоречие с пунктом (d). Для такого α мы имеем $x'(\pi_0) = z_\alpha'(\pi_0) < y'(\pi_0)$, но $z_\alpha'(\pi) = y'(\pi)$ для $\pi < \pi_0$. Следовательно, $z_\alpha' < y'$ и $z_\alpha < y$, так как условие (iii) выполняется на G_0. Итак, мы заключаем, что $x > y > z_\alpha$, $x - z_\alpha > y - z_\alpha > 0$, откуда $v(y - z_\alpha) \geqq v(x - z_\alpha) = \pi_\alpha = v(e_{\pi_\alpha})$. Так же как в пункте (d), мы получаем $v(y' - z_\alpha') \geqq \pi_\alpha$, что означает справедливость равенства $y'(\pi) = z_\alpha'(\pi)$ при $\pi < \pi_\alpha$ и, в частности, при $\pi = \pi_0$. Это противоречие завершает доказательство условия (iii) и основной леммы.

Очевидно, что $W(G)$ имеет тот же скелет, что и G.

Теорема 16 (Теорема вложения Хана, Хан [1]). *Каждое л. у. векторное пространство G над полем рациональных чисел о-изоморфно подпространству лексикографически упорядоченного функционального пространства*[1] $W(G)$.

Если пространство G дано, возьмем в качестве G_0 подпространство, натянутое на принадлежащие G действительные кратные элементов e_π. Легко проверяется, что никакая сумма $r_1 e_{\pi_1} + \ldots + r_k e_{\pi_k}$ с действительными $r_i \neq 0$ и $\pi_1 < \ldots < \pi_k$ не может быть нулем, и потому функция F_0, определенная на G_0 при помощи условий (i), (iv), удовлетворяет всем условиям (i)—(v). Частично упорядочим теперь пары $[G_\nu, F_\nu]$ (где G_ν — подпространство в G, содержащее G_0, а F_ν — функция, отображающая G_ν в $W(G)$ и продолжающая функцию F_0), положив $[G_\nu, F_\nu] \leqq [G_\mu, F_\mu]$ тогда и только тогда, когда $G_\nu \subseteq G_\mu$ и F_μ согласована с F_ν на G_ν. Мы можем, очевидно, применить лемму Цорна, чтобы установить существование максимальной пары $[G_\lambda, F_\lambda]$. Здесь G_λ совпадает с самим G, ибо в противном случае, согласно основной лемме, мы могли бы расширить $[G_\lambda, F_\lambda]$. Этим доказательство завершено.

Теперь мы установим следующие теоремы «полноты»:

Теорема 17. *Л. у. векторное пространство G над полем рациональных чисел максимально нормировано тогда и только тогда, когда оно о-изоморфно пространству $W(G)$.*

Теорема 18 (Хан [1]). *Л. у. абелева группа G тогда и только тогда архимедовски полна, когда все группы B_π ее скелета $[\Pi, B_\pi (\pi \in \Pi)]$ о-изоморфны всей группе действительных чисел, а G о-изоморфна с $W(G)$.*

Оба доказательства аналогичны, и мы ограничимся подробным изложением первого доказательства. Если G не *о*-изоморфна $W(G)$, то она *о*-изоморфна собственному подпространству пространства $W(G)$ и потому не является максимально нормированной. Обратно, если $G \cong_o W(G)$ и если бы существовало непосредственное расширение H пространства G, то, рассматривая H снова как векторное пространство, мы могли бы применить основную лемму к данному *о*-изоморфизму G на $W(G)$ в качестве F и некоторому $x \in H$, не лежащему в G. Если F_1 — продолжение F на $G_1 = \{G, \mathfrak{F}x\}$, то $F_1(x) = x'$ принадлежит $W(H) = W(G)$. Поэтому существует такой $y \in G$, что $F_1(y) = F_1(x)$, что в G_1 невозможно.

Первоначальное доказательство Хана было крайне длинным и сложным. Недавно ряд авторов получили более простые доказательства и обобщения. Доказательство, данное выше, основано на идее Хауснера—Уэндела [1]. Они доказали теорему Хана для векторных пространств над полем действительных чисел, а Клиффорд [4] заметил, что их метод работает так же и в общем случае. Другие доказательства см. у Банашевского [1], Грейветта [2], Рибенбойма [2], Конрада [1], [7]. Последний автор распространил эту теорему на некоторые ч. у. абелевы группы и даже более общие системы; он использовал разложения данной группы.

Недавно Конрад, Харви и Холланд доказали теорему вложения Хана для коммутативных с. у. групп.

Результаты этого раздела останутся справедливыми и в том случае, если мы заменим основное поле $\mathfrak{F}$ полем действительных чисел. Кроме того, если размерность

---

[1] По поводу определения $W(G)$ см. основную лемму.

самое большее счетна, то мы можем доказать несколько больше.

Теорема 19 (Эрдёш [1]). *Пусть V — счетномерное л. у. векторное пространство над полем действительных чисел. Тогда V обладает таким л. у. базисом $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ ($n \leqq \dim V$), что*

$$r_1b_1+\ldots+r_nb_n > 0 \quad (r_i \text{ — действительные числа, } r_i \neq 0),$$

тогда и только тогда, когда коэффициент наибольшего в данной упорядоченности b_i положителен.

Векторное пространство V обладает базисом $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ над полем действительных чисел. Положим $b_1=|a_1|$ и допустим, что $b_1, \ldots, b_n \in V$ выбраны так, что (1) $b_i > 0$, (2) значения $v(b_i)$ естественной нормы v различны и (3) на векторы $b_1, \ldots, b_n$ натянуто то же самое подпространство V_n, что на векторы $a_1, \ldots, a_n$. Рассмотрим вектор a_{n+1}, не зависимый от V_n. Если $v(a_{n+1}) \neq v(b_i)$ при $i=1, \ldots, n$, то мы полагаем $b_{n+1}=|a_{n+1}|$, если же $v(a_{n+1})$ равно некоторому $v(b_i)$, то возьмем $v(b_j)$ — наибольшее из тех $v(b_i)$, для которых существует линейная комбинация $x=r_1b_1+\ldots+r_nb_n+ra_{n+1}$ с $r \neq 0$ и $v(x)=v(b_j)$. По лемме B существует такое действительное число r', что $v(x-r'b_j) > v(b_j)$, и мы положим $b_{n+1}=|x-r'b_j|$. Тогда мы получим систему из $n+1$ вектора $b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$, обладающую теми же свойствами (1)—(3). Итак, мы можем построить такой новый базис $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ с положительными b_n, что нормы $v(b_n)$ будут все различны. Эти b_n и будут искомыми, ибо, согласно свойству (iv) нормирований (см. п. 4), мы имеем

$$v(r_1b_{i_1}+\ldots+r_kb_{i_k})=\min_j v(r_jb_{i_j})=\min_j v(b_{i_j}),$$

и при $v(x) > v(y)$ неравенство $x+y>0$ выполняется тогда и только тогда, когда $y>0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что л. у. векторные пространства над полем действительных чисел размерности, не превосходящей $\aleph_0$, вполне определяются своими скелетами $[\Pi, B_\pi\ (\pi \in \Pi)]$, более того, даже одним Π, потому что все B_π o-изоморфны всей группе действительных чисел. Легко видеть, что порядковый тип Π может быть любым счетным порядковым типом.

Методы упорядочения векторных пространств над полями были рассмотрены Конрадом [4], [5].

6. Циклически упорядоченные группы

Теперь мы обращаемся к несколько более специальному вопросу о циклическом упорядочении. Оно существенно отличается от отношения порядка, изучавшегося до сих пор, тем, что является тернарным отношением. Мы покажем, что каждая циклически упорядоченная группа может быть получена при помощи специальной конструкции из некоторой л. у. группы.

Говорят, что группа K *циклически упорядочена*[1]), если для некоторых троек различных элементов из K определено отношение (a, b, c), обладающее следующими свойствами:

C1) имеет место ровно одно из отношений (a, b, c) и (a, c, b);
C2) из (a, b, c) следует (b, c, a);
C3) из (a, b, c) и (a, c, d) следует (a, b, d);
C4) из (a, b, c) следует (xa, xb, xc) и (ay, by, cy) для всех $x, y \in K$.

Если в условии C3 поменять ролями a и c, b и d, то мы получим, что из (a, b, c) и (a, c, d) следует (b, c, d). В этом случае справедливо каждое из четырех отношений циклического порядка, получающихся из (a, b, c, d) отбрасыванием одного элемента. Вообще, если $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ($n \geqq 3$) означает, что (a_i, a_j, a_k) имеет место для всех $i<j<k$, то, используя C2 и C3, легко доказать по индукции следующую лемму.

Лемма. *Если*

$$(a, b_i, b_{i+1}) \quad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

то

$$(a, b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

В частности, $a, b_1, b_2, \ldots, b_n$ различны.

---

[1]) См. Ригер [1].

Важны следующие примеры.

1. Циклическая группа $K=\{a\}$ порядка n может быть циклически упорядочена, если положить (a^k, a^l, a^m) $(0 \leqq k, l, m \leqq n-1)$ в точности тогда, когда $k<l<m$, или $l<m<k$, или же $m<k<l$.

Другой образующий элемент a' группы K порождает иной циклический порядок.

2. Комплексные числа на единичной окружности (или произвольная подгруппа) образуют циклически упорядоченную группу, если (a, b, c) означает, что числа a, b, c следуют друг за другом против часовой стрелки.

3. Если G — любая л. у. группа, то циклический порядок на G может быть определен при помощи правила: (a, b, c), если либо $a<b<c$, либо $b<c<a$, либо $c<a<b$. Он может быть назван индуцированным циклическим порядком.

4. Пусть G — л. у. группа, содержащая в центре такой элемент $z>e$, что $\{z\}_{\square}=G$. Тогда факторгруппу $G/\{z\}=K$ можно циклически упорядочить, полагая (a, b, c) для смежных классов a, b, c по $\operatorname{mod}\{z\}$, если для единственных представителей r_a, r_b, r_c смежных классов a, b, c, удовлетворяющих условию $e \leqq r_a, r_b, r_c<z$, имеет место отношение (r_a, r_b, r_c) в G в смысле предыдущего примера.

Циклически упорядоченные периодические группы могут быть полностью описаны. То же самое имеет место и для множеств элементов конечного порядка циклически упорядоченных групп.

Теорема 20. *Элементы конечного порядка циклически упорядоченной группы K принадлежат ее центру. Они образуют подгруппу T группы K, о-изоморфную подгруппе циклически упорядоченной группы C комплексных корней из единицы.*

Допустим, что (e, b, a) для некоторого элемента $a \in K$ конечного порядка n. Если $(e, a^{-1}ba, b)$, то по условию C4 также имеет место и отношение $(e, a^{-k-1}ba^{k+1}, a^{-k}ba^{k})$ при $k=0, 1. \ldots, n-1$, что, в силу леммы, невозможно. Если же $(e, a^{-1}ba, b)$ не имеет место и $a^{-1}ba \neq b$, то выполнено отношение (e, aba^{-1}, b) и мы получаем аналогичное противоречие. Таким образом, $a^{-1}ba=b$ для всех тех $b \in K$, для которых (e, b, a). Остается только случай, когда (e, a, b). Тогда, в силу условия C4 $(e, a^{-1}b, a^{-1})$ и из доказанного выше, следует, что элементы $a^{-1}b$ и a^{-1} коммутируют, поэтому то же имеет место и для a и b. Таким образом, a принадлежит центру и элементы конечного порядка образуют подгруппу T группы K.

Далее мы проверяем, что каждая конечная (= конечно порожденная) подгруппа $A \neq e$ из T циклична. Группа A заведомо содержит такой элемент $a \neq e$, что никакой $x \in A$ не удовлетворяет отношению (e, x, a), ибо иначе мы могли бы построить такую последовательность $a, a_2, a_3, \ldots$, что (e, a_{i+1}, a_i), а это ввиду конечности A противоречит лемме. Если это a имеет порядок 2, то из (e, a, y) для некоторого $y \in A$ следует (a, e, ay), что абсурдно; таким образом, $A=\{a\}$. Если же a имеет порядок $n \geqq 3$, то (e, a, a^2) и потому для каждого k мы получаем (a^k, a^{k+1}, a^{k+2}). Ни для какого $x \in A$ отношение (a^k, x, a^{k+1}) невозможно, так как тогда было бы (e, xa^{-k}, a). Отношение (a^k, a^{k+1}, x) для некоторого $x \in A$ и всякого k также противоречит лемме. Значит, $A=\{a\}$ и $(e, a, a^2, \ldots, a^{n-1})$. Следовательно, A — локально циклическая периодическая группа и потому она изоморфна подгруппе группы C.

Группа T может быть получена как объединение возрастающей цепи конечных групп A_n; $T=\bigcup A_n$. Каждая группа A_n является циклической порядка m_n, а рассмотрения предшествующего абзаца показывают, что она обладает однозначно определенным образующим элементом a_n, таким, что $(e, a_n, a_n^2, \ldots, a_n^{m_n-1})$. В этом случае отображение φ_n: $a_n^k \longrightarrow \exp 2k\pi i/m_n$ является о-изоморфизмом A_n в C. Так как, очевидно, это единственный о-изоморфизм A_n в C, мы заключаем, что φ_{n_1} и φ_{n_2} $(n_1<n_2)$ согласуются на A_{n_1}. Следовательно, φ_n определяют о-изоморфизм φ подгруппы T в C, что и требовалось доказать.

Следующий результат показывает, что конструкция примера 4 является наиболее общей.

Теорема 21 (Ригер [1]). *Для каждой циклически упорядоченной группы K существуют линейно упорядоченная группа G и элемент z центра группы G, такие, что K может быть получена из G способом, описанным в примере 4.*

Мы определяем группу G как центральное шрейеровское расширение бесконечной циклической группы $\{z\}$ при помощи данной группы K. Пусть G состоит из всех пар $\langle z^k, a\rangle$ с целыми k и $a \in K$, подчиненных правилам:

$\langle z^k, a\rangle = \langle z^l, b\rangle$ тогда и только тогда, когда $k = l$ и $a = b$, и

$$\langle z^k, a\rangle \cdot \langle z^l, b\rangle = \langle z^{k+l} f_{a,b}, ab\rangle,$$

где факторы $f_{a,b}$ определяются при помощи условий

$$f_{a,b} = \begin{cases} e, & \text{если } a = e, \text{ либо } b = e, \text{ либо } (e, a, ab), \\ z, & \text{если } ab = e \ (\text{с } a \neq e), \text{ либо } (e, ab, a). \end{cases}$$

Непосредственное вычисление показывает, что справедливы условия ассоциативности $f_{a,b} f_{ab,c} = f_{a,bc} f_{b,c}$ (для всех $a, b, c \in K$). Таким образом, G существует; мы полагаем, что положительный конус P группы G состоит из всех пар $\langle z^k, a\rangle$ с $k \geqq 0$. Тогда P удовлетворяет условиям теоремы 2, гл. II и поэтому он определяет частичный (и даже линейный) порядок на G. Теперь $\langle z, e\rangle$ лежит в центре G и, очевидно, $\{\langle z, e\rangle\}_{\square} = G$, $G/\{\langle z, e\rangle\} \cong K$. Каждый смежный класс $\bar{a}$ по $\mathrm{mod}\,\{\langle z, e\rangle\}$ может быть представлен единственным элементом вида $\langle e, a\rangle$ и в соответствии с предписанием примера 4 мы должны положить $(\bar{e}, \bar{a}, \bar{b})$ $(a \neq e \neq b \neq a)$ тогда и только тогда, когда $\langle e, a\rangle < \langle e, b\rangle$ в G или, что то же самое, когда $\langle z^{-1}, a^{-1}\rangle \times \times \langle e, b\rangle = \langle z^{-1} f_{a^{-1},b}, a^{-1}b\rangle \in P$. А это происходит только в том случае, когда имеет место отношение $(e, a^{-1}b, a^{-1})$, т. е. (e, a, b). Это завершает доказательство.

Заметим, что G содержит максимальную выпуклую подгруппу H, не содержащую $\langle z, e\rangle$, а G/H должно быть o-изоморфно действительной группе. Так как $H \cap \{\langle z, e\rangle\} = e$, H может рассматриваться как подгруппа группы K. Она может быть охарактеризована в K как множество всех тех элементов $h \in K$, для которых имеет место либо отношение $(e, h, h^2, \ldots, h^n, \ldots,)$, либо же $(e, h^{-1}, h^{-2}, \ldots, h^{-n}, \ldots)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. (Ее циклический порядок индуцируется линейным.) Таким образом, циклически упорядоченная группа является шрейеровским расширением л. у. группы при помощи подгруппы действительных чисел по mod 1. (Ср. Сверчковский [1].)

Шепперд [1], [2], [3] изучал группы, в которых определялось тернарное отношение «между» или кватернарное отношение «разделения», обладающее свойствами, подобными свойствам соответствующих известных понятий для точек числовой прямой, а также свойством монотонности.

Глава V

СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

1. Алгебраические правила

Этот раздел посвящен установлению некоторых основных свойств с. у. групп, которые мы будем использовать много раз1).

Напомним определение: с. у. группой называется множество G, удовлетворяющее условиям:

L1. G — группа относительно умножения.

L2. G — структура с отношением $\leqq$.

L3. Из $a \leqq b$ следует $ca \leqq cb$ и $ac \leqq bc$ для всех $c \in G$.

В гл. II, п. 1, было показано, что условие L3 допускает ряд равносильных формулировок. Теперь мы добавим к ним еще две:

А) L3 эквивалентно любому из тождеств (Стоун [1]):

$$c(a \vee b)d = cad \vee cbd \text{ для всех } a, b, c, d \in G,$$
$$c(a \wedge b)d = cad \wedge cbd \text{ для всех } a, b, c, d \in G.$$

Любое из этих тождеств тривиально влечет L3, в то время как из L3 сразу следует, что $x \geqq cad \vee cbd$ равносильно неравенству $x \geqq c(a \vee b)d$ и двойственно. Таким образом, *класс с. у. групп эквационально определим*2).

---

1) Общая теория с. у. групп идет от Биркгофа [1].

2) Класс алгебраических систем, который может быть охарактеризован при помощи тождеств, содержащих финитарные операции, определенные для всех (конечных) множеств элементов, называется *эквационально определимым*. Такой класс замкнут относительно образования подсистем, гомоморфных образов и полных прямых произведений. Важный результат Биркгофа утверждает, что эквационально определимая алгебраическая система может быть представлена в виде подпрямого объединения подпрямо неразложимых систем того же типа.

B) Для всех a, b, c, $d \in G$ мы имеем

$$c(a \wedge b)^{-1} d = ca^{-1}d \vee cb^{-1}d,$$
$$c(a \vee b)^{-1} d = ca^{-1}d \wedge cb^{-1}d.$$

В главе II мы доказали эти тождества для $c = d = e$; общий случай является непосредственным следствием свойства A).

C) В специальном случае $c = a$, $d = b$ свойство B) дает нам

$$a(a \wedge b)^{-1} b = a \vee b \quad \text{для всех} \quad a, b \in G.$$

Если G коммутативна, мы получаем

$$ab = (a \wedge b)(a \vee b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in G.$$

D) *С. у. группа является дистрибутивной структурой.* По известному критерию дистрибутивности достаточно проверить, что из $a \vee x = a \vee y$ и $a \wedge x = a \wedge y$ следует $x = y$. Используя C), мы получаем

$$x = (a \wedge x) a^{-1} a (a \wedge x)^{-1} x = (a \wedge x) a^{-1} (a \vee x) =$$
$$= (a \wedge y) a^{-1} (a \vee y) = y.$$

E) *Структурный порядок изолирован, поэтому с. у. группа G — группа без кручения.* Допустим, что элемент $a \in G$ удовлетворяет неравенству $a^n \geqq e$ для натурального числа n. Тогда, в силу A),

$$(a \wedge e)^n = a^n \wedge \ldots \wedge a \wedge e = a^{n-1} \wedge \ldots \wedge a \wedge e = (a \wedge e)^{n-1}.$$

Следовательно, $a \wedge e = e$ и $a \geqq e$.

Эверетт и Улам [1] показали, что в с. у. группах неравенство $a^n > b^n (> e)$ может выполняться для некоторого натурального числа n и без справедливости неравенства $a > b$. Из E) следует, что в коммутативном случае это невозможно. Строгая изолированность, вообще говоря, не имеет места, как можно показать при помощи примера 10, гл. II, п. 3.

⁎ Тот же самый пример служит для того, чтобы показать, что с. у. группа не является вообще R-группой, так как здесь имеет место равенство $(ac)^2 = abc^2 = (bc)^2$, однако $ac \neq bc$. Мы видим также, что не все с. у. группы будут O-группами. ⁎

F) *Ч. у. группа G тогда и только тогда является с. у. группой, когда для всякого $a \in G$ в G*[1]) *существует наим. в. г. $a \vee e$.* Если $a \vee e$ существует для каждого a, то, как легко доказать, элементы, определенные равенствами $a \vee b = (ab^{-1} \vee e) b$ и $a \wedge b = (a^{-1} \vee b^{-1})^{-1}$, будут наим. в. г. и наиб. н. г. элементов a и b.

G) *В с. у. группах свойства полной целозамкнутости и архимедовости эквивалентны* (Биркгоф [1]). Так как в любой ч. у. группе первое свойство влечет второе, мы докажем только обратное утверждение. Допустим, что $a^n \leqq b$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в с. у. группе G. Тогда $(a \vee e)^n = a^n \vee a^{n-1} \vee \ldots \vee a \vee e \leqq b \vee e$ для $n = 1, 2, \ldots$ и, очевидно,

$$(a \vee e)^{-n} \leqq e \leqq b \vee e \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, $(a \vee e)^n \leqq b \vee e$ для всех целых n. Следовательно, в силу архимедовости, $a \vee e \leqq e$, т. е. $a \leqq e$, что и требовалось доказать.

Заметим, что архимедова с. у. группа может иметь неархимедов гомоморфный образ. Это видно на с. у. группе всех действительных функций, определенных на положительных действительных числах, факторгруппа которой по подгруппе ограниченных функций является неархимедовой с. у. группой. Функция x^2 положительна и бесконечно мала по отношению к x^4.

H) Для с. у. групп справедлива следующая теорема о продолжениях.

Теорема 1 (Рисс [1], Биркгоф [1], Лоренцен [3]). *Пусть G — с. у. группа и a_i, b_j такие элементы из G, что*

$$a_1 a_2 \ldots a_m = b_1 b_2 \ldots b_n \quad (a_i \geqq e,\ b_j \geqq e).$$

Тогда в G существуют элементы c_{ij} $(i = 1, \ldots, m;$ $j = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие условиям:

α) $c_{ij} \geqq e$;
β) $a_i = c_{i1} c_{i2} \ldots c_{in}$ $(i = 1, \ldots, m)$;
γ) $b_j = c_{1j} c_{2j} \ldots c_{mj}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Более того, мы можем предположить, что

δ) $c_{i+1, j} \ldots c_{mj} \wedge c_{i, j+1} \ldots c_{in} = e$ *для всех $i < m$, $j < n$, и при этом предположении элементы c_{ij} определяются однозначно.*

Мы начнем с того случая, когда $m = n = 2$, $a_1 a_2 = b_1 b_2$.

---

[1]) По поводу определения с. у. групп в терминах $a \vee e$ см. Мичиура [1] и Линеш Эскардо и Маллоль Бальманья [1].

⁎ Ср. также Вайда [3]. ⁎

Положим

$$c_{11}=a_1\wedge b_1,\quad c_{12}=c_{11}^{-1}a_1,\quad c_{21}=c_{11}^{-1}b_1,\quad c_{22}=a_2\wedge b_2.$$

Тогда будет $c_{21}=(a_1^{-1}\vee b_1^{-1})\,b_1=a_1^{-1}b_1\vee e=a_2b_2^{-1}\vee e=a_2c_{22}^{-1}$ и аналогично $c_{12}=b_2c_{22}^{-1}$, откуда вытекает, что условия β) и γ) выполняются. Условие δ) также выполняется, ибо $c_{12}\wedge c_{21}=c_{11}^{-1}(a_1\wedge b_1)=e$.

Предположим, что теорема верна для таких целых чисел m', n', что $m'\leqq m$, $n'<n$ $(n\geqq 3)$, и запишем данное равенство в виде

$$a_1a_2\ldots a_m=b_1b_2\ldots(b_{n-1}b_n).$$

По предположению индукции существуют такие положительные элементы c_{ij} $(i=1,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ \ldots,\ n-2)$ и d_i $(i=1,\ \ldots,\ m)$, что

$$a_i=c_{i1}\ldots c_{i,\,n-2}d_i$$

и

$$b_j=c_{1j}\ldots c_{mj}\quad (j\leqq n-2),\qquad b_{n-1}b_n=d_1\ldots d_m.$$

Применим опять предположение индукции, теперь уже к последнему равенству, чтобы установить существование таких элементов $c_{ij}\geqq e$ $(i=1,\ \ldots\ m;\ j=n-1,\ n)$, что

$$d_i=c_{i,\,n-1}c_{in},\qquad b_j=c_{1j}\ldots c_{mj}.$$

Мы можем дополнительно предположить справедливость δ); тогда предположения индукции дают

$$c_{i+1,\,j}\ldots c_{mj}\wedge c_{i,\,j+1}\ldots c_{i,n-2}d_i=e \text{ для всех } i<m,\ j<n-2.$$

и

$$c_{i+1,\,n-1}\ldots c_{m,\,n-1}\wedge c_{in}=e$$

соответственно, доказывая, таким образом, справедливость δ).

Остается проверить утверждение единственности. Из δ) умножением на c_{ij} мы получаем равенство

$$c_{ij}c_{i+1,\,j}\ldots c_{mj}\wedge c_{ij}c_{i,\,j+1}\ldots c_{in}=c_{ij},$$

где

$$c_{ij}c_{i+1,\,j}\ldots c_{mj}=(c_{1j}\ldots c_{i-1,\,j})^{-1}b_j$$

и

$$c_{ij}c_{i,\,j+1}\ldots c_{in}=(c_{i1}\ldots c_{i,\,j-1})^{-1}a_i.$$

Это показывает, завершая доказательство, что элементы c_{ij} могут быть подсчитаны рекурсивно.

Следствие 2. *Если a, b_1, …, b_n — такие положительные элементы с. у. группы G, что*

$$a\leqq b_1,\ \ldots,\ b_n,$$

то в G существуют положительные элементы a_1, …, a_n, удовлетворяющие условиям

$$a=a_1\ldots a_n\quad и\quad a_j\leqq b_j\qquad (j=1,\ \ldots,\ n).$$

Существует такой элемент $a'\geqq e$, что $aa'=b_1\ldots b_n$, и к этому разложению мы применяем предыдущую теорему.

2. Ортогональность

Элементы a и b с. у. группы G называются *ортогональными*[1]), что записывается символом

$$a\perp b,$$

если $a\wedge b=e$. Ясно, что условие $x\wedge y=z$ эквивалентно ортогональности элементов xz^{-1} и yz^{-1}.

Рассмотрим некоторые простые свойства ортогональности элементов.

A) *Если $a\perp b$ и $c\geqq e$, то $a\wedge bc=a\wedge c$ (и $a\wedge cb=a\wedge c$).* Действительно, $a\wedge c=a\wedge(a\wedge b)c=a\wedge ac\wedge bc=a\wedge bc$, так как $ac\geqq a$. (Таким образом, из $a\leqq bc$, $c\geqq e$ и $a\perp b$ следует $a\leqq c$.)

B) *Если $a\perp b$ и $a\perp c$, то $a\perp bc$.* Это непосредственно следует из A).

C) *Если $a\perp b$ и $a\perp c$, то $a\perp b\wedge c$ и $a\perp b\vee c$.* Первое отношение ортогональности тривиально, в то время как второе следует из дистрибутивности: $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=e$.

Отсюда следует, что множество D_a всех ортогональных к a элементов из G является подполугруппой и выпуклой подструктурой положительного конуса группы G.

---

[1]) По другой терминологии *дизъюнктными*.

D) *Если* $a_1, \ldots, a_n$ — *попарно ортогональные элементы, то*

$$a_1 \vee \ldots \vee a_n = a_1 \ldots a_n.$$

В силу B), произведение $a_1 \ldots a_{n-1}$ ортогонально к a_n, таким образом, из условия C), п. 1 следует $(a_1 \ldots a_{n-1}) \vee \vee a_n = a_1 \ldots a_{n-1} a_n$. Если мы допустим в качестве основания индукции, что $a_1 \vee \ldots \vee a_{n-1} = a_1 \ldots a_{n-1}$, то мы сразу придем к желаемому равенству.

E) В частном случае, когда $n = 2$, мы получаем из D), что $a_1 a_2 = a_1 \vee a_2 = a_2 a_1$ всякий раз, когда $a_1 \perp a_2$, т. е. что *ортогональные элементы перестановочны.*

Кутыев [1] показал, что ортогональность может быть определена вообще в произвольной ч. у. группе G. Пусть P—положительный конус группы G; назовем элементы $a, b \in G$ ортогональными, если $Pa^{-1} \cap Pb^{-1} = P$. Отсюда сразу следует, что в с. у. группах это определит то же самое понятие, что и выше.

Назовем элемент $p \in G$ $(p > e)$ *атомом*, если из $e \leqq x < p$ вытекает $x = e$. Очевидно, что если p — атом и a — произвольный элемент (больший e) группы G, то либо $p \perp a$, либо же $p \leqq a$.

F) *Положительный элемент* p $(\neq e)$ *тогда и только тогда будет атомом, когда он обладает тем свойством, что из* $p \leqq ab$ $(a, b \geqq e)$ *следует* $p \leqq a$ *или* $p \leqq b$. Если атом p удовлетворяет условию $p \leqq ab$, но ни $p \leqq a$, ни $p \leqq b$, то $p \perp a$ и $p \perp b$, откуда $p \perp ab$, что противоречит условию. Обратно, если p $(> e)$ обладает указанным свойством и $e \leqq a < p$, то для $b = a^{-1}p$ мы имеем $p \leqq ab$, откуда $p \leqq b$ и потому $a = e$.

G) *Если* $[p_\alpha]_{\alpha \in A}$ — *множество (различных) атомов группы* G, *то подгруппа* G', *ими порожденная, является свободной абелевой группой, а* p_α — *ее свободными образующими*. Различные атомы ортогональны друг другу, следовательно, в силу E), p_α коммутируют. Допустим, что $p_1^{n_1} \ldots p_t^{n_t} \geqq e$ для конечного числа атомов $p_1, \ldots, p_t$. Не теряя общности, мы можем записать это неравенство в виде $p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r} \geqq p_{r+1}^{-n_{r+1}} \ldots p_t^{-n_t}$, где встречаются уже только неотрицательные показатели. Из B) мы заключаем, что обе части неравенства ортогональны, таким образом, правый член равен e и каждое $n_i \geqq 0$. Поэтому из $p_1^{n_1} \ldots p_t^{n_t} = e$ следует $n_i = 0$, что мы и хотели доказать.

Мы показали также, что G' — прямое произведение л. у. групп $\{p_\alpha\}$.

H) Мы будем говорить, что с. у. группа G удовлетворяет условию минимальности, если каждое непустое множество положительных элементов из G содержит минимальный элемент.

Теорема 3. (Уорд [1], Биркгоф [1]). *С. у. группа* G *тогда и только тогда является прямым произведением л. у. циклических групп, когда она удовлетворяет условию минимальности.*

Утверждение «только тогда» — очевидно, поэтому предположим, что G — с. у. группа с условием минимальности. Для любого $a \in G$, $a > e$, множество $[x \in G \mid e < x \leqq a]$ содержит минимальный элемент p_1, который, очевидно, будет атомом. Если $a_1 = p_1^{-1} a > e$, то мы снова получим атом p_2, удовлетворяющий условию $e < p_2 \leqq a_1$. Если $a_2 = p_2^{-1} a_1 > e$, то мы будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не дойдем до некоторого $a_k = p_k^{-1} a_{k-1} = e$. Так как $a > a_1 > > a_2 > \ldots$, то условие минимальности обеспечивает существование такого k. Тогда $a = p_1 p_2 \ldots p_k$ будет произведением атомов, так что подгруппа G', указанная в свойстве G), совпадает с G. Наконец, применение свойства G) завершает доказательство.

Аналог теоремы 3 для с. у. полугрупп был доказан Дюбрей-Жакотэн [2]; ср. также Дюбрей [2].

3. Носители

Используя ортогональность, мы можем разбить положительные элементы с. у. группы G на непересекающиеся классы. А именно, мы полагаем, что два положительных элемента принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда им ортогональны одни и те же элементы из $P = P(G)$. Эти классы называются *носителями* (или *нитями*)[1]. Таким образом, если подмножество C из P — носитель, то из того, что $a, b \in C$ и $a \perp x$, следует $b \perp x$.

---

[1] Это понятие было введено Жаффаром [1]. В последующей работе [6] он рассмотрел носители в некоторых ч. у. абелевых группах, более общих, чем с. у. группы.

Носитель, содержащий a, будет обозначаться $a^{\wedge}$. Носитель $e^{\wedge}$ состоит из одного элемента e, а в с. у. группе с условием минимальности $a^{\wedge}$ состоит из тех элементов $b \in P$, которые содержат те же атомы, что и a (и никаких других).

Следующее утверждение легко выводится из свойств В) и С), п. 2.

Предложение 4 (Жаффар [1]). *Носитель является подполугруппой и выпуклой подструктурой в P.*

Множество $\mathfrak{C}$ всех носителей группы G можно ч. у., полагая $a^{\wedge} \geqq b^{\wedge}$ тогда и только тогда, когда $a \perp x$ влечет $b \perp x$. Очевидно, что это определение не зависит от выбора представителей a, b из $a^{\wedge}$, $b^{\wedge}$. Ясно также, что отображение $a \longrightarrow a^{\wedge}$ изотонно¹).

Мы намереваемся показать, что $(a \wedge b)^{\wedge}$ и $(a \vee b)^{\wedge}$ являются соответственно наиб. н. г. и наим. в. г. носителей $a^{\wedge}$ и $b^{\wedge}$. Очевидно, $(a \wedge b)^{\wedge} \leqq a^{\wedge}$ и $b^{\wedge}$. Предположим, что $c^{\wedge} \leqq a^{\wedge}$ и $b^{\wedge}$. Если $a \wedge b \perp x$, то $a \perp b \wedge x$; отсюда $c \perp b \wedge x$, $b \perp c \wedge x$ и потому $c \perp c \wedge x$, $c \perp x$. Следовательно, $c^{\wedge} \leqq (a \wedge b)^{\wedge}$, что и доказывает первое утверждение. Во втором случае неравенства $a^{\wedge}, b^{\wedge} \leqq (a \vee b)^{\wedge}$ тривиальны; в то же время если $c^{\wedge} \geqq a^{\wedge}, b^{\wedge}$, то из $c \perp x$ следует $a \perp x$ и $b \perp x$, откуда, в силу С), $a \vee b \perp x$ и, следовательно, $c^{\wedge} \geqq (a \vee b)^{\wedge}$. Таким образом, $\mathfrak{C}$ — структура, в которой

$$a^{\wedge} \wedge b^{\wedge} = (a \wedge b)^{\wedge} \quad \text{и} \quad a^{\wedge} \vee b^{\wedge} = (a \vee b)^{\wedge}.$$

В силу свойства D), п. 1, $\mathfrak{C}$ — дистрибутивная структура. Равенство $a^{\wedge} \vee b^{\wedge} = (ab)^{\wedge}$ может быть проверено аналогично. Это доказывает первую часть следующей теоремы.

Теорема 5²) (Жаффар [6], Пирс [1]). *Отображение φ: $a \longrightarrow a^{\wedge}$ положительного конуса P с. у. группы G на дистрибутивную структуру $\mathfrak{C}$ всех носителей группы G является структурным гомоморфизмом с ядром e и удовлетворяет условию*

$$(ab)^{\wedge} = a^{\wedge} \vee b^{\wedge}. \tag{1}$$

Отображение φ может быть охарактеризовано как максимальный¹) структурный гомоморфизм конуса P с ядром e.

Пусть ψ — любой структурный гомоморфизм P с ядром e. Определим отношение эквивалентности ϱ, считая $a, b \in P$ эквивалентными относительно ϱ тогда и только тогда, когда $\psi(a) \wedge \psi(x) = \psi(e)$ эквивалентно условию $\psi(b) \wedge \wedge \psi(x) = \psi(e)$. Из этого сразу следует, что ϱ — отношение конгруэнтности на P. Обозначим через η гомоморфизм P на классы эквивалентности отношения ϱ. Так как ядра равны e, равенство $a \wedge x = e$ эквивалентно условию $\psi(a) \wedge \wedge \psi(x) = \psi(e)$, в свою очередь равносильному условию $\eta(a) \wedge \eta(x) = \eta(e)$. То же самое верно для b, следовательно, $a^{\wedge} = b^{\wedge}$ тогда и только тогда, когда $\eta(a) = \eta(b)$. Таким образом, η, по существу, совпадает с φ. Так как η больше или равно ψ, утверждение справедливо,

Пирс [1] доказал также, что φ — единственный гомоморфизм P, ядро которого e, а образ дизъюнктивен в том смысле, что для любых двух различных элементов существует третий, ортогональный только одному из двух данных. Гоффман [1] показал, что φ сохраняет точные верхние грани (т. е. наим. в. г. любых подмножеств, если они существуют), а в случае, когда G — архимедова с. у. группа, φ — единственный структурный гомоморфизм с ядром e, сохраняющий точные верхние грани и удовлетворяющий условию (1). Существует пример, показывающий, что в неархимедовом случае это утверждение уже неверно.

О структуре $\mathfrak{C}$ носителей коммутативных с. у. групп см. Рибенбойм [3].

⋇ Жаффар [6] доказал, что структура $\mathfrak{C}$ является структурой с относительными дополнениями, если она удовлетворяет условию максимальности (ср. предложение 13). Якубик [11] показал, что это свойство может не выполняться при условии минимальности, но будет выполняться, если группа архимедова. ⋇

Будем говорить, что носители группы G *инвариантны*, если $a^{\wedge} = (x^{-1}ax)^{\wedge}$ для всех a, $x \in G$, т. е. если из $a \perp b$ следует $a \perp x^{-1}bx$.

---

¹) Жаффар [1] показал, что минимальный носитель, отличный от $e^{\wedge}$, порождает в G л. у. подгруппу. Ср. лемму В в п. 6 настоящей главы.

²) Первое утверждение принадлежит Жаффару, второе Пирсу.

---

¹) Говорят, что гомоморфизм ψ больше другого гомоморфизма χ, если каждый класс по χ содержится в некотором классе по ψ.

Предложение 6 (Конторович—Кутыев [1]). *Носители с. у. группы G инвариантны тогда и только тогда, когда из $a \perp x^{-1}ax$ следует $a = e$.*

Предположим, что носители группы G инвариантны и $a \perp x^{-1}ax$. Тогда $a \perp a$ и потому $a = e$. Обратно, если $a \perp x^{-1}ax$ влечет $a = e$ и если $a \perp b$, то $a \wedge x^{-1}bx \perp xax^{-1} \wedge b$, откуда $a \wedge x^{-1}bx = e$, $a \perp x^{-1}bx$, т. е. носители инвариантны.

Предложение 7. *Класс с. у. групп с инвариантными носителями эквационально определим.*

Ортогональность a и b эквивалентна существованию такого x, что $a = x \vee e$ и $b = x^{-1} \vee e$. Действительно, если $a \perp b$, то $x = ab^{-1}$ обладает отмеченным свойством, в то время как если a, b имеют указанный вид, то $a \perp b$ (см. следующий пункт, раздел F). Следовательно, инвариантность носителей может быть охарактеризована соотношением $x \vee e \perp y^{-1}(x^{-1} \vee e)y$, т. е.

$$(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = e \quad \text{для всех } x,\ y \in G.$$

В качестве следствия мы получаем, что каждая с. у. подгруппа и факторгруппа с. у. группы с инвариантными носителями обладают тем же свойством.

Пример 10, гл. II, п. 3; представляет собой с. у. группу, в которой носители не инвариантны (при $x = a^{-3}b^5$ и $y = c$ мы имеем

$$(x \wedge y^{-1}x^{-1}y) \vee e = a^{-5}b^3 \vee e = b^3 > e).$$

Понятие носителя было обобщено Конторовичем и Кутыевым [1] на произвольные ч. у. группы. Их обобщение основано на обобщении понятия ортогональности, упомянутом в п. 2. Кроме того, изучались также носители относительно подполугруппы положительного конуса.

4. Положительная и отрицательная части; модули

В теории с. у. групп очень важны следующие понятия. *Положительная часть*[1] a^+, *отрицательная часть* a^- и *модуль* $|a|$ элемента a определяются следующим образом:

$$a^+ = a \vee e, \quad a^- = a \wedge e, \quad |a| = a \vee a^{-1}.$$

---

[1] В частном случае это понятие было впервые использовано Риссом [1]; общее понятие принадлежит Биркгофу [1]. По поводу модуля см. Канторович [1].

Они обладают следующими элементарными свойствами:

A) $a^+ \geqq e$ *и* $a^- \leqq e$. *Равенства имеют место тогда и только тогда, когда* $a \leqq e$ *и* $a \geqq e$ *соответственно.*

B) $(a^{-1})^+ = (a^-)^{-1}$, так как $a^{-1} \vee e = (a \wedge e)^{-1}$. Аналогично $(a^{-1})^- = (a^+)^{-1}$.

C) $(ab)^+ \leqq a^+b^+$ *и* $(ab)^- \geqq a^-b^-$, так как $(ab)^+ = ab \vee \vee e \leqq ab \vee a \vee b \vee e = (a \vee e)(b \vee e) = a^+b^+$ и двойственно.

D) $(a^n)^+ = (a^+)^n$ *и* $(a^n)^- = (a^-)^n$ *для* $n > 0$. Действительно, если $0 \leqq k \leqq n$, то

$$(a^{n-k} \vee a^{-k})^n = a^{(n-k)n} \vee \ldots \vee a^{(n-k)k}a^{-k(n-k)} \vee \ldots \geqq e,$$

откуда, в силу изолированности, $a^{n-k} \vee a^{-k} \geqq e$ и $a^n \vee e \geqq a^k$. Следовательно,

$$(a^+)^n = (a \vee e)^n = a^n \vee \ldots \vee a^k \vee \ldots \vee e = a^n \vee e = (a^n)^+.$$

Двойственные рассуждения или B) доказывают второе тождество. Легко заключить, следовательно, что в коммутативной с. у. группе для каждого положительного n мы имеем $(a \vee b)^n = a^n \vee b^n$ и $(a \wedge b)^n = a^n \wedge b^n$; действительно, $(a \vee b)^n = ((ab^{-1})^+)^n b^n = ((ab^{-1})^n)^+ b^n = a^n \vee b^n$ и двойственно.

E) $a = a^+a^- = a^-a^+$, так как $a(a^-)^{-1} = a(a^{-1} \vee e) = = e \vee a = a^+$ и аналогично с другой стороны. В частности, отсюда следует, что a^+ и a^- коммутируют.

F) $a^+ \perp (a^-)^{-1}$, потому что $a^+ \wedge (a^-)^{-1} = (a \wedge e)(a^-)^{-1} = e$.

Из E) и F) мы видим, что a^+ и $(a^-)^{-1}$ могут рассматриваться соответственно как числитель и знаменатель «несократимой записи» элемента a в следующем смысле: если $a = xy^{-1}$, где $x \geqq e$ и $y \geqq e$, то существует такой элемент $z \geqq e$, что $x = a^+z$, $y = (a^-)^{-1}z$. (Подобным образом, если $a = y^{-1}x$, где $x \geqq e$, $y \geqq e$, то $x = za^+$, $y = z(a^-)^{-1}$ для некоторого $z \geqq e$.) В самом деле $z = x \wedge y$ удовлетворяет условию $z \geqq e$ и $a^- = a \wedge e = xy^{-1} \wedge e = (x \wedge y)y^{-1} = zy^{-1}$, откуда $y = (a^-)^{-1}z$ и затем $x = ay = (a^+a^-)(a^-)^{-1}z = a^+z$ (аналогично для $a = y^{-1}x$). В частности, если $x \perp y$, то $x = a^+$, $y = (a^-)^{-1}$.

Лемма. *С. у. группа G тогда и только тогда л. у., когда из $a > e$ и $b > e$ вытекает $a \wedge b > e$.*

Часть «только тогда» очевидна; предположим, что указанное условие выполнено. Так как $c^+ \wedge (c^-)^{-1} = e$ для каждого $c \in G$, мы будем иметь либо $c^+ = e$, либо $c^- = e$, что доказывает линейность.

$\ast$ F′) Замечание, сделанное после E), п. 1, устанавливает, что с. у. группа не обязана быть R-группой. Обратно, мы покажем существование R-групп, которые не допускают никакой структурной упорядоченности (Кокорин [1]).

Пусть L — группа из гл. III, п. 3. Допустим, что L с. у., и напишем равенства

$$a^+ = a^\alpha b^m, \qquad a^- = a^\beta b^n$$

с двоично-рациональными α, β и целыми m, n. Согласно E), отсюда следует

$$a = a^\alpha b^m \cdot a^\beta b^n = a^{\alpha+\beta(-2)^m} b^{m+n},$$

откуда $\alpha + \beta(-2)^m = 1$ и $m + n = 0$. Так как элементы a^+ и a^- коммутируют, справедливо так же равенство $\beta + \alpha(-2)^n = 1$. Вследствие того что $m = -n$, последнее равенство может быть переписано в следующем виде: $\beta(-2)^m + \alpha = (-2)^m$, откуда $m = 0$. Следовательно, $a^+ = a^\alpha$. В силу изолированности, $a > e$ или же $a < e$ (смотря по тому, будет ли $\alpha > 0$ или же $\alpha < 0$), что противоречит равенству $bab^{-1} \cdot a \cdot a = e$. Поэтому группа L не допускает структурной упорядоченности. $\ast$

G) $|a| \geqq e$ *для всех* $a \in G$; *равенство имеет место тогда и только тогда, когда* $a = e$. Перемножая неравенства $|a| \geqq a$ и $|a| \geqq a^{-1}$, мы получаем $|a|^2 \geqq e$, откуда следует требуемое неравенство. Если же $|a| = e$, то $e \geqq a$, $e \geqq a^{-1}$, откуда $a = e$.

H) $|a^{-1}| = |a|$ *для всех* $a \in G$.

I) $|ab| \leqq |a||b||a|$, так как

$$|a|^{-1}|b|^{-1}|a|^{-1} \leqq |a|^{-1}|b|^{-1} \leqq ab \leqq |a||b| \leqq |a||b||a|.$$

J) *Если* G *коммутативна, то* $|ab| \leqq |a||b|$. Действительно,

$$|ab| = ab \vee b^{-1}a^{-1} \leqq ab \vee a^{-1}b \vee ab^{-1} \vee a^{-1}b^{-1} =$$
$$= (a \vee a^{-1})(b \vee b^{-1}) = |a||b|.$$

Это неравенство характерно для коммутативных с. у. групп[1]: *если* $|ab| \leqq |a||b|$ *для всех* $a, b \in G$, *то группа* G *коммутативна*. Пусть $a, b \geqq e$, тогда $ab = |ab| = |b^{-1}a^{-1}| \leqq |b^{-1}||a^{-1}| = ba$ и двойственно. Положительные элементы порождают G, таким образом, G коммутативна.

K) $|a| = a^{+1}(a^-)^{-1}$ [или, в силу B), $|a| = a^+(a^{-1})^+$].

Это вытекает из соотношений

$$(a \vee e)(a^{-1} \vee e) = e \vee a \vee a^{-1} \vee e = |a| \vee e = |a|.$$

L) $|a^n| = |a|^n$ *для* $n \geqq 0$. Благодаря перестановочности a^+ и a^- требуемое равенство мы получим из K) и D):

$$|a|^n = (a^+)^n (a^-)^{-n} = (a^n)^+ ((a^n)^-)^{-1} = |a^n|.$$

M)[1] $|a \vee b| \leqq |a| \vee |b| \leqq |a||b|$, ибо

$$|a \vee b| = (a \vee b) \vee (a \vee b)^{-1} = (a \vee b) \vee (a^{-1} \wedge b^{-1}) \leqq$$
$$\leqq a \vee b \vee a^{-1} \vee b^{-1} = |a| \vee |b|,$$

и из G) следует $|a| \leqq |a||b|$, $|b| \leqq |a||b|$.

N) $|ab^{-1}| = (a \vee b)(a \wedge b)^{-1}$. Это следует из

$$(a \vee b)(a^{-1} \vee b^{-1}) = e \vee ab^{-1} \vee ba^{-1} \vee e = |ab^{-1}|.$$

O)[2] $|(a \vee c)(b \vee c)^{-1}||(a \wedge c)(b \wedge c)^{-1}| = |ab^{-1}|$.

В силу N) и дистрибутивности, левая часть равна

$$[(a \vee b) \vee c]\,[(a \wedge b) \vee c]^{-1}\,[(a \vee b) \wedge c]\,[(a \wedge b) \wedge c]^{-1}.$$

Это выражение также может быть записано в виде $(tx \vee c)(x \vee c)^{-1}(tx \wedge c)(x \wedge c)^{-1}$, если мы введем обозначения $x = a \wedge b$, $tx = a \vee b$.

Мы должны доказать, что последнее выражение равно

$$|ab^{-1}| = (a \vee b)(a \wedge b)^{-1} = t,$$

или же, что справедливо равенство

$$(x \vee c)^{-1}(tx \wedge c) = (tx \vee c)^{-1} t (x \wedge c).$$

Но $\qquad (x^{-1} \wedge c^{-1})(tx \wedge c) = x^{-1}tx \wedge x^{-1}c \wedge c^{-1}tx \wedge e$

и $\qquad (x^{-1}t^{-1} \wedge c^{-1})\, t\, (x \wedge c) = e \wedge x^{-1}c \wedge c^{-1}tx \wedge c^{-1}tc$

в действительности равны, так как, в силу $t \geqq e$, члены $x^{-1}tx$ и $c^{-1}tc$ могут быть опущены.

---

[1] Это заметил Бузулини [1].

[1] Если предполагается, что $a \perp b$, то $|a||b| = |a| \vee |b|$.

[2] См. Калман [1].

Большая часть изложенных выше результатов может быть перенесена на некоторые направленные группы (Фукс [1]). Здесь мы ограничимся случаем, когда G — направленная группа, порядок которой изолирован и, кроме того, дистрибутивен в том смысле, что

$$U(x_1, \ldots, x_m)\,U(y_1, \ldots, y_n) = U(x_1 y_1,\ x_1, y_2, \ldots, x_m y_n)$$

для всех x_i, $y_j \in G$. ✻ (См. группы Рисса, которые будут изучаться в параграфе 13.) ✻ Определим a^+, a^- и $|a|$ как подмножества группы G:

$$a^+ = U(a, e), \qquad a^- = L(a, e), \qquad |a| = U(a, a^{-1}).$$

(Заметим, что если G — с. у. группа, то старые и новые понятия находятся в таком же отношении, как в теории колец элементы и главные идеалы.) Отметим следующие свойства:

1. $a^+ \subseteq P$, $a^- \subseteq P^{-1}$, $|a| \subseteq P$. Равенства имеют место тогда и только тогда, когда $a \leqq e$, $a \geqq e$ и $a = e$ соответственно.

2. $(a^{-1})^+ = (a^-)^{-1}$, $(a^{-1})^- = (a^+)^{-1}$, $|a^{-1}| = |a|$.

3. $(ab)^+ \supseteq a^+ b^+$ и $(ab)^- \supseteq a^- b^-$.

4. $|ab| \supseteq |a| \cdot |b|$ для всех a, $b \in G$ тогда и только тогда, когда G коммутативна.

5. $(a^+)^n = (a^n)^+$, $(a^-)^n = (a^n)^-$, $|a|^n = |a^n|$ для всех натуральных n.

6. a^+ и $(a^-)^{-1}$ перестановочны.

7. $|a| = a^+ (a^-)^{-1}$.

8. $|ab^{-1}| = U(a, b)\,L(a, b)^{-1}$.

Доказательства почти идентичны соответствующим доказательствам, данным для с. у. групп.

Если положительность комплексных чисел $z = x + yi$ определить так, чтобы она означала, что $x > 0$ и $y \geqq 0$, то будет определена направленная группа с изолированным и дистрибутивным порядком, не являющаяся с. у. группой.

5. *l*-идеалы

l-идеал [1]) определяется как o-идеал с. у. группы G; другими словами, это выпуклый нормальный делитель, являющийся подструктурой в G. Поэтому l-идеал A содержит вместе с $a \in G$ также и элементы a^+, a^- и $|a|$.

Теорема 8. *Подгруппа A тогда и только тогда является l-идеалом с. у. группы G, когда она является таким нормальным делителем группы G, что из $a \in A$, $x \in G$ и $|x| \leqq |a|$ следует $x \in A$.*

Если a принадлежит l-идеалу A и $x \in G$ удовлетворяет условию $|x| \leqq |a|$, то неравенство $|a|^{-1} \leqq x \leqq |a|$ вместе с условием $|a| \in A$ влечет $x \in A$. Обратно, пусть A — нормальный делитель, обладающий указанным свойством. Если $e \leqq x \leqq a \in A$, то $|x| \leqq |a|$, откуда $x \in A$ и A является выпуклым. Если же a, $b \in A$ положительные элементы, то $e \leqq a \wedge b \leqq a \vee b \leqq ab \in A$ (см. п. 4, M); таким образом, $a \wedge b$ и $a \vee b$ принадлежат к A, т. е. положительные элементы из A образуют подструктуру в A. Вследствие неравенств $e \leqq a^+ \leqq |a|$, $e \leqq (a^-)^{-1} \leqq |a|$ положительные элементы из A порождают A и потому предложение 3 гл. II завершает доказательство.

Аналогичный результат может быть доказан для o-идеалов произвольных ч. у. групп: A тогда и только тогда является o-идеалом в G, когда она является направленным нормальным делителем в G и удовлетворяет условию: $a \in A$, $x \in G$ и $|x| \supseteq |a|$ влечет $x \in A$. Здесь $|a| = U(a, a^{-1})$ (Фукс [3]).

Заметим, что каждый конечно порожденный l-идеал с. у. группы G должен быть *главным*, т. е порожденным одним элементом. Ибо l-идеал, порожденный элементами $g_1, \ldots, g_n$, содержит элемент $g = |g_1| \vee \ldots \vee |g_n|$, в то время как l-идеал, порожденный этим элементом g, должен содержать все g_i, как следует из $|g_i| \leqq |g|$ и теоремы 8.

Главный l-идеал $I(a)$, порожденный элементом a, может быть легко описан. Очевидно, что он содержит каждый элемент $x \in G$, удовлетворяющий условию $|x| \leqq |a_1| \ldots |a_m|$ для некоторых a_j, сопряженных с элементом a. Но множество I всех $x \in G$, обладающих этим свойством, будет l-идеалом, содержащим a. Действительно, из неравенства $|xy| \leqq |x|\,|y|\,|x|$ (см. п. 4, I) следует, что I является подгруппой, которая должна быть нормальным делителем и которая, очевидно, удовлетворяет условию теоремы 8. Таким образом,

$$I(a) = [x \in G \mid |x| \leqq |a_1| \ldots |a_m|, \text{ где } a_j \text{ сопряжены с } a].$$

Значение l-идеалов видно из следующего результата.

---

[1]) l-идеалы впервые использовались Канторовичем [1]. См. также Рисс [1]. Общее определение было дано Биркгофом [1] в терминах свойства, устанавливаемого в теореме 8.

Теорема 9 (Биркгоф [1]). *Ядро группового гомоморфизма* η, *сохраняющего объединения (или пересечения) с. у. группы* G *на ч. у. группу* H, *является* l*-идеалом* A *в* G. *Факторгруппа с. у. группы по* l*-идеалу снова будет с. у. группой.*

Если η сохраняет объединения, то оно сохраняет и упорядоченность, а также и пересечения. Поэтому ядро A гомоморфизма η по теореме 7 гл. II будет выпуклым нормальным делителем, а также и подструктурой. Если же A — l-идеал в G и $a \equiv b \pmod A$, то из неравенств

$|(a \vee c)(b \vee c)^{-1}| \leqq |ab^{-1}|$, $|(a \wedge c)(b \wedge c)^{-1}| \leqq |ab^{-1}|$ (см. п. 4, O) вместе с $ab^{-1} \in A$ следует, что $a \vee c \equiv b \vee c$ и $a \wedge c \equiv b \wedge c \pmod A$. Следовательно, смежные классы G по $\mathrm{mod}\, A$ обладают свойством подстановки для обоих структурных операций, и потому естественное отображение G на G/A сохраняет отношение порядка и структурные операции, что и требовалось доказать.

Таким образом, *отношения конгруэнтности с. у. группы являются ее разбиениями на смежные классы по различным* l*-идеалам.*

Заметим, что групповой гомоморфизм η с. у. группы G в с. у. группу тогда и только тогда будет o-гомоморфизмом, когда для всех a, b из G выполняется одно из следующих равносильных условий: $\eta(a \vee b) = \eta(a) \vee \eta(b)$; $\eta(a \wedge b) = \eta(a) \wedge \eta(b)$; $\eta(|a|) = |\eta(a)|$; $\eta(a^+) = \eta(a)^+$; из $a \perp b$ следует $\eta(a) \perp \eta(b)$ (Биркгоф — Пирс [1]).

Рассмотрим далее два l-идеала A и B из G. Очевидно, что $A \cap B$ снова будет l-идеалом. Однако не столь очевидно, что произведение AB (т. е. множество элементов ab, где $a \in A$, $b \in B$) также будет l-идеалом в G. Чтобы доказать это, достаточно проверить, что $x \in G$, удовлетворяющий условию $|x| \leqq |ab|$ для некоторых $a \in A$, $b \in B$, принадлежит AB. Из п. 4, I мы получаем $|x| \leqq |a||b||a|$, а поэтому, согласно следствию 2, существуют такие положительные элементы a_1, $a_2 \leqq |a|$ и $b_1 \leqq |b|$, что $|x| = a_1 b_1 a_2$. Здесь, в силу выпуклости, a_1, $a_2 \in A$, $b_1 \in B$, откуда $|x| \in AB$. Вследствие неравенства $e \leqq x^+ \leqq |x|$ аналогичные рассуждения применимы для доказательства того, что $x^+ \in AB$, откуда следует, что также и $x \in AB$. Мы получаем лемму:

Лемма А. (Биркгоф [1]). *Подгруппа с. у. группы* G, *порожденная* l*-идеалами из* G, *снова будет* l*-идеалом.*

Теперь легко вывести следующую теорему.

Теорема 10. (Биркгоф [1]). l*-идеалы с. у. группы* G *образуют полную дистрибутивную подструктуру структуры всех нормальных делителей группы* G [1].

То, что мы должны доказать, следует из полной дистрибутивности

$$A \cap \{\ldots, B_\lambda, \ldots\} = \{\ldots, A \cap B_\lambda, \ldots\}, \tag{1}$$

где $A, \ldots, B_\lambda, \ldots$ — l-идеалы в G. Здесь нуждается в проверке только включение $\subseteq$. Предположим, что $a > e$ принадлежит левой части, т. е. что $a = b_1 \ldots b_m$, где $a \in A$, $b_i \in B_i$. Вследствие сравнения $b_k b_{k+1} \ldots b_m \equiv b_{k+1} \ldots b_m \pmod{B_k}$ мы имеем $x_{k-1} \equiv x_k \pmod{B_k}$, если x_k определяется равенством $x_k = a \wedge (e \vee b_{k+1} \ldots b_m)$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Заметим, что в силу неравенства $e \leqq x_k \leqq a$, x_k принадлежит A, и потому $x_{k-1} x_k^{-1} \in A \cap B_k$. Так как $x_0 = a$ и $x_m = e$, тождество $a = (x_0 x_1^{-1})(x_1 x_2^{-1}) \ldots (x_{m-1} x_m^{-1})$ доказывает, что a принадлежит правой части равенства (1). То же самое должно выполняться для каждого элемента левой части, что и требовалось доказать.

Из последнего результата сразу вытекает, что если

$$G = G_1 \times \ldots \times G_n$$

— прямое разложение [2]) с. у. группы G и A — ее l-идеал, то

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n, \text{ где } A_i = G_i \cap A,$$

будет прямым разложением A.

Сформулируем следующее простое замечание:

Лемма В. *Пусть* G — *с. у. группа и* $A_1, \ldots, A_n$ — *ее* l*-идеалы. Если* G, *как абстрактная группа, является*

---

[1]) Аналогичный результат для множеств X^*, определяемых в предложении 12, был доказан Шиком [1], а для подгрупп $J(a) = [x \in G \mid |x| \leqq |a|^n$ для некоторого $n]$ Лоренценом [1].

[2]) Это прямое разложение следует понимать как в теоретико-групповом, так и в теоретико-структурном смысле.

прямым произведением подгрупп A_i, то как с. у. группа G также будет прямым произведением с. у. групп A_i.

Мы должны только показать, что $a_1a_2 \ldots a_n \geqq e \, (a_i \in A_i)$ только тогда, когда $a_i \geqq e$ для всех i. Из предположения следует

$$a_1^+ \ldots a_{i-1}^+ a_i^+ a_i^- a_{i+1}^+ \ldots a_n^+ \geqq e,$$

т. е.

$$a_1^+ \ldots a_i^+ \ldots a_n^+ \wedge (a_i^-)^{-1} = (a_i^-)^{-1}.$$

Но $a_j^+ \wedge (a_i^-)^{-1} \in A_j \cap A_i = e \, (j \neq i)$, так что из свойства A) п. 2 мы получаем $a_i^+ \wedge (a_i^-)^{-1} = (a_i^-)^{-1}$. Следовательно, из F) п. 4 следует $a_i^- = e$, т. е. $a_i \geqq e$.

*Лемма C (Конрад [17]). *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — l-идеалы с. у. группы G и элемент $g \, (> e)$ принадлежит $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Тогда существуют такие элементы $a_i \in A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, что $e \leqq a_i$ и*

$$g = a_1 \vee \ldots \vee a_n.$$

Достаточно доказать, что $g \leqq a_1' \vee \ldots \vee a_n'$, где $a_i' \in A_i$, так как тогда элементы $a_i = (a_i' \vee e) \wedge g \in A_i$ обладают желаемым свойством. Мы можем написать равенство $g = g_1 \ldots g_n$, где $g_i \in A_i$. Если $n = 2$, то из соотношения

$$e \leqq |g_1 g_2^{-1}| = g_1 g_2^{-1} \vee g_2 g_1^{-1} = g_1^{-1} (g_1^2 \vee g_1 g_2 g_1^{-1} g_2) \, g_2^{-1}$$

мы получаем $g_1 g_2 \leqq a_1' \vee a_2'$ с $a_1' = g_1^2 \in A_1$, $a_2' = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2 \in A_2$. Следовательно, если $n > 2$, то $g_1 \ldots g_n \leqq a \vee a_n'$, где $a \in \{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ и $a_n' \in A_n$. По предположению индукции $a \leqq a_1' \vee \ldots \vee a_{n-1}'$ для некоторых $a_i' \in A_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и потому $g \leqq a_1' \vee \ldots \vee a_{n-1}' \vee a_n'$.*

Положительный конус $P(A) = P \cap A$ l-идеала A группы G, очевидно, будет инвариантной и выпуклой подполугруппой положительного конуса P из G, причем $e \in P(A)$. Имеем следующую теорему.

Теорема 11. (Конрад [12]). *Соответствие*

$$A \to P(A)$$

является взаимно однозначным соответствием между всеми l-идеалами A из G и всеми инвариантными выпуклыми подполугруппами S из P, содержащими e. Обратным соответствием будет соответствие

$$S \to \{S\}.$$

Ясно, что $\{P(A)\} = A$. Пусть S обладает указанными свойствами и $A = \{S\}$. Каждый элемент $a \in A$ имеет вид $a = bc^{-1}$, b, $c \in S$, где мы можем считать, что $b \perp c$, ибо b и c могут быть заменены соответственно элементами $b(b \wedge c)^{-1}$ и $c(b \wedge c)^{-1}$ благодаря выпуклости S. Тогда $a^+ = b$ и потому $a \in P(A)$ тогда и только тогда, когда $a = a^+ = b$. Таким образом, $P(A) = S$ и A выпукло. Конус $P(A)$ будет подструктурой, так как таковой будет $S : e \leqq b \wedge c \leqq b \vee c \leqq bc$ для всех b, $c \in S$.

Мы заканчиваем этот раздел следующим результатом. Назовем произвольные элементы a, b из G *ортогональными*, если $|a|$ и $|b|$ ортогональны в предыдущем смысле, т. е.

$$|a| \wedge |b| = e.$$

Всегда будет ясно из контекста, в каком смысле, в этом общем или же в старом, употребляется термин «ортогональность».

* Очевидно, что если элементы a и b ортогональны, то ортогональными будут и пары a^+, b^+; a^-, b^+; a^+, b^- и a^-, b^-. Из свойства E) п.2 мы делаем вывод, что *ортогональные элементы коммутируют.*

Далее под *l-подгруппой* мы подразумеваем подгруппу, которая в то же время является подструктурой. (Для выпуклых l-подгрупп справедлив аналог теоремы 8.)*

Предложение 12[1]). *Множество X^* всех элементов с. у. группы G, ортогональных каждому элементу подмножества X, является выпуклой l-подгруппой. X^* тогда и только тогда будет l-идеалом для каждого подмножества X из G, когда носители группы G инвариантны.*

Пусть b, $c \in X^*$. Вследствие соотношения $|bc^{-1}| \leqq \leqq |b| |c^{-1}| |b| \perp |a|$ для всех $a \in X$ элемент bc^{-1} также принадлежит X^*. Значит, X^* — подгруппа. В силу свойства O) п. 4, мы имеем $|(b \vee c) c^{-1}| |(b \wedge c) c^{-1}| = |bc^{-1}|$;

---

[1]) Первая часть идет от Биркгофа [1].

откуда как $|(b \vee c)c^{-1}|$, так и $|(b \wedge c)c^{-1}|$ ортогональны к X, и потому $b \vee c$, $b \wedge c \in X^*$. Выпуклость X^* очевидна.

Часть «тогда» второго утверждения очевидна, в то время как обратное немедленно получается, если взять в качестве X одноэлементное подмножество.

Ж Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 12а. (Якубик [2]). *Пусть C — такая максимальная цепь с. у. группы G, что C — выпуклое множество, содержащее e. Тогда C будет прямым множителем группы G и*

$$G = C \times C^*.$$

Если элемент $g \in G \setminus C$ положителен, то некоторый положительный элемент $c \in C$ удовлетворяет условию $c \nleqq g$, ибо в противном случае C не было бы максимальной цепью. Положим $g_1 = g \wedge c$; тогда, в силу неравенства $e \leqq g_1 < c$ и выпуклости цепи C, $g_1 \in C$. Имеем

$$\text{если } d \in C,\ d \geqq g_1, \text{ то } d \wedge g = g_1. \tag{*}$$

Действительно, если бы было справедливо неравенство $d \wedge g > g_1$, то получилось бы противоречие $g_1 < (d \wedge g) \wedge c = d \wedge (g \wedge c) = d \wedge g_1 = g_1$. Определим элемент $g_2 = gg_1^{-1} = g(g^{-1} \vee c^{-1}) = e \vee gc^{-1}$ и возьмем некоторый такой элемент $d \in C$, что $d > g_1$. Тогда, в силу (*), из неравенства $e < dg_1^{-1} < d$ вытекает $dg_1^{-1} \in C$ и $dg_1^{-1} \wedge g_2 = (d \wedge g)g_1^{-1} = g_1g_1^{-1} = e$. Каждый положительный элемент $b \in C$ опять вследствие свойства (*) удовлетворяет соотношению $b \wedge g_2 = e$. Если $a \in C$, $a < e$, то для элемента a^{-1} существует такой элемент $c_1 \in C$, $c_1 > e$, что $c_1 \nleqq a^{-1}$, т. е. c_1a будет неотрицательным. Вследствие неравенств $a < c_1a < c_1$ мы имеем $c_1a \in C$ и потому $c_1a > e$. Поэтому из неравенства $e < a^{-1} < c_1$ следует $a^{-1} \in C$, и мы заключаем, что обратные отрицательных элементов из C снова лежат в C. Следовательно, $a \perp g_2$, $g_2 \in C^*$ и C, C^* порождают группу G. Очевидно, что $C \subseteq C^{**}$. Если x — произвольный положительный элемент из C^{**}, то $x = x_1x_2$, где $x_1 \in C$, $x_2 \in C^*$, откуда $x_1^{-1}x = x_2 \in C^{**} \cap C^* = e$ и $x \in C$. Аналогично, каждый отрицательный элемент из C^{**} принадлежит C. Если элементы $x > e$, $y < e$ принадлежат C, то из неравенств $y < xy < x$ и выпуклости цепи C

мы получаем $xy \in C$. Таким образом, каждый элемент из C^{**} содержится в C, т. е. $C^{**} = C$ и C — выпуклая подгруппа. Так как ортогональные элементы перестановочны, мы имеем $G = C \times C^*$.

Аналогичные результаты см. у Конрада [14].

Отметим в этом месте, что существуют группы, в которых каждая структурная упорядоченность обязательно линейна (Вейнберг [3]). Пусть G—аддитивная группа всех p-адических чисел (или же сервантная подгруппа этой группы). Тогда G обладает тем свойством, что каждая сервантная подгруппа ее прямо неразложима. Если бы группа G обладала такими элементами $a > 0$ и $b > 0$, что $a \wedge b = 0$, то элементы, ортогональные к a, образовывали бы l-идеал $B \neq 0$, а элементы, ортогональные к B, — l-идеал $A \neq 0$. По лемме А подгруппа $\{A, B\} = A \oplus B$ также была бы l-идеалом в G и потому факторгруппа $G/(A \oplus B)$ была бы с. у. группой. Поэтому группа $G/(A \oplus B)$ была бы группой без кручения, показывая, что подгруппа $A \oplus B$ сервантна в G. Полученное противоречие доказывает утверждение. (Заметим, что группа G допускает континуальное множество линейных порядков, если только G не является группой ранга 1.)Ж

6. Группы с конечным числом носителей

Теперь мы будем изучать частный случай, когда с. у. группа G имеет только конечное число носителей. Мы увидим, что в этом случае группа G может быть получена из л. у. групп при помощи последовательного применения операций прямого произведения и лексикографического расширения¹).

Начнем с довольно элементарного предложения.

Предложение 13 (Жаффар [6]). *Если структура носителей $\mathfrak{C}$ с. у. группы G конечна, то она булева алгебра.*

Из теоремы 5 мы знаем, что $\mathfrak{C}$ — дистрибутивная структура. Пусть $\mathfrak{C}$ содержит n атомов $a_1^{\wedge}, \ldots, a_n^{\wedge}$ $(a_i \in G)$. Если $b^{\wedge} \in \mathfrak{C}$ и, например, $a_1^{\wedge}, \ldots, a_k^{\wedge} \leqq b^{\wedge}$, но $a_{k+1}^{\wedge}, \ldots, a_n^{\wedge} \nleqq b^{\wedge}$, то $c^{\wedge} = a_{k+1}^{\wedge} \vee \ldots \vee a_n^{\wedge}$ будет дополнением $b^{\wedge}$ в $\mathfrak{C}$. Действительно, с одной стороны, $b^{\wedge} \wedge c^{\wedge} = (b^{\wedge} \wedge a_{k+1}^{\wedge}) \vee \ldots \vee (b^{\wedge} \wedge a_n^{\wedge}) = e^{\wedge}$. С другой стороны,

---

¹) См. Биркгоф [1], Жаффар [7] (только коммутативные группы), Конрад и Клиффорд [1] и Конрад [12].

$u = b \vee c$ $(b \in b^\wedge,\ c \in c^\wedge)$ удовлетворяет неравенству $a_i^\wedge \leqq b^\wedge \vee c^\wedge = (b \vee c)^\wedge = u^\wedge$ для всех i, поэтому $u \wedge x = e$ влечет $a_i \wedge x = c$ для всех i, т. е. $x^\wedge$ не содержит атомов и потому $x = e$, и $u^\wedge$ максимальный элемент в $\mathfrak{C}$. Следовательно, $\mathfrak{C}$ — действительно булева алгебра.

Число n атомов в $\mathfrak{C}$ можно охарактеризовать как такое максимальное число n, что G содержит n попарно ортогональных элементов, отличных от e.

Для подмножества $N = [i_1, \ldots, i_k]$ множества чисел $1, 2, \ldots, n$ определяем $G_N = G_{i_1 \ldots i_k}$ и $G_N^* = G_{i_1 \ldots i_k}^*$ как подгруппы, порожденные элементами, принадлежащими носителям, $\leqq a_{i_1}^\wedge \vee \ldots \vee a_{i_k}^\wedge = a_N^\wedge$ и $< a_N^\wedge$ соответственно.

Лемма A (Жаффар [7], Конрад [12]). *Для подгрупп G_N и G_N^* справедливы следующие утверждения:*

(i) *обе они выпуклые l-подгруппы в G;*

(ii) *G_N^* — l-идеал в G_N;*

(iii) *если $G_N^* \neq e$, то G_N будет лексикографическим расширением G_N^* при помощи л. у. группы G_N/G_N^*.*

Чтобы проверить (i), положим $e \leqq x \leqq b_1^{\pm 1} \ldots b_r^{\pm 1} \leqq \leqq b_1 \ldots b_r$, где $b_i^\wedge \leqq a_N^\wedge$ (или $b_i^\wedge < a_N^\wedge$). Из следствия 2 мы знаем, что $x = c_1 \ldots c_r$ для некоторых $e \leqq c_i \leqq b_i$, откуда $c_i^\wedge \leqq a_N^\wedge$ (или $c_i^\wedge < a_N^\wedge$). Следовательно, x принадлежит G_N (или G_N^*). Далее, если $y = d_1^{\pm 1} \ldots d_s^{\pm 1}$, $z = d_{s+1}^{\pm 1} \ldots d_t^{\pm 1}$ с $d_i^\wedge \leqq a_N^\wedge$ (или $d_i^\wedge < a_N^\wedge$), то y, z, а поэтому и $y \wedge z$, $y \vee z$ лежат в интервале $[d_1^{-1} \ldots d_t^{-1}, d_1 \ldots d_t]$. Выпуклость доказывает (i).

Достаточно проверить (ii) и (iii) в случае, когда $G_N = G$ и $G_N^* = G^*$ — нетривиальная подгруппа в G. G^* будет нормальным делителем, так как внутренние автоморфизмы группы G переставляют немаксимальные носители между собой. В силу (i), отсюда следует (ii).

Очевидно, что каждый элемент $g \in G \setminus G^* (g > e)$ принадлежит максимальному носителю. Если $a \in G^* (a > e)$ и если мы запишем элементы g и a в виде $g = (g \wedge a) g_1$, $a = (g \wedge a) a_1$, то необходимо $g_1 \wedge a_1 = e$. Так как $e \leqq g \wedge a \leqq a$ и потому $g \wedge a \in G^*$, мы имеем $g_1 \notin G^*$, откуда $g_1^\wedge = g^\wedge$. Значит, из $g_1 \wedge a_1 = e$ следует $a_1 = e$, т. е. $g > a$ для всех $a \in G^*$ и, следовательно, G является лексикографическим расширением G^*. Наконец, если бы G/G^* не было л. у., то существовали бы такие положительные элементы x, $y \notin G^*$, что $x \wedge y \in G^*$. Так как мы предположили, что $G^* \neq e$, существует $z \in G^*$, удовлетворяющий условию $z > x \wedge y$. Но из того, что уже доказано, следует $z < x$, $z < y$, т. е. $z \leqq x \wedge y$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Лемма B (Жаффар [7], Конрад [12]). *Подгруппы $G_1, \ldots, G_n$ являются выпуклыми л. у. подгруппами в G, а подгруппа S, ими порожденная, будет таким l-идеалом в G, что*

$$S = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n.$$

Из (i) леммы A мы можем заключить, что G_i — с. у. выпуклые подгруппы в G. Из доказательства условия (i) видно, что положительный конус подгруппы G_i будет полугруппой (с e), порожденной элементами $a_i^\wedge$. Далее, если $x, y \in a_i^\wedge$ (т. е. $x^\wedge = y^\wedge = a_i^\wedge$), то равенство $x \wedge y = e$ невозможно, так как из него следовало бы, что $a_i \wedge y = e$, $a_i \wedge a_i = e$. Таким образом, каждое G_i л. у. Внутренние автоморфизмы G переводят атомы из $\mathfrak{C}$ в атомы, следовательно, $S = \{G_1, \ldots, G_n\}$ — нормальный делитель в G. Как и в доказательстве (i) предыдущей леммы, отсюда следует, что S — выпуклая подгруппа, и, в силу свойства M) п. 4, мы получаем, что она будет также и подструктурой. Положительные элементы из G_i ортогональны положительным элементам из G_j $(i \neq j)$, ибо $(a_i \wedge a_j)^\wedge = = a_i^\wedge \wedge a_j^\wedge = e^\wedge$. Следовательно, S как абстрактная группа будет прямым произведением групп G_i и потому применение леммы B из п. 5 завершает доказательство.

Лемма C. (Конрад [12]). *Структура носителей с. у. факторгруппы G/S содержит меньше чем n атомов.*

Пусть $b \in G \setminus S$ $(b > e)$ и $b^\wedge = a_N^\wedge$ для некоторого $N = [i_1, \ldots, i_m]$. Тогда либо $b \in G_N \setminus G_N^*$ и $m \geqq 2$, либо $b \in G_N^* = \{\ldots, G_{N'}, \ldots\}$, где N' пробегает все подмножества множества N, состоящие из $m - 1$ элемента, и $m \geqq 3$. В любом случае $b > a$ для всех $a \in G_i \times G_j$ и некоторых индексов $i \neq j$. В первом случае это сразу следует из леммы A, (iii), в то время как во втором необходима простая индукция. Предположим далее, чтобы прийти к противоречию, что $G \setminus S$ содержит n таких элементов $b_1, \ldots, b_n$ $(> e)$, что $b_k \wedge b_l \in S$ для всех $k \neq l$; тогда из того, что было сказано об элементе b, вытекает существование таких трех индексов r, s, t $(r \neq s)$, что как b_r, так и b_s больше, чем каждый элемент из G_t. Но $b_r \wedge b_s \in S$ и не может быть больше, чем каждый элемент из G_t.

Лемма D (Конрад [12]). *Для каждого подмножества N множества чисел 1, 2, ..., n, содержащего по крайней мере два элемента, существует собственное прямое разложение*

$$G_N^* = G_{N_1} \times G_{N_2}, \tag{1}$$

где $N_1 \bigcup N_2 = N$.

Опять достаточно рассмотреть случай, когда $G_N^* = G^*$. Воспользуемся индукцией по числу n. При $n = 2$ мы имеем $S = G_1 \times G_2 = G^*$; предположим, что $n > 2$ и что утверждение справедливо для с. у. групп с меньшим чем n числом атомов в структуре носителей. По лемме C и индуктивному предположению мы имеем

$$(G^*/S)^* = U/S \times V/S,$$

где либо U/S л. у., а $V = S$, либо U, V строго содержат S.

Допустим, что $(G^*/S)^*$ — истинная подгруппа в G^*/S. Тогда соответствующая факторгруппа G^{**} будет л. у. благодаря лемме A, (iii). Рассмотрим образы подгрупп $G_{23 \ldots n}, \ldots, G_{12 \ldots n-1}$ при естественном отображении φ группы G^* на G^{**}. Они являются выпуклыми подгруппами и порождают G^{**}, поэтому один из образов совпадает с G^{**}. Если $\varphi(G_{23 \ldots n}) = G^{**}$, то $G^* = G_1 \times G_{23 \ldots n}$, так как здесь множители порождают G^* и являются выпуклыми подструктурами в G. Далее, в силу ортогональности, они не пересекаются и коммутируют (ср. также лемму B из п. 5). По этой причине мы можем ограничиться случаем, когда $G^*/S = U/S \times V/S$.

Такие же рассуждения исчерпывают случай, когда G^*/S л. у.

Если же не имеет места ни $U = S$, ни $V = S$, то определим N_u как множество всех индексов i, для которых существует элемент $u \in U \setminus S$ с тем свойством, что $u > a$ для всех $a \in G_i$, и предположим, что N'_u — множество всех остальных индексов. Подгруппы G_{N_u} и

$$H_u = \coprod_{j \in N'_u} G_j$$

порождают вместе U. Действительно, если $u \in U$ $(u > e)$ и $u \in G_M \setminus G_M^*$ для некоторого M, содержащего по меньшей мере два индекса, то, очевидно, $M \subseteq N_u$ и потому $u \in G_{N_u}$. Если же элемент $u \in U$ $(u > e)$, но u не принадлежит ни одной из таких разностей $G_M \setminus G_M^*$, то он будет произведением положительных элементов, лежащих в некоторой разности $G_M \setminus G_M^*$ или же в некотором G_i, и, следовательно, $u \in \{G_{N_u}, H_u\}$. Множества N_u, N'_u, очевидно, инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы G^*; поэтому G_{N_u} и H_u нормальные делители в G^*. Они будут, очевидно, выпуклыми подструктурами в G, т. е. l-идеалами в G^*. Наконец, они не пересекаются, так как

$$G_{N_u} \bigcap H_u \subseteq G_{N_u} \bigcap S \bigcap H_u = \coprod_{i \in N_u} G_i \bigcap H_u = e.$$

Поэтому, в силу леммы B из 5, мы заключаем, что $U = G_{N_u} \times H_u$. Затем аналогично определим N_v и N'_v для V; тогда $V = G_{N_v} \times H_v$. Если $i \in N_u \bigcap N_v$, то существуют такие элементы $u \in U \setminus S$ и $v \in V \setminus S$, что $u > a$ и $v > a$ для всех $a \in G_i$. Таким образом, $u \wedge v \in U \bigcap V = S$, но $u \wedge v > a$ для всех $a \in G_i$ невозможно в S. Значит, N_u и N_v не пересекаются. Докажем, что

$$G^* = G_{N_u} \times G_{N_v} \times H, \text{ где } H = H_u \bigcap H_v. \tag{2}$$

Здесь компоненты, очевидно, будут l-идеалами в G^*, порождающими вместе G^*. Ясно также, что G^*, как абстрактная группа, будет их прямым произведением, и потому из леммы B, п. 5, следует (2). Если теперь мы запишем $N_1 = N_u$, $N_2 = N'_u$, то ввиду теоремы 10 и равенств

$$G_{N_2} = G^* \bigcap G_{N_2} = (G_{N_1} \bigcap G_{N_2}) \times G_{N_v} \times H = G_{N_v} \times H$$

мы получаем (1).

Теперь мы уже готовы доказать основной результат.

Теорема 14 (Конрад [12]). *Если G — с. у. группа с конечным числом носителей, то G может быть получена из конечного числа л. у. групп поочередным применением операций прямого произведения и лексикографического расширения, где факторгруппы лексикографических расширений всегда л. у.*

Доказательство будем вести индукцией по числу n атомов в структуре носителей с. у. группы G. Если $n = 1$, то G будет, согласно лемме B, л. у., и наше утверждение справедливо. Если же $n \geqq 2$, то либо $G = G^*$, либо же G будет, в силу леммы А, лексикографическим расширением G^* при помощи л. у. группы G/G^*. Здесь G^* будет, согласно лемме D, прямым произведением двух с. у. групп менее чем с n атомами в структурах носителей, что и требовалось доказать.

Например, если $n = 2$, то G — либо прямое произведение двух л. у. групп, либо же лексикографическое расширение такого прямого произведения при помощи л. у. группы. Если $n = 3$, то G — либо прямое произведение с. у. группы с $n = 2$ и л. у. группы, либо лексикографическое расширение такой группы при помощи л. у. группы. За подробными примерами мы отсылаем читателя к Конраду [12].

Теорема 14 может быть обобщена на с. у. группы, в которых каждый носитель превосходит, самое большее, конечное число атомов. Ср. Конрад [14].

7. Единицы

Слабой единицей с. у. группы G называется элемент, который больше e и ортогонален только к e. *Сильной единицей* называется такой элемент $u \in G$, что для каждого $a \in G$ существует натуральное число n, для которого $u^n > a$[1].

В аддитивной с. у. группе всех непрерывных действительных функций, определенных на $[0, \infty)$, функция $f(x) \equiv 1$ будет слабой единицей, однако сильных единиц не существует. Функция $f(x) \equiv 1$ является сильной единицей в с. у. группе всех ограниченных действительных функций.

✻ A) *С. у. группа тогда и только тогда содержит слабую единицу, когда структура ее носителей имеет максимальный элемент. В л. у. группе каждый элемент $> e$ является слабой единицей.*

B) *Слабые единицы составляют дуальный идеал в с. у. группе G, рассматриваемой как структура.* Достаточно показать, что пересечение двух слабых единиц u, v также будет слабой единицей. Если $u \wedge v \wedge a = e$ для некоторого $a \in G^+$, то, так как u — слабая единица, мы получаем $v \wedge a = e$, и, значит, $a = e$.✻

C) *Каждая сильная единица является слабой единицей.* Если u — сильная единица, то $u^n > e$ для некоторого положительного целого числа n, откуда благодаря изолированному характеру структурного порядка мы получаем $u > e$. Допустим, что $u \perp a$. Тогда $u^m \perp a$ для каждого натурального m. Если m выбрать так, что $u^m > a$, то мы получим $a = e$, что и требовалось.

D) *Л. у. группа тогда и только тогда обладает сильной единицей, когда она имеет максимальную выпуклую подгруппу.* Если u — сильная единица л. у. группы G, то $\{u\}_\square = G$ и объединение C всех выпуклых подгрупп, не содержащих u, будет максимальной выпуклой подгруппой в G. Обратно, если G содержит максимальную выпуклую подгруппу C, то C должна быть нормальным делителем, а G/C — архимедовой. Каждый положительный элемент в $G \setminus C$ будет тогда сильной единицей в G.

E) *Если элементы с. у. группы G, принадлежащие немаксимальным носителям, порождают истинную подгруппу G^* в G и л. у. факторгруппа G/G^* обладает сильной единицей, то G также обладает сильной единицей.* Лемма А (iii) из п. 6 справедлива для произвольных с. у. групп, поэтому наша группа G является лексикографическим расширением группы G^* при помощи л. у. группы G/G^*. Если uG^* ($u > e$) сильная единица группы G/G^*, то u будет сильной единицей в G, так как неравенство $u > a$ справедливо для всех $a \in G^*$.

---

[1] По поводу этих понятий см. Фрейденталь [1] и Биркгоф [1]. Слабые единицы играют важную роль в приложениях, где интегральные представления могут даваться в терминах определенных «разложений» слабой единицы. См., например, Биркгоф [3].

F) *Если l-идеал I группы G обладает сильной единицей v, то I будет главным l-идеалом* $I(v)$, *порожденным элементом v.* Действительно, $I(v)$ содержит каждый положительный элемент a из I, так как для некоторого n мы имеем $e \leqq a < v^n$.

G) *Элемент* $|a|$ *коммутативной с. у. группы будет сильной единицей для l-идеала* $I(a)$, *порожденного элементом a.* Так как $I(a)$ состоит из всех таких $x \in G$, что $|x| \leqq |a|^m$ для некоторого $m > 0$ (см. п. 5), то очевидно, что $|a|$ будет сильной единицей в $I(a)$.

Как показал Якубик [1], это утверждение в некоммутативном случае, вообще говоря, неверно. Он установил существование с. у. группы, порожденной в теоретико-групповом смысле двумя элементами, которая обладает только одним нетривиальным l-идеалом, а он не содержит сильных единиц.

H) *l-идеалы с. у. группы, обладающие сильными единицами, и* $\{e\}$ *образуют подструктуру структуры всех l-идеалов.* Достаточно проверить, что если l-идеалы I_1 и I_2 обладают сильными единицами v_1 и v_2, то как $I = I_1 \cap I_2 \neq \{e\}$, так и $I^* = \{I_1, I_2\}$ обладают сильными единицами. Если $a \in I$, то $a < v_1^m$ и $a < v_2^n$ для некоторых целых чисел m, n. Так как $v_1, v_2 > e$, мы имеем $v_1^m \wedge v_2^n < (v_1 \wedge v_2)^{m+n}$ и, следовательно, $v_1 \wedge v_2$ — сильная единица в I. Если $bc \in I^*$, где $b \in I_1$, $c \in I_2$, то $b < v_1^m$ и $c < v_2^n$ для некоторых целых чисел m, n. Поэтому $bc < v_1^m v_2^n \leqq (v_1 \vee v_2)^{m+n}$; таким образом, $v_1 \vee v_2$ — сильная единица в I^*.

8. Структурно упорядоченные векторные группы

Полное прямое произведение

$$G = \prod_{\lambda \in \Lambda}^{*} G_\lambda$$

л. у. групп G_λ является с. у. группой. Подгруппа такой группы G будет называться *с. у. векторной группой*, если она является к тому же подструктурой в G. Заметим, что с. у. группа, являющаяся векторной группой в смысле гл. III, п. 6, не обязана быть с. у. векторной группой. Для решения вопроса, будет ли с. у. группа с. у. векторной группой, может быть дан сравнительно простой критерий.

Теорема 15[1]. *Для с. у. группы G следующие условия эквивалентны:*

(a) *если элемент* $a \in G$ *ортогонален одному из своих сопряженных* $x^{-1}ax$, *то* $a = e$;

(b) *носители инвариантны;*

(c) *G — с. у. векторная группа.*

Прежде всего мы покажем, что из условия (c) следует (a). Если G — с. у. векторная группа, то ортогональность элементов a и $x^{-1}ax$ равносильна ортогональности их λ-х компонент для всех λ. Но в л. у. группе условие (a) выполняется тривиально, поэтому каждая компонента элемента a должна быть единицей, т. е. $a = e$.

Благодаря предложению 6, достаточно проверить, что из (b) следует (c). В силу предложения 7, каждая с. у. группа G с инвариантными носителями изоморфна (в теоретико-групповом и структурном смысле) подпрямому объединению подпрямо неразложимых с. у. групп G_λ с инвариантными носителями. Допустим, что некоторое G_λ не является л. у., т. е. существуют такие $b > e$ и $c > e$, что $b \wedge c = e$. Множество B всех элементов из G, ортогональных к c, и множество C всех элементов, ортогональных к B, являются, в силу предложения 12, l-идеалами в G_λ. Ясно, что $b \in B$, $c \in C$ и $B \cap C = e$ в противоречие с подпрямой неразложимостью группы G_λ. Поэтому все G_λ л. у. и G — с. у. векторная группа.

Отсюда сразу получается, что *коммутативная с. у. группа является с. у. векторной группой* (Клиффорд [1]).

∗Легко установить условие, при котором все компоненты G_λ будут архимедовыми: *коммутативная с. у. группа G тогда и только тогда будет l-подгруппой полной прямой суммы архимедовых л. у. групп, когда для каждого* $g \in G\ (g \neq e)$ *существует максимальный l-идеал группы G, не содержащий элемента g, или, что равносильно, максимальные l-идеалы группы G имеют пересечением e.* Доказательство простое и может быть опущено (ср. Накаяма [1], Конрад, Харви, Холланд [1]).

---

[1] Лоренцен [3] установил эквивалентность условий (a) и (c); он называл с. у. группы, удовлетворяющие условию (a), регулярными. Более простое доказательство см. у Лоренца [1]. Шик [4] доказал, что (b) и (c) эквивалентны.

o-Изоморфизм φ с. у. группы G в полное прямое произведение C л. у. групп $G_{\lambda}\,(\lambda \in \Lambda)$ называется также *представлением* группы G. Таким образом, с. у. группа тогда и только тогда допускает представление, когда она является с. у. векторной группой. Теперь мы будем интересоваться представлениями, для которых можно установить единственность.

Обозначим через ψ_{λ} проектирование группы C на полное прямое произведение групп G_{μ} с $\mu \neq \lambda$. Если для некоторого λ составное отображение $\varphi\psi_{\lambda}$ все еще является представлением группы G (т. е. ядро $\varphi\psi_{\lambda}$ равно e), то мы будем называть компоненту G_{λ} *лишней*. Если же $\varphi\psi_{\lambda}$ не является более представлением группы G, то G_{λ} называется *существенной* компонентой. Очевидно, G_{λ} тогда и только тогда будет существенной, когда

$$\bigcap_{\mu \neq \lambda} \ker q\varphi_{\mu} \neq e, \tag{1}$$

где φ_{μ} — проектирование C на G_{μ}. Если мы отождествим группу G с подгруппой группы C, являющейся ее образом при изоморфизме φ, то получим следующую лемму:

Лемма. *Если G_{λ} существенная компонента группы G, то для некоторого такого элемента $a \in G^{+}$, что $\varphi_{\lambda}(a) \neq e$, носитель $a^{\wedge}$ будет минимальным элементом структуры $\mathfrak{C}$ носителей группы G.*

Левая часть неравенства (1) является l-идеалом группы G, так как таковыми являются ядра проектирования φ_{μ}. Если G_{λ} — существенная компонента, то условие (1) выполнено и, значит, левая часть содержит элемент $a \in G^{+}$, $a \neq e$. Этот элемент a имеет в представлении группы G только одну компоненту, отличную от e, а именно $\varphi_{\lambda}(a)$. Носитель $a^{\wedge}$ должен быть минимальным в $\mathfrak{C}$, ибо если $b^{\wedge} \leqq a^{\wedge}$ и $b^{\wedge} \neq e^{\wedge}$, то мы имели бы также $\varphi_{\lambda}(b) \neq e$, так как в противном случае из $a \wedge b = e$ вытекало бы $b^{\wedge} = a^{\wedge} \wedge b^{\wedge} = e^{\wedge}$. Если $b \wedge x = e$ для некоторого $x \in G^{+}$, то необходимо будет $\varphi_{\lambda}(x) = e$, и, таким образом, $a \wedge x = e$. Это показывает, что $a^{\wedge} \leqq b^{\wedge}$ и $b^{\wedge} = a^{\wedge}$.

Представление с. у. векторной группы G, в котором каждая компонента существенная, называется *неприводимым*. Мы получаем следующую теорему:

Теорема 15а (Жаффар [6], [10]). *С. у. векторная группа G тогда и только тогда допускает неприводимое представление, когда структура $\mathfrak{C}$ ее носителей атомная. В этом случае любые два неприводимых представления группы G o-изоморфны.*

Допустим, что группа G обладает неприводимым представлением с компонентами $G_{\lambda}\,(\lambda \in \Lambda)$, и пусть φ_{λ} обозначает проектирование $G \longrightarrow G_{\lambda}$. Пусть, далее, $b^{\wedge}$ — произвольный носитель, не равный $e^{\wedge}$, и $b \in b^{\wedge}$. Существует некоторый индекс λ, такой, что $\varphi_{\lambda}(b) > e$. Поскольку компонента G_{λ} существенная, некоторый элемент $a \in G^{+}$ (согласно лемме) удовлетворяет условию $\varphi_{\lambda}(a) > e$ и $a^{\wedge}$ — минимальный носитель. Ввиду соотношений $\varphi_{\lambda}(a \wedge b) = \varphi_{\lambda}(a) \wedge \varphi_{\lambda}(b) \neq e$ мы получаем $a^{\wedge} \wedge b^{\wedge} \neq e^{\wedge}$ и, таким образом, $a^{\wedge} \leqq b^{\wedge}$. Следовательно, структура $\mathfrak{C}$ — атомная.

Обратно, если $\mathfrak{C}$ — атомная структура, то рассмотрим множество атомов $a_{\lambda}^{\wedge}\,(\lambda \in \Lambda)$ структуры $\mathfrak{C}$. Множество I_{λ} всех элементов группы G, ортогональных элементам фиксированного $a_{\lambda}^{\wedge}$, будет, согласно предложению 12, l-идеалом группы G, который, очевидно, содержит все элементы группы G, лежащие в носителях $a_{\mu}^{\wedge}$ с $\mu \neq \lambda$, но не лежащие в $a_{\lambda}^{\wedge}$. Факторгруппа G/I_{λ} линейно упорядочена, потому что, если $b \in G$ — произвольный элемент, то из равенства $b^{+\wedge} \wedge b^{-\wedge} = e^{\wedge}$ вытекает, что либо b^{+}, либо b^{-} ортогонально к a_{λ}, т. е. $b^{+} \in I_{\lambda}$ или $b^{-} \in I_{\lambda}$. Это доказывает, что смежный класс $b + I_{\lambda}$ будет либо отрицательным, либо положительным. Пересечение всех I_{λ} не содержит никакого положительного элемента $\neq e$, ибо такой элемент должен быть ортогональным каждому a_{λ}. Однако пересечение всех I_{μ} с $\mu \neq \lambda$ не равно e для любого фиксированного λ, так как оно содержит элементы из $a_{\lambda}^{\wedge}$. Последние два утверждения показывают, что группа G o-изоморфна подпрямому произведению л. у. групп G/I_{λ} и что это представление неприводимо.

Если G обладает неприводимым представлением посредством л. у. групп G_{λ} и если φ_{λ} имеет тот же смысл, что и ранее, то возьмем минимальный носитель $a_{\lambda}^{\wedge}$, описанный в предшествующей лемме. Он определяется единственным образом группой G_λ, так как никакие два элемента a с $\varphi_\lambda(a) > e$ не могут иметь пересечением e. В таком случае мы имеем $\mathrm{Ker}\,\varphi_\lambda = I_\lambda$, определенному в предыдущем абзаце, и группа $G_\lambda \cong_o G/I_\lambda$ может быть описана в терминах атомов структуры $\mathfrak{C}$. Отсюда следует последнее утверждение нашей теоремы.

Группа всех непрерывных действительных функций на конечном интервале обладает представлением, но во всяком представлении каждая компонента будет лишней.

Жаффар [8] исследует группы, являющиеся полными подструктурами некоторого $\Pi^* G_\lambda$ с л. у. G_λ. ⁎

Шик [1], [2] дает условия, необходимые и достаточные для того, чтобы с. у. группа была прямым произведением (или же полным прямым произведением) л. у. групп. По поводу специальных представлений с. у. векторных групп см. также Шик [4].

Якубик [5] показал, что возможность представления с. у. группы G в виде полного прямого произведения л. у. групп может быть описана уже просто на языке теоретико-структурных свойств положительного конуса группы G, однако для подпрямых произведений это неверно.

⁎ 8a. Группы o-автоморфизмов л. у. множеств

Теперь мы будем исследовать с. у. группы, которые получаются как группы o-автоморфизмов л. у. множеств. Неожиданно то, что они обладают достаточной общностью, как видно из теоремы 15 c.

Пусть S — бесконечное л. у. множество; рассмотрим множество A всех o-автоморфизмов множества S, т. е. $a \in A$ тогда и только тогда, когда a — изотонное взаимно однозначное отображение множества S. Очевидно, что A — группа. Положим

$a \leqq b$ тогда и только тогда, когда $\alpha a \leqq \alpha b$ для всех $\alpha \in S$.

Нетрудно проверить, что A стала с. у. группой, в которой

$$\alpha(a \vee b) = \max(\alpha a, \alpha b),$$
$$\alpha(a \wedge b) = \min(\alpha a, \alpha b).$$

Если, например, S состоит из действительных чисел интервала $[0, 1]$, то A будет группой всех таких строго возрастающих функций f, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, относительно суперпозиции функций.

Следуя Кону [1], мы называем всякую группу B взаимно однозначных изотонных отображений множества S *неприводимой на* S, если для каждой пары α, $\beta \in S$ существует такой элемент $a \in B$, что β лежит между α и αa. Это означает, что S не обладает никаким собственным выпуклым подмножеством, которое переводилось бы в себя при каждом $a \in B$. Если B действует транзитивно на S, то B будет, очевидно, неприводимой на S.

Пусть A — группа всех o-автоморфизмов л. у. множества S. Для заданного $\alpha \in S$ имеется наименьшее выпуклое подмножество S_α множества S, содержащее все αa с $a \in A$. Тогда S_α переводится группой A в себя, ибо если $\beta \in S_\alpha$, т. е. если $\alpha a \leqq \beta \leqq \alpha b$ для некоторых a, $b \in A$, то неравенство $\alpha a c \leqq \beta c \leqq \alpha b c$ для каждого $c \in A$ показывает, что $\beta c \in S_\alpha$. [Мы видим, что каждое $a \in A$ индуцирует o-автоморфизм a_α множества S_α и что эти a_α образуют группу, которая будет o-эпиморфным образом группы A.] Группа A неприводима на S_α, ибо если β, $\gamma \in S_\alpha$ и, например, $\beta \leqq \gamma$, то из неравенств $\alpha a \leqq \beta \leqq \alpha b$, $\alpha c \leqq \gamma \leqq \alpha d$ для некоторых a, b, c, $d \in A$ вытекает $\beta \leqq \gamma \leqq \alpha d = \alpha a \cdot a^{-1} d \leqq \beta a^{-1} d$. Фактически S_α будет единственным выпуклым подмножеством множества S, которое содержит α и на котором группа A действует неприводимо.

Теорема 15b (Кон [1]). *Пусть S — л. у. множество и A — с. у. группа всех о-автоморфизмов множества S. Тогда S разлагается на такие попарно не пересекающиеся выпуклые подмножества, $S = \bigcup S_\alpha$, что A действует неприводимо на каждом S_α. Если A_α — с. у. группа всех о-автоморфизмов множества S_α, то*

$$A \cong_o \prod_\alpha {}^* A_\alpha.$$

Группа A действует неприводимо на множествах S_α, определенных выше. Если $\gamma \in S_\alpha$, то, очевидно, $S_\gamma \subseteq S_\alpha$. Так как A действует неприводимо на обоих множествах S_α и S_γ, мы имеем $S_\gamma = S_\alpha$. Поэтому если множества S_α, S_β имеют общий элемент γ, то $S_\alpha = S_\gamma = S_\beta$. Следовательно, указанное разложение множества S имеет место. Рассмотрим отображение

$$\eta : a \rightarrow \langle \ldots, a_\alpha, \ldots \rangle$$

группы A в полное прямое произведение групп A_α; здесь a_α обозначает сужение $a \in A$ на множество S_α. Ясно, что η — гомоморфизм и взаимно однозначное отображение, так как a_α могут выбираться независимо. Очевидна изотонность в обоих направлениях, следовательно, указанный o-изоморфизм установлен.

Чтобы доказать, что каждая с. у. группа может быть вложена в группу A указанного выше типа, нам нужна следующая

Лемма (Конрад [16]). *Пусть G — с. у. группа и $a \in G$, $a \neq e$. Если C — выпуклая l-подгруппа группы G, максимальная относительно свойства* «не содержать a», *то множество правых смежных классов по* mod C *будет л. у. относительно индуцированной упорядоченности.*

Индуцированная упорядоченность означает, что мы полагаем $Ca \leqq Cb$, если Ca содержит элемент, меньший или равный некоторому элементу из Cb.

Ясно, что выпуклая l-подгруппа, порожденная подгруппой C и некоторым элементом $b \in G \setminus C$, $b > e$, состоит из всех $x \in G$, удовлетворяющих условию $|x| \leqq bc_1bc_2 \ldots \ldots bc_k$ для некоторых $c_i \in C^+$; здесь элементы c_i могут быть заменены их объединением, поэтому можно написать $|x| \leqq (bc)^k$. Если через D_1, D_2 и D обозначить выпуклые l-подгруппы, порожденные подгруппой C и элементами b_1, b_2 и $b_1 \wedge b_2$ соответственно ($b_i \geqq e$), то очевидно, $D \subseteq D_1 \cap D_2$. С другой стороны, если $x \in D_1 \cap D_2$, то мы имеем неравенства

$$|x| \leqq (b_1c_1)^k \quad \text{и} \quad |x| \leqq (b_2c_2)^l$$

для некоторых $c_1, c_2 \in C^+$ и целых k, $l > 0$. Но для элементов u, v, $w \in G^+$ справедливы соотношения $u \wedge vw \leqq (u \wedge v) u \wedge uw \wedge vw = (u \wedge v)(u \wedge w)$, и поэтому из неравенства $|x| \leqq (b_1c_1)^k \wedge (b_2c_2)^l$ вытекает, что $|x|$ меньше или равен произведению положительных элементов вида $b_1 \wedge b_2$, $b_1 \wedge c_2$, $b_2 \wedge c_1$ или $c_1 \wedge c_2$. Все они принадлежат D. Поэтому $x \in D$, и мы имеем $D = D_1 \cap D_2$. Пользуясь этим, берем $b_1 = a^+$ и $b_2 = (a^-)^{-1}$, чтобы заключить, что если не справедливы ни включение $a^+ \in C$, ни $a^- \in C$, то $a \in D_1$, $a \in D_2$ и потому $a \in D$, $a^+ \wedge (a^-)^{-1} \notin C$, что абсурдно. Поэтому либо

смежный класс $Ca = Ca^-$ содержит отрицательный, либо $Ca = Ca^+$ содержит положительный элемент. Следовательно, для любых двух правых смежных классов Ca, Cb имеет место либо неравенство $Ca \leqq Cb$, либо $Cb \leqq Ca$, смотря по тому, содержит ли смежный класс Cba^{-1} положительный или отрицательный элемент.

Теорема 15c (Холланд [3]). *Каждая с. у. группа G o-изоморфна подгруппе с. у. группы A всех o-автоморфизмов л. у. множества S.*

Для каждого элемента $g \in G^+$, $g \neq e$, выбираем в G выпуклую l-подгруппу C_g, максимальную относительно свойства $g \notin C_g$. Множество S_g всех смежных классов по C_g будет, согласно лемме, л. у. относительно индуцированной упорядоченности. Если мы сопоставим отображение $C_gx \to C_gxh$ элементу $h \in G$, то это соответствие будет, очевидно, o-гомоморфизмом φ_g группы G на подгруппу G_g группы A_g всех o-автоморфизмов множества S_g. Так как $C_gg \neq C_g$, ядро φ_g не содержит g. Следовательно, гомоморфизмы φ_g приводят к представлению G подпрямым произведением групп G_g. Если мы определим множество S как объединение множеств S_g, линейно упорядоченное так, чтобы подмножества S_g были выпуклыми, то $\Pi^* G_g$ станет подгруппой группы всех o-автоморфизмов множества S.

Поучительным примером является с. у. группа A всех o-автоморфизмов действительной прямой. Определим B (и C) как множество всех $a \in A$, которые оставляют инвариантными все достаточно большие (малые) действительные числа, и положим $D = B \cap C$. Тогда B, C, D будут, очевидно, l-идеалами в A. Как показал Т. Ллойд, B, C, D — единственные нормальные делители группы A и A/B, A/C, B/D, C/D, D — алгебраически простые с. у. группы (которые не являются л. у. группами).✳

9. Полные структурно упорядоченные группы

Ч. у. группа G называется (условно) *полной*[1], если каждое непустое, ограниченное сверху множество из G имеет в G наим. в. г. Очевидно, что этому условию экви-

---

[1] Мы будем опускать наречие «условно», ибо нетривиальные с. у. группы не могут быть полными структурами.

валентно условие: непустые подмножества, ограниченные снизу, обладают в G наиб. н. г. Полные с. у. группы очень важны для анализа.

Рассмотрим некоторые алгебраические правила в полных с. у. группах. Если $\vee x_\alpha$ $(\wedge x_\alpha)$ существует[1]), то

$$a(\vee x_\alpha)b = \vee a x_\alpha b, \tag{1}$$

$$a(\wedge x_\alpha)b = \wedge a x_\alpha b, \tag{2}$$

$$(\vee x_\alpha)^{-1} = \wedge x_\alpha^{-1} \tag{3}$$

для всех a, b, $x_\alpha \in G$; это следует из условий (ii) и (iv) п. 1, гл. II.

Проверим бесконечные законы дистрибутивности[2]):

$$a \wedge (\vee x_\alpha) = \vee (a \wedge x_\alpha), \tag{4}$$

$$a \vee (\wedge x_\alpha) = \wedge (a \vee x_\alpha) \tag{5}$$

для всех a, $x_\alpha \in G$. Достаточно доказать (4); тогда (5) будет справедливо, в силу двойственности. Полагая $v = \vee x_\alpha$, мы имеем, в силу O), п. 4, $e \leqq (a \wedge v)(a \wedge x_\alpha)^{-1} \leqq v x_\alpha^{-1}$. Так как $\wedge (v x_\alpha^{-1}) = v(\vee x_\alpha)^{-1} = e$, мы имеем

$$e = \wedge ((a \wedge v)(a \wedge x_\alpha)^{-1}) = (a \wedge v)(\vee (a \wedge x_\alpha))^{-1},$$

откуда следует тождество (4).

Лемма А (Канторович [1]). *Полная ч. у. группа вполне целозамкнута.*

Допустим, что $a^n \leqq b$ для $n = 1, 2, \ldots$. В силу полноты, в G существует элемент $c = a \vee a^2 \vee \ldots \vee a^n \vee \ldots$, и мы имеем

$$ac = a \cdot \bigvee_{n=1}^{\infty} a^n = \bigvee_{n=2}^{\infty} a^n \leqq c.$$

Поэтому $ac \leqq c$ и $a \leqq e$, что и требовалось.

Подмножество H полной с. у. группы G будет называться *замкнутым*[3]), если из того, что $x_\alpha \in H$ и в G существует $\vee x_\alpha$, следует, что $\vee x_\alpha \in H$. Если H — подгруппа, то то же самое справедливо для $\wedge$. Таким образом, замкнутая подгруппа является в то же время и подструктурой.

* Лемма В (Вейнберг [1]). *l-Идеал J с. у. группы G будет замкнутым тогда и только тогда, когда естественный o-гомоморфизм*

$$\varphi : G \to G/J$$

сохраняет бесконечные пересечения и объединения.

Достаточность этого условия очевидна. Допустим, что J — замкнутый l-идеал группы G. Нам надо показать только, что если $x = \vee x_\alpha$ $(x_\alpha, x \in G)$, то $\varphi(x) = \vee \varphi(x_\alpha)$. Пусть элемент $y \in G$ удовлетворяет условию $\varphi(x_\alpha) \leqq \varphi(y) \leqq \varphi(x)$ для всех α; общность не теряется, если допустить, что $y \leqq x$. Тогда из неравенств $e \leqq \varphi(xy^{-1}) \leqq \varphi(x x_\alpha^{-1})$ вытекает существование таких элементов $y_\alpha \in J^+$, что $e \leqq xy^{-1} \leqq x x_\alpha^{-1} y_\alpha$. Отсюда

$$e \vee xy^{-1} y_\alpha^{-1} \leqq x x_\alpha^{-1},$$

таким образом,

$$e \leqq \bigwedge_\alpha (e \vee xy^{-1} y_\alpha^{-1}) \leqq \bigwedge_\alpha x x_\alpha^{-1} = x(\bigwedge_\alpha x_\alpha^{-1}) = e.$$

Следовательно, $\wedge (e \vee xy^{-1} y_\alpha^{-1}) = e$, $\wedge (yx^{-1} \vee y_\alpha^{-1}) = yx^{-1}$, $xy^{-1} = \vee (xy^{-1} \wedge y_\alpha)$. В силу выпуклости и замкнутости идеала J, мы имеем $xy^{-1} \in J$, откуда $\varphi(xy^{-1}) = e$. Это означает, что $\varphi(y) = \varphi(x)$, и потому действительно $\vee \varphi(x_\alpha) = \varphi(x)$. ⁎

Из условия (4) следует, что в полных с. у. группах множества X^*, определенные в п. 5, замкнуты. Более того, они будут прямыми множителями:

Теорема 16 (Рисс [1], Биркгоф [3]). *Выпуклая замкнутая подгруппа J полной с. у. группы G является прямым множителем для G. В частности,*

$$G = J \times J^*,$$

где J^* состоит из всех элементов группы G, ортогональных к J.

Мы покажем, что имеет место прямое разложение $G = J \times J^*$. Согласно предложению 12, J^* будет выпуклой l-подгруппой и, очевидно, $J \cap J^* = e$. Так как положитель-

---

[1]) Здесь $\vee$ и $\wedge$ обозначают соответственно полные объединения и пересечения.

[2]) См. Канторович [1].

[3]) Рисс [1].

ные элементы из J и J^* порождают J и J^* соответственно, а положительные ортогональные элементы перестановочны, мы можем заключить, что J и J^* поэлементно перестановочны. Для положительного $a \in G$ определяем элемент $a_1 = \bigvee (a \wedge t_\alpha)$, где t_α пробегает все элементы из J. По предположению, из $a \wedge t_\alpha \in J$ следует $a_1 \in J$. Введем элемент $a_2 = a_1^{-1} a$, который, очевидно, больше или равен e. Для произвольного $t \in J$, $|t| = t \vee t^{-1} \in J$, $a_1 |t| \in J$, следовательно, $a_1 \geqq a \wedge (a_1 |t|) = a_1 (a_2 \wedge |t|)$, откуда $a_2 \wedge |t| = e$ для всех $t \in J$, т. е. $a_2 \in J^*$. Мы приходим к выводу, что положительный конус группы G является прямым произведением положительных конусов подгрупп J и J^*, следовательно, $G = J \times J^*$ как в теоретико-групповом, так и в теоретико-структурном смысле.

Пересечение множества замкнутых l-идеалов будет снова замкнутым. Поэтому из теорем 10 и 16 получается

Следствие 17 (Биркгоф [3]). *Замкнутые l-идеалы полной с. у. группы образуют булеву алгебру.*

Заметим, что в теореме 16 инвариантность J была следствием предположений. Этот факт будет использован в доказательстве следующего важного результата.

Теорема 18 (Ивасава [1], Огасавара [1]) *Полная с. у. группа G коммутативна.*

Основная идея следующего ниже доказательства, данного Биркгофом [3], является, по существу, модификацией доказательства теоремы 1 гл. IV.

Начнем с замечания о том, что для каждого конечного множества $x_1, \ldots, x_n$ элементов из G можно найти такое прямое разложение $G = J_1 \times \ldots \times J_k$, что все компоненты элементов $x_1, \ldots, x_n$ в замкнутых l-идеалах J_i сравнимы с e для каждого i. Согласно предложению 12 и теореме 16, $(x_j^+)^*$ является прямым множителем группы G, дополнение которого $(x_j^+)^{**}$ содержит x_j^-. В силу дистрибутивности структуры прямых множителей, мы можем взять общее продолжение, чтобы получить требуемое разложение G.

Для того чтобы установить коммутативность, возьмем два положительных элемента a, b из G. Вследствие предыдущего замечания мы можем предположить, что элементы $a^{-1}b$, $[a, b]$, $[a, b, b]$ сравнимы с e. В силу симметрии, можно допустить, что $a^{-1}b > e$. В случае, когда $[a, b] \geqq e$, мы различаем два подслучая: $[a, b, b] \geqq e$ или $\leqq e$. В первом подслучае $[a, b] \leqq b^{-1} [a, b] b$ и потому $[a, b] \leqq b^{-i} [a, b] b^i$ при $i \geqq 0$. Поэтому, в силу тождества

$$[a, b^n] = \prod_{i=0}^{n-1} (b^{-i} [a, b] b^i) \qquad (n > 0),$$

мы заключаем, что $[a, b]^n \leqq [a, b^n]$ при $n = 1, 2, \ldots$. Так как $a < b$ влечет $b^{-n} a b^n < b$, мы имеем $[a, b^n] < a^{-1}b$. Из неравенства $[a, b[^n < a^{-1}b \ (n = 1, 2, \ldots)$ мы, пользуясь леммой А, получаем $[a, b] \leqq e$ и потому $[a, b] = e$. Во втором подслучае $[a, b] \leqq b^i [a, b] b^{-i}$ при $i \geqq 0$ и из тождества

$$[b^{-n}, a] = \prod_{i=n}^{1} (b^i [a, b] b^{-i}) \quad (n > 0),$$

мы получаем $[a, b]^n \leqq [b^{-n}, a]$ при $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому из неравенства $[a, b]^n \leqq b^n a^{-1} b^{-n} a < a$ и полной целозамкнутости следует $[a, b] \leqq e$ и $[a, b] = e$. Оставшийся случай, когда $[a, b] \leqq e$, может быть рассмотрен аналогичным образом. Мы приходим к заключению, что a и b коммутируют.

Можно показать, что полная с. у. группа будет прямым произведением двух групп, одна из которых o-изоморфна подпрямому произведению л. у. бесконечных циклических групп, а другая является полной векторной структурой. Здесь под *векторной структурой* понимается с. у. группа, являющаяся таким векторным пространством над полем действительных чисел, что умножение на положительные действительные числа сохраняет порядок.

✻ 9а. Радикал

Мы можем каждой с. у. группе G сопоставить l-идеал, который напоминает радикал. Это понятие было введено Конрадом.

Назовем элемент a с. у. группы G *подчиненным* элементу $g \in G$, если для каждого представления $|g|$ в виде объединения

$$|g| = g_1 \vee \ldots \vee g_n \quad (g_i \in G, \ g_i \geqq e) \tag{1}$$

существует такой индекс i, что

$$a \in I(g_i), \tag{2}$$

где $I(g_i)$ обозначает l-идеал, порожденный элементом g_i. Отсюда сразу следует, что

(i) единица e подчинена каждому $g \in G$;

(ii) если элемент a подчинен элементу g, то $a \in I(g)$;

(iii) в л. у. группе каждый элемент $a \in I(g)$ подчинен элементу g;

(iv) если a подчинен элементу g, то произвольные элементы, сопряженные с a, подчинены произвольным сопряженным с g элементам;

(v) если элемент a подчинен элементу g и $|b| \leqq |a|$, $|g| \leqq |h|$, то элемент b подчинен элементу h;

(vi) если элемент a подчинен элементу $g \vee h$, то он подчинен либо элементу g, либо элементу h.

Нам надо доказать только свойство (vi). Допустим, что элемент a не подчинен ни g, ни h. Тогда мы имеем $|g| = g_1 \vee \ldots \vee g_n$, $|h| = h_1 \vee \ldots \vee h_m$, причем $a \notin I(g_i)$ и $a \notin I(h_j)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Таким образом, элемент a не подчинен элементу $|g| \vee |h| = g_1 \vee \ldots \ldots \vee g_n \vee h_1 \vee \ldots \vee h_m$. Так как, в силу свойства M), п. 4, $|g \vee h| \leqq |g| \vee |h|$, мы приходим к выводу, что a не подчинен элементу $g \vee h$.

Пусть $a \in G$ и $a \neq e$. Элементы группы G, которым элемент a не подчинен, образуют l-идеал, легко поддающийся описанию.

Предложение 18a. *В с. у. группе G элемент $a \neq e$ тогда и только тогда не подчинен элементу $g \in G$, когда $g \in \Omega(a)$, где $\Omega(a)$ обозначает l-идеал, порожденный всеми l-идеалами группы G, не содержащими элемента a.*

Пусть элемент a не подчинен элементу g. Таким образом, существует представление (1) элемента $|g|$, такое, что $a \notin I(g_i)$ для каждого i. Тогда g содержится в l-идеале, порожденном идеалами $I(g_1), \ldots, I(g_n)$, и, значит, в $\Omega(a)$. Обратно, пусть $g \in \Omega(a)$. Существует конечное число l-идеалов $A_1, \ldots, A_n$, не содержащих элемента a и таких, что $a \in \{A_1, \ldots, A_n\}$. По лемме C из п. 5 $|g| = g_1 \vee \ldots \vee g_n$ для некоторых $e \leqq g_i \in A_i$. Тогда $a \notin I(g_i)$ и потому элемент a не подчинен элементу g.

Рассмотрим множество $R(G)$ элементов группы G, которым подчинена только единица e. Мы собираемся показать, что оно всегда будет l-идеалом группы G.

Теорема 18b. *Элемент $g \in G$ тогда и только тогда обладает тем свойством, что только e подчинено g, когда $g \in \Omega(a)$ для каждого $a \in G$, $a \neq e$. Поэтому*

$$R(G) = \bigcap_{a \neq e} \Omega(a),$$

и множество $R(G)$ будет l-идеалом в G; оно называется *радикалом* группы G.

Если элементу g подчинено только e, то, согласно предыдущему результату, $g \in \Omega(a)$ для каждого $a \in G$, $a \neq e$, и обратно.

Примеры 1. Пусть G — с. у. группа всех действительных функций на интервале $[0, 1]$. В этом случае элемент $a \in G$ подчинен элементу $g \neq 0$ тогда и только тогда, когда функция a исчезает, за исключением самое большее одной точки, в которой g также не исчезает. Поэтому $R(G) = 0$.

2. Если теперь G — с. у. группа всех непрерывных действительных функций на том же интервале, то отсюда немедленно следует, что ненулевая функция не может быть подчинена никакой функции. В этом случае $R(G) = G$.

3. Возьмем полную прямую сумму счетного множества экземпляров л. у. группы целых чисел и определим G как факторгруппу этой группы по дискретной прямой сумме тех же компонент. Тогда опять $R(G) = G$.

Будет использована следующая терминология. Если $a \in G$ и M — l-идеал группы G, максимальный относительно свойства «не содержать a», то мы назовем M *регулярным* l-идеалом, *ассоциированным с a*. Пересечение всех l-идеалов группы G, строго содержащих M, содержит элемент a, и потому оно будет единственным l-идеалом M^* группы G, для которого $M \subset M^*$ и нет l-идеалов группы G, лежащих между M и M^*. Очевидно, что $\Omega(a)$ будет как раз объединением всех регулярных l-идеалов группы G, ассоциированных с a.

Назовем l-идеал A группы G *существенным*, если (i) он регулярный и (ii) существует такой элемент $b \in G$, $b \neq e$, что $A \supseteq \Omega(b)$. Если для некоторого $a \in G$ имеется только один регулярный l-идеал M, ассоциированный с a, то $M = \Omega(a)$, и поэтому M — существенный.

Лемма (Конрад [17]). *Регулярный l-идеал M тогда и только тогда будет существенным, когда пересечение всех регулярных l-идеалов группы G, не содержащихся в M, отлично от e.*

Допустим, что пересечение всех регулярных l-идеалов N, не лежащих в M, содержит элемент $a \neq e$. Тогда никакой регулярный l-идеал, ассоциированный с a, не может находиться среди N, откуда вытекает, что M содержит все регулярные l-идеалы, ассоциированные с a. Следовательно, $M \supseteq \Omega(a)$ и M — существенный. Обратно, если $M \supseteq \Omega(a)$, то a должно принадлежать указанному пересечению.

Регулярные l-идеалы группы G могут быть охарактеризованы теоретико-структурным образом в структуре L всех l-идеалов группы G. Они будут как раз неразложимыми в пересечение элементами структуры L: они не могут записываться в виде пересечения какого-нибудь множества бо́льших элементов. Благодаря этой лемме существенные l-идеалы тоже можно охарактеризовать в структуре L теоретико-структурным образом. Следующий результат покажет, что радикал $R(G)$ также является инвариантом структуры L.

Теорема 18с. (Конрад [17]). *Радикал $R(G)$ с. у. группы G является пересечением всех существенных l-идеалов группы G.*

Из определения следует, что пересечение всех существенных l-идеалов группы G содержит пересечение всех $\Omega(a)$ и, следовательно, $R(G)$. Чтобы доказать обратное, положим, что $g \notin R(G)$, т. е. $g \notin \Omega(a)$ для некоторого $a \in G$. По лемме Цорна существует регулярный l-идеал M, содержащий $\Omega(a)$ и ассоциированный с g. Этот идеал M будет существенным и потому пересечение существенных l-идеалов не содержит элемента g.

9b. Вполне дистрибутивные с. у. группы

Мы знаем, что с. у. группа дистрибутивна как структура. Структура же может подчиняться более сильным законам дистрибутивности. Посмотрим, что можно сказать о с. у. группах, удовлетворяющих более сильному закону дистрибутивности.

Говорят, что с. у. группа G *вполне дистрибутивна*, если для всех $g_{\lambda\mu} \in G$ (λ, μ пробегают произвольные множества индексов Λ и M соответственно) справедливо равенство

$$\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \bigvee_{\mu \in M} g_{\lambda\mu} = \bigvee_{\rho} \bigwedge_{\lambda} g_{\lambda\rho(\lambda)}, \tag{1}$$

(где ϱ пробегает все функции, отображающие Λ в M), при условии, что указанные объединения и пересечения существуют. Очевидно, что полное прямое произведение с. у. групп будет вполне дистрибутивным тогда и только тогда, когда вполне дистрибутивны все компоненты.

Предложение 18d (Вейнберг [1]). *С. у. группа G тогда и только тогда будет вполне дистрибутивной, когда она обладает следующим свойством: (*) для каждого $g \in G$, $g > e$, существует такой элемент $g^* \in G$, $g^* > e$, что из равенства $g = \bigvee_{\mu} g_{\mu}$ ($g_{\mu} > e$) вытекает $g^* \leq g_{\mu}$ для некоторого μ.*

Пусть группа G вполне дистрибутивна и $g > e$. Возьмем все представления элемента g в виде объединения положительных элементов, $g = \bigvee_{\mu} g_{\lambda\mu}$ ($\lambda \in \Lambda$). Здесь мы можем предположить без ограничения общности, что для всех λ индекс μ пробегает одно и то же множество индексов, так как компонента может браться повторно. Тогда левая часть равенства (1) будет равна элементу g. Следовательно, должна существовать функция ϱ, отображающая множество Λ в M, для которой элемент $\bigwedge_{\lambda} g_{\lambda\rho(\lambda)} = g^*$ не существует или будет больше чем e. Этот элемент g^* удовлетворяет условию (*).

Обратно, предположим, что условие (*) выполнено для каждого $g \in G$, $g > e$. Рассмотрим элементы $g_{\lambda\mu}$ ($\lambda \in \Lambda$, $\mu \in M$), для которых объединения и пересечения, входящие в равенство (1), существуют. Обозначим через g и h соответственно левую и правую части равенства (1). Доказывая методом от противного, положим $g > h$. Если $h_{\lambda\mu} = (g \wedge g_{\lambda\mu}) h^{-1}$, то[1] получим

$$\bigvee_{\mu} h_{\lambda\mu} = \bigvee_{\mu} [(g \wedge g_{\lambda\mu}) h^{-1}] = [g \wedge (\bigvee_{\mu} g_{\lambda\mu})] h^{-1} = gh^{-1} > e,$$

---

[1] Мы можем свободно пользоваться свойствами (1)—(5), п. 9.

в то время как

$$\bigwedge_{\lambda} h_{\lambda\rho(\lambda)} = \bigwedge_{\lambda} [(g \wedge g_{\lambda\rho(\lambda)}) h^{-1}] = [g \wedge (\bigwedge_{\lambda} g_{\lambda\rho(\lambda)})] h^{-1} =$$

$$= (\bigwedge_{\lambda} g_{\lambda\rho(\lambda)}) h^{-1} \leqq e$$

для всех функций $\varrho(\lambda)$. Тогда для элемента $a = \bigvee_{\mu} (e \vee h_{\lambda\mu}) > e$ условие (*) не может иметь места, так как для каждой функции $\varrho(\lambda)$

$$\bigwedge_{\lambda} (e \vee h_{\lambda\rho(\lambda)}) = e \vee (\bigwedge_{\lambda} h_{\lambda\rho(\lambda)}) = e.$$

Это завершает доказательство.

Заметим, что каждая л. у. группа G вполне дистрибутивна. Действительно, пусть $g > e$ в группе G. Если открытый интервал (e, g) пуст или содержит максимальный элемент, то полагаем $g^* = g$, тогда как в противном случае выбираем g^* в интервале (e, g) произвольно. Этот элемент g^* удовлетворяет условию (*).

Комбинируя это замечание с леммой В, п. 9, мы приходим к следующей лемме.

Лемма. *С. у. группа G обязательно будет вполне дистрибутивной, если она содержит такие замкнутые l-идеалы C_α, что G/C_α л. у. и идеалы C_α имеют в пересечении e.*

Среди вполне дистрибутивных с. у. групп особый интерес представляют те, которые являются с. у. векторными группами. В остающейся части этого пункта мы ограничимся такими группами.

Предложение 18e (Вейнберг [1]). *Если структура $\mathfrak{C}$ носителей с. у. векторной группы G атомна, то группа G вполне дистрибутивна.*

Если $g > e$ — произвольный элемент и $a^\wedge$ — атом, который $\leqq g^\wedge$, то для произвольного $a \in a^\wedge$ мы имеем $a \wedge g > e$. Согласно теореме 11, l-идеал A, порожденный носителем $a^\wedge$, имеет в качестве положительного конуса как раз элементы из $a^\wedge$ с присоединенной единицей e.

По лемме п. 4 идеал A будет л. у. и потому ввиду нашего предварительного замечания содержит такой элемент $g^* > e$, что a удовлетворяет условию (*). В силу предложения 18d, группа G в самом деле будет вполне дистрибутивной.

Таким образом, с. у. векторная группа, которая обладает неприводимым представлением, будет вполне дистрибутивной.

Можно привести пример, показывающий, что обращение последнего результата, вообще говоря, не имеет места. Оно будет справедливо, если предположить, что группа G архимедова.

Теорема 18f (Конрад [17]). *Для с. у. векторной группы G следующие условия эквивалентны:*

(a) *группа G вполне дистрибутивна;*

(b) *радикал группы G равен единице e, $R(G) = e$;*

(c) *существенные l-идеалы группы G замкнуты и их пересечение равно e.*

Допустим, что выполнено условие (a), и выберем для элемента $g > e$ элемент $g^* > e$, удовлетворяющий условию (*) предложения 18d. Если бы $g \in R(G)$, то $g \in \Omega(g^*)$ и потому, согласно лемме С п. 5, $g = g_1 \vee \ldots \vee g_n$ для некоторых $g_i > e$, содержащихся в регулярных l-идеалах A_i, ассоциированных с элементом g^*. Поэтому $g^* \leqq g_i$ для некоторого i; таким образом, $g^* \in A_i$ в противоречие с условием $g^* \notin A_i$. Следовательно, из (a) следует (b).

Допустим, далее, что выполнено условие (b), и заметим, что для того, чтобы вывести условие (c), надо проверить, в силу теоремы 18c, только замкнутость существенных l-идеалов. Допустим, что M — существенный l-идеал, и предположим противное: пусть существуют такие элементы $g_\lambda \in M$, что $g = \vee g_\lambda \notin M$, где, не теряя общности, можно считать, что $g_\lambda > e$. Имеем $M \supseteq \Omega(a)$ для некоторого $a \in G$, которое может считаться больше e. Мы покажем, что для одного из таких a для каждого λ имеет место неравенство $a^{-1}g \geqq g_\lambda$, которое, очевидно, противоречит равенству $g = \vee g_\lambda$. Заметим, что G является подпрямым произведением л.у. групп G/N, N пробегает существенные l-идеалы группы G, и потому мы можем установить положительность элемента $g_\lambda^{-1} a^{-1} g$, показав, что смежный класс $g_\lambda^{-1} a^{-1} g N$ всегда положителен. Достаточно сделать это только для того случая, когда N не содержит, а N^* содержит элемент $g_\lambda^{-1}a^{-1}g$ (N^* обозначает пересечение всех l-идеалов, строго содержащих N). Пусть N выбрано указанным образом. Если $a \in N$, то $g_\lambda^{-1}a^{-1}gN = g_\lambda^{-1}gN$, и этот смежный класс будет, конечно, положительным, так как положителен элемент $g_\lambda^{-1}g$. Если же $a \notin N$, то $N \subseteq \Omega(a) \subseteq M$, и мы различаем два случая, смотря по тому, будет ли $a \in M$ или $a \notin M$. В первом случае $g_\lambda^{-1}a^{-1}g \notin M$, и потому $N = M$, поскольку N — регулярный l-идеал, ассоциированный с $g_\lambda^{-1}a^{-1}g$. Это противоречит тому, что $a \notin N$. Во втором случае мы предположим, кроме того, что $a \notin M$ для каждого такого $a > e$, что $\Omega(a) \subset M$. Тогда M будет минимальным существенным l-идеалом группы G и единственным регулярным l-идеалом, ассоциированным с a. Так как теперь G/M — л. у., $a \wedge g \notin M$, и мы можем заменить a элементом $a \wedge g$; другими словами, можно считать, что $a \leqq g$. Соотношение $a \notin N$ и единственность идеала M приводят к включению $N \subseteq M$. и поэтому $N = M$, в силу минимальности M. Таким образом, смежный класс $g_\lambda^{-1}a^{-1}gN = g_\lambda^{-1}a^{-1}gM = a^{-1}gM$ будет непременно положительным. Это завершает доказательство того, что из условия (b) вытекает (c).

Наконец, мы должны показать, что условие (a) является следствием условия (c). Но это непосредственно вытекает из леммы. ⁎

10. Погружение в полные структурно упорядоченные группы

Обратимся к вопросу о погружении с.у. группы в полную с. у. группу.

Как показал Макнейлл¹), для погружения произвольного ч. у. множества в полную структуру можно применить классический метод образования дедекиндовых сечений. Если этот процесс применить к ч. у. группе, то результат, вообще говоря, не будет группой. Однако если ч. у. группа вообще может быть вложена с сохранением порядка в полную с. у. группы, как в случае рациональных чисел, то вложение может быть осуществлено при помощи дедекиндова процесса.

---

¹) Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), 416—460.

Пусть G — произвольная ч. у. группа. Будем рассматривать только непустые u-ограниченные подмножества X из G. Соответствие

$$X \to X^\# = L(U(X))$$

будет операцией замыкания, т. е. оно обладает свойствами: $X \subseteq X^\#$; $X^{\#\#} = X^\#$; из $X \subseteq Y$ следует $X^\# \subseteq Y^\#$. Множество $G^\#$ всех «замкнутых» множеств C (т. е. ни C, ни $U(C)$ не пусты и $C^\# = C$) будет условно полной условной структурой¹) относительно теоретико-множественного включения. Действительно, (а) если $C_0 \subseteq C_\alpha$ ($\in G^\#$), то пересечение $\bigcap C_\alpha$ лежит в $G^\#$ и является наиб. н. г. $\bigwedge C_\alpha$ для C_α:

$$\bigcap C_\alpha = \bigcap L(U(C_\alpha)) = L(\bigcup U(C_\alpha)) \supseteq L(U(\bigcap C_\alpha)) \supseteq \bigcap C_\alpha;$$

(b) если $C_0 \supseteq C_\alpha$ ($\in G^\#$), то замыкание теоретико-множественного объединения $(\bigcup C_\alpha)^\#$ будет наим. в. г. $\bigvee C_\alpha$ для C_α. Соответствие

$$a \longrightarrow a^\# = L(a)$$

погружает G в $G^\#$. Оно сохраняет порядок, наиб. н. г. и наим. в. г., ибо если $\bigwedge a_\alpha$ существует в G, то

$$(\bigwedge a_\alpha)^\# = L(\bigwedge a_\alpha) = L(\ldots, a_\alpha, \ldots) = \bigcap L(a_\alpha) = \bigwedge a_\alpha^\#,$$

и, если $\bigvee a_\alpha$ существует в G, то из $a_\alpha^\# \leqq C$ ($\in G^\#$) для всех α следует $a_\alpha \in C$, $\bigvee a_\alpha \in C$, $(\bigvee a_\alpha)^\# \leqq C$, и потому (вследствие неравенства $a_\alpha^\# \leqq (\bigvee a_\alpha)^\#$)$(\bigvee a_\alpha)^\#$ будет наим. в. г. для $a_\alpha^\#$ в $G^\#$:

$$(\bigvee a_\alpha)^\# = \bigvee a_\alpha^\#.$$

$G^\#$ будет структурой в точности тогда, когда G — направленная группа.

Определим произведение $X \cdot Y$ для $X, Y \in G^\#$ как замыкание множества XY всех xy ($x \in X$, $y \in Y$)²). Легко про-

---

¹) Под условной структурой мы понимаем ч. у. множество, в котором любые два элемента, имеющие верхнюю (нижнюю) грань, имеют и наим. в. г. (наиб. н. г.).

²) Отметим, что точка указывает на произведение в $G^\#$, в то время как запись рядом обозначает умножение комплексов в G.

веряется, что

$$a^{\#}\cdot b^{\#}=(ab)^{\#},\quad a^{\#}\cdot C=(aC)^{\#},\quad C\cdot a^{\#}=(Ca)^{\#},$$

а $e^{\#}$ — нейтральный элемент в $G^{\#}$. Так как

$$X^{\#}\cdot Y=(X^{\#}Y)^{\#}=(\bigcup_{y}X^{\#}y)^{\#}=(\bigcup_{y}(Xy)^{\#})^{\#}=$$

$$=\bigvee(Xy)^{\#}\subseteq(XY)^{\#}$$

для $X\subseteq G$, $Y\in G^{\#}$, и потому

$$X^{\#}\cdot Y=(XY)^{\#},$$

мы заключаем, что умножение в $G^{\#}$ ассоциативно. Далее, из $A\leqq B$ следует $C\cdot A\leqq C\cdot B$ и $A\cdot C\leqq B\cdot C$ для всех A, B, C из $G^{\#}$. Мы видим, что $G^{\#}$ — полугруппа и условная структура 1), в которую G вкладывается в качестве l-подгруппы.

Вообще говоря, $G^{\#}$ не будет группой. В самом деле, справедлива

Лемма 2) *Элемент $C\in G^{\#}$ тогда и только тогда обладает левым обратным D в $G^{\#}$, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

(i) $U(L(C^{-1})C)=P$;

(ii) $L(C^{-1}U(C))=P^{-1}$;

(iii) $U(C)x\subseteq U(C)$ *(тогда и) только тогда, когда* $x\in P$.

В этом случае $D=L(C^{-1})$.

Из (i) мы получаем $L(C^{-1})\cdot C=L(U(L(C^{-1})C))=L(P)=e^{\#}$, т. е. $D=L(C^{-1})$ является левым обратным для C. Обратно, пусть C обладает левым обратным D, $L(U(DC))=P^{-1}$. Из $Dc\subseteq P^{-1}$, т. е. из $D\subseteq P^{-1}C^{-1}$ для всех $c\in C$, мы получаем $D\subseteq L(C^{-1})$. Таким образом, $DC\subseteq L(C^{-1})C\subseteq P^{-1}$ и потому $(P\supseteq)U(DC)\supseteq U(L(C^{-1})C)\supseteq P$, откуда следует (i).

---

1) Более того, она будет (условно) с. у. полугруппой, так как

$$(A\vee B)\cdot C=(A\cup B)^{\#}\cdot C=[(A\cup B)C]^{\#}=(AC\cup BC)^{\#}=$$

$$=(AC)^{\#}\vee(BC)^{\#}=A\cdot C\vee B\cdot C.$$

2) Условие (i) было дано Эвереттом [1], а (iii) в одном частном случае Бэром [2]. Отметим, что $C^{-1}=[x^{-1}\mid x\in C]$.

Включение $u\in U(L(C^{-1})C)$ эквивалентно неравенству $u\geqq xc$ для всех $x\in L(C^{-1})$ и $c\in C$. Оно может быть записано в виде $c^{-1}x^{-1}\geqq u^{-1}$ для $c^{-1}\in C^{-1}$, $x^{-1}\in L(C^{-1})^{-1}=U(C)$. Поэтому (ii) эквивалентно (i). Так как включение $U(C)x\subseteq U(C)$ означает, что $c\leqq ux$ для всех $c\in C$, $u\in U(C)$, т. е. $u^{-1}c\leqq x$ для всех $u^{-1}\in L(C^{-1})$, $c\in C$, соотношение $U(C)x\subseteq U(C)$ эквивалентно включению $x\in U(L(C^{-1})C)$. Это завершает доказательство.

Элементы из $G^{\#}$, имеющие обратные, образуют в $G^{\#}$ подгруппу. Она будет называться *дедекиндовым расширением* G_D группы G.

В каком случае G_D совпадает с $G^{\#}$? Согласно лемме А из п. 9, это может случиться только тогда, когда G вполне целозамкнута. Это условие будет также и достаточным, как видно из следующей теоремы.

Теорема 19 1). *Ч. у. группа G тогда и только тогда может быть вложена в полную ч. у. группу с сохранением порядка наиб. н. г. и наим. в. г., когда G вполне целозамкнута. Если G — направленная группа, то ее дедекиндово расширение будет полной с. у. группой.*

Чтобы доказать достаточность, положим, что G вполне целозамкнута. Мы проверим, что условие (iii) последней леммы выполняется. Из $U(C)x\subseteq U(C)$ вытекает $U(C)x^{n}\subseteq\subseteq U(C)$ для $n=1, 2, \ldots$, откуда $ux^{n}\geqq c$, т. е. $c^{-1}u\geqq x^{-n}$ для (всех) $u\in U(C)$, $c\in C$. Из предположения следует, что $x^{-1}\leqq e$, т. е. $x\in P$. Таким образом, $G^{\#}$ — группа. Так как в $G^{\#}$ каждое ограниченное сверху множество обладает наим. в. г., доказательство закончено.

Следствие 20. *Вполне целозамкнутая направленная группа коммутативна.*

Это является непосредственным следствием из теорем 18 и 19.

11. Канторовское расширение

Другим важнейшим методом получения действительных чисел является канторовский метод фундаментальных

---

1) Многие авторы внесли свой вклад в эту теорему: Крулль [1], Лоренцен [1], Клиффорд [1], Эверетт — Улам [1].

последовательностей. Оказывается, однако, что канторовским процессом не всегда возможно пополнить ч. у. группу, даже когда она с. у. и может быть пополнена при помощи дедекиндова процесса.

Чтобы проанализировать канторовский метод пополнения при помощи последовательностей, воспользуемся o-сходимостью, введенной в п. 8 гл. II. Для определения произведения канторовских последовательностей необходимо ограничиваться последовательностями определенного порядкового типа. Ради простоты мы будем, следуя Эверетту [1], пользоваться обычными последовательностями $a_n (n=1, 2, \ldots)$[1].

Пусть G — коммутативная с. у. группа. Последовательность (u_n) называется *единичной последовательностью*, если $u_n \longrightarrow e$ в смысле o-сходимости[2]. Фундаментальная последовательность определяется как последовательность, удовлетворяющая условию

$$|a_n a_m^{-1}| \leqq u_n$$

для некоторой единичной последовательности (u_n) и всех $m \geqq n$. Здесь мы можем, не теряя общности, предположить, что $u_n \downarrow e$. Каждая o-сходящаяся последовательность фундаментальна, если же верно и обратное, то G называется *o-полной*.

При естественном определении произведения $(a_n)(b_n) = (a_n b_n)$ фундаментальные последовательности образуют группу H, в которой единичные последовательности образуют нормальный делитель E. Определим канторовское расширение[3] G_C группы G, как факторгруппу H/E. Из свойств J), О) п. 4 мы заключаем, что вместе с последовательностями (a_n) и (b_n) последовательность $(a_n \vee b_n)$ снова будет фундаментальной и если $(a_n) \equiv (c_n) (\operatorname{mod} E)$,

то $(a_n \vee b_n) \equiv (c_n \vee b_n) (\operatorname{mod} E)$[1]. Следовательно, объединение $(a_n) \vee (b_n)$ двух фундаментальных последовательностей может быть определено как последовательность $(a_n \vee b_n)$. Пусть $(a_n) \geqq (b_n)$ означает, что $(a_n \vee b_n) \equiv (a_n) (\operatorname{mod} E)$; тогда справедлив закон монотонности. Следовательно, G_c также будет с. у. группой. Если через (a) обозначить последовательность, состоящую из постоянных членов a, то мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 21 (Эверетт [1]). *Канторовское расширение[2] G_C коммутативной с. у. группы G будет с. у. группой. Каноническое отображение $a \longrightarrow (a)$ группы G в G_C будет o-изоморфизмом, и если отождествить соответствующие элементы, то каждая фундаментальная последовательность из группы G будет o-сходящейся в G_C, а каждый элемент из G_C будет o-пределом некоторой фундаментальной последовательности из G.*

Последнее утверждение очевидно, так как смежные классы по $\operatorname{mod} E$ будут в точности o-пределами последовательностей, лежащих в этих смежных классах, что и требовалось доказать.

Канторовское расширение G_C группы G, вообще говоря, не будет o-полным. Для того чтобы получить достаточное условие o-полноты группы G_C, назовем с. у. группу G *диагональной*, если всякий раз, когда в G дана такая двойная последовательность a_{kn} $(k, \ n=1, \ 2, \ldots)$, что каждая последовательность a_{kn} при фиксированном k и переменном n стремится, убывая, к e, в G существует такая последовательность (b_k), причем $b_k \longrightarrow e$, что $a_{kn_k} \leqq b_k$ для подходящего выбора n_k.

Теорема 22 (Эверетт [1]). *Канторовское расширение G_C коммутативной с. у. диагональной группы G будет o-полной (и снова диагональной) группой.*

---

[1] Вообще говоря, следует пользоваться трансфинитными последовательностями. Мы должны использовать тот тип, для которого существует единичная последовательность с различными членами, в противном случае наши рассмотрения будут тривиальны. По поводу этой проблемы в л. у. случае см. Коэн — Гофман [1].

[2] Или, что то же самое, $|u_n| \leqq v_n$ для некоторой такой (v_n), что $v_n \downarrow e$.

[3] Строго говоря, группа G_c не вполне определяется группой G. Она зависит от лежащего в основе типа фундаментальных последовательностей

---

[1]
$$|(a_k \vee b_k)(a_m \vee b_m)^{-1}| \leqq$$
$$\leqq |(a_k \vee b_h)(a_k \vee b_m)^{-1}| \, |(a_k \vee b_m)(a_m \vee b_m)^{-1}| \leqq$$
$$\leqq |b_k b_m^{-1}| \, |a_k a_m^{-1}|$$

[2] См. сноску 3) на стр. 150.

Докажем сначала, что если a_n, $a \in G$ и $a_n \to a$ в G_C, то и в G $a_n \to a$. Пусть $|a_n a^{-1}| \leqq \gamma_n \downarrow e$ в G_C, где[1] $\gamma_n = (u_{nm})$, $|u_{nm}u_{nk}^{-1}| \leqq v_{nm} (k \geqq m)$, причем $v_{nm} \downarrow e$ в G. Из диагональности вытекает существование такой последовательности (w_n), что $v_{nm} \leqq w_n \downarrow e$ в G. Тогда

$$e \leqq v_{nm_n} u_{nm_n} u_{nm}^{-1} \leqq v_{nm_n}^2 \leqq w_n^2 \text{ для } m \geqq m_n,$$

и если мы положим $u_n = v_{nm_n} u_{nm_n}$, то

$$u_{nm} \leqq u_n \leqq w_n^2 u_{nm} \text{ в } G \text{ и } \gamma_n \leqq u_n \leqq w_n^2 \gamma_n$$

в G_C. Следовательно,

$$e \leqq \gamma_n = \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \leqq u_1 \wedge \ldots \wedge u_n \leqq w_n^2 \gamma_n,$$

и потому $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n \downarrow e$ в G_C. Но если монотонная последовательность из G имеет *o*-пределом $e (\in G)$ в G_C, то она *o*-сходится к e и в G, откуда видно, что $|a_n a^{-1}| \leqq u_1 \wedge \ldots \wedge u_n \downarrow e$ и $a_n \to a$ в G.

Допустим теперь, что $\alpha_k \in G_C (k = 1, 2, \ldots)$ — фундаментальная последовательность в G_C, $|\alpha_k \alpha_l^{-1}| \leqq \gamma_k \downarrow e (l \geqq k)$. Ясно, что $\alpha_k = (a_{kn})$ удовлетворяет условию $|a_{kn} a_{km}^{-1}| \leqq u_{kn} \downarrow e$ в $G (m \geqq n)$. Ввиду диагональности в G существует такая последовательность $v_k \downarrow e$, что $u_{kn_k} \leqq v_k$ для некоторого n_k. Положим $b_k = a_{kn_k}$; тогда $|\alpha_k b_k^{-1}| \leqq u_{kn_k} \leqq v_k$. Отсюда и из неравенств $|\alpha_l b_l^{-1}| \leqq v_l \leqq v_k (l \geqq k)$ и $|\alpha_k \alpha_l^{-1}| \leqq \gamma_k$ мы получаем[2] $|b_k b_l^{-1}| \leqq v_k \gamma_k v_k \downarrow e$. Согласно предыдущему абзацу $b_k b_l^{-1}$ *o*-сходится в G, т. е. $|b_k b_l^{-1}| \leqq w_k \downarrow e$ в $G (l \geqq k)$ и $(b_k) = \alpha \in G_C$. Ясно, что $|\alpha b_k^{-1}| \leqq w_k$, откуда неравенство $|\alpha_k b_k^{-1}| \leqq v_k$ влечет $|\alpha \alpha_k^{-1}| \leqq w_k v_k \downarrow e$. Таким образом, $\alpha_k \to \alpha$ в G_C и G_C — *o*-полная группа.

Пусть для каждого фиксированного k последовательность $(\alpha_{kn}) \downarrow e$ в G_C. Тогда, как показано для γ_k в предпоследнем абзаце, $\alpha_{kn} \leqq u_{kn} \in G$ для некоторой последовательности $(u_{kn}) \downarrow e$ и из диагональности G следует диагональность G_C, что и завершает доказательство теоремы 22.

Пусть G коммутативная с. у. группа. Мы хотим понять взаимоотношение между канторовским и дедекиндовым расширениями группы G. Следующий результат дает нам большую часть желаемой информации.

Теорема 23 (Эверетт [1]). *Пусть G — коммутативная с. у. группа, G_D — ее дедекиндово и G_C — ее канторовское расширения. Тогда G_D является о-полной группой и содержит G_C в качестве l-подгруппы*[1]).

Пусть $C_n (n = 1, 2, \ldots)$ — фундаментальная последовательность в G_D, т. е.[2])

$$|C_n \cdot C_m^{(-1)}| \leqq U_n \downarrow e \quad (m \geqq n) \tag{1}$$

в G_D. Тогда $D_n = C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$ будет снова фундаментальной последовательностью, ибо из

$$C_n \leqq U_n \cdot C_{n+1}, \ldots, U_n \cdot C_{n+k}$$

вытекает

$$C_n \leqq U_n \cdot (C_{n+1} \wedge \ldots \wedge C_{n+k})$$

и, следовательно,

$$D_n \leqq U_n \cdot D_n \wedge U_n \cdot (C_{n+1} \wedge \ldots \wedge C_{n+k}) = U_n \cdot D_{n+k}.$$

Теперь из $D_n \cdot D_{n+k}^{(-1)} \leqq U_n$ следует $U_1^{(-1)} \cdot D_1 \leqq D_m$ для всех m, т. е. D_m ограничена снизу, и потому $\wedge D_m = D$ существует в $G^{\#}$. Элемент D удовлетворяет неравенству $U_n^{(-1)} \cdot D \leqq \leqq D \leqq D_n$. Пусть $a \in L(U(D) D^{-1})$, $a \leqq ud^{-1}$ для всех $u \in U(D)$, $d \in D$. Ввиду соотношения

$$D \geqq U_n^{(-1)} \cdot D_n = L(U_n^{-1}) \cdot D_n \supseteq L(U_n^{-1}) D_n$$

мы имеем $a \leqq ud_n^{-1} v_n^{-1}$ для всех $d_n \in D_n$ и $v_n \in L(U_n^{-1})$, т. е. $av_n \leqq ud_n^{-1}$. Так как $D_n \geqq D$, $U(D_n) \subseteq U(D)$, мы имеем $av_n \leqq u_n d_n^{-1}$ для всех $u_n \in U(D_n)$, $d_n \in D_n$. Поэтому $D_n \in G_D$ влечет $av_n \leqq e$. Следовательно, $a \leqq v_n^{-1}$,

$$a \in L(L(U_n^{-1})^{-1}) = L(U(U_n)) = U_n,$$

откуда $U_n \downarrow e$ влечет $a \leqq e$. Это доказывает, в силу двойственной леммы параграфа 10, что D принадлежит G_D.

Для того чтобы доказать, что C_n обладает *o*-пределом в G_D, заметим, что доказанное выше показывает сущест-

---

[1] В этом абзаце сходимость должна пониматься по отношению к m.

[2] Используем 4J.

---

[1] Этот результат справедлив для каждого канторовского расширения. Ср. сноску [3]) на стр. 150.

[2] $C^{(-1)}$ обозначает обратный элемент для C в G_D, а точка — произведение в $G^{\#}$.

вование в G_D пересечения фундаментальной последовательности из G_D, т. е. $C_n \wedge \ldots \wedge C_{n+k} \wedge \ldots = E_n$ существует в G_D. Пусть $\bigvee E_n = E$; оно лежит в $G^{\#}$. Двойственно, $C_n \vee \ldots \vee C_{n+k} \vee \ldots = F_n$ существует в G_D. Пусть $\bigwedge F_n = F$ в $G^{\#}$. Очевидно, что $E \leqq F$. Из (1) мы получаем $C_m \leqq U_n \cdot C_n$ для всех $m \geqq n$, откуда $C_{m+1} \leqq U_{n+1} \cdot C_{n+1} \leqq$ $\leqq U_n \cdot C_{n+1}$ и, вообще, $C_m \leqq U_n \cdot C_k$ при $m \geqq k \geqq n$. Таким образом, $E_m \leqq U_n \cdot C_k$ при k, $m \geqq n$ и

$$U_n^{(-1)} \cdot E_m \leqq C_n \wedge \ldots \wedge C_{n+l} \wedge \ldots = E_n,$$

$E_m \cdot E_n^{(-1)} \leqq U_n \downarrow e$ при $m \geqq n$. Это показывает, что (E_n) будет фундаментальной последовательностью. То же самое имеет место и для (F_n). Следовательно, E и F принадлежат группе G_D. Из условия (1) мы опять получаем $U_n^{(-1)} \cdot C_n \leqq C_m$ $(m \geqq n)$, $U_n^{(-1)} \cdot C_n \leqq E_n \leqq E$, $C_m \leqq U_m \cdot E \leqq U_n \cdot E$ при $m \geqq n$. Значит, $F_m \leqq U_n \cdot E$ и $F \leqq U_n \cdot E$, так что $F \leqq E$ и $E = F$. Из неравенства $E_n \leqq C_n \leqq F_n$ мы заключаем, что $C_n \longrightarrow E$, а это и доказывает *o*-полноту группы G_D.

Пусть, далее, $\alpha = (a_n)$—фундаментальная последовательность в G. Чтобы показать, что она будет также фундаментальной в G_D, достаточно проверить, что если $u_n \downarrow e$ в G, то $u_n \downarrow e$ и в G_D. Предположим, что $C \in G_D$ удовлетворяет условию $C \leqq u_n^{\#}$ для всех n и $c \in C$. Тогда $c \leqq u_n$ в G и потому $c \leqq e$, $C \subseteq L(e)$. Далее, поскольку G_D—*o*-полная группа, последовательность (a_n) имеет *o*-предел C_α в G_D. Легко видеть, что отображение $\alpha \longrightarrow C_\alpha$ группы G_C в G_D будет взаимно однозначным и сохраняющим упорядоченность, что и требовалось доказать.

Очень поучительный анализ взаимоотношений между топологическим и дедекиндовым пополнениями был дан Банашевским [2].

12. Системы идеалов

Переход от элементов кольца к его идеалам может также рассматриваться как определенный вид процесса пополнения. Этот метод был подробно изучен Прюфером[1]) в областях целостности и обобщен Лоренценом [1] на ч. у. группы. Системы идеалов весьма важны для ч. у. групп.

---

[1]) *Journ. reine u. angew. Math.*, 168 (1932), 1—36.

Здесь мы ограничимся их связью с пополнениями ч. у. групп.

Пусть G—направленная группа и

$$X \longrightarrow X_r$$

—отображение множества всех непустых *l*-ограниченных подмножеств X из G в множество всех подмножеств группы G. Предположим, что оно удовлетворяет следующим условиям:

I 1. $X \subseteq X_r$,
I 2. Из $X \subseteq Y_r$ следует $X_r \subseteq Y_r$,
I 3.[1]) $(a)_r = U(a)$,
I 4. $aX_r = (aX)_r$ и $X_r a = (Xa)_r$ для всех $a \in G$.

В этом случае мы называем подмножества X_r *r-идеалами* и говорим, что X—порождающая система для X_r. Множество $[X_r]$ всех *r*-идеалов из G называется (*полной*) *системой r-идеалов* Σ_r группы G.

Заметим, что система Σ_r вполне определяет отображение $X \longrightarrow X_r$, ибо из (I 1) и (I 2) вытекает, что непустое пересечение *r*-идеалов также будет *r*-идеалом и, следовательно, X_r равен пересечению всех *r*-идеалов, содержащих X.

Легко проверить, что (I 2) можно заменить следующими условиями:

I 5. Из $X \subseteq Y$ следует $X_r \subseteq Y_r$,
I 6.[2]) $(X_r)_r = X_r$.

Конечным r-идеалом X_r называется *r*-идеал, порожденный конечным подмножеством X из G. Конечные *r*-идеалы образуют систему конечных *r*-идеалов группы G.

Среди систем идеалов группы G имеются две экстремальные. Будем говорить, что *r*-система ***мельче***, чем *q*-система, если для всех X справедливо отношение $X_r \subseteq X_q$.

Предложение 24. *В направленной группе имеется единственная наимельчайшая система идеалов — s-система,*

---

[1]) Таким образом, (главные *r*-идеалы) $(a)_r$ не зависят от специального выбора системы идеалов, и мы можем просто писать $(a)_r = (a)$.

[2]) X_r имеет те же самые нижние грани, что и X, ибо из $X \subseteq (a)$ следует $X_r \subseteq (a)$.

определенная условием

$$X_s = \bigcup_{x \in X} (x),$$

и единственная наикрупнейшая система — v-система, определенная условием[1]

$$X_v = \bigcap_{X \subseteq (x)} (x) = U(L(X)).$$

Поэтому для произвольной системы r-идеалов мы имеем

$$X_s \subseteq X_r \subseteq X_v.$$

Непосредственные выкладки показывают, что X_s и X_v действительно удовлетворяют требованиям I 1 — I 4. Если же мы рассмотрим произвольную систему r-идеалов, то из $x \in X_r$ следует $(x)_s = (x)_r \subseteq X_r$, откуда $X_s \subseteq X_r$. К тому же, если y — нижняя грань множества X, то будет $X \subseteq (y)$, $X_r \subseteq (y)$, и, наконец, $X_r \subseteq X_v$, что и требовалось доказать.

Фиксируем произвольную систему r-идеалов Σ_r группы G. Мы определяем объединение двух r-идеалов X_r и Y_r посредством условия

$$X_r \vee Y_r = (X \cup Y)_r, \tag{1}$$

а их произведение — при помощи формулы

$$X_r \cdot Y_r = (XY)_r. \tag{2}$$

Прежде всего мы должны проверить, что эти определения не зависят от выбора систем образующих X, Y. Если $X_r \subseteq Z_r$ и $Y_r \subseteq Z_r$, то $X \subseteq Z_r$ и $Y \subseteq Z_r$, откуда $X \cup Y \subseteq Z_r$ и $(X \cup Y)_r \subseteq Z_r$. Это доказывает утверждение для объединения. Обратимся к произведению. Мы имеем

$$X_r Y = \bigcup_y X_r y = \bigcup_y (Xy)_r \subseteq (XY)_r,$$

$$(X_r Y)_r \subseteq (XY)_r, \qquad (X_r Y)_r = (XY)_r.$$

Подобным же образом мы получаем $(X_r Y_r)_r = (X_r Y)_r$, откуда $(XY)_r = (X_r Y_r)_r$, и определение произведения законно. Ясно, что $(a)_r \cdot X_r = (aX)_r$ и $X_r \cdot (a)_r = (Xa)_r$.

Легко видеть, что объединение коммутативно и ассоциативно, кроме того, правило (1) может быть легко распространено и на любое ограниченное снизу множество r-идеалов $(X_\lambda)_r \, (\lambda \in \Lambda)$: $\vee (X_\lambda)_r = (\bigcup X_\lambda)_r$. Умножение (2), очевидно, ассоциативно и удовлетворяет условию

$$\text{из } X_r \leqq Y_r \text{ следует } X_r \cdot Z_r \leqq Y_r \cdot Z_r, \text{ и } Z_r \cdot X_r \leqq Z_r \cdot Y_r. \tag{3}$$

Из (1) и (2) немедленно вытекают бесконечные законы дистрибутивности

$$\begin{aligned} \vee (X_\lambda)_r \cdot Y_r &= \vee ((X_\lambda)_r \cdot Y_r), \\ Y_r \cdot \vee (X_\lambda)_r &= \vee (Y_r \cdot (X_\lambda)_r) \end{aligned} \tag{4}$$

для ограниченного снизу множества r-идеалов $(X_\lambda)_r$.

Предложение 25. *r-Идеалы направленной группы G образуют условно полную с. у. полугруппу Σ_r, содержащую подгруппу, двойственную группе G.*

Естественное вложение группы, двойственной группе G, задается отображением $a \to (a)$. Ясно, что оно обращает порядок и переводит наим. в. г., если она существует, в наиб. н. г. и обратно.

Найдем теперь условия, обеспечивающие, чтобы Σ_r была снова группой.

Лемма. *Допустим, что условие $X_r \cdot Y_r = (e)$ выполнено для двух r-идеалов X_r, Y_r. Тогда они будут являться v-идеалами и удовлетворять условиям*

$$Y_r = U(X^{-1}), \; X_r = U(Y^{-1}).$$

Из $(XY)_r = (e)$ следует $XY \subseteq (e)$ и потому $Y \subseteq U(X^{-1})$. С другой стороны, если $u \in U(X^{-1})$, то $uX \subset (e)$, $uX_r \subseteq (e)$, откуда $uX_r \cdot Y_r \subseteq Y_r$ и $u \in Y_r$. Следовательно, $Y_r = U(X^{-1})$. Но

$$U(X^{-1})_v = U(L(U(X^{-1}))) = U(X^{-1}),$$

что мы и собирались доказать.

Мы приходим к заключению, что система v-идеалов является единственной системой идеалов, которая может образовывать группу относительно умножения (2). Повторяя рассуждения теоремы 19, мы получаем следующий результат:

Теорема 26. *Система идеалов Σ_r направленной группы G образует группу тогда и только тогда, когда*

---

[1] Фактически это конструкция, двойственная использованной при построении дедекиндовых сечений.

она является системой v-идеалов, а G вполне целозамкнута. В этом случае Σ_v будет полной с. у. группой, содержащей подгруппу, двойственную группе G.

За дальнейшими результатами по теории систем идеалов мы отсылаем читателя к работе Жаффара [10].

* 13. Группы Рисса

Заслуживающим внимания обобщением с. у. групп является следующий, открытый Риссом [1], тип ч. у. групп.

Ч. у. группа G называется *группой Рисса*, если она направленная и обладает следующим *интерполяционным свойством*:

для всех элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$, удовлетворяющих условиям $a_i \leqq b_j$ $(i=1, 2; j=1, 2)$, существует такой элемент $c \in G$, что

$$a_i \leqq c \leqq b_j \quad (i=1, 2;\ j=1, 2).$$

Очевидно, что каждая с. у. группа будет группой Рисса. Примером группы Рисса, не являющейся с. у. группой, является аддитивная группа всех полиномов от одного неизвестного над полем действительных чисел с поточечной упорядоченностью в интервале [0, 1] (гл. II, п. 3, пример 7). Другим примером будет аддитивная группа комплексных чисел $x+yi$, где положительность определяется посредством условия $x>0$ и $y \geqq 0$.

С помощью индукции сразу получается

Лемма. *Группа Рисса обладает следующим свойством: если $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in G$ — такие элементы, что $a_i \leqq b_j$ при $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m$, то существует элемент $c \in G$, удовлетворяющий неравенствам*

$$a_i \leqq c \leqq b_j \quad \textit{при} \quad i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m.$$

Основные свойства групп Рисса суммируются следующей теоремой.

Теорема 27. *Для направленной группы G следующие условия эквивалентны:*

(1) *G — группа Рисса;*

(2) *для всех $a_1, \ldots, a_n \in G$ множество $U(a_1, \ldots, a_n)$ l-направленно;*

(3) *для всех $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in G$ мы имеем*

$$U(a_1, \ldots, a_n)\,U(b_1, \ldots, b_m) = U(a_1b_1, \ldots, a_1b_m, \ldots, a_nb_m);$$

(4) *интервалы $[e, a]$ мультипликативны,*

$$[e, a]\cdot[e, b] = [e, ab];$$

(5) *если элемент $a \in G$ удовлетворяет неравенствам $e \leqq a \leqq b_1 \ldots b_m$, где $b_i \geqq e$, то существуют такие элементы $a_i \in G$, что $e \leqq a_i \leqq b_i$ для каждого i и $a = a_1 \ldots a_m$.*

Условия (1) и (2) эквивалентны. Допустим, что выполнено условие (1), и положим, что $b_1, b_2 \in U(a_1, \ldots, a_n)$. Тогда $a_i \leqq b_j$ для $i=1, \ldots, n$; $j=1, 2$ и, значит, по лемме некоторый элемент $c \in G$ удовлетворяет неравенствам $a_i \leqq c \leqq b_j$ для всех i и j. Поэтому $c \in U(a_1, \ldots, a_n)$ и множество $U(a_1, \ldots, a_n)$ l-направленное. То, что из условия (2) вытекает условие (1), очевидно.

Условия (1) и (3) эквивалентны. Допустим сперва, что выполнено условие (1), и заметим, что ввиду свойства (vi) гл. II, п. 1 достаточно проверить, что каждый элемент $x \in U(a_1b_1, \ldots, a_nb_m)$ принадлежит произведению $U(a_1, \ldots, a_n)\,U(b_1, \ldots, b_m)$. Ясно, что $a_ib_j \leqq x$ при $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$, и потому $x^{-1}a_i \leqq b_j^{-1}$ для всех i и j. Вледствие леммы существует такой элемент $y \in G$, что $x^{-1}a_i \leqq y \leqq b_j^{-1}$ для всех i и j. Теперь $xy \in U(a_1, \ldots, a_n)$ и $y^{-1} \in U(b_1, \ldots, b_m)$ и потому действительно $x \in U(a_1, \ldots, a_n)\,U(b_1, \ldots, b_m)$. Обратно, предположим, что справедливо условие (3) и неравенства $a_i \leqq b_j$ при $i=1, 2$; $j=1, 2$. Тогда из того, что $e \in U(a_1b_1^{-1}, a_1b_2^{-1}, a_2b_1^{-1}, a_2b_2^{-1})$, вытекает равенство $e = cc^{-1}$ с некоторым $c \in U(a_1, a_2)$ и $c^{-1} \in U(b_1^{-1}, b_2^{-1})$. Этот элемент c удовлетворяет неравенствам $a_i \leqq c \leqq b_j$ для всех i и j.

Из условия (1) следует условие (4). Достаточно проверить для группы Рисса G, что если $e \leqq x \leqq ab$ для некоторого $x \in G$, где $e \leqq a$, $e \leqq b$, то существуют такие элементы $y \in [e, a]$ и $z \in [e, b]$, что $x = yz$. Теперь любой из элементов xb^{-1}, e меньше или равен любому из элементов x, a, поэтому между ними можно вставить элемент $y \in G$.

Если мы положим $z=y^{-1}x$, то $e\leqq z\leqq b$ и условие (4) справедливо.

Из (4) следует (5). Свойство (4) дает по индукции

$$[e,\ b_1 \ldots b_m]=[e,\ b_1] \ldots [e,\ b_m].$$

Если элемент a принадлежит левой части, то он принадлежит и правой части равенства. А это не что иное, как свойство (5).

Наконец, из (5) вытекает (1). Допустим, что выполнено условие (5) и $e\leqq b_1$, $e\leqq b_2$, $a\leqq b_1$, $a\leqq b_2$. Тогда из неравенств $e\leqq b_1\leqq b_2(a^{-1}b_1)$ и условия (5) следует существование такого элемента $c\geqq e$, что $c^{-1}b_1\geqq e$ и $c\leqq b_2$, $c^{-1}b_1\leqq a^{-1}b_1$. Этот элемент c лежит между e, a и b_1, b_2, что завершает доказательство.

Заметим, что в коммутативной группе Рисса G мы имеем еще одно равносильное свойство

(6) *если* $a_1 \ldots a_n=b_1 \ldots b_m$ *для положительных элементов* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ *группы* G, *то существуют такие положительные элементы* $c_{ij}\in G$ $(i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m)$, *что*

$$a_i=c_{i1} \ldots c_{im} \qquad (i=1, \ldots, n)$$

и

$$b_j=c_{1j} \ldots c_{nj} \qquad (j=1, \ldots, m).$$

Если положительные элементы $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ группы Рисса G удовлетворяют равенству $a_1 \ldots a_n=b_1 \ldots b_m$, то $e\leqq a_1\leqq b_1 \ldots b_m$. Поэтому условие (5) гарантирует существование таких элементов $c_{1j}\in G$, что $e\leqq c_{1j}\leqq b_j$ для каждого j и $a_1=c_{11} \ldots c_{1m}$. Теперь элементы $c'_{2j}=b_jc_{1j}^{-1}$ положительны и удовлетворяют равенствам $c'_{21} \ldots c'_{2m}=b_1 \ldots b_ma_1^{-1}=a_2 \ldots a_n$. Простая индукция по числу элементов a_i устанавливает свойство (6). Обратно, если направленная группа G удовлетворяет условию (6), то свойство (5) следует сразу.

В группах Рисса o-идеалы играют роль, аналогичную, хотя и не столь важную, как роль l-идеалов в с. у. группах. Отметим некоторые из их свойств.

(a) *Факторгруппа* G/A *группы Рисса* G *по* o*-идеалу* A *снова будет группой Рисса.*

Пусть смежные классы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2 \bmod A$ удовлетворяют неравенствам $\bar{a}_i\leqq\bar{b}_j$ $(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$. Тогда для данных $a_i\in\bar{a}_i$ существуют элементы $b_{ji}\in\bar{b}_j$, удовлетворяющие условиям $a_i\leqq b_{ji}$ $(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$. В силу направленности смежных классов, существуют такие элементы $b_j\in\bar{b}_j$, что b_{j1}, $b_{j2}\leqq b_j$ $(j=1,\ 2)$. Применим интерполяционное свойство к парам a_1, a_2 и b_1, b_2, чтобы сделать вывод о существовании такого элемента $c\in G$, что $a_i\leqq c\leqq b_j$ для всех i и j. Тогда смежный класс $\bar{c}=cA$ удовлетворяет неравенствам $\bar{a}_i\leqq\bar{c}\leqq\bar{b}_j$ для всех i и j.

(b) *Пересечение конечного числа* o*-идеалов — также* o*-идеал.*

Мы докажем, что $A\cap B$ будет o-идеалом, если A и B — o-идеалы. Надо показать только, что пересечение $A\cap B$ направленно. Пусть x, $y\in A\cap B$. Для некоторых элементов $a\in A$ и $b\in B$ мы имеем соотношения x, $y\leqq a$ и x, $y\leqq b$. Пусть элемент $c\in G$ удовлетворяет условиям x, $y\leqq c$ и $c\leqq a$, b. Тогда, в силу выпуклости, $c\in A$ и $c\in B$, и потому c будет верхней гранью элементов x, y в $A\cap B$.

(c) *Произведение конечного числа* o*-идеалов снова будет* o*-идеалом.*

Мы покажем, что произведение AB является o-идеалом, если o-идеалами будут A и B. Так как каждый элемент произведения AB имеет вид ab $(a\in A,\ b\in B)$ и A, B направленны, очевидно, что произведение AB также направленное. Остается доказать, что AB выпукло. Допустим, что элемент $x\in G$ удовлетворяет неравенствам $e\leqq x\leqq ab$ для некоторых $a\in A$, $b\in B$; ввиду направленности A и B мы можем считать, что a, b положительны. Теперь теорема 27 (5) обеспечивает существование элементов a', $b'\in G$, удовлетворяющих соотношениям $e\leqq a'\leqq a$, $e\leqq b'\leqq b$ и $x=a'b'$. Разумеется, здесь $a'\in A$, $b'\in B$ и, следовательно, $x\in AB$.

Теперь мы докажем аналог теоремы 10.

Теорема 28. o*-идеалы группы Рисса* G *образуют дистрибутивную подструктуру в структуре нормальных делителей группы* G.

Благодаря свойствам (b) и (c) нам надо проверить только дистрибутивность

$$A\cap\{B,\ C\}=\{A\cap B,\ A\cap C\}$$

для o-идеалов A, B, C группы G. Достаточно установить включение $\subseteq$. Пусть элемент $a=bc$ ($a\in A$, $b\in B$, $c\in C$) принадлежит левой части; не теряя общности, мы можем предположить, что $e<a$. В силу направленности, o-идеалы B и C содержат такие положительные элементы b_1, c_1, что $b\leqq b_1$, $c\leqq c_1$. Применяя условие (5) теоремы 27 к неравенству $a\leqq b_1c_1$, мы получаем, что $a=b_2c_2$ для некоторых элементов b_2, c_2, таких, что $e\leqq b_2\leqq b_1$, $e\leqq c_2\leqq c_1$. Так как $b_2\in B$, $c_2\in C$ и b_2, $c_2\leqq a$, то отсюда следует, что $b_2\in A\cap B$, $c_2\in A\cap C$ и потому $a\in(A\cap B)(A\cap C)$. ⋇

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ КОЛЬЦА И ТЕЛА

Глава VI

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ КОЛЬЦАХ

1. Частичный порядок на кольцах и телах

Термин «кольцо» будет использоваться для колец, не обязательно ассоциативных и не обязательно коммутативных, а термин «тело» будет обозначать ассоциативное кольцо с делением.

Мы будем говорить, что R — *частично упорядоченное кольцо* (*ч. у. кольцо*), если выполнены следующие условия:

R1. R — кольцо,

R2. множество R ч. у. отношением $\leqq$,

R3. из $a \leqq b$ следует $a+c \leqq b+c$ для всех $c \in R$,

R4. из $a \leqq b$ и $c > 0$ следует $ca \leqq cb$ и $ac \leqq bc$ (a, b, $c \in R$)[1].

Таким образом, аддитивная группа R_+ кольца R является коммутативной ч. у. группой и, значит, она обладает свойствами, установленными вообще для ч. у. групп. Если R_+ — л. у., направленная или с. у. группа, мы называем R *л. у., направленным* или *с. у. кольцом*.

Элемент $a \in R$ называется *положительным*, если $a \geqq 0$, и *отрицательным*, если $a \leqq 0$. Множество положительных элементов P, *положительный конус* кольца R, однозначно определяет частичный порядок в R, а именно $a \leqq b$ эквивалентно условию $b-a \in P$. Наиболее важные свойства P объединяются в следующую теорему, аналогичную теореме 2 гл. II.

Теорема 1. *Подмножество P кольца R тогда и только тогда является положительным конусом некоторого частичного порядка в R, когда выполнены следую-*

---

[1] Использование постулата R4 вместо более обычного R4* (см. ниже) приводит к некоторым осложнениям при изучении ч. у. колец, но в то же самое время дает и значительную общность.

щие условия[1]):

α. $P \cap -P = 0$;

β. $P + P \subseteq P$;

γ. $PP \subseteq P$.

Подмножество P определяет линейный порядок в R в точности тогда, когда $P \cup -P = R$.

Условия β и γ утверждают, что P — полукольцо, в то время как α говорит, что P содержит 0, но не содержит никакого другого элемента вместе с его противоположным. Или, что равносильно, сумма элементов из P никогда не равна 0, если не все слагаемые равны 0. Для краткости мы будем называть полукольцо с этим свойством *коническим полукольцом*.

Простым упражнением является проверка правила знаков: произведение двух отрицательных элементов положительно, произведение положительного и отрицательного элементов отрицательно и пр.

Аддитивная группа л. у. кольца R должна быть группой без кручения и, значит, характеристика R равна 0.

Если R обладает единицей e, то либо $e > 0$, либо $e \parallel 0$. Во втором случае можно так продолжить частичный порядок, чтобы e стало положительным, если только характеристика R не положительна[2]).

Полукольца, которые могут быть положительными конусами, описываются следующей теоремой.

Теорема 2. *Полукольцо P, обладающее 0, тогда и только тогда является положительным конусом некоторого ч. у. кольца, когда*

(a) *аддитивная полугруппа P является коммутативной полугруппой с сокращением,*

(b) *P — коническое полукольцо.*

Нуждается в проверке только достаточность. В силу условия (a), аддитивная полугруппа P_+ полукольца P может быть погружена в минимальную абелеву группу R_+. Элементы из R_+ имеют вид $a-b$, где $a, b \in P_+$. Как обычно, проверяется, что если умножение определяется при помощи дистрибутивного закона $(a-b)(c-d) = (ac+bd)-(ad+bc)$, то R_+ становится кольцом R, содержащим P в качестве подполукольца. Ввиду условия (b) P действительно определяет частичный порядок в R.

Мы часто будем рассматривать кольца без делителей нуля. В таких кольцах условие R4 может быть заменено более сильным условием.

R4*. Из $a < b$ и $c > 0$ следует $ca < cb$ и $ac < bc$.

Вообще, частичный порядок, удовлетворяющий условию R4*, будет называться *строгим*. Непосредственно получаем следующую лемму.

Лемма. *Для того чтобы частичный порядок P некоторого кольца был строгим, необходимо и достаточно, чтобы P было полукольцом без делителей нуля.*

Действительно, условие R4* — это условие R4 вместе с тем свойством, что $c(b-a)$ [и $(b-a)c$] никогда не равно 0, если ни $b-a \, (\in P)$, ни $c \, (\in P)$ не обращаются в 0.

Л. у. кольцо R, очевидно, удовлетворяет условию

R5. Если $ab > 0$ и один из элементов a, b больше 0, то то же имеет место и для другого.

Если ч. у. кольцо R удовлетворяет условию R5, мы будем говорить, что его частичный порядок *замкнут относительно деления*. Если R — кольцо с делением, то иногда бывает полезно предполагать выполненным условие R5. Это равносильно тому, что положительный конус P является полукольцом с делением, а если предполагается также ассоциативность, т. е. если R — тело, то $P \setminus 0$ — ч. у. группа.

Нет необходимости вдаваться в рассмотрение индуцированных порядков на подкольцах, выпуклости подколец, o-гомоморфизмов и пр., ибо оно, по существу, такое же, как и для соответствующих понятий в теории ч. у. групп.

---

[1]) Под $-P$ мы подразумеваем, разумеется, множество $[-x \mid x \in P]$. Сложение и умножение подмножеств колец понимаются в смысле сложения и умножения комплексов.

[2]) Полукольцо, порожденное положительным конусом и e, коническое, исключая тот случай, когда $nx = 0$ для всех $x \in R$ и некоторого натурального n; в этом случае P должно быть равным 0.

2. Примеры

1) Кольцо целых чисел с обычным отношением порядка является л. у. кольцом. Все рациональные и все действительные числа образуют л. у. поля относительно обычного порядка.

2) Коммутативная ч. у. (или л. у.) группа по сложению с тривиальным умножением является ч. у. (или л. у.) кольцом[1].

3) Кольцо полиномов $R[x]$ над ассоциативным ч. у. кольцом R без делителей нуля превращается в ч. у. кольцо, если положить $f>0$ ($f\in R[x]$) всякий раз, когда старший коэффициент f больше нуля в R. Это лексикографическая упорядоченность кольца $R[x]$. Другая возможность — полагать $f>0$, если коэффициент наинизшего ненулевого члена больше 0; эта упорядоченность может быть названа антилексикографической. В обоих случаях $R[x]$ тогда и только тогда л. у., когда R л. у.

Кольцо полиномов $F[x]$ над подполем F поля действительных чисел может быть л. у. также и при помощи определения $f>0$, если $f(\theta)>0$, где θ — фиксированное действительное число, трансцендентное над F.

4) Поле рациональных функций с коэффициентами из л. у. поля можно л. у., полагая $fg^{-1}\geqq 0$, где f, $g\in F[x]$, если $fg\geqq 0$ в лексикографической упорядоченности кольца $F[x]$.

5) Действительно-значные непрерывные функции, определенные на действительном интервале $[0,1]$, образуют с. у. кольцо, если мы положим $f\geqq 0$ всякий раз, когда $f(x)\geqq 0$ для всех x.

Вообще, то же самое будет иметь место и в том случае, если мы заменим интервал $[0,1]$ некоторым топологическим пространством.

6) Квадратные ($n\times n$)-матрицы с элементами из ч. у. кольца R образуют ч. у. кольцо относительно определения: матрица $\|a_{ik}\|$ положительна, если каждое a_{ik} положительно. Если R с. у., то то же самое будет верно и для кольца матриц.

---

[1] Т. е. все произведения нули. Такие кольца называются *нулевыми кольцами*.

7) Последний пример можно обобщить, взяв алгебру A (конечного или бесконечного ранга) над ч. у. ассоциативным кольцом R, которая обладает базисом e_i ($i\in I$) с положительными структурными константами:

$$e_ie_j=\sum_k \gamma_{ij}^k e_k \quad (\gamma_{ij}^k\in R,\ \gamma_{ij}^k\geqq 0).$$

Положительность определяется условием

$$\Sigma\alpha_ie_i\geqq 0 \quad (\alpha_i\in R), \text{ если } \alpha_i\geqq 0 \text{ для каждого } i.$$

A — с. у. кольцо, если R — с. у. кольцо.

В качестве частного случая мы упомянем групповую алгебру некоторой группы над ассоциативным л. у. кольцом.

8) Групповая алгебра A л. у. группы G над ассоциативным л. у. кольцом R допускает линейный порядок, сохраняющий данные порядки в G и R. Он определяется условием

$$\sum_{i=1}^n \alpha_ig_i>0 \quad (0\neq\alpha_i\in R,\ g_i\in G,\ g_1<\ldots<g_n),$$

если $\alpha_n>0$.

9)[1] Для каждого л. у. тела F и произвольного натурального числа n можно определить нильпотентную л. у. алгебру A ранга n над F, взяв символ c и затем определив A как алгебру над F с базисом c, c^2, …, c^n; базисные элементы перемножаются как степени элемента c, подчиненные условию $c^{n+1}=0$. Мы полагаем

$$\sum\lambda_ic^i>0 \quad (\lambda_i\in F),$$

если первое ненулевое λ_i больше нуля.

10)[2] Рассмотрим кольцо $\mathfrak{E}(G)$ всех эндоморфизмов направленной абелевой группы G и положим, что эндоморфизм θ положителен, если он переводит положительный конус P группы G в себя. Тогда $\mathfrak{E}(G)$ будет ч. у. кольцом. (Заметим, что только в случае направленных групп мы можем заключить, что если как θ, так и $-\theta$ положительны, то $\theta=0$; действительно, из θ, $-\theta\geqq 0$ следует $g\theta=0$ для всех $g\in P$, т. е. θ — нулевой эндоморфизм на $\{P\}$.)

---

[1] См. Земмер [1].

[2] См. Биркгоф — Пирс [1]

Примерами л. у. (некоммутативных) тел являются тела формальных степенных рядов. См. гл. VIII, п. 5.

3. Упорядочение колец частных

В этом разделе мы будем иметь дело только с ассоциативными кольцами.

Каждый частичный порядок P кольца R определяет частичный порядок на кольце S, содержащем R, а именно порядок с тем же самым положительным конусом. Гораздо менее тривиально продолжение данного линейного порядка P кольца R до линейного порядка кольца частных S кольца R. Классический метод распространения отношения порядка целых чисел на рациональные числа применим в очень многих случаях.

Пусть S — кольцо, содержащее R, и пусть для каждого $\alpha \in S \setminus R$ существуют такие элементы a, $b \in R$, что

(i) a не является левым делителем нуля в S;

(ii) b не является правым делителем нуля в S;

(iii) $a\alpha = c$ и $\alpha b = d$ принадлежат R.

В этом случае мы будем говорить, что S — *кольцо частных кольца* R.

Теорема 3 (Фукс [11]). *Линейный порядок P ассоциативного кольца R может быть единственным образом продолжен до линейного порядка Q произвольного кольца частных S кольца R.*

Если R л. у., то в приведенном выше определении мы можем взять a, $b > 0$. Тогда c и d имеют один и тот же знак, так как $cb = a\alpha b = ad$, и потому знаки $a\alpha$ и αb не зависят от выбора a или b. Полагаем, что α принадлежит Q, если либо $\alpha \in P$, либо $\alpha \in S \setminus R$ и $a\alpha$ (и, значит, αb) лежит в P. В таком случае мы уже знаем, что $Q \cap -Q = 0$. Если α, $\beta \in Q$, то существуют такие элементы a, b, принадлежащие P или равные 1, что $a\alpha$, $\beta b \in P$. Значит, $a(\alpha+\beta)b = (a\alpha)b + a(\beta b) \in P$ и потому $\alpha+\beta \in Q$[1].

---

[1] Здесь мы используем тот факт, что если a, $b > 0$ и $c = a\alpha b \in R$, то α и c имеют одинаковые знаки. И в самом деле это верно, ибо если $d > 0$ выбрано так, что $d(a\alpha) = f \in R$, то элементы α, f, $fb = dc$ и c одновременно положительны или отрицательны (a, d не являются левыми, а b — правым делителями нуля).

Кроме того, $a(\alpha\beta)b = (a\alpha)(\beta b) \in P$, откуда $\alpha\beta \in Q$. Следовательно, Q — положительный конус и, так как ясно, что $Q \cup -Q = S$, Q определяет линейный порядок на S. Единственность очевидна.

Заслуживают упоминания также непосредственные следствия.

Следствие 4 (Алберт [2], Нейман [2]). *Если R — ассоциативное л. у. кольцо, обладающее телом правых частных S (в смысле Орэ)[1], то S может быть единственным образом линейно упорядочено, причем так, чтобы его порядок продолжал порядок кольца R.*

Следствие 5. *Линейный порядок области целостности[2] может быть единственным образом продолжен до линейного порядка ее поля частных.*

Кроме того, полезным результатом, который может быть получен из предыдущего, будет

Следствие 6 (Гретцер—Шмидт [1])[3]. *Пусть R — ассоциативное кольцо и I — идеал в R, который содержит элемент, не являющийся левым делителем нуля, а также элемент, не являющийся правым делителем нуля в R. Тогда каждый линейный порядок на I допускает единственное продолжение до линейного порядка на R.*

Заметим, что R будет кольцом частных идеала I (с универсальными a и b, фигурирующими в определении).

4. Погружение в кольца с единицей

Известно, что всякое кольцо без единицы может быть вложено в кольцо с единицей. Соответствующий вопрос для л. у. колец имеет, вообще говоря, отрицательный

---

[1] *Annals Math.*, 32 (1931), 463—477. ⁎ Заметим, что всякое $\alpha \in S$ имеет вид $\alpha = ab^{-1}$ (a, $b \in R$, в $\neq 0$). Поэтому $\alpha b \in R$ и если c, $d \in R$ таковы, что $ca = db \neq 0$, то $c\alpha \in R$. ⁎

[2] Под *областью целостности* мы понимаем коммутативное и ассоциативное кольцо без делителей нуля. Следствие 5 — это хорошо известный результат, содержащийся в большинстве учебников алгебры.

[3] Следствия 6 и 7 были установлены только для ассоциативных колец без делителей нуля.

ответ. Следующее следствие дает нам критерий существования линейного порядка в расширениях с единицей данного кольца.

Следствие 7 (Редеи [1]). *Пусть R — ассоциативное кольцо, содержащее по крайней мере один элемент, не являющийся левым, и один элемент, не являющийся правым делителем нуля, а R^* — минимальное кольцо с единицей, содержащее R. Тогда каждый линейный порядок кольца R может быть единственным образом продолжен до линейного порядка кольца R^**[1].

Известно, что если кольцо содержит элементы, не являющиеся делителями нуля, то оно обладает расширением с единицей, в котором они также не будут делителями нуля[2]. Термин «минимальный» использовался для обозначения этого расширения. Наш результат сразу вытекает из следствия 6.

Заметим, что предположение о присутствии неделителей нуля в следствии 7 не может быть опущено. Действительно, пусть R — множество всех таких упорядоченных пар (m, n) целых рациональных чисел, что: 1) равенство и сложение определяются покомпонентно, 2) умножение задается посредством равенств $(1, 0)\,(m, n)=(m, n)$ и $(0, 1)\,(m, n)=(0, 0)$, 3) отношение порядка определяется лексикографически. Тогда R — л. у. кольцо. Оно не может быть o-изоморфно вложено в какое-нибудь л. у. кольцо R^* с единицей e, так как из $[(2, 0)-e]\,(1, 0)=(1, 0)>0$ и $(0, 1)\,[(2, 0)-e]=-(0, 1)<0$ следует, что в R^* мы должны были бы иметь $(2, 0)>e$ и $(2, 0)<e$ одновременно (Д. Джонсон [1]).

Естественно поставить следующий вопрос: когда можно погрузить л. у. кольцо в качестве выпуклого идеала в кольцо с единицей? Легко дать необходимое и достаточное условие:

Теорема 8 (Д. Джонсон [1]). *Л. у. кольцо R без единицы тогда и только тогда может быть погружено в качестве выпуклого идеала в кольцо с единицей R^*,*

когда условие

$$ab\leqq\min(a,\ b)\tag{1}$$

выполнено для всех положительных $a,\ b\in R$.

Условие необходимо, ибо если $e\in R^*$ — единица, то ясно, что $a<e$ для каждого положительного $a\in R$, откуда $ab\leqq eb=b$ и аналогично $ab\leqq a$ для всех $b\geqq 0$. Обратно, если условие (1) выполнено в R, то рассмотрим множество R^* всех пар (m, a), где m целое, а $a\in R$, причем 1) равенство и сложение определены покомпонентно, 2) умножение задается равенством $(m, a)\,(n, b)=(mn,\ na+mb+ab)$, 3) мы полагаем $(m, a)\geqq 0$, если $m>0$ или если $m=0$ и $a\geqq 0$. Непосредственно проверяется, что R^* — л. у. кольцо с единицей $(1, 0)$, содержащее R в качестве выпуклого идеала. (Условие (1) гарантирует, что если (m, a) и $(0, b)$ положительны, то $(m, a)\,(0, b)=(0,\ mb+ab)$ и $(0, b)\,(m, a)=(0,\ mb+ba)$ также положительны.)

ж Заметим, что в ассоциативном кольце R условие (1) можно заменить равносильным условием

$$a^2\leqq a \text{ для каждого положительного } a\in R. \tag{2}$$

Мы должны показать, что из условия (2) вытекает (1). Допустим, что условие (2) выполнено, и предположим, что для некоторых положительных $a,\ b\in R$ имеет место неравенство $b<ab$. Тогда $0\leqq(a-a^2)\,b=a\,(b-ab)\leqq 0$, откуда следует, что $(a-a^2)\,b=0$. Из неравенства $(2a)^2\leqq 2a$ мы заключаем, что $a^2\leqq a-a^2$, и потому $b<ab=(a-a^2)\,b+a^2b\leqq 2\,(a-a^2)\,b=0$, что противоречит предположению. Аналогичное противоречие получается из предположения, что $a<ab$. Значит, условия (1) и (2) действительно равносильны для л. у. ассоциативных колец.

Последние два результата можно объединить для того, чтобы получить условие, необходимое и достаточное для вложимости л. у. ассоциативного кольца в л. у. кольцо с единицей.

Теорема 8а (Хенриксен — Исбелл [1]). *Ассоциативное л. у. кольцо R тогда и только тогда может быть вложено в л. у. кольцо с единицей R^*, когда оно либо удовлетворяет условию (2), либо содержит такой элемент*

---

[1] Таким образом, R тогда и только тогда будет O-кольцом (в смысле следующего раздела), когда O-кольцом будет R^*.

[2] См., например, Браун и Маккой, *Duke Math. Journ.*, **13** (1946), 9—20, или Сендреи, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1950), 231—234.

$u > 0$, *что*

$$a \leqq ua \text{ и } a \leqq au \text{ для всех положительных } a \in R. \qquad (3)$$

Допустим, что кольцо R вложимо указанным образом и для некоторого $u \in R$ имеет место неравенство $u^2 > u$. Тогда в кольце R^* элемент u должен быть больше единицы, поэтому для всех $a > 0$ справедливы неравенства $a \leqq ua$ и $a \leqq au$.

Обратно, достаточно показать, что если кольцо R содержит элемент $u > 0$, удовлетворяющий условию (3), то R можно вложить в л. у. кольцо с единицей R^*. В силу условия (3), элемент u не может аннулировать никакой элемент $a > 0$ кольца R, значит, элемент u не является ни левым, ни правым делителем нуля. Следствие 7 завершает доказательство. ∗

Глава VII

ПРОДОЛЖЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ В КОЛЬЦАХ

1. Продолжение до линейного порядка; O-кольца

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — элементы произвольного кольца R, A — подмножество из R и $H(A, a_1, \ldots, a_n)$ — полукольцо, порожденное $0, A, a_1, \ldots, a_n$ в R. Наши дальнейшие рассуждения опираются на следующий результат[1]).

Теорема 1 (Фукс [9]). *Частичный порядок P кольца R тогда и только тогда может быть продолжен до линейного, когда P удовлетворяет условию:* (*) *для каждого конечного множества элементов $a_1, \ldots, a_n \in R$ можно так выбрать $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ($\varepsilon_i = 1$ или -1), что*

$$H(P, \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$$

— коническое полукольцо.

Если P обладает линейным продолжением Q, то, выбирая ε_i так, что $\varepsilon_i a_i \geqq 0$ в Q, мы видим, что $H(P, \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$ — подполукольцо из Q и, значит, является коническим.

Доказательство достаточности основано на следующей лемме.

Лемма. *Если частичный порядок P кольца R обладает свойством* (*), *то для каждого $x \in R$ либо $H(P, x)$, либо $H(P, -x)$ определяет частичный порядок P' кольца R, снова обладающий свойством* (*).

Если ни $H(P, x)$, ни $H(P, -x)$ не удовлетворяют условию (*), то существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$, что для произвольного выбора знаков $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \eta_1, \ldots, \eta_m$ ни $H(P, x, \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$, ни $H(P, -x, \eta_1 b_1, \ldots, \eta_m b_m)$

---

[1]) Ср. аналогичную теорему 1 в гл. III

не являются коническими. Но тогда и

$$H(P,\ \varepsilon x,\ \varepsilon_1 a_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n a_n,\ \eta_1 b_1,\ \ldots,\ \eta_m b_m)$$

не является коническим ни для какого выбора знаков ε, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \eta_1, \ldots, \eta_m$, что противоречит предположению о выполнении условия (*) для P. Теперь положим $P' = H(P,x)$ или $P' = H(P, -x)$ в соответствии с тем, которое из них удовлетворяет условию (*). Тогда P' будет коническим полукольцом с условием (*).

Теперь доказательство теоремы 1 легко может быть завершено. По лемме Цорна множество всех продолжений порядка P, удовлетворяющих условию (*), содержит максимальный член Q. Согласно лемме, для каждого $x \in R$ либо $H(Q, x)$, либо $H(Q, -x)$ принадлежит рассматриваемому множеству и потому, в силу максимальности, либо $x \in Q$, либо $-x \in Q$, т. е. Q — линейный порядок, что и требовалось доказать.

Назовем кольцо R *О-кольцом*, если оно может быть л. у. Если исходить из тривиального порядка $P = 0$, мы получим

Следствие 2 (Поддерюгин [1]). *Кольцо R тогда и только тогда является О-кольцом, когда для каждого конечного множества элементов $a_1, \ldots, a_n$ из R возможно так выбрать знаки $\varepsilon_i = 1$ или -1, что $H(\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$ будет коническим.*

Из этого следствия вытекает

Следствие 3. *Если каждое конечнопорожденное подкольцо кольца R является О-кольцом, то R также будет О-кольцом.*

Однако, поразительная аналогия между ч. у. группами и кольцами нарушается в ряде случаев. Например, прямая сумма О-колец, вообще говоря, не будет О-кольцом. Более того, мы имеем

Предложение 4[1]. *Прямая сумма О-колец тогда и только тогда снова будет О-кольцом, когда все компоненты, за исключением самое большее одной, будут нулевыми кольцами.*

Для доказательства необходимости покажем, что если R — л. у. кольцо и $R = R_1 \oplus R_2$ (прямая сумма в чисто теоретико-кольцевом смысле), то либо R_1, либо же R_2 будет нулевым кольцом. Предположим, что R_1 не является нулевым кольцом. Тогда существуют такие элементы a, $b \in R_1$, что $ab \neq 0$, причем мы можем считать, что $a, b > 0$. Если $x > b$ для некоторого $x \in R_2$, то $a(x-b) = -ab$, что противоречиво, ибо левая часть больше или равна 0, а правая меньше 0.

Значит, $x < b$ для всех $x \in R_2$. Если же $x, y \in R_2$ и, например, $x, y > 0$, то $0 \leqq (b-x)y = -xy \leqq 0$, откуда $xy = 0$, т. е. R_2 — нулевое кольцо.

Обратно, если $R_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ — множество О-колец, из которых все, за исключением одного, например R_1, нулевые кольца, то их прямая сумма ΣR_λ также будет О-кольцом. Вполне упорядочим множество индексов Λ, начиная с 1, и возьмем линейные порядки на R_λ. Легко проверить, что если мы определим упорядоченность лексикографически, то мы придем к линейному порядку на ΣR_λ.

Здесь уместно привести следующее предложение.

Предложение 5 (Биркгоф—Пирс [1]). *Ассоциативное полупростое кольцо[1] тогда и только тогда является О-кольцом, когда оно О-тело.*

Это следует из более общего результата: полное матричное кольцо степени $n \geqq 2$ над некоторым кольцом R, содержащим элемент a с ненулевым квадратом, не является О-кольцом. Действительно, если e_{ik} — матрица с 1 на $(i,\ k)$-месте и с 0 на остальных, то

$$(ae_{11} + ae_{22})^2 + (ae_{21} - ae_{12})^2 = 0,$$

что невозможно в О-кольце. Значит, $n = 1$ и знаменитая теорема Веддербарна—Артина вместе с предыдущим результатом завершают доказательство. (Можно дать другое доказательство, использующее теорему 6 гл. VIII.)

---

[1] Основная часть этого результата принадлежит Земмеру [1]. Этот результат справедлив также для полных прямых сумм.

[1] Под полупростым кольцом мы понимаем кольцо, не содержащее ненулевых нильпотентных идеалов и удовлетворяющее условию минимальности для левых идеалов. Такие кольца будут прямыми суммами конечного множества полных матричных колец над телами.

Если бы мы отправлялись от алгебры, то аналогично получили бы

Предложение 6. *Ассоциативная полупростая О-алгебра над полем является О-телом.*

Более того, О-тело должно быть коммутативным (Алберт [1]). Действительно, если элемент α из О-тела F не принадлежит его центру C, то он удовлетворяет уравнению $f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0$, где $m>1$, $a_i\in C$. Далее, $\beta=\alpha-m^{-1}a_1\in F$ является корнем уравнения $g(y)=y^m+b_2y^{m-2}+\ldots+b_m=0$, где $b_i\in C$. Если оно минимальной степени, то по теореме Веддербарна[1]

$$g(y)=(y-\alpha_1)\ldots(y-\alpha_m)$$

для α_i, сопряженных с α. Но в О-теле сумма сопряженных ненулевому элементу не может быть нулевой.

2. О-кольца без делителей нуля

Особенно интересны кольца без делителей нуля. Мы начнем их изучение с довольно элементарной леммы.

Лемма. *Кольцо R тогда и только тогда допускает строгий линейный порядок, когда оно является О-кольцом без делителей нуля.*

Мы видели, что частичный порядок тогда и только тогда строгий, когда его положительный конус является полукольцом без делителей нуля. В случае линейного порядка это равносильно отсутствию делителей нуля в R.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 7 (Фукс [9]). *Пусть P — частичный порядок кольца R, не содержащего делителей нуля. Для продолжаемости порядка P до линейного порядка кольца R необходимо и достаточно, чтобы для каждого конечного множества $a_1, \ldots, a_n$ элементов из R ($a_i\neq 0$) не могла оказаться нулем никакая сумма произведений, содержащих в качестве множителей каждое a_i четное число раз и (возможно, произвольное число раз) отличные от 0 элементы из P.*

---

[1] Ср. L. E. Dickson, Algebras and their arithmetics, Chicago, 1923.

Пусть $x_1, \ldots, x_s$ ($s\geqq 2$) — ненулевые произведения указанного вида, построенные из элементов $a_1, \ldots, a_n$ кольца R ($a_i\neq 0$), и $x_1+\ldots+x_s=0$. Тогда, ввиду того, что $x_1, \ldots, x_s\in H(P, \varepsilon_1a_1, \ldots, \varepsilon_na_n)$ для всех выборов знаков $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, P не удовлетворяет условию (*) теоремы 1. Таким образом, условие необходимо.

Обратно, допустим, что указанное условие выполнено. Покажем, что отрицание условия (*) теоремы 1 ведет к противоречию. Выбираем из $H(P, \varepsilon_1a_1, \ldots, \varepsilon_na_n)$ такие элементы h_j ($j=1, \ldots, 2^n$), что для каждого выбора знаков $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ один из них является нулевой суммой с ненулевыми членами[1]). Образуем произведение $x=h_1h_2\ldots h_{2^n}$, полагая, например, $\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_n=1$. Элемент x снова будет нулевой суммой с ненулевыми слагаемыми и, кроме того, он остается нулем, если произвольное a_i заменить на $-a_i$. Запишем его в виде $x=x_0+x_1$, где x_0 (x_1) — сумма членов, содержащих a_1 четное (нечетное) число раз; очевидно, что существует или x_0, или x_1, или же оба. Заменяя a_1 на $-a_1$, мы получаем $x_0-x_1=0$, что вместе с $x_0+x_1=0$ дает $2x_0=0$. Теперь, отправляясь от $2x_0$ вместо x, если x_0 существует, или же от x_1^2, если x_0 отсутствует, мы используем тот же процесс исключения членов, в которые a_2 входит нечетное число раз, и т. д. В конце концов мы приходим к нулевой сумме с ненулевыми членами, содержащими каждый из элементов $a_1, \ldots, a_n$ четное число раз. Полученное противоречие показывает, что условие (*) выполнено и потому порядок P может быть продолжен до линейного, что и требовалось доказать.

Называя произведение, содержащее каждый множитель a_i ($\neq 0$) четное число раз, *четным*, мы получаем

Следствие 8 (Джонсон [1], Поддерюгин [1]). *Кольцо без делителей нуля тогда и только тогда будет О-кольцом, когда никакая сумма четных произведений не обращается в нуль*[2]).

---

[1] Каждое h_j рассматривается как функция от $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

[2] Следствие 8 теряет силу, если опустить предположение об отсутствии делителей нуля (например, кольцо, имеющее нулевое кольцо прямым слагаемым).

Возвращаясь к телам, получаем

Следствие 9 (Фукс [9]). *Пусть P — частичный порядок тела F. Для того чтобы P имел линейное продолжение в F, необходимо и достаточно, чтобы не обращалась в нуль никакая сумма членов вида*

$$a_1^2 \ldots a_n^2 \quad \text{или} \quad pa_1^2 \ldots a_n^2 \ (0 \neq a_i \in F,\ 0 \neq p \in P).$$

Действительно, в силу закона ассоциативности и существования обратных элементов, мы можем написать $aba = b(b^{-1})^2(ba)^2$, откуда каждый указанный в теореме 7 член может быть записан в виде $a_1^2 \ldots a_n^2$ либо в виде $pa_1^2 \ldots a_n^2$.

Если F коммутативно, то мы имеем

Следствие 10 (Серр [1]). *Частичный порядок P поля F тогда и только тогда продолжается до линейного, когда сумма элементов вида*

$$a^2 \ \text{или} \ pa^2 \ (0 \neq a \in F,\ 0 \neq p \in P)$$

не может равняться нулю.

Назовем тело F *формально действительным*, если -1 не может быть представлена в виде суммы произведений $a_1^2 \ldots a_n^2$ $(a_i \in F)$. Таким образом, поле тогда и только тогда будет формально действительным, когда -1 не равна сумме квадратов[1]. Мы получаем самый важный результат:

Следствие 11 (Артин—Шрейер [1], Пикерт [1], Селе [1]). *Тело может быть линейно упорядочено тогда и только тогда, когда оно формально действительное*[2].

Возьмем в следствии 9 $P = 0$ и заметим, что равенство $a_1^2 \ldots a_n^2 + b_1^2 \ldots b_m^2 + \ldots = 0$ может быть записано в виде

$$b_1^2 \ldots b_m^2 (a_n^{-1})^2 \ldots (a_1^{-1})^2 + \ldots = -1.$$

---

[1] Основное понятие формально действительного поля было введено Артином—Шрейером [1].

[2] Этот результат в коммутативном случае был доказан Артином—Шрейером, а затем обобщен на некоммутативный случай независимо Пикертом и Селе. По поводу O-полей ср. также Дьедонне [2]. Связи между л. у. телами и телами с нормированиями изучались Бэром [1], Круллем [1] и Конрадом [2].

Под O^*-кольцом будем понимать кольцо, в котором каждый частичный порядок может быть продолжен до линейного. Легко доказать следующее предложение.

Предложение 12. *Кольцо R тогда и только тогда будет O^*-кольцом, когда для каждой пары конечных множеств $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ элементов из R из того, что $H(a_1, \ldots, a_n)$ — коническое полукольцо, следует, что и $H(a_1, \ldots, a_n, \varepsilon_1 b_1, \ldots, \varepsilon_m b_m)$ будет коническим для подходящего выбора знаков ε_i.*

Необходимость следует из продолжаемости $P = H(a_1, \ldots, a_n)$, в то время как достаточность может быть доказана с помощью замечания, что полукольцо $H(P, b_1, \ldots, b_m)$ будет коническим тогда и только тогда, когда для всех конечных подмножеств $a_1, \ldots, a_n$ частичного порядка P полукольцо $H(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ коническое.

Легко заключить, что если мы пойдем дальше и предположим, что кольцо является телом, то условие последнего предложения сведется к условию: если $H(a_1, \ldots, a_n)$ коническое, то для каждого конечного множества $b_1, \ldots, b_m$ элементов тела таким будет и $H(a_1, \ldots, a_n, b_1^2, \ldots, b_m^2)$.

O-Кольца с делителями нуля будут изучаться в следующей главе.

3. Действительно замкнутые поля

Следует обратить особое внимание на случай полей. В этом случае кульминация достигается в теории Артина—Шрейера о действительно замкнутых полях, к изложению которой мы и переходим[1].

Сперва мы рассмотрим задачу продолжения линейного порядка поля K до линейного порядка алгебраического расширения поля K.

Предложение 13 (Серр [1]). *Если K — л. у. поле и f — такой неприводимый полином над K, что*

$$f(a)\, f(b) < 0 \ \text{для некоторых} \ a,\ b \in K,$$

то поле L, полученное из K присоединением корня f, может быть л. у. с сохранением порядка поля K.

Воспользуемся индукцией по степени n полинома f. При $n = 1$ утверждение тривиально. Допустим, что оно верно для полиномов степени меньше n $(n \geqq 2)$. Если бы L не обладало линейным порядком, продолжающим поря-

---

[1] Элегантное рассмотрение действительно замкнутых тел можно найти у Бурбаки [1] (ср. также Ван-дер-Варден [1]).

док в K, то, согласно следствию 10, мы могли бы вывести существование отношения[1])

$$\sum_{i=1}^{m} p_i f_i^2 = -1 + gf \quad (0 < p_i \in K) \qquad (*)$$

с полиномами f_i, g в $K[x]$. Без ограничения общности можно предположить, что степень каждого f_i меньше или равна $n-1$, откуда g имеет степень, не превосходящую $n-2$. Поле K формально действительное, таким образом, в силу (*), мы имеем $g(a)f(a) > 0$ и $g(b)f(b) > 0$, так что $g(a)g(b) < 0$. Значит, если мы разложим g на неприводимые над K множители, то один из этих множителей, например h, должен удовлетворять условию $h(a)h(b) < 0$. Поэтому мы можем воспользоваться предположением индукции, чтобы заключить, что поле, полученное присоединением к K корня полинома $h(x)$, формально действительное. Это показывает, что сравнение $\Sigma p_i f_i^2 \equiv -1 \pmod{h}$ невозможно. Значит, (*) приводит к противоречию, что и доказывает утверждение.

Следствие 14. *Если K — л. у. поле и $a \in K$, $a > 0$, то $K(\sqrt{a})$ может быть снова л. у. с сохранением порядка на K.*

Если $f(x) = x^2 - a$ неприводим, то ввиду $f(0)f(a+1) < 0$ предыдущее предложение применимо.

Теорема 15 (Артин — Шрейер [1]). *Если K — O-поле и L — алгебраическое расширение нечетной степени над K, то каждый линейный порядок поля K может быть продолжен до линейного порядка в L.*

O-тело имеет характеристику 0, значит, L сепарабельно над K, и мы имеем $L \cong K[x]/(f)$ для некоторого неприводимого $f = x^n(1 + a_1x^{-1} + \ldots + a_nx^{-n}) \in K[x]$ нечетной степени n. Если $m = \max(1, |a_1| + \ldots + |a_n|)$, то при $|x| > m$

$$|a_1x^{-1} + \ldots + a_nx^{-n}| < |a_1|\, m^{-1} + \ldots + |a_n|\, m^{-1} \leqq 1$$

и $1 + a_1x^{-1} + \ldots + a_nx^{-n} > 0$. Мы получаем, что $f(-2m) \times f(2m) < 0$, и применение предложения 13 завершает доказательство.

Максимальное формально действительное поле, т. е. формально действительное поле, никакое собственное алгебраическое расширение которого не является формально действительным, называется *действительно замкнутым*. Важнейшая характеристика их содержится в следующей теореме.

Теорема 16 (Артин — Шрейер [1]). *Следующие условия эквивалентны для л. у. поля F:*

a) *$F(i)$ алгебраически замкнуто ($i = \sqrt{-1}$);*

b) *F действительно замкнуто;*

c) *каждый положительный элемент из F обладает квадратным корнем в F и каждый полином нечетной степени над F обладает корнем в F.*

Если (a) выполнено, то F имеет только одно алгебраическое расширение, а именно $F(i)$. Оно не является формально действительным, так как -1 в нем является квадратом. Значит, (b) выполняется.

Если условие (b) выполнено, то по следствию 14 каждый положительный элемент обладает в F квадратным корнем и по теореме 15 каждый полином нечетной степени над F должен в F обладать корнем. Таким образом, условие (c) выполнено.

Если же для F предполагается выполненным условие (c), то берем $F(i)$. Сперва мы покажем, что каждый квадратный полином над $F(i)$ обладает корнями в $F(i)$. Очевидно, достаточно проверить, что каждый элемент $a + bi$ $(a, b \in F)$ является в $F(i)$ квадратом. Но это может быть сделано таким же способом, как это обычно делается для комплексных чисел, потому что положительные элементы из F обладают в F квадратным корнем

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \in F(i).$$

Остается доказать следующую лемму:

---

[1]) Линейный порядок в K замкнут относительно деления, следовательно, из нулевой суммы квадратов мы можем получить представление вида (*) для -1 тем же способом, что и в доказательстве следствия 11.

Лемма. *Если F — такое поле, что*

(i) *каждый полином над F нечетной степени обладает в F корнем;*

(ii) *каждый квадратный полином над $F(i)$ имеет корень в $F(i)$,*

то $F(i)$ алгебраически замкнуто.

Мы покажем, что каждый полином f над F имеет корень в $F(i)$. Этого будет достаточно, так как если g — полином над $F(i)$ и $\bar{g}$ получается из g заменой i на $-i$ в каждом коэффициенте, то $f = g\bar{g}$, будучи полиномом над F, имеет корень $a+bi$ $(a, b \in F)$ в $F(i)$. Ясно, что либо $a+bi$, либо $a-bi$ будет корнем полинома g.

Если теперь $f \in F[x]$ имеет степень $n = 2^l q$ с нечетным q, то в случае, когда $l = 0$, условие (i) гарантирует существование в $F(i)$ корня полинома f.

Мы можем, таким образом, вести индукцию по l. В теории полей доказывается, что существует конечное алгебраическое расширение L поля F, в котором f разлагается на линейные множители, т. е. $f = a(x-\alpha_1)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$, где $a \in F$, $\alpha_j \in L$. $\binom{n}{2}$ элементов

$$\beta_{jk} = \alpha_j + \alpha_k - c\alpha_j\alpha_k \quad (1 \leq j < k \leq n)$$

с фиксированным $c \in F$ являются корнями некоторого полинома h над F. Так как степень полинома h имеет вид $\binom{n}{2} = 2^{l-1}q'$ с нечетным q', мы заключаем, что одно из β_{jk} должно принадлежать полю $F(i)$. Это имеет место для каждого $c \in F$. Так как F бесконечно (в противном случае оно не могло бы удовлетворять условию (i)), мы можем найти такую пару индексов (j, k), что одновременно

$$\alpha_j + \alpha_k - c_1\alpha_j\alpha_k \in F(i) \text{ и } \alpha_j + \alpha_k - c_2\alpha_j\alpha_k \in F(i)$$

для различных элементов c_1, c_2 из F. Но тогда $\alpha_j + \alpha_k$ и $\alpha_j\alpha_k$ — элементы из $F(i)$ и потому α_j, α_k — корни квадратного полинома $t \in F(i)[x]$. Предположение (ii) и тот факт, что f, t имеют общие корни, завершает доказательство леммы и, следовательно, теоремы 16.

Следствие 17. *Действительно замкнутое поле допускает один и только один линейный порядок.*

Если a — произвольный элемент действительно замкнутого поля F, то благодаря теореме 16 он имеет в $F(i)$ квадратный корень $b+ci$ $(b, c \in F)$. Но $a = b^2 - c^2 + 2bci$ влечет $bc = 0$, т. е. либо $b = 0$, либо $c = 0$, доказывая, что один из элементов $-a$ или a является квадратом в F. Произведение квадратов снова будет квадратом и, так как сумма квадратов не может быть квадратом со знаком минус, она опять будет квадратом. Мы видим, что множество P всех квадратов является таким коническим подполукольцом, что $P \cup -P = F$. Таким образом, P определяет в F линейный порядок, который, очевидно, будет единственным линейным порядком в F.

Наиболее существенным результатом является

Теорема 18 (Артин — Шрейер [1]). *Каждое формально действительное поле K может быть вложено в действительно замкнутое поле F, алгебраическое над K. Это поле F определяется полем K единственным, с точностью до изоморфизма, образом.*

Пусть L — алгебраическое замыкание поля K, т. е. наименьшее алгебраически замкнутое поле, содержащее K. Рассмотрим все формально действительные подполя из L, содержащие K. Это множество не пусто и, очевидно, индуктивно, поэтому, мы можем применить лемму Цорна, чтобы доказать существование в этом множестве максимального элемента F. Таким образом, F не имеет собственных формально действительных алгебраических расширений, т. е. является действительно замкнутым. Ясно, что F минимально в том смысле, что оно не имеет собственных действительно замкнутых подполей, содержащих K[1].

Чтобы доказать изоморфизм над K двух действительно замкнутых алгебраических расширений F и F^* поля K, мы рассмотрим множество всех пар $[U, \theta]$, где U — формально действительное подполе поля F, содержащее K, а θ — изоморфизм над K, отображающий U на подполе U^* поля F^*. Положим, что $[U_1, \theta_1] \leq [U_2, \theta_2]$, если U_1 — подполе в U_2, а θ_2 совпадает с θ_1 на U_1. Полученное ч. у. множество непусто (ибо $[K, \iota]$ с тождественным отобра-

---

[1] Это простое следствие из теоремы 16.

жением ι принадлежит ему) и индуктивно, следовательно, в этом множестве существует максимальный элемент $[V, \chi]$. Предположим, что $V \neq F$. Тогда V должно иметь собственное формально действительное алгебраическое расширение W, получающееся присоединением корня α неприводимого полинома $f \in V[x]$. Так как χ — изоморфизм, расширение поля $V^* = \chi(V)$ при помощи корня $\alpha^* (\in F^*)$ соответствующего полинома $f^* = \chi(f)$ снова будет формально действительным. Как показывается в теории полей, χ может быть продолжен до такого изоморфизма χ' поля $W = V(\alpha)$ на $W^* = V^*(\alpha^*)$, при котором α переходит в α^*. Это соображение показывает, что пара $[W, \chi']$ является бо́льшим элементом рассматриваемого множества. Из полученного противоречия следует, что $V = F$, откуда $V^* = F^*$ и теорема вполне доказана.

Аналогичные рассуждения можно применить, чтобы доказать, что если A — алгебраически замкнутое поле, содержащее формально действительное поле K, то существует действительно замкнутое подполе F поля A, которое содержит K и удовлетворяет условию $A = F(i)$. Значит, алгебраически замкнутое поле A характеристики 0 содержит действительно замкнутое подполе F, такое, что $A = F(i)$.

Поле комплексных чисел содержит действительно замкнутые поля, отличные от поля действительных чисел, но изоморфные ему; например, имеется такое поле, содержащее $i\sqrt[4]{2}$ или $i\pi$.

4. Пересечение линейных порядков

В некоторых случаях частичный порядок кольца может быть представлен в виде пересечения линейных порядков.

Теорема 19 (Фукс [19]). *Частичный порядок P произвольного кольца R тогда и только тогда является пересечением линейных порядков Q_λ $(\lambda \in \Lambda)$, когда из того, что полукольцо*

$$H(P,\ -a,\ \varepsilon_1 a_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n a_n)$$

не является коническим ни для какого выбора знаков $\varepsilon_i = \pm 1$, следует $a \in P$.

Предположим, что P является пересечением линейных порядков Q_λ и $a \notin P$. Тогда $a \notin Q_\lambda$ для некоторого Q_λ, значит, $-a \in Q_\lambda$ и $H(P, -a)$ может быть продолжено до линейного порядка. Из теоремы 1 следует, что для подходящего выбора знаков ε_i полукольцо $H(P, -a, \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$ коническое. Обратно, если условие, касающееся P, выполнено и $a \notin P$, то $H(P, -a, \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$ коническое для каждого множества $a_1, \ldots, a_n$ с подходящим образом выбранными знаками ε_i. Применяя снова теорему 1, мы выводим существование линейного порядка Q_λ, содержащего $H(P, -a)$; таким образом, $a \notin Q_\lambda$. Следовательно, пересечение всех л. у. расширений Q_λ конуса P не содержит элементов, лежащих вне P, что и требовалось доказать.

Если нет делителей нуля, теорема 19 становится значительно проще. Заметим, что если P будет пересечением линейных порядков, то оно содержит все четные относительно P произведения; произведение называется *четным относительно P*, если оно принадлежит P или же становится четным произведением после отбрасывания множителей, принадлежащих P. Кроме того, P, очевидно, замкнуто относительно деления. Обратное также верно:

Следствие 20. *Для того чтобы частичный порядок P кольца R без делителей нуля был пересечением линейных порядков, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

(a) *P содержит все суммы четных произведений относительно P;*

(b) *P замкнуто относительно деления.*

Нам надо доказать только достаточность. Обратимся к теореме 7, чтобы вывести из условий (a) и (b), что P — пересечение линейных порядков. Предположим, что для некоторого $a \in R (a \neq 0)$ $H(P, -a)$ не обладает линейным продолжением. Ввиду теоремы 7 и условия (a) это означает, что $x_0 + x_1 = 0$ выполнено для некоторого $x_0 \in P$ и некоторого x_1, являющегося непустой суммой ненулевых произведений, сомножителями которых служат элементы из P, произвольные элементы из R четное число раз и $-a$ нечетное число раз. Тогда $x_0 a + x_1 a = 0$, где, очевидно, $x_1(-a) \in P$ и $x_1 a \neq 0$. Значит, $x_0 a \in P$ и из условия (b) следует, что $a \in P$. Применение предыдущей теоремы завершает доказательство.

Так как P — полукольцо, в условии (a) достаточно потребовать, что P содержит все четные произведения относительно P.

Следствие 21. *Частичный порядок P тела F в точности тогда является пересечением линейных порядков, когда P содержит все произведения (суммы произведений) квадратов.*

Это условие тривиально необходимо. Оно также и достаточно, ибо в случае тел четные относительно P произведения — это произведения элементов из P и квадратов, т. е. условие (a) следствия 20 выполняется. Далее, так как $ab^{-1} = ab(b^{-1})^2$, условие (b) также выполнено, и потому следствие 20 влечет наше утверждение.

В коммутативном случае условие сводится к тому, что P содержит все квадраты (суммы квадратов).

5. Векторные кольца

Назовем ч. у. кольцо R *векторным кольцом*, если оно является подпрямой суммой л. у. колец R_λ. Это означает, что каждый элемент векторного кольца является вектором $a = \langle \ldots, a_\lambda, \ldots \rangle$ с компонентами a_λ из л. у. кольца R_λ, и вектор больше или равен 0 тогда и только тогда, когда каждое $a_\lambda \geqq 0$.

Очевидно, что если частичный порядок кольца R является пересечением линейных порядков, то R обязательно будет векторным кольцом, так как в этом случае за кольцо R_λ можно принять само кольцо R, снабженное различными линейными продолжениями его частичного порядка.

Для колец имеют место аналоги леммы и теоремы 20 гл. III, п. 6.

Лемма. *Условием, необходимым и достаточным для того, чтобы ч. у. кольцо R было векторным кольцом, является существование представления его положительного конуса P в виде*

$$P = \bigcap T_\lambda,$$

удовлетворяющего условиям:

1) *T_λ — выпуклые подполукольца, содержащие P,*
2) *если $x \in R \setminus T_\lambda$, то $-x \in T_\lambda$.*

Теорема 22. *Ч. у. кольцо R с положительным конусом P тогда и только тогда будет векторным кольцом, когда для каждого конечного множества $a_1, \ldots, a_n$ элементов из R выполнено условие*

$$\bigcap H(P, \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n) = P,$$

где пересечение берется по всем 2^n выборам знаков $\varepsilon_i = \pm 1$.

Доказательства идут параллельно соответствующим доказательствам в случае векторных групп и могут быть предоставлены читателю[1]).

---

[1]) $T_\lambda \cap -T_\lambda$ — идеал, ибо если $a \in T_\lambda \cap -T_\lambda$, а $b \in R$, то либо $b \in T_\lambda$, либо $-b \in T_\lambda$, откуда $\pm ab \in T_\lambda$ во всех случаях.

Глава VIII

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ КОЛЬЦА И ТЕЛА

1. Архимедовы линейно упорядоченные кольца

Ч. у. кальцо называется *архимедовым*, если его аддитивная группа архимедова как ч. у. группа.

В случае тел архимедовы упорядочения легко распознавать. А именно, л. у. тело K будет архимедовым тогда и только тогда, когда для каждого строго положительного $a \in K$ найдется натуральное число n, такое, что $n > a$ [или, что то же самое, $n^{-1} < a$]. В самом деле, в телах неравенства $na > b$, $n > ba^{-1}$, $n^{-1} < ab^{-1}$ равносильны ($a, b > 0$).

Архимедовы л. у. кольца могут быть полностью описаны.

Теорема 1 (Пикерт [1], Хион [1][1]). *Архимедово л. у. кольцо будет либо нулевым кольцом с аддитивной группой, о-изоморфной подгруппе действительных чисел, либо же оно будет о-изоморфным однозначно определенному подкольцу поля действительных чисел, взятому с обычной упорядоченностью. Таким образом, архимедово л. у. кольцо всегда ассоциативно и коммутативно*[2].

По теореме Гёльдера (теорема 1 гл. IV) аддитивная группа R_+ архимедова л. у. кольца R о-изоморфна подгруппе поля действительных чисел V. Для удобства допустим, что группа R_+ вложена в V. Рассмотрим отображение $x \longrightarrow a\cdot x$ группы R_+ в себя (a, $x \in R$; точка указывает на умножение в R, в то время как запись рядом будет обозначать произведение действительных чисел). Оно будет о-гомоморфизмом при $a \geqq 0$; значит, в силу предложения 2 гл. IV, существует такое действительное число $r_a \geqq 0$, что $a\cdot x = r_a x$ для всех $x \in R$. Положив $r_a = -r_{-a}$ при $a < 0$, легко увидеть, что соответствие

$$\varphi : a \longrightarrow r_a$$

удовлетворяет условию $r_{a+b} = r_a + r_b$ и потому будет о-гомоморфизмом между действительными группами R_+ и, скажем, $S_+ \subseteq V$. Опять на основании того же предложения 2 мы имеем $sa = r_a$ для некоторого действительного числа $s \geqq 0$ и всех $a \in R$. Если $s = 0$, то R — нулевое кольцо, и мы получаем первую часть теоремы. Если же $s > 0$, то φ будет о-изоморфизмом не только в теоретико-групповом, но и в теоретико-кольцевом смысле, так как из $a\cdot b = r_a b = (sa)\,b = s\,(ab)$ вытекает

$$r_{a\cdot b} = s\,(a\cdot b) = s\,[s\,(ab)] = (sa)\,(sb) = r_a r_b$$

для всех a, $b \in R$. Следовательно, элементы из S_+ образуют в V подкольцо S, о-изоморфное кольцу R.

Чтобы установить единственность, мы покажем, что если ψ — о-изоморфизм между двумя подкольцами A, B поля действительных чисел, то $A = B$ и ψ — тождественный изоморфизм. На основании предложения 2 гл. IV мы устанавливаем существование такого действительного числа $r > 0$, что $\psi(a) = ra$ ($\in B$) для всех $a \in A$. Далее, из $\psi(a_1 a_2) = \psi(a_1)\,\psi(a_2)$ следует $r^2 = r$, откуда $r = 1$, ибо A, B — ненулевые кольца. Это завершает доказательство теоремы 1 и такого следствия:

Следствие 2[1]. *Архимедово л. у. кольцо, если оно ненулевое, не имеет о-автоморфизмов, отличных от тождественного.*

Архимедов характер, очевидно, сохраняется при переходе к кольцам частных. То же самое справедливо для алгебраических расширений, более того

---

[1] Коммутативность архимедовых л. у. тел была доказана Гильбертом [1]. Для л. у. колец со строгим порядком теорема была доказана Пикертом [1]; в том виде, как она приводится здесь, теорема принадлежит Хиону [1]. См. также Таллини [1].

[2] Упомянем здесь, что Вагнер [1] установил теорему коммутативности другого вида: л. у. ассоциативное кольцо, содержащее в своем центре подполе действительных чисел, будет коммутативным, если оно удовлетворяет нетривиальному полиномиальному тождеству. Более простое доказательство см. у Алберта [2].

---

[1] Для колец с единицей это было доказано Пикертом [1].

Предложение 3[1]). *Л. у. алгебраическая алгебра L над архимедовым л. у. подполем K о-изоморфна подполю действительных чисел.*

Предположим, что $\alpha \in L$ $(\alpha > 0)$ удовлетворяет соотношению

$$f(\alpha) = \alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \ (a_j \in K)$$

и выберем $c \in K$, такое, что $c > 0$, $c \geqq 1 - a_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда неравенство $\alpha \geqq c$ невозможно, ибо это неравенство влекло бы за собой $a_j \geqq 1 - \alpha$ и

$$f(\alpha) \geqq \alpha^m + (1 - \alpha)(\alpha^{m-1} + \ldots + 1) = 1.$$

Значит, $\alpha < c$ для некоторого $c \in K$, а отсюда сразу следует, что L архимедова. По теореме 1 алгебра L *о*-изоморфна подкольцу действительных чисел. Оно должно быть полем, так как α^{-1} принадлежит подкольцу, порожденному полем K и элементом α.

∗ Предложение 3а (Вайда [1]). *Если л. у. мультипликативная группа строго положительных элементов л. у. тела F архимедова, то F — архимедово тело.*

Допустим, что элемент $a \in F$ удовлетворяет условию $na \leqq 1$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, где 1 — единица тела F. Тогда

$$0 < (1 + a)^m \leqq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \quad \text{для } m = 1, 2, \ldots .$$

Из соотношения $0 \neq 1 + a \geqq 1 - \frac{1}{m}$ мы получаем неравенство

$$(1 + a)^{-m} \leqq \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} \quad \text{для } m = 2, 3, \ldots .$$

Как и в случае рациональных чисел, отсюда следует, что $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ $(m \neq 0, -1)$, а потому и $(1 + a)^m$ для всех m ограничены. По предположению, $1 + a = 1$ и, значит, $a = 0$. ∗

2. Архимедовы классы

Предположим, что R — ч. у. кольцо, и определим архимедову эквивалентность и архимедовы классы относительно сложения, как это сделано в гл. IV п. 1[1]). Там мы видели, что архимедовы классы ч. у. группы образуют ч. у. множество. Теперь же мы можем, кроме того, доказать следующую теорему.

---

[1]) Для конечных расширений поля K утверждение было доказано Пикертом [1], а для полупростых алгебр над K Банашевским [1].

Теорема 4[2]). *Архимедовы классы ч. у. кольца образуют ч. у. группоид относительно умножения комплексов, классы ч. у. тела образуют ч. у. группу. Если кольцо (тело) л. у., то то же самое имеет место и для классов.*

Пусть $\varkappa(x)$ обозначает архимедов класс элемента $x (> 0)$ в ч. у. кольце R. Сначала мы проверим, что из $\varkappa(a) \leqq \varkappa(b)$ вытекает $\varkappa(ac) \leqq \varkappa(bc)$ для каждого $c \in R$ $(c > 0)$. Мы можем найти такое натуральное число n, что $a < nb$. Поэтому $ac \leqq nbc$. Если здесь $bc = 0$, то также и $ac = 0$, в то время как если $bc \neq 0$, то $ac < (n + 1)bc$. Таким образом, в любом случае $\varkappa(ac) \leqq \varkappa(bc)$, что и утверждалось. Аналогичными рассуждениями можно показать, что из $\varkappa(a) \leqq \varkappa(b)$ следует $\varkappa(ca) \leqq \varkappa(cb)$. Значит, из $\varkappa(a) = \varkappa(b)$ и $\varkappa(a') = \varkappa(b')$ следует $\varkappa(aa') = \varkappa(bb')$, и мы приходим к выводу, что произведение двух архимедовых классов $\varkappa(a)$ и $\varkappa(a')$ как комплексов принадлежит третьему классу $\varkappa(aa')$, т. е. $\varkappa(a) \cdot \varkappa(a') = \varkappa(aa')$. Из доказанного видно также, что справедлив закон монотонности, таким образом, классы образуют ч. у. группоид. Если же R — тело, то $\varkappa(e)$ будет единицей для архимедовых классов, а $\varkappa(a^{-1})$ — обратным элементом для $\varkappa(a)$, т. е. в этом случае мы получаем ч. у. группу.

Естественно рассматривать отображение $a \to \varkappa(a)$ положительного конуса R на ч. у. группоид A архимедовых классов кольца R как *естественное нормирование* R. Многие свойства R отражаются в A.

Предположим, что R — ассоциативное л. у. кольцо без делителей нуля, которое не является архимедовым, но имеет архимедово подкольцо $T \neq 0$. Для всех $x \in R$, $a \in T$

---

[1]) Если кольцо окажется алгеброй над л. у. телом F, то архимедовы классы образуются относительно F, т. е. элемент и его произведения на положительные элементы основного тела лежат в одном и том же архимедовом классе.

[2]) Этот результат был доказан для л. у. тел Биркгофом [3]. Определение ч. у. группоида см. в гл. X. В случае тел класс нуля должен быть опущен.

($x, a > 0$) мы имеем отношение $xa \sim x$, $ax \sim x$ (архимедова эквивалентность), так как, например, из $xa \ll x$ ($x \ll xa$) мы получили бы $xa^2 \ll xa$ ($xa \ll xa^2$), откуда $a^2 \ll a$ ($a \ll a^2$), что противоречит предположению о T. Элементы $x \in R$, удовлетворяющие условию $|x| \sim a$ для некоторого $a \in T$ ($a > 0$), образуют подкольцо T^* кольца R, содержащее T. Ясно, что T^* будет максимальным архимедовым подкольцом, содержащим T. Кроме того, $T^* \neq R$, поэтому существует такой элемент $x \in R$, что либо $x \gg a$, либо $x \ll a$ для всех $a \in T^*$. В первом случае $x^k \sim ax^k \ll x^{k+1}$ для всех $a \in T^*$ и, следовательно, $x \ll x^2 \ll x^3 \ll \dots$. В полиноме

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r \quad (a_i \in T^*,\ a_r \neq 0)$$

члены a_ix^i (если они не равны нулю) принадлежат различным архимедовым классам и потому $f(x) \sim x^r$. Таким образом, $f(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $a_r > 0$. Во втором случае мы имеем $x \gg x^2 \gg x^3 \gg \dots$ и $f(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $a_i > 0$, где $a_0 = \dots = a_{i-1} = 0$, $a_i \neq 0$. Это доказывает следующую теорему.

Теорема 5 (Банашевский [1]). *Л. у. область целостности, которая не архимедова, но обладает архимедовым подкольцом $T \neq 0$, содержит максимальное архимедово подкольцо $T^* \supseteq T$. Если $x \in R \setminus T^*$, $x > 0$, то подкольцо, порожденное подкольцом T^* и элементом x, о-изоморфно лексикографически или антилексикографически упорядоченному кольцу полиномов $T^*[x]$.*

Интересен также частный случай, когда R—тело, а T—его простое поле; ср. предложение 3.

Упорядоченность неархимедовых л. у. тел была впервые исследована Бэром [1].

3. *О*-кольца с делителями нуля

Мы имеем большую информацию об *О*-кольцах без делителей нуля, но мало знаем об *О*-кольцах, обладающих делителями нуля. Обращаясь к этому случаю, мы будем на протяжении этого раздела рассматривать только ассоциативные кольца, потому что неассоциативность значительно усложнила бы рассуждения.

Следующие результаты показывают, что *О*-кольца с делителями нуля будут до некоторой степени исключением.

Лемма. *Множество N_n всех элементов в ассоциативном О-кольце R, удовлетворяющих соотношению $a^n = 0$, будет идеалом в R с нулевой n-й степенью. N_n выпукло в каждом линейном порядке кольца R и состоит из целых архимедовых классов.*

Для доказательства мы допустим, что R каким-то способом л. у. Если $a \in N_n$, $b \in R$ — положительные элементы и, например, $ab \geqq ba$, то

$$a^2b^2 \geqq abab = (ab)^2, \dots,$$

$$a^nb^n = a(a^{n-1}b^{n-1})b \geqq a(ab)^{n-1}b \geqq a(ba)^{n-1}b = (ab)^n.$$

Значит, $ab \in N_n$ и аналогично $ba \in N_n$. Если $a_1, a_2 \in N_n$ и, например, $0 \leqq a_2 \leqq a_1$, то $(a_1 \pm a_2)^n \leqq (2a_1)^n = 0$, поэтому $a_1 \pm a_2 \in N_n$. Мы видим, что N_n — идеал в R. Если же $a_1, \dots, a_n \in N_n$ и если мы положим $a = \max(a_1, -a_1, \dots, a_n, -a_n)$, то $a \in N_n$ и $0 = -a^n \leqq a_1 \dots a_n \leqq a^n = 0$; следовательно, n-я степень идеала N_n, как и указывалось, равна нулю.

Выпуклость N_n очевидна. Если $b \sim a \in N_n$, то $b < ma$ для некоторого натурального числа m, и мы получаем $0 \leqq b^n \leqq (ma)^n = 0$, $b \in N_n$. Это завершает доказательство.

Теорема 6[1]). *Нильпотентные элементы ассоциативного О-кольца R образуют идеал N, а факторкольцо R/N не содержит делителей нуля. Идеал N будет выпуклым идеалом относительно всякого линейного порядка кольца R.*

N будет объединением возрастающей цепи $N_1 \subseteq \dots \subseteq N_n \subseteq \dots$ идеалов, таким образом, оно само будет идеалом и выпуклым при каждом линейном порядке кольца R. Если a, $b \in R$ удовлетворяют условию $ab \in N$ и, например, $0 < a \leqq b$ в некотором линейном порядке кольца R, то $0 \leqq a^2 \leqq ab \in N$. Это показывает, что $a^2 \in N$, $a \in N$, т. е. R/N не имеет делителей нуля.

Заметим, что отсюда следует, что из существования в ассоциативном *О*-кольце делителей нуля вытекает существование ненулевых нильпотентных идеалов.

---

1) Эта теорема была доказана Хионом [3] для л. у. полугрупп.

∗ Далее мы рассмотрим идемпотенты в O-кольцах. Мы начнем с замечания, что O-кольцо R с единицей e не может иметь никаких идемпотентов, отличных от 0 и e. Действительно, если x — идемпотент, то идемпотентом будет и $e-x$. Так как элемент $x(e-x)=0$ лежит между x^2 и $(e-x)^2$ относительно линейного порядка кольца R, мы имеем $x^2=0$ или $(e-x)^2=0$, откуда $x=0$ или $e-x=0$.

Теорема 6а (Хенриксен—Исбелл [1]). *Каждое ассоциативное O-кольцо R является прямой суммой своих идеалов A и B,*

$$R=A+B,$$

где все идемпотенты кольца R принадлежат идеалу A и являются левыми или правыми единицами для A, а B — нулевое кольцо. Если ненулевой идемпотент существует, то это разложение единственно. При каждой линейной упорядоченности кольца R имеет место неравенство $|a|>|b|$ для всех $a\in A$, $b\in B$, $a\neq 0$.

Пусть $e\neq 0$ — идемпотент O-кольца R и $ea=0$ для некоторого $a\in R$, $a\neq 0$. Мы утверждаем, что $xa=0$ для всех $x\in R$. Если относительно линейного порядка кольца R имеет место соотношение $0\leqq x\leqq xe$, то умножением на элемент a, который мы можем считать положительным, мы получим $0\leqq xa\leqq xea=0$, откуда $xa=0$. Если же имеет место неравенство $xe\leqq x$, то неравенство $e\leqq x-xe$ невозможно, в чем можно убедиться, умножая это неравенство справа на e. Поэтому справедливо неравенство $0\leqq x-xe\leqq e$, а отсюда следует неравенство $0\leqq xa-xea\leqq ea=0$ и $xa=0$.

Если e и f — различные идемпотенты, отличные от нуля, то из равенства $e(f-ef)=0$ вытекает, в силу доказанного выше, что $x(f-ef)=0$ для всех $x\in R$. В частности, $f(f-ef)=0$, т. е. $fef=f$, значит, как ef, так и fe являются идемпотентами и лежат, очевидно, между e и f при любой линейной упорядоченности кольца R. Далее, $(fe)(ef)=f$ и, аналогично, $(ef)(fe)=e$, что показывает, что элементы e и f лежат между ef и fe. Мы заключаем, что либо $ef=e$, $fe=f$, либо $ef=f$, $fe=e$.

Если e, f, g — различные ненулевые идемпотенты и, например, $e<g<f$, то из неравенств $e^2\leqq eg\leqq ef$ и $e^2\leqq ge\leqq fe$ вытекает либо $ef=e=eg$, либо $fe=e=ge$. В первом случае мы имеем $fe=f$, $ge=g$ и, аналогично, $fg=f$, $gf=g$, так что $xy=x$ для всех пар x, y ненулевых идемпотентов кольца R. Во втором же случае будет $xy=y$ для всех таких пар x, y.

Теорема 6а должна быть доказана только для того случая, когда в кольце R существует идемпотент $e\neq 0$. Для определенности допустим, что ненулевые идемпотенты в кольце R являются правыми единицами друг для друга. Пусть A — множество всех таких элементов $a\in R$, что $ae=a$, а B — множество всех тех элементов $b\in R$, для которых $be=0$. Тогда $R=A+B$ будет пирсовским разложением кольца R на левые идеалы A и B. Так как элемент $e+ex-exe$ является ненулевым идемпотентом для каждого $x\in R$, в силу правила умножения идемпотентов будет справедливо равенство $(e+ex-exe)e=e+ex-exe$. Это означает, что $exe=ex$, и потому для каждого элемента $a\in A$ имеет место равенство $axe=aexe=aex=ax$, показывающее, что $ax\in A$, и A является двусторонним идеалом. Из равенства $be=0$ при помощи рассуждений, двойственных приведенным в начале доказательства, получается $bx=0$ для всех $x\in R$, а потому B будет двусторонним идеалом и нулевым кольцом. Так как элементы кольца R, на которые идемпотент $f\neq 0$ действует как правая единица, принадлежат идеалу A, а те элементы, которые аннулируются справа элементом f, содержатся в B, прямое разложение единственно. Наконец, при любой линейной упорядоченности кольца R мы должны иметь $ae=a>0=be$ для всех положительных $a\in A$, $b\in B$, что и требовалось доказать. ∗

Обратимся к O-алгебрам над полями.

Теорема 7 (Земмер [1]). *Пусть A — ассоциативная O-алгебра конечного ранга над полем F, и пусть A не является ни нильпотентной, ни телом. Тогда A будет прямой суммой трех векторных пространств над F:*

$$A=B+C+D.$$

Одно из них, B, будет O-полем, и если e — единица в B, а N — радикал алгебры A, то $C=eNe$, а D будет правым или левым аннулятором элемента e. Наконец, при каждом *линейном упорядочении алгебры A элементы из D будут бесконечно малыми по сравнению с элементами из C, а элементы из C — бесконечно малыми по сравнению с элементами из B.*

На основании предложения 6 гл. VII $N \neq 0$, и из сделанного после него замечания мы заключаем, что A/N — O-поле, значит, оно сепарабельно. В силу основной теоремы Веддербарна об алгебрах¹) имеем $A = B + N$ для некоторого подпространства $B \cong A/N$. Пусть $L_e = A(1-e)$ будет множество левых, а $R_e = (1-e)A$ — правых аннуляторов единицы e и B. Тогда либо eL_e, либо $R_e e$ равен нулю, так как если $0 < x \in eL_e$ и $0 < y \in R_e e$ при некотором упорядочении алгебры A и, например, $x \geqq y$, то $0 > -y = -ye = (x-y)e \geqq 0$, что противоречиво. Допустим для определенности, что $eL_e = 0$. Из левостороннего пирсовского разложения $A = Ae + L_e$ вытекает $eA = eAe$ и потому правостороннее разложение может быть записано в виде $A = eAe + R_e$. Поскольку N — идеал в A, мы имеем $eAe = B + eNe$. Простая подстановка показывает, что $A = B + eNe + R_e$.

Так как $e \notin N$, $eR_e \subseteq N$ и A/N не имеет делителей нуля, мы имеем $R_e \subseteq N$, и потому $N = eNe + R_e$. В силу выпуклости N остается доказать, что $y > z$ для всех строго положительных $y \in eNe$, $z \in R_e$. Если бы мы имели $y \leqq z$, то из $0 = eze \geqq eye = y$ следовало бы $y = 0$, что противоречиво. Это завершает доказательство.

4. o-простые линейно упорядоченные кольца

Ч. у. кольцо R называется *o-простым*, если оно не содержит отличных от 0 и R выпуклых идеалов. Например, архимедово л. у. кольцо будет ввиду теоремы 1 o-простым.

Теорема 8 (Д. Г. Джонсон [1]). *Пусть R — л. у. ассоциативное кольцо и I — минимальный выпуклый идеал в R. Если $I^2 \neq 0$, то R o-просто (и $I = R$).*

---

[1] Необходимые нам результаты из теории алгебр см., например, у Алберта: Albert A. A., Structure of algebras, New York, 1939.

Если минимальный выпуклый идеал¹) I кольца R удовлетворяет условию $I^2 \neq 0$, то R не содержит нильпотентных идеалов и, следовательно, по теореме 6 не имеет делителей нуля. Таким образом, $IaI \neq 0$ для произвольного $a > 0$ в I. Множество J всех элементов $d \in R$, удовлетворяющих условию

$$|d| \leqq bac \text{ для некоторых } b,\ c \in I,$$

будет выпуклым идеалом, так как из $d_1, d_2 \in J$, т. е. $|d_i| \leqq b_i a c_i$ (b_i, $c_i \in I$), следует, что

$$|d_1 \pm d_2| \leqq |d_1| + |d_2| \leqq 2\max(b_i a c_i) =$$
$$= \max\ (2b_i) a c_i \text{ и } |xd_1| = |x|\,|d_1| \leqq (|x|\,b_1) a c_1,$$

$|d_1 x| \leqq b_1 a(c_1 |x|)$. Ввиду включения $0 \subset J \subseteq I$ и минимальности I мы получаем $J = I$. Таким образом, a удовлетворяет условию $a \leqq bac$ для некоторых b, $c \in I$. Мы не можем иметь $ab < a$ и $ba < a$ для всех положительных $b \in I$, ибо тогда $(ba)c \leqq ac < a$ было бы противоречием. Значит, $ab \geqq a$ или $ba \geqq a$ для некоторого положительного $b \in I$. В первом случае $abx \geqq ax$ для всех положительных $x \in R$. Следовательно, $bx \geqq x$, так как R не содержит делителей нуля, и потому $I = R$, т. е. R o-просто. Такие же заключения справедливы и во втором случае, что и требовалось доказать.

Следующий результат несколько неожидан.

Теорема 9 (Д. Г. Джонсон [1]). *o-простое л. у. ассоциативное кольцо R не содержит нетривиальных выпуклых односторонних идеалов.*

Если R содержит делители нуля, то (в обозначениях предыдущего раздела) $N_2 \neq 0$, откуда $N_2 = R$ и R — нулевое кольцо. В этом случае R коммутативно и утверждение очевидно. Следовательно, достаточно проверить, что каждое л. у. ассоциативное кольцо S без делителей нуля, содержащее нетривиальный выпуклый левый идеал L, содержит и нетривиальный выпуклый идеал. Если S

---

[1] Ясно, что может существовать только один минимальный выпуклый идеал. Его существование равносильно тому, что л. у. кольцо подпрямо неразложимо. (Пример 3 гл. IV, п. 2 с антилексикографическим линейным порядком является подпрямо разложимым л. у. кольцом.)

обладает единицей e, то, очевидно, $e \notin L$ и, кроме того, выпуклый идеал I, порожденный L, не содержит e. Ибо если вопреки этому

$$e \leqq a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \quad (0 < a_i \in L,\ 0 < x_i \in S),$$

то также

$$e \leqq ax \quad (a = a_1 + \ldots + a_n,\ x = \max x_i),$$

откуда $a \leqq axa$. Но каждый элемент из L меньше чем e, значит, $xa < e$ и $axa < a$: получилось противоречие. Если же S не имеет единицы, то по следствию 7 гл. VI мы можем вложить S с сохранением порядка в такое л. у. кольцо S^* с единицей e, что S^* также не содержит делителей нуля. L будет левым идеалом в S^* и выпуклый левый идеал L^*, порожденный L в S^*, не будет содержать e, так как если бы мы имели $e < a$ для некоторого $a \in L$, то, по определению линейного порядка в S^*, мы получили бы $b < ab$ для некоторого положительного $b \in S$, откуда $xb < xab$ и $x < xa (\in L)$ для всех строго положительных $x \in S$, т. е. $L = S$. Таким образом, L^* будет нетривиальным выпуклым левым идеалом в S^*, и на основании доказанного мы заключаем, что выпуклый идеал I^*, порожденный L^* в S^*, отличен от S^*. Пересечение $I = I^* \cap S$ будет выпуклым идеалом в S, который не может совпадать с S. Это тривиально, когда L — уже идеал, ибо тогда $I = L$. Если же этот случай не имеет места, то $by \notin L$ для некоторых положительных элементов $b \in L$, $y \in S$, откуда $b < by$ и $e < y$ в S^*, поэтому $y \notin I$. Это завершает доказательство.

Простым следствием из этой теоремы является тот факт, что каждый максимальный выпуклый идеал л. у. ассоциативного кольца будет в то же время и максимальным выпуклым левым (и правым) идеалом.

Вообще говоря, л. у. ассоциативное кольцо может содержать выпуклые односторонние идеалы, не являющиеся двусторонними. Примеры были даны Холландом [1] и Д. Г. Джонсоном [1]. Джонсон нашел такое л. у. кольцо A, а именно полугрупповое кольцо свободной полугруппы без единицы, порожденной двумя элементами, над кольцом целых чисел (при подходящем определении линейного порядка), что каждое л. у. ассоциативное кольцо без делителей нуля, содержащее выпуклый левый идеал, не являющийся двусторонним, содержит подкольцо, o-изоморфное кольцу A.

5. Тела формальных степенных рядов

Хорошо известная конструкция формальных степенных рядов над телами может быть обобщена в нашей ситуации следующим образом.

Пусть G — л. у. группа и F — тело. Определим «формальные бесконечные суммы»

$$\Phi = \sum_{a \in G} \Phi_a a \qquad (\Phi_a \in F) \tag{1}$$

при условии, что несущее множество

$$S(\Phi) = [a \in G \mid \Phi_a \neq 0]$$

вполне упорядочено относительно линейного порядка группы G. Тогда (1) будет называться *формальным степенным рядом по G над F*. Множество всех таких формальных степенных рядов обозначается символом $F[[G]]$.

Если Φ и Ψ — два формальных степенных ряда, то их сумма определяется естественным образом по формуле

$$(\Phi + \Psi)_a = \Phi_a + \Psi_a.$$

Таким образом, $\Phi + \Psi$, а также и $\lambda\Phi$ для каждого $\lambda \in F$, где

$$(\lambda\Phi)_a = \lambda\Phi_a,$$

снова будут формальными степенными рядами. Поэтому $F[[G]]$ является левым векторным пространством над F. Мы превратим его в кольцо, следующим образом определив произведение, зависящее от некоторого выбора автоморфизмов тела F. Пусть ω — антигомоморфизм группы G в группу автоморфизмов тела F; таким образом, $\omega(b)$ будет для каждого $b \in G$ автоморфизмом тела F и

$$\omega(bc) = \omega(c)\,\omega(b) \quad \text{для всех} \quad b,\ c \in G.$$

Затем мы определяем произведение $\Phi\Psi$ рядов Φ и Ψ при помощи соотношения[1])

$$(\Phi\Psi)_a = \sum_{bc=a} \Phi_b \Psi_c^{\omega(b)}. \tag{2}$$

---

[1]) Можно было бы вместо этого использовать гомоморфизмы ω^* группы G в группу автоморфизмов тела F и определить произведение при помощи равенства

$$(\Phi\Psi)_a = \sum_{bc=a} \Phi_b^{\omega^*(c)} \Psi_c.$$

Заметим, что

A) Сумма в равенстве (2) конечна: существует только конечное число таких элементов b, что $\Phi_b \neq 0$ и $\Psi_{b^{-1}a} \neq 0$. Действительно, не существует бесконечно убывающей последовательности элементов b, для которых $\Phi_b \neq 0$, и не существует бесконечной возрастающей последовательности элементов b (т. е. убывающей последовательности элементов $b^{-1}a$), для которых $\Psi_{b^{-1}a} \neq 0$.

B) Ассоциативный и дистрибутивный законы выполняются в силу предположений об ω. Поэтому $F[[G]]$ — кольцо; будем обозначать его символом $F_\omega[[G]]$.

C) Для всех $b \in G$ мы имеем

$$\Phi b = \sum \Phi_a (ab) \quad \text{и} \quad b\Phi = \sum \Phi_a^{\omega(b)} (ba).$$

Далее мы докажем следующую важную лемму.

Лемма. *Пусть* $\Phi \in F_\omega[[G]]$ *таково, что* $\Phi_a \neq 0$ *только для* $a > e$. *Тогда для всех* $\lambda_n \in F$ *бесконечная сумма*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi^n$$

имеет смысл.

Достаточно проверить, что 1) объединение несущих множеств $S(\Phi^n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ будет вполне упорядоченным относительно линейного порядка группы G и 2) для каждого фиксированного $a \in G$ существует только конечное множество таких целых чисел n, что $(\Phi^n)_a \neq 0$.

Утверждение 1), очевидно, будет доказано, если мы покажем, что не существует такой бесконечной последовательности

$$u_1 = a_{11} \ldots a_{1n_1} > \ldots > u_i = a_{i1} \ldots a_{in_i} > \ldots,$$

что $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (3)

$$\Phi_{a_{ik}} \neq 0 \qquad (a_{ik} \in G).$$

Доказывая от противного, предположим, что существует последовательность (3). Заметим, что в л. у. группе G мы, очевидно, имеем

$$\{u_i\}_\square = \{\max_k a_{ik}\}_\square$$

и что, по определению формальных степенных рядов, в каждом подмножестве множества подгрупп $\{a\}_\square$ с $\Phi_a \neq 0$ существует наименьшая подгруппа; таким образом, среди $\{u_i\}_\square$ должна существовать наименьшая подгруппа U группы G. Мы можем предположить, что последовательность (3) выбрана так, чтобы эта наименьшая подгруппа была как можно меньше. Кроме того, ввиду включений $\{u_1\}_\square \supseteq \ldots \supseteq \{u_i\}_\square \supseteq \ldots$ мы можем без ограничения общности предположить, что

$$\{u_i\}_\square = U \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Теперь выбираем для каждого i некоторое $a_i^* = a_{ik_i}$, удовлетворяющее условию $\{a_{ik_i}\}_\square = \{u_i\}_\square = U$. Могут существовать различные $a \in G$, удовлетворяющие условиям $\Phi_a \neq 0$ и $\{a\}_\square = U$, но среди них, разумеется, существует одно, скажем a^*, которое будет наименьшим относительно линейного порядка в G. Для этого a^* мы имеем $a^* \leqq a_1^* \leqq u_1$, где $\{a^*\}_\square = \{a_1^*\}_\square = \{u_1\}_\square$. Из гл. IV, п. 3 следует, что $u_1 \leqq a^{*r}$ для некоторого натурального числа r, и, значит,

$$u_i \leqq a^{*r} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Каждое u_i обладает одной из следующих записей:

$$u_i = a_i^*, \quad u_i = v_i a_i^*, \quad u_i = a_i^* w_i, \quad u_i = v_i a_i^* w_i,$$

где v_i, w_i обозначают некоторые произведения элементов a_{ik}. Так как среди a_i^* не может существовать строго убывающей бесконечной последовательности, только конечное число элементов u_i могут иметь первый вид. Таким образом, или среди v_i, или среди w_i существует строго-убывающая последовательность; предположим для определенности, что имеет место первое: $v_{i_1} > \ldots > v_{i_j} > \ldots$. Это будет снова последовательность вида (3), где $\{v_{i_j}\}_\square = U$ (так как $v_i \leqq u_i$) и $v_i \leqq a^{*r-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (так как $a^* \leqq a_i^*$ и $u_i \leqq a^{*r}$). Таким образом, мы построили по u_i другую последовательность v_{i_j} с тем же самым свойством минимальности и, кроме того, с меньшим r. Это ведет к очевидному противоречию, которое доказывает 1).

Для доказательства утверждения 2) допустим существование такого элемента $a \in G$, что

$$a = a_{i1} \ldots a_{in_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

причем

$$n_1 < \ldots < n_i < \ldots \quad \text{и} \quad \Phi a_{ik} \neq 0,$$

и выбираем наименьшее a этого типа (это можно сделать ввиду 1)). Последовательность $a_{11}, \ldots, a_{i1}, \ldots$ имеет неубывающую бесконечную подпоследовательность, которую можно обозначить теми же самыми символами $a_{11} \leqq \ldots \leqq a_{i1} \leqq \ldots$. Последовательность $a'_i = a_{i2} \ldots a_{in_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ не возрастает, $a'_1 \geqq \ldots \geqq a'_i \geqq \ldots$ и, как было доказано в предыдущем абзаце, a'_i, начиная с некоторого индекса j, равны между собой: $a'_j = a'_{j+1} = \ldots$. Но $a'_j < a$, что противоречит выбору a в (4). Это завершает доказательство утверждения 2) и, значит, леммы.

Рассмотрим множество Γ всех таких $e + \Phi$, где $\Phi \in F_\omega[[G]]$, что $\Phi_a \neq 0$ только при $a > e$. *Это множество Γ будет группой относительно операции*

$$(e + \Phi)(e + \Psi) = e + (\Phi + \Psi + \Phi\Psi).$$

В самом деле, $e + \sum_{n=1}^{\infty} (-\Phi)^n$ будет обратным для $e + \Phi$; он существует благодаря лемме.

Теперь мы можем доказать теорему:

Теорема 10 (Хан [1], Нейман [2])[1]. *Формальные степенные ряды по л. у. группе G над телом F образуют тело $F_\omega[[G]]$.*

Мы уже знаем, что $F_\omega[[G]]$ — кольцо. Элемент $\Psi \neq 0$ в $F_\omega[[G]]$ может быть записан в виде $\Psi = \lambda b(e + \Phi)$, где $\lambda \in F$, $b \in G$, $e + \Phi \in \Gamma$. Если $e + \overline{\Phi}$ — обратный элемент для $e + \Phi$ в Γ, то $X = (e + \overline{\Phi}) b^{-1} \lambda^{-1} \in F_\omega[[G]]$ удовлетворяет условиям $\Psi X = X\Psi = e$. Ясно, что e играет роль единичного элемента в $F_\omega[[G]]$.

Перейдем к случаю, когда тело коэффициентов также л. у. Для того чтобы гарантировать, что произведения положительных элементов снова будут положительными, мы налагаем на ω дальнейшие ограничения.

---

[1] Коммутативный случай исследован Ханом, в то время как первое полное доказательство в некоммутативном случае было дано Нейманом; ω определялось выше.

Следствие 11 (Хан [1], Нейман [2]). *Если G и F определены как в предыдущей теореме и F л. у., то $F_\omega[[G]]$ может быть л. у. (естественным образом) при условии, что ω — о-автоморфизмы.*

Предположим, что $\Psi = \lambda b(e + \Phi)$ $(e + \Phi \in \Gamma)$ положительно, если $\lambda > 0$. Затем, как обычно, проверяются все необходимые постулаты линейного порядка.

Если мы возьмем в качестве ω тождественный автоморфизм ι, то существование $F_\iota[[G]]$ обеспечено и мы получаем

Следствие 12 (Гильберт [1]). *Каждая л. у. группа может быть вложена в мультипликативную группу л. у. тела.*

Групповое кольцо группы G с коэффициентами из F содержится в $F_\iota[[G]]$ и, следовательно, справедливо

Следствие 13 (Мальцев [1], Нейман [2])[1]. *Групповое кольцо л. у. группы G над (л. у.) телом F может быть вложено в (л. у.) тело.*

Нейман [2] рассматривает степенные ряды более общего вида. Он берет системы факторов $\gamma(a, b) \in F$, подчиненные условиям

$$\lambda^{\omega(b)\omega(a)}\gamma(a, b) = \gamma(a, b)\lambda^{\omega(ab)},$$

$$\gamma(ab, c)\gamma(a, b)^{\omega(c)} = \gamma(a, bc)\gamma(b, c)$$

для всех $a, b, c \in G$, $\lambda \in F$[2].

Для двух элементов Φ и Ψ л. у. тела $F_\omega[[G]]$ мы имеем $\Phi \ll \Psi$ тогда и только тогда, когда первое $a \in G$ с $\Phi_a \neq 0$ меньше, чем первое $b \in G$ с $\Psi_b \neq 0$. Это очевидное следствие определения упорядоченности в $F_\omega[[G]]$. Значит, Φ и Ψ тогда и только тогда будут архимедовски эквивалентными относительно F, когда $a = b$. Мы заключаем, что архимедовы классы тела $F_\omega[[G]]$ относительно F находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы G.

---

[1] Частный случай этого результата принадлежит Муфанг [1].

[2] Дальнейшее обобщение на неассоциативные системы рассматривалось Зелинским [2].

Предложение 14. *Л. у. группа архимедовых классов тела формальных степенных рядов $F_\omega[[G]]$ относительно л. у. тела F естественным образом о-изоморфна группе G.*

Заметим, что каждое л. у. поле F может быть вложено в тело $R[[G]]$, где R—поле действительных чисел, G—л. у. группа архимедовых классов поля F, а ω—отображение группы G на тождественный автоморфизм поля R.

6. Пополнение линейно упорядоченных тел

Если мы подойдем к проблеме погружения ч. у. тел в полные с. у. тела и захотим применить к аддитивной группе тела дедекиндов или канторовский процесс, то в результате тело получится только в исключительном случае. Это положение до некоторой степени проясняется при помощи следующей леммы.

Лемма. *С. у. поле K с замкнутым относительно деления положительным конусом обязательно будет л. у.*

Пусть $a \in K$, $a \neq 0$ и $b = (a^+)^2 |a|^{-1}$. По предположению, из $|a|^2 |a|^{-1} = |a| > 0$ следует $|a|^{-1} > 0$ и потому $b \geqq 0$. Из соотношений $|a| = a^+ - a^-$, $a = a^+ + a^-$ мы получаем, что $b - a = (a^-)^2 |a|^{-1} \geqq 0$ и $a^+ - b = -a^- a^+ |a|^{-1} \geqq 0$. Это показывает, что $b = a^+$ и, значит, из последнего неравенства следует $a^- a^+ = 0$, т. е. либо $a > 0$, либо $a < 0$.

В соответствии с этим направленное поле в важном случае замкнутости относительно деления не может быть вложено с сохранением порядка в полное с. у. тело, если только оно не будет л. у. Другой вид непреодолимых трудностей возникает в некоммутативном случае, так что довольно естественно ограничиться *с самого начала* л. у. полями.

Пусть F—л. у. поле. Мы приспособим канторовский процесс для того, чтобы получить поле, обладающее некоторыми дополнительными свойствами.

Определяем фундаментальные последовательности и нулевые последовательности элементов из F обычным образом. Фундаментальные последовательности образуют кольцо R с единицей, в котором нулевые последовательности образуют максимальный идеал N (доказательство этого, следующее классической схеме, может быть предоставлено читателю)[1]. Факторкольцо $R/N = F^*$ будет, следовательно, полем, которое может быть естественным образом л. у., так что каноническое отображение $a \longrightarrow (a, \ldots, a, \ldots)$ поля F в R, за которым следует естественный гомоморфизм R на F^*, будет о-изоморфизмом между F и подполем из F^*. Отождествляя F с этим подполем, получаем, что любой элемент из F^* будет пределом фундаментальной последовательности из F и каждая фундаментальная последовательность из F имеет предел в F^*.

Следует подчеркнуть, что замыкание F^* поля F, вообще говоря, не обладает тем свойством, что каждое ограниченное множество из F имеет в F^* наим. в. г. и наиб. н. г. Это произойдет, если F архимедово, однако, как легко видеть, ни в каком ином случае. Сформулируем хорошо известную теорему.

Теорема 15. *Если F—архимедово л. у. поле, то л. у. кольцо $F^* = R/N$, полученное из F при помощи канторовского процесса, будет л. у. полем. Следовательно, оно будет о-изоморфно полю действительных чисел.*

Если отказаться от коммутативности, то описанный процесс не приводит, вообще говоря, к телу F^*. Нейманом [2] было показано, что каждое л. у. тело K можно вложить в л. у. тело $K(F^*)$, продолжающее упорядоченность тела K и содержащее в своем центре поле действительных чисел F^*. Этот результат был обобщен Егером [1], который доказал, что то же самое верно и тогда, когда F—произвольное подтело центра тела K, а F^*—тело, полученное из F при помощи канторовского процесса.

* По поводу пополнения полуколец см. Луговский [1]. *

---

[1] Мы отсылаем к Дюбрею [1]; его метод, по-видимому, наиболее подходящий для того, чтобы показать, как использовать канторовский процесс в общем случае.

Глава

IX

СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ КОЛЬЦА

1. Общие свойства структурно упорядоченных колец

Если аддитивная группа ч. у. кольца R с. у., мы называем R *с. у. кольцом*[1]). Нулевое кольцо аддитивной абелевой с. у. группы и всякое л. у. кольцо являются тривиальными примерами с. у. колец. Менее тривиальными и более важными примерами с. у. колец являются примеры 5, 6 и 7 гл. VI п. 2.

Результаты, доказанные в гл. V для с. у. групп, автоматически переносятся на с. у. кольца R. Для удобства мы перечислим здесь наиболее важные результаты вместе с некоторыми простыми замечаниями об умножении в этих кольцах.

A) Для всех a, b, $c \in R$ мы имеем соотношения

$$(a \vee b)+c=(a+c) \vee (b+c), \quad (a \wedge b)+c=(a+c) \wedge (b+c),$$
$$-(a \vee b)=-a \wedge -b, \quad -(a \wedge b)=-a \vee -b,$$
$$(a \vee b)+(a \wedge b)=a+b.$$

B) Если $c \geqq 0$, то для всех a, $b \in R$

$$(a \vee b) c \geqq ac \vee bc, \quad c(a \vee b) \geqq ca \vee cb,$$
$$(a \wedge b) c \leqq ac \wedge bc, \quad c(a \wedge b) \leqq ca \wedge cb.$$

Эти неравенства следуют из того, что неравенства, подобные неравенствам $a \vee b \geqq a$ или $\geqq b$, могут умножаться на положительный элемент.

C) Положительная и отрицательная части и модуль элемента a определяются теперь соотношениями

$$a^+=a \vee 0, \quad a^-=a \wedge 0, \quad |a|=a \vee -a,$$

---

[1]) Общая теория с. у. колец принадлежит Биркгофу — Пирсу [1].

к тому же они связаны равенствами

$$a=a^+ + a^-, \quad |a|=a^+ - a^-.$$

Далее, мы имеем

$$a^+ \wedge -a^-=0, \quad |a+b| \leqq |a|+|b|$$

для всех a, $b \in R$.

D) Мы имеем

$$|ab| \leqq |a|\ |b|,$$

так как $ab=a^+b^+ + a^+b^- + a^-b^+ + a^-b^- \leqq a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ + a^-b^-=|a|\ |b|$ и, аналогично, $-|a|\ |b| \leqq ab$.

E) Определим *L-идеал* кольца R как подмножество I, которое является (i) идеалом кольца R в алгебраическом смысле и (ii) выпуклой подструктурой в R. Точно так же, как и в случае с. у. групп, легко проверяется, что условие (ii) можно заменить следующим условием (iii): если $a \in I$, $x \in R$ и $|x| \leqq |a|$, то $x \in I$. Результаты, относящиеся к l-идеалам с. у. групп, легко распространяются на L-идеалы:

a) разбиения, определяемые отношениями конгруэнтности с. у. кольца R, будут как раз разбиениями R на смежные классы по его различным L-идеалам;

b) сумма $I+J$ (или н. о. д.) двух L-идеалов I и J снова будет L-идеалом; он состоит из всех сумм $a+b$, где $a \in I$, $b \in J$;

c) L-идеалы с. у. кольца R образуют полную (и дистрибутивную) подструктуру структуры всех l-идеалов группы R_+;

d) факторкольцо R/I с. у. кольца R по L-идеалу I снова будет с. у. кольцом относительно индуцированного отношения порядка; существует естественное взаимно однозначное соответствие между L-идеалами из R/I и L-идеалами в R, содержащими I.

F) Произведение двух L-идеалов, определенное так, как это обычно делается в теории колец, вообще говоря, не будет уже L-идеалом. Для того чтобы восполнить этот недостаток, введем *L-произведение* $I \cdot J$ двух L-идеалов I и J как множество всех $x \in R$, которые удовлетворяют условию $|x| \leqq \sum |a_i|\ |b_i|$ для подходящих $a_i \in I$, $b_i \in J$. В силу неравенства $\sum |a_i|\ |b_i| \leqq \sum |a_i| \cdot \sum |b_i|$, это будет просто множество всех $x \in R$, удовлетворяющих условию

$$|x| \leqq |a|\ |b| \text{ для некоторых } a \in I,\ b \in J.$$

В ассоциативном случае $I \cdot J$ будет не чем иным, как L-идеалом, порожденным теоретико-кольцевым произведением идеалов I и J. Отсюда следует, что I^2 состоит из всех таких $x \in R$, что $|x| \leqq |a|^2$ для некоторого $a \in I$ [$|a|\ |b|$ можно заменить на $(|a|+|b|)^2$]. Вообще I^n будет совокупностью всех таких элементов x из R, что $|x| \leqq |a|^n$ для подходящего $a \in I$ 1). Легко проверяется, что

$$I \cdot J \subseteq I \cap J,$$

$$I \cdot (J+K) = I \cdot J + I \cdot K, \quad (J+K) \cdot I = J \cdot I + K \cdot I$$

для всех L-идеалов I, J, K из R.

G) Биркгоф и Пирс [1] дали перечисление всех двумерных с. у. алгебр над полем действительных чисел. Мы отметим доказанный ими довольно элементарный, но важный факт: *поле комплексных чисел, рассматриваемое как алгебра над полем действительных чисел, не допускает структурного упорядочения*. В самом деле, подгруппа, порожденная положительным конусом P, должна исчерпывать все комплексные числа, значит, P содержит два комплексных числа z и w, не коллинеарных с 0. Тогда P содержит все числа вида $\lambda z + \mu w$ с положительными действительными λ, μ, так что P будет сектором в комплексной плоскости с углом $\alpha > 0$; P^2 должно иметь угол 2α вопреки включению $P^2 \subseteq P$.

2. Функциональные кольца

Кажется трудно сказать много о строении с. у. колец. Однако есть один случай, для которого можно дать сведение к л. у. кольцам. Эти кольца вполне аналогичны с. у. векторным группам, рассмотренным в гл. V. Даже результаты имеют некоторое сходство с результатами о с. у. векторных группах.

---

1) Если ассоциативность не предполагается, то мы можем определить I^n как n-ю левую степень идеала I, $I^n = I \cdot (I(I(\cdots I)))$, и если аналогичным образом понимать $|a|^n$, то наше утверждение останется справедливым.

Полная прямая сумма

$$\overline{R} = \sum_{\lambda \in \Lambda}{}^{*} R_\lambda$$

л. у. колец R_λ будет с. у. кольцом, элемент $\langle \ldots, a_\lambda, \ldots \rangle \in \overline{R}$ которого будет положительным тогда и только тогда, когда $a_\lambda \geqq 0$ для каждого $\lambda \in \Lambda$. *Функциональным кольцом* (или, короче, *F-кольцом*) называется кольцо R, являющееся одновременно подкольцом и подструктурой такого кольца $\overline{R}$ 1).

F-кольцо R обладает следующими замечательными свойствами, которые для л. у. колец очевидны и сохраняются при образовании подколец-подструктур полной прямой суммы:

(a) если $c \geqq 0$, то для всех a, $b \in R$

$$(a \vee b)c = ac \vee bc, \quad c(a \vee b) = ca \vee cb,$$

$$(a \wedge b)c = ac \wedge bc, \quad c(a \wedge b) = ca \wedge cb;$$

(b) $|ab| = |a|\ |b|$ для всех a, $b \in R$;

(c) $a^2 \geqq 0$ для каждого $a \in R$;

(d) если $a \wedge b = 0$, то $ab = 0$.

Последнее свойство показывает, что *F-кольцо без делителей нуля должно быть л. у.*

Основным результатом об F-кольцах будет

Теорема 1 2). *Для с. у. кольца R следующие условия эквивалентны:*

(i) *R является F-кольцом;*

(ii) *если $a \wedge b = 0$ и $c \geqq 0$, то $ca \wedge b = 0$ и $ac \wedge b = 0$;*

(iii) *для каждого подмножества X кольца R множество X^* всех элементов из R, ортогональных к X, является L-идеалом в R.*

Из (i) следует (ii), ибо в л. у. кольцах условие (ii) выполняется тривиально.

---

1) ✻ Андерсон [1] дал условия, необходимые и достаточные для того, чтобы множество индексов Λ для F-кольца можно было бы взять конечным. ✻

2) Биркгоф и Пирс в своей работе [1] доказали эквивалентность условий (i) и (ii). Они определяли F-кольцо при помощи условия (ii).

Допустим, что условие (ii) выполнено, и заметим, что X^* будет, согласно предложению 12 гл. V, l-идеалом аддитивной группы R_+. Поэтому то, что мы должны дополнительно доказать, сводится к условию: если $a \in X^*$ и $c \in R$, то ac, $ca \in X^*$. Для положительных элементов это не что иное, как условие (ii), тогда как для произвольных элементов это сразу следует из неравенства $|ac| \leqq |a|\,|c|$. Таким образом, из (ii) следует (iii).

Так как условие (iii) содержит в качестве частного случая условие (ii) (когда X состоит из одного элемента), достаточно проверить, что условия (ii) и (iii) вместе влекут (i). Мы будем рассуждать почти так же, как и в доказательстве теоремы 15 гл. V. Начнем с замечания, что условие (ii) может быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned}(y\vee 0)(x\vee 0)\wedge(-x\vee 0)=0\\ (x\vee 0)(y\vee 0)\wedge(-x\vee 0)=0\end{aligned}\right\}\ \text{для всех } x,\ y\in R.$$

Действительно, элементы a, $b\in R$, для которых $a\wedge b=0$, могут быть представлены в виде $a=x\vee 0$, $b=-x\vee 0$ для некоторого $x\in R$. Значит, класс с. у. колец, удовлетворяющих условию (ii), эквационально определим, и потому они будут подпрямыми суммами подпрямо неразложимых с. у. колец, обладающих свойством (ii). Достаточно показать теперь, что подпрямо неразложимое с. у. кольцо R, удовлетворяющее условию (iii), будет л. у. Если элементы a, $b\in R$ удовлетворяют условию $a\wedge b=0$, то множество A всех $x\in R$, ортогональных к b, и множество B всех $y\in R$, ортогональных к A, будут L-идеалами кольца R, пересекающимися по 0. В силу подпрямой неразложимости один из идеалов A и B должен быть равным нулю, т. е. либо $a=0$, либо $b=0$. Доказательство закончено.

Следствие 2 (Биркгоф — Пирс [1]). *F-кольца эквационально определимы.*

∗ Заметим, что законы монотонности умножения можно записать как тождества, заменив $b(a)c$ на $c\vee 0$. ∗

∗ Ряд результатов, относящихся к л. у. кольцам, можно, внося соответствующие изменения, перенести на F-кольца. Например, F-кольцо тогда и только тогда может быть погружено в F-кольцо с единицей, когда оно является подпрямой суммой л. у. колец, каждое из которых погружается в л. у. кольцо с единицей. Используя теорему 8а гл. VI, мы получаем

Предложение 2а (Хенриксен — Исбелл [1]). *Ассоциативное F-кольцо R тогда и только тогда может быть погружено в F-кольцо с единицей, когда выполнены условия*

$$\left.\begin{aligned}\lbrack x\wedge y\wedge(x^2-x)\wedge(y-xy)\rbrack\vee 0=0\\ \lbrack x\wedge y\wedge(x^2-x)\wedge(y-yx)\rbrack\vee 0=0\end{aligned}\right\}\ \textit{для всех } x,\ y\in R.$$

В частности, класс F-подколец F-колец с единицей эквационально определим.

Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть л. у. кольца. Но в л. у. кольце R эти тождества означают, что если для некоторого положительного $x\in R$ имеет место неравенство $x^2>x$, то каждый положительный $y\in R$ удовлетворяет условиям $y\leqq xy$ и $y\leqq yx$. Поэтому цитированная теорема завершает доказательство. ∗

В архимедовом случае получается

Теорема 3 (Биркгоф — Пирс [1]). *Архимедово F-кольцо ассоциативно и коммутативно.*

Коммутативность получится сразу, если мы сумеем показать, что в F-кольце R для всех a, $b\in R$ и всех натуральных чисел n справедливо неравенство

$$n|ab-ba|\leqq a^2+b^2.$$

Это достаточно доказать для л. у. колец в том случае, когда $0<b\leqq a$. Тогда для некоторого целого m будет иметь место равенство $nb=ma+c$, где $0\leqq c<a$, и потому

$$\begin{aligned}n|ab-ba|&=|nab-nba|=|ma^2+ac-ma^2-ca|=\\ &=|ac-ca|\leqq a^2\leqq a^2+b^2.\end{aligned}$$

Для доказательства ассоциативности предположим, что a, b, $c\in R$ — произвольные элементы, а n — натуральное число. Мы покажем, что в коммутативном F-кольце[1]) справедливо неравенство

$$n\,|(ab)c-a(bc)|\leqq 2(|a|^3+|b|^3+|c|^3).$$

Ограничиваясь л. у. кольцами и тем случаем, когда $0<c\leqq b\leqq a$, рассмотрим такие целые m, k, что $nb=$ $=ma+a_1$, $mc=ka+a_2$, где $0\leqq a_i<a$. Тогда

$$n\,|(ab)c-a(bc)|=|m\,[a^2c-a(ac)]+(aa_1)c-a(a_1c)|=$$
$$=|ka^2a+a^2a_2-kaa^2-a(aa_2)+(aa_1)c-a(a_1c)|.$$

Здесь члены, содержащие k, могут быть ввиду коммутативности опущены. Следовательно,

$$n\,|(ab)c-a(bc)|\leqq|a^2a_2-a(aa_2)|+|(aa_1)c-a(a_1c)|\leqq$$
$$\leqq a^3+a^3\leqq 2(a^3+b^3+c^3).$$

Теорема доказана.

Обратимся теперь к простым L-идеалам F-колец. Напомним, что идеал P абстрактного кольца R называется простым, если для идеалов A, B кольца R из $AB\subseteq P$ следует $A\subseteq P$ или $B\subseteq P$, и вполне простым, если $ab\in P$, где a, b — элементы кольца R, влечет $a\in P$ либо $b\in P$. Эти понятия, вообще говоря, различны. Они совпадают в ассоциативных и коммутативных кольцах. Аналогичное положение имеет место в ассоциативных F-кольцах для *простых* L-идеалов, то есть для L-идеалов, являющихся простыми идеалами кольца; более того, справедлива

Теорема 4 (Д. Джонсон [1]). *Для L-идеала P ассоциативного F-кольца R следующие условия эквивалентны:*

(i) *если a, $b\in R$ и $ab\in P$, то либо $a\in P$, либо $b\in P$;*

(ii) *если A, B — идеалы кольца R и $AB\subseteq P$, то или $A\subseteq P$, или $B\subseteq P$;*

(iii) *если I, J — L-идеалы кольца R и $I\cdot J\subseteq P$, то $I\subseteq P$ или $J\subseteq P$;*

(iv) *R/P — л. у. кольцо без делителей нуля.*

Очевидно, что условие (i) влечет (ii), (ii) влечет (iii) и (iv) влечет (i). Поэтому достаточно доказать, что условие (iv) следует из условия (iii). Допустим, что условие (iii) выполнено и предположим противное: пусть R/P не является л. у. Тогда R/P будет подпрямо разложимым F-кольцом, и, следовательно, найдутся два таких L-идеала I, J кольца R, что $I\cap J=P$ и $I\supset P$, $J\supset P$. Но из включения $I\cdot J\subseteq I\cap J$ тогда будет вытекать $I\subseteq P$ или $J\subseteq P$, что противоречиво; таким образом, R/P л. у. В силу условия (iii) л. у. кольцо R/P не может содержать нильпотентных L-идеалов (т. е. выпуклых нильпотентных идеалов), следовательно, ввиду теоремы 6 гл. VIII, R/P не содержит делителей нуля, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что дополнение $R\setminus P$ простого L-идеала P в F-кольце R будет мультипликативной подполугруппой кольца R (либо пусто). Следующий результат вполне аналогичен хорошо известной теореме Крулля коммутативной теории идеалов.

Предложение 5 (Д. Джонсон [1]). *Пусть I — L-идеал, а M — мультипликативная подполугруппа ассоциативного F-кольца R, причем $I\cap M=\varnothing$. Тогда существует простой L-идеал P кольца R, содержащий I и удовлетворяющий условию $P\cap M=\varnothing$.*

В силу леммы Цорна, из предположений следует, что в кольце R существует максимальный непересекающийся с M и содержащий I L-идеал P. Если J и K — L-идеалы кольца R, удовлетворяющие условию $J\cdot K\subseteq P$, то $(J+$ $+P)(K+P)\subseteq P$. Здесь по крайней мере один из идеалов $J+P$ и $K+P$ не пересекается с M, ибо в противном случае P содержало бы элемент из M. В силу максимальности P мы получаем, что $J+P\subseteq P$, либо же $K+P\subseteq P$, т. е. $J\subseteq P$ или $K\subseteq P$. Таким образом, P действительно будет простым L-идеалом.

F-кольца, для которых л. у. кольца R_λ можно выбрать так, чтобы они обладали некоторыми дополнительными свойствами, могут быть описаны как с. у. кольца с нулевым радикалом, где радикал берется в подходящем, зависящем от данного свойства смысле. Радикалы в ассоциативных F-кольцах изучались Пирсом в его статье [2], где развивается общий метод определения радикалов, и Д. Джонсоном [1], который развил теорию строения

---

[1]) Заметим, что, в силу коммутативности, кубы однозначно определены.

F-колец, основанную на F-кольцевом аналоге радикала Джекобсона для абстрактных колец. Здесь мы ограничимся упоминанием следующего важного результата.

Теорема 6 (Пирс [2]). *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы ассоциативное F-кольцо R было о-изоморфно подпрямой сумме л. у. колец без делителей нуля, является отсутствие в R ненулевых нильпотентных элементов.*

Если R — подпрямая сумма указанного вида, то она, очевидно, не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Обратно, пусть F-кольцо R не имеет ненулевых нильпотентных элементов, т. е. из $x \neq 0$ следует, что полугруппа $M = [x^n \mid n = 1, 2, \ldots]$ не содержит 0. Согласно предложению 5, существует простой L-идеал P_x, не содержащий никаких степеней x. Так как пересечение всех P_x, где x пробегает все ненулевые элементы из R, равно 0, R будет o-изоморфно подпрямой сумме F-колец R/P_x, которые, в силу теоремы 4, будут л. у. кольцами без делителей нуля.

Последние три результата показывают, что теория L-идеалов ассоциативных F-колец, по-видимому, имеет некоторое сходство с теорией идеалов коммутативных и ассоциативных колец.

Гофман [3] рассматривал частный случай F-колец, а именно кольца, в которых условие $ab \wedge c = 0$ эквивалентно условию $a \wedge b \wedge c = 0$ для всех положительных a, b, $c \in R$. ⁎ Теория формально действительных F-колец была недавно развита Хенриксеном и Исбеллом [1]. ⁎

3. L-радикал структурно упорядоченных колец

В чистой теории колец определяются разные типы радикалов. В этом разделе мы хотим рассмотреть для с. у. колец аналог радикала, основанного на понятии нильпотентности. Здесь мы должны снова ограничиться ассоциативным случаем.

Для начала определим *сильно нильпотентный* элемент a с. у. кольца R как элемент, для которого существует такое натуральное число n, что

$$x_0 \cdot |a| \cdot x_1 \cdot |a| \cdot x_2 \cdot \ \ldots\ \cdot x_{n-1} \cdot |a| \cdot x_n = 0 \text{ для всех } x_i \in R. \quad (*)$$

Если R коммутативно, то сильная нильпотентность элемента a эквивалентна нильпотентности элемента $|a|$, ибо из условия (*) следует $|a|^{2n+1} = 0$, в то время как из $|a|^n = 0$ следует справедливость условия (*).

Естественно называть L-идеал I кольца R *нильпотентным*, если $I^n = 0$ для некоторого положительного целого n. В силу замечания из п. 1, F), равенство $I^n = 0$ равносильно тому, что $a^n = 0$ для всех элементов a из L-идеала I.

Лемма. *Элемент ассоциативного с. у. кольца R тогда и только тогда будет сильно нильпотентным, когда он содержится в нильпотентном L-идеале из R.*

Если I — L-идеал, удовлетворяющий условию $I^n = 0$, то, очевидно, (*) имеет место для всякого a из I. Обратно, если $a \in R$ удовлетворяет условию (*), то $(R \cdot |a|)^{n+1} = 0$, $(|a| \cdot R)^{n+1} = 0$ и $(R \cdot |a| \cdot R)^n = 0$. Таким образом, $(2n+1)$-я степень суммы элементов вида $k \cdot |a|$, $r_1 \cdot |a|$, $|a| \cdot r_2$, $r_1 \cdot |a| \cdot r_2$ равна 0 (k — рациональное число, r_1, $r_2 \in R$), т. е. L-идеал, порожденный элементом a, нильпотентен.

В качестве непосредственного следствия получается

Теорема 7 (Биркгоф — Пирс [1]). *Множество всех сильно нильпотентных элементов ассоциативного с. у. кольца R совпадает с объединением всех нильпотентных L-идеалов. Таким образом, оно будет L-идеалом N в R.*

Это N будет называться *L-радикалом* кольца R. Вообще говоря, он не будет нильпотентным. Его нильпотентность можно доказать, если наложить одно из условий обрыва цепей.

Теорема 8 (Биркгоф — Пирс [1]). *Если R — ассоциативное с. у. кольцо, удовлетворяющее условию максимальности или минимальности для L-идеалов, то L-радикал N кольца R нильпотентен.*

Если выполнено условие максимальности, то существует максимальный нильпотентный L-идеал M; пусть, например, $M^k = 0$ для некоторого натурального k. Если же I — любой нильпотентный L-идеал, $I^n = 0$, то $(M + I)^{k+n} = 0$, поэтому $M + I$ снова будет нильпотентным L-идеалом.

Так как $M+I$ не может строго содержать идеал M, мы имеем $I \subseteq M$ и потому M будет L-радикалом кольца R.

Предположим, далее, что выполнено условие минимальности для L-идеалов. Существует такое натуральное число k, что $N^k = N^{k+1}$, где N — L-радикал в R. Тогда идеал $M = N^k$ удовлетворяет условию $M^2 = M$. Допустим, что $M \neq 0$. Мы можем выбрать минимальный L-идеал K, обладающий свойствами $K \subseteq M$ и $MKM \neq 0$, а также такой элемент $a \in K$, что $a > 0$ и $MaM \neq 0$. L-идеал J, порожденный множеством MaM, содержится в K и удовлетворяет условию $MJM \neq 0$ (так как $M^2aM^2 \neq 0$), поэтому $J = K$. Мы заключаем, что $a \in J$, т. е. a удовлетворяет неравенству $a \leqq \Sigma |y_i| \cdot a \cdot |z_i|$, где $y_i, z_i \in M$, или же, проще, $a \leqq yaz$, где $y = \Sigma |y_i|$, $z = \Sigma |z_i| \in M$. Но тогда

$$0 < a \leqq yaz \leqq y^2az^2 \leqq \ldots \leqq y^m az^m \leqq \ldots .$$

Здесь $y^m az^m = 0$ для достаточно большого m, так как $y, z \in M$ нильпотентны. Это противоречие доказывает, что $M = 0$, т. е. N нильпотентен.

До сих пор мы рассматривали вообще с. у. кольца. Теперь мы сосредоточим свое внимание на F-кольцах.

Теорема 9 (Биркгоф — Пирс [1], Д. Джонсон [1]). *Множество N_n всех элементов a ассоциативного F-кольца R, удовлетворяющих условию $a^n = 0$ для некоторого фиксированного n, является L-идеалом. L-Радикал N кольца R состоит из всех нильпотентных элементов. N будет пересечением всех простых L-идеалов из R.*

Если R представляется в виде подпрямой суммы л. у. колец, то, очевидно, n-я степень элемента a равна 0 в том и только в том случае, когда равны 0 n-е степени его компонент. Для л. у. колец первые два утверждения уже были доказаны в гл. VIII, п. 3, поэтому они справедливы также и для F-колец. Последнее утверждение может быть проверено при помощи рассуждений теоремы 6.

⁎ Теорема 9а (Хенриксен — Исбелл [1]). *Каждое архимедово F-кольцо R является подпрямой суммой F-кольца с нулевым L-радикалом и нулевого F-кольца.*

По теореме 3 R ассоциативно и коммутативно. Пусть M — множество всех таких элементов $x \in R$, что $|x| \leqq ab$ для некоторых a, $b \in R$. Так как M содержит все произведения и

$$ab + cd \leqq |a||b| + |c||d| \leqq (|a| + |c|)(|b| + |d|),$$

M будет L-идеалом кольца R. Пусть, далее, N обозначает L-радикал в R. Предположим, что $z \in M \cap N$, т. е. $|z| \leqq ab$ для некоторых a, $b \in R$. Пусть a, $b > 0$ и $z^k = 0$ для некоторого целого k. Если $k \geqq 3$, то и $z^{k-1} = 0$. Ибо если в некотором л. у. гомоморфном образе кольца R элемент $u > 0$ удовлетворяет условию $u^k = 0$, то $nu^{k-1} \leqq$ $\leqq u^{k-2}$ для каждого целого n, и потому $n|z|^{k-1} \leqq |z|^{k-2}$ для каждого n. Значит, в силу архимедовости, $|z|^{k-1} = 0$, $z^{k-1} = 0$. Следовательно, квадрат элемента z исчезает, и потому $(n|z|)^2 = 0 < ab \leqq (a+b)^2$. Значит, $n|z| < a+b$ для каждого n, а поэтому $z = 0$. Мы заключаем, что $M \cap N = 0$ и R является подпрямой суммой колец R/N и R/M. Первое имеет, согласно предыдущему результату, нулевой L-радикал, а второе будет ввиду определения идеала M нулевым кольцом. ⁎

Справедлив следующий аналог классической структурной теоремы Веддербарна — Артина.

Теорема 10 (Биркгоф — Пирс [1]). *Ассоциативное F-кольцо с нулевым L-радикалом и условием минимальности для L-идеалов o-изоморфно прямой сумме конечного числа o-простых л. у. колец (которые не будут нильпотентными).*

Согласно теореме 9, получаем, что пересечение всех простых L-идеалов ассоциативного F-кольца R с нулевым L-радикалом будет нулем. В силу условия минимальности существует конечное число простых L-идеалов $P_1, \ldots, P_n$, таких, что $P_1 \cap \ldots \cap P_n = 0$. Значит, кольцо R o-изоморфно подпрямой сумме л. у. колец $R/P_i = R_i$. Они снова удовлетворяют условию минимальности и, следовательно, содержат минимальные L-идеалы. Из теоремы 8 гл. VIII мы заключаем, что кольца R_i будут o-простыми.

Остается проверить, что прямая сумма может быть получена из подпрямой суммы. Предполагая, что все P_i

различны, и используя дистрибутивность структуры L-идеалов, мы получаем, что

$$(P_1 \cap \ldots \cap P_{i-1}) + P_i = (P_1 + P_i) \cap \ldots \cap (P_{i-1} + P_i) = R.$$

Отсюда сразу следует, что R будет прямой суммой колец R_i[1].

Очевидно, нет никаких принципиальных трудностей при перенесении на с. у. кольца других видов радикалов, с большим успехом используемых в теории колец. Следует только добавить требование, чтобы все рассмотренные идеалы были L-идеалами. Однако эти радикалы не приводят, вообще говоря, к структурным теоремам для с. у. колец, за исключением случая F-колец, упомянутых в п. 2, так что мы не будем их рассматривать.

По поводу дальнейших результатов о с. у. кольцах мы отсылаем к Биркгофу—Пирсу [1] и Д. Джонсону [1].

---

[1] Заметим, что P_i являются максимальными L-идеалами в R.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Глава X

ЧАСТИЧНЫЕ ПОРЯДКИ НА ПОЛУГРУППАХ

1. Частично упорядоченные группоиды и полугруппы

Частично упорядоченным группоидом (*ч. у. группоидом*) мы называем множество H, удовлетворяющее условиям:

S1. H — группоид, т. е. H замкнуто относительно умножения.

S2. H — ч. у. множество с отношением $\leqq$.

S3. Если $a \leqq b$, то $ac \leqq bc$ и $ca \leqq cb$ для всех $c \in H$.

Если мы предположим, что умножение ассоциативно, то получим *ч. у. полугруппу*. Мы сохраняем терминологию и обозначения для разных видов частичных порядков, таким образом, значения понятий (например) л. у. группоида или направленной полугруппы очевидны. Быть может, читателю следует напомнить здесь, что существование обратных элементов исключает в ч. у. группах ряд особенностей, которые вполне могут иметь место в ч. у. полугруппах; так, например, ч. у. полугруппа может быть $\vee$-полуструктурой, не будучи структурой, а неравенство $a < b$ совместимо с равенством $ac = bc$ и т. д. Поэтому начнем с новой терминологии.

Ч. у. полугруппа, являющаяся структурой относительно своего частичного порядка, не обязана удовлетворять полезным дистрибутивным законам $c(a \vee b) = ca \vee cb$ и т. д. Мы мало потеряем в общности, если определим, имея в виду приложения, *с. у. группоид* как группоид H, который является структурой, удовлетворяющей условиям

$$(a \vee b)c = ac \vee bc, \quad c(a \vee b) = ca \vee cb$$

для всех a, b, $c \in H$. Если же H — ч. у. группоид и в то же время $\vee$- или $\wedge$-полуструктура относительно своего частичного порядка, то мы будем писать кратко: H является *$\vee$-группоидом* (*$\wedge$-группоидом*).

Если H подчиняется более сильной, чем приведенная выше, системе аксиом, именно если S3 заменяется аксиомой S3*. Если $a < b$, то $ac < bc$ и $ca < cb$ для всех $c \in H$, то мы говорим, что частичный порядок в H *строгий* или же что *H — строгий ч. у. группоид*. Легко доказать, что ч. у. группоид H тогда и только тогда будет строгим, когда он удовлетворяет слабому закону сокращения: из $ac = bc$ (или $ca = cb$) следует $a = b$ или $a \| b$. В случае когда H — л. у. группоид, условие S3* эквивалентно условию S3 вместе с законами сокращения в H.

Ч. у. группоид H будет называться *сильным*, если

из $ac \leqq bc$ (или $ca \leqq cb$) следует $a \leqq b$.

Сильный ч. у. группоид, очевидно, всегда подчиняется законам сокращения и, значит, является строгим. Для л. у. группоидов понятия «строгий» и «сильный» равносильны.

Назовем элемент a ч. у. группоида H *l-положительным*, *r-положительным* или *положительным*, смотря по тому, будут ли для всех $x \in H$ справедливы неравенства $ax \geqq x$, $xa \geqq x$ или же оба вместе; *l-отрицательные*, *r-отрицательные* и *отрицательные* элементы определяются двойственными неравенствами. *Строго l-положительные* и т. д. элементы могут быть определены аналогично при помощи строгих неравенств. Соответствующие множества обозначаются символами P_l, P_r, P, N_l, N_r, N, а в строгом случае $P_l^*, P_r^*, P^*, N_l^*, N_r^*, N^*$. Они будут рассмотрены в п. 3 для случая ч. у. полугрупп.

Ч. у. группоид будет называться *положительно* (*отрицательно*) *упорядоченным*, если все его элементы положительны (отрицательны).

Мы говорим, что ч. у. группоид *H естественно упорядочен*, если он положительно упорядочен и

из $a < b$ следует $ax = ya = b$ для некоторых $x, y \in H$.

Предложение 1 (Накада [1]). *Для того чтобы ч. у. полугруппа S была положительным конусом ч. у. группы G, необходимо и достаточно выполнение условий*

(a) *S — полугруппа с сокращениями (т. е. справедливы оба закона сокращения),*

(b) *S содержит нейтральный элемент,*

(c) *S естественно упорядочена.*

Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности мы проверим условия (iii), (iv) теоремы 4 гл. II. В силу условия (c), элементы $a, b \in S$ удовлетворяют соотношению $ab \geqq a = ae \geqq e$. Следовательно, из $ab = e$ следует $ab = a = e$ и условие (iii) выполнено. Так как для элемента $b \in S$, $b > e$, мы имеем $ab > a$, из условия (c) вытекает $ab = ca$ для некоторого $c \in S$. Значит, $aS \subseteq Sa$ и, в силу симметрии, мы получаем условие (iv). Очевидно, что частичный порядок на S совпадает с порядком, индуцированным частичным порядком группы $\{S\}$ с положительным конусом S.

Частный случай, когда S с. у., был рассмотрен Дюбрейем [2]. Согласно его результату, условия (a)—(c) могут быть объединены в одно: если $a, b \in S$ и $a \leqq b$, то существуют единственное $c \in S$ и единственное $d \in S$, такие, что $b = ac = da$. Разумеется, следует также предположить, что S положительно упорядочено.

Так как мультипликативный группоид ч. у. кольца не будет ч. у. группоидом в указанном выше смысле (S3 выполняется только для положительных элементов), кажется естественным исследовать группоиды и полугруппы, удовлетворяющие только условиям S1 и S2. Это было начато Тамари [1] и продолжено Клиффордом [6]. Клиффорд рассматривает полугруппы, л. у. как множества, причем каждый элемент при умножении на него неравенств либо сохраняет, либо обращает частичный порядок.

2. Примеры

В этом разделе мы дадим некоторые пояснительные примеры ч. у. группоидов и ч. у. полугрупп.

1. Пусть H — (замкнутый или открытый) интервал действительной прямой с обычным отношением порядка. Рассмотрим H как группоид относительно операции образования взвешенных арифметических средних

$$a \circ b = \lambda a + \mu b,$$

где λ, μ — фиксированные действительные числа, удовлетворяющие условиям $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$. Тогда H будет сильным л. у. группоидом.

2. Пусть H снова обозначает интервал действительной прямой, а f — функцию, отображающую $H \times H$ в H, которая не убывает ни по какому переменному. Тогда H,

снабженный функцией f в качестве бинарной операции, будет л. у. группоидом. Он будет сильным группоидом в точности тогда, когда f строго возрастает по обоим переменным.

3[1]). Рассмотрим множество H всех нормальных делителей некоторой группы G. Если «произведение» нормальных делителей $A, B \in H$ определяется как их коммутант $[A, B]$, а $\leqq$ обозначает теоретико-множественное включение, то H становится с. у. группоидом.

4. Мультипликативная полугруппа всех целых положительных чисел будет сильной с. у. полугруппой, если $a \leqq b$ означает $a \mid b$ (делимость). (Это естественная упорядоченность.)

5. В ч. у. кольце R положительный конус R^+ является коммутативной ч. у. полугруппой относительно сложения и ч. у. группоидом относительно умножения. Последний будет строгим тогда и только тогда, когда R^+ не содержит делителей нуля.

6. Пусть S — мультипликативная полугруппа всех идеалов ассоциативного кольца R, и пусть $\leqq$ обозначает включение. Тогда S — с. у. полугруппа.

7. Пусть S — полугруппа всех сохраняющих упорядоченность отображений ч. у. множества T в себя. Положим, что $\alpha \leqq \beta$ $(\alpha, \beta \in S)$, когда $\alpha(a) \leqq \beta(a)$ для всех $a \in T$. Тогда S будет ч. у. полугруппой.

8. $\vee$-эндоморфизмы $\vee$-полуструктуры L образуют $\vee$-полугруппу, если умножение понимается как обычное умножение эндоморфизмов, а объединение $\theta_1 \vee \theta_2$ двух эндоморфизмов определяется при помощи равенства

$$(\theta_1 \vee \theta_2)(x) = \theta_1(x) \vee \theta_2(x).$$

Как обычно проверяются необходимые постулаты.

9[2]). Подмножества A, B, ... полугруппы S относительно операции умножения комплексов и теоретико-множественного включения образуют с. у. полугруппу. Здесь справедливы бесконечные дистрибутивные законы

$$A(\bigcup B_\nu) = \bigcup (AB_\nu) \text{ и } (\bigcup B_\nu)A = \bigcup (B_\nu A),$$

---

[1] Примеры 3, 7 и 8 принадлежат Биркгофу [3].

[2] Этот важный пример был в деталях рассмотрен Дюбрейем [2].

однако аналогичные законы для $\bigcap$, вообще говоря, не верны (имеют место только включения $A(\bigcap B_\nu) \leqq \bigcap (AB_\nu)$, $(\bigcap B_\nu)A \leqq \bigcap (B_\nu A)$).

10. Всякая структура может быть превращена в с. у. полугруппу при помощи введения тривиального (наим. в. г.) умножения

$$ab = ba = a \vee b.$$

11[1]). Мы упомянем следующие действительные интервалы I с обычной упорядоченностью и указанными операциями. Все они — л. у. полугруппы:

(a) $I_1 = (0, 1]$, где $a \circ b = \min(a + b, 1)$,

(b) $I_2 = (0, 1] \bigcup \infty$, где $a \circ b = a + b$, если $a + b \leqq 1$, и $a \circ b = \infty$, если $a + b > 1$,

(c) $I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ или $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ где $a \circ b = \max\left(\frac{1}{2}, ab\right)$.

12[2]). Пусть S — множество всех монотонных функций, отображающих $[0, 1]$ в $[0, 1]$, в котором произведение $f \circ g$ функций f и g определяется посредством равенства $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ для всех x, а неравенство $f \leqq g$ означает, что $f(x) \leqq g(x)$ для всех x. Это с. у. полугруппа.

13. Действительные числа из $[0, 1]$ относительно операции

$$a \circ b = a + b - ab \quad \text{или} \quad a \times b = \frac{a+b}{1+ab}$$

образуют л. у. полугруппу.

3. Положительный и отрицательный конусы

В этом разделе мы будем интересоваться подмножествами $P_l, P_r, P, N_l, \ldots$ и $P_l^*, P_r^*, P^*, \ldots$ ч. у. полугруппы S, определенными в п. 1. Они будут называться соответственно *l-положительным*, ... *l-отрицательным*, ... *конусами* полугруппы S. Здесь мы перечислим их наиболее

---

[1] Примеры (a) и (b) играют важную роль в теории архимедовых л. у. полугрупп (Клиффорд [5]; ср. теорему 2 в гл. XI). Примеры (c) даны Хионом [1]; второй является ненильпотентной полугруппой, все элементы которой нильпотентны.

[2] См. Биркгоф [3] и Дюбрей-Жакотэн — Лесьер — Круазо [1].

важные свойства. Некоторые из них настолько очевидны, что доказательства могут быть опущены.

A) Справедливы следующие соотношения:

$$\text{(a)}\ P_l^*\subseteq P_l,\ \ P_r^*\subseteq P_r,\ \ P^*\subseteq P,\ \ N_l^*\subseteq N_l,\ \ N_r^*\subseteq N_r,\ \ N^*\subseteq N,$$

$$\text{(b)}\ P=P_l\bigcap P_r,\ \ P^*=P_l^*\bigcap P_r^*,\ \ N=N_l\bigcap N_r,\ \ N^*=N_l^*\bigcap N_r^*,$$

$$\text{(c)}\ P_l\bigcap N_l^*=P_l^*\bigcap N_l=P_r\bigcap N_r^*=P_r^*\bigcap N_r=$$
$$=P\bigcap N^*=P^*\bigcap N=\varnothing.$$

B) *Все конусы являются подполугруппами в* S.

C) Всякий положительный конус содержит вместе с элементом a все элементы x из S, удовлетворяющие условию $x\geqq a$. Двойственное утверждение справедливо для отрицательных конусов. Таким образом, *все конусы выпуклы*.

D) P_l^* $[N_l^*]$ *является правым идеалом в* $P_l[N_l]$, а $P_r^*[N_r^*]$ — *левым идеалом в* $P_r[N_r]$, так как если $a\in P_l^*$ и $b\in P_l$, то $bx\geqq x$ и потому $abx\geqq ax>x$ для всех $x\in S$.

E) Имеют место включения

$$P_lP_r\subseteq P,\quad P_l^*P_r^*\subseteq P^*,\quad N_lN_r\subseteq N,\quad N_l^*N_r^*\subseteq N^*.$$

Действительно, если $a\in P_l$, $b\in P_r$, то из $ab\geqq a$ вытекает $abx\geqq ax\geqq x$, а из $ab\geqq b$ — соотношение $xab\geqq xb\geqq x$ для всех $x\in S$. Отсюда мы получаем также

F) P *является левым идеалом в* P_l *и правым идеалом в* P_r. Аналогичные утверждения справедливы для P^*, P_l^*, P_r^* и для отрицательных конусов.

G) $P_l\bigcap N_l$ будет множеством всех левых, а $P_r\bigcap N_r$ — всех правых единиц полугруппы S, а $P\bigcap N$ — единицей e в S, если она существует.

H) Для всех $a\in P_l$, $b\in N_r$ и всех $a\in P_r$, $b\in N_l$ справедливо неравенство $a\geqq b$, так как $a\geqq ab\geqq b$ или $a\geqq ba\geqq b$. Следовательно, $P_l\bigcap N_r$ содержит, самое большее, один элемент c, а $P_r\bigcap N_l$ — элемент d, причем они являются идемпотентами и удовлетворяют условию $xcy=xy=xdy$ для всех x, $y\in S$.

I) Если мы предположим существование в S единицы, получается значительное упрощение.

Предложение 2. *Если* S *содержит единицу* e, *то* $P_l=P_r=P$ *и* $N_l=N_r=N$. *Кроме того, элемент* $a\in S$ *тогда и только тогда принадлежит* $P(N)$, *когда* $a\geqq e$ $(a\leqq e)$.

В самом деле, если $a\in P_l$, то ввиду H) и того, что $e\in N_r$, мы получаем $a\geqq e$. То, что из $a\geqq e$ следует $a\in P$, очевидно.

J) Известно, что каждая полугруппа S может быть вложена в полугруппу с единицей. Для ч. у. полугрупп аналогичный результат формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Ч. у. полугруппа* S *без единицы тогда и только тогда может быть вложена с сохранением упорядоченности,* l- *и* r-*положительных,* l- *и* r-*отрицательных конусов в ч. у. полугруппу* $\bar S$, *содержащую единицу* e, *когда конусы полугруппы* S *удовлетворяют условиям* $P_l=P_r$ *и* $N_l=N_r$. *Минимальные полугруппы* $\bar S$ *о-изоморфны над* S.

Если S погружается описанным образом в полугруппу $\bar S$, то она погружается также и в $S\bigcup e$, так что мы можем допустить, что $\bar S=S\bigcup e$. Необходимость сразу следует из предложения 2, так как конусы полугруппы $\bar S$ — это конусы полугруппы S, к которым добавлено e. Обратно, пусть указанное условие выполняется. Определим новые отношения порядка на полугруппе $S\bigcup e=\bar S$ следующим образом[1]: $a>e$ и $b<e$ для всех $a\in P$ и $b\in N$ (что обязательно должно иметь место в $\bar S$ ввиду H)). Эти новые отношения ни при помощи транзитивности, ни при умножении на элементы из S не дают новых отношений порядка между элементами из S, поэтому полугруппа $\bar S$ имеет указанный вид. o-Изоморфизм любых двух полугрупп $S\bigcup e$ следует из того, что $a>e$ $(a<e)$ в $S\bigcup e$ тогда и только тогда, когда $a\in P$ $(a\in N)$.

K) Пусть $a\in P_l\bigcup P_r$. Тогда либо

$$a<a^2<\ldots<a^n<a^{n+1}<\ldots,\ \text{либо}$$
$$a<a^2<\ldots<a^n=a^{n+1}=\ldots.$$

Если $a\in P_l^*\bigcup P_r^*$, то может иметь место только первая альтернатива. Это верно, так как $aa^k\geqq a^k$, либо

---

[1] P и N обозначают соответственно положительный и отрицательный конусы из S

$a^k a \geqq a^k$ для каждого k, и если $a \in P_l^* \bigcup P_r^*$, неравенства будут строгими. Если же $a \in N_l \bigcup N_r$, то $a > a^2 > \ldots \ldots > a^n > a^{n+1} > \ldots$ или $a > a^2 > \ldots > a^n = a^{n+1} = \ldots$.

L) Множество P_l обладает следующим свойством: если a, $b \in P_l$ и ab — левая единица, то как a, так и b будут левыми единицами. Из $bx \geqq x$ следует $x = abx \geqq ax$, откуда $ax = x$ для всех $x \in S$. Значит, $a \in P_l \bigcap N_l$ и потому $b = ab \in P_l \bigcap N_l$. Аналогичные свойства справедливы для P_r, P и N_l, N_r, N.

M) Если S — полугруппа с сокращениями, то

$$P_l \setminus P_l^* = P_r \setminus P_r^* = P \setminus P^* = N_l \setminus N_l^* = N_r \setminus N_r^* = N \setminus N^*;$$

это множество состоит из одной единицы e полугруппы S, если она существует, и пусто в противном случае. В самом деле, пусть, например, $a \in P_l \setminus P_l^*$; тогда $ax_0 = x_0$ для некоторого $x_0 \in S$ и потому $yax_0 = yx_0$, $ya = y$ для всех $y \in S$. Таким образом, a будет правой и, аналогично, левой единицей в S, поэтому $a = e$.

N) Пусть теперь S — сильная полугруппа; $a \in P_l^*$ ($a \in P_r^*$) тогда и только тогда, когда $a < a^2$; $b \in N_l^*$ ($b \in N_r^*$) тогда и только тогда, когда $b^2 < b$. В силу K), в доказательстве нуждается только достаточность. Но она получается сразу, так как из $a < a^2$ следует $ax < a^2x$, откуда $x < ax$ для всех $x \in S$, $a \in P_l^*$. В частности, мы получаем $P_l = P_r = P$ и $N_l = N_r = N$. Аналогичные соображения применимы для доказательства свойства

O) В сильной ч. у. полугруппе S элемент $a \in P_l^*$ ($a \in P_r^*$) тогда и только тогда, когда существует такое $x_0 \in S$, что $ax_0 > x_0$ или $x_0 a > x_0$; для N_l^* и N_r^* справедливо двойственное утверждение.

P) Для строгой л. у. полугруппы S справедливо соотношение $S = P \bigcup N$, так как неравенства $ax_0 > x_0$ и $x_1 a \leqq x_1$ (для некоторых x_0, $x_1 \in S$) приводят к противоречивым неравенствам $x_1 a x_0 > x_1 x_0$, $x_1 a x_0 \leqq x_1 x_0$.

4. Полугруппы частных

Основное отличие теории ч. у. полугрупп от теорий ч. у. групп и колец вытекает из того, что в последних множества положительных элементов характеризуют частичные порядки, тогда как в случае полугрупп это неверно.

В действительности результаты глав III и VII не имеют аналогов для полугрупп.

Существует, однако, очевидный аналог метода упорядочения кольца частных. Он показывает, как продолжить линейный порядок полугруппы S до порядка ее группы частных G, когда G существует. Результаты, полученные там, легко распространяются на настоящий случай, и потому мы начнем с более общего случая.

Пусть S — полугруппа и T — полугруппа, содержащая S. Предположим, что для каждого $\alpha \in T \setminus S$ существуют в S такие элементы a и b, что a сократим слева[1]), b сократим справа в T и $a\alpha$, αb лежат в S. Тогда мы будем говорить, что *T — полугруппа частных полугруппы S.*

Теорема 4 (Фукс [11]). *Линейный порядок полугруппы S может быть одним и только одним способом продолжен до линейного порядка ее полугруппы частных T.*

Если T строго содержит S, то существуют элементы a, $b \in S$, являющиеся соответственно сократимыми слева и справа в T, поэтому в данном выше определении случай $\alpha \in S$ может не исключаться. Если теперь α, $\beta \in T$ ($\alpha \neq \beta$) и если a и b — такие сократимые слева и справа соответственно элементы, что $a\alpha$, $\beta b \in S$, то $a\alpha b$ и $a\beta b$ — различные элементы из S, и мы определяем порядок $\alpha \gtrless \beta$ в соответствии с неравенством $a\alpha b \gtrless a\beta b$ в S. Для элементов из S это определение, очевидно, дает порядок, совпадающий с заданным в S. Определение не зависит от выбора a и b, ибо если a' и b' — снова сократимые слева и справа элементы и $a'\alpha$, $\beta b' \in S$, то, беря сократимый слева и сократимый справа элементы a'', $b'' \in S$, такие, что $a''(a'\beta)$, $(\alpha b)b'' \in S$, мы получаем, например, из $a\alpha b < a\beta b$ последовательно $a\alpha bb'' < a\beta bb''$, $\alpha bb'' < \beta bb''$, $a''a'\alpha bb'' < a''a'\beta bb''$, $a''a'\alpha < a''a'\beta$, $a''a'\alpha b' < a''a'\beta b'$, $a'\alpha b' < a'\beta b'$. Аналогичные рассуждения применимы, если a' и b' определяются так, чтобы $a'\beta$, $\alpha b' \in S$. Транзитивность отношения $<$ доказывается аналогично при помощи непосредственных вычислений. Наконец, мы покажем, что из $\alpha \leqq \beta$ следует $\gamma\alpha \leqq \gamma\beta$ для всех $\gamma \in T$. Если a, b, b'' определены как ранее и $c \in S$ — такой сократимый слева элемент, что

---

[1]) a называется сократимым слева, если из $ax = ay$ следует $x = y$.

$c\gamma \in S$, то мы получаем последовательно $a\alpha b \leqq a\beta b$, $a\alpha bb'' \leqq \leqq a\beta bb''$, $\alpha bb'' \leqq \beta bb''$, $c\gamma\alpha bb'' \leqq c\gamma\beta bb''$. Откуда, умножая на подходящие элементы, мы приходим к неравенству $\gamma\alpha \leqq \gamma\beta$. Единственность очевидна.

В частности, мы получаем

Следствие 5 (Конрад [11]). *Пусть S — л. у. полугруппа с сокращениями, и пусть каждая пара элементов a, b из S обладает общим правым кратным $ax = by$. Тогда S может быть так вложена в G — л. у. группу правых частных $g = ab^{-1}$ (a, $b \in S$), что*

$$g > e \text{ тогда и только тогда, когда } a > b \text{ в } S.$$

Группа G единственна с точностью до о-изоморфизма.

Чисто алгебраическая часть этого результата хорошо известна, так что существование группы частных G полугруппы S может быть принято на веру. Остальная часть непосредственно следует из теоремы 4[1].

Легко видеть, что S тогда и только тогда содержится в положительном конусе P группы G, когда S положительно упорядочена, и $S = P$ или $S = P \setminus e$ тогда и только тогда, когда S естественно упорядочена (ср. предложение 1).

Заметим, что если полугруппа с сокращениями S либо естественно упорядочена, либо из $a < b$ в S следует $b = ax$ для некоторого $x \in S$, то она удовлетворяет предположениям следствия 5 и потому обладает л. у. группой частных. В самом деле, $a(xy) = by$ для всех $y \in S$.

Следствие 6 (Тамари [1], Алимов [1], Накада [1]). *Коммутативная л. у. полугруппа S с сокращениями погружается в л. у. абелеву группу G, единственную с точностью до о-изоморфизма, так, что каждый элемент из G будет частным двух элементов из S.*

Классический результат А. И. Мальцева устанавливает, что не всякая полугруппа с сокращениями может быть вложена в группу. Чехата [2] и Виноградов [3] одновременно и независимо друг от друга рассматривали соответствующие вопросы для л. у. полугрупп. Они доказали, что пример, данный Мальцевым, может быть линейно упорядочен, поэтому существуют л. у. полугруппы с сокращениями, которые не могут быть вложены в группы.

---

[1] * См. сноску [1] на стр. 171. *

Глава XI

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

1. Определения и предварительные леммы

Мы начнем теорию л. у. полугрупп с систематического изложения архимедова случая. Естественно ожидать, что более глубокие результаты могут быть получены только при наложении на полугруппы некоторых дополнительных постулатов, подобных естественной упорядоченности или сократимости. Основные результаты находятся в п. 2 и 3.

Начнем с двух основных определений. Л. у. полугруппа S будет называться *архимедовой*, если

1) из того, что a, $b \in P$ и $a^n < b$ для всех целых положительных n, вытекает $a = e$ (единица) и

2) из того, что a, $b \in N$ и $a^n > b$ для всех $n > 0$, следует $a = e$.

Здесь и в дальнейшем символы $P(P^*)$ и $N(N^*)$ обозначают соответственно (строго) положительный и отрицательный конусы в S.

Говорят, что два элемента a, b из S образуют *аномальную пару*[1], если

$$a^n < b^{n+1}, \quad b^n < a^{n+1} \text{ для всех } n > 0,$$

или

$$a^n > b^{n+1}, \quad b^n > a^{n+1} \text{ для всех } n > 0.$$

Ясно, что первая альтернатива может иметь место, если a, $b \in P$, а вторая — если a, $b \in N$.

Следующие три леммы носят главным образом технический характер.

---

[1] По поводу этого понятия см. Алимов [1].

Лемма A. *Пусть S — л. у. полугруппа, a, $b \in P$ и $ab \leqq ba$. Тогда*

$$a^nb^n \leqq (ab)^n \leqq (ba)^n \leqq b^na^n, \qquad (1)$$

$$a^nb^m \leqq b^ma^n \qquad (2)$$

для всех натуральных чисел n, m. Если же, кроме того, S архимедова, то для каждого n

$$(ba)^n \leqq a^{n+1}b^n \leqq b^na^{n+1} \leqq (ab)^{n+1}. \qquad (3)$$

При $n=1$ свойство (1) выполнено тривиально. Продолжая по индукции, мы предполагаем, что (1) справедливо для $n-1$. Тогда $a^nb^n = a(a^{n-1}b^{n-1})b \leqq a(ba)^{n-1}b = (ab)^n$ и аналогично $(ba)^n \leqq b^na^n$. Неравенство (2) получается с помощью такой же индукции. Чтобы доказать (3), допустим, что S — архимедова полугруппа и $a \neq e$. Определим целое число $k = k(n)$ так, чтобы удовлетворялось неравенство $a^{k-1} \leqq b^n \leqq a^k$. Мы получаем $(ba)^n \leqq b^na^n \leqq a^{k+n} \leqq a^{n+1}b^n$ и аналогично для последнего неравенства в (3).

Следующая лемма описывает связь между двумя определенными выше понятиями.

Лемма B[1]. *Пусть S — л. у. полугруппа с сокращениями. Если S не имеет аномальных пар, то она архимедова. Если же S архимедова и естественно упорядочена, то она не содержит аномальных пар.*

Пусть элементы a, $b \in P$ удовлетворяют неравенству $a^n < b$ для всех $n > 0$ и $a \neq e$. Если $ab \leqq ba$, то $b^n < (ba)^n < a(ba)^nb = (ab)^{n+1}$ и вследствие (1) $(ab)^n \leqq b^na^n < b^{n+1}$. Таким образом, b и ab образуют аномальную пару. Если $ba \leqq ab$, то b и ba дают такую пару. Случай, когда a, $b \in N$, симметричен.

Допустим, что S — архимедова естественно упорядоченная полугруппа. Если $a < b$ в S, то существуют такие элементы c, $d \in S$, что $b = ca = ad$. Пусть, например, $c \geqq d$. Тогда $ac \geqq ca$ и из (1) вытекает $b^n = (ca)^n \geqq c^na^n$. Целое число n может быть выбрано так, что $c^n > a$, а тогда мы приходим к неравенству $b^n > a^{n+1}$. Следовательно, пара a, b не может быть аномальной.

---

[1] Первая часть этой леммы принадлежит Алимову [1].

Легко показать, что архимедова л. у. полугруппа с сокращениями может содержать аномальные пары даже тогда, когда предполагается коммутативность[1]. Пусть полугруппа S состоит из всех элементов вида a^nb^m, где n, $m \geqq 0$, с умножением

$$a^nb^m \cdot a^kb^l = a^{n+k}b^{m+l}.$$

Положим, по определению, $a^nb^m < a^kb^l$, если $n+m < k+l$ или $n+m = k+l$ и $n > k$. Пара a, b аномальная.

Лемма C. (Клиффорд [5]). *Пусть S — архимедова естественно л. у. полугруппа. Если S не является полугруппой с сокращениями, то*

(a) *она содержит максимальный элемент u,*

(b) *для каждого $a \in S$ $(a \neq e)$ существует такое натуральное число k, что $a^k = u$,*

(c) *из $ab = ac \neq u$ (или $ba = ca \neq u$) вытекает $b = c$.*

По предположению существуют три элемента a, b, $c \in S$, такие, что $ab = ac$ и $b < c$ (или $ba = ca$ и $b < c$). Так как $c = bx$ для некоторого $x \in S$ $(x \neq e)$, элемент $u = ab$ удовлетворяет соотношению $u = ux$. Если бы существовал элемент $y \in S$, больший чем u, то, выбирая n так, чтобы выполнялось неравенство $x^n \geqq y$, мы имели бы противоречие $u = ux^n \geqq uy \geqq y > u$. Это доказывает сразу (a) и (c). В силу архимедовости из $a \neq e$ следует $a^k \geqq u$ для некоторого k и потому $a^k = u$, что и требовалось доказать.

Заметим кстати, что если $a < b \neq u$ в полугруппе S леммы C, то существует ровно один элемент $c \in S$, удовлетворяющий условию $b = ac$.

2. Архимедовы естественно линейно упорядоченные полугруппы

Если архимедовы л. у. полугруппы предполагаются естественно упорядоченными, то они могут быть описаны довольно точно. На это также можно было бы рассчитывать в случае полугрупп с сокращениями, когда л. у. полугруппы на самом деле являются «половинами» л. у. групп, по крайней мере если существуют группы частных, но удивительно, что это имеет место даже для полугрупп без сокращения.

---

[1] См. Клиффорд [7].

Сначала мы докажем важную теорему о коммутативности.

Теорема 1 (Гёльдер [1], Фукс [10]). *Архимедова естественно л. у. полугруппа коммутативна*[1].

Удобства ради мы, не теряя общности, отбросим единицу полугруппы, если она существует.

Допустим сначала, что полугруппа S обладает минимальным элементом a. Пусть, кроме того, $b \in S$ и $b \neq a$. Тогда существуют такое целое число $k \geqq 1$, что $a^k < b \leqq \leqq a^{k+1}$, и элемент $c \in S$, $c \geqq a$, удовлетворяющий условию $b = a^k c$. Тогда $a^{k+1} = a^k a \leqq a^k c = b \leqq a^{k+1}$. Следовательно, элемент b является степенью элемента a и полугруппа S состоит из положительных степеней элемента a.

Допустим теперь, что S не обладает минимальным элементом[2]. Тогда для каждого $x \in S$ существует такой элемент $z \in S$, что $z^2 \leqq x$; в самом деле, если $y < x$ и $x = yy_0$, то $z = \min(y, y_0)$ будет таким элементом. Доказывая от противного, предположим, что $ba < ab$ для некоторых $a, b \in S$. Пусть сначала $ab < u$. Если $ab = bax$ и $z^2 \leqq x$, $z \leqq a$, $z \leqq b$, то мы найдем целые числа m, n, удовлетворяющие условиям $z^m \leqq a < z^{m+1}$, $z^n \leqq b < z^{n+1}$. Но они приводят к неравенствам $ab = bax \geqq z^{m+n+2} > ab$ (в случае полугрупп без сокращения неравенство строгое ввиду леммы C), что противоречиво. Пусть, далее, $ab = u$ и, например, $a < b$. Тогда $a^k < b \leqq a^{k+1}$ для некоторого $k \geqq 1$. Следовательно, $b = a^k c$ для определенного $c \leqq b$ и, так как $ac \leqq b$ и $ca \leqq ba < ab = u$, мы можем применить уже рассмотренный случай, чтобы заключить, что элементы a и c коммутируют. Это снова противоречиво, ибо

---

[1] ⁎ Луговский [2] распространил этот результат на тот случай, когда полугруппа содержит также отрицательные элементы. Другая теорема о коммутативности принадлежит Шику [7]; он пользовался иными формами свойства архимедовости и естественного порядка. ⁎

[2] Эта часть доказательства аналогична доказательству теоремы 1 гл. IV. Однако возникают некоторые осложнения, так как мы не можем пользоваться рассуждениями, основанными на «обширности» множества элементов; вместо этого мы оперируем «малым» числом элементов, имеющихся в нашем распоряжении.

тогда элементы a и b также перестановочны. Следовательно, S — коммутативная полугруппа.

Следующий результат характеризует архимедовы л. у. полугруппы, когда они естественно упорядочены.

Теорема 2. (Гёльдер [1], Клиффорд [5]). *Пусть S — архимедова естественно л. у. полугруппа. Тогда S о-изоморфна подполугруппе одной из следующих л. у. полугрупп:*

P — аддитивная полугруппа всех неотрицательных действительных чисел;

P_1 — действительные числа интервала $[0, 1]$ *с обычной упорядоченностью и операцией* $ab = \min(a + b, 1)$;

P_2 — действительные числа в $[0,1]$ *и символ* ∞ *с обычной упорядоченностью и операцией* $ab = a + b$, если $a + b \leqq 1$, *и* $ab = \infty$, *если* $a + b > 1$.

Первый случай имеет место тогда и только тогда, когда S — полугруппа с сокращениями.

Из предыдущей теоремы мы знаем, что S обязательно коммутативна.

Пусть S порождается единственным элементом a. Тогда ее элементами будут $(e <) a < a^2 < \ldots < a^n < \ldots$ или же

$$(e <) a < a^2 < \ldots < a^n = a^{n+1}.$$

Отображение

$$a^k \longrightarrow k \text{ или } a^k \longrightarrow \frac{k}{n}$$

о-изоморфно погружает подгруппу S в P или же в P_1. Если же[1] S не порождается единственным элементом, то мы снова отбрасываем единицу полугруппы S, если она существует. Для каждого $x \in S$ существует такой элемент $z \in S$, что $z^2 \leqq x$ (ср. доказательство предыдущей теоремы), а также, следовательно, если дано положительное целое число t, то существует такой элемент $z \in S$, что $z^t \leqq x$. Теперь мы выбираем элемент $a \in S$, меньший, чем максимальный элемент u из S, если S обладает максимальным элементом, и произвольный в противном случае, и следующим образом[2] определяем

---

[1] Следующее доказательство см. Фукс [10]. Ср. сноску [2] на стр. 236.

[2] f — символический логарифм по основанию a.

функцию f на полугруппе S. Для каждого $b \in S$, $b < u$, мы образуем два класса пар положительных целых чисел:

$$L_b = [(m,\ n) \mid a \leqq x^n \text{ и } x^m \leqq b \text{ для некоторого } x \in S]$$

и

$$U_b = [(k,\ l) \mid b \leqq y^k \text{ и } y^l \leqq a \text{ для некоторого } y \in S].$$

Архимедов характер полугруппы S гарантирует нам, что ни L_b, ни U_b не пусто. Далее мы покажем, что

$$\frac{m}{n} \leqq \frac{k}{l} \text{ для всех } (m,\ n) \in L_b \text{ и } (k,\ l) \in U_b. \ (*)$$

Для каждого большого t мы можем найти такое $z \in S$, что $z^t \leqq \min(x,\ y)$. Значит, неравенства $r \geqq t$ и $s \geqq t$ справедливы для целых чисел r, s, определенных соотношениями $z^r \leqq x < z^{r+1}$, $z^s \leqq y < z^{s+1}$. Следовательно,

$$z^{rm} \leqq b < z^{(s+1)\,k} \text{ и } z^{sl} \leqq a < z^{(r+1)\,n},$$

откуда $rm < (s+1)k$ и $sl < (r+1)n$. Мы заключаем, что неравенство

$$\frac{m}{n} < \left(1 + \frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{1}{s}\right)\frac{k}{l}$$

справедливо для как угодно больших r, s, поэтому условие (*) выполнено. С другой стороны, аналогичные рассуждения показывают, что для каждого большого $t > 0$ существуют такие r, $s \geqq t$, что $(s,\ r+1) \in L_b$ и $(s+1,\ r) \in U_b$. Так как при возрастании t разность

$$\frac{s+1}{r} - \frac{s}{r+1} \rightarrow 0,$$

отсюда следует, что существует одно и только одно действительное число β, такое, что

$$\frac{m}{n} \leqq \beta \leqq \frac{k}{l} \text{ для всех } (m,\ n) \in L_b \text{ и } (k,\ l) \in U_b.$$

Положим $f(b) = \beta$, тогда $f(a) = 1$.

Не составляет труда доказать, что функция f, отображающая $S \setminus u$ на действительную ось, изотонна и удовлетворяет неравенству $f(b) > 0$ для всех $b \in S \setminus u$. Более того, мы имеем $f(bc) = f(b) + f(c)$ всякий раз, когда $bc < u$, что можно доказать, используя достаточно малые элементы $z \in S$. Значит, $f(b) = f(c)$ только тогда, когда $b = c$.

Если S — подгруппа с сокращениями, то она не содержит максимального элемента и отображение f будет o-изоморфизмом полугруппы S в P. Если же S не является полугруппой с сокращениями, то ввиду леммы С она содержит максимальный элемент u. Множество значений $f(b)$ (для всех $b \in S \setminus u$) ограничено: если $a^k = u$, то k будет верхней гранью. Поэтому существует наименьшее действительное число α, такое, что $f(b) \leqq \alpha$ для всех $b \in S \setminus u$. Если не существует такого $c \in S \setminus u$, что $f(c) = \alpha$, то полагаем $f(u) = \alpha$, если же такое c существует, то $f(u) = \infty$. Функция

$$g(b) = \frac{1}{\alpha} f(b),$$

очевидно, будет o-изоморфизмом S в P_1 или P_2. Этим завершается доказательство.

Легко установить, что любые два o-изоморфизма полугруппы S в P отличаются просто положительным действительным множителем, тогда как o-изоморфизмы в P_1 или P_2 обязательно идентичны.

Следствие 3 (Хантингтон [1], [2]). *Архимедова естественно л. у. полугруппа с сокращениями S, обладающая наименьшим элементом, но не имеющая единицы, o-изоморфна аддитивной полугруппе натуральных чисел.*

Наименьший элемент a полугруппы S удовлетворяет неравенствам $a < a^2 < \ldots < a^n < \ldots$. Если $a^n < x \leqq a^{n+1}$ для некоторого $x \in S$, то $x = ya^n$ для элемента $y \in S$, $y \leqq a$, откуда $x = a^{n+1}$ и полугруппа S состоит из степеней элемента a.

3. Подполугруппы группы действительных чисел

Задачей, к решению которой мы должны обратиться, является описание с помощью простых условий тех л. у. полугрупп, которые можно o-изоморфно погрузить в аддитивную группу всех действительных чисел. Следующая теорема показывает, при каких условиях это возможно.

Теорема 4 (Алимов [1]). *Л. у. полугруппа S тогда и только тогда о-изоморфна подполугруппе аддитивной группы действительных чисел, когда она удовлетворяет условиям:*

(a) *S не содержит аномальных пар,*

(b) *S — полугруппа с сокращениями.*

Очевидно, что подполугруппа действительной группы удовлетворяет обоим условиям (a) и (b), так что мы можем перейти непосредственно к доказательству достаточности. Предполагая, что S — л. у. полугруппа, удовлетворяющая условиям (a) и (b), мы поочередно получаем:

1°. Полугруппа S архимедова ввиду леммы B, п. 1.

2°. Полугруппа S коммутативна. Допустим сначала, что $a, b \in P^*$, и, доказывая от противного, положим $ab < ba$. Тогда

$$(ab)^n < (ba)^{n+1}, \quad (ba)^n < a(ba)^n b = (ab)^{n+1}.$$

Значит, элементы ab и ba образуют аномальную пару, что противоречит условию (a). Поэтому $ab = ba$. Если $a, b \in N^*$, то доказательство равенства $ab = ba$ аналогично. Наконец, положим, что $a \in P^*$, $b \in N^*$. Если $ab \in P$, то ввиду уже доказанного $a(ab) = (ab)a$, откуда условие (b) влечет равенство $ab = ba$. Если же $ab \in N$, то из $b(ab) = (ab)b$ вытекает $ba = ab$.

3°. Группа частных G полугруппы S архимедова. Из следствия 6 гл. X мы знаем, что группу G можно линейно упорядочить. Покажем сперва, что если P^* непусто, то элементы из G могут быть записаны в виде ab^{-1}, где $a, b \in P$. А это будет сразу следовать, если мы сумеем показать, что для каждого $x \in N^*$ существует такой элемент $y \in P$, что $xy \in P$. Если бы для $x \in N^*$ не существовало такого элемента $y \in P$, то включение $xy^n \in N^*$ было бы справедливо при $n = 1, 2, \ldots$ для всех $y \in P^*$. И так как

$$(xy)^n > x^n > x^{n+1}, \quad x^n > x^n(xy^{n+1}) = (xy)^{n+1},$$

пара xy, x была бы аномальной в противоречие с условием (a). Далее, если группа G неархимедова, то мы можем найти такие элементы $a, b, c, d \in S$, лежащие все одновременно в P или в N, что $c < a$, $d < b$ и $(ac^{-1})^n < < bd^{-1}$ для каждого n. Если все они лежат в P, то пара bc, ba аномальная, ибо

$$(bc)^n < (ba)^{n+1}, \quad (ba)^n = b^n a^n < b^{n+1} d^{-1} c^n \leqq (bc)^{n+1},$$

тогда как если все эти элементы принадлежат N, то элементы ad и cd образуют аномальную пару

$$(ad)^n > (cd)^{n+1}, \quad (cd)^n > a^n b^{-1} d^{n+1} \geqq (ad)^{n+1}.$$

Таким образом, как и утверждалось, группа G архимедова.

Теперь легко завершить доказательство теоремы. Полугруппа S обладает группой частных, которая будет архимедовой л. у. группой. Доказательство оканчивается применением гёльдеровской теоремы 1 гл. IV.

Если мы ограничимся положительно (или отрицательно) упорядоченными полугруппами, то довольно сильное условие быть полугруппой с сокращениями можно заменить двумя более слабыми.

Теорема 5 (Фукс [10]). *Для того чтобы положительно л. у. полугруппа S была о-изоморфна подполугруппе действительной группы, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

(a) *S не содержит аномальных пар,*

(b) *S архимедова,*

(c) *S не содержит максимального элемента, если только она не состоит из одного элемента.*

Здесь опять нуждается в проверке только достаточность. Предполагая выполненными условия (a), (b) (c), мы последовательно получаем:

1°. Если $a, b \in S$ и $a \neq e$, то $ab > b$. Положим, что $c > b$, и выберем n настолько большим, чтобы имело место неравенство $a^n \geqq c$. Тогда из равенства $ab = b$ следовало бы $a^n b = b$, тогда как $a^n b \geqq a^n \geqq c > b$, что противоречиво. Поэтому если $a \neq e$, то $a \in P^*$.

2°. Полугруппа S коммутативна. Если $ab \neq ba$ для $a, b \in P^*$, то $(ba)^n < a(ba)^n b = (ab)^{n+1}$ и $(ab)^n < (ba)^{n+1}$ для всех $n > 0$, что противоречит условию (a).

3°. S — полугруппа с сокращениями. Допустим, что $ab = = ac$ и $b < c$. Простая индукция с использованием коммутативности показывает, что $ab^n = ac^n$ для всех $n > 0$. Тогда, в силу 1°, $ac^n < ac^{n+1} = ab^{n+1}$ и, значит, $c^n < b^{n+1}$

для всех n. Очевидно, что $b^n \leqq c^n < c^{n+1}$. Условие (a) показывает, что предположение противоречиво, и потому S — полугруппа с сокращениями.

Требуемое заключение является теперь непосредственным следствием теоремы 4.

4. Архимедовы полугруппы с аномальными парами

До сих пор мы рассматривали архимедовы л. у. полугруппы, подчиненные либо условию отсутствия аномальных пар, либо условию естественности порядка. Без любого из этих предположений мы можем доказать только довольно слабые утверждения.

Допустим, что S — архимедова л. у. полугруппа, и предположим, что она положительно упорядочена.

Если $a < b < c$ и элементы a, c образуют аномальную пару, то пары a, b и b, c также будут аномальными. Обратное тоже верно: если a, b и b, c — аномальные пары, то аномальной будет и пара a, c, так как если $a^{n+1} \leqq c^n$ для некоторого n, то $a^{2n+2} \leqq c^{2n} < b^{2n+1}$ в противоречие с неравенством $b^{2n+1} < a^{2n+2}$. Мы заключаем, что полугруппа S распадается на такие непересекающиеся интервалы I_λ (некоторые из них могут стягиваться в один элемент), что два различных элемента в точности тогда образуют аномальную пару, когда они принадлежат одному и тому же интервалу.

Если элементы a, b образуют аномальную пару, то для всех $c \in S$ аномальными парами будут ac, bc и ca, cb при условии, что S — полугруппа с сокращениями. В самом деле, если $a < b$, то $ac < bc$, откуда $(ac)^n < (bc)^{n+1}$ для всех n, и из условий (1) и (3) леммы A, п. 1, мы получаем:

1) если $ac \leqq ca$ и $bc \leqq cb$, то
$$(bc)^n \leqq c^n b^n < c^n a^{n+1} \leqq (ac)^{n+1};$$
2) если $ac \leqq ca$ и $cb \leqq bc$, то
$$(bc)^n \leqq b^n c^n < a^{n+1} c^n \leqq (ac)^{n+1};$$
3) если $ca \leqq ac$ и $bc \leqq cb$, то
$$(bc)^n \leqq c^n b^n < c^n a^{n+1} \leqq c^{n+1} a^{n+1} \leqq (ac)^{n+1};$$

4) если $ca \leqq ac$ и $cb \leqq bc$, то
$$(bc)^n \leqq c^{n+1} b^n < c^{n+1} a^{n+1} \leqq (ac)^{n+1}$$

для всякого n. Аналогичные соображения приложимы и ко второй паре. Мы заключаем, что подразделение полугруппы S на интервалы I_λ будет допустимым разбиением γ. Легко видеть, что факторполугруппа $\overline{S} = S/\gamma$ будет л. у. относительно очевидного порядка. Полугруппа $\overline{S}$ не обладает аномальными парами, ибо если бы пара $\overline{a}$, $\overline{b}$ была таковой, то элементы $a \in \overline{a}$ и $b \in \overline{b}$ образовывали бы аномальную пару в S. Отсюда сразу следует, что $\overline{S}$ снова будет полугруппой с сокращениями. Поэтому ввиду предыдущего раздела справедлива

Теорема 6 (Хион [3]). *Пусть S — л. у. полугруппа с сокращениями, положительно упорядоченная и архимедова. Тогда существует такой o-гомоморфизм полугруппы S в аддитивную полугруппу неотрицательных действительных чисел, что два различных элемента из S тогда и только тогда имеют один и тот же образ, когда они образуют аномальную пару.*

Этот результат ничего не говорит о строении интервалов I_λ. Хион [3] показал, что таким интервалом I_λ может оказаться каждое л. у. множество.

5. Архимедовы классы

Теперь мы будем рассматривать архимедовы классы л. у. полугрупп S. Элементы a, $b \in S$ называются *архимедовски эквивалентными* (обозначение $a \sim b$), если для некоторого целого положительного числа n имеет место одна из следующих четырех возможностей:

$$a \leqq b \leqq a^n, \quad b \leqq a \leqq b^n, \quad a^n \leqq b \leqq a, \quad b^n \leqq a \leqq b.$$

Первые два случая могут иметь место, если a, $b \in P$, другие же два — если a, $b \in N$. То, что это действительно будет отношением эквивалентности между элементами из S, проверяется обычным образом. Следовательно, элементы полугруппы S распадаются на попарно не пересекающиеся *архимедовы классы*. Класс, содержащий элемент a, будет обозначаться через $\varkappa(a)$. Ясно, что полугруппа S тогда и только тогда будет архимедовой, когда $\varkappa(a)=\varkappa(b)$ для всех a, $b \in P^*$ и всех a, $b \in N^*$.

Предложение 7 (Хион [3]). *Подразделение л. у. полугруппы S на архимедовы классы является разбиением S на попарно не пересекающиеся выпуклые подполугруппы. Каждое разбиение S на попарно не пересекающиеся выпуклые подполугруппы может быть продолжено до разбиения на архимедовы классы.*

Выпуклость архимедовых классов легко показать. То, что классы будут подполугруппами, также легко видеть; в первом случае, например, из $a \leqq b \leqq a^n$ вытекает $a \leqq ab \leqq a^{n+1}$ и $a \leqq ba \leqq a^{n+1}$. Так как из $a \sim b$ следует, что либо выпуклая подполугруппа, порожденная элементом a, содержит b или же, наоборот, элементы a и b не могут принадлежать непересекающимся выпуклым подполугруппам из S.

Случай положительно упорядоченных полугрупп заслуживает особого внимания.

Теорема 8 (Хион [3]). *Пусть л. у. полугруппа S положительно упорядочена. Архимедовские классы полугруппы S образуют л. у. полугруппу $\overline{S}$ относительно умножения комплексов, при котором произведение двух элементов равно большему из них. Отображение*

$$a \longrightarrow \varkappa(a)$$

полугруппы S на $\overline{S}$ является о-гомоморфизмом, который можно охарактеризовать как минимальный о-гомоморфизм полугруппы S на л. у. полугруппы, в которых произведение равно наименьшей верхней грани.

Архимедовы классы упорядочиваются обычным способом; именно полагают $\varkappa(a) \leqq \varkappa(b)$, когда $a \leqq b$. Ясно, что это линейный порядок. Так как $\varkappa(b)=\varkappa(b^2)$ и неравенство $a \leqq b$ влечет $b \leqq ab \leqq b^2$, мы имеем равенство $\varkappa(ab)=\varkappa(b)$, показывающее, что $\varkappa(ab)=\max(\varkappa(a), \varkappa(b))$. Следовательно, умножение архимедовых классов вполне определяется правилом $\varkappa(a)\varkappa(b)=\varkappa(ab)$, кроме того, отображение $a \longrightarrow \varkappa(a)$ является o-гомоморфизмом. Если

$\eta: a \longrightarrow a'$ — o-гомоморфизм полугруппы S на л. у. полугруппу T, в которой $a'b'=\max(a', b')$, то операция в T идемпотентна и потому η отображает выпуклую подполугруппу, порожденную одним элементом, на единственный элемент полугруппы T. Теперь указанная характеристика отображения $a \longrightarrow \varkappa(a)$ следует из предложения 7, что и требовалось доказать.

Под верхним классом полугруппы $\overline{S}$ архимедовых классов полугруппы S мы понимаем такое подмножество U из $\overline{S}$, что из включений $\overline{u} \in U$, $\overline{v} \in \overline{S}$ и $\overline{u} \leqq \overline{v}$ вытекает $\overline{v} \in U$. Если U — верхний класс, то, как легко проверить, элементы $a \in S$, для которых $\varkappa(a) \in U$, образуют выпуклый простой идеал I полугруппы S. Это устанавливает взаимно однозначное соответствие между верхними классами из $\overline{S}$ и выпуклыми простыми идеалами полугруппы S. Следовательно, для того, чтобы положительно л. у. полугруппа была архимедовой, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала нетривиального выпуклого простого идеала.

Легко видеть, что в случае, когда S — естественно л. у. полугруппа, архимедовы классы из S находятся во взаимно однозначном соответствии с главными (т. е. порождающимися одним элементом) выпуклыми подгруппами группы частных G полугруппы S, а именно при (естественном) соответствии $\varkappa(a) \longrightarrow \{a\}_{\square}$ (см. Конрад [11]).

6. Ординальные суммы

Пусть Λ — л. у. множество. Сопоставим каждому $\lambda \in \Lambda$ л. у. полугруппу S_λ так, чтобы при $\lambda \neq \mu$ полугруппы S_λ и S_μ не пересекались, Теоретико-множественное объединение $S=\bigcup S_\lambda$ всех таких S_λ будет превращено в л. у. полугруппу с помощью следующих определений:

1) пусть внутри каждого S_λ отношение порядка и умножение будут такими же, как исходные в S_λ;

2) если $a \in S_\lambda$, $b \in S_\mu$ и $\lambda < \mu$, то положим, что $a < b$ и $ab=ba=b$.

Легко проверить, что S и в самом деле будет л. у. полугруппой, называемой *ординальной суммой* л. у. множества $[S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ л. у. полугрупп S_λ. Очевидно, что полугруппа S тогда и только тогда будет положительно упорядочена, когда то же имеет место для каждого S_λ.

Предложение 9 (Клиффорд [5]). *Ординальная сумма $S=\bigcup S_\lambda$ тогда и только тогда будет естественно упорядочена, когда естественно упорядочена каждая S_λ.*

Если каждая S_λ естественно упорядочена, то из определения порядка и умножения для элементов из различных S_λ сразу вытекает утверждение для S. Обратно, если S естественно упорядочена и $a<b\,(a,\ b\in S_\lambda)$, то $b=ac=da$ для некоторых $c,\ d\in S$. Так как из $c\notin S_\lambda$ вытекало бы $ac=a$ или $ac=c$ в соответствии с тем, будет ли $c<a$ или же $a<c$, доказательство закончено.

Назовем л. у. полугруппу *ординально неразложимой*, если она не может быть представлена в виде ординальной суммы двух (или большего числа) своих подполугрупп.

Отсюда сразу следует, что архимедова положительно л. у. полугруппа без единицы ординально неразложима. Следующая теорема сводит общий случай к ординально неразложимым полугруппам.

Теорема 10 (Клейн-Бармен [2], Клиффорд [5]). *Каждая положительно л. у. полугруппа может быть единственным образом представлена в виде ординальной суммы л. у. множества ординально неразложимых положительно л. у. полугрупп.*

Пусть полугруппа S удовлетворяет условиям теоремы. Под *сечением* в S мы будем понимать такое разбиение полугруппы S на два непересекающихся подмножества L и U, называемых нижним и верхним классами сечения, что из $a\in L,\ x<a$ вытекает $x\in L$, а из $b\in U,\ y>b$ следует $y\in U$.

Сечение $(L,\ U)$ назовем *α-сечением*, если[1])

(i) L — подполугруппа в S, и

(ii) из $a\in L$ и $b\in U$ вытекает $ab=ba=b$.

---

[1]) Заметим, что U всегда будет идеалом в S. Допускается также случай, когда L или U пусто.

Множество α-сечений можно линейно упорядочить, полагая $(L_1,\ U_1)<(L_2,\ U_2)$, если L_1 строго содержится в L_2. Будем называть α-сечение *β-сечением*, если при такой упорядоченности оно обладает непосредственно следующим α-сечением. Обозначим через Λ л. у. множество всех β-сечений полугруппы S. Определим для каждого $\lambda\in\Lambda$ полугруппу S_λ как пересечение верхнего класса U_λ того β-сечения $(L_\lambda,\ U_\lambda)$, которое соответствует λ, и нижнего класса L'_λ непосредственно следующего за ним α-сечения $(L'_\lambda,\ U'_\lambda)$. Ясно, что полугруппа S_λ как пересечение двух выпуклых подполугрупп будет выпуклой подполугруппой в S. Мы утверждаем, что полугруппы S_λ будут ординально неразложимыми, а полугруппа S — их ординальной суммой.

Предположив, что S_λ является ординальной суммой своих подполугрупп S^1_λ и S^2_λ, мы покажем, что $(L_\lambda\bigcup S^1_\lambda,\ S^2_\lambda\bigcup U'_\lambda)$ было бы α-сечением, заключенным между $(L_\lambda,\ U_\lambda)$ и $(L'_\lambda,\ U'_\lambda)$. Единственное, что требует проверки, — это выполнение условия (ii); доказательство проводится просто с помощью известных четырех возможностей для включения элементов $a,\ b$. Так как полугруппы S_λ удовлетворяют условиям определения ординальной суммы, мы заключаем, что полугруппа S содержит ординальную сумму полугрупп $[S_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda]$. Таким образом, остается только доказать, что каждый элемент a полугруппы S принадлежит некоторой подполугруппе S_λ.

Для элемента $a\in S$ рассмотрим объединение L_0 всех нижних классов таких α-сечений $(L,\ U)$, что $a\notin L$ (включая также пустое множество) и пересечение L_1 всех тех L, для которых $a\in L$. Тогда $(L_0,\ S\diagdown L_0)$ и $(L_1,\ S\diagdown L_1)$ будут α-сечениями в S, а отсюда непосредственно следует, что никакое α-сечение не лежит между ними. Следовательно, $(L_0,\ S\diagdown L_0)$ будет β-сечением, и если S_λ соответствует этому β-сечению, то $a\in S_\lambda$.

Чтобы доказать единственность, допустим, что полугруппа S является ординальной суммой ординально неразложимых л. у. полугрупп $T_\mu\,(\mu\in M)$. Ясно, что множества

$$L_\varkappa=\bigcup_{\mu<\varkappa}T_\mu,\quad U_\varkappa=\bigcup_{\mu\geqq\varkappa}T_\mu$$

определяют α-сечение $(L_\varkappa, U_\varkappa)$, а множества

$$L'_\varkappa = \bigcup_{\mu\leqq\varkappa} T_\mu, \quad U'_\varkappa = \bigcup_{\mu>\varkappa} T_\mu$$

определяют α-сечение $(L'_\varkappa, U'_\varkappa)$. В силу ординальной неразложимости полугрупп $T_\varkappa$ между этими α-сечениями нельзя вставить третье, поэтому $(L_\varkappa, U_\varkappa)$ будет β-сечением полугруппы S с α-сечением $(L'_\varkappa, U'_\varkappa)$ в качестве, непосредственно следующего α-сечения. Следовательно, для некоторого $\lambda \in \Lambda$ будет иметь место равенство $S_\lambda = U_\varkappa \cap L'_\varkappa = T_\varkappa$. Так как объединение всех $T_\varkappa$ исчерпывает полугруппу S, каждое S_λ находится среди $T_\varkappa$. Это завершает доказательство теоремы 10.

Естественно спросить об условиях, которые гарантировали бы, что положительно л. у. полугруппа S будет ординальной суммой ординально неразложимых полугрупп некоторого важного типа. В качестве примера такого результата мы докажем

Предложение 11 (Конрад [11]). *Для того чтобы положительно л. у. полугруппа S была ординальной суммой ординально неразложимых л. у. полугрупп с сокращениями, необходимо и достаточно выполнения следующего условия:*

из $ab = ac$ (*или* $ba = ca$) *вытекает* $b = c$
или $ab = a$ $(ba = a)$.

Легко видеть, что ординальная сумма полугрупп указанного вида удовлетворяет этому условию. Допустим, следовательно, что ему удовлетворяет положительно л. у. полугруппа S.

Прежде всего мы покажем, что произведение ab будет идемпотентом только тогда, когда один из множителей идемпотентен и $ab = \max(a, b)$. Если элемент a не идемпотент, то $a < a^2 \leqq aba$. Следовательно, из равенства $abab = ab$, в силу предположения, вытекает $ab = b$. Так как $a \leqq ab$, мы имеем $\max(a, b) = b$.

Теперь мы определим отношение эквивалентности τ на полугруппе S. Пусть $a\tau b$ означает, что либо элементы a, b равны, либо они не являются идемпотентами и

$$\min(ab, ba) > \max(a, b).$$

Отношение τ тогда будет, очевидно, симметричным и рефлексивным. Если $a\tau b$ и $b\tau c$, то также $a\tau c$, ибо если, например, ни один из элементов a, b, c не будет идемпотентом и $ac = a$, то равенство $acb = ab$ влечет $cb = b$ или $ab = a$ в противоречие с условием $b\tau c$ или $a\tau b$. Таким образом, τ является отношением эквивалентности и потому полугруппа S распадается на непересекающиеся классы относительно τ.

Классы S_λ относительно τ будут подполугруппами. Мы показываем, что если a и b не являются идемпотентами и $a\tau b$, то $a\tau ab$. Предположение $a^2b = ab$ приводит к одному из равенств $ab = b$, $ab = a$, в то время как $aba = ab$ приводит к одному из равенств $ba = b$, $ab = a$. Оба случая невозможны, поэтому $a\tau ab$.

Классы S_λ будут с сокращениями, так как если элементы a, b, c принадлежат одному и тому же классу и $ab = ac$, то неравенство $ab > a$ влечет $b = c$ и симметрично с другой стороны. То, что S_λ ординально неразложимы, вытекает непосредственно из определений. Легко видеть также, что S_λ выпуклы, значит, мы можем определить отношение неравенства $S_\lambda < S_\mu$, если для представителей $a \in S_\lambda$, $b \in S_\mu$ имеет место отношение $a < b$. Так как это линейный порядок в множестве классов S_λ, достаточно установить, что полугруппа S является ординальной суммой этих S_λ. Если $a < b$ и элементы a, b принадлежат различным классам, то либо $ab = b$, либо $ba = b$. Мы должны доказать, что имеют место оба равенства. Предположим, что $ab = b$. Если b — идемпотент, то $b \leqq ba \leqq b^2 = b$, тогда как если это не так, то из равенства $bab = b^2$ вытекает $ba = b$. В любом случае $ba = b$, и это завершает доказательство всех частей теоремы.

∗ Л. у. полугруппы, в которых все элементы идемпотентны, были изучены Сэто [1]. ∗

7. Пополнение линейно упорядоченных полугрупп

Если мы начнем с ч. у. полугруппы S и образуем обычным способом с помощью сечений ее пополнение Дедекинда — Мак-Нейла $S^{\#}$, то окажется, что даже когда полугруппа S л. у. и умножение непрерывно относительно топологии упорядоченности в S, существует, вообще говоря, несколько способов продолжения операции полугруппы S на $S^{\#}$. Поучительно исследовать это новое явление несколько подробнее.

В этом разделе через S будет обозначаться л. у. полугруппа. Полугруппа S называется *полунепрерывной снизу*, если из неравенства

$$c < ab \quad (a, b, c \in S)$$

следует существование таких окрестностей[1] U_a и U_b элементов a и b соответственно, что

$$c < xy \quad \text{для всех} \quad x \in U_a, \ y \in U_b.$$

Полунепрерывность сверху определяется двойственным образом. Легко проверяется, что непрерывность умножения эквивалентна полунепрерывности полугруппы S снизу и сверху.

Лемма А (Клиффорд [8]). *Полугруппа S тогда и только тогда является полунепрерывной снизу, когда она удовлетворяет следующему условию: если A и B — подмножества полугруппы S, для которых существуют* $\sup A$ *и* $\sup B$[2], *то существует также* $\sup AB$ *и*

$$\sup AB = \sup A \sup B.$$

Пусть S — полунепрерывная снизу полугруппа и $a = \sup A$, $b = \sup B$. Тогда элемент ab будет верхней гранью множества AB. Пусть $c \in S$ — такой элемент, что $c < ab$. Тогда существуют такие окрестности U_a, U_b элементов a и b соответственно, что $c < U_a U_b$. Так как ни одно из множеств $A \cap U_a$ и $B \cap U_b$ не пусто, мы имеем для некоторых $a' \in A$, $b' \in B$ неравенство $c < a'b'$. Поэтому $ab = \sup AB$.

Обратно, пусть указанное условие выполнено и $c < ab$ $(a, b, c \in S)$. Если ни множество $S_a = [x \in S \mid x < a]$,

---

[1] Окрестностями U_a являются открытые интервалы, содержащие a. Условие, приведенное здесь, будет записываться короче: $c < U_a U_b$.

[2] Напомним, что элемент a называется точной верхней гранью множества A ($\sup A$), если $U(A) = U(a)$.

ни множество $S_b = [x \in S \mid x < b]$ не обладают наибольшим элементом, то $a = \sup S_a$, а $b = \sup S_b$, откуда $ab = \sup S_a S_b$. В силу неравенства $c < ab$ существуют такие элементы $a_1 \in S_a$, $b_1 \in S_b$, что $c < a_1 b_1$. Теперь множества $U_a = [x \in S \mid x > a_1]$ и $U_b = [x \in S \mid x > b_1]$ будут такими открытыми множествами, содержащими элементы a и b соответственно, что $c < U_a U_b$. Если же S_a обладает наибольшим элементом a', то предпочтительнее рассуждать об a вместо S_a и использовать множество $U_a = [x \in S \mid x > a']$. Аналогично проводятся рассуждения для S_b, что и требовалось доказать.

Мы переходим теперь к определению оператора замыкания (по образцу п. 10 гл. V)

$$X \to X^{\#} = L(U(X))$$

для непустых u-ограниченных подмножеств X полунепрерывной снизу л. у. полугруппы S. Множество $S^{\#}$ всех «замкнутых» подмножеств линейно упорядочивается отношением включения, а соответствие

$$a \to a^{\#} = L(a) \quad (a \in S)$$

погружает полугруппу S в $S^{\#}$; оно действительно сохраняет порядок. Для того чтобы превратить множество $S^{\#}$ в полугруппу, определим произведение[1] $A \cdot B$ элементов A, $B \in S^{\#}$ при помощи равенства

$$A \cdot B = (AB)^{\#}.$$

Ассоциативность этого умножения будет следовать из тождества

$$(X^{\#} Y^{\#})^{\#} = (XY)^{\#} \quad \text{для} \quad X, \ Y \subseteq S. \tag{1}$$

Разумеется, достаточно проверить равенство $U(X^{\#} Y^{\#}) = U(XY)$. Предположим противное: пусть элемент w является верхней гранью множества XY, но не является верхней гранью для $X^{\#} Y^{\#}$. Тогда $w < x'y'$ для некоторых $x' \in X^{\#}$, $y' \in Y^{\#}$. Заметим, что если неравенство $x' \leqq x$

---

[1] Мы будем различать произведение AB множеств A, B как комплексов и их произведение $A \cdot B$ в $S^{\#}$.

не имеет места ни для какого $x \in X$, то $x' = \sup X$. Из леммы А мы заключаем, что либо $w < \sup Xy$ для некоторого $y \in Y$, либо $w < \sup XY$, что доказывает тождество (1). Так как для всех $A, B, C \in S^{\#}$ справедливы равенства

$$(A \cdot B) \cdot C = ((AB)^{\#} C)^{\#} = ((AB)\,C)^{\#} = (A\,(BC))^{\#} =$$
$$= (A\,(BC)^{\#})^{\#} = A \cdot (B \cdot C)$$

и

$$\text{из } A \subseteq B \text{ вытекает } A \cdot C = (AC)^{\#} \subseteq (BC)^{\#} = B \cdot C,$$

множество $S^{\#}$ будет полугруппой, в которой S является подполугруппой. Легко проверяется (условная) полнота полугруппы $S^{\#}$.

Полугруппа $S^{\#}$ снова будет полунепрерывной снизу, так как если Γ и Δ — такие подмножества полугруппы $S^{\#}$, что в $S^{\#}$ существуют $\sup \Gamma$ и $\sup \Delta$, то

$$\sup \Gamma \cdot \sup \Delta \geqq \sup (\Gamma \cdot \Delta)$$

и

$$\sup \Gamma \cdot \sup \Delta = (\vee\, C)^{\#} \cdot (\vee\, D)^{\#} = ((\vee\, C)^{\#}\,(\vee\, D)^{\#})^{\#} =$$
$$= ((\vee\, C)\,(\vee\, D))^{\#} = (\vee\, CD)^{\#} \leqq (\vee\,(CD)^{\#})^{\#} =$$
$$= (\vee\,(C \cdot D))^{\#} = \sup (\Gamma \cdot \Delta),$$

где $C \in \Gamma$, $D \in \Delta$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 12 (Кришнан [1], Клиффорд [8]). *Каждая полунепрерывная снизу л. у. полугруппа может быть вложена в полную полунепрерывную снизу л. у. полугруппу.*

Для единообразия формулировок назовем полное л. у. множество T *нормальным пополнением* л. у. множества S, если множество T содержит множество S, причем так, что всякий элемент из T является наим. в. г. некоторого подмножества из S, а также наиб. н. г. некоторого подмножества из S. Нормальные пополнения могут быть

описаны в терминах только наим. в. г. следующим образом.

Лемма В (Клиффорд [8]). *Полное л. у. множество T тогда и только тогда будет нормальным пополнением своего подмножества S, когда выполнены следующие условия:*

(i) *каждый элемент из T является наим. в. г. подмножества из S;*

(ii) *если элемент $a \in S$ является наим. в. г. подмножества A из S в множестве S, то элемент a будет наим. в. г. подмножества A и в множестве T;*

(iii) *подмножество S содержит наибольший элемент множества T, если таковой существует.*

Пусть множество T является нормальным пополнением множества S. Чтобы доказать условие (ii), предположим, что элемент $a \in S$ является наим. в. г. подмножества $A\,(\subset S)$ в множестве S, а элемент α — наим. в. г. подмножества A в множестве T. Очевидно, что $\alpha \leqq a$. Строгое неравенство $\alpha < a$ невозможно, ибо в этом случае никакой элемент из S не лежит между α и a, и потому в S не существует подмножества, для которого элемент α был бы наиб. н. г. Условие (iii) справедливо, потому что наибольший элемент должен был бы быть наиб. н. г.

Обратно, предположим, что выполнены условия (i) — (iii). Выбираем произвольный элемент $\alpha \in T \setminus S$ и рассматриваем множество $S_\alpha = [x \in S \mid x \geqq \alpha]$. В силу условия (iii), множество S_α непусто. Пусть β наиб. н. г. множества S_α в T. Тогда $\alpha \leqq \beta$ и достаточно показать, что неравенство $\alpha < \beta$ невозможно. Неравенство $\alpha < \beta$ и условие $\beta \notin S$ противоречили бы условию (i), ибо между элементами α и β не было бы элементов из S. Далее, из неравенства $\alpha < \beta$ и включения $\beta \in S$ вытекало бы, что элемент β является наим. в. т. множества $[x \in S \mid x \leqq \alpha]$ в множестве S, а элемент α — в множестве T, что противоречит условию (ii), что и требовалось доказать.

Теперь мы в состоянии показать, что полугруппа $S^{\#}$, определенная выше, является нормальным пополнением полугруппы S, т. е. что полугруппа $S^{\#}$ удовлетворяет условиям (i)—(iii) предыдущей леммы. Если $A \in S^\#$, то множество A, рассматриваемое как подмножество полугруппы S, непусто. Пусть B—верхняя грань множества A в полугруппе $S^\#$. Тогда каждый элемент $x \in A$ удовлетворяет соотношениям $x^\# \subseteq B^\#$, $x \in B$, и потому $A \subseteq B$. Таким образом, A является наим. в. г. множества A в $S^\#$ и условие (i) справедливо. Допустим, далее, что элемент $a \in S$ является наим. в. г. подмножества X из S в полугруппе S, и предположим, что A наим. в. г. множества X в полугруппе $S^\#$. Тогда $X \subset A$ и $X^\# \subseteq A^\# = A$. Из включений $a \in S$ и $a \in X^\#$ мы получаем $a \in A$, $a^\# = A$, что доказывает условие (ii). Так как полугруппа $S^\#$ тогда и только тогда обладает наибольшим элементом, когда S ограничено сверху, т. е. когда S обладает им, условие (iii) выполнено.

Мы намереваемся показать, что всякое полунепрерывное снизу нормальное пополнение T полугруппы S o-изоморфно $S^\#$ над S. Полагаем, что

$$f(\alpha) = S_\alpha = [x \in S \mid x \leqq \alpha] \quad \text{для } \alpha \in T.$$

Тогда $f(a) = a^\#$ для всех $a \in S$. Отсюда следует, что $f(\alpha)^\# = f(\alpha)$, ибо существование элемента $a \in f(\alpha)^\# \setminus f(\alpha)$ приводило бы к противоречию с условием (ii). Таким образом, $f(\alpha)$ будет однозначным и, очевидно, сохраняющим упорядоченность отображением полугруппы T в полугруппу $S^\#$. Более того, оно будет взаимно однозначным, так как α является наим. в. г. множества S_α в полугруппе T. Чтобы показать, что оно будет исчерпывающим, предположим, что $A \in S^\#$ и α наим. в. г. множества A в полугруппе T. Тогда $A \subset S_\alpha$, и если бы элемент $b \in S_\alpha$ не лежал в A, то он был бы верхней гранью множества A, и потому $b \geqq \alpha$, $b = \alpha$ и $b \in A$, что противоречиво. Следовательно, $A = S_\alpha$ и $f(\alpha) = A$. Наконец, мы докажем справедливость равенства $f(\alpha\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$ или же, в эквивалентной форме, $f^{-1}(A \cdot B) = f^{-1}(A) f^{-1}(B)$ для $A, B \in S^\#$. Имеем

$$f^{-1}(A) f^{-1}(B) = \sup A \sup B = \sup AB =$$

$$= f^{-1}((AB)^\#) = f^{-1}(A \cdot B),$$

что и требовалось. Это завершает доказательство следующей теоремы.

Теорема 13 (Клиффорд [8]). *Полунепрерывная снизу л. у. полугруппа S обладает единственным с точностью до о-изоморфизма над S полунепрерывным снизу нормальным пополнением.*

Если предположить, что полугруппа S непрерывна, то она обладает также и полунепрерывным сверху нормальным пополнением. Естественно, что нам интересно знать, должно ли оно быть изоморфным полунепрерывному снизу нормальному пополнению. Легко видеть, что это неверно, как показывает следующий пример, принадлежащий Клиффорду [8]. Пусть S—действительный интервал $[0, 1]$, из которого удалена точка $\frac{1}{2}$; положим $ax = xa = 0$ для всех $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ и $x \in S$, тогда как $bc = \frac{1}{4}$ для всех b, $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Тогда дедекиндовым пополнением S_0 полугруппы S будет $[0, 1] = S \cup \frac{1}{2}$. Если теперь мы определим операцию посредством равенств

$$a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot a = 0, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \alpha, \quad \frac{1}{2} \cdot x =$$
$$= x \cdot \frac{1}{2} = f(x) \quad \text{при } a \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \ x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right],$$

где α—произвольное действительное число, заключенное между 0 и $\frac{1}{4}$, а $f(x)$—произвольное монотонно неубывающее отображение интервала $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ в интервал $\left[\alpha, \frac{1}{4}\right]$, то мы получим нормальное пополнение $S_0(\alpha, f)$ полугруппы S. Полунепрерывные снизу и сверху нормальные пополнения соответствуют тем случаям, когда $\alpha = 0$, $f(x) = 0$ и $\alpha = \frac{1}{4}$, $f(x) = \frac{1}{4}$ соответственно.

Нормальные пополнения непрерывной л. у. полугруппы S могут быть частично упорядочены. Допустим, что все нормальные пополнения определяются на одном и том же множестве; это можно сделать, например, на дедекиндовом пополнении T полугруппы S, рассматриваемой как л. у. множество. Определим тогда отношение $T_1 \leqq T_2$, означающее, что ни для каких элементов α, $\beta (\in T)$ произведение, взятое в T_1, не будет больше, чем их произведение в T_2. При таком определении нормальное пополнение, полунепрерывное снизу, будет наименьшим, а сверху — наибольшим — факт, легко получающийся из определения.

Теорема 14 (Клиффорд [8]). *Непрерывная л. у. полугруппа S обладает только одним нормальным пополнением лишь в том случае, когда ее нормальные пополнения, полунепрерывные снизу и сверху, совпадают. Это случается тогда и только тогда, когда произведение двух сечений полугруппы S снова будет сечением в S.*

Здесь под *сечением* мы подразумеваем такую пару (L, U) непустых подмножеств L, U из S, что $x \leqq y$ для любых $x \in L$, $y \in U$ и что существует самое большее один элемент $a \in S$, удовлетворяющий неравенствам $x \leqq a \leqq y$ для всех $x \in L$, $y \in U$[1]. Произведение сечений (L_1, U_1) и (L_2, U_2) определяется как пара (L_1L_2, U_1U_2), которая не обязана быть сечением.

Для доказательства второй части теоремы предположим, что T — единственное нормальное пополнение полугруппы S, а (L_1, U_1) и (L_2, U_2) — два сечения в S. Пусть $\alpha = \sup L_1$ и $\beta = \sup L_2$. Тогда мы будем также иметь $\alpha = \inf U_1$, а $\beta = \inf U_2$. Следовательно, в силу леммы A и двойственного ей утверждения, справедливы равенства $\sup L_1L_2 = \alpha\beta = \inf U_1U_2$, откуда вытекает, что пара (L_1L_2, U_1U_2) снова будет сечением. Обратно, пусть полугруппа S удовлетворяет указанному условию, а T — дедекиндово пополнение полугруппы S, рассматриваемой как л. у. множество. Любой элемент $\alpha \in T$ определяет сечение (L_α, U_α), где $L_\alpha = [x \in S \mid x \leqq \alpha]$, $U_\alpha = [x \in S \mid x \geqq \alpha]$.

---

[1] Легко видеть, что тогда $\sup L = \inf U = a$.

Из предположения мы получаем, что пара $(L_\alpha L_\beta, U_\alpha U_\beta)$ снова будет сечением, т. е. $\sup L_\alpha L_\beta = \inf U_\alpha U_\beta$. Здесь левая часть есть не что иное, как произведение элементов α и β в полунепрерывном снизу, тогда как правая — в полунепрерывном сверху нормальных пополнениях полугруппы S. Мы приходим к совпадению полунепрерывного снизу и сверху нормальных пополнений, что мы и хотели показать[1].

Клиффорд [8] исследовал случай коммутативных естественно л. у. полугрупп и дал критерии полной или нормальной погружаемости их в полные естественно л. у. полугруппы.

Кришнан [1], [2] изучает пополнения ч. у. полугрупп и их взаимосвязь.

8. Об одном классе линейно упорядоченных группоидов

Изучив л. у. полугруппы, мы можем попытаться отбросить предположение ассоциативности и получить результаты вообще о л. у. группоидах. Однако такая попытка будет, очевидно, безнадежной, если о рассматриваемых группоидах не сделать некоторых ограничивающих предположений. Мы выбрали класс л. у. группоидов, который обязан интересом к себе в первую очередь той роли, которую он играет в изучении средних значений и вообще функциональных уравнений[2].

Группоидом усреднения называется множество M, обладающее следующими свойствами:

(i) M — строго л. у. группоид;

(ii) каждый элемент из M идемпотентен;

---

[1] Даже абелевы л. у. группы, если их порядок неархимедов, могут иметь различные полунепрерывные снизу и сверху нормальные пополнения.

[2] По поводу средних значений см. J. Aczél, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 392—400. Решающая аксиома (iii) использовалась ранее им [*Norske Vid. Selsk. Forh.*, **19** (1946), 83—86], а в случае квазигрупп — К. Toyoda, *Tohoku Math. Journ.*, **46** (1940), 239—251. Результаты этого параграфа (в случае когда M — интервал действительных чисел) принадлежат Ацелу; большая часть доказательств восходит к нему. Ср. также J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Basel — Berlin), 1961.

(iii) группоид M удовлетворяет *бисимметричному* закону [1])

$$(ab)(cd) = (ac)(bd) \text{ для всех } a,\ b,\ c,\ d \in M;$$

(iv) Группоид M *архимедов* в том смысле, что если $a < c < b$, то существует такое натуральное число n, что, умножая a на b слева (справа) n раз, мы получаем $bb \ldots ba > c\,(abb \ldots b > c)$, и двойственно [2]).

Можно отметить несколько непосредственных следствий.

A) Умножение внутреннее: из $a < b$ вытекает $a < ab < b$ и $a < ba < b$. Это следует непосредственно из строгой монотонности и идемпотентности. Следовательно, множество M плотно в себе.

B) Справедливы *дистрибутивные* [3]) законы:

$$a(bc) = (ab)(ac) \text{ и } (bc)a = (ba)(ca)$$

для всех $a,\ b,\ c \in M$. Это получается непосредственно из тождества $a = aa$ и бисимметричности.

C) Операция непрерывна в топологии открытых интервалов. Сначала мы покажем, что если $c < ab$, то $c < U_a b$ для некоторой окрестности U_a элемента a. Нетривиален лишь тот случай, когда $c \in [a,\ b]$ (или же $c \in [b,\ a]$). Тогда, в силу архимедовости, для фиксированного элемента $x < a$ мы имеем неравенство

$$c < (xb)(ab)(ab) \ldots (ab) = (xaa \ldots a)\,b$$

с достаточно большим числом множителей. Поэтому справедливо неравенство $c < U_a\, b$, где $U_a = [y \in M \mid y > xaa \ldots a]$. Теперь мы докажем, что если $c < ab$, то $c < U_a U_b$ для некоторых окрестностей U_a и U_b элементов a и b соответственно.

Мы знаем, что для некоторого элемента $a_1 < a$ имеет место неравенство $c < a_1 b < ab$ и аналогично $c < a_1 b_1 < a_1 b$ для некоторого $b_1 < b$. Это доказывает полунепрерывность снизу. Комбинируя доказанное с двойственным ему утверждением, получаем требуемое свойство.

Изучение группоидов усреднения начинается с коммутативного случая.

Теорема 15. (Фукс [6]). *Каждый коммутативный группоид усреднения M обладает таким взаимно однозначным и сохраняющим упорядоченность отображением f в множество действительных чисел, что*

$$f(xy) = \frac{1}{2}\,[f(x) + f(y)] \text{ для всех } x,\ y \in M. \qquad (1)$$

Это отображение f единственно с точностью до линейных преобразований.

Выберем два различных элемента группоида M, например $a < b$. Определим сначала отображение f на подсистеме M', порожденной элементами a и b, со значениями в множестве правильных двоичных дробей. Удобнее строить отображение f^{-1}, обратное к f. Положим

$$f^{-1}(0) = a \text{ и } f^{-1}(1) = b.$$

Пусть $k/2^n$ — правильная двоичная дробь и $k = 2q + r$, где $r = 0$ или 1 (k, q — неотрицательные целые числа). Предположив, что отображение f^{-1} определено для правильных двоичных дробей со знаменателями, меньшими чем 2^n, мы полагаем

$$f^{-1}\left(\frac{k}{2^n}\right) = f^{-1}\left(\frac{q}{2^{n-1}}\right) f^{-1}\left(\frac{q+r}{2^{n-1}}\right).$$

Очевидно, что f^{-1} — строго возрастающее отображение. Для того чтобы показать, что оно удовлетворяет условию

$$f^{-1}(\xi)\, f^{-1}(\eta) = f^{-1}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$$

для всех двоичных дробей в интервале $[0,\ 1]$, мы пользуемся индукцией. Пусть $\xi = (2q + r)/2^n$ и $\eta = (2q' + r')/2^n$, где r, r' равны 0 или 1. Тогда

$$f^{-1}(\xi)\, f^{-1}(\eta) = \left[f^{-1}\left(\frac{q}{2^{n-1}}\right) f^{-1}\left(\frac{q+r}{2^{n-1}}\right)\right] \times$$
$$\times \left[f^{-1}\left(\frac{q'+r'}{2^{n-1}}\right) f^{-1}\left(\frac{q'}{2^{n-1}}\right)\right] =$$

---

[1]) Он известен, кроме того, как закон энтропии; ср. I. M. H. Etherington, *Proc. Roy. Soc. Edinb.* (A), **62** (1949), 442—453, или A. Sade, *Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul* (A), **22** (1957), 151—184.

[2]) Скобки можно опустить, не опасаясь двусмысленности, так как ясно, что $bb \ldots ba = \{b\,[\ldots (ba)]\}$.

[3]) Автор использует термин «автодистрибутивный закон». Мы используем здесь термин, принятый в русской литературе. — *Прим. перев.*

$$= \left[f^{-1}\left(\frac{q}{2^{n-1}}\right) f^{-1}\left(\frac{q'+r'}{2^{n-1}}\right)\right] \times$$
$$\times \left[f^{-1}\left(\frac{q+r}{2^{n-1}}\right) f^{-1}\left(\frac{q'}{2^{n-1}}\right)\right] =$$
$$= f^{-1}\left(\frac{q+q'+r'}{2^{n}}\right) f^{-1}\left(\frac{q+q'+r}{2^{n}}\right) =$$
$$= f^{-1}\left(\frac{2q+2q'+r+r'}{2^{n+1}}\right) = f^{-1}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$$

(мы пользовались здесь определением, коммутативностью, бисимметричностью, предположением индукции и опять определением). Следовательно, f будет изотонным и взаимно однозначным отображением множества M' на множество двоичных дробей интервала $[0, 1]$, удовлетворяющим условию (1).

Для продолжения f на интервал $[a, b]$ допустим, что $a < c < b$. Элемент c определяет два множества, L_c и U_c, двоичных дробей из интервала $[0, 1]$, если положить, что $\xi \in L_c$ всякий раз, когда $f(x) = \xi$ для некоторого $x \in M'$, $x < c$, а $\eta \in U_c$ всякий раз, когда $f(y) = \eta$ для некоторого $y \in M'$, $c < y$. Очевидно, что пара (L_c, U_c) будет дедекиндовым сечением в интервале $[0, 1]$. Если ζ — действительное число, определяемое им, то мы полагаем $f(c) = \zeta$. Предположение, что $f(c) = f(d) = \zeta$ и $c < d$, приводит к противоречию; в самом деле, если оно справедливо, то M' не имеет элементов, лежащих между c и d, если же $c < add \ldots d$ с n множителями d, то $x < ayy \ldots y$ для всех $f(x) \in L_c$, $f(y) \in U_d = U_c$. Мы можем к элементам из M' применить условие (1), и потому $f(x) < f(ayy \ldots \ldots y) = \frac{2^n-1}{2^n} f(y)$ для всех $f(x) \in L_c$, $f(y) \in U_c$, что противоречиво. Таким образом, f является взаимно однозначной и, очевидно, изотонной функцией, отображающей интервал $[a, b]$ из M в интервал $[0, 1]$. Она удовлетворяет условию (1), что легко вытекает из свойства С).

Наконец, мы продолжим f на весь группоид M. Пусть, например, $b < c$. Действительное число ζ, соответствующее элементу c, можно без труда вычислить, основываясь на неравенстве $a < c' = aa \ldots ac < b$ и значении $f(c')$. Легко проверить, что продолженная функция f обладает требуемыми свойствами.

Если f — отображение, обладающее этими свойствами, то то же будет справедливо и для отображения $g(x) = \lambda f(x) + \mu$, где $\lambda > 0$, μ — действительные числа. Никакая другая функция g не обладает требуемыми свойствами, ибо действительная функция gf^{-1} удовлетворяет функциональному уравнению

$$gf^{-1}\left[\frac{1}{2}(\xi+\eta)\right] = \frac{1}{2}[gf^{-1}(\xi) + gf^{-1}(\eta)].$$

Единственным монотонным решением этого уравнения будет линейная функция $\lambda\xi + \mu$. Это завершает доказательство 1).

Обратимся теперь к некоммутативному случаю. Здесь предыдущие рассуждения нарушаются и для сведения к коммутативному случаю, по-видимому, требуется полнота. Для погружения группоида усреднения M в полный группоид усреднения M^* мы предположим, что выполнено условие

(v) произведение любой пары сечений группоида M снова будет сечением в M.

Тогда дедекиндово пополнение группоида M можно превратить в группоид усреднения методом предыдущего раздела.

Теорема 16 (Фукс [6]). *Группоид усреднения M, удовлетворяющий условию* (v), *о-изоморфен подмножеству множества действительных чисел, наделенному операцией образования взвешенного среднего арифметического. Точнее, для группоида M существует такое взаимно однозначное и сохраняющее упорядоченность отображение f группоида M в действительную прямую и такое действительное число $\lambda\,(0 < \lambda < 1)$, что*

$$f(xy) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \text{для всех } x,\ y \in M. \qquad (2)$$

Ввиду нашего предшествующего замечания достаточно рассмотреть тот случай, когда M—полный группоид. Это

---

1) В свете этой теоремы определение «архимедовости» в нашем теперешнем смысле может быть переформулировано следующим образом: если $\alpha < \gamma < \beta$, то существует такое n, что $\gamma < 2^{-n}[\alpha + (2^n-1)\beta]$, т. е. $2^n(\beta-\gamma) > \beta - \alpha$, что на самом деле является не чем иным, как хорошо известной аксиомой Архимеда.

предположение гарантирует, что для заданных элементов t, x, $y \in M$ существует единственный элемент $z \in M$, лежащий между x и y и удовлетворяющий условию

$$(tz)(zt) = (tx)(yt). \qquad (3)$$

(По существу, это теорема Больцано, которая имеет место, в силу полноты и непрерывности.) Сохраняя t фиксированным, мы рассматриваем z как функцию от x и y и записываем [1])

$$z = x\mathbf{T}y.$$

Мы намереваемся показать, что $\mathbf{T}$ — коммутативная операция усреднения на M. Она, очевидно, будет коммутативной, идемпотентной и строго монотонной. Так как

$$[t(xy)]\,[(yx)t] = [(tx)(ty)]\,[(yt)(xt)] = [(tx)(yt)]\,[(ty)(xt)] =$$
$$= (tx)(yt) = (tz)(zt),$$

мы получаем $x\mathbf{T}y \geqq \min(xy, yx)$ и, следовательно, $(x\mathbf{T}y)\mathbf{T}y \geqq \geqq \min(xyy,\ yxy,\ yyx)$ и с помощью индукции получается архимедовость операции $\mathbf{T}$.

В доказательстве бисимметричности мы воспользуемся тождеством (Ацел)

$$(x\mathbf{T}y)(u\mathbf{T}v) = xu\mathbf{T}yv \text{ для всех } x, y, u, v \in M. \qquad (4)$$

Оно имеет место, так как, обозначая $z = x\mathbf{T}y$, $w = u\mathbf{T}v$, мы имеем

$$[t(zw)]\,[(zw)t] = [(tz)(zt)]\,[(tw)(wt)] =$$
$$= [(tx)(yt)]\,[(tu)(vt)] = [t(xu)]\,[(yv)t].$$

---

[1]) Фактически $z = x\mathbf{T}y$ не зависит от t, ибо если u — другой элемент группоида M и

$$(tz)(zt) = (tx)(yt), \qquad (uw)(wu) = (ux)(yu),$$

то

$$u[(tx)(yt)]u = [(utu)(uxu)]\,[(uyu)(utu)] = [(uux)(tuu)]\,[(uyu)(utu)] =$$
$$= \{u[(ux)(yu)]\}\{(tuu)(utu)\} = \{u[(uw)(wu)]\}\{(tuu)(utu)\}.$$

Поэтому в выражении $u[(tx)(yt)]u$ оба элемента x и y могут быть заменены элементом w, т. е.

$$u[(tz)(zt)]u = u[(tx)(yt)]u = u[(tw)(wt)]u,$$

откуда следует, что $w = z$.

Заметим, что из тождества (4) вытекает дистрибутивность

$$x(u\mathbf{T}v) = xu\mathbf{T}xv, \qquad (u\mathbf{T}v)x = ux\mathbf{T}vx,$$

так как $x\mathbf{T}x = x$. Теперь в выражении $a = (x\mathbf{T}y)\mathbf{T}(u\mathbf{T}v)$ элементы y и u можно поменять местами, так как, пользуясь тождеством (4), мы имеем

$$(ta)(at) = [t(x\mathbf{T}y)]\,[(u\mathbf{T}v)t] = (ty\mathbf{T}tx)(ut\mathbf{T}vt) =$$
$$= (ty)(ut)\mathbf{T}(tx)(vt),$$

и первоначальная операция бисимметрична.

Мы доказали, что относительно операции $\mathbf{T}$ множество M будет коммутативным группоидом усреднения. Из теоремы 15 мы заключаем, что существует такое сохраняющее упорядоченность взаимно однозначное отображение f группоида M в действительную прямую, что

$$f(x\mathbf{T}y) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] \text{ для } x, y \in M.$$

Тождество (4) в обозначениях $f(x) = \xi$, $f(y) = \eta$, $f(u) = \varrho$, $f(v) = \sigma$ принимает вид

$$f\left[f^{-1}\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta)\right) \cdot f^{-1}\left(\frac{1}{2}(\varrho + \sigma)\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(f[f^{-1}(\xi)f^{-1}(\varrho)] + f[f^{-1}(\eta)f^{-1}(\sigma)]\right).$$

Это показывает, что действительная функция $F(\xi, \eta) = f[f^{-1}(\xi)f^{-1}(\eta)]$ удовлетворяет функциональному уравнению Йенсена

$$F\left[\frac{1}{2}(\xi + \eta),\ \frac{1}{2}(\varrho + \sigma)\right] = \frac{1}{2}[F(\xi, \varrho) + F(\eta, \sigma)],$$

единственным монотонным решением которого является линейная функция. Следовательно, $f^{-1}(\xi)f^{-1}(\eta) = f^{-1}(\lambda\xi + \mu\eta + \nu)$ для фиксированных действительных $\lambda > 0$, $\mu > 0$ и ν. Те случаи, когда $\xi = \eta = 0$ и $\xi = \eta = 1$, приводят к равенствам $\nu = 0$ и $\lambda + \mu = 1$, что завершает доказательство [1]).

---

[1]) Из доказательства видно, что единственным местом, где мы пользовались дополнительным предположением (v), является заключение о том, что уравнение (3) всегда имеет решение z. Поэтому было бы столь же удобно предполагать это условие вместо условия (v).

Хоссу 1) заметил, что условия (ii) и (iii) могут быть заменены постулатами, что умножение внутреннее и справедливы законы дистрибутивности. В самом деле, условие (ii) получается сразу, если мы положим $a = b$ в первом законе дистрибутивности. Для доказательства закона бисимметрии мы погрузим сперва данный группоид в полный группоид, подчиненный опять дистрибутивным законам. Затем определим элемент v^* как решение уравнения

$$(xy)(uv) = (xu)(yv^*),$$

где x, y, u — фиксированные элементы, а v изменяется между y и u. Так как $(xu)(yy) = (xu)\,y = (xy)(uy) = (xu)(yy^*)$, мы имеем равенство $y^* = y$ и аналогично $u^* = u$. Более того,

$$(vw)^* = v^*w^*,$$

ибо

$$(xu)\,[y\,(vw)^*] = (xy)\,[u\,(vw)] = [(xy)(uv)]\,[(xy)(uw)] =$$
$$= [(xu)(yv^*)] \cdot [(xu)(yw^*)] = (xu)\,[y\,(v^*w^*)].$$

Мы видим, что $v^* = v$ для элементов v подгруппоида M', порожденного элементами u и y. Элементы из M' лежат всюду плотно между y и u, следовательно, из непрерывности следует $v^* = v$ для всех v, лежащих между y и u. Аналогичные соображения применяются в остальных случаях, например, если u лежит между y и v.

Ацел 2) рассмотрел случай, когда предположение об идемпотентности опускается. Тогда получается функция f, отображающая группоид M в множество действительных чисел и являющаяся взаимно однозначной строго изотонной функцией, удовлетворяющей условию

$$f(xy) = \lambda f(x) + \mu f(y) + \nu$$

для фиксированных действительных чисел $\lambda > 0$, $\mu > 0$, ν и всех $x, y \in M$.

Если строгая монотонность заменяется условием

из $a < b$ следует $ac < bc$ и $ca > cb$,

то операция внешняя: ни ab, ни ba не лежат между a и b.

Теорема 16 остается в силе с $\lambda > 1$.

---

1) Publicationes Math. Debrecen, **6** (1959), 1—6.

2) См. его статью в Bulletin, цитированную в сноске 2) на стр. 257.

Глава XII

СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

1. Частные

Предположим, что H — ч. у. группоид, обладающий следующим свойством: для всех a, $b \in H$ существует такой элемент $a : b \in H$, что

условия $x \leqq a : b$ и $xb \leqq a$ эквивалентны.

Будем говорить, что $a : b$ — *правое частное* элемента a по b, а H — *группоид с правым делением*. Аналогично, *левое частное* элемента a по b определяется как такой элемент $a :: b$, что

$x \leqq a :: b$ тогда и только тогда, когда $bx \leqq a$.

Ч. у. группоид с правым и левым делением называется *группоидом с делением*. Ясно, что $a : b$ и $a :: b$, если они существуют, определяются элементами a и b единственным образом.

Частные обобщают понятие частного идеалов в теории колец и особенно важны для с. у. полугрупп. Многие свойства структуры идеалов кольца переносятся на такие полугруппы.

Мы начнем с перечисления некоторых элементарных свойств частных, справедливых для ч. у. группоидов всякий раз, когда рассматриваемые частные существуют. Большая часть этих утверждений непосредственно следует из определений 1):

(i) из $a \leqq b$ следует $a : c \leqq b : c$;
(ii) из $a \leqq b$ следует $c : b \leqq c : a$;
(iii) условия $bc \leqq a$, $b \leqq a : c$ и $c \leqq a :: b$ равносильны;
(iv) $ab : b \geqq a$ и $ba :: b \geqq a$;
(v) $a :: (a : b) \geqq b$ и $a : (a :: b) \geqq b$;
(vi) $a : [a :: (a : b)] = a : b$ и $a :: [a : (a :: b)] = a :: b$;

---

1) См. Сертен [1], Дилуэрт [1], Уорд — Дилуэрт [1] и Биркгоф [3].

(vii) если H отрицательно упорядочено, то $a \leqq a:b$;

(viii) докажем теперь следующие важные леммы.

Лемма A. *Если* $\bigvee a_\alpha$ $(a_\alpha \in H)$ *существует в группоиде с правым делением* H, *то* $\bigvee (a_\alpha b)$ *для всех* $b \in H$ *также существует и*

$$\bigvee (a_\alpha b) = (\bigvee a_\alpha) b.$$

Очевидно, что $a_\alpha b \leqq (\bigvee a_\alpha) b$. Пусть $a_\alpha b \leqq x$ для всех α. Тогда $a_\alpha \leqq x:b$, $\bigvee a_\alpha \leqq x:b$ и потому $(\bigvee a_\alpha) b \leqq x$. Это доказывает, что $(\bigvee a_\alpha) b$ будет наим. в. г. элементов $a_\alpha b$.

Лемма B. *Если* H — *группоид с правым делением и* $\bigwedge a_\alpha$ $(a_\alpha \in H)$ *существует в* H, *то для всех* $b \in H$ *существуют также* $\bigwedge (a_\alpha : b)$, *причем*

$$\bigwedge (a_\alpha : b) = (\bigwedge a_\alpha) : b.$$

В самом деле, для $c = (\bigwedge a_\alpha) : b$ имеют место неравенства $cb \leqq \bigwedge a_\alpha \leqq a_\alpha$, т. е. $c \leqq a_\alpha : b$ для всех α. Если же $x \leqq a_\alpha : b$ для всех α, то $xb \leqq a_\alpha$, $xb \leqq \bigwedge a_\alpha$, $x \leqq (\bigwedge a_\alpha) : b$, иными словами, c — наиб. н. г. элементов $a_\alpha : b$.

Лемма C. *Если в группоиде* H *с делением существует* $\bigvee b_\alpha (b_\alpha \in H)$, *то для всех* $a \in H$ *существует также* $\bigwedge (a : b_\alpha)$ *и*

$$\bigwedge (a : b_\alpha) = a : (\bigvee b_\alpha).$$

То же самое справедливо и для левых частных.

Неравенство $a : (\bigvee b_\alpha) \leqq a : b_\alpha$ справедливо, в силу (ii). Пусть $x \leqq a : b_\alpha$ для всех α. Тогда $x b_\alpha \leqq a$ и, согласно утверждению, двойственному лемме A, $x (\bigvee b_\alpha) = \bigvee (x b_\alpha) \leqq a$, откуда $x \leqq a : (\bigvee b_\alpha)$. Поэтому $a : (\bigvee b_\alpha)$ будет наиб. н. г. элементов $a : b_\alpha$.

Отныне мы будем предполагать ассоциативность умножения.

(ix) $(a:b):c = a:cb$ и $(a::b)::c = a::bc$;

(x) $(a:b)::c = (a::c):b$;

(xi) $a(b:c) \leqq ab:c$ и $(b::c)a \leqq ba::c$;

(xii) $a:b \leqq (a:c):(b:c)$ и $a::b \leqq (a::c)::(b::c)$.

Типичны следующие примеры.

1. Пусть K — группоид с нулевым элементом, а H — группоид всех подмножеств из K, содержащих 0 относительно умножения комплексов. Тогда H будет группоидом с делением: если $A, B \in H$, то

$$A : B = [x \in K \mid xB \subseteq A] \quad \text{и} \quad A :: B = [y \in K \mid By \subseteq A].$$

2. Пусть R — ассоциативное кольцо и S — полугруппа всех идеалов кольца R. Тогда S — полугруппа с делением, причем $A:B$ и $A::B$ — обычные частные идеалов.

3. Пусть G — группа и S — структура всех нормальных делителей группы G. Пусть, далее, «произведением» $A, B \in S$ будет их коммутант $[A, B]$. Тогда S — группоид с делением.

* Для дальнейшего здесь полезно будет ввести некоторые обобщения частных.

Если H — ч. у. группоид и если для элементов $a, b \in H$ множество

$$\langle a : b \rangle = [x \in H \mid xb \leqq a]$$

не пусто, то $\langle a : b \rangle$ называется *правым квазичастным* элемента a по b и мы будем говорить, что правое квазичастное элемента a по b существует. Аналогично, *левым квазичастным* элемента a по b будет называться множество

$$\langle a :: b \rangle = [x \in H \mid bx \leqq a],$$

когда оно непусто. Ч. у. группоид H называется *группоидом с правым* (*левым*) *квазиделением*, если правые (левые) квазичастные a по b существуют для всех пар $a, b \in H$. Группоид H называется *группоидом с квазиделением*, если он является группоидом с правым и левым квазиделением одновременно.

Ясно, что квазичастное содержит вместе с элементом $x \in H$ также и все $y \in H$, удовлетворяющие неравенству $y \leqq x$. Если окажется, что правое частное $a : b$ существует для некоторых $a, b \in H$, то $\langle a : b \rangle$ будет в точности множеством всех $x \in H$, удовлетворяющих условию $x \leqq a : b$. Таким образом, группоид с правым квазиделением тогда и только тогда будет группоидом с правым делением, когда каждое $\langle a:b\rangle$ содержит единственный наибольший элемент.

Квазичастные подчинены следующим очевидным правилам:

(a) если $a \leqq b$, то $\langle a:c\rangle \subseteq \langle b:c\rangle$; в частности, если $\langle a:c\rangle$ существует, то существует и $\langle b:c\rangle$;

(b) если $a \leqq b$, то $\langle c:b\rangle \subseteq \langle c:a\rangle$;

(c) соотношения $bc \leqq a$, $b \in \langle a:c\rangle$ и $c \in \langle a::b\rangle$ эквивалентны;

(d) справедливы включения $a \in \langle ab:b\rangle$ и $a \in \langle ba::b\rangle$;

(e) если элементы a_α группоида H обладают пересечением $\bigwedge a_\alpha \in H$, то для всех $b \in H$ справедливо равенство

$$\langle \bigwedge_{\alpha} a_\alpha : b\rangle = \bigcap_{\alpha} \langle a_\alpha : b\rangle$$

при условии, что левая часть равенства существует;

(f) если H — полугруппа, то из включения $\langle a:b_1\rangle \subseteq \langle a:b_2\rangle$ вытекает включение $\langle a:cb_1\rangle \subseteq \langle a:cb_2\rangle$ для каждого $c \in H$.

Нетрудно показать, что если полугруппа упорядочена тривиально, то она будет полугруппой с квазиделением тогда и только тогда, когда она является группой. ⁎

2. Структурно упорядоченные полугруппы

Читатель помнит, что *структурно упорядоченный группоид*[1] был определен как группоид, который является в то же время структурой, удовлетворяющей для всех a, b, $c \in H$ условиям

$$c(a \vee b) = ca \vee cb, \quad (a \vee b)c = ac \vee bc. \tag{1}$$

Если группоид H (условно) полный и если в нем выполняются бесконечные дистрибутивные законы

$$a(\bigvee b_\alpha) = \bigvee (ab_\alpha), \quad (\bigvee b_\alpha)a = \bigvee (b_\alpha a), \tag{2}$$

то он называется (*условно*) *полным с. у. группоидом*. Заметим, что теперь нам не надо постулировать законы монотонности (из $a \leqq b$ следует $ca \leqq cb$ и прочее), ибо они непосредственно вытекают из условий (1). Так как мы не предполагали условий, двойственных условиям (1), и они не вытекают из условий (1), принцип двойственности теряет силу для с. у. группоидов.

Можно легко вывести некоторые свойства с. у. группоидов.

(a) $(a \wedge b)(a \vee b) \leqq ab \vee ba$ и $(a \vee b)(a \wedge b) \leqq ab \vee ba$, так как $(a \wedge b)(a \vee b) = (a \wedge b)a \vee (a \wedge b)b \leqq ba \vee ab$.

(b) Если H обладает единицей e, то из условия $a \vee b = e$ следует $a \wedge b = ab \vee ba$. Действительно, в силу свойства (a), мы имеем неравенство $\leqq$, тогда как соотношения $ba \leqq ea = a$ и прочее показывают, что как ab, так и ba меньше или равны a, b.

(c) Если H обладает единицей e, то все $a_i \leqq e$ удовлетворяют неравенству[1]

$$a_1a_2 \ldots a_n \leqq a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n.$$

Это получается из неравенств $ab \leqq a$, $ab \leqq b$ с помощью тривиальной индукции.

⁎ (c′) Если H содержит единицу, то из равенств $a \vee b = e$ и $a \vee c = e$ вытекает равенство $a \vee bc = e$. Действительно,

$$e = (a \vee b)(a \vee c) = a^2 \vee ba \vee ac \vee bc \leqq a \vee bc. \text{ ⁎}$$

Обратимся теперь к рассмотрению связи между с. у. группоидами и группоидами с делением.

(d) Группоид с делением H, являющийся в то же время структурой, будет с. у. группоидом. Это немедленно следует из леммы А п. 1. Это утверждение может быть легко обобщено на полные структуры и полные с. у. группоиды.

(e) В полном с. у. группоиде H частное $a:b$ существует тогда и только тогда, когда некоторый элемент $x \in H$ удовлетворяет условию $xb \leqq a$. Чтобы доказать достаточность этого условия, возьмем объединение u всех элементов x_α, удовлетворяющих неравенству $x_\alpha b \leqq a$. Тогда $ub = (\bigvee x_\alpha)b = \bigvee (x_\alpha b) \leqq a$ и $u = a:b$. В частности,

---

[1] Во французской математической литературе с. у. полугруппы называются *gerbier*; см., например, Дюбрей-Жакотэн, Лесьер и Круазо [1].

[1] Скобки опускаются, потому что это утверждение имеет силу при произвольной расстановке скобок.

полный с. у. группоид с нулем 0 (который будет минимальным элементом) или с. у. группоид с нулем 0 и условием максимальности будут группоидами с делением.

Ряд результатов, касающихся с. у. групп, может быть при некоторых условиях перенесен на с. у. полугруппы; за подробностями мы отсылаем читателя к работе Дюбрей-Жакотэн, Лесьера и Круазо [1].

3. Эквивалентность Артина

В этом разделе S будет обозначать $\vee$-полугруппу с делением. Определим в S отношение эквивалентности A_t, называемое *эквивалентнсстью Артина*, следующим образом[1]: если $t \in S$, то для элементов $a, b \in S$ полагаем

$$a \equiv b\,(A_t) \text{ тогда и только тогда, когда } t : a = t : b.$$

Отношение ${}_tA$ определяется аналогично с помощью левых частных.

(A) Отношение A_t является отношением эквивалентности, удовлетворяющим условию: если $a \equiv b\,(A_t)$, то $ca \equiv cb\,(A_t)$ и $a \vee c \equiv b \vee c(A_t)$ для всех $c \in S$. Эти сравнения получаются из ix) и леммы C соответственно. Если полугруппа S коммутативна, то A_t будет отношением конгруэнтности на S.

(B) Каждый класс эквивалентности по $\operatorname{mod} A_t$ является выпуклым и содержит максимальный элемент. Максимальным элементом, эквивалентным a, будет элемент

$$a^{\Delta} = t :: (t : a),$$

так как, очевидно, $a^{\Delta} \geqq a$ и $a^{\Delta} \equiv a\ (A_t)$ вследствие свойств (v), (vi). Если же $a \equiv b\ (A_t)$, то

$$a^{\Delta} = t :: (t : a) = t :: (t : b) = b^{\Delta} \geqq b.$$

Заметим, что равенство $a^{\Delta} = b^{\Delta}$ имеет тот же смысл, что и сравнение $a \equiv b\,(A_t)$, потому что из равенства $a^{\Delta} = b^{\Delta}$ следует ввиду свойства vi) $t : a = t : a^{\Delta} = t : b^{\Delta} = t : b$.

---

[1] Оно обобщает хорошо известное отношение эквивалентности Артина, вводимое в коммутативных кольцах.

(C) Отношение A_t может быть охарактеризовано как такое отношение эквивалентности E_t с выпуклыми классами, что каждый класс содержит левое частное элемента t, которое является наибольшим элементом класса. Если это условие выполнено, то мы можем найти для элемента $a \in S$ один и только один элемент $t :: x \in S$, удовлетворяющий условиям $a \equiv t :: x\,(E_t)$ и $a \leqq t :: x$. Значит, $a \leqq t :: (t : a) \leqq t :: [t : (t :: x)] = t :: x$ и потому в силу выпуклости $t :: (t : a) = t :: x$. Следовательно, $a \equiv t :: x\,(A_t)$ и E_t мельче, чем A_t, или совпадает с ним. Но каждый класс по $\operatorname{mod} A_t$ содержит только одно левое частное элемента t (именно свой максимальный элемент); отсюда следует наше утверждение.

(D) Соответствие $a \to a^{\Delta}$ является операцией замыкания: $a \leqq a^{\Delta}$; если $a \leqq b$, то $a^{\Delta} \leqq b^{\Delta}$; $(a^{\Delta})^{\Delta} = a^{\Delta}$. Более того, оно удовлетворяет условию

$$(a^{\Delta} \vee b^{\Delta})^{\Delta} = (a \vee b)^{\Delta}.$$

Соответствие $a \longrightarrow a^{\nabla} = t : (t :: a)$ также будет операцией замыкания. При этом ${}^{\Delta}$-замкнутые и ${}^{\nabla}$-замкнутые элементы определяют соответствие Галуа

$$a^{\Delta} \longrightarrow t : a^{\Delta}$$

с обратным соответствием $a^{\nabla} \longrightarrow t :: a^{\nabla}$ (см. (vi))[1].

(E) Сравнение $(t : a)a \equiv t\,(A_t)$ имеет место тогда и только тогда, когда $(t : a) : (t : a) = t : t$. Это немедленно следует из свойства ix).

Если мы ограничимся случаем $t = e$ (e — единица полугруппы S) и допустим в то же время, что S коммутативна, то сравнение $xa \equiv e\,(A_e)$ для всех $a \in S$ и подходящих x будет иметь место тогда и только тогда, когда $a : a = e$ для всех $a \in S$. Чтобы проверить необходимость, заметим, что из равенств $e : xa = e : e = e$ вытекает $xa \leqq e$ и $x \leqq e : a$. Теперь очевидно, что $a : a \geqq e$, в то время как из неравенства $e : (e : a) \geqq a$ следует $e = e : xa = (e : a) : x \geqq (e : a) : (e : a) = [e : (e : a)] : a \geqq a : a$. Называя полугруппу S *цело-*

---

[1] Взаимоотношения между частными и соответствиями Галуа рассматривались Дюбреем и Круазо, *Collectanea Math.*, 7 (1954), 193—203.

замкнутой, если

$$a:a=e \quad \text{для всех } a\in S,$$

мы получим первую часть следующей теоремы.

Теорема 1 (Дюбрей-Жакотэн [1]). *Пусть S — коммутативная $\vee$-полугруппа с делением и единицей e. Ее факторполугруппа S/A_e по эквивалентности Артина A_e тогда и только тогда будет* (с. у.) *группой, когда S целозамкнута. Отношение A_e является единственным отношением конгруэнтности E полугруппы S, для которого S/E будет группой, а e — наибольшим элементом своего класса.*

Если E — отношение конгруэнтности указанного вида, то для каждого $a\in S$ существует такое $b\in S$, что $ab\equiv e\,(E)$ и $ab\leqq e$. Таким образом, $a\leqq e:b$ и $ab\leqq (e:b)\,b\leqq e$. Классы по $\operatorname{mod} E$, в силу сохранения объединений, выпуклы, поэтому $(e:b)\,b\equiv e\,(E)$. Значит, $a\equiv e:b\,(E)$ и каждый класс по $\operatorname{mod} E$ содержит частное элемента e. Кроме того, из $a\equiv b\,(E)$ следует $(e:b)\,a\equiv (e:b)\,b\equiv e\,(E)$, поэтому $(e:b)\,a\leqq e$ и $e:b\leqq e:a$. В силу симметрии $e:b=e:a$. Следовательно, E мельче чем A_e или совпадает с ним. Из-за сохранения частных в классах по $\operatorname{mod} E$ указанное равенство оказывается справедливым, что и требовалось доказать.

Заметим, что в $\vee$-полугруппе S с единицей e элемент $a:a$ будет идемпотентным элементом, большим или равным e. В самом деле, из неравенства $(a:a)\,a\leqq a$ следует неравенство $(a:a)^2 a\leqq a$, т. е. $(a:a)^2\leqq a:a$, в то время как из $ea=a$ вытекает $e\leqq a:a$, откуда $a:a\leqq (a:a)^2$. Мы заключаем, что полугруппа S обязательно будет целозамкнутой в следующих случаях: 1) полугруппа S не имеет идемпотентов, отличных от e; 2) S — полугруппа с сокращениями; 3) S вполне целозамкнута.

В полной $\vee$-полугруппе с делением S следующие условия эквивалентны: (i) S целозамкнута слева; (ii) S целозамкнута справа; (iii) S вполне целозамкнута. Мы покажем, что из условия (i) вытекает условие (iii). Пусть $a^n<b$ для $n=1, 2, \ldots$; тогда $\bigvee a^n=c$ существует и удовлетворяет неравенству $ac\leqq c$. Значит, $a\leqq c:c=e$.
✳ Заметим, что теорема 1 дословно сохраняется, если вместо коммутативности полугруппы S мы допустим только, что

$$e:a=e::a \text{ для каждого } a\in S. \text{ ✳}$$

Если мы допустим также, что в $\vee$-полугруппе S каждое непустое множество элементов, не превосходящих e, содержит максимальный, то мы можем применить теорему 3 гл. V, чтобы заключить, что в этом случае каждый элемент полугруппы S может быть единственным по $\operatorname{mod} A_e$ способом записан в виде произведения степеней (с положительными или отрицательными показателями) «простых» элементов, т. е. элементов p, удовлетворяющих условиям: $p<e$, и если $p\leqq x\leqq e$, то либо $x\equiv p$, либо $x\equiv e\,(A_e)$.

За дальнейшими результатами об отношении эквивалентности Артина мы отсылаем к Дюбрею [2] и Молинаро [1], [2]. Последний провел систематическое исследование аналогичных типов отношений эквивалентности.

✳ 3а. Групповые эпиморфные образы

Подходящее обобщение отношения эквивалентности Артина дает нам возможность исследовать те o-эпиморфные образы ч. у. полугрупп, которые являются ч. у. группами.

Пусть S — ч. у. множество, а θ — отношение эквивалентности на множестве S. Если для классов φ_1, φ_2 из S/θ мы положим $\varphi_1\leqq\varphi_2$ тогда и только тогда, когда $a\leqq b$ для некоторых $a\in\varphi_1$ и $b\in\varphi_2$, то, вообще говоря, S/θ может не удовлетворять антисимметричному и транзитивному законам. Они будут справедливы тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\text{(i) если } a\leqq b,\ b'\leqq a',\ \text{где } a\equiv a'\,(\theta),$$
$$b\equiv b'\,(\theta),\ \text{то } a\equiv b\,(\theta);$$

(ii) если $a\leqq b$, $b'\leqq c$ и $b\equiv b'\,(\theta)$, то для некоторых $a'\equiv a\,(\theta)$ и $c'\equiv c\,(\theta)$ имеет место соотношение $a'\leqq c'$.

Таким образом, S/θ тогда и только тогда будет ч. у. множеством относительно индуцированного частичного порядка, когда отношение θ подчинено условиям (i) и (ii).

Предположим далее, что S — ч. у. полугруппа, а θ — отношение эквивалентности, удовлетворяющее условиям (i), (ii) и условию

(iii) если $a\equiv b\,(\theta)$, то $ca\equiv cb\,(\theta)$ и $ac\equiv bc\,(\theta)$ для всех $c\in S$.

В этом случае S/θ становится ч. у. полугруппой относительно индуцированного частичного порядка.

Мы хотим рассмотреть тот случай, когда S/θ будет ч. у. группой. Довольно естественно будет сосредоточить наше внимание на возможно большей ч. у. группе, которая может получиться таким способом из ч. у. полугруппы S. Поэтому мы предположим, что S обладает единицей e и θ — *конгруэнтность Дюбрей-Жакотэн* полугруппы S; под этим мы подразумеваем отношение эквивалентности θ, удовлетворяющее в дополнение к условиям (i)—(iii) также условию

(iv) если $\theta(a) \leqq \theta(e)$, то $a \leqq e$, где $\theta(a)$ обозначает класс элемента a в S/θ. В частности, единица e будет наибольшим элементом в своем классе.

Пусть U — подмножество ч. у. полугруппы S с единицей e. Говорят, что элемент $u \in U$ — *левый* (*правый*) *мультипликативно максимальный элемент в* U, если из того, что $v \in S$ и $vu \in U$ ($v \in S$ и $uv \in U$), следует $v \leqq e$. Очевидно, что если u — левый мультипликативно максимальный элемент в $\langle a:b\rangle$ и элемент $x \in \langle a:b\rangle$ удовлетворяет условию $u \leqq x$, то x также будет левым мультипликативно максимальным элементом в $\langle a:b\rangle$.

В связи с этим основным результатом будет

Теорема 1a (**Фукс** [12]). *Пусть S — ч. у. полугруппа с единицей e. Необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы бинарное отношение θ было такой конгруэнтностью Дюбрей-Жакотэн полугруппы S, что S/θ является группой (обязательно ч. у. группой), будут следующие условия:*

(I) *S — полугруппа с квазиделением;*

(II) $\langle e:a\rangle = \langle e::a\rangle$ *для каждого* $a \in S$;

(III) *для каждого* $a\in S$ *квазичастное* $\langle e:a\rangle$ *содержит левый мультипликативно максимальный элемент;*

(IV) $\langle e:a\rangle=\langle e:b\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $a\equiv b(\theta)$.

Допустим сначала, что θ — такая конгруэнтность Дюбрей-Жакотэн, что S/θ — группа. Тогда мы поочередно получаем.

(I) Возьмем такой элемент $c \in S$, что $ca\equiv e(\theta)$. В силу условия (iv), мы имеем $ca\leqq e$, поэтому $c\in\langle e:a\rangle$. Ясно, что $bc \in\langle b:a\rangle$. Аналогично получаем, что и $\langle b::a\rangle$ непусто.

(II) Пусть $x \in \langle e:a\rangle$, т. е. $xa\leqq e$. Тогда $\theta(x)\theta(a)\leqq \theta(e)$ и сопряжение с $\theta(x)$ в ч. у. группе S/θ приводит к соотношению $\theta(a)\theta(x)\leqq\theta(e)$. Значит, в виду условия (iv) $ax\leqq e$ и потому $x\in\langle e::a\rangle$. Меняя ролями левые и правые квазичастные, мы получаем условие (II).

(III) Если элемент c выбран как в доказательстве условия (I), то он будет левым мультипликативно максимальным элементом в $\langle e:a\rangle$. Так как $c\in\langle e:a\rangle$, то если $vc\in\langle e:a\rangle$, т. е. $vca\leqq e$, то $\theta(v)=\theta(v)\theta(ca)=\theta(vca)\leqq\theta(e)$ и потому из условия (iv) вытекает $v\leqq e$.

Заметим, что каждый левый мультипликативно максимальный в $\langle e:a\rangle$ элемент c должен удовлетворять условию $ca\equiv e(\theta)$. Если c — действительно такой элемент, то $ca\leqq e$ и потому $\theta(ca)\leqq\theta(e)$. Так как S/θ — группа, существует элемент $v\in S$, удовлетворяющий условиям $\theta(v)\geqq\theta(e)$ и $\theta(v)\theta(ca)=\theta(e)$. Из условия (iv) мы получаем $vca\leqq e$, $vc\in\langle e:a\rangle$. Наше предположение об элементе c влечет $v\leqq e$, $\theta(v)\leqq\theta(e)$. Следовательно, $\theta(v)=\theta(e)$ и $ca\equiv e(\theta)$.

(IV) Предположим сначала, что $a\equiv b(\theta)$ и $x\in\langle e:a\rangle$. Тогда $xa\leqq e$, $\theta(x)\theta(a)\leqq\theta(e)$ и потому $\theta(x)\theta(b)\leqq\theta(e)$. Значит, $xb\leqq e$ и $x\in\langle e:b\rangle$. Меняя ролями a и b, мы приходим к равенству $\langle e:a\rangle=\langle e:b\rangle$. Обратное следует из того, что если имеет место равенство $\langle e:a\rangle=\langle e:b\rangle$, то левые мультипликативно максимальные элементы в $\langle e:a\rangle$ и в $\langle e:b\rangle$ одни и те же, а потому, согласно нашему замечанию в последнем абзаце, обратные к $\theta(a)$ и $\theta(b)$ в группе S/θ совпадают. Поэтому, действительно, $\theta(a)=\theta(b)$.

Обратно, допустим, что полугруппа S и отношение θ удовлетворяют условиям (I)—(IV). В силу (IV), θ будет отношением эквивалентности. Так как из равенства $\langle e:a\rangle=\langle e:b\rangle$ следует для каждого $c\in S$ равенство $\langle e:ca\rangle=\langle e:cb\rangle$, мы имеем $ca\equiv cb(\theta)$ и ввиду условия (II) $ac\equiv bc(\theta)$, всякий раз, когда $a\equiv b(\theta)$. Значит θ является конгруэнтностью относительно умножения. Покажем, что S/θ будет группой. Согласно условию (III), в $\langle e:a\rangle$ существует левый мультипликативно максимальный элемент c. Таким образом, $ca\leqq e$, а неравенство $vca\leqq e$ имеет место тогда и только тогда, когда $v\leqq e$. Следовательно, квазичастное $\langle e:ca\rangle$ будет в точности множеством всех $v \in S$, для которых справедливо неравенство $v \leqq e$, т. е. $\langle e:ca\rangle = \langle e:e\rangle$. Ввиду условия (IV) $ca \equiv e(\theta)$ и потому $\theta(c)$ будет левым обратным для $\theta(a)$.

Определим в S/θ отношение $\leqq$ при помощи правила: $\theta(a) \leqq \theta(b)$ тогда и только тогда, когда $a' \leqq b'$ для некоторых $a' \in \theta(a)$, $b' \in \theta(b)$. Тогда условие (iv) выполняется, ибо если $\theta(x) \leqq \theta(e)$ и если для элементов $x' \in \theta(x)$, $e' \in \theta(e)$ имеет место неравенство $x' \leqq e'$, то $\langle e:x\rangle = \langle e:x'\rangle \supseteq \langle e:e'\rangle = \langle e:e\rangle$ и потому $e \in \langle e:x\rangle$, $x \leqq e$. Если элементы $a \leqq b$, $b' \leqq a'$ удовлетворяют условиям $a \equiv a'(\theta)$, $b \equiv b'(\theta)$, то $\langle e:a'\rangle = \langle e:a\rangle \supseteq \langle e:b\rangle = \langle e:b'\rangle \supseteq \langle e:a'\rangle$ и потому $\langle e:a\rangle = \langle e:b\rangle$, $a \equiv b(\theta)$, значит, θ удовлетворяет условию (i). Наконец, чтобы проверить (ii), положим, что $a \leqq b$, $b' \leqq c$ и $b \equiv b'(\theta)$. Если элемент c^* выбран так, что $c^*c \equiv e(\theta)$, то из неравенств $c^*b' \leqq c^*c \leqq e$, в силу условий (iii) и (iv), вытекает, что $c^*b \leqq e$ и, значит, $cc^*a \leqq cc^*b \leqq c$. Так как $cc^*a \equiv a(\theta)$, условие (ii) также справедливо. Это завершает доказательство теоремы.

Чтобы выяснить значение условия (III) в случае полугрупп с делением, допустим, что частное $e:a$ существует. В этом случае квазичастное $\langle e:a\rangle$ тогда и только тогда будет содержать левый мультипликативно максимальный элемент, когда таким элементом будет $e:a$, это произойдет только тогда, когда $\langle (e:a):(e:a)\rangle$ состоит из всех таких элементов $x \in S$, что $x \leqq e$. В самом деле, соотношение $x \in \langle (e:a):(e:a)\rangle$ эквивалентно неравенству $x(e:a) \leqq e:a$, и потому $e:a$ будет левым мультипликативно максимальным элементом в $\langle e:a\rangle$ тогда и только тогда, когда обязательно $x \leqq e$. Таким образом, в случае полугрупп с делением условие (III) будет не чем иным, как условием $(e:a):(e:a) = e$ для всех $a \in S$, что равносильно целозамкнутости.

По поводу дальнейших обобщений и приложений см. Дюбрей-Жакотэн [4]. ✻

4. Элементы с особыми свойствами

В этом и следующих двух разделах мы предполагаем, что S — с. у. полугруппа с делением, содержащая *нуль* 0

и *универсальный элемент* u, такие, что

$$0 \leqq x \leqq u, \quad x0 = 0x = 0, \quad xu \leqq x, \quad ux \leqq x \text{ для всех } x \in S.$$

Типичным примером такой полугруппы S является с. у. полугруппа всех идеалов ассоциативного кольца. Нашей основной целью является распространение на наш общий случай некоторых важных результатов теории идеалов. Здесь мы должны удовольствоваться рассмотрением нескольких избранных тем, так как подробное изучение выпадает из нашего рассмотрения[1]).

Так как желательно придать рассуждениям значительную общность, мы будем основывать наши рассмотрения на идее операторов. *Оператор* Φ сопоставляет каждому элементу x из S такой элемент $\Phi(x)$ из S, что

$$x \leqq \Phi(x) \quad \text{для всех } x \in S. \tag{1}$$

Иногда мы будем дополнительно предполагать, что Φ удовлетворяет условию

$$\text{из } x \leqq \Phi(y) \text{ вытекает } \Phi(x) \leqq \Phi(y) \text{ для всех } x,\ y \in S \tag{2}$$

или

$$\Phi(x \wedge y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y) \quad \text{для всех } x,\ y \in S. \tag{3}$$

Оператор Φ тогда и только тогда удовлетворяет условию (2), когда он является *оператором замыкания*:

$$\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x) \text{ и } \Phi(x) \leqq \Phi(y), \text{ если } x \leqq y.$$

Мы будем называть оператор Φ *линейным*, если он удовлетворяет условию (3).

С помощью операторов мы введем следующие понятия[2]):

A) Элемент $p \in S$ называется Φ-*простым*, если из $x_1, \ldots x_k \leqq p$ вытекает $x_i \leqq \Phi(p)$ для некоторого i.

B) Элемент $q \in S$ называется Φ-*примарным*, если из неравенства $x_1 \ldots x_k \leqq q$ вытекает, что если $1 \leqq i \leqq k$, то либо $x_i \leqq q$, либо $x_j \leqq \Phi(q)$ для некоторого $j \neq i$.

Заметим, что если это требование выполняется при $k = 2$, то оно будет верным для всех k. Действительно, допустим,

---

[1]) Крулль [*S. B. d. phys.-med. Soz. Erlangen*, 56 (1924), 47—63] впервые изучал проблемы теории идеалов теоретико-структурными методами.

[2]) См. работы автора [4] и [8].

что для некоторого $q \in S$ имеет место свойство В) с $k=2$. Если $x_1 \ldots x_k \leqq q$ и $x_j \not\leqq \Phi(q)$ для всех $j \neq i$, то мы получаем последовательно $x_2 \ldots x_k \leqq q, \ldots, x_i x_{i+1} \ldots x_k \leqq q$; $x_i \ldots x_{k-1} \leqq q, \ldots$, и, наконец, мы приходим к неравенству $x_i \leqq q$.

С) Мы называем элемент $r \in S$ *правым* Ф-*примальным*, если неравенство $x \leqq \Phi(r)$ равносильно неравенству $r : x > r$. Элемент называется Ф-*примальным*, если он является как правым, так и левым Ф-примальным[1]).

Если Ф — тождественный оператор, то символ Ф будет опускаться. [В этом случае мы можем в свойстве А) взять $k=2$.]

Связь между этими понятиями показывает следующая

Лемма. *Всякий Ф-примальный элемент Ф-примарен и каждый Ф-примарный элемент Ф-прост.*

Если r Ф-примален и $x_1 \ldots x_k \leqq r$, где $x_j \not\leqq \Phi(r)$ при $j \neq i$, то $r : x_j = r$ и $r :: x_j = r$ при $j \neq i$. Следовательно, $x_i \leqq r$ и r — Ф-примарный элемент. Второе утверждение является тривиальным следствием неравенства $x \leqq \Phi(x)$. Нетрудно показать на примерах, что ни одно из обратных утверждений не верно.

Заметим, что *если r — правый Ф-примальный элемент, то $\Phi(r)$ — простой элемент*. В самом деле, если $x_1 x_2 \leqq \Phi(r)$, то $r : (x_1 x_2) > r$, откуда вытекает $(r : x_2) : x_1 > r$. Следовательно, обязательно выполняется неравенство $r : x_2 > r$ или же $r : x_1 > r$.

Мы отметим также, что если элемент $x \in S$, $x \neq u$, обладает тем свойством, что $x = \Phi(x)$ (в таком случае x называется Ф-элементом), то для элемента x Ф-простота, Ф-примарность, Ф-примальность и простота совпадают.

Иллюстрации к этим понятиям, как и изучение частных случаев, будут даны в п. 6. Теперь же мы рассмотрим вопрос о нахождении условий, при которых пересечение конечного числа элементов, обладающих некоторым Ф-свойством, будет обладать тем же самым Ф-свойством.

---

[1]) Заметим, что обязательно $r : x \geqq r$, так как из предположения о том, что S содержит универсальный элемент, следует, что S отрицательно упорядочено.

Теорема 2 (Фукс [4]). *Пусть Ф — оператор замыкания. Пересечение*

$$p = p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$$

конечного числа Ф-простых элементов p_i тогда и только тогда будет снова Ф-простым элементом, когда

$$\Phi(p) = \Phi(p_j) \quad \textit{для некоторого } j.$$

Если пересечение p элементов p_i является Ф-простым элементом, то[1]) из неравенства $p_1 \ldots p_n \leqq p_1 \wedge \ldots \wedge p_n = p$ вытекает, что $p_j \leqq \Phi(p)$ для некоторого j и, значит, согласно условию (2), $\Phi(p_j) \leqq \Phi(p)$. Но из неравенства $p \leqq p_j$ вытекает обратное неравенство, поэтому $\Phi(p) = \Phi(p_j)$. Обратно, если $\Phi(p) = \Phi(p_j)$ для некоторого j, то из неравенств $x_1 \ldots x_k \leqq p \leqq p_j$ и Ф-простоты элемента p_j следует $x_i \leqq \Phi(p_j) = \Phi(p)$ для некоторого индекса i.

Назовем пересечение $a = x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$ *неприводимым*, если никакое x_i не может быть опущено, и *приведенным*, если никакое x_i не может быть опущено или заменено большим элементом.

Теорема 3 (Фукс [4]). *Пусть*

$$q = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$$

— неприводимое пересечение конечного числа Ф-примарных элементов q_j, где Ф — оператор замыкания. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы q был Ф-примарным, является равенство

$$\Phi(q) = \Phi(q_j) \quad \textit{для каждого } j.$$

Пусть q — Ф-примарный элемент. Ясно, что

$$(q_1 \wedge \ldots \wedge q_{j-1} \wedge q_{j+1} \wedge \ldots \wedge q_n) q_j \leqq q$$

для каждого j и первый сомножитель здесь не будет $\leqq q$, так как была предположена неприводимость. В силу предположения $q_j \leqq \Phi(q)$, откуда $\Phi(q_j) \leqq \Phi(q)$. Обратное неравенство также имеет место, поскольку $q \leqq q_j$. Обратно, пусть $\Phi(q) = \Phi(q_j)$ для каждого j и $x_1 \ldots x_k \leqq q$, $x_i \not\geqq q$

---

[1]) Мы несколько раз будем пользоваться тем, что произведение меньше или равно пересечению. Это следует из наличия универсального элемента.

для некоторого i. Тогда $x_i \nleqq q_j$ по крайней мере для одного индекса j и, следовательно, неравенство $x_1 \ldots x_k \leqq q_j$ влечет $x_l \leqq \Phi(q_j) = \Phi(q)$ для некоторого $l \neq i$. Это показывает, что q Φ-примарно.

Теорема 4 (Фукс [8]). *Приведенное пересечение*

$$r = r_1 \wedge \ldots \wedge r_n$$

правых Φ-примальных элементов r_i также будет правым Φ-примальным элементом тогда и только тогда, когда

$$\Phi(r) = \Phi(r_j) \text{ для некоторого } j \text{ и}$$

$$\Phi(r) \geqq \Phi(r_i) \text{ для всех } i.$$

Предположим, что r — правый Φ-примальный элемент. Так как $r : a = (r_1 : a) \wedge \ldots \wedge (r_n : a)$ и пересечение приведенное, отсюда следует, что неравенство $a \leqq \Phi(r)$ равносильно неравенству $a \leqq \Phi(r_i)$ для некоторого i. Значит, $\Phi(r_i) \leqq \Phi(r)$ для всех i и $\Phi(r) \leqq \Phi(r_j)$ для некоторого j. Чтобы доказать обратное, допустим, что $\Phi(r)$ обладает указанными свойствами. Тогда неравенство $r : a > r$ равносильно условию $a \leqq \Phi(r_j)$ для некоторого j и потому неравенству $a \leqq \Phi(r)$, что и требовалось доказать.

5. Теоремы единственности для разложений в пересечения

Нашей ближайшей целью является изучение разложений элементов в пересечение конечного числа элементов, обладающих тем же самым Φ-свойством. Того немногого, что предполагалось об операторах, естественно, недостаточно для доказательства существования таких разложений у каждого элемента. Однако на вопрос, будет ли такое разложение, если оно вообще существует, единственным в некотором смысле, можно ответить во всей общности. Результаты параллельны результатам коммутативной теории идеалов.

Назовем разложение в пересечении $a = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ элемента полугруппы S (об S предполагается то же, что и в п. 4) с компонентами x_i, обладающими некоторым Φ-свойством, *коротким*, если оно неприводимо и пересечение никакого подмножества элементов x_i не обладает тем же самым Φ-свойством. Очевидно, что мы можем получить короткое разложение в пересечение из произвольного, отбрасывая некоторые компоненты и комбинируя другие подходящим образом.

Теорема 5 (Фукс [4]). *Пусть Φ — линейный оператор замыкания. Если*

$$a = p_1 \wedge \ldots \wedge p_n = p_1^* \wedge \ldots \wedge p_m^*$$

— два коротких разложения элемента $a \in S$ в пересечение Φ-простых элементов p_i, p_j^*, то $n = m$ и (возможно после перестановки членов)

$$\Phi(p_i) = \Phi(p_i^*) \quad \text{для всех } i.$$

Для каждого j неравенство $p_1 \ldots p_n \leqq a \leqq p_j^*$ влечет $p_i \leqq \Phi(p_j^*)$ для некоторого $i = i(j)$. Значит, $\Phi(p_i) \leqq \Phi(p_j^*)$. Те же самые рассуждения, примененные к p_i вместо p_j^*, показывают, что $\Phi(p_k^*) \leqq \Phi(p_i)$ для некоторого $k = k(i)$. Так как

$$\Phi(p_j^* \wedge p_k^*) = \Phi(p_j^*) \wedge \Phi(p_k^*) = \Phi(p_k^*),$$

согласно теореме 2, пересечение $p_j^* \wedge p_k^*$ снова будет Φ-простым, и потому возможно только равенство $j = k$. Таким образом, $\Phi(p_i) = \Phi(p_j^*)$ и доказательство завершено.

Теорема 6 (Фукс [4]). *Допустим, что Φ — линейный оператор замыкания. Если элемент a полугруппы S имеет два коротких разложения в пересечение*

$$a = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n = q_1^* \wedge \ldots \wedge q_m^*$$

с Φ-примарными компонентами q_i и q_j^*, то $n = m$ и элементы $\Phi(q_1), \ldots, \Phi(q_n)$ равны, с точностью до порядка, элементам $\Phi(q_1^*), \ldots, \Phi(q_m^*)$.

Если $\Phi(q_i)$ — минимальный среди элементов $\Phi(q_1), \ldots, \Phi(q_n)$ и, скажем, $\Phi(q_i) = \Phi(q_i^*)$, то $q_i = q_i^*$.

Ввиду теоремы 3 и предположения об операторе Φ элементы $\Phi(q_1), \ldots, \Phi(q_n)$ различны, а также различны и $\Phi(q_1^*), \ldots, \Phi(q_m^*)$. Выберем максимальный элемент, пусть это будет $\Phi(q_1)$, среди всех $\Phi(q_i)$, $\Phi(q_j^*)$ и образуем частное $a : q_1 = q_1 : q_1 \wedge \ldots \wedge q_n : q_1$. Тогда $q_1 \nleqq \Phi(q_i)$

при $i > 1$, и потому из неравенства $(q_i : q_1) q_1 \leqq q_i$ мы заключаем, что $q_i : q_1 \leqq q_i$, т. е. $q_i : q_1 = q_i$ при $i > 1$. Таким образом, в силу неприводимости $a : q_1 = q_2 \wedge \ldots \wedge q_n > a$ и, следовательно, равенство $a : q_1 = q_1^* : q_1 \wedge \ldots \wedge q_m^* : q_1$ показывает, что $q_j^* : q_1 > q_j^*$ для некоторого j. Для этого j из неравенства $(q_j^* : q_1) q_1 \leqq q_j^*$ мы получаем, что $q_1 \leqq \Phi(q_j^*)$, откуда $\Phi(q_1) \leqq \Phi(q_j^*)$. Это доказывает, что максимальные элементы среди $\Phi(q_i)$ и среди $\Phi(q_j^*)$ одни и те же.

Пусть теперь $\Phi(q_1) = \Phi(q_1^*)$ — максимальный элемент среди $\Phi(q_i)$, $\Phi(q_j^*)$. Тогда элемент $q_1 \wedge q_1^*$ снова будет Ф-примарным и $\Phi(q_1 \wedge q_1^*) = \Phi(q_1) = \Phi(q_1^*)$. Значит, $q_i : (q_1 \wedge q_1^*) = q_i$ при $i > 1$ и $q_j^* : (q_1 \wedge q_1^*) = q_j^*$ при $j > 1$. Следовательно,

$$a_1 = a : (q_1 \wedge q_1^*) = q_2 \wedge \ldots \wedge q_n = q_2^* \wedge \ldots \wedge q_m^*,$$

и простая индукция доказывает первое утверждение теоремы.

Наконец, предположим, что $\Phi(q_n) = \Phi(q_n^*)$ — минимальный элемент среди элементов $\Phi(q)$. Введем элемент $c = q_1 \wedge \ldots \wedge q_{n-1} \wedge q_1^* \wedge \ldots \wedge q_{n-1}^*$ и образуем частное $a : c$. Ясно, что $q_i : c = q_i^* : c = u$ для всех $i < n$. Неравенства

$$(q_n : c) q_1 \ldots q_{n-1} q_1^* \ldots q_{n-1}^* \leqq (q_n : c) c \leqq q_n$$

вместе с условием $q_i \nleqq \Phi(q_n)$, $q_i^* \nleqq \Phi(q_n)$ $(i < n)$ влекут $q_n : c \leqq q_n$. Следовательно, $q_n : c = q_n$ и, аналогично, $q_n^* : c = q_n^*$. Поэтому отсюда вытекает, что $q_n = q_n : c = a : c = q_n^* : c = q_n^*$, что и требовалось.

Теорема 7 (Фукс [8]). *Пусть элемент $a \in S$ имеет два приведенных представления в виде пересечения конечного числа правых Ф-примальных элементов,*

$$a = r_1 \wedge \ldots \wedge r_n = r_1^* \wedge \ldots \wedge r_m^*.$$

Тогда максимальные элементы (различные) среди $\Phi(r_1), \ldots, \Phi(r_n)$ и среди $\Phi(r_1^*), \ldots, \Phi(r_m^*)$ одни и те же.

Из приведенности и соотношения $r_i : \Phi(r_i) > r_i$ следует

$$a : \Phi(r_i) = r_1 : \Phi(r_i) \wedge \ldots \wedge r_n : \Phi(r_i) > a.$$

Поэтому $r_j^* : \Phi(r_i) > r_j^*$ по крайней мере для одного индекса j, т. е. $\Phi(r_i) \leqq \Phi(r_j^*)$. Отправляясь от этого j, мы получаем $\Phi(r_j^*) \leqq \Phi(r_k)$ для некоторого k, $1 \leqq k \leqq n$. Если $\Phi(r_i)$ максимален, то обязательно будет $\Phi(r_i) = \Phi(r_j^*) = \Phi(r_k)$, и элемент $\Phi(r_j^*)$ должен быть также максимальным, что и требовалось доказать.

Более сильное утверждение можно доказать, предполагая, что оператор Ф удовлетворяет следующему условию: если $r_1, \ldots, r_n$ — правые Ф-примальные элементы, причем $\Phi(r_1) \geqq \Phi(r_j)$ для всех j и $r_1 \wedge \ldots \wedge r_n = r$ — приведенное пересечение, то $\Phi(r) = \Phi(r_1)$[1]. Действительно из теоремы 4 следует, что в этом случае все элементы $\Phi(r_i)$, которые принадлежат приведенному или короткому разложению, в пересечении будут максимальными и различными. Следовательно, множество $\Phi(r_1), \ldots, \Phi(r_n)$ определяется единственным образом элементом a.

Чтобы подвести итог, мы можем коротко сказать, что многие теоремы единственности теории идеалов остаются справедливыми и в рассмотренном здесь значительно более общем случае.

6. Разложения элементов в пересечение

Нашей ближайшей задачей является отыскание условий, которым должен удовлетворять оператор Ф, чтобы существовали разложения всех элементов с. у. полугруппы S в пересечение Ф-простых, Ф-примарных и Ф-примальных компонент. Оказывается, необходимы некоторые дополнительные предположения о полугруппе S. Но чтобы облегчить изложение, мы не будем стремиться к наибольшей возможной общности; вместо этого мы ограничимся тем случаем, когда предполагаются выполненными некоторые условия конечности. Наиболее важным из них является *условие максимальности:* каждое непустое подмножество из S содержит максимальный элемент.

На протяжении этого раздела через S будет обозначаться с. у. полугруппа с 0 и универсальным элементом u $[0 \leqq x \leqq u,\ 0x = x0 = 0,\ xu \leqq x,\ ux \leqq x$ для всех $x \in S]$, в которой выполнено условие максимальности. Заметим, что существование частных в полугруппе S является простым следствием наличия в ней 0 и выполнимости условия максимальности.

---

[1] Оператор A, который будет рассматриваться в п. 6, обладает этим свойством.

Назовем элемент a полугруппы S *неразложимым в пересечение*, если

из $a = b \wedge c\,(b,\ c \in S)$ вытекает $b = a$ или $c = a$.

Лемма. *Каждый элемент полугруппы S является пересечением конечного числа неразложимых в пересечение элементов. То же самое имеет место для приведенных пересечений.*

Допустим, что множество тех элементов из S, для которых это свойство нарушается, непусто, и выберем в нем максимальный элемент a. Так как для неразложимых элементов утверждение леммы выполняется тривиальным образом, мы имеем $a = b \wedge c$, где $b > a$ и $c > a$. Но тогда как элемент b, так и c будут пересечениями конечного числа неразложимых в пересечение элементов и потому то же самое должно быть верно и для элемента a, что противоречит предположению. Поскольку, как легко проверяется, разложение $a = b \wedge c$ может быть сделано приведенным и останется таковым, если вместо элементов b и c подставить их приведенные разложения, постольку тот же вывод применяется для доказательства второго утверждения.

Предложение 8. *Пусть S — с. у. полугруппа указанного вида. Каждый элемент из S тогда и только тогда может быть записан в виде пересечения элементов, обладающих некоторым фиксированным свойством, когда этим свойством обладает каждый неразложимый элемент из S.*

Нетривиальная часть вытекает из предыдущей леммы.

Теперь мы специализируем операторы Φ и исследуем, какие разложения в пересечения можно установить.

I. Пусть $\Phi = I$ — тождественный оператор, $I(x) = x$ для всех $x \in S$. В этом случае для элементов $x \neq u$ свойства быть простым, I-простым, I-примарным и I-примальным элементом совпадают[1]). Неразложимые в пересечение элементы, вообще говоря, не будут простыми, а потому разложений требуемого вида для всех элементов полугруппы S установить нельзя.

---

[1]) Ср. замечание после леммы п. 4.

II. Пусть $\Phi = P$ — *радикальный оператор*; $P(x)$ является объединением всех таких элементов $a \in S$, что

$a^k \leqq x$ для некоторого натурального числа k.

Так как благодаря условию максимальности $P(x)$ будет объединением конечного числа элементов a, $P(x) = a_1 \vee \ldots \vee a_n$, где $a_i^{k_i} \leqq x$, мы имеем

$$P^k(x) = \vee a_{i_1} \ldots a_{i_k} \leqq x$$

всякий раз, когда $k \geqq k_1 + \ldots + k_n$. Следовательно, $P(x)$ может быть иначе определен как единственный наибольший элемент a, обладающий степенью, меньшей или равной x. Элемент $P(x)$ будет полупростым[1]).

Легко видеть, что P — оператор замыкания. Очевидно, что справедливо неравенство $P(x \wedge y) \leqq P(x) \wedge P(y)$. Если $a^r \leqq x$ и $a^s \leqq y$, то $a^t \leqq x \wedge y$, где $t = \max(r, s)$, таким образом, $P(x) \wedge P(y) \leqq P(x \wedge y)$ и P — линейный оператор

$$P(x \wedge y) = P(x) \wedge P(y).$$

Назовем простой элемент p *минимальным простым*, принадлежащим элементу x, если $x \leqq p$, но никакой простой элемент p' не удовлетворяет неравенству $x \leqq p' < p$.

Предложение 9. *Каждому элементу $x \in S$ принадлежит только конечное число минимальных простых, а их пересечением является $P(x)$.*

Если простой элемент p удовлетворяет неравенству $x \leqq p$, то он удовлетворяет также и неравенству $P(x) \leqq p$, так как $P(x)^k \leqq x \leqq p$. Если $y \nleqq P(x)$, то никакая степень элемента y не будет меньше или равна x и, следовательно, существует такой максимальный элемент $p \in S$, что $x \leqq p$ и ни для какого k неравенство $y^k \leqq p$ не имеет места. Этот элемент p должен быть простым, ибо в противном случае из соотношений $ab \leqq p$, $a \nleqq p$, $b \nleqq p$ вытекало бы $y^{k_1} \leqq a \vee p$, $y^{k_2} \leqq b \vee p$ для некоторых k_i и, таким образом, мы имели бы $y^{k_1+k_2} \leqq (a \vee p)(b \vee p) \leqq p$. Следовательно,

$$P(x) = \bigwedge_{x \leqq p_\nu} p_\nu \quad (\text{для простых } p_\nu).$$

---

[1]) Элемент t называется *полупростым*, если из того, что $a^n \leqq t$ для некоторого натурального числа n, вытекает $a \leqq t$.

Мы покажем, что здесь для представления элемента $P(x)$ достаточно конечного числа простых элементов. Если $P(x)$ не разложим и $ab \leqq P(x)$, то $ab \leqq p_\nu$ для каждого p_ν, поэтому $a \leqq p_\nu$ или $b \leqq p_\nu$. Вводя обозначения

$$a' = \bigwedge_{a \leqq p_\nu} p_\nu \quad \text{и} \quad b' = \bigwedge_{b \leqq p_\nu} p_\nu,$$

мы получаем $P(x) = a' \wedge b'$, где, в силу неразложимости, либо $a' = P(x)$, либо $b' = P(x)$, т. е., иными словами, либо $a \leqq P(x)$, либо $b \leqq P(x)$, и потому элемент $P(x)$ простой. Если же $P(x)$ разложим и $P(x) = a \wedge b$ — его приведенное разложение, где $P(x) < a$, $P(x) < b$, то $ab \leqq P(x)$, и так же, как выше, мы получаем $a \leqq a'$ и $b \leqq b'$, причем $P(x) = a' \wedge b'$. В силу приведенности разложения, мы получаем $a = a'$ и $b = b'$, и мы заключаем, что как a, так и b являются пересечениями простых. В силу условия максимальности, мы можем воспользоваться индукцией, чтобы получить приведенное представление

$$P(x) = p_1 \wedge \ldots \wedge p_r \qquad (\text{с простыми } p_i).$$

Для каждого такого простого элемента p, что $x \leqq p$, мы имеем $(p_1 \ldots p_r)^k \leqq P(x)^k \leqq x \leqq p$, откуда $p_i \leqq p$ для некоторых p_i, т. е. именно элементы $p_1, \ldots, p_r$ являются минимальными простыми, принадлежащими элементу x, что и требовалось доказать.

Элемент $p \in S$ тогда и только тогда будет P-простым, когда прост элемент $P(p)$ (или, другими словами, только один минимальный простой элемент принадлежит элементу p). Действительно, если элемент p является P-простым и $ab \leqq P(p)$, то $(ab)^k \leqq p$ для некоторого k. Следовательно, либо $a \leqq P(p)$, либо $b \leqq P(p)$. Обратно, если элемент $P(p)$ простой и $a_1 \ldots a_k \leqq p$, то $a_1 \ldots a_k \leqq P(p)$. Отсюда вытекает, что $a_i \leqq P(p)$ для некоторого i.

Понятия P-примарного и P-примального элементов совпадают[1]. Достаточно показать, что P-примарный элемент $q\,(\neq u)$ обязательно будет P-примальным. Если $a \leqq P(q)$, то $a^k \leqq q$, и если число k здесь выбрано столь малым, сколь это возможно, то $a^{k-1} \nleqq q$ и $q : a > q$. С другой стороны, если $q : a > q$, то из неравенства $(q : a)\, a \leqq q$ и P-примарности элемента q мы получаем $a \leqq P(q)$.

Из неразложимости в пересечение при некоторых дополнительных предположениях вытекает P-примарность.

Предложение 10 (Уорд — Дилуэрт [2]). *Если полугруппа S является дедекиндовой структурой и элементы a, $b \in S$ обеспечивают существование таких целых чисел k, l, что*

$$a^k \wedge b \leqq ab \quad \text{и} \quad a \wedge b^l \leqq ab,$$

то каждый неразложимый в пересечение элемент полугруппы S является P-примарным.

Пусть $ab \leqq q$, $a \nleqq q$, где q — неразложимый в пересечение элемент. Согласно предположению, для некоторого l справедливы неравенства $q : b \wedge b^l \leqq (q : b)\, b \leqq q$, откуда

$$q = q \vee [q : b \wedge b^l] = q : b \wedge (q \vee b^l).$$

Теперь неравенство $q : b > q$ влечет $q \vee b^l = q$, т. е. $b^l \leqq q$, $b \leqq P(q)$. Аналогично, из соотношений $ab \leqq q$, $b \nleqq q$ вытекает $a \leqq P(q)$.

III. Определим $P_2(x)$ как объединение всех элементов $a \in S$, удовлетворяющих условию: существуют такие натуральные числа $k_0, k_1, \ldots, k_n\ (n \geqq 0)$ и элементы $v_1, \ldots, v_n$ полугруппы S, что $a^{k_0} v_1 a^{k_1} v_2 \ldots v_n a^{k_n} \leqq x$ и $x : v_i = x$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, что каждый элемент v_i может быть заменен их произведением, а каждое число k_i — максимальным k_i. Так как неравенства $y \leqq x$ $yv \leqq x$ эквивалентны всякий раз, когда $x : v = x$, определение элемента $P_2(x)$ может быть проще сформулировано, как объединение всех элементов $a \in S$, удовлетворяющих условию

$$(a^k v)^n \leqq x \quad \text{для целых} \quad k,\ n > 0 \ \text{и} \ x : v = x.$$

Если как элемент a_1, так и элемент a_2 удовлетворяют этому условию, то то же имеет место для элемента $a_1 \vee a_2$, так как если $(a_1^k v_1)^m \leqq x$ и $(a_2^l v_2)^n \leqq x$, где $x : v_i = x$, и если $m \geqq n$, то $[(a_1 \vee a_2)^{k+l} v_1 v_2]^m \leqq x$, причем $x : v_1 v_2 = x$. Поэтому $P_2(x)$ является (единственным) максимальным эле-

---

[1] Мы можем здесь рассматривать u как примальный элемент.

ментом a, обладающим указанным свойством. Элемент $P_2(x)$ называется *вторичным радикалом*[1]) элемента x. Ясно, что

$$P(x) \leqq P_2(x) \quad \text{для всех} \quad x \in S,$$

а в коммутативном случае имеет место равенство.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что элемент $p \in S$ тогда и только тогда является P_2-простым, когда прост[2]) элемент $P_2(p)$, и что P_2-примарные элементы обязательно будут правыми P_2-примальными элементами. Нетрудно дать представление элемента $P_2(x)$ в виде пересечения некоторых простых элементов p, удовлетворяющих условию $x \leqq p$.

Непосредственно из определения видно, что если $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ — приведенное пересечение, то $P_2(x) \leqq P_2(x_1) \wedge \ldots \wedge P_2(x_n)$. Ввиду теоремы 4 приведенное пересечение $r = r_1 \wedge \ldots \wedge r_n$ правых P_2-примальных элементов r_i только тогда может быть правым P_2-примальным элементом, когда $P_2(r_1) = \ldots = P_2(r_n)$. Но если это условие выполняется, то $P_2(r) = P_2(r_i)$ (заметим, что из $r_i : v = r_i$ вытекает $r_j : v = r_j$), таким образом, при $\Phi = P_2$ условие теоремы 4 имеет вид $P_2(r_1) = \ldots = P_2(r_n)$. Заключение теоремы 7 для коротких и приведенных разложений может быть сформулировано следующим образом: элементы $P_2(r_1), \ldots, P_2(r_n)$ различны и максимальный среди них однозначно определяется элементом a.

IV. Далее, пусть $P_3(x)$ — объединение всех таких элементов $a \in S$, что

$$\text{из} \quad x : a \wedge b \leqq x \quad \text{следует} \quad b \leqq x.$$

Легко видеть, что вместе с элементами a_1 и a_2 этим свойством обладает также и элемент $a_1 \vee a_2$. Таким образом, $P_3(x)$ будет (единственным) максимальным элементом a, обладающим указанным свойством; он называется *третичным радикалом* элемента x.

---

[1]) Вторичные и третичные радикалы были изучены Лесьером и Круазо [1].

[2]) Используем тот факт, когда из равенства $x : v = x$ вытекает, что неравенство $v \leqq P_2(x)$ невозможно, ибо в противном случае имело бы место также равенство $x : P_2(x) = x$, которое приводит к очевидному противоречию.

Предложение 11 (Лесьер — Круазо [1]). *Если полугруппа S является дедекиндовой структурой, то каждый неразложимый в пересечение элемент является правым P_3-примальным.*

Если элемент x не разложим в пересечение и $x : a \wedge b \leqq x$, то справедливы равенства $x = (x : a \wedge b) \vee x = x : a \wedge (b \vee x)$. Поэтому из неравенства $x : a > x$ вытекает $b \vee x = x$, $b \leqq x$, т. е. $a \leqq P_3(x)$. Обратная импликация очевидна.

Пусть теперь $x = x_1 \vee \ldots \vee x_n$ и $a = P_3(x_1) \vee \ldots \vee P_3(x_n)$. Если $x : a \wedge b \leqq x$, то из неравенства

$$(x_1 : a) \wedge (x_2 \wedge \ \ldots \ \wedge x_n) : a \wedge b \leqq x_1$$

вытекает $(x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) : a \wedge b \leqq x_1$ и $(x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) : a \wedge b \leqq x_1 : a$. Следовательно,

$$(x_2 \wedge \ \ldots \ \wedge x_n) : a \wedge b = x : a \wedge b \leqq x.$$

Повторное применение этих рассуждений приводит к неравенству $b \leqq x$, доказывающему, что $a \leqq P_3(x)$. Если теперь мы предположим, что $r = r_1 \wedge \ldots \wedge r_n$ — приведенное пересечение таких правых P_3-примальных элементов r_i, что $a = P_3(r_1) = \ldots = P_3(r_n)$, то неравенства $r : c > r$ и $c \leqq a$ эквивалентны, откуда необходимо следует $P_3(r) \leqq a$. Комбинируя эти замечания с теоремой 4, получаем, что рассматриваемый теперь элемент r снова будет правым P_3-примальным, причем $P_3(r) = a$. Заключение теоремы 7 можно сформулировать так же, как в случае $\Phi = P_2$.

V. Пусть $A(x)$ будет объединением всех таких элементов $a \in S$, что[1])

$$\text{если} \quad x : b > x \ (\text{для некоторого } b \in S), \ \text{то} \ x : (a \vee b) > x.$$

если элементы a_1 и a_2 обладают этим свойством, то элемент $a_1 \vee a_2$ также обладает им, поэтому элемент $A(x)$ можно охарактеризовать как наибольший элемент, обладающий этим свойством. Другая полезная характеристика его дается следующим предложением.

---

[1]) По этому определению оператор A не обладает левой — правой симметрией.

Предложение 12 (Фукс [8]). *Пусть для данного элемента $x \in S$ p пробегает все элементы из S, для которых*

(i) $x : p > x$,

(ii) *если* $p' > p$, *то* $x : p' = x$.

Эти элементы p являются простыми, их число конечно и пересечение равно $A(x)$.

Допустим, что $ab \leqq p$. Тогда, очевидно, $(a \vee p)(b \vee p) \leqq p$ и $x < x : p \leqq [x : (b \vee p)] : (a \vee p)$. Следовательно, оба равенства $x : (b \vee p) = x$ и $x : (a \vee p) = x$ не могут иметь места одновременно т. е., в силу условия (ii), либо $b \leqq p$, либо $a \leqq p$, и потому элемент p простой.

Соотношение $x : p > x$ влечет неравенство $x : (A(x) \vee p) > x$, откуда, в силу условия (ii), мы получаем $A(x) \leqq p$. Пусть элемент $y \in S$ удовлетворяет неравенству $y \leqq p$ для всех p, обладающих свойствами (i) и (ii). Благодаря условию максимальности для каждого элемента b, удовлетворяющего неравенству $x : b > x$, существует элемент p, $b \leqq p$, для которого выполнены условия (i) и (ii). В таком случае $y \vee b \leqq p$ и, следовательно, справедливы неравенства $x : (y \vee b) \geqq x : p > x$, показывающие, что $y \leqq A(x)$. Таким образом, элемент $A(x)$ будет пересечением всех элементов p, удовлетворяющих условиям (i) и (ii). Как и в доказательстве предложения 9, отсюда следует, что

$$A(x) = p_1 \wedge \ldots \wedge p_r$$

для конечного числа простых элементов, удовлетворяющих условиям (i) и (ii).

Если p — элемент, обладающий свойствами (i) и (ii), то из $p_1 \wedge \ldots \wedge p_r \leqq p$ вытекает $p_1 \ldots p_r \leqq p$, откуда следует, что $p_i \leqq p$ для некоторого i и благодаря свойству (ii) $p_i = p$. Это показывает, что не существует элементов p, отличных от $p_1, \ldots, p_r$. Доказательство завершено.

Из предложений 9 и 12 мы видим, что

$$P(x) \leqq A(x) \quad \text{для всех } x \in S.$$

Общее определение правой Ф-примальности показывает, что правый A-примальный элемент $r \in S$ является элементом, удовлетворяющим условию

$$\text{если } r : a > r \text{ и } r : b > r, \text{ то } r : (a \vee b) > r,$$

или, другими словами, он не может быть представлен в виде пересечения двух своих правых частных, если ни одно из них не равно ему. Теперь очевидно следующее заключение.

Предложение 13. *Неразложимый в пересечение элемент является правым A-примальным элементом.*

Отсюда сразу следует, что элемент x тогда и только тогда будет правым A-примальным элементом, когда существует только один элемент p, определенный согласно предложению 12, или, что равносильно, $A(x)$ — простой элемент.

Всякий A-примарный элемент A-примален. Если q — A-примарный элемент и $q : a > q$, то ввиду неравенства $(q : a) a \leqq q$ мы получаем $a \leqq A(q)$. Следовательно, из неравенства $x : A(x) > x$ вытекает утверждение.

Предположим, далее, что $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ — приведенное пересечение. В этом случае неравенство $x : a > x$ имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого индекса i справедливо неравенство $x_i : a > x_i$. Поэтому простыми элементами, удовлетворяющими условиям (i) и (ii) предложения 12 по отношению к элементу x, будут как раз максимальные среди простых элементов, удовлетворяющих этим условиям по отношению к некоторому x_i. Мы заключаем, что оператор A не является ни оператором замыкания, ни линейным оператором. Отсюда следует также, что приведенное пересечение

$$r = r_1 \wedge \ldots \wedge r_n$$

правых A-примальных элементов r_i тогда и только тогда само будет правым A-примальным элементом, когда среди простых элементов $A(r_1), \ldots, A(r_n)$ существует только один максимальный простой элемент (ср. теорему 4). Таким образом, из леммы и предложения 13 получается существование приведенных и коротких разложений элементов a из S на правые A-примальные элементы с несравнимыми $A(r_i)$. Вследствие теоремы 7 простые $A(r_i)$ однозначно определяются элементом a.

По поводу дальнейших исследований с. у. полугрупп и группоидов мы отсылаем читателя к следующим работам: Дюбрей-Жакотэн [3], Фукс [8], Керстан [1], Кришнан [2], Лесьер [3], Мурата [2], [3]. На этот общий случай может быть перенесен ряд результатов аддитивной теории идеалов. Дальнейшие обобщения, идущие в направлении теории модулей, были даны Лесьером и Круазо [1].

Штейнфельд [1] рассматривает системы, несколько более общие, чем с. у. полугруппы; они предполагаются обладающими теми же свойствами, что и системы всех подколец ассоциативного кольца.

Понятие нильпотентности также можно изучать в с. у. полугруппах; ср. Биркгоф [3]. Стеллецкий [1] исследовал нильпотентность в структурах, в которых определено умножение (но они не обязаны быть с. у. группоидами, так как дистрибутивность не предполагается). Он определяет (правые) нормальные и центральные системы и т. п. и показывает, что ряд результатов теории групп и левых колец может быть перенесен на этот общий случай.

* 6а. Главные компоненты

До сих пор мы интересовались обобщениями понятий примарного элемента и т. п. Теперь мы обратимся к рассмотрению аналога главных компонент Крулля.

На протяжении этого раздела S будет обозначать с. у. полугруппу, содержащую 0 и универсальный элемент e, который является единицей в S [$0 \leqq x \leqq e$, $ex = xe = x$ для каждого $x \in S$]; допустим, кроме того, что S удовлетворяет условию максимальности и потому является полугруппой с делением.

Предложение 13а (Фукс—Штейнфельд [1]). *Пусть элемент $a \in S$ удовлетворяет неравенству $a < e$, а p — простой элемент в S*1)*. Тогда существует такой однозначно определенный элемент $a(p) \in S$, что*

$a : x \nleqq p$ *тогда и только тогда, когда* $x \leqq a(p)$. (1)

Он удовлетворяет условиям:

(i) $a \leqq a(p)$;

(ii) *если* $a \leqq p$, *то* $a(p) \leqq p$;

(iii) *если* $a \leqq p$, *то* $a(p) = e$.

---

1) Элемент e не будет считаться простым элементом в S.

Множество T всех элементов $x \in S$, удовлетворяющих условию $a : x \nleqq p$, непусто, потому что $a \in T$. Если как элемент x, так и элемент y принадлежат множеству T, то неравенство $a : (x \vee y) = a{:}x \wedge a{:}y \leqq p$ не может иметь места, ибо из него следовало бы неравенство $(a : x)(a{:}y) \leqq p$, в противоречие с условиями $a : x \nleqq p$, $a : y \nleqq p$. Следовательно, $x \vee y \in T$ и потому множество T замкнуто относительно операции объединения. В силу справедливости условия максимальности в полугруппе S множество T содержит наибольший элемент $a(p)$, который должен обладать свойством (1).

Теперь из соотношения $a : a = e \nleqq p$ следует $a \leqq a(p)$ для всех простых p. Если $a \leqq p$, то $[a : a(p)]\, a(p) \leqq a \leqq p$, и, следовательно, из простоты элемента p вытекает неравенство $a(p) \leqq p$. Наконец, если $a \nleqq p$, то $a : e \nleqq p$ и потому $a(p) = e$. Это завершает доказательство.

Элемент $a(p)$ будет называться *правой главной компонентой* элемента a, принадлежащей простому элементу p. Отметим следующие простые свойства элемента $a(p)$.

(a) *Элемент $a(p)$ удовлетворяет соотношению*

$$a(p) = a{::}[a{:}a(p)]$$

Мы знаем, что $a(p) \leqq a{::}[a{:}a(p)]$ и $a{:}\{a{::}[a{:}a(p)]\} = a{:}a(p) \nleqq p$ (ср. п. 1 (v) и (vi)). Указанное равенство следует из максимальности элемента $a(p)$.

(b) *Если $b = a(p)$, то $b(p) = b$.* Вследствие условия (i) мы имеем, разумеется, $a(p) \nleqq b(p)$. Заметим, что из неравенства $[b : b(r)]\, b(p) \leqq b = a(p)$ вытекает соотношение

$$[a : b(p)] : [b : b(p)] = a : [b : b(p)]\, b(p) \nleqq p.$$

Оно и $b : b(p) \nleqq p$ показывают, что произведение элементов $[a : b(p)] : [b : b(p)]$ и $b : b(p)$ не может быть $\leqq p$, и потому $a : b(p) \nleqq p$. Следовательно, $b(p) \leqq a(p)$, и мы заключаем, что $b(p) = a(p) = b$.

(c) *Для каждого $c \in S$ элемент $a(p) : c$ будет правой главной компонентой элемента $a : c$, принадлежащей p.* Пусть b обозначает правую главную компоненту элемента $a : c$, принадлежащую p. Тогда $(a : c) : b \nleqq p$. Здесь $(a : c) : b = a : bc$, поэтому $a : bc \nleqq p$ и $bc \leqq a(p)$, $b \leqq a(p) : c$. С другой стороны,

$$(a : c) : [a(p) : c] = a : [a(p) : c]\, c \geqq a : a(p),$$

где $a : a(p) \nleqq p$. Следовательно, $(a : c) : [a(p) : c] \nleqq p$ и $a(p) : c \leqq b$.

(d) *Если для некоторого* $c \in S$ *имеет место неравенство* $a(p) :: c > a(p)$, *то* $c \leqq p$. Обозначив $x = a(p) :: c$, мы имеем $cx \leqq a(p) = a :: [a : a(p)]$, откуда $[a : a(p)]\, cx \leqq a$, $[a : a(p)]\, c \leqq a : x$. Так как $x > a(p)$, $a : x \leqq p$ и потому $[a : a(p)]\, c \leqq p$, $c \leqq p$.

Основным результатом этого раздела является

Теорема 13b. (Фукс—Штейнфельд [1]). *Для каждого элемента* a ($\neq e$) *полугруппы* S *существует конечное число таких простых элементов* $p_1, \ldots, p_r$, что

$$a = a(p_1) \wedge \ldots \wedge a(p_r).$$

Множество всех элементов $x \in S$, удовлетворяющих неравенству $a \leqq x < e$, содержит максимальный элемент p. Он должен быть простым, ибо если b, $c \in S$ удовлетворяют неравенству $bc \leqq p$, то из соотношения $(b \vee p)(c \vee p) = bc \vee bp \vee pc \vee p^2 \leqq bc \vee p = p$ вытекает, что равенство $b \vee p = e = c \vee p$ невозможно. Таким образом, для каждого элемента полугруппы S, отличного от e, существует простой элемент, больший или равный данному.

Множество всех правых главных компонент $a(p) \neq e$ данного элемента a непусто, поэтому мы можем рассмотреть множество всех правых частных

$$a : [a(p_1) \wedge \ldots \wedge a(p_k)],$$

где $p_1, \ldots, p_k$ пробегает все конечные множества простых элементов, больших или равных a. Это множество содержит максимальный элемент, скажем, $b = a : [a(p_1) \wedge \ldots \wedge a(p_r)]$. Мы утверждаем, что $b = e$. Действительно, если $b < e$ и q — такой простой элемент, что $b \leqq q$, то при таком выборе элемента b мы имеем $b = a : [a(p_1) \wedge \ldots \wedge a(p_r) \wedge a(q)]$. Из условия (1) мы заключаем, что $b \nleqq q$, а полученное противоречие показывает, что $b = e$. Следовательно, $a(p_1) \wedge \ldots \wedge a(p_r) \leqq a$, что и доказывает наше утверждение.

Заметим, что предложение 13a и теорема 13b могут быть доказаны для $a \neq 0$, e, если мы заменим условие максимальности *ограниченным условием минимальности*: для каждого $a \in S$, $a \neq 0$, множество всех таких $x \in S$, что $a \leqq x \leqq e$, удовлетворяет условию минимальности. При этом условии доказательство должно быть немного изменено (ср. Фукс—Штейнфельд [1]).

В доказательстве предложения 13a мы заключаем, что существует такой элемент $w \in T$, что $a : w$ будет минимальным элементом в множестве всех таких элементов $a : x$, что $x \in T$. Это множество замкнуто относительно пересечений, и потому $a : w$ будет единственным минимальным элементом. Далее, $a(p) = a :: (a : w) \in T$, так как $a : a(p) = a : w \nleqq p$. Ясно, что каждый элемент x, для которого $x \leqq a(p)$, принадлежит множеству T, и если $v \in T$, то из соотношения $a : v \geqq a : w = a : a(p)$ вытекает $[a : a(p)]\, v \leqq (a : v)\, v \leqq a$, $v \leqq a :: [a : a(p)] = a(p)$. Таким образом, снова установлено существование элемента $a(p)$.

В доказательстве теоремы 13b мы проверим сначала существование простого элемента p, который больше или равен данному элементу $a \in S$, $0 < a < e$. Множество всех элементов $x \in S$, удовлетворяющих неравенству $x > a$, непусто, и потому мы можем выбрать в нем минимальный элемент b. Положим, что $p = a : b$ и $uv \leqq p$ (u, $v \in S$). Тогда $uvb \leqq a$. Если $v \nleqq p$, т. е. $vb \nleqq a$, то $a < a \vee vb \leqq b$ и из того, что элемент b выбран минимальным, вытекает $a \vee vb = b$. Следовательно, $ua \vee uvb = ub$, где левая часть меньше или равна a, поэтому $ub \leqq a$, $u \leqq a : b \leqq p$ и элемент p—простой. Ясно, что $a \leqq p < e$. Далее мы заключаем, что множество всех конечных пересечений правых главных компонент элемента a непусто и потому содержит единственный минимальный элемент a^*. Так как $a \leqq a^*$, нам надо доказать, что $a^* \leqq a$. Если $a : a^* \neq e$, то $a : a^* \leqq q$ для некоторого простого q. Но из $a^* \leqq a(q)$ вытекает неравенство $a : a^* \nleqq q$, доказывающее, что $a : a^* = e$ и $a^* \leqq a$.

Обратим внимание на тот факт, что в этом разделе пересечения были нужны только для частных, и, следовательно, вследствие леммы С п. 1 достаточно предполагать, что S является $\vee$-полуструктурой, а не структурой.

Можно наложить на S дополнительные условия, чтобы правые главные компоненты были степенями простых, а ненулевые элементы полугруппы S однозначно представлялись в виде произведения простых элементов (ср. Фукс—Штейнфельд [1] и следующий раздел).

6b. Разложения на простые множители

Сосредоточим наше исследование на с. у. полугруппах, в которых имеет место однозначное разложение на простые множители. В этом направлении получен ряд результатов, из которых мы рассмотрим два, вместе с вытекающими из них следствиями. Мы не предполагаем заранее структурной упорядоченности.

Мы говорим, что в ч. у. полугруппе S *имеет место однозначное разложение на простые множители*, если 1) каждый отличный от e элемент из S может быть записан в виде произведения взаимно перестановочных простых множителей единственным образом с точностью до порядка, и 2) из $a < b$ вытекает существование такого элемента $c \in S$, что $a = bc$.

Следующий результат в сущности принадлежит Шульгейферу [1][1]).

Теорема 13c. *Для того чтобы в ч. у. полугруппе S с нулем 0 и единицей e ($0 \leqq a \leqq e$ для всех $a \in S$) имело место однозначное разложение на простые множители, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа S удовлетворяла условиям:*

(i) *полугруппа S структурно упорядочена;*

(ii) *элементы из S удовлетворяют условию максимальности;*

(iii) *максимальные элементы*[2]) *из S перестановочны;*

(iv) *для каждого простого элемента p из S цепь $e > p > p^2 > \ldots > p^n > \ldots > 0$ является максимальной.*

Очевидно, что если имеет место однозначное разложение на простые множители, то справедливы условия (ii), (iv) и (iii). Чтобы проверить условие (i), возьмем разложение на простые множители элементов a и b, а тогда легко видеть, что произведение простых множителей с наименьшими показателями дает $a \vee b$, а с наибольшими показателями — $a \wedge b$, и равенство $c(a \vee b) = ca \vee cb$ справедливо для каждого $c \in S$.

---

[1]) На самом деле его результат более общий.

[2]) Элемент $p \in S$ называется максимальным, если из неравенств $p > e$ и $p \leqq x < e$ вытекает $x = p$.

Теперь мы предполагаем, что выполнены условия (i) — (iv), и собираемся проверить выполнение однозначного разложения на простые множители.

A. Если $a < e$, то для некоторого элемента $b > a$ частное $a : b$ будет простым элементом. Действительно, пусть $a : b$ максимальное среди отличных от e правых частных элемента a. Если $uv \leqq a : b$ и $v \nleqq a : b$, то из соотношений $a : b \leqq (a : b) : v = a : vb = a : (a \vee vb)$ и $a : vb \neq e$ вытекает $a : vb = a : b$. Поэтому $u \leqq a : b$, и элемент $a : b$ простой.

B. Если $a < e$, то существует такой простой элемент $p \geqq a$, что $a :: p > a$. Если элемент p является простым элементом вида $a : b$, то $a \leqq p$ и из $pb \leqq a$ вытекает $b \leqq a :: p$; здесь $a < b$ (ср. раздел A).

C. Правая главная компонента $a(p)$ удовлетворяет неравенству $p^n \leqq a(p)$ для некоторого целого положительного n. Если $a \nleqq p$, то $a(p) = e$ и утверждение очевидно. Если же $a \leqq p$, то $a(p) \leqq p$. Предположим, что $a(p) :: p^n$ — максимальный элемент среди частных $a(p) :: p^k$ ($k = 1, 2, \ldots$). Если $a(p) :: p^n < e$, то, в силу раздела B, существует такой простой элемент q, что $[a(p) :: p^n] :: q > a(p) :: p^n$. Из условия (iv) мы заключаем, что простые элементы максимальны, и потому, согласно условию (iii), они коммутируют. Следовательно,

$$[a(p) :: p^n] :: q = a(p) :: p^n q = [a(p) :: q] :: p^n,$$

и потому $a(p) :: q > a(p)$. Из утверждения (d) п. 6a следует, что $q \leqq p$ и, таким образом, $q = p$. Поэтому $a(p) :: p^{n+1} > a(p) :: p^n$, что противоречит выбору n. Мы заключаем, что $a(p) :: p^n = e$, $p^n \leqq a(p)$.

D. Если $a \leqq p$, то $a(p) = p^n$ для некоторого целого положительного n. В силу раздела C мы имеем $p^n \leqq a(p) \leqq \leqq p^m$, где числа n и m могут предполагаться выбранными, по возможности, минимальным и максимальным соответственно. Если $n = m$, доказательство закончено. Если же $m < n$, то $p^n < a(p) < p^m$ и $n > m + 1$, в силу условия (iv). Ясно, что $a(p) \vee p^{m+1} = p^m$, откуда $p^{n-m-1} a(p) \vee p^n = p^{n-1}$. Здесь левая часть $\leqq a(p)$, поэтому $p^{n-1} \leqq a(p)$, что невозможно.

E. Каждый элемент $a \neq e$ является произведением конечного числа простых. Из теоремы 13b и раздела D мы заключаем, что имеет место разложение $a = p_1^{n_1} \wedge \ldots \wedge p_r^{n_r}$, где простые степени принадлежат различным основаниям. Из предположений вытекает, что p_i коммутируют. Согласно свойству (c') п. 2, мы получаем $a = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$.

F. Покажем, наконец, что если $a = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r} \geqq p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r} = b$ с простыми множителями p_i, то $n_1 \leqq m_1, \ldots, n_r \leqq m_r$. Доказывая от противного, допустим, например, что $n_r > m_r$, т. е. $p_r^{n_r} < p_r^{m_r}$. Тогда $r > 1$ и

$$p_r^{n_r} : p_r^{m_r} \geqq p_r^{n_r - m_r} \quad \text{и} \quad p_r^{n_r} : p_r^{m_r} \geqq b : p_r^{m_r} \geqq p_1^{m_1} \ldots p_{r-1}^{m_{r-1}},$$

откуда

$$p_r^{n_r} : p_r^{m_r} \geqq p_r^{n_r - m_r} \vee p_1^{m_1} \ldots p_{r-1}^{m_{r-1}} = e.$$

Следовательно, $p_r^{m_r} \leqq p_r^{n_r}$, что противоречиво. Этим устанавливается единственность и завершается доказательство теоремы.

В следующем критерии мы не пользуемся структурной упорядоченностью полугруппы S, а пользуемся только тем, что она полугруппа с правым делением.

Теорема 13d (Фукс—Штейнфельд [1]). *В ч. у. полугруппе S с нулем 0 и единицей e ($0 \leqq a \leqq e$ для всех $a \in S$) однозначное разложение на простые множители имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

I) S — полугруппа с правым делением;

II) элементы из S подчинены условию максимальности;

III) если $a < b$, то существует такой элемент $c \in S$, что $a = bc$;

IV) из $ab = 0$ следует $a = 0$ или $b = 0$, и из $a = ba \neq 0$ вытекает $b = e$.

Так как необходимость очевидна, мы ограничимся доказательством того, что если полугруппа S удовлетворяет условиям I—IV, то в S имеет место однозначное разложение на простые множители.

A. Каждый элемент $a \in S$, $0 < a < e$, является произведением максимальных элементов. В силу условия II), существует такой максимальный элемент p_1, что $a \leqq p_1$. Если $a = p_1$, нечего доказывать. Если же $a < p_1$, то мы применим условие III), чтобы заключить, что для некоторого элемента $a_1 \in S$ имеет место равенство $a = p_1 a_1$. Так как полугруппа S отрицательно упорядочена, справедливо неравенство $a \leqq a_1$; здесь из равенства вытекало бы, в силу условия IV), $p_1 = e$, поэтому $a < a_1$. Повторение этих рассуждений приводит к соотношениям $a = p_1 a_1 = p_1 p_2 a_2 = \ldots$, где $a < a_1 < a_2 < \ldots$. Условие II) гарантирует, что этот процесс оборвется, и мы приходим к равенству $a = p_1 p_2 \ldots p_m$, где p_i — максимальные элементы.

B. Элемент $p \neq 0$ тогда и только тогда является максимальным, когда он простой. Если элемент p максимален и $ab \leqq p$, $a \nleqq p$, то $a \leqq p : b$. Поэтому из неравенства $p \leqq p : b$ вытекает $p < p : b$, $p : b = e$ и $b \leqq p$. Таким образом, p — простой элемент. Обратно, если элемент $p \neq 0$ прост и $p < a$, то, в силу условия III), некоторый элемент $b \in S$ удовлетворяет условию $p = ab$. Из простоты вытекает, что $b \leqq p$, и потому $b = p$. Из равенства $p = ap$ и условия IV) мы заключаем, что $a = e$, и p — максимальный элемент.

C. Полугруппа S коммутативна. Ввиду пунктов A и B достаточно показать, что простые элементы коммутируют. Для различных простых элементов p и q существует такой элемент $c \in S$, что $pq = qc$. Так как $q \nleqq p$, мы имеем $c \leqq p$, т. е. $pq \leqq qp$. В силу симметрии, мы получаем $pq = qp$.

Таким образом, показано, что каждый элемент $a \neq 0$, e является произведением перестановочных простых элементов, и мы знаем из условия IV), что 0 является простым элементом.

D. S — полугруппа с сокращениями: из $ax = bx$ и $x \neq 0$ вытекает $a = b$. Сначала мы рассмотрим тот случай, когда $a \leqq b$. Если $a < b$, в силу условия III), имеет место равенство $a = bc$ для некоторого $c \in S$, а потому справедливо равенство $bcx = bx$. Согласно разделу C и условию IV), $c = e$, что абсурдно. Если же элементы a и b произвольны, то из $a \leqq ax : x$ вытекает $ax \leqq (ax : x)\, x \leqq ax$ и $(ax : x)\, x = ax$. С помощью уже рассмотренного случая мы заключаем, что $a = ax : x$. Аналогично, $b = bx : x$, и потому из равенства $ax = bx$, действительно, следует $a = b$.

E. Если имеют место равенства $0 \neq a = p_1 \ldots p_n = q_1 \ldots q_m$ для простых p_i, q_j, то $n = m$ и, после соответствующей перенумерации, $p_1 = q_1, \ldots, p_n = q_n$. Так как $p_1 \ldots p_n \leqq q_1$, некоторый элемент p_i, скажем p_1, удовлетворяет неравенству $p_1 \leqq q_1$. Из раздела B мы получаем равенство $p_1 = q_1$. Согласно разделу D, мы можем сократить на p_1 и повторить рассуждения, и т. д. Это завершает доказательство.

Следствие 13e (Биркгоф [5]). *Пусть* S — *с. у. полугруппа с сокращением, обладающая такими элементами* 0 *и единица* e, *что* $0 \leqq a \leqq e$ *для всех* $a \in S$. *Если полугруппа* S *удовлетворяет условиям II и III теоремы 13d, то в* S *имеет место однозначное разложение на простые множители.*

Действительно, из условия максимальности и структурной упорядоченности вытекает, что S — полугруппа с делением, в то время как условие IV) является частным случаем закона сокращения.

По поводу аналогичных результатов ср. Ковальский [1].

6с. Главные элементы

Исследование множества идеалов кольца с помощью с. у. полугрупп обладает тем неудобством, что в нашем распоряжении нет аналогов главных идеалов, с которыми легче оперировать. Имеется ряд возможностей определить замену главных идеалов. Мы упомянем здесь одну, которая наиболее тесно связана как с умножением, так и со структурными операциями.

Предположим опять, что S — с. у. полугруппа с 0 и единицей $e\,(0 \leqq a \leqq e$ для всех $a \in S)$, в которой выполняется условие максимальности.

Элемент $t \in S$ будет называться *главным* (Дилуэрт [3]), если равенства

$$(a \wedge b : t)t = at \wedge b \qquad (1)$$

и

$$(a \vee bt) : t = a : t \vee b \qquad (2)$$

имеют место для всех $a, b \in S$. Очевидно, что 0 и e — главные элементы, а элемент $t \in S$ тогда и только тогда будет главным, когда в условии (1) имеет место неравенство $\geqq$, а в условии (2) — неравенство $\leqq$.

Непосредственные выкладки показывают, что если S — структура всех идеалов коммутативного кольца, то главные идеалы t удовлетворяют условиям (1) и (2).

Следует отметить следующие свойства главных элементов.

(a) *Если* t — *главный элемент, то* $(b : t)t = b \wedge t$ *и* $bt : t = b \vee (0 : t)$ *для всех* $b \in S$. Мы получаем это, полагая в условиях (1) и (2) соответственно $a = e$ и $a = 0$.

(b) *Если* t — *главный элемент и* $a \leqq t$, *то* $a = (a : t)t$. Это является частным случаем свойства (a).

(c) *Если* s, t — *главные элементы, то и* st — *главный элемент*. Действительно,

$$(a \wedge b : st)\,st = [a \wedge (b : t) : s]\,st = (as \wedge b : t)\,t = ast \wedge b$$

и

$$(a \vee bst) : st = [(a \vee bst) : t] : s = (a : t \vee bs) : s = \\ = (a : t) : s \vee b = a : st \vee b$$

для всех a, $b \in S$. Таким образом, главные элементы образуют подполугруппу в S.

(d) *Если* t — *ненулевой главный элемент, то отображение* $x \to xt$ *отображает интервал* $[a, b]$ *полугруппы* S *на интервал* $[at, bt]$ *с сохранением объединений. Если* 0 — *простой элемент и* $t \neq 0$, *то это отображение является структурным изоморфизмом.*

Так как указанное отображение сохраняет объединения, согласно определению с. у. полугрупп, нам надо только показать, что оно будет отображением на. Если $v \in [at, bt]$, то $v = v \wedge bt = (v : t \wedge b)t$, где $b \geqq v : t \wedge b \geqq at : t \wedge b \geqq a \wedge b = a$, и потому элемент $x = v : t \wedge b \in [a, b]$ отображается на v.

Если 0 — простой элемент и $t \neq 0$, то из неравенства $(0 : t)\,t \leqq 0$ вытекает $0 : t = 0$. Таким образом, в силу свойства (a), $xt : t = x$, и потому отображение взаимно однозначно. Из изотонности следует структурный изоморфизм.

Обратимся к условиям, гарантирующим, что каждый неразложимый в пересечение элемент q будет *правым примарным* в следующем смысле: неравенство $ab \leqq q$ влечет $a \leqq q$ или $b^k \leqq q$ для некоторого целого k.

Теорема 13f (Дилуэрт [3]). *Пусть* S — *с. у. полугруппа с* 0 *и* e $(0 \leqq a \leqq e$ *для всех* $a \in S)$, *удовлетворяющая условию максимальности. Если* S — *дедекиндова структура и каждый элемент из* S *является объедине-*

нием главных элементов, то всякий не разложимый в пересечение элемент из S является правым примарным.

Пусть q — не разложимый в пересечение элемент, и предположим сначала, что в неравенстве $at \leqq q$ элемент t главный и $a \nleqq q$. Пусть, кроме того, $(a \vee q) : t^n$ — максимальный элемент в множестве всех элементов вида $(a \vee q) : t^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $b = (a \vee q) \wedge (t^{n+1} \vee q)$. Тогда

$$b : t^{n+1} = (a \vee q) : t^{n+1} \wedge (t^{n+1} \vee q) : t^{n+1} =$$
$$= (a \vee q) : t^{n+1} \wedge e = (a \vee q) : t^n,$$

в силу выбора n. Так как t^n и t^{n+1} — главные элементы, $(b : t^{n+1})\, t^{n+1} = b \wedge t^{n+1}$ и $[(a \vee q) : t^n]\, t^n = (a \vee q) \wedge t^n$, согласно свойству (a). Ввиду дедекиндовости структуры и неравенства $q \leqq b$ мы имеем

$$b = (t^{n+1} \vee q) \wedge b = q \vee (b \wedge t^{n+1}) = q \vee (b : t^{n+1})\, t^{n+1} =$$
$$= q \vee [(a \vee q) : t^n]\, t^{n+1} = q \vee [(a \vee q) \wedge t^n]\, t \leqq$$
$$\leqq q \vee (a \vee q)\, t = q \vee at \vee qt \leqq q.$$

Следовательно, $q = b = (a \vee q) \wedge (t^{n+1} \vee q)$. Здесь $a \vee q > q$, и потому из неразложимости в пересечение вытекает $q = t^{n+1} \vee q$, $t^{n+1} \leqq q$. Если же, вообще, $ac \leqq q$ и $a \nleqq q$, то запишем элемент c в виде $c = t_1 \vee \ldots \vee t_r$, где t_i — главные элементы. Теперь для каждого i имеет место неравенство $at_i \leqq q$, и потому существуют такие числа k_i, что $t_i^{k_i} \leqq q$ при $i = 1, \ldots, r$. Если мы положим, что $k = k_1 + \ldots + k_r$, то $c^k \leqq t_1^{k_1} \vee \ldots \vee t_r^{k_r} \leqq q$, и мы приходим к желаемому выводу.

Легко видеть, что в полугруппе S имеет место аналог теоремы 6 для коротких разложений в пересечение правых примарных элементов. ✱

ПРОБЛЕМЫ

Мы перечислим здесь некоторые нерешенные проблемы теории частично упорядоченных групп, колец и полугрупп.

1. Найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять группа G, для того чтобы в G существовал направленный (или изолированный направленный) порядок.

2. Какие группы G обладают тем свойством, что каждый частичный порядок группы G может быть продолжен до направленного порядка в G?

3. В каких группах каждый частичный порядок может быть продолжен до изолированного частичного порядка?

4. (Биркгоф [3]). При каких условиях абстрактная группа изоморфна с. у. группе?

5. Охарактеризовать (теоретико-групповым образом) те группы, в которых каждый частичный порядок может быть усилен до структурного.

6. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы направленное множество было o-изоморфно (a) ч. у. группе, (b) ч. у. кольцу, (c) ч. у. полугруппе.

7. Когда (полная) дистрибутивная структура будет структурно-изоморфна (полной) с. у. группе? Положительному конусу с. у. группы?

8. Пусть G — такая направленная (с. у.) группа, что каждая ее л. у. подгруппа коммутативна. Когда мы можем заключить, что G также коммутативна?

9. (a) Найти условия, необходимые и достаточные для существования на O-группе (O^*-группе) G такого линейного порядка, чтобы заранее заданная подгруппа H из G была бы выпуклой. [Если H — нормальный делитель, то G/H также должна быть O-группой.]

(b) Аналогичный вопрос для колец.

10. Пусть Σ — некоторая система подгрупп группы G. При каких условиях можно так определить направленный (или структурный) порядок на G, чтобы все подгруппы из Σ были выпуклыми? Или чтобы Σ было множеством всех выпуклых подгрупп группы G?

11. Назовем подгруппу C O-группы (O^*-группы) G *абсолютно выпуклой*, если она выпукла относительно каждого линейного порядка группы G. Рассмотреть свойства абсолютно выпуклых подгрупп1).

12. (a) Описать л. у. группы B, которые обладают тем свойством, что если B—выпуклый нормальный делитель в некоторой л. у. группе G, то G будет лексикографическим произведением л. у. группы A и группы B2).

(b) Найти л. у. группы A, для которых каждая л. у. группа G, o-эпиморфным образом которой является A, расщепляется в лексикографическое произведение A и ядра этого o-эпиморфизма.

(c) Те же вопросы только для абелевых групп.

13. (Г. Гретцер). Использовать следующее общее понятие вместо $\mathfrak{m}$-прямого произведения и лексикографического σ-произведения для того, чтобы получить подходящее обобщение, объединяющее теоремы о продолжении 8 и 9 гл. 1:

Пусть Λ — такое л. у. множество индексов, что

(i) Λ разбивается на попарно непересекающиеся подмножества Λ_μ $(\mu \in M)$;

(ii) задан такой идеал $\mathcal{J}$ булевой алгебры всех подмножеств из M, что все конечные подмножества из M принадлежат $\mathcal{J}$;

(iii) для каждого μ задан такой идеал $\mathcal{J}_\mu$ булевой алгебры всех подмножеств из Λ_μ, что $\mathcal{J}_\mu$ содержит только

---

1) В группе G с двумя образующими a и b и определяющим соотношением $a^{-1}ba = b^2$ нормальный делитель, порожденный элементом b, будет абсолютно выпуклым. Другим примером является группа всех (2×2)—матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где a и b—элементы л. у. тела и $a > 0$. Матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образуют абсолютно выпуклую подгруппу (Б. Нейман).

2) Второй пример сноски 1), кажется, будет такой группой.

вполне упорядоченные подмножества и включает все конечные подмножества из Λ_μ.

Определим подгруппу $H = H(\mathcal{J}, \mathcal{J}_\mu)$ («смешанное прямо-лексикографическое» произведение)1) полного прямого произведения

$$G = \prod_{\lambda \in \Lambda}{}^{*} G_\lambda$$

направленных (с. у.) групп G_λ как множество всех векторов $\langle \ldots, g_\lambda, \ldots \rangle$ из G $(g_\lambda \in G_\lambda)$, удовлетворяющих условиям

$\Lambda(g) \cap \Lambda_\mu \in \mathcal{J}_\mu$ для каждого μ; $[\mu \in M \mid \Lambda(g) \cap \Lambda_\mu \neq \varnothing] \in \mathcal{J}$,

где

$$\Lambda(g) \Leftarrow [\lambda \in \Lambda \mid g_\lambda \neq e],$$

и положим для некоторого $g \in H$, что $g \geqq e$ тогда и только тогда, когда для каждого μ первая отличная от e компонента g_λ с $\lambda \in \mathcal{J}_\mu$ больше, чем e.

14. (a) Попробовать вывести теорему Виноградова о том, что свободное произведение O-групп также будет O-группой, из условий гл. III, п. 2.

(b) Для каких свободных произведений с объединенной подгруппой может быть установлен аналогичный результат?

15. Будет ли прямое произведение O^*-групп снова O^*-группой?2)

16. (Б. Нейман). Пусть G — O-группа и $a \in G$. Когда G может быть погружена в O-группу H, содержащую такой элемент x, что $x^2 = a$? В каком случае присущий G линейный порядок может быть распространен на H?

17. (Б. Нейман). Назовем группу U *универсальной* для класса групп $\mathscr{C}$, если группа U содержит изоморфный образ каждой группы $G \in \mathscr{C}$. Существует ли счетная группа, универсальная для класса счетных O-групп? [Не существует л. у. группы, универсальной для класса счетных л. у. (абелевых) групп.]

---

1) Ср. определение смешанного произведения п. 7a, гл. II.—*Прим. перев.*

2) Эта проблема уже решена, см. гл. III, теорема 16b (добавление к русскому переводу).

18. (a) (Б. Нейман). Если число линейных порядков на O-группе конечно, должно ли оно быть степенью 2? А если оно бесконечно, должно ли оно быть степенью 2?

(b) Те же вопросы для O-колец[1]).

(c) Что из себя представляют O-группы (O-кольца) с конечным числом линейных порядков?

19. Описать теоретико-групповое строение конечно порожденных O^*-групп. Вообще исследовать теоретико-групповые свойства O^*-групп. Существуют ли алгебраически простые O^*-группы?

20. Охарактеризовать O^*-группы, в которых каждая подгруппа снова будет O^*-группой. Вообще, какие подгруппы O^*-групп также являются O^*-группами?

21. Допустим, что группа G обладает тем свойством, что каждый изолированный частичный порядок на G может быть продолжен до линейного порядка на G. Должна ли тогда группа G быть O^*-группой?

22. Распространить результаты гл. III на лупы (квазигруппы).

23. (Биркгоф [3]). Абстрактно охарактеризовать свободную л. у. группу с двумя (и вообще с конечным числом) образующих. (Ср. Вейнберг [1].)

24. Определить циклический частичный порядок, надлежащим образом модифицируя аксиомы циклического порядка, гл. IV, п. 6, и развить теорию циклически частично упорядоченных групп.

25. Установить теоретико-кольцевые свойства O-колец и O^*-колец.

26. Перечислить характеристические свойства системы всех выпуклых подколец (левых идеалов, идеалов) л. у. кольца.

27. (Г. Грецер). Пусть R — (ассоциативное) O-кольцо. Как можно охарактеризовать множество всех элементов из R, которые тотально положительны в том смысле, что они положительны относительно каждого линейного порядка кольца R?

28. Развить теорию для альтернативных, йордановых и вообще для O-колец с ассоциативными степенями (в частности, для O-колец с делением).

---

[1]) Ср. Клингенберг [1].

29. Существует ли полиномиальное тождество, из которого следует, что (ассоциативное) O-кольцо должно быть O^*-кольцом? [В случае групп таким тождеством будет $xy = yx$.]

30. (a) Что из теории действительно замкнутых полей может быть сохранено для тел, являющихся максимальными O-телами в том смысле, что над ними не существует O-тел конечной степени > 1, и допускающих только один линейный порядок?

(b) Аналогичный вопрос для коммутативных и ассоциативных колец.

31. Описать направленные порядки поля комплексных чисел и тела кватернионов.

32. (a) Определим O-радикал абстрактного кольца R как пересечение всех таких идеалов I, что R/I — O-кольцо. Попытаться определить O-радикал в терминах обычных теоретико-кольцевых понятий.

(b) Что представляет собой O-радикал с. у. кольца R, если предполагается, что I являются L-идеалами, а R/I л. у. относительно индуцированного порядка? [Это могло бы характеризовать отклонение от свойства быть F-кольцом.]

(c) Соответствующие вопросы для групп.

33. Рассмотреть различные типы радикалов неассоциативных л. у. (с. у.) колец.

34. Когда абстрактное кольцо изоморфно с. у. кольцу?

35. Охарактеризовать мультипликативные группы O-тел как абстрактные группы.

36. Распространить результаты гл. VII на полукольца.

37. Рассмотреть с. у. полукольца.

38. Развить теорию с. у. модулей над с. у. кольцами.

39. Найти условия, при которых система линейных неравенств в л. у. или с. у. кольцах (телах) обладала бы решением в самом кольце (или в некотором его л. у. расширении).

40. Исследовать билинейные формы в л. у. (с. у.) ассоциативных кольцах.

БИБЛИОГРАФИЯ1)

Алберт (Albert A. A.)
  [1] On ordered algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 521—522.
  [2] A property of ordered rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 128—129.

Алимов Н. Г.
  [1] Об упорядоченных полугруппах, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **14** (1950), 569—576.

Аллинг (Alling N. L.)
  [1] On ordered divisible groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94** (1960), 498—514.
  [2*] A characterization of abelian η_α-groups in terms of their natural valuation, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **47** (1961), 711—713.

Андерсон (Anderson F. W.)
  [1*] On *f*-rings with the ascending chain condition, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 715—721.

Андрус, Бастон (Andrus J. P., Buston A. T.)
  [1*] On ordered groups, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 619—628.

Артин (Artin E.)
  [1] Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, *Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, **5** (1926), 100—115.

Артин, Шрейер (Artin E., Schreier O.)
  [1] Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, **5** (1926), 85—99.

Auберт (Aubert K.)
  [1*] Un théorème d'immersion pour une classe étendue de structures algébriques réticulées, *An. Acad. Brasil. Ci.*, **31** (1959), 321—329.
  [2*] Theory of *x*-ideals, *Acta Math.*, **107** (1962), 1—52.

Банашевский (Banaschewski B.)
  [1] Totalgeordnete Moduln, *Archiv Math.*, 7 (1956), 430—440.
  [2] Über die Vervollständigung geordneter Gruppen, *Math. Nachrichten*, **16** (1957), 51—71.

Бауэр (Bauer H.)
  [1] Geordnete Gruppen mit Zerlegungseigenschaft, S.—B. Bauer Akad. Wiss. Math.—Nat. Klasse, 1958, 25—36.

Берджесс (Burgess D. C. J.)
  [1] Generalized intervals in partially ordered groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **55** (1959), 165—171.

Берджесс, Мак-Фадден (Burgess D. C. J., McFadden B.)
  [1*] Systems of ideals in partially ordered semigroups, *Math. Z.*, **79** (1962), 439—450.

Биркгоф (Birkhoff G.)
  [1] Lattice-ordered groups, *Ann. Math.*, **43** (1942), 298—331.
  [2] Lattice-ordered Lie groups, Speiser Festschrift (Zürich, 1945), 209—217.
  [3] Теория структур, ИЛ, М., 1952.
  [4] Groupes réticulés., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **11** (1949), 241—250.
  [5*] Lattice-ordered demigroups, Semin. Dubreil — Pisot, 1960/61, N 19, 1—25.

Биркгоф, Пирс (Birkhoff G., Pierce R. S.)
  [1] Lattice-ordered rings, *An. Acad. Brasil. Ci.*, **28** (1956), 41—69.

Блит (Blyth T. S.)
  [1*] La form générale des structures algèbriques résiduées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **254** (1962), 2112—2114, 2506—2508.
  [2*] Groupoïdes résidués et demi-groupes nomaux, Semin. Dubreil 1962/63.
  [3*] Contribution à la thèorie de la résiduation dans les structures algebriques ordonnées, Thèse (Paris, 1963).

Босбах (Bosbach B.)
  [1*] Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimzerlegungen, *Math. Ann.*, **139** (1960), 184—196.
  [2*] Eine Zerlegungs- und Idealtheorie für kommutative Halbgruppen, *Math. Z.*, **82** (1963), 37—58.

Брак (Bruck R. H.)
  [1] A survey of binary systems, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958.

Брейнерд (Brainerd B.)
  [1] On a class of lattice-ordered rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 673—683.
  [2*] *F*-rings of continuous functions, *Can. J. Math.* **11** (1959), 80—86.

Бриттон, Шепперд (Britton J. L., Shepperd J. A. H.)
  [1] Almost ordered groups, *Proc. London Math. Soc.*, **1** (1951), 188—199.

Бузулини (Busulini B.)
  [1] Sulla relazione triangolare in un *l*-gruppo, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **28** (1958), 68—70.
  [2*] Sui gruppi non regolarmente ordinati, *Rend. Sem. Mat., Univ. Padova*, **33** (1963), 285—296.

Бурбаки (Bourbaki N.)
  [1] Algèbre, Chap. VI. Groupes et corps ordonnés, Paris, 1952.

---

1) Звездочкой отмечена литература, добавленная автором при переводе. — *Прим. перев.*

Бэй (Bae M. S.)

[1*] Notes on the set of the partial orderings, *Kyungpook Math. J.*, **3** (1960), 13—21.

Бэр (Baer R.)

[1] Über nicht-archimedisch geordnete Körper, *S.—B. Heidelberger Akad. Wiss.*, **8**, Abh. (1927), 3—13.

[2] Zur Topologie der Gruppen, *J. reine und angew. Math.*, **160** (1929), 208—226.

Вагнер В. В.

[1] Представление упорядоченных полугрупп, *Матем. сб.*, **38** (1956), 203—240.

Вагнер (Wagner W).

[1] Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme, *Math. Ann.*, **113** (1937), 528—567.

Вайда (Vaida D.)

[1*] Sur les corps partiellement ordonnés, *Comun. Acad. RPR*, **9** (1959), 1243—1248.

[2*] Sur les sous-groupes isolés d'un groupe réticulé non commutatif, *Comun. Acad. RPR*, **10** (1960), 935—939.

[3*] Un probleme de G. Birkhoff, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **15** (1962), 801—803.

[4] Некоторые результаты относительно алгебраических частично упорядоченных систем (диссертация). Rumania, Bucharest, Institute for Atomic Physics, Report EC/7, August 1964.

[5*] Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **257** (1963), 2053—2055, 2222—2223.

Ван-дер-Варден (van der Waerden B. L.)

[1] Moderne Algebra, vol. 1, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1950 (есть русский перевод I издания).

Ван Ши-цзян (Wang, Sh.-Ch.)

[1] Representation of ordered Abelian groups and ordered rings of finite degree, *Acta Math. Sinica*, **5** (1955), 425—432.

[2] A not on ordered rings of real vectors, *Acta Math. Sinica*, **5** (1955), 65—80.

Вейнберг (Weinberg E. C.)

[1*] Completely distributive lattice-ordered groups, *Pacif. J. Math.*, **12** (1962), 1131—1137.

[2*] Free lattice-ordered abelian groups, *Math. Ann.*, **151** (1963), 187—199.

Вейнерт (Weinert H. J.)

[1*] Ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die ZPE-Eigenschaft in kommutativen, regulären Halbgruppen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), 24—27.

Виноградов А. А.

[1] О свободном произведении упорядоченных групп, *Матем. сб.*, **25** (1949), 163—168.

[2] Частично упорядоченные локально нильпотентные группы, *Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та.*, **4** (1953), 3—18.

[3] К теории упорядоченных полугрупп, *Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та*, **4** (1953), 19—21.

[4] К теории частично упорядоченных нильпотентных групп, *Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та*, **5** (1954), 61—64.

[5*] Замечания по теории частично упорядоченных групп и полугрупп, Алгебра и логика, семинар, **1**, №2 (1962), 22—29.

Волк (Wolk E. S.)

[1*] On the interval topology of an *l*-group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 304—307.

Габович Е.

[1*] Частично упорядоченные группы, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп, *Уч. зап. Тартусск. ун-та*, вып. 102 (1961), 289—293.

[2*] Частично упорядоченные Ω-группы, *Уч. зап. Тартусск. ун-та*, 102 (1961), 294—300.

Гёльдер (Hölder O.)

[1] Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass, *Ber Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig., Math. Phys. Cl.*, **53** (1901), 1—64.

Гильберт (Hilbert D.)

[1] Основания геометрии, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Гоффман (Goffman C.)

[1] A lattice homomorphism of a lattice-ordered group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 547—550.

[2] Remarks on lattice-ordered groups and vector lattices. I. Carathéodory functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88** (1958), 107—120.

[3] A class of lattice-ordered algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 170—173.

Гофман (Hofmann K. A. H.)

[1] Über archimedisch angeordnete, einseitig distributive Doppel-loops, *Arch. Math.*, **10** (1959), 348—355.

Грейветт (Gravett K. A. H.)

[1] Valued linear spaces, *Quart. J. Math. Oxford*, **6** (1955), 309—315.

[2] Ordered Abelian groups, *Quart. J. Math. Oxford*, **7** (1956), 57—63

[3*] Metrics of sets and linear spaces, *Quart. J. Math. Oxford*, **10** (1959), 9—16.

Гретцер, Шмидт (Grätzer G., Schmidt E. T.)

[1] Uber die Anordnung von Ringen, *Acta math. Acad. scient. hung.*, **8** (1957), 259—260.

Гуревич Ю. Ш., Кокорин А. И.

[1*] Универсальная эквивалентность упорядоченных абелевых групп, Алгебра и логика, семинар, **2**, № 1 (1963), 37—39.

Джонсон (Johnson D. G.)

[1] A structure theory for a class of lattice-ordered rings, *Acta Math.*, **104** (1960), 163—215.

[2*] On a representation theory for a class of Archimedean lattice-ordered rings, *Proc. London Math. Soc.*, **12** (1962), 207—225.

Джонсон (Johnson R. E.)

[1] On ordered domains of integrity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 414—416.

Дилуэрт (Dilworth R. P.)

[1] Abstract residuation over lattices, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 262—268.

[2] Non-commutative residuated lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **46** (1939), 426—444.

[3*] Abstract commutative ideal theory, *Pacif. J. Math.*, **12** (1962), 481—498.

Дьедонне (Dieudonné J.)

[1] Sur la théorie de la divisibilité, *Bull. Soc. Math. France*, **69** (1941), 133—144.

[2] Sur les corps ordonnables, *Bol. Soc. Mat. São Paolo*, **1** (1946), 69—75; **2** (1947), 35.

Дюбойс (Dubois D. W.)

[1] On partly ordered fields, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 918—930.

Дюбрей (Dubreil P.)

[1] Algebre, I. Paris, 1954.

[2] Introduction à la théorie des demigroupes ordonnés, Convegno Ital.-Franc. Algebra Astratta; Padova, 1956, 1—33.

[3] Quelques problèmes d'algèbre liés à la théorie des demi-groupes Colloque d'Algèbre Sup., Bruxelles, 1956, 29—44.

Дюбрей-Жакотэн (Dubreil-Jacotin M.-L.)

[1] Quelques propriétés des équivalences réqulières par rapport à la multiplication et à l'union, dans un treillis à multiplication commutative avec élément unitée, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 287—289.

[2] Quelques propriétés arithmétiques dans un demi-groupe demi-réticulé entier, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 1174—1176.

[3] Théorèmes de décomposition dans certains treillis et demi-groupes réticulés sans condition de chaine, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 2415—2417.

[4*] Sur les images homomorphes d'un demigroupe ordonné, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), 101—115.

Дюбрей-Жакотэн, Круазо (Dubreil-Jacotin M.-L., Croisot R.)

[1] Equivalences règulieres dans un ensemble ordonné, *Bull. Soc. Math. France*, **80** (1952), 11—35.

Дюбрей-Жакотэн, Лесьер, Круазо (Dubreil-Jacotin M.-L., Lesieur L., Croisot R.)

[1] Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques, Paris, 1953, Partie II.

Егер (Jaeger A).

[1] Adjunction of subfield closures to ordered division rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952), 35—39.

Жаффар (Jaffard P.)

[1] Théorie des filets dans les groupes réticulés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 1024—1025.

[2] Applications de la théorie des filets, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 1125—1126.

[3] Nouvelles applications de la théorie des filets, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 1631—1632.

[4] Groupes archimédiens et para-archimédiens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **231** (1950), 1278—1280.

[5] Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind. I—II, *Bull. Soc. Math. France*, **80** (1952), 61—100; **81** (1953), 41—61.

[6] Contribution à l'étude des groupes ordonnés, *J. math. pures et appl.*, **32** (1953), 203—280.

[7] Extension des groupes réticules et applications, *Publs. scient. Univ. Alger.*, A, **1** (1954), 197—222.

[8] Réalisation des groupes complètement réticulés, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 295—305.

[9] Sur les groupes réticulés associés à un groupe ordonné, *Publs scient. Univ. Alger.*, A, **2** (1957), 173—203.

[10] Les systemes d'idéaux, Paris, 1960.

[11*] Sur le spectre d'un groupe réticulés et l'unicité des realisations irreductibles, *Ann. Univ. Lyon*, III *Sér.*, *Sect.* A, **22** (1959), 43—47.

Зайцева М. И.

[1] О совокупности упорядочений абелевой группы, *Успехи матем. наук*, **8**, вып. 1 (1953), 135—137.

[2] Правоупорядоченные группы, *Уч. зап. Шуйск. гос. пед. ин-та*, **6** (1958), 205—226.

Закон (Zakon E.)

[1*] Generalized archimedean groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **99** (1961), 21—40.

Заманский (Zamansky M.)

[1] Groupes de Riesz, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 2933—2934.

Зарецкий К. А.

[1] Представление упорядоченных полугрупп бинарными отношениями, *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **23** (1959), 48—50.

Зелинский (Zelinsky D.)

[1] On ordered loops, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 681—697.

[2] Non-associative valuations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 175—183.

Земмер (Zemmer J. L.)

[1] Ordered algebras which contain divisors of zero, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 177—183.

Ивасава (Iwasawa K.)

[1] On the structure of conditionally complete lattice-groups, *Japan J. Math.*, **18** (1943), 777—789.

[3] On linearly ordered groups, *J. Math. Soc. Japan*, **1** (1948), 1—9.

Исивата (Isiwata T.)

[1] Non-discrete linearly ordered groups, Kodai Math. Semin. Repts, 1950, 84—88.

[2] Linearization of topological groups and ordered rings., Kōdai Math. Semin. Repts, 1952, 33—35.

Исэки (Iséki K.)

[1] Structure of special ordered loops. *Portug. Math.*, **10** (1951), 81—83.

[2] On simply ordered groups, *Portug. Math.*, **10** (1951), 85—88.

Йосида (Yosida K.)

[1] On vector lattice with a unit. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 121—124.

Йосида, Фукамия (Yosida K., Fukamiya M.)

[1] On vector lattice with a unit. II., *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 479—482.

Калман (Kalman J. A.)

[1] An identity for *l*-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 931—932.

Канторович Л. В.

[1] Lineare halbgeordnete Räume, *Матем. сб.*, **2**(44)(1937), 121—168.

Каргаполов М. И.

[1*] Вполне доупорядочиваемые группы, Алгебра и логика, семинар, 1, № 2 (1962), 16—21.

[2*] Классификация упорядоченных абелевых групп по элементарным свойствам, Алгебра и логика, семинар, **2**, № 2 (1963), 31—46.

[3*] Доупорядочиваемые группы, Алгебра и логика, семинар, **2**, № 6 (1963), 5—14.

Картан (Cartan H.)

[1] Un théorème sur les groupes ordonnés, *Bull. Sci. Math.*, **63** (1939), 201—205.

Керре (Querré J.)

[1*] Contribution à la théorie des structures ordonnés et des systémes d'idéaux (Thése, 1963).

Керстан (Kerstan J.)

[1] Elementfreie Begründung der allgemeinen Ideal- und Modultheorie, *Ber. Math. Tagung. Berlin*, 1953, 49—57.

Кертис (Curtis P. C.)

[1*] Order and commutativity in Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 643—646.

Клейн-Бармен (Klein-Barmen F.)

[1] Über Verbände mit einer weiteren assoziativen und kommutativen Elementverknüpfung, *Math. Z.*, **47** (1942), 85—104.

[2] Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. I—II, *Math. Z.*, **48** (1942—43), 275—288, 715—734.

[3] Ein Beitrag zur Theorie der linearen Holoide, *Math. Z.*, **51** (1949), 355—366.

Клингенберг (Klingenberg W.)

[1] Sopra il numero degli ordinamenti di un corpo, *Atti Accad. Naz. Lincei*, **14** (1953), 395—396.

Клиффорд (Clifford A. H.)

[1] Partially ordered Abelian groups, *Ann. Math.*, **41** (1940), 465—473.

[2] A noncommutative ordinally simple linearly ordered group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 902—903.

[3] A class of partially ordered Abelian groups related to Ky Fan's characterizing subgroups, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 347—356.

[4] Note on Hahn's theorem on ordered Abelian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 860—863.

[5] Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 631—646.

[6] Ordered commutative semigroups of the second kind, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), 682—687.

[7] Totally ordered commutative semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 305—316.

[8] Completion of semi-continuous ordered commutative semigroups, *Duke Math. J.*, **26** (1959), 41—59.

Ковальский (Kowalski O.)

[1*] Zum Begriff der Quasiteilbarkeit in ganzen *l*-Halbgruppen, *Časop. pěstov. mat.*, **89** (1964), 53—77.

Кокорин А. И.

[1*] О классе структурно упорядоченных групп, *Матем. зап. Уральского ун-та*, **3** : 3 (1962), 37—38.

[2*] Способы структурного упорядочения свободной абелевой группы с конечным числом образующих, *Матем. зап. Уральского ун-та*, **4** : 1 (1963), 45—48.

[3*] О доупорядочиваемых группах, *ДАН СССР*, **151** (1963), 31—33.

[4*] К теории вполне доупорядочиваемых групп, *Матем. зап. Уральского ун-та*, 4 : 3 (1963), 25—29.

[5*] Доупорядочиваемость прямого произведения доупорядочиваемых групп, *Матем. зап. Уральского ун-та*, 4 : 3 (1963), 95—96.

[6*] К теории доупорядочиваемых групп, Алгебра и логика, семинар, **2**, № 6 (1963), 15—20.

Кокорин А. И., Копытов В. М.

[1*] О некоторых классах упорядоченных групп, Алгебра и логика, семинар, **1**, № 3 (1962), 21—23.

Кон (Cohn P. M.)

[1] Groups of order automorphisms of ordered sets, *Mathematika*, 4 (1957), 41—50.

Конрад (Conrad P.)

[1] Embedding theorems for Abelian groups with valuations, *Amer. J. Math.*, 75 (1953), 1—29.

[2] On ordered division rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 323—328.

[3] Extensions of ordered groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 516—528.

[4] Methods of ordering a vector space, *J. Indian Math. Soc.*, **22** (1958), 1—25.

[5] On ordered vector spaces, *J. Indian Math. Soc.*, 22 (1958), 27—32.

[6] The group of order preserving automorphisms of an ordered Abelian group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), 382—389.

[7] A note on valued linear spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), 646—647.

[8] A correction and improvement of a theorem on ordered groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 182—184.

[9] Non-Abelian ordered groups, *Pacif. J. Math.*. 9 (1959), 25—41.

[10] Right-ordered groups, *Michigan Math. J.*, **6** (1959), 267—275.

[11] Ordered semi-groups, *Nagoya Math. J.*, **16** (1960), 51—64.

[12] The structure of a lattice-ordered group with a finite number of disjoint elements, *Michigan Math. J.*, **7** (1960), 171—180.

[13] Semi-groups of real numbers, *Portug. Math.*, **18** (1959), 199—201.

[14] Some structure theorems for lattice-ordered groups, *Trans. Amcr. Math. Soc.*, **99** (1961), 212—240.

[15*] Regularly ordered groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 726—731.

[16*] The lattice of all convex l-subgroups of a lattice-ordered group (в печати).

[17*] The relationship between the radical of a lattice-ordered group and complete distributivity, *Pac. J. Math.*, **14** (1964), 493—499.

Конрад, Клиффорд (Conrad P., Clifford A. H.)

[1] Lattice-ordered groups having at most two disjoint elements, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 4 (1960), 111—113.

Конрад, Харви, Холланд (Conrad P., Harvey J., Holland C.)

[1*] The Hahn embedding theorem for lattice-ordered groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 143—169.

Конторович П. Г., Кокорин А. И.

[1*] Об одном типе частично упорядоченных групп, *Матем. зап. Уральского ун-та*, **3** : 3 (1962), 39—44.

Конторович П. Г., Кутыев К. М.

[1] К теории структурно упорядоченных групп, *Изв. высш. учебн. заведений. Математика*, 1959, № 3, 112—120.

Копытов В. М.

[1*] О пополнении центра упорядоченной группы, *Матем. зап. Уральского ун-та*, 4 : 3 (1963), 20—24.

[2*] Пополнение вполне доупорядочиваемых групп, *Матем. зап. Уральского ун-та*, **4** : 3 (1963), 76—77.

Котлар, Царантонелло (Cotlar M., Zarantonello E.)

[1] Semiordered groups and Riesz-Birkhoff *L*-ideals, *Fac. Ci. Mat. Univ. Nac. Lit.*, **8** (1948), 105—192.

Коэн, Гофман (Cohen L. W., Goffman C.)

[1] The topology of ordered Abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1949), 310—319.

Кристеску (Cristescu R.)

[1] La notion de composantes dans un groupe dirigé, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **247** (1958), 1700—1702.

[2] Sur les groupes dirigés, *Чехосл. матем. ж.*, **10** (1960), 17—26.

Кришнан (Krishnan V. S.)

[1] L'extension d'une (<,.) algèbre à une (Σ*,.) algèbre. I—II, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 1447—1448, 1559—1561.

[2] Les algèbres partiellement ordonnèes et leurs extensions, *Bull. Soc. Math. France*, **78** (1950), 235—263; **79** (1951), 81—120.

Крулль (Krull W.)

[1] Allgemeine Bewertungstheorie, *J. reine und angew. Math.*, **167** (1932), 160—196.

[2] Halbgeordnete Gruppen and asymptotische Grössenordnung, *Arch. Math.*, **3** (1952), 1—7.

[3] Über geordnete Gruppen von reellen Funktionen, *Math. Z.*, **64** (1955), 10—40.

[4] Über die Endomorphismen von total geordneten archimedischen abelschen Gruppen, *Math. Z.*, 74 (1960), 81—90.

[5*] Automorphismen und Spiegelungen eudoxischer Halbgruppen, *Math. Z.*, **79** (1962), 53—68.

Кудлачек (Kudlaček V.)

[1] Lattice-ordered groupoids, *Časop. pěstov. mat.*, **80** (1955), 44—50.

Кутыев К. М.

[1] О регулярных структурно упорядоченных группах, *Успехи матем. наук*, **11** : 1 (1956), 256.

[2] К теории частично упорядоченных групп, *Успехи матем. наук*, **11** : 1 (1956), 258.

[3] ПС-изоморфизмы частично упорядоченных локально нильпотентных групп, *Успехи матем. наук*, **11** : 2 (1956), 193—198.

[4] К теории структурно упорядоченных групп, *Успехи матем. наук*, **13** : 3 (1958), 238—239.

Лави (Lavis A.)

[1*] Sur les quotients totalement ordonnés d'un groupe linéairement ordonné, *Bull. Soc. roy. sci. Liège*, **32** (1963), 204—208.

Леви (Levi F. W.)

[1] Arithmetische Gesetze im Gebiete diskreter Gruppen, *Rend. Circolo mat. Palermo*, **35** (1913), 225—236.

[2] Ordered groups, *Proc. Indian Acad. Sci.*, A, **16** (1942), 256—263.

[3] Contributions to the theory of ordered groups, *Proc. Indian Acad. Sci.*, A, **17** (1943), 199—201.

Ленц (Lenz H.)

[1*] Fastgeordnete Körper, *Arch. Math.*, **11** (1960), 333—338.

Лесьер (Lesieur L.).

[1] Sur les treillis multiplicatifs complets à condition minimale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232** (1951), 290—292.

[2] Conditions suffisantes pour que, dans un treillis multiplicatif complet, la condition de chaîne decendant entraîn la condition de chaîne ascendante, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 1017—1019.

[3] Théorèmes de décomposition dans certains demi-groupes réticules satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 2250—2252.

[4] Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaîne, *Bull. Soc. math. France*, **83** (1955), 161—193.

Лесьер, Круазо (Lesieur L., Croisot R.)

[1] Théorie Noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif. I: Colloque d'Algébre Sup., Bruxelles, 1956, 79—121; II: *Math. Ann.*, **134** (1958), 458—476; III: *Bull. cl. sci., Acad. roy. Belgique*, **44** (1958), 75—93.

Ливчак Я. Б.
[1*] Об упорядочиваемых группах, *Уч. зап. Уральского ун-та*, **23** (1959), 11—12.
[2*] Локальные теоремы для разрешимых структур с умножением, *Матем. зап. Уральского ун-та*, **3** : 1 (1961), 54—66.
Лунстра (Loonstra F.)
[1] Ordered groups, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, **A**, **49** (1946), 41—46.
[2] The classes of ordered groups, *Proc. Internat. Congr. Math., Cambridge*, 1950, vol. 1.
[3] The classes of partially ordered groups, *Compositio math.*, **9** (1951), 130—140.
[4] Discrete groups, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, **A**, **54** (1951), 162—168.
[5] L'extension du groupe ordonné des entiers rationnels par le même groupe, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, **A**, **58** (1955), 41—49.
Лоренц (Lorenz K.)
[1] Über Strukturverbände von Verbandsgruppen, *Acta math. Acad. scient. hung.*, **13** (1962), 55—67.
Лоренцен (Lorenzen P.)
[1] Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie, *Math. Z.*, **45** (1939), 533—553.
[2] Über halbgeordnete Gruppen, *Arch. Math.*, **2** (1949), 66—70.
[3] Über halbgeordnete Gruppen, *Math. Z.*, **52** (1950), 483—526.
[4] Die Erweiterung halbgeordneter Gruppen zu Verbandsgruppen, *Math. Z.*, **58** (1953), 15—24.
Лось (Lós J.)
[1] On the existence of linear order in a group, *Bull. Acad. Polon, Sci. Cl.* III, **2** (1954), 21—23.
Луговский (Lugowski H.)
[1*] Über die Vervollständigung geordneter Halbringe, *Publ. Math. Debrecen*, **9** (1962), 213—222.
[2*] Über gewisse geordnete Halbmoduln mit negativen Elementen, *Publ. Math. Debrecen*, **11** (1964), 23—31.
[3*] Über die Vervollständigung gewisser geordneter Halbmoduln mit negativen Elementen, *Publ. Math. Debrecen*, **11** (1964), 135—138.
Ляпин Е. С.
[1] Полугруппы, Физматгиз, М., 1960.
Мальцев А. И.
[1] О включении групповых алгебр в алгебры с делением, *Докл. АН СССР*, **60** (1948), 1499—1501.
[2] Об упорядоченных группах, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13** (1949), 473—482.
[3] О доупорядочении групп, *Тр. Матем. ин-та АН СССР*, **38** (1951), 173—175.
[4] Замечание о частично упорядоченных группах. *Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та*, **10** (1956), 3—5.
[5*] О частично упорядоченных нильпотентных группах, Алгебра и логика, семинар, **1**, № 2 (1962), 5—9.

Мацусита (Matsushita S.)
[1] On the foundation of orders in groups, *J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ.*, A, **2** (1951), 19—22.
[2] Sur la puissance des orders dans un groupe libre, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, **A**, **56** (1953), 15—16.
Мичиура (Michiura T.)
[1] On a definition of lattice-ordered groups. I—II, *J. Osaka Inst. Sci. Techn.*, **1** (1949), 27, 117—119.
[2] Lattice-ordered rings and ordered characterizations of integers, *J. Osaka Inst. Sci. Techn.*, **1** (1949), 29—31.
[3] Sur les groupes semi-ordonnés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **231** (1950), 1403—1404.
[4] On simply ordered groups, *Portug. Math.*, **10** (1951), 89—95.
[5] Remark on a representation of simply ordered groups, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, **A**, **54** (1951), 386—387.
[6] Commutativity in simply ordered groups, *J. Osaka Inst. Sci. Techn.*, **3** (1951), 39—41.
[7] Sur les groupes ordonnés. II—III, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 1422—1423, 1521—1522.
[8] On partially ordered groups without proper convex subgroups, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, **A**, **56** (1952), 231—232.
Митринович (Mitrinovits D. S.)
[1] Sur certaines relations restant valables si l'on permute les opérateurs y intervenant, *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie*, **8** (1956), 15—22.
Молинаро (Molinaro I.)
[1] Généralisation de l'équivalence d'Artin, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **238** (1954), 1284—1286, 1767—1769.
[2] Demi-groupes résidutifs, Thèse, Paris, 1956.
[3*] Demi-groupes résidutifs, *J. math. pures et appl.*, **39** (1960), 319—356; **40** (1961), 43—110.
Монна (Monna A. F.)
[1] On ordered groups and linear spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen Afd. Natuurkunde*, **63** (1944), 178—182.
Мурата (Murata K.)
[1] A theorem on residuated lattices, *Proc. Japan Acad.*, **33** (1957), 639—641.
[2] Decomposition of radical elements of a commutative residuated lattice, *J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ.*, A, **10** (1959), 31—34.
[3] Additive ideal theory in multiplicative systems, *J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ.*, A, **10** (1959), 91—115.
[4*] On isolated components of ideals in multiplicative systems, *J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ.*, A, **11** (1960), 1—9.
[5*] On nilpotent-free multiplicative systems, *Osaka Math. J.*, **14** (1962), 53—70.
Муфанг (Moufang R.)
[1] Einige Untersuchungen über geordnete Schiefkörper, *J. reine und angew. Math.*, **176** (1937), 203—223.

Накада (Nakada O.)
[1] Partially ordered Abelian semi-groups. I—II. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, **11** (1951), 181—189; **12** (1952), 73—86.

Накамура (Nakamura M.)
[1] Partially ordered rings, *Tôhoku Math. J.*, **47** (1940), 251—254.

Накано (Nakano H.)
[1] Teilweise geordnete Algebra, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 437—441; *Japan, J. Math.*, **17** (1941), 425—511.

Накаяма (Nakayama K.)
[1] Note on lattice-ordered groups, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 1—4.
[2] On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. I, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **18** (1942), 185—187.

Нейман (Neumann B. H.).
[1] On ordered groups, *Amer. J. Math.*, **71** ((1949), 1—18.
[2] On ordered division rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 202—252.
[3] An embedding theorem for algebraic systems, *Proc. London Math. Soc.*, **4** (1954), 138—153.
[4] Embedding theorems for ordered groups *J. London Math. Soc.*, **35** (1960), 503—512.

Нейман, Шепперд (Neumann B. H., Shepperd J. A. H.)
[1] Finite extensions of fully ordered groups, *Proc. Royal Soc. London*, Ser. **A**, **239** (1957), 320—327.

Огасавара (Ogasawara T.)
[1] Commutativity of Archimedean semiordered groups, *J. Sci. Hiroshima Univ.* A, **12** (1948), 249—254 (японск.).

Ониси (Ohnishi M.)
[1] On linearization of ordered groups, *Osaka Math. J.*, **2** (1950), 161—164.
[2] Linear-order on a group, *Osaka Math. J.*, **4** (1952), 17—18.

Папер (Papert D.)
[1*] A representation theory for lattice-groups, *Proc. London Math. Soc.*, **12** (1962), 100—120.

Пикерт (Pickert G.)
[1] Einführung in die höhere Algebra, Göttingen, 1951.
[2] Projektive Ebenen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955.

Пинскер А. Г.
[1] Разложение полуупорядоченных групп и пространств, *Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена*, **86** (1949), 235—284.
[2] Расширение полуупорядоченных групп и пространств, *Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена*, **86** (1949), 285—315.

Пирс (Pierce R. S.)
[1] Homomorphisms of semi-groups, *Ann. Math.*, **59** (1954). 287—291.
[2] Radicals in function rings, *Duke Math. J.*. **23** (1956), 253—261.

Поддерюгин В. Д.
[1] Условие упорядочиваемости произвольного кольца, *Успехи матем. наук*, **9** : 4 (1954), 211—216.
[2] Условия упорядочиваемости группы, *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **21** (1957), 199—208.

Преновиц (Prenowitz W.)
[1] Partially ordered fields and geometries, *Amer. Math. Monthly*, **53** (1946), 439—449.

Редеи (Rédei L.)
[1] Algebra. I. Budapest, 1954; Leipzig, 1959.

Ри (Ree R.)
[1] On ordered, finitely generated, solvable groups, *Trans. Roy. Soc. Canada. Sec.* III, **48** (1954), 39—42.

Рибенбойм (Ribenboim P.)
[1] Conjonction d'ordres dans les groupes abéliens ordonnés, *Anals Acad. brasil. ciênc.*, **29** (1957), 201—224.
[2] Sur les groupes totalement ordonnés et l'arithmetique des anneaux de valuation, *Summa brasil. math.*, **4** (1958), 1—64.
[3] Sur quelques constructions de groupes réticulés et l'équivalence logique entre l'affinement de filtres et d'ordres, *Summa brasil. math.*, **4** (1958), 65—89.
[4] Un théorème de réalisation de groupes réticulés, *Pacif. J. Math.*, **10** (1960), 305—308.
[5*] Théorie des groupes ordonnés, Bahia Blanca, 1964.

Ригер (Rieger L. S.)
[1] On the ordered and cyclically ordered groups. I — III, Věstník Král. České Spol. Nauk, 1946, № 6, 1—31; 1947, № 1, 1—33; 1948, № 1, 1—26 (чешск.)

Рисс (Riesz F.)
[1] Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Ann. Math.*, **41** (1940), 174—206.

Робинсон (Robinson A.)
[1] Note on an embedding theorem for algebraic systems, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 249—252.
[2] On ordered fields and definite functions, *Math. Ann.*, **130** (1955), 257—271.
[3] Further remarks on ordered fields and definite functions, *Math. Ann.*, **130** (1956), 405—409.

Робинсон, Закон (Robinson A., Zakon E.)
[1*] Elementary properties of ordered abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **96** (1960), 222—236.

Сверчковский (Świerczkowski S.)
[1] On cyclically ordered groups, *Fundam. Math.*, **47** (1959), 161—166.
[2] On cyclically ordered intervals of integers, *Fundam. Math.*, **47** (1959), 167—172.

Селе (Szele T.)
[1] On ordered skew fields, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 410—413.

Серр (Serre J.-P.)
[1] Extensions de corps ordonnés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 229, (1949), 576—577.
Сертен (Certaine J.)
[1] Lattice-ordered groupoids and some related problems, Harvard Doctoral Thesis, 1943.
Сикорский (Sikorski R.)
[1] On an ordered algebraic field, *C. R. Soc. Sci. Lettres de Varsovie*, Cl. III, **41** (1948), 69—96.
[2] On algebraic extensions of ordered fields, *Ann. Soc. Polonaise Math.*, **22** (1950), 173—184.
Смирнов Д. М.
[1] Инфраинвариантные подгруппы, *Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та*, **4** (1953), 92—96.
Сорокина В. И.
[1] Понятие группы и линейного множества с дизъюнктными элементами, *Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена*, **103** (1955), 179—207.
Стеллецкий И. В.
[1] Нильпотентные структуры, *Тр. Моск. матем. о-ва*, **9** (1960), 211—235.
Стоун (Stone M. H.)
[1] A general theory of spectra I—II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **26** (1940), 280—283; **27** (1941); 83—87.
[2] Pseudonorms and partial orderings in Abelian groups, *Ann. Math.*, **48** (1949), 851—856.
Сэто (Saitô T.)
[1*] Ordered idempotent semigroupes, *J. Math. Soc. Japan*, **14** (1962), 150—165.
Таллини (Tallini G.)
[1] Sui sistemi a doppia composizione ordinati archimedei, *Atti Acad. Naz. Lincei*, **18** (1955), 367—373.
Тамари (Tamari D.)
[1] Groupoïdes reliés et demi-groupes ordonnés, *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **228** (1949), 1184—1186.
[2] Groupoïdes ordonnés. L'ordre lexicographique pondéré, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **228** (1949), 1909—1911.
[3] Ordres pondérés. Caractérisation de l'ordre naturel comme l'ordre du semi-groupe multiplicatif des nombres naturels, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **229** (1949), 98—100.
[4] Monoïdes préordonnés et chaînes de Malcev, *Bull. Soc. Math. France*, **82** (1954), 53—96.
Тамура (Tamura T.)
[1] Commutative nonpotent Archimedean semi-groups with cancellation law. I, *J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci.*, **8** (1957), 5—11.
Тарский (Tarski A.)
[1] Sur les groupes d'Abel ordonnés, *Ann. Soc. Pol. Math.*, **7** (1929), 267—268.
[2] Cardinal algebras, New York, 1949.

Терехов А. А.
[1] О вполне доупорядочиваемых группах, ДАН СССР, **129** (1959), 34—36.
[2*] Структура локально разрешимых вполне доупорядочиваемых групп, Алгебра и логика, семинар, **1**, № 2 (1962), 10—15.
Тревизан (Trevisan G.)
[1] Sulla equivalenza archimedea relative alle gruppo-structure, *Rend. Semin. mat. Univ. Padova*, **20** (1951), 425—429.
[2] Classificazione dei semplici ordinamenti di un gruppo libero commutativo con n generatori, *Rend. Semin. mat. Univ. Padova*, **22** (1953), 143—156.
Тулли (Tully E. J.)
[1*] The existence of a total order on a group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 217—219.
Тьеррен (Thierrin G.)
[1*] Sur les anneaux partiellement ordonnés, *Canad. Math. Bull.*, **5** (1962), 123—128.
Тэ (Teh H.-H.)
[1] Construction of orders in Abelian groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **57** (1961), 476—482.
[2*] A note on *l*-groups, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **13** (1962), 123—124.
Уолтер (Walter S.)
[1*] On the algebraic closure of certain partially ordered fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105** (1962), 229—250.
Уорд (Ward W.)
[1] Residuated distributive lattices, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 641—651.
Уорд, Дилуэрт (Ward W., Dilworth R. P.)
[1] Residuated lattices, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **24** (1938), 162—164.
[2] Residuated lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 335—354.
Фань Цюй (Fan K.)
[1] Partially ordered additive groups of continuous functions, *Ann. Math.*, **51** (1950), 409—427.
Флейшер (Fleischer I.)
[1] Remark on a theorem of Michiura, *Portug. Math.*, **12** (1953), 133.
[2] Functional representation of partially ordered groups, *Ann. Math.*, **64** (1956), 260—263.
Фостер (Foster A. L.)
[1] Some elementary identities of ordered Abelian sets, *Amer. Math. Monthly*, **57** (1950), 681—683.
Фрейденталь (Freudenthal H.)
[1] Teilweise geordnete Moduln, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, **A**, **39** (1936), 641—651.
Фукс (Fuchs L.)
[1] Alsolutes in partially ordered groups, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, **A**, **52** (1949), 251—255.

[2] On the extension of the partial order of groups, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 191—194.
[3] On partially ordered groups, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, A, **53** (1950), 828—834.
[4] The meet-decomposition of elements in lattice-ordered semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12A** (1950), 105—111.
[5] The extension of partially ordered groups, *Acta Math. Acad. scient. Hung.*, **1** (1950), 118—124.
[6] On mean systems, *Acta Math. Acad. scient. Hung.*, **1** (1950), 303—320.
[7] The Zappa extension of partially ordered groups, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, A, **55** (1952), 363—368.
[8] A lattice-theoretic discussion of some problems in additive ideal theory, *Acta math. Acad. scient. Hung.*, **5** (1954), 299—313.
[9] Note on ordered groups and rings, *Fundam. Math.*, **46** (1958), 167—174.
[10] Note on fully ordered semigroups, *Acta math. Acad. scient. Hung.*, **12** (1961), 255—259.
[11] On the ordering of quotient rings and quotient semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged*, **22** (1961), 42—45.
[12*] On group homomorphic images of partially ordered semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25** (1964), 139—142.
Фукс, Сонсяда (Fuchs, L., Sąsiada E.)
[1*] Note on orderable groups, *Ann. Univ. scient. Budapest. Sec. math.*, **7** (1965), 13—17.
Фукс, Штейнфельд (Fuchs L., Steinfeld O.)
[1*] Principal components and prime factorization in partially ordered semigroups, *Ann. Univ. scient. Budapest. Sec. math.*, **6** (1964), 103—111.
Хан (Hahn H.)
[1] Über die nichtarchimedischen Grössensysteme, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*. IIa, **116** (1907), 601—655.
Хантингтон (Huntington E. V.)
[1] A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **3** (1902), 264—279.
[2] Complete sets of postulates for the theories of positive integral and of positive rational numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **3** (1902), 280—284.
Хауснер, Уэндел (Hausner M., Wendel J. G.)
[1] Ordered vector spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 977—982.
Хенриксен, Исбелл (Henriksen M., Isbell J. R.)
[1*] Lattice-ordered rings and function rings, *Pacif. J. Math.*, **12** (1962), 533—565.
Хигман (Higman G.)
[1] Ordering by divisibility in abstract algebras, *Proc. London Math. Soc.*, **2** (1952), 326—336.
Хион Я. В.
[1] Архимедовски упорядоченные кольца, *Успехи матем. наук*, **9** : 4 (1954), 237—242.
[2] Упорядоченные ассоциативные кольца, *ДАН СССР*, **101** (1955), 1005—1007.

[3] Упорядоченные полугруппы, *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **21** (1957), 209—222.
Холланд (Holland Ch.)
[1] A totally ordered integral domain with a convex left ideal which is not an ideal, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 703.
[2*] Extensions of ordered groups and sequence completion, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **107** (1963), 71—82.
[3*] The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set, *Michigan Math. J.*, **10** (1963), 399—408.
Черемисин А. И.
[1*] Промежуточные кольца, *Изв. высш. учебн. заведений. Математика*, 1962, № 3, 158—168.
Чехата (Chehata C. G.)
[1] An algebraically simple ordered group, *Proc. London Math. Soc.*, **2** (1952), 183—197.
[2] On an ordered semigroup, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 353—356.
[3] On a theorem on ordered groups, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **4** (1958), 16—21.
Чжан, Эренфойхт (Chang C. C., Ehrenfeucht A.)
[1*] A characterization of abelian groups of automorphisms of a simple ordering relation, *Fundam, Math.*, **51** (1962/63), 141—147.
Чиампа (Ciampa S.)
[1*] Osservazioni sull'ordinabilitá dei gruppi, *Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.*, **18** (1964), 111—136.
Чо (Choe T. H.)
[1] The interval topology of a lattice-ordered group, *Kyungpook Math., J.*, **1** (1958), 69—74.
Шеврин Л. Н.
[1*] Структурно-подполугрупповая характеристика упорядоченных групп в (печати).
Шепперд (Shepperd J. A. H.)
[1] Transitivities of betweenness and separation and the definitions of betweenness and separation groups, *J. London Math. Soc.*, **31** (1956), 240—248.
[2] Betweenness groups, *J. London Math. Soc.*, 32, (1957), 277—285.
[3] Separation groups, *Proc. London Math. Soc.*, **7** (1957), 518—548.
Шик (Šik F.)
[1] К теории структурно упорядоченных групп, *Чехосл. матем. ж.*, **6** (1956), 1—25.
[2] Über Summen einfach geordneter Gruppen, *Чехосл. матем. ж.*, **8** (1958), 22—53.
[3] Automorphismen geordneter Mengen, *Časop. pěstov. mat.*, **83** (1958), 1—22.
[4] Über subdirekte Summen geordneter Gruppen, *Чехосл. матем. ж.*, **10** (1960), 400—424.
[5] Erweiterungen teilweise geordneter Gruppen, Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, № 410 (1960), 65—80.

[6*] Über die algebraische Charakterisierung der Gruppen von reallen Funktionen, *Ann. mat. pura et appl.*, **54** (1961), 295—300.

[7*] Über die Kommutativität einer Klasse archimedisch geordneter Halbgruppen, *Acta Univ. Comenianae*, 5 (1961), 459—464.

[8*] Über additive und isotone Funktionale auf geordneten Gruppen, *Чехосл. матем. ж.*, **87** (1962), 611—621.

[9*] Zwei Konstruktionen quasilinearer Erweiterungen der Anordnung einer abelschen Gruppe mit Hilfe additiver und isotoner Funktionale, *Z. math. Logik und Grundl. Math.*, 7 (1961), 39—45.

[10*] Über die Beziehungen zwischen eigenen Spitzen und minimalen Komponenten einer *l*-Gruppe, *Acta math. Acad. scient. Hung.*, **13** (1962), 171—178.

[11*] Zum Disjunktivitätsproblem auf geordneten Gruppen, *Math. Nachr.*, **25** (1963), 83—93.

[12*] Über direkte Zerlegungen gerichteten Gruppen, *Math. Nachr.*, **25** (1963), 95—110.

Шиллинг (Schilling O. F. G.)

[1] The theory of valuations, New York, 1950.

Шимбирёва Е. П.

[1] К теории частично упорядоченных групп, *Матем. сб.*, 20 (1947), 145—178.

Штейнфельд (Steinfeld O.)

[1] Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **22** (1961), 136—149.

[2*] Über Zerlegungssätze in radikalfreien und regulären (*) Verbandsgruppen (в печати).

Шульгейфер Е. Г.

[1] Разложение на простые множители в структурах с умножением, *Укр. матем. ж.*, **2 : 3** (1950), 100—114.

Эверетт (Everett C. J.)

[1] Sequence completion of lattice moduls, *Duke Math., J.*, **11** (1944), 109—119.

[2] Note on a result of L. Fuchs on ordered groups, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 216.

Эверетт, Улам (Everett C. J., Ulam S.)

[1] On ordered groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 57 (1945), 208—216.

Эрдёш (Erdös J.)

[1] On the structure of ordered real vector spaces, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 334—343.

Эскардо, Балманья (Linés Escardó E., Mallol Balmaña R.)

[1] On *l*-groups, *Rev. mat. hisp.-amer.*, **12** (1952), 129—136, 137.

Якубик (Jakubik J.)

[1] О главных идеалах в структурно упорядоченных группах, *Чехосл. матем. ж.*, **9** (1959), 528—543.

[2] Konvexe Ketten in *l*-Gruppen, *Časop. pestov. mat.*, **84** (1959), 53—63.

[3] Об одном классе структурно упорядоченных групп. *Časop. pěstov. mat.*, **84** (1959), 150—161.

[4] Konvexe Ketten in halbgeordneten Gruppen, *Mat.-fiz časop. Slov. Akad. vied*, **9** (1959), 236—247.

[5] Об одном свойстве структурно упорядоченных групп, *Časop. pěstov. mat.*, 85 (1960), 51—59.

[6] Прямые разложения частично упорядоченных групп, *Чехосл. матем. ж.*, **10** (1960), 231—243; **11** (1961), 490—515.

[7*] Über eine Klasse von *l*-Gruppen, *Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae. Math.*, **6** (1961), 267—273.

[8*] Über Teilbünde der *l*-Gruppen, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **23** (1962), 249—254.

[9*] The interval topology of an *l*-group, *Mat.-fiz. časop.*, **12** (1962), 209—211.

[10*] Представление и расширение *l*-групп, *Чехосл. Матем. ж.*, **13** (1963), 267—283.

[11*] Über ein Problem von Paul Jaffard, *Arch. Math.*, **14** (1963), 16—21.

[12*] Interval topology of an *l*-group. *Colloq. math.*, **11** (1963), 65—72.

Ямада (Yamada M.)

[1] Regularly totally ordered semigroups. I, *Science Reports of Shimane Univ.*, 1957, 14—23.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ БИБЛИОГРАФИЯ

Бенадо (Benado M.)

[1] Sur la theorie générale des produits réguliers, *C. r. Acad. Sci.*, **244**, № 12 (1957), 1595—1597; **244**, № 13 (1957), 1702—1704; **245**, № 3 (1957), 267—270.

Брейнерд (Brainerd B.)

[1] On the embedding of vector lattices in *F*-rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93**, № 1 (1959), 132—144.

[2] On the embedding of a vector lattices in a vector lattice with weak unit, *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, **A**, **63**, № 1 (1960), 25—31.

[3] A construction for the normalizer of a ring with local unit with applications to the theory of *L*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97**, № 2 (1960), 237—253.

[4] On the normalizer of an *f*-ring, *Proc. Japan Acad.*, **38**, № 8, (1962), 438—443.

Вайда (Vaida D.)

[1] Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée, *Rev. Roum. Math. pures appl.*, **10** (1964).

Габович Е.

[1] Об архимедовски упорядоченных Ω-группах, *Тр. по матем. и механике Тартусского ун-та*, **3** (1962), 19—22.

[2] Эндоморфизмы некоторых упорядоченных полугрупп, *Литовск. матем. сборн.*, **3** : 2 (1963), 69—76.

Грев (Greve W.)
[1] Partial betweenness groups, *Math. Z.*, **78** (1962), 305—318.

Груенберг (Gruenberg K. W.)
[1] Residual properties of infinite soluble groups, *Proc. London Math. Soc.* (3), 7 (1957), 29—62.

Джеминьяни (Gemignani G.)
[1] Digressione sui campi ordinati, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, **16** : 2 (1962), 143—157.

Завадовский (Zawadowski W.)
[1] A theorem on quasi-ordered division algebras, *Bull. Acad. polon. sci. Sér. math., astronom., phys.*, **8**, № 3 (1960), 173—177.

Кальман (Kalman J. A.)
[1] Triangle inequality in *l*-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**, № 3 (1960), Pt 1, 395.

Кацман А. Д.
[1] О некоторых свойствах полугруппы, инвариантной в группе, *Успехи матем. наук*, **11** : 2 (1956), 179—183.
[2] К вопросу об образующих и необразующих элементах полугруппы, инвариантной в группе, *Уч. зап. Уральского ун-та*, **19** (1956), 43—50.

Кацнельзон (Katznelson M. Y.)
[1] Sur les algèbres dont les éléments non négatifs admettant des racines carrées, *Ann. sci. École norm. Supér.*, **77** : 2 (1960), 167—174.

Кокорин А. И.
[1] О группах, упорядочиваемых единственным способом, Докл. 2-й Сибирск. конф. по матем. и мех., Томск, 1962, 87—88.

Кокорин А. И., Копытов В. М.
[1] О некоторых классах упорядоченных групп, *Успехи матем. наук*, **17**, в. 6 (1962), 225—226.

Конторович П. Г.
[1] К теории полугрупп в группе, *ДАН СССР*, **48** : 2 (1953), 229—231.
[2] К теории полугрупп в группе, I, *Уч. зап. Казанского ун-та*, **114** : 8 (1954), 35—43.
[3] К теории полугрупп в группе, II, *Уч. зап. Уральского ун-та*, **19** (мат.) (1956), 3—20.

Конторович П. Г., Кацман А. Д.
[1] Некоторые типы элементов полугруппы, инвариантной в группе, *Успехи матем. наук*, **11**, в. 3 (1956), 145—150.

Кох (Koch R. J.)
[1] Ordered semigroups in partially ordered semigroups, *Pac. J. Math.*, **10**, № 4 (1960), 1333—1336.

Лаллеман (Lallement G.)
[1] Sur les homomorphismes d'un demigroupe sur un demigroupe complètement-*o*-simple, *C. r. Acad. sci.*, **258** (1964), 3609—3612.

Леви (Lavis A.)
[1] Groupes topologiques ordonnés, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **31** (1962), 497—503.

Леви-Бруль (Lévy-Bruhl J.)
[1] Le théorème de Jordan — Hölder dans certains groupoides ordonnés, *C. r. Acad. sci.*, 258, (1964), 1114—1116.

Ляпин Е. С.
[1] Соотношения, определяющие упорядоченность в полугруппах, *Изв.* АН СССР, сер. мат., **25** (1961), 671—684.
[2] Упорядоченности линейных преобразований, согласованные с суперпозицией, *Матем. сб.*, **63** (1964), 122—136.

Мальтезе (Maltese G.)
[1] Convex ideals and positive multiplicative forms in partially ordered algebras, *Math. scand.*, **9**, № 2 (1961), 372—382.

Ponделичек (Pondělíček B.)
[1] Bemerkung zu einer Halbgruppe der Endomorphismen auf einer einfach geordneten Menge, *Časop. pěstov. mat.*, **85** : **4** (1960), 410—417.

Санкаран (Sankaran N.)
[1] Order structure in rings and fields, *Math. Student*, 27 (1961), 165—172.

Санкаран, Венкатараман (Sankaran N., Venkataraman R.)
[1] A generalization of the ordered group of integers, *Math. Z.*, **79** (1962), 21—31.

Смирнов Д. М.
[1] О приведенно свободных мультиоператорных группах, *ДАН СССР*, **150** (1963), 44—47.

Стродт (Strodt W.)
[1] On the algebraic closure of certain partially ordered fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105**, № 2 (1962), 229—250.

Сэто (Saitô T.)
[1] Regular elements in an ordered semigroup, *Pac. J. Math.*, **13**, № 1 (1963), 263—295.
[2] Ordered completely regular semigroup, *Pac. J. Math.*, **14**, № 1 (1964), 295—308.

Френкель В. И.
[1] Об алгоритмических проблемах в частично упорядоченных группах, *Успехи матем. наук*, **17**, в. 4 (1962), 173—179.
[2] Об алгоритмических проблемах в частично упорядоченных группах, *ДАН СССР*, **152** (1963), 67—70.

Хион Я. В.
[1] О продолжении частичной упорядоченности полугрупп, *Успехи матем. наук*, **17** : 6 (1962), 202.
[2] О частично упорядоченных полугруппах, в которых собственные выпуклые подгруппы не пересекаются, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **27** : 1 (1963), 67—74.

Черемисин А. И.
[1] Промежуточные кольца, *Успехи матем. наук*, **14**, в. 5 (1959), 226—227.
[2] Разделительные кольца, *Успехи матем. наук*, **16**, в. 2 (1961), 210.

Шик (Šik F.)
[1] Kompakt erzeugte vollständige *l*-Gruppen, *Bul. Inst. politehn. Jasi.* 8, № 3—4 (1962), 5—8.
[2] Über Fortsetzung additiver und isotoner Funktionale auf geordneten Gruppen, *Чехосл. матем. ж.*, 13, № 1 (1963), 24—36.
Шимбирева Е. П.
[1] О прямых разложениях частично упорядоченных групп, *Уч. зап. Московск. обл. пед. ин-та им. Н. К. Крупской*, **110**, матем., в. 7 (1962), 347—350.
Шмелькин А. Л.
[1] Свободные полинильпотентные группы, *ДАН СССР*, **151** (1963), 73—75.
[2] Свободные полинильпотентные группы, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 28 (1964), 91—122.
Якубикова М.
[1] О некоторых подгруппах *l*-групп, *Mat.-fyz. časop.*, **12** : 2 (1962), 97—107.
Ямада (Yamada M.)
[1] Regularly totally ordered semigroups II, *Bull. Shimane Univ* (*Natur. Sci.*), 8 (1958), 9—12.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Л. Фукс

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Редактор *Г. М. Цукерман*
Художник *А. Г. Антонова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *А. Д. Хомяков*

Сдано в производство 3/XII 1964 г.
Подписано к печати 7/IV 1965 г.
Бумага $84 \times 108^{1}/_{32}=5{,}38$ бум. л.
18,06 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 16,39
Изд. № 1/2594. Цена 1 р. 30 к. Зак. 640

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Государственного
комитета Совета Министров СССР
по печати
Москва, Трехпрудный пер., д. 9