ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE

Band 35

CALCULUS OF FRACTIONS AND HOMOTOPY THEORY

P. Gabriel and M. Zisman

SPRINGER - VERLAG
BERLIN • HEIDELBERG • NEW YORK

1967

П. ГАБРИЕЛЬ • М. ЦИСМАН

КАТЕГОРИИ ЧАСТНЫХ И ТЕОРИЯ ГОМОТОПИЙ

Перевод с английского

М. М. ПОСТНИКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» • МОСКВА 1971

УДК 519.4

В книге излагаются основные результаты теории симплициальных множеств и их применения к алгебраической топологии. Отличительной ее чертой является последовательное использование общих понятий теории категорий и функторов, которые развиваются на топологическом материале. Идеи, излагаемые в книге, играют объединяющую и унифицирующую роль в различных отделах математики. Поэтому книга заинтересует представителей самых разных математических специальностей, в первую очередь топологов и алгебраистов. Она рассчитана на студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. $\frac{2\text{-}2\text{-}3}{7\text{-}71}$

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Уже почти двадцать лет в алгебраической топологии известен удивительный факт, оказавший большое влияние на ее развитие, но до конца, по-видимому, еще не понятый. Мы имеем в виду существование почти полного параллелизма (выражающегося в эквивалентности соответствующих категорий) между гомотопической теорией топологических пространств и аналогичной теорией симплициальных множеств — объектов, по существу, чисто алгебраических. Вероятно, само существование алгебраической топологии, т. е. возможности в основном полностью сводить задачи геометрии к задачам алгебры, именно этим и объясняется.

Теория симплициальных множеств, с одной стороны, имеет большое методологическое значение, существенно проясняя логическую и концептуальную природу основ алгебраической топологии, а с другой — играет роль одного из мощнейших инструментов топологического исследования: многие важные понятия топологии впервые появились в рамках этой теории и лишь затем были переведены на «геометрический» язык, причем зачастую этот перевод лишь затуманил суть дела.

Однако, несмотря на относительное обилие появившихся за последнее время монографий и учебных пособий по алгебраической топологии, симплициальные множества не нашли в них по существу никакого отражения. Читатель, желающий познакомиться с их теорией, был до сих пор вынужден рыться в горах журнальной литературы или пользоваться малодоступными мимеографированными записями лекций.

Предлагаемая вниманию советского читателя книга Габриеля и Цисмана представляет собой первую попытку изложения в монографической форме основных результатов теории симплициальных множеств и их применения к алгебраической топологии. Она содержит довольно полное изложение этой теории (в части, не касающейся групп гомологий) и в определенной мере заполняет имеющийся пробел в топологической литературе.

В современной математике наряду с обостренным вниманием к решению конкретных трудных задач все возрастающую роль играют унифицирующие и объединяющие концепции, позволяющие охватить в рамках нескольких общих понятий обширные части все более разветвляющегося древа этой науки. Большинство этих концепций связано с понятиями категории и функтора, появившимися вначале в топологии, но быстро получившими всеобщее признание. К сожалению, весьма часто это признание остается в области чистых деклараций, не подкрепленных конкретными математическими результатами. Отличительной чертой книги Габриеля и Цисмана является, напротив, последовательное использование общекатегорных понятий, что позволило им существенно упростить изложение, вместить довольно большое содержание в сравнительно небольшой объем и вместе с тем отчетливо прояснить внутреннюю логическую структуру теории. Таким образом, эта книга может служить и неплохим введением в изучение общекатегорных идей и методов, развитых на топологическом материале.

С другой стороны, алгебраисты, знакомые с теорией категорий, могут по этой книге сравнительно быстро и без особого (для них) труда освоить ряд основных идей и методов современной топологии и одновременно на конкретном геометрическом материале увидеть, как работают известные им общие алгебраические понятия.

В введении к книге авторы высказывают мнение, что их монография может служить также и начальным учебником алгебраической топологии для лиц, только приступивших к изучению этого отдела математики. Формально они правы: для понимания книги никаких особых предварительных знаний не требуется. Однако на самом деле для первоначального изучения топологии книга по существу не пригодна. Причиной тому является как нестандартность и вызванная ею конденсированность изложения, так и отсутствие конкретных примеров и приложений; кроме того, стиль (и план) изложения, принятый авторами, подходит скорее для журнальных публикаций результатов оригинальных исследований (публикаций, рассчитанных на многоопытного специалиста, умеющего читать «между строк»), чем для книг учебного характера. Даже при беглом просмотре бросается в глаза разнобой в терминологии, введение не используемых определений и, иаоборот, игнорирование уже введенных определений, по существу ненужные ссылки на литературу, отказ от разъяснения специфики частных случаев общих конструкций и вместе с тем безоговорочное использование этих частных случаев и т. п. При чтении книги на первой же странице выясняется, что авторы не привели определения одного из важнейших для всей книги понятий — понятия сопряженного функтора (оспаничившись ссылкой иа журнальную литературу), хотя они и подробно описывают многие понятия, играющие совершенно незначительную роль.

Насколько было возможно, эти недостатки изложения при переводе устранены. В частности, значительно пополнен предпосланный книге Глоссарий по общей теории категорий и в ряде наиболее сжато написанных мест текст несколько расширен.

Общий план изложения в книге также может создать трудности для читателя. В связи с этим можно рекомендовать начинать чтение книги сразу с § 2 гл. II, возвращаясь к пропущенному материалу по мере необходимости. При таком чтении можно надеяться, что предлагаемый перевод может быть полезен и начинающему как дополнительное учебное пособие.

Новый текст Глоссария был просмотрен М. С. Цаленко и Е. Г. Шульгейфером, сделавшими ряд ценных замечаний.

Москва, 1 июня 1968 г. *М. М. Постников*

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель этой книги — предложить вниманию читателя некоторую категорию, особенно удобную для построения теории гомотопий. Эта категория (мы называем ее *гомотопической категорией*) эквивалентна категории клеточных разбиений по модулю гомотопии, т. е. категории, объектами которой являются пространства, имеющие гомотопический тип клеточных разбиений, а морфизмами — гомотопические классы непрерывных отображений этих пространств. Она также эквивалентна некоторой категории частных категории всех топологических пространств по модулю гомотопии и категории полных симплициальных множеств по модулю гомотопии (см. гл. IV).

Для построения гомотопической категории оказывается целесообразным по возможности ближе следовать методам, доказавшим свою эффективность в гомологической алгебре. По существу эта категория является не чем иным, как «топологическим аналогом» производной категории в смысле Вердье (см. Вердье [1]).

Используемый в книге алгебраический аппарат включает обычные стандартные основы теории категорий (вкратце суммированные в предпосланном основному тексту Глоссарии) и теорию *категорий частных* (которой посвящена гл. I основного текста). Из общей топологии нам понадобятся (кроме обычных элементарных сведений) лишь некоторые простейшие свойства *каонных пространств* (собранные в п. 1.5.3 гл. I и § 2 гл. III).

Исходным пунктом излагаемой в этой книге теории служит категория $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ *симплициальных множеств* (в старой терминологии — полных полусимплициальных комплексов). Хотя изучению (и применению) этой категории было посвящено много работ, теория симплициальных множеств излагалась до сих пор лишь в журнальных статьях и мимеографированных записях лекций. Чтобы до некоторой степени заполнить этот пробел и облегчить чтение книги, мы излагаем теорию симплициальных множеств с самого начала и с полными доказательствами. Большинство этих доказательств специалистам хорошо известно, но мы думаем, что некоторые из них новы и либо более просты, либо лучше выясняют суть дела, чем доказательства, известные ранее.

Книга обращена, во-первых, к студентам, желающим изучить алгебраическую топологию, во-вторых, к алгебраистам, желающим познакомиться с топологией, и, в-третьих, к топологам, желающим воспричять язык теории категорий.

Для полного удовлетворения запросов всех перечисленных категорий читателей требуется, конечно, объем, значительно превышающий число страниц в этой книге. Фактически мы останавливаемся лишь на подходах к собственно алгебраической топологии, так что нашу книгу можно считать не более как введением в этот отдел математики.

Опишем вкратце содержание книги.

Гл. I посвящена теории категорий частных и некоторым примерам приложения этой теории к группоидам, каонным пространствам и абелевым категориям. По любой категории $\mathcal{C}$ и произвольному подмножеству Σ множества $\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$ морфизмов категории $\mathcal{C}$ мы строим новую категорию $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ с теми же объектами, что и категория $\mathcal{C}$, но в которой морфизмы множества Σ обратимы. Описание множества морфизмов категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ особенно просто, когда множество Σ *«допускает исчисление частных»*. В этом случае каждый морфизм категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ имеет вид $s^{-1}f$, где $s\in\Sigma$ и $f\in\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$. Понятие категории частных интересно в основном ввиду его связи с вопросом о существовании сопряженных функторов (см. предложения 1.3 и 4.1).

В гл. II после напоминания некоторых свойств функторов, принимающих значения в категории множеств, мы излагаем определение категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ симплициальных множеств и выводим простейшие свойства этих множеств. Мы конструируем некий вполне инъективный функтор из категории $\mathcal{C}at$ в категорию $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, обладающий левым сопряженным функтором. Получающаяся пара сопряженных функторов позволяет нам построить ряд других таких пар и, в частности, пару (Π, D), где Π — функтор, сопоставляющий симплициальному множеству X его группоид Пуанкаре ΠX, а D — функтор, сопоставляющий группоиду G некоторое симплициальное множество DG типа $K(\pi_1 G, 1)$. Функторы Π и D позволяют исключительно просто доказать все свойства группы Пуанкаре (фундаментальной группы) произвольного пунктированного симплициального множества (включая теорему ван Кампена).

Гл. III посвящена изучению построенного Милнором функтора геометрической реализации $|\,?\,|$. Доказав, что геометрические реализации симплициальных множеств обладают хорошими общетопологическими свойствами (являются локально линейно связными и локально стягиваемыми хаусдорфовыми пространствами), мы затем показываем, что функтор $|\,?\,|$ обладает также хорошими свойствами перестановочности (он перестановочен с прямыми и конечными обратными пределами, а геометрическая реализация произвольного локально тривиального морфизма симплициальных множеств является локально тривиальным морфизмом топологических пространств, и потому, в частности, расслоением в смысле Серра). Однако для доказательства этих свойств перестановочности оказывается необходимым несколько видоизменить классическое определение функтора | ? |. Именно, необходимо считать, что *областью его значений является не категория всех топологических пространств, а ее полная подкатегория, порожденная каонными пространствами.*

Теория гомотопий начинается с гл. IV. Мы определяем отношение гомотопности морфизмов симплициальных множеств без каких-либо ограничений на их области значений (в частности, мы не требуем, чтобы эти области были полными симплициальными множествами). Это позволяет нам ввести в рассмотрение категорию $\overline{\Delta^{\circ}\mathscr{E}n\ell}$ симплициальных множеств по модулю гомотопии. В этой категории мы выделяем так называемые *анодинные морфизмы* и определяем интересующую нас гомотопическую категорию $\mathscr{H}$ как категорию частных категории $\overline{\Delta^{\circ}\mathscr{E}n\ell}$ по множеству всех анодинных морфизмов. Мы показываем, что для любого симплициального множества X существует анодинный морфизм $X \to X_K$, область значений X_K которого является полным симплициальным множеством, откуда непосредственно следует, что категория $\mathscr{H}$ эквивалентна категории полных симплициальных множеств по модулю гомотопии. Все это повторяется также и в «пунктированном» варианте. Кроме того, гл. IV содержит также некоторые технические леммы о расслоениях симплициальных множеств и о полных симплициальных множествах. В заключение этой главы мы в качестве упражнения показываем, как П-теория гл. II укладывается в рамки теории гомотопий.

Гл. V не зависит от предыдущих, и для ее понимания достаточно знакомства с некоторыми элементарными фактами теории группоидов (изложенными в Глоссарии и в гл. I). Она содержит унифицированное самодвойственное построение ряда точных последовательностей, встречающихся в алгебраической топологии. В качестве частных случаев рассмотрены некоторые известные точные последовательности (см. Пуппе [1] и Экман — Хилтон [1]). Освоив материал этой главы, читатель сможет без труда сам доказать точность других точных последовательностей алгебраической топологии (в частности, всех последовательностей Экмана — Хилтона; loc cit). Излагаемый в этой главе метод состоит в построении точных последовательностей сначала в бикатегории пунктированных группоидов и затем в сведе́нии к этому случаю других бикатегорий, удовлетворяющих некоторым естественным условиям.

Быть может, не бесполезно отметить, что этот метод позволяет также дать простое доказательство точности последовательности Спеньера — Уайтхеда в S-теории (см. Спеньер — Уайтхед [1], а также Спеньер [1]).

В гл. VI результаты предыдущей главы применяются к симплициальным множествам вообще и к гомотопической категории в частности. В этой главе содержится также определение гомотопических групп и некоторые технические результаты, касающиеся минимальных расслоений. Завершается глава доказательством гомотопической эквивалентности (относительно базы) произвольного расслоения локально тривиальному морфизму и доказательством для симплициальных множеств знаменитой теоремы Уайтхеда.

В заключительной гл. VII сопоставление результатов предыдущих глав немедленно приводит к доказательству теорем эквивалентности, сформулированных в начале этого введения, — теорем, составляющих оправдание всей развиваемой нами теории.

Все это, как уже было сказано, является лишь введением в алгебраическую топологию. Чтобы показать, что наши методы позволяют получать и более глубокие результаты, мы к основному тексту книги добавили два приложения, где весьма кратко обрисованы некоторые дальнейшие возможности применения этих методов.

В приложении 1 читатель найдет теорию накрытий и локальных систем и, в частности, доказательство теоремы ван Кампена для геометрических реализаций симплициальных множеств.

В приложении 2 показывается, что классическая теорема Эйленберга о совпадении групп гомологий симплициального множества с группами гомологий его геометрической реализации является по существу непосредственным следствием доказанной в гл. VII теоремы Милнора. Здесь же доказывается теорема Серра о спектральной последовательности расслоения.

Эта книга выросла из трудов семинара при Страсбургском математическом институте, организованного в 1963/64 уч. году авторами с помощью Годбийона.

Мы благодарны проф. Дольду, предложившему нам написать эту книгу для издательства Шпрингер, и проф. Хилтону, прочитавшему черновой вариант рукописи и принявшему ее для опубликования в серии «Эргебниссе». Мы также благодарим м-ра Демера, принявшего на себя неблагодарную задачу перевода рукописи на английский язык.

Страсбург, 1 июня 1966 г. *П. Габриель, М. Цисман*

Схема зависимости глав

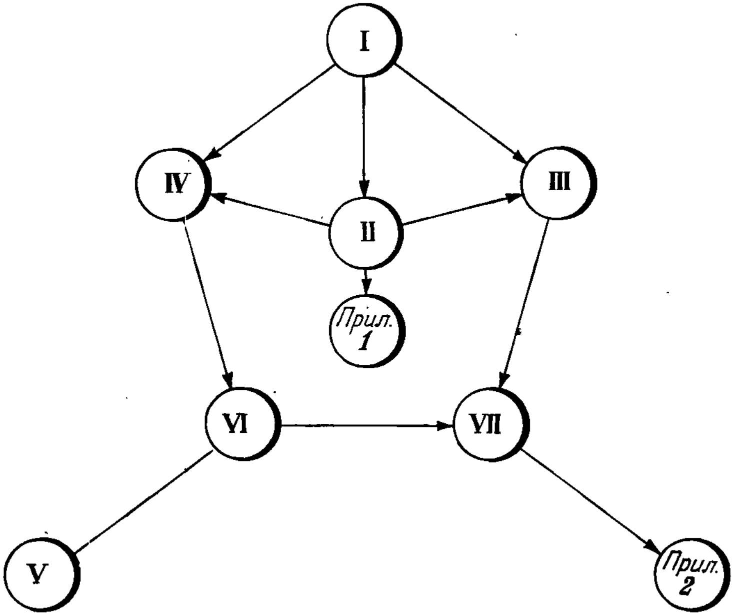


Рис. 1

ГЛОССАРИЙ

Рекомендуемая литература: Габриель [1], Гротендик [1], Маклейн [2], Митчелл [1]. (Следует иметь в виду, что каждый из этих авторов использует свою терминологию, отличающуюся как от терминологии других авторов, так и от терминологии, принятой в этой книге.)

* * *

Абелевы и аддитивные категории (см., например, Габриель [1]). Эти понятия в книге встречаются лишь спорадически в примерах и пояснениях, и для понимания основного текста они не нужны. Поэтому мы определять их здесь не будем.

Амальгамы. Прямые пределы (см.) диаграмм вида

$$(*)\qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{b} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

Амальгаму диаграммы (*) мы будем называть также *амальгамой объектов A и B под объектом C* (иногда говорят также об *амальгаме объектов A и B с объединенным объектом C*). Обозначать ее мы будем либо символом $A \overset{C}{\sqcup} B$, либо символом $A \overset{a,b}{\sqcup} B$. Каждая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{b} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ A & \xrightarrow{u} & D \end{array}$$

однозначно определяет некоторый морфизм

$$w\colon A \overset{a,b}{\sqcup} B \to D,$$

обладающий тем свойством, что $w \circ \mathrm{in}_1 = u$, $w \circ \mathrm{in}_2 = v$, где $\mathrm{in}_1\colon A \to A \overset{a,b}{\sqcup} B$, $\mathrm{in}_2\colon B \to A \overset{a,b}{\sqcup} B$ — канонические инъекции. Мы будем говорить, что морфизмы u и v являются *компонентами* морфизма w.

В категории множеств $\mathfrak{Ens}$ амальгамой $A \overset{a,b}{\sqcup} B$ является объединение (непересекающихся) множеств A и B, в котором отождествлены элементы вида ac и bc, $c \in C$. Аналогично, в категории групп амальгамой $A \overset{a,b}{\sqcup} B$ является факторгруппа свободного произведения групп A и B, возникающая при отождествлении элементов вида ac и bc, $c \in C$.

У Габриеля [1] амальгамы называются „somme fibrée", а у Митчелла [1] — „push-out".

Вполне инъективные функторы. Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ называется *вполне инъективным*, если он осуществляет эквивалентность (см.) категории $\mathcal{C}$ с некоторой полной подкатегорией категории $\mathcal{C}'$. Функтор F тогда и только тогда вполне инъективен, когда для любых объектов c и d категории $\mathcal{C}$ осуществляемое им отображение $F(c, d)\colon \mathcal{C}(c, d) \to \mathcal{C}'(Fc, Fd)$ (см. Функторы) биективно.

Группоиды. *Группоидом* называется категория, все морфизмы которой обратимы (см.).

Группы. Объект $c \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ называется *группой категории* $\mathcal{C}$ (соответственно *абелевой группой категории* $\mathcal{C}$), если для любого объекта $c' \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ множество $\mathcal{C}(c', c)$ снабжено естественным строением (абелевой) группы, т. е. если функтор $\mathcal{C}(?, c)\colon c' \rightsquigarrow \mathcal{C}(c', c)$ из категории $\mathcal{C}^\circ$ в категорию множеств $\mathfrak{Ens}$ разложен в композицию некоторого функтора $\mathcal{C}^\circ \to \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ — категория групп (соответственно некоторого функтора $\mathcal{C}^\circ \to \mathcal{Ab}$, где $\mathcal{Ab}$ — категория абелевых групп), и пренебрегающего функтора $\mathcal{G} \to \mathfrak{Ens}$ (соответственно $\mathcal{Ab} \to \mathfrak{Ens}$).

Двойственность. Диаграммная схема T° называется *двойственной* диаграммной схеме T, если

$$\mathfrak{Ob}\,T^\circ = \mathfrak{Ob}\,T, \qquad \mathfrak{Ar}\,T^\circ = \mathfrak{Ar}\,T,$$

$$\mathfrak{d}_{T^\circ} = \mathfrak{r}_T, \qquad \mathfrak{r}_{T^\circ} = \mathfrak{d}_T.$$

Аналогично, категория $\mathcal{C}^\circ$ называется *двойственной* категории $\mathcal{C}$, если схемы этих категорий двойственны и, кроме того,

$$Id_{\mathcal{C}^\circ} = Id_{\mathcal{C}},$$

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{C}^\circ} = \mathfrak{m}_{\mathcal{C}}\circ\tau,$$

где τ — отображение перестановки сомножителей.

Диаграммные схемы. *Диаграммная схема T* состоит по определению из двух множеств $\mathfrak{Ob}\,T$ и $\mathfrak{Ar}\,T$ и двух отображений $\mathfrak{d}_T$, $\mathfrak{r}_T$: $\mathfrak{Ar}\,T \to \mathfrak{Ob}\,T$. Элементы множества $\mathfrak{Ob}\,T$ называются *объектами* схемы, а элементы множества $\mathfrak{Ar}\,T$ — ее *морфизмами* или *стрелками*. Для любого морфизма a объект $\mathfrak{d}_T a$ называется его *областью определения*, а объект $\mathfrak{r}_T a$ — его *областью значений*. Подмножество множества $\mathfrak{Ar}\,T$, состоящее из всех морфизмов с данной областью определения s и данной областью значений t, обозначается символом $\mathrm{Hom}_T\,(s,t)$. Запись a: $s \to t$ означает по определению, что $a \in \in \mathrm{Hom}_T\,(s,t)$.

Морфизмом d схемы T в схему U называется пара таких отображений $d_{\mathfrak{Ob}}$: $\mathfrak{Ob}\,T \to \mathfrak{Ob}\,U$ и $d_{\mathfrak{Ar}}$: $\mathfrak{Ar}\,T \to \mathfrak{Ar}\,U$, что $\mathfrak{d}_U \circ d_{\mathfrak{Ar}} = d_{\mathfrak{Ob}} \circ \mathfrak{d}_T$ и $\mathfrak{r}_U \circ d_{\mathfrak{Ar}} = d_{\mathfrak{Ob}} \circ \mathfrak{r}_T$. Ясно, что схемы и их морфизмы составляют категорию.

Каждой категории $\mathcal{C}$ соответствует диаграммная схема, получающаяся игнорированием отображений $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ и $\mathfrak{m}_{\mathcal{C}}$. Каждый функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ является, очевидно, морфизмом схемы категории $\mathcal{C}$ в схему категории $\mathcal{D}$. Таким образом, сопоставление категории ее схемы определяет некоторый функтор («пренебрегающий функтор») из категории категорий $\mathcal{C}at$ в категорию диаграммных схем.

Диаграммы. Пусть T и U — две диаграммные схемы. *Диаграммой типа T над схемой U* называется произвольный морфизм схемы T в схему U. Диаграмма называется *конечной*, если ее тип T обладает тем свойством, что множества $\mathfrak{Ob}\,T$ и $\mathfrak{Ar}\,T$ конечны. *Диаграммами над категорией $\mathcal{C}$* называются диаграммы над диаграммной схемой категории $\mathcal{C}$. Любой функтор F: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ можно рассматривать как диаграмму над $\mathcal{C}'$, типом которой является схема категории $\mathcal{C}$.

Пусть d: $T \to \mathcal{C}$ и d': $T \to \mathcal{C}$ — две диаграммы одного и того же типа T над одной и той же категорией $\mathcal{C}$. *Морфизмом* диаграммы d в диаграмму d' называется такое отображение Φ: $\mathfrak{Ob}\,T \to \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$, сопоставляющее каждому объекту t схемы T некоторый морфизм Φt: $dt \to d't$ категории $\mathcal{C}$, что для любого морфизма a: $t \to t'$ схемы T имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} dt \arrow[r, "\Phi t"] \arrow[d, "da"'] & d't \arrow[d, "d'a"] \\ dt' \arrow[r, "\Phi t'"] & d't' \end{tikzcd}$$

Все диаграммы типа T над категорией $\mathcal{C}$ и все их морфизмы составляют, очевидно, категорию.

Инициальный конус. См. Пределы прямые.

Категории. Диаграммная схема $\mathcal{C}$ называется *категорией*, если заданы отображения

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}: \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C},$$

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{C}}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_2, c_3) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c_1, c_3),$$

обладающие следующими свойствами:

1) для любого объекта c категории $\mathcal{C}$

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\, c) = \mathfrak{r}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\, c) = c;$$

морфизм $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}\, c$ называется при этом *тождественным морфизмом* объекта c;

2) отображение $\mathfrak{m}_{\mathcal{C}}$ определено для любых трех объектов c_1, c_2, c_3 категории $\mathcal{C}$; морфизм $\mathfrak{m}_{\mathcal{C}}(u, v)$, где $u: c_1 \to c_2$, $v: c_2 \to c_3$, называется при этом *композицией* морфизмов u, v и обозначается символом $v \circ u$ или просто vu; отображение $\mathfrak{m}_{\mathcal{C}}$ называется *законом композиции* категории $\mathcal{C}$;

3) для любых морфизмов $u: c_1 \to c_2$, $v: c_2 \to c_3$, $w: c_3 \to c_4$ имеет место соотношение ассоциативности:

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u;$$

4) для любого морфизма $u: c \to c'$ имеют место равенства

$$u \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} c = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} c' \circ u = u.$$

В обозначениях $\mathfrak{d}_{\mathcal{C}}$, $\mathfrak{r}_{\mathcal{C}}$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ и $\mathfrak{m}_{\mathcal{C}}$ индекс $\mathcal{C}$ обычно опускается. Множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ обозначается также символом $\mathcal{C}(c, c')$.

Пусть $u: a \to b$ — произвольный морфизм категории $\mathcal{C}$, а c — произвольный ее объект. Тогда соответствия

$$f \rightsquigarrow u \circ f, \qquad f \rightsquigarrow f \circ u$$

определяют некоторые отображения

$$\mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b), \qquad \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c).$$

Эти отображения обозначаются соответственно символами $\mathcal{C}(c, u)$ и $\mathcal{C}(u, c)$ (а также символами $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, u)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, c)$).

Категория группоидов $\mathcal{G}r$. Это полная подкатегория категории $\mathcal{C}at$ (см.), объектами которой являются всевозможные группоиды. Эта категория допускает функториальные прямые и обратные пределы (см. ниже гл. I, п. 1.5.4).

Категория категорий $\mathcal{C}at$. Объектами этой категории являются всевозможные категории $\mathcal{C}$, для которых множества $\mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ и $\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$

лежат в некотором фиксированном «универсальном множестве». Морфизмами категории $\mathcal{C}at$ являются функторы, компонируемые обычным образом.

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — произвольные категории. Ясно, что всевозможные функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и их морфизмы составляют категорию. Эту категорию мы будем обозначать символом $\mathcal{H}om\,(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ или просто $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$. Таким образом,

$$\mathfrak{Ob}\,\mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}\,(\mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

При этом для любого функтора $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и любой категории $\mathcal{K}$ отображения

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(\mathcal{K}, F):\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(\mathcal{K}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(\mathcal{K}, \mathcal{D}),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(F, \mathcal{K}):\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(\mathcal{D}, \mathcal{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(\mathcal{C}, \mathcal{K})$$

можно дополнить до некоторых функторов

$$\mathcal{H}om(\mathcal{K}, F):\ \mathcal{H}om(\mathcal{K}, \mathcal{C}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{K}, \mathcal{D}),$$

$$\mathcal{H}om(F, \mathcal{K}):\ \mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{K}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{K}).$$

Именно, морфизмы $\Phi \in \mathcal{H}om(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ и $\Psi \in \mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ эти функторы переводят соответственно в морфизмы $F\Phi \in \mathcal{H}om\,(\mathcal{K}, \mathcal{D})$ и $\Psi F \in \mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{K})$, определенные формулами

$$(F\Phi)\,(X) = F(\Phi X),\quad X \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{K},$$

$$(\Psi F)\,(C) = \Psi(FC),\quad C \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}.$$

Покажем, что *категория $\mathcal{C}at$ допускает функториальные прямые и обратные пределы*. Действительно, пусть $d: T \to \mathcal{C}at$ — произвольная диаграмма над категорией $\mathcal{C}at$ (некоторого малого типа T). Рассмотрим категорию $\varprojlim d$, множеством объектов $\mathfrak{Ob}\,(\varprojlim d)$ которой является обратный предел $\varprojlim_t \mathfrak{Ob}\,(d(t))$ множеств объектов категорий $d(t)$:

$$\mathfrak{Ob}\,(\varprojlim d) = \varprojlim_t \mathfrak{Ob}\,(d(t));$$

множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\varprojlim d}\,((x_t), (y_t))$ для любых двух объектов (x_t) и (y_t) определяется формулой

$$\mathrm{Hom}_{\varprojlim d}\,((x_t), (y_t)) = \varprojlim_t \mathrm{Hom}_{d(t)}\,(x_t, y_t),$$

а закон композиции

$$\mathrm{Hom}_{\underleftarrow{\lim} d}((x_t), (y_t)) \times \mathrm{Hom}_{\underleftarrow{\lim} d}((y_t), (z_t)) \to \mathrm{Hom}_{\underleftarrow{\lim} d}((x_t), (z_t))$$

индуцируется законами композиции

$$\mathrm{Hom}_{d(t)}(x_t, y_t) \times \mathrm{Hom}_{d(t)}(y_t, z_t) \to \mathrm{Hom}_{d(t)}(x_t, z_t)$$

категорий $d(t)$. Тождественные морфизмы этой категории определяются очевидным образом. Без труда проверяется, что эта категория и является обратным пределом диаграммы d.

Прямые пределы строятся несколько сложнее. Пусть снова $d\colon T \to \mathcal{C}at$ — произвольная малая диаграмма над категорией $\mathcal{C}at$. Определим диаграммную схему X, полагая

$$\mathfrak{Ob}\, X = \varinjlim_t \mathfrak{Ob}\,(d(t)),$$

$$\mathfrak{Ar}\, X = \varinjlim_t \mathfrak{Ar}\,(d(t))$$

и принимая за отображения

$$\mathfrak{d}_X, \mathfrak{r}_X\colon \mathfrak{Ar}\, X \to \mathfrak{Ob}\, X$$

отображения, индуцированные отображениями $\mathfrak{d}_{d(t)}$ и $\mathfrak{r}_{d(t)}$ соответственно. Ясно, что эта схема является прямым пределом схем категорий $d(t)$.

Пусть теперь $\mathcal{P}a\, X$ — категория путей (см.) диаграммной схемы X. Ясно, что для любого t инъекции $\mathfrak{Ob}\, d(t) \to \varinjlim_t \mathfrak{Ob}\, d(t)$ и $\mathfrak{Ar}\, d(t) \to \varinjlim_t \mathfrak{Ar}\, d(t)$ определяют некоторую диаграмму $i_t\colon d(t) \to \mathcal{P}a\, X$. Нет никаких оснований рассчитывать на то, что эта диаграмма будет функтором, так что для некоторых компонируемых морфизмов α и β категории $d(t)$ морфизм $i_t(\beta) \circ i_t(\alpha)$ может быть отличен от морфизма $i_t(\beta \circ \alpha)$. Аналогично, для некоторых объектов a категории $d(t)$ морфизм $i_t(\mathrm{Id}\, a)$ может быть отличен от морфизма $\mathrm{Id}\, i_t(a)$. Чтобы превратить эти диаграммы в функторы, необходимо профакторизовать категорию $\mathcal{P}a X$ по наименьшему отношению эквивалентности, в котором

$$i_t(\beta) \circ i_t(\alpha) \sim i_t(\beta \circ \alpha),$$
$$i_t(\mathrm{Id}\, a) \sim \mathrm{Id}\, i_t(a).$$

В результате этой факторизации мы из категории $\mathcal{P}a\, X$ получим новую категорию $\varinjlim d$, множество объектов которой совпадает с множеством объектов категории $\mathcal{P}a\, X$ (схемы X):

$$\mathfrak{Ob}\,(\varinjlim d) = \varinjlim_t \mathfrak{Ob}\,(d(t)),$$

а множество морфизмов является фактормножеством

$$\mathfrak{Ar}\,(\varinjlim d) = \mathfrak{Ar}\,\mathcal{P}aX/S$$

множества $\mathfrak{Ar}\,\mathcal{P}aX$ морфизмов категории $\mathcal{P}aX$ по пересечению S всех отношений эквивалентности R, обладающих следующими свойствами:

a) отношение R содержит пары

$$(i_t(\beta)\circ i_t(\alpha),\ i_t(\beta\circ\alpha)),\ (i_t(\mathrm{Id}\,a),\ \mathrm{Id}\ i_t(a))$$

для всех t, β, α и a;

b) соотношение $f \underset{R}{\sim} g$ может иметь место только тогда, когда области определения и области значений морфизмов f и g совпадают;

c) из соотношения $f \underset{R}{\sim} g$ вытекают соотношения $\alpha\circ f \underset{R}{\sim} \alpha\circ g$ и $f\circ\alpha \underset{R}{\sim} g\circ\alpha$ каждый раз, когда морфизмы $\alpha\circ f$ и $f\circ\alpha$ определены.

Закон композиции и тождественные морфизмы категории $\varinjlim d$ определяются очевидным образом.

Тот факт, что построенная категория $\varinjlim d$ действительно является прямым пределом диаграммы d, проверяется непосредственно.

Категория множеств $\mathfrak{Ens}$. Объектами этой категории являются произвольные множества (лежащие в фиксированном «универсальном множестве»), а морфизмами — произвольные отображения множеств. *Эта категория допускает функториальные прямые и обратные пределы.* Действительно, обратным пределом произвольной малой диаграммы $d\colon T \to \mathfrak{Ens}$ является, как легко видеть, подмножество прямого произведения $\prod_t d(t)$ множеств $d(t)$, состоящее из таких элементов (x_t), что $x_{t'} = (da)\,(x_t)$ для любого морфизма $a\colon t \to t'$ диаграммной схемы T. Прямым же пределом этой диаграммы является фактормножество объединения $\bigsqcup_t d(t)$ множеств $d(t)$ (предполагаемых непересекающимися) по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему все пары вида $(x,\ (da)x)$, где a — произвольный морфизм схемы T, а x — произвольный элемент множества $d(\mathfrak{b}a)$.

Категория морфизмов. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория. *Категорией морфизмов* $\mathcal{A}r\,\mathcal{C}$ категории $\mathcal{C}$ называется категория, объектами которой служат морфизмы $u\colon c \to c'$ категории $\mathcal{C}$ (так что $\mathfrak{Ob}\ \mathcal{A}r\,\mathcal{C} = \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$), а морфизмами объекта $u\colon c \to c'$ в объект $v\colon d \to d'$ — пары (α, α') морфизмов $\alpha\colon c \to d$ и $\alpha'\colon c' \to d'$ категории $\mathcal{C}$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & d \arrow[d, "v"] \\ c' \arrow[r, "\alpha'"] & d' \end{tikzcd}$$

Компонируются эти морфизмы очевидным образом. Морфизмы категории $\mathcal{C}$ называются *изоморфными*, если они изоморфны как объекты категории $\mathcal{A}r\,\mathcal{C}$.

Пусть c — произвольный объект категории $\mathcal{C}$. *Объектом категории $\mathcal{C}$ над объектом c* называется произвольный морфизм $u: d \to c$ категории $\mathcal{C}$, областью значений которого является объект c (впрочем, допуская некоторую вольность речи, часто в этой ситуации объектом над c называют не морфизм u, а его область определения d). Морфизмами объекта $u: d \to c$ в объект $v: d' \to c$ называются при этом произвольные морфизмы $\alpha: d \to d'$ категории $\mathcal{C}$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} d \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "u"'] & & d' \arrow[dl, "v"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

Ясно, что объекты над c и их морфизмы образуют некоторую категорию, являющуюся подкатегорией категории $\mathcal{A}r\,\mathcal{C}$. Мы будем эту категорию обозначать символом $\mathcal{C}/c$.

Аналогично определяется *категория $c\backslash\mathcal{C}$ объектов категории $\mathcal{C}$ под объектом c*, объектами которой служат морфизмы $u: c \to d$ категории $\mathcal{C}$ с областью определения c.

Категория пространств $\mathcal{T}op$. Объектами этой категории являются произвольные топологические пространства (содержащиеся в некотором «универсальном пространстве»), а морфизмами — их произвольные непрерывные отображения. *Эта категория допускает функториальные прямые и обратные пределы.* Строятся эти пределы точно так же, как в категории $\mathcal{E}ns$ (см.).

Категория $\mathcal{P}a\,T$ путей диаграммной схемы T. Объектами этой категории являются объекты схемы T, а морфизмами — такие последовательности $(a_1, \ldots, a_n)$ морфизмов схемы T, что $\mathfrak{r}a_i = \mathfrak{d}\,a_{i+1}$ для любого $i = 1, \ldots, n-1$. Композиция морфизмов определяется «приставлением» последовательностей.

Пусть d_T — диаграмма типа T над категорией $\mathcal{P}a\,T$, являющаяся тождественным отображением на объектах и сопоставляющая каждому морфизму a схемы T последовательность, состоящую только из этого морфизма a. Тогда пара $(\mathcal{P}a\,T,\ d_T)$ однозначно характеризуется следующим «свойством универсальности»: для любой категории $\mathcal{C}$ и любой диаграммы e типа T над категорией $\mathcal{C}$ существует один и только один функтор $E: \mathcal{P}a\,T \to \mathcal{C}$, для которого $Ed_T = e$.

Квазиобратные морфизмы. См. Сопряженные функторы.

Квазифильтрующиеся категории. Категория $\mathcal{C}$ называется *квазифильтрующейся (справа)*, если

1) для любой пары (a, a') ее морфизмов, имеющих одну и ту же область определения, существует такая пара морфизмов (b, b'), имеющих одну и ту же область значений, что $ba = b'a'$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dashed, "b"] & \\ A \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "a'"'] & & C \\ & B' \arrow[ur, dashed, "b'"'] & \end{tikzcd}$$

2) для любой пары (c, c') ее морфизмов, имеющих одни и те же области определения и значений, существует такой морфизм d, что $dc = dc'$:

$$A \underset{c'}{\overset{c}{\rightrightarrows}} B \overset{d}{\dashrightarrow} C.$$

Коамальгамы. Обратные пределы (см.) диаграмм вида

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "a"] & C \end{tikzcd}$$

Коамальгаму диаграммы (**) мы будем называть также *коамальгамой объектов A и B над объектом C*. Обозначать ее мы будем одним из символов $A \underset{C}{\times} B$, $A \underset{a,\,b}{\times} B$, $A \underset{C}{\sqcap} B$, $A \underset{a,\,b}{\sqcap} B$. Каждая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "a"] & C \end{tikzcd}$$

однозначно определяет некоторый морфизм

$$w: D \to A \underset{a,\,b}{\sqcap} B,$$

обладающий тем свойством, что $\mathrm{pr}_1 \circ w = u$, $\mathrm{pr}_2 \circ w = v$, где $\mathrm{pr}_1: A \underset{a,b}{\sqcap} B \to A_1$, $\mathrm{pr}_2: A \underset{a,b}{\sqcap} B \to B$ — канонические проекции. Мы будем говорить, что морфизмы u и v являются *компонентами* морфизма w.

В категории множеств (а также в категории групп) коамальгамой $A \underset{a,b}{\sqcap} B$ является подмножество прямого произведения $A \times B$, состоящее из всех пар (α, β), для которых $a\alpha = b\beta$. Для любого отображения $u\colon A \to C$ и любого элемента $c \in C$ прообраз $u^{-1}(c)$ этого элемента естественным образом отождествляется с коамальгамой $A \underset{u,i}{\sqcap} \{c\}$, где $i\colon \{c\} \to C$ — отображение вложения.

У Габриеля [1] коамальгамы называются „produit fibrée", а у Митчелла [1] — „pull-back".

Когруппы. Объект $c \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ называется *когруппой категории* $\mathcal{C}$ (соответственно *абелевой когруппой категории* $\mathcal{C}$), если для любого объекта $c' \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ множество $\mathcal{C}(c, c')$ снабжено естественным строением (абелевой) группы, т. е. если функтор $\mathcal{C}(c, ?)\colon c' \rightsquigarrow \mathcal{C}(c, c')$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию множеств $\mathcal{E}ns$ разложен в композицию некоторого функтора $\mathcal{C} \to \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ — категория групп (соответственно некоторого функтора $\mathcal{C} \to \mathcal{A}b$, где $\mathcal{A}b$ — категория абелевых групп), и «пренебрегающего функтора» $\mathcal{G} \to \mathcal{E}ns$ (соответственно $\mathcal{A}b \to \mathcal{E}ns$).

Если объект c является когруппой, а объект c' — группой (см.) категории $\mathcal{C}$, то групповое строение на множестве $\mathcal{C}(c, c')$, соответствующее когруппе c, совпадает с групповым строением, соответствующим группе c', и является строением абелевой группы.

Консервативные функторы. Функтор $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется *консервативным*, если морфизм u категории $\mathcal{A}$ тогда и только тогда обратим, когда обратим морфизм Fu.

Коосвобождающие морфизмы. Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — произвольный функтор, и пусть a и b — объекты категорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Морфизм $u\colon Fa \to b$ категории $\mathcal{B}$ мы будем называть *коосвобождающим* (или *освобождающим справа*), если для любого объекта a' категории $\mathcal{A}$ и любого морфизма $u'\colon Fa' \to b$ категории $\mathcal{B}$ существует один и только один морфизм $v\colon a' \to a$ категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющий соотношению $u' = u \circ (Fv)$. В этом случае мы будем также говорить, что объект *a косвободен* (или *свободен справа*) *над объектом b* (по отношению к данному функтору F).

Косвободные объекты. См. Коосвобождающие морфизмы.

Коуниверсальные квадраты. Коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ C & \xrightarrow{v} & D \end{array}$$

называется *коуниверсальным*, если морфизмы v и y составляют инициальный (см.) конус с базой $C \xleftarrow{x} A \xrightarrow{u} B$, т. е. если для любых морфизмов $b\colon B \to E$ и $c\colon C \to E$, удовлетворяющих соотношению $bu = cx$, существует один и только один морфизм $d: D \to E$, для которого $b = dy$ и $c = dv$. Объект D является в этом случае амальгамой (см.) диаграммы $C \leftarrow A \to B$.

Коядра. Коядром пары морфизмов f, g: $a \to b$ называется прямой предел диаграммы $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$.

Таким образом, объект c является коядром пары (f, g), если задан некоторый морфизм $t: b \to c$, обладающий тем свойством, что $tf = tg$, и «универсальный» по отношению к этому свойству, т. е. такой, что любой морфизм t': $b \to c'$, для которого $t'f = t'g$, имеет вид $s \circ t$, где s — некоторый морфизм $c \to c'$. Иногда коядром пары (f, g) называется не объект c, а морфизм t: $b \to c$.

У Митчелла [1] коядро называется „coequalizer“.

Малые диаграммы. Диаграммная схема T называется *малой*, если множества $\mathfrak{Ob}\, T$ и $\mathfrak{Ar}\, T$ принадлежат некоторому фиксированному «универсальному множеству». Диаграмма называется *малой*, если ее тип является малой схемой.

Мономорфизмы. Морфизм u категории $\mathcal{C}$ называется *мономорфизмом*, если для любых морфизмов v_1, $v_2 \in \mathfrak{Ar}\, \mathcal{C}$ равенство $uv_1 = uv_2$ возможно лишь тогда, когда $v_1 = v_2$, т. е. если для любого объекта $c \in \mathfrak{Ob}\, \mathcal{C}$ отображение $\mathcal{C}(c, u)$ инъективно.

Морфизмы. См. Диаграммные схемы.

Область значений. См. Диаграммные схемы.

Область определения. См. Диаграммные схемы.

Обратимые морфизмы. *Изоморфизм*, т. е. морфизм $f: a \to b$, для которого существует такой морфизм $g: b \to a$, что $g \circ f = \mathrm{Id}\, a$ и $f \circ g = \mathrm{Id}\, b$, называется также *обратимым морфизмом*. Морфизм f обратим тогда и только тогда, когда для любого объекта $c \in \mathfrak{Ob}\, \mathcal{C}$ отображение $\mathcal{C}(f, c)$ (отображение $\mathcal{C}(c, f)$) биективно.

Нуль. Объект $0 \in \mathfrak{Ob}\, \mathcal{C}$ называется *левым* (соответственно *правым*) *нулем* категории $\mathcal{C}$, если для любого объекта $c \in \mathfrak{Ob}\, \mathcal{C}$ множество $\mathcal{C}(0, c)$ (соответственно множество $\mathcal{C}(c, 0)$) содержит точно один элемент. Объект, являющийся одновременно левым и правым нулем, называется просто *нулем*.

Некоторые авторы называют левый нуль «инициальным» объектом, а правый нуль — «терминальным».

Освобождающие морфизмы. Пусть $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — произвольный функтор, и пусть a и b — объекты категорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Морфизм u: $b \to Fa$ категории $\mathcal{B}$ мы будем называть *осво-*

бождающим (слева), если для любого объекта a' категории $\mathcal{A}$ и любого морфизма $u'\colon b \to Fa'$ категории $\mathcal{B}$ существует один и только один морфизм $v\colon a \to a'$ категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющий соотношению $u' = (Fv) \circ u$. В этом случае мы будем также говорить, что объект *a свободен (слева)* над объектом b (по отношению к данному функтору F).

Перестановочность обратных и прямых пределов. Пусть S и T — диаграммные схемы, и пусть $\mathcal{C}$ — категория, допускающая обратные пределы типа S и прямые пределы типа T. Предположим, что в категории $\mathcal{C}$ для любых морфизмов $a\colon s \to s' \in \mathfrak{Ar}\, S$ и $b\colon t \to t' \in \mathfrak{Ar}\, T$ задана коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} d(s, t) \arrow[r, "d(a, t)"] \arrow[d, "d(s, b)"'] & d(s', t) \arrow[d, "d(s', b)"] \\ d(s, t') \arrow[r, "d(a, t')"] & d(s', t') \end{tikzcd}$$

Тогда для любого объекта $s \in \mathfrak{Ob}\, S$ соответствия

$$t \rightsquigarrow d(s, t), \qquad t \in \mathfrak{Ob}\, T,$$

$$b \rightsquigarrow d(s, b), \qquad b \in \mathfrak{Ar}\, T,$$

будут определять над категорией $\mathcal{C}$ некоторую диаграмму $d(s, ?)$ типа T. Пусть $\delta(s, \cdot) = \varinjlim_t d(s, t)$ — прямой предел этой диаграммы (по условию существующий), а $(q_{s,t}\colon\ d(s, t) \to \delta(s, \cdot))$ — соответствующий инициальный конус.

Аналогично, для любого морфизма $a\colon s \to s' \in \mathfrak{Ar}\, S$ соответствия

$$t \rightsquigarrow d(a, t), \qquad t \in \mathfrak{Ob}\, T,$$

определяют некоторый морфизм $d(a, ?)$ диаграммы $d(s, ?)$ в диаграмму $d(s', ?)$. Пусть $\delta(a, \cdot) = \varinjlim_t d(a, t)$ — прямой предел этого морфизма. Ясно, что соответствия

$$s \rightsquigarrow \delta(s, \cdot), \qquad s \in \mathfrak{Ob}\, S,$$

$$a \rightsquigarrow \delta(a, \cdot), \qquad a \in \mathfrak{Ar}\, S,$$

определяют некоторую диаграмму $\delta(*, \cdot)$ типа S над категорией $\mathcal{C}$. Пусть x — обратный предел $\varprojlim_s \delta(s, \cdot) = \varprojlim_s \varinjlim_t d(s, t)$ диаграммы $\delta(*, \cdot)$.

С другой стороны, для любого объекта $t \in \mathfrak{Ob}\, T$ соответствия

$$s \rightsquigarrow d(s, t), \qquad s \in \mathfrak{Ob}\, S,$$
$$a \rightsquigarrow d(a, t), \qquad a \in \mathfrak{Ar}\, S,$$

определяют некоторую диаграмму $d(?, t)$ типа S над категорией $\mathcal{C}$, и для любого морфизма $b\colon t \to t' \in \mathfrak{Ar}\, T$ соответствия

$$s \rightsquigarrow d(s, b), \qquad s \in \mathfrak{Ob}\, S,$$

определяют некоторый морфизм $d(?, b)$ диаграммы $d(?, t)$ в диаграмму $d(?, t)$. Пусть $\delta(\cdot, t) = \varprojlim_s d(s, t)$ — обратный предел диаграммы $d(?, t)$, а $\delta(\cdot, b) = \varprojlim_s d(s, b)$ — обратный предел морфизма $d(?, b)$. Тогда соответствия

$$t \rightsquigarrow \delta(\cdot, t), \qquad t \in \mathfrak{Ob}\, T,$$
$$b \rightsquigarrow \delta(\cdot, b), \qquad b \in \mathfrak{Ar}\, T,$$

определяют, очевидно, некоторую диаграмму $\delta(\cdot, *)$ типа T над категорией $\mathcal{C}$. Пусть y — прямой предел $\varinjlim_t \delta(\cdot, t) = \varinjlim_t \varprojlim_s d(s, t)$ диаграммы $\delta(\cdot, *)$,

Заметим теперь, что для любого объекта $t \in \mathfrak{Ob}\, T$ соответствия

$$s \rightsquigarrow q_{s,t}, \qquad s \in \mathfrak{Ob}\, S,$$

определяют некоторый морфизм $q_{?,t}$ диаграммы $d(?, t)$ в диаграмму $\delta(*, \cdot)$. Пусть $q_t\colon \delta(\cdot, t) \to x$ — обратный предел этого морфизма. Ясно, что семейство $\{q_t\}$ морфизмов q_t составляет инициальный конус с базой $\delta(\cdot, *)$ и конечной вершиной x. Поэтому существует (единственный) морфизм $\alpha\colon x \to y$, обладающий тем свойством, что $\mathrm{in}_t^{\delta(\cdot, *)} = \alpha \circ q_t$ для всех $t \in \mathfrak{Ob}\, T$.

В случае когда для любой «двойной диаграммы» $d(s, t)$ построенный морфизм

$$\alpha\colon \varprojlim_s \varinjlim_t d(s, t) \to \varinjlim_t \varprojlim_s d(s, t)$$

обратим, мы будем говорить, что *в категории $\mathcal{C}$ обратные пределы типа S перестановочны с прямыми пределами типа T.*

Например, можно без особого труда показать, что в категории множеств $\mathcal{E}ns$ конечные обратные пределы (т. е. пределы диаграмм конечного типа) перестановочны с прямыми пределами по квазифильтрующимся категориям (т. е. с прямыми пределами диаграмм, тип которых является квазифильтрующейся категорией).

Стоит, быть может, заметить, что понятие обратного предела, перестановочного с прямым, является частным случаем общего понятия (см. Пределы прямые) функтора, перестановочного с прямыми пределами (во всяком случае тогда, когда обратные пределы в категории $\mathcal{C}$ функториальны).

Подкатегории. Категория $\mathcal{D}$ называется *подкатегорией* категории $\mathcal{C}$, если

$$\mathfrak{Ob}\,\mathcal{D}\subset\mathfrak{Ob}\,\mathcal{C},\quad \mathfrak{Ar}\,\mathcal{D}\subset\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C},$$

тождественные морфизмы в обеих категориях одинаковы и закон композиции морфизмов категории $\mathcal{D}$ индуцируется законом композиции морфизмов категории $\mathcal{C}$.

Полные подкатегории. Подкатегория $\mathcal{D}$ категории $\mathcal{C}$ называется *полной*, если для любой пары d, d' объектов категории $\mathcal{D}$ имеет место равенство $\mathcal{D}(d, d') = \mathcal{C}(d, d')$.

Пределы обратные. Пусть d — произвольная диаграмма типа T над категорией $\mathcal{C}$, и пусть x — некоторый объект из $\mathcal{C}$. *Обратным* (или *проективным*) *конусом с начальной вершиной x и базой d* называется семейство (p_t) морфизмов категории $\mathcal{C}$, обладающее следующими свойствами:

1) индексами семейства (p_t) служат объекты t диаграммной схемы T;

2) областью определения морфизма p_t является объект x, а областью значений — объект $dt = d_{\mathfrak{Ob}}(t)$;

3) для любого морфизма $a\colon t \to t'$ схемы T имеет место соотношение

$$p_{t'} = da \circ p_t, \text{ где } da = d_{\mathfrak{Ar}}(a).$$

Ясно, что все проективные конусы (с данной базой d) составляют категорию.

Конус (p_t) называется *терминальным*, если он является правым нулем (терминальным объектом) этой категории, т. е. если для любого конуса (q_t) с произвольной начальной вершиной y и той же самой базой d существует один и только один морфизм $g\colon y \to x$, обладающий тем свойством, что $q_t = p_t \circ g$ для любого t. В этом случае объект x называется *обратным* (или *проективным*) *пределом* диаграммы d и обозначается символом $\varprojlim_t d(t)$ (или просто $\varprojlim d$), а морфизмы p_t называются *проекциями* и обозначаются символами pr_t^d (или просто pr_t). С точностью до изоморфизма предел $\varprojlim d$ определен однозначно. Если диаграмма d возникает из некоторого функтора, то ее предел называется пределом этого функтора.

Предел $x = \varprojlim d$ произвольной диаграммы $d\colon T \to \mathcal{C}$ обладает тем свойством, что для каждого объекта c категории $\mathcal{C}$ множество $\mathcal{C}(c, \varprojlim d)$ является обратным пределом множеств $\mathcal{C}(c, dt)$ (т.е. обратным пределом диаграммы $t \rightsquigarrow \mathcal{C}(c, dt)$, $a \rightsquigarrow \mathcal{C}(c, da)$ над категорией $\mathcal{E}ns$):

$$\mathcal{C}(c, \varprojlim_t d(t)) = \varprojlim_t \mathcal{C}(c, dt)$$

(или, точнее, находится с этим множеством в естественном биективном соответствии). Действительно, элементами множества $\varprojlim \mathcal{C}(c, dt)$ являются, очевидно, обратные конусы (p_t) с начальной вершиной c и базой d. С другой стороны, согласно определению обратного предела $\varprojlim d$, каждый такой конус однозначно определяет некоторый морфизм $c \to \varprojlim d$. Таким образом, имеет место естественное отображение

$$\varprojlim_t \mathcal{C}(c, dt) \to \mathcal{C}(c, \varprojlim d).$$

Остается заметить, что это отображение очевидным образом биективно (обратное отображение определяется соответствием

$$\gamma \rightsquigarrow \mathrm{pr}_t^d \circ \gamma, \qquad \gamma \in \mathcal{C}(c, \varprojlim d)).$$

Обратно, если для некоторого объекта x категории $\mathcal{C}$ имеют место естественные биективные отображения

$$\Phi(c)\colon \varprojlim_t \mathcal{C}(c, dt) \to \mathcal{C}(c, x), \qquad c \in \mathfrak{Ob}\, \mathcal{C},$$

т. е. если существует обратимый функторный морфизм Φ функтора $\varprojlim \mathcal{C}(?, dt)\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{E}ns$ в функтор $\mathcal{C}(?, x)\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{E}ns$, то $x = \varprojlim d$. Действительно, в этом случае конус $(p_t) = \Phi(x)^{-1}(\mathrm{Id}\, x)$ будет, очевидно, терминальным конусом с начальной вершиной x и базой d.

Для любой диаграммы $d\colon T \to \mathcal{C}$ над категорией $\mathcal{C}$ и любого функтора $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ определена диаграмма $Fd\colon T \to \mathcal{D}$ над категорией $\mathcal{D}$. В случае когда оба предела $\varprojlim d$ и $\varprojlim Fd$ существуют, соотношение $\mathrm{pr}_t^{Fd} \circ \beta = F(\mathrm{pr}_t^d)$ однозначно определяет некоторый морфизм $\beta\colon F \varprojlim d \to \varprojlim Fd$. Очевидно, что следующие условия равносильны:

1) морфизм β обратим;
2) для любого объекта a категории $\mathcal{D}$ отображение

$$\mathcal{D}(a, \beta)\colon \mathcal{D}(a, F \varprojlim d) \to \mathcal{D}(a, \varprojlim Fd)$$

биективно;

3) для любого объекта a категории $\mathcal{D}$ отображение

$$\mathcal{D}(a, F \varprojlim d) \to \varprojlim_t \mathcal{D}(a, F(dt)),$$

сопоставляющее морфизму $\alpha\colon a \to F \varprojlim d$ обратный конус $(F(\mathrm{pr}_t^d) \circ \gamma)$, биективно;

4) конус $(F(\mathrm{pr}_t^d))$ терминален.

В случае, когда эти условия выполнены, говорят, что функтор F *перестановочен с обратным пределом диаграммы* d. Поскольку предел диаграммы определен только с точностью до изоморфизма, можно в этом случае просто писать

$$F \varprojlim d = \varprojlim Fd.$$

Однако при этом следует помнить, что здесь заранее предполагается существование *обоих* пределов.

Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется *перестановочным с обратными пределами (любыми, конечными, данного типа T)*, если он перестановочен с обратным пределом любой (любой конечной, любой типа T) диаграммы d над категорией $\mathcal{C}$.

Пусть диаграммы d и d' типа T над категорией $\mathcal{C}$ обладают обратными пределами $\varprojlim d$ и $\varprojlim d'$ соответственно. Тогда для любого морфизма $\Phi\colon d \to d'$ морфизмы $(\Phi\, t) \circ \mathrm{pr}_t^d$ будут составлять обратный конус с базой d' и начальной вершиной $\varprojlim d$ и потому будет существовать (единственный) морфизм $\gamma\colon \varprojlim d \to \varprojlim d'$, удовлетворяющий для любого t соотношению

$$pr_t^{d'} \circ \gamma = (\Phi t) \circ \mathrm{pr}_t^d.$$

Этот морфизм называется *обратным пределом морфизма* Φ и обозначается символом $\varprojlim \Phi$. Мы будем также говорить, что он *индуцирован* морфизмом Φ.

В случае когда $\varprojlim d$ существует для любой диаграммы d над категорией $\mathcal{C}$ некоторого малого типа T, говорят, что категория *допускает обратные пределы типа* T (при этом обычно еще дополнительно предполагается, что для любых объектов $c, c' \in \mathfrak{Ob}\, \mathcal{C}$ множество $\mathcal{C}(c, c')$ принадлежит рассматриваемому универсальному множеству). Если, кроме того, для каждой диаграммы d типа T над категорией $\mathcal{C}$ объект $\varprojlim d$ можно выбрать таким образом, что соответствия $d \rightsquigarrow \varprojlim d$, $\Phi \rightsquigarrow \varprojlim \Phi$ будут составлять функтор из категории диаграмм типа T над категорией $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{C}$, то говорят, что категория $\mathcal{C}$ *допускает функториальные обратные пределы типа* T.

Если категория $\mathcal{C}$ допускает обратные пределы любого малого (соответственно любого конечного) типа T, то говорят, что эта категория *допускает обратные пределы* (соответственно *конечные обратные пределы*).

Легко видеть, что *категория $\mathcal{C}$ тогда и только тогда допускает конечные обратные пределы, когда она допускает конечные прямые произведения и любая пара ее морфизмов обладает ядром.* Действительно, необходимость этого условия очевидна. Покажем, что оно и достаточно. Пусть $d: T \to \mathcal{C}$ — произвольная диаграмма над категорией $\mathcal{C}$ некоторого конечного типа T. По условию в категории $\mathcal{C}$ существует объект x, являющийся прямым произведением $\prod_t dt$ объектов dt, $t \in \mathfrak{Ob}\, T$. Пусть $p_t: x \to dt$ — соответствующие проекции. Пользуясь тем, что в категории $\mathcal{C}$ для любой пары морфизмов существует ядро, мы посредством очевидной индукции без труда можем построить морфизм $\gamma: y \to x$ с областью значений x, обладающий тем свойством, что

$$da \circ p_t \circ \gamma = p_{t'}$$

для любого морфизма $a: t \to t'$ схемы T, и универсальный по отношению к этому свойству. Ясно теперь, что морфизмы $p_t \circ \gamma$ составляют терминальный конус с базой d и вершиной y, так что $y = \varprojlim d$.

Пределы прямые. Пусть $d: T \to \mathcal{C}$ — произвольная диаграмма типа T над категорией $\mathcal{C}$, и пусть x — некоторый объект из $\mathcal{C}$. *Прямым* (или *индуктивным*) *конусом с конечной вершиной x и базой d* называется семейство $\{p_t\}$ морфизмов категории $\mathcal{C}$, обладающее следующими свойствами:

1) индексами семейства $\{p_t\}$ служат объекты t диаграммной схемы T;

2) областью значений морфизма p_t является объект x, а областью определения — объект dt;

3) для любого морфизма $a: t \to t'$ схемы T имеет место соотношение

$$p_t = p_{t'} \circ da.$$

Все индуктивные конусы (с данной базой d) составляют, очевидно, некоторую категорию.

Конус (p_t) с базой d называется *инициальным*, если он является левым нулем (инициальным объектом) этой категории, т. е. если для любого конуса (q_t) с произвольной конечной вершиной y и той же базой d существует один и только один морфизм $g: x \to y$, обладающий тем свойством, что $q_t = g \circ p_t$ для любого t. В этом случае объект x называется *прямым* (или *индуктивным*) *пределом* диаграммы

d и обозначается символом $\varinjlim_t d(t)$ (или просто $\varinjlim d$), а морфизмы p_t называются *каноническими инъекциями* и обозначаются символами in_t^d (или просто in_t). С точностью до изоморфизма предел $\varinjlim d$ определен однозначно. Если диаграмма d возникает из некоторого функтора, то ее предел называется пределом этого функтора.

Предел $x = \varinjlim d$ произвольной диаграммы $d\colon T \to \mathcal{C}$ обладает тем свойством, что для каждого объекта c категории $\mathcal{C}$ множество $\mathcal{C}(\varinjlim d, c)$ является обратным пределом множеств $\mathcal{C}(dt, c)$, т. е. обратным пределом диаграммы $t \rightsquigarrow \mathcal{C}(dt, c)$, $a \rightsquigarrow \mathcal{C}(da, c)$ типа T° над категорией $\mathcal{E}ns$:

$$\mathcal{C}(\varinjlim_t dt, c) = \varprojlim_t \mathcal{C}(dt, c)$$

(или, точнее, находится с этим множеством в естественном биективном соответствии). Действительно, элементами множества $\varprojlim \mathcal{C}(dt, c)$ являются, как легко видеть, прямые конусы (p_t) с конечной вершиной c и базой d. С другой стороны, согласно определению прямого предела $\varinjlim d$, каждый такой конус однозначно определяет некоторый морфизм $\varinjlim d \to c$. Таким образом, имеет место отображение

$$\varprojlim_t \mathcal{C}(dt, c) \to \mathcal{C}(\varinjlim d, c)$$

Остается заметить, что это отображение очевидным образом биективно (обратное отображение определяется соответствием

$$\gamma \rightsquigarrow \gamma \circ \mathrm{in}_t^d,\ \gamma \in \mathcal{C}\,(\varinjlim d, c)).$$

Обратно, если для некоторого объекта x категории $\mathcal{C}$ имеют место естественные биективные отображения

$$\Phi(c)\colon \varprojlim_t \mathcal{C}(dt, c) \to \mathcal{C}(x, c),$$

т. е. если существует обратимый функторный морфизм Φ функтора $\varprojlim_t \mathcal{C}\,(dt, ?)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ в функтор $\mathcal{C}(x, ?)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$, то $x = \varinjlim d$. Действительно, в этом случае конус $(p_t) = \Phi(x)^{-1}\,(\mathrm{Id}x)$ будет, очевидно, инициальным конусом с конечной вершиной x и базой d.

Для любой диаграммы $d\colon T \to \mathcal{C}$ над категорией $\mathcal{C}$ и любого функтора $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ определена диаграмма $Fd\colon T \to \mathcal{D}$ над категорией $\mathcal{D}$. В случае когда оба предела $\varinjlim d$ и $\varinjlim Fd$ существуют, соотношение

$\beta \circ \mathrm{in}_t^{Fd} = F\ (\mathrm{in}_t^d)$ однозначно определяет некоторый морфизм $\beta\colon \varinjlim Fd \to F \varinjlim d$. Очевидно, что следующие условия равносильны:

1) морфизм β обратим;

2) для любого объекта a категории $\mathcal{D}$ отображение

$$\mathcal{D}\,(\beta, a)\colon \mathcal{D}\,(F \varinjlim d, a) \to \mathcal{D}\,(\varinjlim Fd, a)$$

биективно;

3) для любого объекта a категории $\mathcal{D}$ отображение

$$\mathcal{D}\,(F \varinjlim d, a) \to \varinjlim_t \mathcal{D}\,(F\,(dt), a),$$

сопоставляющее морфизму $\alpha\colon F \varinjlim d \to a$ прямой конус $(\alpha \circ F\,(\mathrm{in}_t^d))$ биективно;

4) конус $(F\,(\mathrm{in}_t^d))$ инициален.

В случае когда эти условия выполнены, говорят, что функтор F *перестановочен с прямым пределом диаграммы* d. Поскольку предел диаграммы d определен только с точностью до изоморфизма, можно в этом случае просто писать

$$F \varinjlim d = \varinjlim Fd.$$

Однако при этом следует помнить, что здесь заранее предполагается существование *обоих* пределов.

Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется *перестановочным с прямыми пределами (любыми конечными, данного типа T)*, если он перестановочен с прямым пределом любой (любой конечной, любой типа T) диаграммы d над категорией $\mathcal{C}$.

Пусть диаграммы d и d' обладают прямыми пределами $\varinjlim d$ и $\varinjlim d'$ соответственно. Тогда для любого морфизма $\Phi\colon d \to d'$ морфизмы $\mathrm{in}_t^{d'} \circ (\Phi t)$ будут составлять прямой конус с базой d и конечной вершиной $\varinjlim d'$ и потому будет существовать (единственный) морфизм $\gamma\colon \varinjlim d \to \varinjlim d'$, удовлетворяющий для любого t соотношению

$$\mathrm{in}_t^{d'} \circ (\Phi t) = \gamma \circ \mathrm{in}_t^d.$$

Этот морфизм называется *прямым пределом морфизма* Φ и обозначается символом $\varinjlim \Phi$. Мы будем говорить также, что он *индуцирован* морфизмом Φ.

В случае когда $\varinjlim d$ существует для любой диаграммы d над категорией $\mathcal{C}$ некоторого малого типа T, говорят, что категория $\mathcal{C}$ *допускает прямые пределы типа* T (при этом обычно еще дополнительно предполагается, что для любых объектов $c, c' \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ множество $\mathcal{C}(c,c')$ принадлежит рассматриваемому универсальному множеству). Если, кроме того, для каждой диаграммы d типа T над категорией $\mathcal{C}$ объект $\varinjlim d$ можно выбрать таким образом, что соответствия $d \rightsquigarrow \varinjlim d$, $\Phi \rightsquigarrow \varinjlim \Phi$ будут составлять функтор из категории диаграмм типа T над категорией $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{C}$, то говорят, что категория $\mathcal{C}$ *допускает функториальные прямые пределы типа* T.

Если категория $\mathcal{C}$ допускает прямые пределы любого малого (соответственно любого конечного) типа T, то говорят, что эта категория *допускает прямые пределы* (соответственно *конечные прямые пределы*).

Легко видеть (см. соответствующее утверждение для обратных пределов), что *категория $\mathcal{C}$ тогда и только тогда допускает конечные прямые пределы, когда она допускает конечные прямые суммы и любая пара ее морфизмов обладает коядром.*

Представимые функторы. Пусть $\mathcal{D}$ — произвольная категория. Для любого объекта a этой категории соответствия

$$b \rightsquigarrow \mathcal{D}(b, a),\ u \rightsquigarrow \mathcal{D}(u, a),\ b \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{D},\ u \in \mathfrak{Ar}\,\mathcal{D},$$

определяют, очевидно, некоторый контравариантный функтор из категории $\mathcal{D}$ в категорию множеств $\mathcal{E}ns$. Этот функтор мы будем обозначать либо символом $h_a^{\mathcal{D}}$, либо символом $\mathcal{D}(?, a)$. Аналогично, для любого морфизма $u\colon a \to b$ категории $\mathcal{D}$ соответствие

$$x \rightsquigarrow \mathcal{D}(x, u), \qquad x \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{D},$$

определяет некоторый морфизм функтора $h_a^{\mathcal{D}}$ в функтор $h_b^{\mathcal{D}}$. Этот морфизм мы будем обозначать либо символом $h_u^{\mathcal{D}}$, либо символом $\mathcal{D}(?, u)$.

Теперь ясно, что соответствия

$$a \rightsquigarrow h_a^{\mathcal{D}}, \qquad u \rightsquigarrow h_u^{\mathcal{D}}, \qquad a \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{D},\ u \in \mathfrak{Ar}\,\mathcal{D},$$

определяют некоторый (ковариантный) функтор $h^{\mathcal{D}}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}^\circ \mathcal{E}ns$ из категории $\mathcal{D}$ в категорию $\mathcal{D}^\circ \mathcal{E}ns$ всех контравариантных функторов $\mathcal{D}^\circ \to \mathcal{E}ns$.

Легко видеть, что для любого объекта a категории $\mathcal{D}$ и любого функтора $F\colon \mathcal{D}^\circ \to \mathcal{E}ns$ имеет место естественное биективное отображение

$$\mathcal{D}^\circ \mathcal{E}ns\,(\mathcal{D}(?, a), F) \to F(a).$$

Это отображение функторному морфизму $f\colon \mathcal{D}(?, a) \to F$ сопоставляет элемент λ множества $F(a)$, являющийся образом при отображении

$f(a): \mathcal{D}(a, a) \to F(a)$ тождественного морфизма $\mathrm{Id}\, a$ объекта a. По элементу λ морфизм f восстанавливается следующим образом: для каждого морфизма u: $b \to a$ категории $\mathcal{D}$ за элемент $f(b)(u)$ множества $F(b)$ принимается образ элемента λ при отображении $F(u): F(a) \to F(b)$.

В частном случае, когда функтор F имеет вид $\mathcal{D}(?, a')$, элементы λ представляют собой морфизмы $a \to a'$, морфизмы f являются не чем иным, как морфизмами $\mathcal{D}(?, \lambda): \mathcal{D}(?, a) \to \mathcal{D}(?, a')$, а отображение $\mathcal{D}(a, a') \to \mathcal{D}^{\circ}\,\mathcal{E}ns(\mathcal{D}(?, a), \mathcal{D}(?, a'))$, обратное к рассмотренному биективному отображению, совпадает с отображением $h^{\mathcal{D}}(a, a')$, осуществляемым функтором $h^{\mathcal{D}}$.

Таким образом, для любых объектов a, a' категории $\mathcal{D}$ функтор $h^{\mathcal{D}}$ осуществляет биективное отображение множества $\mathcal{D}(a, a')$ на множество $\mathcal{D}^{\circ}\,\mathcal{E}ns(h^{\mathcal{D}}(a), h^{\mathcal{D}}(a'))$. Следовательно, этот функтор вполне инъективен. Поскольку он, очевидно, инъективен на объектах категории $\mathcal{D}$, мы можем посредством этого функтора отождествить категорию $\mathcal{D}$ с некоторой полной подкатегорией категории $\mathcal{D}^{\circ}\,\mathcal{E}ns$.

Функтор $F: \mathcal{D}^{\circ} \to \mathcal{E}ns$ называется *представимым*, если он изоморфен некоторому функтору вида $\mathcal{D}(?, a)$, т. е. если для некоторого объекта $a \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{D}$ существует обратимый функторный морфизм $f: \mathcal{D}(?, a) \to F$. В этом случае говорят, что пара $[a, \lambda]$, где λ — элемент множества $F(a)$, соответствующий морфизму f, *представляет* функтор F. В тех случаях, когда мы не хотим акцентировать внимание на элементе λ (или морфизме f), мы говорим просто, что объект a представляет функтор F.

Прямые суммы и произведения. Семейство $\{c_t, t \in T\}$ объектов категории $\mathcal{C}$ можно рассматривать как диаграмму над $\mathcal{C}$, типом которой является диаграммная схема с множеством объектов T и пустым множеством морфизмов. Обратный предел этой диаграммы (когда он существует) называется *прямым произведением* объектов c_t и обозначается символом $\prod_t c_t$. Аналогично, прямой предел этой диаграммы называется *прямой суммой* объектов c_t и обозначается символом $\coprod_t c_t$. (Некоторые авторы вместо термина «прямая сумма» используют термин «свободное произведение».)

В категории множеств (а также в категории групп) прямое произведение в этом смысле совпадает с классическим (полным) прямым произведением. Что же касается прямой суммы, то прямой суммой множеств является их объединение (в предположении, что данные множества не пересекаются), прямой суммой групп — их свободное произведение, а прямой суммой абелевых групп — их классическая прямая сумма.

Ретракции. *Ретракцией* морфизма v: $b \to a$ называется такой морфизм $u: a \to b$, что $u \circ v = \mathrm{Id}\, b$.

Свободные объекты. См. Освобождающие морфизмы.

Сечения. *Сечением* морфизма $v\colon b\to a$ называется такой морфизм $u\colon a\to b$, что $v\circ u=\mathrm{Id}\,a$.

Сопряженные функторы. Пусть $T\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ и $S\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ — произвольные функторы. Ясно, что соответствия

$$(c,d)\rightsquigarrow \mathcal{D}(Tc,d),\quad (u,v)\rightsquigarrow \mathcal{D}(Tc,v)\circ\mathcal{D}(Tu,d),$$
$$(c,d)\rightsquigarrow \mathcal{C}(c,Sd),\quad (u,v)\rightsquigarrow \mathcal{C}(c,Sv)\circ\mathcal{C}(u,Sd),$$
$$c\in\mathfrak{Ob}\,\mathcal{C},\ d\in\mathfrak{Ob}\,\mathcal{D},\ u\colon c\to c'\in\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C},\ v\colon d\to d'\in\mathfrak{Ar}\,\mathcal{D},$$

определяют на прямом произведении $\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{D}$ два функтора $\mathcal{D}(T?,?)$ и $\mathcal{C}(?,S?)$, принимающих значения в категории множеств $\mathcal{E}ns$. Функтор T называется *сопряженным слева* с функтором S, а функтор S — *сопряженным справа* с функтором T, если существует обратимый функторный морфизм

$$\varphi\colon\mathcal{C}(?,S?)\to\mathcal{D}(T?,?).$$

Этот морфизм называется *изоморфизмом сопряжения от S к T*, а обратный к нему морфизм

$$\psi\colon\mathcal{D}(T?,?)\to\mathcal{C}(?,S?)$$

— *изоморфизмом сопряжения от T к S*.

Для любого объекта d категории $\mathcal{D}$ (объекта c категории $\mathcal{C}$) формула

$$\Phi(d)=\varphi(Sd,d)\,(\mathrm{Id}\,Sd)$$

(соответственно формула $\Psi(c)=\psi(c,Tc)\,(\mathrm{Id}\,Tc)$) определяет, очевидно, некоторый морфизм $\Phi(d)\colon TSd\to d$ (соответственно морфизм $\Psi(c)\colon c\to STc$). Ясно, что соответствие $d\rightsquigarrow\Phi(d)$ (соответствие $c\rightsquigarrow\Psi(c)$) представляет собой некоторый функторный морфизм

$$\Phi\colon TS\to\mathrm{Id}\,\mathcal{D}$$

(функторный морфизм $\Psi\colon\mathrm{Id}\,\mathcal{C}\to ST$). Морфизмы Φ и Ψ мы будем называть *морфизмами сопряжения от S к T* и *от T к S* соответственно. Они однозначно определяют соответствующие изоморфизмы φ и ψ. Именно для любых объектов $c\in\mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$, $d\in\mathfrak{Ob}\,\mathcal{D}$ изоморфизм $\psi(c,d)$ восстанавливается по морфизму Ψ согласно формуле

$$\psi(c,d)f=Sf\circ\Psi(c),\qquad f\in\mathcal{D}(Tc,d),$$

а изоморфизм $\varphi(c,d)$ — по морфизму Φ согласно формуле

$$\varphi(c,d)\,g=\Phi(d)\circ Tg,\qquad g\in\mathcal{C}(c,Sd).$$

Функторные морфизмы Φ и Ψ, построенные описанным образом по взаимно обратным морфизмам φ и ψ, мы будем называть *квазиобратными.* Легко видеть, что морфизмы $\Phi\colon TS \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ и $\Psi\colon \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to ST$ тогда и только тогда квазиобратны (являются морфизмами сопряжения), когда композиции

$$S \xrightarrow{\Psi S} STS \xrightarrow{S\Phi} S,$$
$$T \xrightarrow{T\Psi} TST \xrightarrow{\Phi T} T$$

являются тождественными морфизмами функторов S и T соответственно.

Для функтора $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда существует сопряженный с ним справа функтор $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда для любого объекта d категории $\mathcal{D}$ контравариантный функтор

$$c \rightsquigarrow \mathcal{D}(Tc, d), \qquad c \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C},$$
$$u \rightsquigarrow \mathcal{D}(Tu, d), \qquad u \in \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C},$$

представим (объектом, представляющим этот функтор, и является объект Sd).

Аналогично, для функтора $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ тогда и только тогда существует сопряженный с ним слева функтор $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, когда для любого объекта c категории $\mathcal{C}$ контравариантный функтор

$$d \rightsquigarrow \mathcal{C}(c, Sd), \qquad d \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{D}^{\circ},$$
$$v \rightsquigarrow \mathcal{C}(c, Sv), \qquad v \in \mathfrak{Ar}\,\mathcal{D}^{\circ},$$

представим (объектом, представляющим этот функтор, и является объект Tc).

С другой стороны, для функтора $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда существует сопряженный с ним справа функтор $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда для любого объекта d категории $\mathcal{D}$ существует в категории $\mathcal{C}$ объект c, косвободный над объектом d по отношению к функтору T (этим объектом и является объект Sd).

Аналогично, для функтора $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ тогда и только тогда существует сопряженный с ним слева функтор $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, когда для любого объекта c категории $\mathcal{C}$ существует в категории $\mathcal{D}$ объект d, свободный над объектом c по отношению к функтору S (этим объектом и является объект Tc).

Функтор S (функтор T), сопряженный справа (слева) к функтору T (функтору S) в случае, когда он существует, определен однозначно с точностью до изоморфизма функторов.

Если для функтора $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ существует сопряженный с ним справа функтор $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то функтор T перестановочен с прямыми пределами, и, более того, из существования для некоторой диаграммы $d\colon U \to \mathcal{C}$ предела $\varinjlim d$ вытекает существование предела $\varinjlim Td$ диаграммы Td. Действительно, пусть ψ — изоморфизм сопряжения от T к S. Тогда для любого прямого конуса $\{q_u\}$ с базой Td и конечной вершиной x морфизмы $\psi(du, x)q_u$ будут составлять, как легко видеть, прямой конус с базой d и конечной вершиной Sx (в силу функторности изоморфизма ψ для любого морфизма $a: u \to u'$ схемы U имеет место равенство $\psi(du, x)(q_u) = \psi(du, x)(q_{u'} \circ Tda) = \psi(du', x)q_{u'} \circ da$). Поэтому существует (единственный) морфизм $\beta: \varinjlim d \to Sx$, для которого $\beta \circ \mathrm{in}_u^d = \psi(du, x) \circ q_u$ при любом $u \in \mathfrak{Ob}\, U$. Пусть $\alpha = \psi(\varinjlim d, x)^{-1} \circ \beta: T \varinjlim d \to x$. Без труда проверяется, что $\alpha \circ S(\mathrm{in}_u^d) = q_u$. Тем самым доказано, что прямой конус $(S\,\mathrm{in}_u^d)$ с базой Td инициален. Следовательно, его конечная вершина $T \varinjlim d$ и является пределом $\varinjlim Td$ диаграммы Td.

Аналогично доказывается, что *любой функтор $S: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, для которого существует сопряженный с ним слева функтор $T: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, перестановочен с обратными пределами*, причем из существования предела $\varprojlim d$ вытекает существование предела $\varprojlim Sd = S \varprojlim d$.

Стрелки. См. Диаграммные схемы.

Терминальный конус. См. Пределы обратные.

Универсальные квадраты. Коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ C & \xrightarrow{v} & D \end{array}$$

над категорией $\mathcal{C}$ называется *универсальным*, если морфизмы u и x составляют терминальный конус (см.) с базой $C \xrightarrow{v} D \xleftarrow{y} B$, т. е. если для любых морфизмов $b: E \to B$ и $c: E \to C$, удовлетворяющих соотношению $vc = yb$, существует один и только один морфизм $a: E \to A$, для которого $b = ua$ и $c = xa$. В универсальном квадрате объект A является *коамальгамой* (см.) диаграммы $C \to D \leftarrow B$.

Функторы. Диаграмма $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ называется *функтором*, если она перестановочна с отображениями Id и $\mathfrak{m}$. *Морфизмом функторов* называется их произвольный морфизм в категории диаграмм. Функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ и их морфизмы составляют категорию

$$\mathcal{C}\mathcal{D} = \mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

являющуюся полной подкатегорией категории диаграмм типа $\mathcal{C}$ над $\mathcal{D}$.

Для любого функтора $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и любых объектов c, d категории $\mathcal{C}$ символом $F(c, d)$ обозначается отображение множества $\mathcal{C}(c, d)$ в множество $\mathcal{D}(Fc, Fd)$, определенное функтором F.

Описанные функторы называются также *ковариантными функторами*. В противоположность им *контравариантными функторами* из

$\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ называются ковариантные функторы из двойственной категории $\mathcal{C}^\circ$ в категорию $\mathcal{D}$. Как правило, если только явно не оговорено противное, все рассматриваемые в книге функторы предполагаются ковариантными.

Встречающееся в литературе понятие «функторов от нескольких аргументов» (принадлежащих, вообще говоря, различным категориям) сводится к понятию функтора от одного аргумента, ибо функтор от нескольких аргументов является не чем иным, как функтором от одного аргумента, определенным на прямом произведении рассматриваемых категорий (в соответствии с общим определением обратного предела категорий *прямым произведением*, скажем, двух категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называется категория $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, для которой $\mathfrak{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C} \times \mathfrak{Ob}\,\mathcal{D}$, $\mathfrak{Ar}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C} \times \mathfrak{Ar}\,\mathcal{D}$, $\mathfrak{d}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} = \mathfrak{d}_{\mathcal{C}} \times \mathfrak{d}_{\mathcal{D}}$, $\mathfrak{r}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} = \mathfrak{r}_{\mathcal{C}} \times \mathfrak{r}_{\mathcal{D}}$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \times \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ и $\mathfrak{m}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} = (\mathfrak{m}_{\mathcal{C}} \times \mathfrak{m}_{\mathcal{D}}) \circ \tau$, где τ — операция перестановки «средних» сомножителей).

Эквивалентность категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если существуют такие функторы $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $S\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ и такие функторные изоморфизмы $\Psi\colon \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to ST$, $\Phi'\colon \mathrm{Id}\,\mathcal{D} \to TS$, что морфизмы $T\Psi$ и $\Phi' T$ функтора T в функтор TST совпадают (тогда морфизмы $S\Phi'$ и ΨS функтора S в функтор STS также совпадают). Мы будем в этом случае говорить, что функторы T и S *квазиобратны* друг к другу и *осуществляют эквивалентность* (категории $\mathcal{C}$ с категорией $\mathcal{D}$ и категории $\mathcal{D}$ с категорией $\mathcal{C}$ соответственно). Эти функторы сопряжены, причем соответствующими морфизмами сопряжения являются морфизм Ψ и морфизм Φ, обратный к морфизму Φ'.

Осуществляющий эквивалентность функтор T мономорфизмы переводит в мономорфизмы, а эпиморфизмы — в эпиморфизмы. Кроме того, для любой категории $\mathcal{X}$ функтор $\mathcal{H}om(T, \mathcal{X})$ вполне инъективен.

Эпиморфизмы. Морфизм u категории $\mathcal{C}$ называется *эпиморфизмом*, если для произвольных морфизмов $v_1, v_2 \in \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$ равенство $v_1 u = v_2 u$ возможно лишь при $v_1 = v_2$, т. е. если для любого объекта $c \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ отображение $\mathcal{C}(u, c)$ инъективно.

Ядра. *Ядром* пары морфизмов $f, g\colon a \to b$ называется обратный предел диаграммы $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$.

Таким образом, объект c является ядром пары (f, g), если задан некоторый морфизм $t\colon c \to a$, обладающий тем свойством, что $ft = gt$, и «универсальный» по отношению к этому свойству, т. е. такой, что любой морфизм $t'\colon c' \to a$, для которого $ft' = gt'$, имеет вид $t \circ s$, где s — некоторый морфизм $c' \to c$. Иногда ядром пары (f, g) называется не объект c, а морфизм $t\colon c \to a$.

У Митчелла [1] ядро называется „equalizer".

Глава I

КАТЕГОРИИ ЧАСТНЫХ

§ 1. КАТЕГОРИИ ЧАСТНЫХ И СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКТОРЫ

1.1. Мы будем говорить, что функтор $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *заставляет морфизм* $\sigma \in \mathfrak{Ar}\, \mathcal{C}$ *стать обратимым,* если он переводит этот морфизм в обратимый морфизм категории $\mathcal{D}$.

В этом пункте каждой категории $\mathcal{C}$ и произвольному подмножеству Σ множества $\mathfrak{Ar}\, \mathcal{C}$ мы сопоставим категорию $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ и функтор $P_\Sigma: \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$, обладающие следующими свойствами:

1) функтор P_Σ заставляет морфизмы из Σ стать обратимыми;

2) любой функтор $F: \mathcal{C} \to \mathcal{X}$, заставляющий все морфизмы из Σ стать обратимыми, имеет вид $G \circ P_\Sigma$, где G — некоторый однозначно определенный функтор $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \to \mathcal{X}$.

С этой целью мы рассмотрим диаграммную схему T, для которой множество $\mathfrak{Ob}\, T$ совпадает с множеством $\mathfrak{Ob}\, \mathcal{C}$, множество $\mathfrak{Ar}\, T$ является прямой суммой (объединением непересекающихся экземпляров) $\mathfrak{Ar}\, \mathcal{C} \sqcup \Sigma$ множеств $\mathfrak{Ar}\, \mathcal{C}$ и Σ, а отображения $\mathfrak{d}_T$ и $\mathfrak{r}_T$ определены соотношениями

$$\mathfrak{d}_T \circ \mathrm{in}_1 = \mathfrak{d}_\mathcal{C}, \qquad \mathfrak{d}_T \circ \mathrm{in}_2 = \mathfrak{r}_\mathcal{C}|_\Sigma,$$
$$\mathfrak{r}_T \circ \mathrm{in}_1 = \mathfrak{r}_\mathcal{C}, \qquad \mathfrak{r}_T \circ \mathrm{in}_2 = \mathfrak{d}_\mathcal{C}|_\Sigma,$$

где in_1 и in_2 — канонические инъекции соответственно множеств $\mathfrak{Ar}\, \mathcal{C}$ и Σ в множество $\mathfrak{Ar}\, \mathcal{C} \sqcup \Sigma$.

Мы определим категорию $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ как факторкатегорию категории $\mathcal{P}a\, T$ путей схемы T по следующим соотношениям:

a) $(\mathrm{in}_1 v) \circ (\mathrm{in}_1 u) = \mathrm{in}_1 (v \circ u)$, если $v \circ u$ определено в $\mathcal{C}$;

b) $\mathrm{in}_1 (\mathrm{Id}_\mathcal{C}\, a) = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}a\, T}\, a$, где a — произвольный объект категории $\mathcal{C}$;

c) $\mathrm{in}_2\, \sigma \circ \mathrm{in}_1\, \sigma = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}a\, T}(\mathfrak{d}_\mathcal{C} \sigma)$ и $\mathrm{in}_1\, \sigma \circ \mathrm{in}_2\, \sigma = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}a\, T}(\mathfrak{r}_\mathcal{C} \sigma)$, где σ — произвольный морфизм Σ.

За функтор $P_\Sigma: \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ мы примем функтор, являющийся на множестве $\mathfrak{Ob}\, \mathcal{C}$ тождественным отображением этого множества на множество $\mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] = \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$, а на множестве $\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$ — композицией инъекции in_1 и канонических отображений

$$\mathfrak{Ar}\,T \to \mathfrak{Ar}\,\mathcal{P}a\,T \to \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}[\Sigma^{-1}].$$

1.2. Лемма. *Для любой категории $\mathcal{X}$ функтор*

$$\mathcal{H}om(P_\Sigma, \mathcal{X}) \colon \mathcal{H}om(\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{X}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{X})$$

определяет изоморфизм категории $\mathcal{H}om(\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \mathcal{X})$ на полную подкатегорию категории $\mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{X})$, порожденную функторами $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{X}$, заставляющими все морфизмы из Σ стать обратимыми.

Доказательство оставляется читателю.

Эта лемма уточняет указанные выше условия 1) и 2).

Построенную категорию $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ мы будем называть *категорией частных категории $\mathcal{C}$ по множеству Σ*, а функтор P_Σ — *каноническим функтором*. Множество всех морфизмов σ категории $\mathcal{C}$, для которых морфизм $P_\Sigma \sigma$ обратим, мы будем называть *насыщением* множества Σ.

1.3. Важный класс множеств Σ получается следующей конструкцией: берется произвольный функтор $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и за множество Σ принимается множество всех морфизмов u категории $\mathcal{C}$, для которых морфизм Gu обратим. Оказывается, что если функтор G сопряжен слева с некоторым вполне инъективным функтором $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то для соответствующего множества Σ категория $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ эквивалентна категории $\mathcal{D}$. Более точно, имеет место следующее

Предложение. *Пусть функтор $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжен слева с функтором $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, и пусть $\Phi\colon GD \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ — произвольный морфизм сопряжения от D к G. Пусть, далее, Σ — множество всех морфизмов и категории $\mathcal{C}$, для которых морфизм Gu обратим. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) *функтор D вполне инъективен;*

(ii) *функторный морфизм $\Phi\colon GD \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ обратим;*

(iii) *функтор $H\colon \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \to \mathcal{D}$, обладающий тем свойством, что $G = H \circ P_\Sigma$, осуществляет эквивалентность категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ с категорией $\mathcal{D}$;*

(iv) *для любой категории $\mathcal{X}$ функтор*

$$\mathcal{H}om(G, \mathcal{X}) \colon \mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{X}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{X})$$

вполне инъективен.

Доказательство. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Функторность морфизма Φ означает, что для любого морфизма $\alpha\colon d \to d'$ категории $\mathcal{D}$ справедливо равенство $\alpha \circ (\Phi d) = (\Phi d') \circ (GD\alpha)$. Иными словами, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(d, d') \arrow[r, "D(d, d')"] \arrow[d, "\mathcal{D}(\Phi d, d')"'] & \mathcal{C}(Dd, Dd') \arrow[d, "G(Dd, Dd')"] \\ \mathcal{D}(GDd, d') & \mathcal{D}(GDd, GDd') \arrow[l, "\mathcal{D}(GDd, \Phi d')"'] \end{tikzcd}$$

Но композиция $\mathcal{D}(GDd, \Phi d') \circ G(Dd, Dd')$ есть просто $\varphi(Dd, d')$, где φ — изоморфизм сопряжения, соответствующий морфизму Φ. Следовательно, отображение $D(d, d')$ тогда и только тогда биективно для всех d и d', когда для всех d и d' биективно отображение $\mathcal{D}(\Phi d, d')$, т. е. когда морфизм Φ обратим.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Согласно утверждению (ii), морфизм

$$\Phi: H \circ (P_\Sigma \circ D) \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$$

обратим. Поэтому для доказательства импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) нам нужно только построить обратимый функторный морфизм

$$\Psi': \mathrm{Id}\,\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \to (P_\Sigma \circ D) \circ H,$$

для которого

$$H\Psi' = \Phi^{-1}H.$$

Пусть $\Psi: \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to DG$ — морфизм сопряжения от G к D, квазиобратный к морфизму Φ. По определению композиция

$$G \xrightarrow{G\Psi} GDG \xrightarrow{\Phi G} G$$

является тождественным морфизмом функтора G, так что $\Phi^{-1}G = G\Psi$. Следовательно, морфизм $G\Psi$ также обратим. Согласно определению множества Σ, это означает, что $\Psi c \in \Sigma$ для любого объекта c категории $\mathcal{C}$. Но тогда морфизм $P_\Sigma \Psi c$ обратим. Поскольку это верно для любого объекта $c \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$, функторный морфизм

$$P_\Sigma\Psi: P_\Sigma \to P_\Sigma \circ D \circ H \circ P_\Sigma$$

обратим. Но, согласно лемме 1.2, функтор $\mathcal{H}om(P_\Sigma, \mathcal{C}[\Sigma^{-1}])$ вполне инъективен. Поэтому существует один и только один функторный морфизм

$$\Psi': \mathrm{Id}\,\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \to P_\Sigma \circ D \circ H,$$

преобразуемый функтором $\mathcal{H}om(P_\Sigma, \mathcal{C}[\Sigma^{-1}])$ в морфизм $P_\Sigma\Psi$ (иначе говоря, такой, что $P_\Sigma \Psi = \Psi' P_\Sigma$). При этом морфизм Ψ' также обратим. Для завершения доказательства остается заметить, что так как $G\Psi = \Phi^{-1}G$, то $H\Psi' P_\Sigma = \Phi^{-1}HP_\Sigma$ и, следовательно, $H\Psi' = \Phi^{-1}H$ (снова в силу полной инъективности функтора $\mathcal{H}om(P_\Sigma, \mathcal{C}[\Sigma^{-1}])$).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Поскольку функтор H является эквивалентностью, функтор $\mathcal{H}om(H, \mathcal{X})$ вполне инъективен. С другой стороны, согласно лемме 1.2, функтор $\mathcal{H}om(P_\Sigma, \mathcal{X})$ также вполне инъективен. Поэтому вполне инъективен и функтор

$$\mathcal{H}om(G, \mathcal{X}) = \mathcal{H}om(H, \mathcal{X}) \circ \mathcal{H}om(P_\Sigma, \mathcal{X}).$$

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Докажем предварительно следующую лемму:

1.3.1. Лемма. *Пусть функторы*

$$G: \mathcal{C} \to \mathcal{D},$$
$$F: \mathcal{D} \to \mathcal{D}',$$
$$D: \mathcal{D}' \to \mathcal{C}$$

обладают тем свойством, что функтор FG сопряжен слева с функтором D. Тогда если для любой категории $\mathcal{X}$ функтор

$$\mathcal{H}om(G, \mathcal{X}): \mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{X}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{X})$$

вполне инъективен, то каждый морфизм сопряжения $\Phi: (FG)D \to \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}'$ от D к FG является также морфизмом сопряжения от GD к F. Таким образом, в этом случае функторы GD и F сопряжены.

Доказательство. Пусть $\Psi: \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to D(FG)$ — морфизм сопряжения, квазиобратный к морфизму Φ. Рассмотрим морфизм $G\Psi: G \to GDFG$. По условию этот морфизм можно единственным образом представить в виде $\Psi' G$, где Ψ' — некоторый морфизм $\mathrm{Id}\,\mathcal{D} \to GDF$. Покажем, что морфизмы Ψ' и Φ квазиобратны, т. е. что композиции морфизмов

$$(*)\qquad \begin{gathered} GD \xrightarrow{\Psi' GD} GDFGD \xrightarrow{GD\Phi} GD, \\ F \xrightarrow{F\Psi'} FGDF \xrightarrow{\Phi F} F \end{gathered}$$

являются тождественными морфизмами функторов GD и F соответственно.Тем самым лемма 1.3.1 будет полностью доказана.

По условию композиции

$$(**)\qquad \begin{gathered} D \xrightarrow{\Psi D} DFGD \xrightarrow{D\Phi} D, \\ FG \xrightarrow{FG\Psi} FGDFG \xrightarrow{\Phi FG} FG \end{gathered}$$

являются тождественными морфизмами функторов D и FG соответственно. Чтобы получить первую из композиций $(*)$, достаточно применить к первой из композиций (**) функтор $\mathcal{H}om(G, \mathcal{D})$ и воспользоваться соотношением $G\Psi = \Psi' G$. Что же касается второй из композиций (*), то в силу полной инъективности функтора $\mathcal{H}om(G, \mathcal{D}')$ она является тождественным морфизмом тогда и только тогда, когда тождественным морфизмом является композиция

$$FG \xrightarrow{F\Psi' G} FGDFG \xrightarrow{\Phi FG} FG.$$

Но ввиду соотношения $\Psi' G = G\Psi$ эта последняя композиция совпадает со второй из композиций (**). Лемма 1.3.1 тем самым полностью доказана.

Согласно утверждению (iv), условия этой леммы выполнены при $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ и $F = \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$. Следовательно, в условиях утверждения (iv) морфизм сопряжения Φ: $GD \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ от D к G будет морфизмом сопряжения и от GD к $\mathrm{Id}\,\mathcal{D}$. Но с функтором $\mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ очевидным образом сопряжен сам функтор $\mathrm{Id}\,\mathcal{D}$, причем соответствующим морфизмом сопряжения является тождественный морфизм этого функтора. Так как с точностью до изоморфизма сопряженный функтор определен однозначно, отсюда немедленно вытекает, что морфизм Φ отличается от тождественного морфизма функтора $\mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ на некоторый обратимый морфизм и потому сам является обратимым морфизмом. Тем самым импликация (iv) $\Rightarrow$ (ii) и вместе с ней все предложение 1.3 полностью доказаны.

Замечание. Читателю предлагается самостоятельно сформулировать предложение, двойственное предложению 1.3. В дальнейшем ссылка на предложение 1.3 будет означать ссылку не только на это предложение, но и на предложение, ему двойственное.

1.4. Из предложения 1.3 вытекает, что вполне инъективный функтор $D: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, для которого существует сопряженный слева функтор $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, обладает тем важным свойством, что

для любой диаграммы $\tau: T \to \mathcal{D}$ над категорией $\mathcal{D}$ из существования предела $\varinjlim D\tau$ или $\varprojlim D\tau$ вытекает существование предела $\varinjlim \tau$ или $\varprojlim \tau$ соответственно.

Таким образом, в частности,

если категория $\mathcal{C}$ допускает прямые или обратные пределы, то такие же пределы допускает и категория $\mathcal{D}$.

В первую очередь мы докажем это утверждение для прямых пределов. Пусть $\varinjlim D\tau$ существует. Тогда, поскольку для функтора G имеется функтор, сопряженный с ним справа, предел $\varinjlim GD\tau = G \varinjlim D\tau$ также существует. Но, согласно предложению 1.3 (свойство (ii)), отображение $\Phi\tau: GD\tau \to \tau$ представляет собой изоморфизм диаграмм, так что предел $\varinjlim \tau$ существует тогда и только тогда, когда существует предел $\varinjlim GD\tau$ (причем оба предела изоморфны). Таким образом, если предел $\varinjlim D\tau$ существует, то существует и предел $\varinjlim \tau$, причем

$$\varinjlim \tau = G(\varinjlim D\tau).$$

Для обратных пределов доказательство несколько труднее. Пусть предел $L = \varprojlim D\tau$ существует. Поскольку функтор D перестановочен с обратными пределами (ибо он обладает сопряженным слева функтором G) и вполне инъективен, для доказательства существования предела $\varprojlim \tau$ достаточно показать, что объект L категории $\mathcal{C}$ изоморфен образу при функторе D некоторого объекта категории $\mathcal{D}$ (этот последний объект и будет тогда пределом $\varprojlim \tau$).

Пусть Ψ — морфизм сопряжения, квазиобратный морфизму Φ. Покажем, что морфизм $\Psi L: L \to DGL$ обратим. Согласно только что сказанному, существование предела $\varprojlim \tau$ будет тем самым полностью доказано.

С этой целью заметим, что для любого объекта t схемы T существует единственный морфизм $p_t: GL \to \tau t$, удовлетворяющий соотношению

$$\mathrm{pr}_t = (Dp_t) \circ (\Psi L)$$

(он является образом при изоморфизме $\varphi(L, \tau t)$ морфизма pr_t). В силу единственности морфизмов p_t семейство (p_t) является проективным конусом с начальной вершиной GL и базой τ. Следовательно, существует такой морфизм $p: DGL \to L$, что $\mathrm{pr}_t \circ p = Dp_t$ и потому $\mathrm{pr}_t \circ p \circ (\Psi L) = \mathrm{pr}_t$ для всех t. Поэтому $p \circ (\Psi L) = \mathrm{Id}\, L$. Пусть теперь $L' = DGL$ и $i = \Psi L$. Поскольку

$$(\Psi L') \circ i = (DGi) \circ (\Psi L) \quad \text{и} \quad (\Psi L) \circ p = (DGp) \circ (\Psi L'),$$

мы видим, что морфизм $p \circ (\Psi L')^{-1} \circ (DGi)$ является морфизмом, обратным к морфизму ΨL. Следовательно, морфизм ΨL обратим. (Это рассуждение принадлежит Грусону.)

Одновременно мы доказали, что, так же как и в случае прямых пределов,

$$\varprojlim \tau = G(\varprojlim D\tau).$$

1.5. Примеры.

1.5.1. Примем за $\mathcal{C}$ категорию $\mathcal{T}\!op$ топологических пространств, за $\mathcal{D}$ — категорию хаусдорфовых пространств, а за D — функтор вложения. Этот функтор вполне инъективен, и к нему слева сопряжен функтор G, сопоставляющий каждому топологическому пространству X «его максимальное хаусдорфово факторпространство». Следовательно, поскольку категория $\mathcal{Top}$ допускает прямые и обратные пределы, то, согласно только что доказанному предложению,

для любой (малой) диаграммы $\tau: T \to \mathcal{D}$ *пределы* $\varinjlim \tau$ *и* $\varprojlim \tau$ *существуют.*

При этом обратный предел $\varprojlim \tau$ совпадает с обратным пределом $\varprojlim D\tau$ диаграммы τ, рассматриваемой как диаграмма над категорией всех топологических пространств, а прямой предел $\varinjlim \tau$ является максимальным хаусдорфовым факторпространством прямого предела $\varinjlim D\tau$.

1.5.2. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная абелева категория с достаточным числом инъективных объектов. Примем за категорию $\mathcal{C}$ категорию $K^+(\mathcal{A})$ (см. Вердье [1]), объектами которой являются всевозможные комплексы

$$X_*: \qquad \dots \to X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n+1} \to \dots$$

над категорией $\mathcal{A}$, обладающие тем свойством, что $X_n = 0$ при n, достаточно близком к $-\infty$, а морфизмами — гомотопические классы морфизмов этих комплексов. За категорию $\mathcal{D}$ мы примем полную подкатегорию категории $K^+(\mathcal{A})$, состоящую из комплексов, для которых все объекты X_n инъективны, а за функтор D примем функтор вложения. Этот функтор вполне инъективен, и к нему слева сопряжен функтор G, сопоставляющий каждому комплексу его инъективную резольвенту. Следовательно, чтобы найти предел (прямой или обратный) некоторой диаграммы инъективных комплексов, следует вычислить этот предел в категории $K^+(\mathcal{A})$ и затем взять его инъективную резольвенту.

1.5.3. Каонные пространства. Хаусдорфово пространство X называется *каонным*[1], если подмножество $F \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с каждым компактным подпространством пространства X. Любое локально компактное пространство каонно. Топологическая сумма каонных пространств каонна. Любое замкнутое подпространство и любое хаусдорфово факторпространство каонного пространства каонны.

Полную подкатегорию категории $\mathcal{Top}$, состоящую из всех каонных пространств, мы будем обозначать символом $\mathcal{Ka}$. Для любого хаусдорфова пространства Y символом $Y_{\mathcal{Ka}}$ будем обозначать каонное

---

[1] В оригинале пространством Келли. — *Прим. перев.*

пространство, совпадающее как множество с пространством Y, в котором замкнутыми являются множества, пересекающиеся с каждым компактным подпространством пространства Y по замкнутому (в Y) множеству. Топология пространства $Y_{\mathcal{K}a}$ слабее топологии пространства Y в том смысле, что тождественное отображение $Y_{\mathcal{K}a} \to Y$ непрерывно. При этом любое непрерывное отображение $f: X \to Y$ некоторого каонного пространства X в пространство Y является композицией некоторого непрерывного отображения $X \to Y_{\mathcal{K}a}$ и отображения $Y_{\mathcal{K}a} \to Y$. Это означает, что функтор $Y \rightsquigarrow Y_{\mathcal{K}a}$ сопряжен справа с функтором вложения категории $\mathcal{K}a$ в категорию всех хаусдорфовых пространств.

Согласно результатам п. 1.4 и 1.5.1, отсюда вытекает, что *категория $\mathcal{K}a$ допускает прямые и обратные пределы.* Эти пределы можно описать следующим образом. Пусть $d: T \to \mathcal{K}a$ — произвольная малая диаграмма над категорией $\mathcal{K}a$, и пусть $i: \mathcal{K}a \to \mathcal{T}op$ — функтор вложения. Тогда $\varinjlim d$ является максимальным хаусдорфовым факторпространством пространства $\varinjlim (i \circ d)$ (это факторпространство автоматически является каонным пространством). В частности, если пространство $\varinjlim (i \circ d)$ хаусдорфово, то оно совпадает с $\varinjlim d$:

$$\varinjlim d = \varinjlim (i \circ d)$$

Аналогично

$$\varprojlim d = (\varprojlim (i \circ d))_{\mathcal{K}a},$$

так что как множества обратные пределы в категории $\mathcal{K}a$ совпадают с обратными пределами в категории $\mathcal{T}op$. Однако их топология слабее топологии обратных пределов в $\mathcal{T}op$. Во избежание путаницы обратные пределы $\varprojlim d$ в категории $\mathcal{K}a$ мы будем иногда обозначать символом $(\varprojlim d)_{\mathcal{K}a}$. В частности, прямое произведение в категории $\mathcal{K}a$ будет обозначаться символом $(X \times Y)_{\mathcal{K}a}$.

Поскольку любое каонное пространство X является прямым пределом (в $\mathcal{T}op$ или $\mathcal{K}a$) своих компактных подпространств K, каждое открытое множество $U \subset X$ является прямым пределом локально компактных пространств $K \cap U$. Следовательно, *каждое открытое подмножество каонного пространства каонно.*

1.5.4. Группоиды. В случае когда множество Σ состоит из всех морфизмов категории $\mathcal{C}$, категория $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ частных категории $\mathcal{C}$ по множеству Σ является, очевидно, группоидом. Этот группоид мы будем называть *группоидом, ассоциированным с категорией $\mathcal{C}$.* В частном случае, когда $\mathcal{C}$ является категорией путей некоторой диаграммной схемы T, группоид $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ мы будем называть *группоидом путей* схемы T. Ясно, что функтор $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ сопряжен слева с функтором вложения $i\colon \mathcal{G}r \rightsquigarrow \mathcal{C}at$ категории группоидов $\mathcal{G}r$ в категорию категорий $\mathcal{C}at$.

Для произвольной категории $\mathcal{C}$ мы символом $\mathcal{C}^*$ обозначим подкатегорию категории $\mathcal{C}$, содержащую все ее объекты, но лишь обратимые морфизмы. Ясно, что $\mathcal{C}^*$ является группоидом и функтор $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^*$ сопряжен справа с функтором вложения $i\colon \mathcal{G}r \to \mathcal{C}at$.

Поскольку категория $\mathcal{C}at$ допускает прямые и обратные пределы, отсюда следует, что категория $\mathcal{G}r$ также обладает этим свойством. При этом для любой диаграммы $d\colon T \to \mathcal{G}r$ ее прямым (обратным) пределом является прямой (обратный) предел этой диаграммы, рассматриваемой как диаграмма над категорией $\mathcal{C}at$. Короче говоря, «пределы в категории $\mathcal{G}r$ совпадают с пределами в категории $\mathcal{C}at$».

2. ИСЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ

2.1. Вернемся к ситуации

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{D}{\leftrightarrows}} \mathcal{D}, \qquad \Phi\colon GD \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D},$$

рассмотренной в предложении 1.3, и покажем, что в условиях этого предложения можно дать очень простое описание категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$.

Пусть $\Psi\colon \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to DG$ — функторный морфизм, квазиобратный к морфизму Φ. Как мы знаем (см. доказательство предложения 1.3), морфизм $P_\Sigma\Psi$ обратим. Поэтому для любого морфизма $\gamma\colon c \to DGc'$ определен морфизм

$$\gamma_* = (P_\Sigma \Psi c')^{-1} \circ (P_\Sigma \gamma) \in \mathcal{C}[\Sigma^{-1}](c, c').$$

Лемма. *Отображение $\gamma \rightsquigarrow \gamma_*$ является биективным отображением множества $\mathcal{C}(c, DGc')$ на множество $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}](c, c')$.*

Доказательство. Пусть, как и выше, H — такой функтор, что $G = H \circ P_\Sigma$. Тогда

$$H(c, c')\,\gamma_* = (HP_\Sigma\Psi c')^{-1} \circ (HP_{\Sigma\gamma}) = (G\Psi c')^{-1} \circ (G\gamma).$$

Но

$$(G\Psi c')^{-1} = \Phi G c',$$

так что

$$H(c, c')\,\gamma_* = \varphi(c, Gc')\,\gamma,$$

где $\varphi(c, Gc')\colon \mathcal{C}(c, DGc') \xrightarrow{\approx} \mathcal{C}(Gc, Gc')$ — изоморфизм сопряжения, соответствующий морфизму Φ. Для завершения доказательства остается заметить, что, согласно предложению 1.3, все отображения $H(c, c')$ биективны.

Согласно этой лемме, мы можем множества $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]\,(c, c')$ отождествить с множествами $\mathcal{C}(c, DGc')$. При этом для любых морфизмов

$$\gamma\colon c \to DGc', \qquad \gamma'\colon c' \to DGc''$$

категории $\mathcal{C}$ будет иметь место равенство $\gamma'_* \circ \gamma_* = \gamma''_*$, где

$$\gamma'' = (\Psi DGc'')^{-1} \circ (DG\gamma') \circ \gamma;$$

см. диаграмму

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, "\gamma"'] & & c' \arrow[dl, "\Psi c'"'] \arrow[dr, "\gamma'"] & & c'' \arrow[dl, "\Psi c''"] \\
& DGc' \arrow[dr, "DG\gamma'"'] & & DGc'' \arrow[dl, "\Psi DGc''"] & \\
& & DGDGc'' & &
\end{tikzcd}$$

2.2. Легко видеть, что рассмотренное в предложении 1.3 множество Σ обладает следующими свойствами:

a) все тождественные морфизмы категории $\mathcal{C}$ принадлежат Σ;

b) композиция $v \circ u$ любых двух морфизмов $u\colon X \to Y$ и $v\colon Y \to Z$ из Σ принадлежит Σ;

c) любую диаграмму вида $X' \xleftarrow{s} X \xrightarrow{u} Y$, где $s \in \Sigma$, можно дополнить до коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, dashed, "t"] \\
X' \arrow[r, dashed, "u'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

где $t \in \Sigma$;

d) если морфизмы $f, g\colon X \to Y$ категории $\mathcal{C}$ и морфизм $s\colon X' \to X$ из Σ обладают тем свойством, что $fs = gs$, то в Σ существует такой морфизм $t\colon Y \to Y'$, что $tf = tg$:

$$X' \xrightarrow{s} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{t} Y'.$$

Действительно, свойства a), b) очевидны. Для доказательства свойства c) достаточно положить

$$Y' = DGY,$$

$$u' = DGu \circ (DGs)^{-1} \circ \Psi X',$$

$$t = \Psi Y$$

(в силу функторности морфизма Ψ имеют место равенства $\Psi X' \circ s = DGs \circ \Psi X$ и $DGu \circ \Psi X = \Psi Y \circ u$). Аналогично в свойстве d) можно положить

$$Y' = DGY,$$

$$t = \Psi Y$$

(так как $fs = gs$, то $Gf = Gg$, и потому $\Psi Y \circ f = DGf \circ \Psi X = \Psi Y \circ g$).

2.3. В случае, когда множество Σ морфизмов категории $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям a) — d), мы будем говорить, что оно *допускает исчисление левых частных.* Эта терминология оправдывается тем, что, как мы сейчас покажем, для таких множеств Σ морфизмы категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ можно описать как левые частные вида $s \mid f$, где $s \in \Sigma$, $f \in \mathfrak{Ar}\, \mathcal{C}$.

Пусть c — произвольный объект категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим полную подкатегорию $c \backslash \Sigma$ категории $c \backslash \mathcal{C}$ (см. Глоссарий, Категории морфизмов), порожденную морфизмами $s\colon c \to c'$, принадлежащими множеству Σ. Из условий c) и d) непосредственно вытекает, что эта категория квазифильтрующаяся. Любой объект d категории $\mathcal{C}$ определяет на категории $c \backslash \Sigma$ функтор в категорию множеств $\mathcal{E}ns$, сопоставляющий произвольному объекту $s\colon c \to c'$ из $c \backslash \Sigma$ множество $\mathcal{C}(d, c')$. Пусть

$$\varinjlim_{s} \mathcal{C}(d, \mathfrak{r}s)$$

есть прямой предел этого функтора. По определению этот прямой предел является фактормножеством множества $\boldsymbol{H}(d,c)$ всех диаграмм над $\mathcal{C}$ вида

$$\begin{tikzcd} d \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[d, "s"] \\ & c' \end{tikzcd}$$

где $s \in \Sigma$, по наименьшему отношению эквивалентности, обладающему тем свойством, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} d \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[d, "s"] \\ & c' \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} d \arrow[dr, "g"'] & c \arrow[d, "t"] \\ & c'' \end{tikzcd}$$

эквивалентны, если в категории $\mathscr{C}$ существует такой морфизм $\gamma\colon c' \to c''$, что $t = \gamma \circ s$ и $g = \gamma \circ f$. Из условий a) — d) непосредственно следует, что две диаграммы $d \xrightarrow{f} c' \xleftarrow{s} c$ и $d \xrightarrow{g} c'' \xleftarrow{s} c$ тогда и только тогда эквивалентны в этом смысле, когда существует коммутативная диаграмма вида

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} & c'' \arrow[dr, "b"] & \\ d \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "s"] & c''' \\ & c' \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

для которой морфизм $as = bt$ принадлежит множеству Σ.

В самом деле, во-первых, легко видеть, что отношение между диаграммами из $\boldsymbol{H}(d, c)$, состоящее в существовании диаграммы $(*)$, является отношением эквивалентности. Действительно, пусть нам даны две диаграммы

$$\begin{tikzcd} & c'' \arrow[dr, "b"] & \\ d \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "s"] & c''' \\ & c' \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} & c_1'' \arrow[dr, "b_1"] & \\ d \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "g"'] & c \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "t"] & c_1''' \\ & c'' \arrow[ur, "a_1"'] & \end{tikzcd}$$

Согласно условию c), диаграмма $c_1''' \xleftarrow{a_1 t} c \xrightarrow{bt} c'''$ порождает коммутативную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "bt"] \arrow[d, "a_1 t"'] & c''' \arrow[d, "\tau"] \\ c_1''' \arrow[r, "\sigma"] & x \end{tikzcd}$$

С другой стороны, применив условие d) к диаграмме $c \to c'' \underset{\tau b}{\overset{\sigma a_1}{\rightrightarrows}} x$, мы получим некоторый морфизм $\rho\colon x \to y$. Теперь без труда проверяется, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & c_1'' \arrow[dr, "\beta"] & \\ d \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[u, "u"'] \arrow[d, "s"] & y \\ & c' \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

где $\alpha = \rho \circ \tau \circ a$ и $\beta = \rho \circ \sigma \circ b_1$, обладает всеми требуемыми свойствами. Следовательно, рассматриваемое отношение транзитивно. Его симметричность и рефлексивность очевидны.

Во-вторых, ясно, что если для диаграмм $d \xrightarrow{f} c' \xleftarrow{s} c$ и $d \xrightarrow{g} c'' \xleftarrow{t} c$ существует морфизм $\gamma: c' \to c''$, для которого $t = \gamma \circ s$ и $g = \gamma \circ f$, то эти диаграммы эквивалентны (достаточно положить $a = \gamma$ и $b = \mathrm{Id}\, c''$).

В-третьих, если имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & c'' \arrow[dr, "b"] & \\
d \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "s"] & c''' \\
 & c' \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

то будут иметь место и диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & c''' \arrow[dr, "\mathrm{Id}"] & \\
d \arrow[ur, "b\circ g"] \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[u, "b\circ t"'] \arrow[d, "s"] & c''' \\
 & c' \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
 & c'' \arrow[dr, "b"] & \\
d \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "b\circ g"'] & c \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "b\circ t"] & c''' \\
 & c''' \arrow[ur, "\mathrm{Id}"'] &
\end{tikzcd}$$

и потому рассматриваемое отношение эквивалентности действительно является наименьшим отношением эквивалентности, обладающим указанным выше свойством.

Доказанное утверждение означает, что элементы множества $\varinjlim_{s} \mathcal{C}(d, \mathfrak{t}s)$, $s \in c\backslash\Sigma$, мы можем рассматривать как «левые частные» морфизмов категории $\mathcal{C}$ со знаменателями из множества Σ. В соответствии с этим класс эквивалентности, содержащий диаграмму $d \xrightarrow{f} c' \xleftarrow{s} c$, мы будем обозначать символом $s \mid f$.

Определим теперь новую категорию $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$, принимая за ее объекты объекты категории $\mathcal{C}$ и полагая

$$\Sigma^{-1}\mathcal{C}(c, d) = \varinjlim_{s} \mathcal{C}(c, \mathfrak{t}s), \quad s \in c\backslash\Sigma,$$

для любых объектов c и d. Композицию

$$\Sigma^{-1}\mathcal{C}(e, d) \times \Sigma^{-1}\mathcal{C}(d, c) \to \Sigma^{-1}\mathcal{C}(e, c)$$

морфизмов категории $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$ мы определим формулой

$$(s \mid f) \circ (t \mid g) = s's \mid f'g, \qquad s \mid f \in \Sigma^{-1}\mathcal{C}(d, c), \quad t \mid g \in \Sigma^{-1}\mathcal{C}(e, d),$$

где $s' \in \Sigma$ и $f' \in \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$ — морфизмы, «замыкающие» коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, "g"'] & d \arrow[d, "t"] \arrow[dr, "f"] & c \arrow[d, "s"] \\
 & d' \arrow[dr, dashed, "f'"'] & c' \arrow[d, dashed, "s'"] \\
 & & c''
\end{tikzcd}$$

Из условий a) — d) легко вытекает, что это определение корректно и что мы получаем, тем самым, некоторую категорию.

Сравним категорию $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$ с категорией $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$. Пусть $d, c \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$. Ясно, что отображение

$$(s, f) \rightsquigarrow (P_\Sigma s)^{-1} P_\Sigma f$$

множества $\boldsymbol{H}(d, c)$ в множество $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}](d, c)$ эквивалентные элементы первого множества переводит в равные элементы второго множества. Поэтому соответствие

$$s \mid f \rightsquigarrow (P_\Sigma s)^{-1} P_\Sigma f$$

определяет некоторое отображение

$$\pi(d, c) : \Sigma^{-1}\mathcal{C}(d, c) \to \mathcal{C}[\Sigma^{-1}](d, c).$$

Отображения $\pi(d, c)$ вместе с тождественным отображением $\mathrm{Id}\,\mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ составляют, очевидно, некоторый функтор

$$\pi: \Sigma^{-1}\,\mathcal{C} \to \mathcal{C}\,[\Sigma^{-1}].$$

2.4. Предложение. *Для любой категории $\mathcal{C}$ и любого подмножества $\Sigma \subset \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$, допускающего исчисление левых частных, функтор π является изоморфизмом категорий. В частности, каждое отображение*

$$\pi(d, c) : s \mid f \rightsquigarrow (P_\Sigma s)^{-1} P_\Sigma f$$

является биективным отображением множества $\Sigma^{-1}\mathcal{C}(d, c) = \varinjlim\limits_{s} \mathcal{C}(d, \mathfrak{r}s)$ на множество $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}](d, c)$.

Доказательство. Рассмотрим функтор ${}_\Sigma P : \mathcal{C} \to \Sigma^{-1}\mathcal{C}$, определенный формулами

$$\begin{aligned} {}_\Sigma P c &= c, & c &\in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}, \\ {}_\Sigma P f &= \mathrm{Id}\,\mathfrak{r} f \mid f, & f &\in \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Ясно, что пара $(\Sigma^{-1}\mathcal{C}, {}_\Sigma P)$ является решением поставленной в п. 1.1 задачи, т. е. функтор ${}_\Sigma P$ заставляет морфизмы из Σ стать обратимыми и любой функтор $F: \mathcal{C} \to \mathcal{X}$, заставляющий морфизмы из Σ стать обратимыми, единственным образом представляется в виде $G \circ {}_\Sigma P$ (функтор G определяется при этом формулами

$$Gc = Fc, \qquad c \in \mathfrak{Ob}\,\Sigma^{-1}\mathcal{C} = \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C},$$

$$G(s \mid f) = (Fs)^{-1}Ff, \quad f \in \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C},\ s \in \Sigma,$$

где $\mathfrak{t}f = \mathfrak{t}s$). В частности, при $\mathcal{X} = \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ и $F = P_\Sigma$ функтор G совпадает с функтором π. Поскольку пары $(\mathcal{C}[\Sigma^{-1}], P_\Sigma)$ и $(\Sigma^{-1}\mathcal{C}, {}_\Sigma P)$ являются решениями одной и той же «универсальной» задачи, этот функтор обязательно является изоморфизмом.

В дальнейшем для любого множества Σ, допускающего исчисление левых частных, мы будем категорию $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ отождествлять посредством изоморфизма π с категорией $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$.

Мы будем говорить, что подмножество $\Sigma \subset \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$ *допускает исчисление правых частных*, если оно обладает свойствами, двойственными свойствам a) — d). Ясно, что для таких множеств имеет место предложение, двойственное предложению 2.4.

В дальнейшем ссылка на предложение 2.4 может на самом деле означать ссылку и на это двойственное предложение.

2.5. Примеры и приложения.

2.5.1. Пусть, как и выше, $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $D: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — пара сопряженных функторов, причем функтор D вполне инъективен. Тогда, как мы знаем, множество Σ, состоящее из всех морфизмов s категории $\mathcal{C}$, для которых морфизм Gs обратим, допускает исчисление левых частных. Более того, в этом случае множество $\varinjlim_s \mathcal{C}(d, \mathfrak{t}s)$, $s \in c\backslash\Sigma$, находится в естественном биективном соответствии с множеством $\mathcal{C}(d, DGc)$. Действительно, любой морфизм $\gamma: d \to DGc$ определяет диаграмму

$$\begin{tikzcd} d \arrow[dr, "\gamma"'] & c \arrow[d, "\Psi c"] \\ & DGc \end{tikzcd}$$

где $\Psi: \mathrm{Id}\mathcal{C} \to DG$ — морфизм сопряжения от G к D, причем $\Psi c \in \Sigma$ (ибо, как мы знаем, морфизм $G\Psi$ обратим). Таким образом, определено отображение

$$\gamma \rightsquigarrow \Psi c \mid \gamma$$

множества $\mathcal{C}(d, DGc)$ в множество $\varinjlim_s \mathcal{C}(d, \mathfrak{r}s)$. Это отображение биективно, ибо, скомпонировав его с биективным отображением $\pi(d, c)$, мы, очевидно, получим рассмотренное в п. 2.1 биективное отображение $\gamma \rightsquigarrow \gamma_*$. Таким образом, конструкцию категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$, изложенную в п. 2.1, мы можем рассматривать как частный случай общей конструкции категории $\Sigma^{-1}\mathcal{C}$.

2.5.2. Для тех же функторов G и D возьмем за множество Σ наименьшее подмножество множества $\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$, замкнутое относительно композиции и содержащее все тождественные морфизмы и все морфизмы $\Psi c: c \to DGc$ (это множество содержит множество Σ предыдущего примера, но, вообще говоря, с ним не совпадает).

По определению это множество Σ удовлетворяет условиям a) и b). Проверку условия c) достаточно, конечно, осуществить лишь для морфизмов $s: X \to X'$ вида $\Psi X: X \to DGX$. Но в этом случае оно очевидно (достаточно положить $t = \Psi Y$ и $u' = DGu$). Аналогично в условии d) мы можем считать, что морфизм $s: X' \to X$ имеет вид $\Psi c: c \to DGc$. Так как функторный морфизм ΨDG имеет тот же обратный морфизм $D\Phi G$, что и морфизм $DG\Psi$, то $\Psi DG = DG\Psi$. Кроме того, по условию $f \circ \Psi c = g \circ \Psi c$. Поэтому

$$(DGf) \circ (\Psi DGc) = (DGf) \circ (DG\Psi c) = (DGg) \circ (DG\Psi c) = (DGg) \circ (\Psi DGc).$$

Но в силу функторности морфизма Ψ имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} DGc \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi DGc"'] & Y \arrow[d, "\Psi Y"] \\ DGDGc \arrow[r, "DGf"] & DGY \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} DGc \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Psi DGc"'] & Y \arrow[d, "\Psi Y"] \\ DGDGc \arrow[r, "DGg"] & DGY \end{tikzcd}$$

Следовательно,

$$(\Psi Y) \circ f = (\Psi Y) \circ g.$$

Таким образом, условие d) также удовлетворено (при $t = \Psi Y: Y \to DGY$).

2.5.3. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная абелева категория, и пусть $\overline{K}(\mathcal{A})$ — категория комплексов над $\mathcal{A}$, «рассматриваемых с точностью до гомотопии». (Объектами этой категории являются комплексы

$$X_*: \qquad \cdots \to X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n+1} \to \cdots$$

над $\mathcal{A}$, а морфизмами — гомотопические классы морфизмов этих комплексов; ср. пример 1.5.2, а также п. 8.5 (гл. V.) Примем за Σ множество всех морфизмов $u: X_* \to Y_*$ категории $\overline{K}(\mathcal{A})$, для которых морфизмы $H_n(X_*) \to H_n(Y_*)$ при всех n являются изоморфизмами. Можно проверить (см. Вердье [1]), что это множество допускает как исчисление левых, так и исчисление правых частных. Соответствующая категория $\overline{K}(\mathcal{A})[\Sigma^{-1}]$ называется категорией, «производной» от категории $\mathcal{A}$.

2.5.4. Пусть снова $\mathcal{A}$ — произвольная абелева категория, и пусть $\mathcal{B}$ — некоторая ее «плотная» подкатегория, т. е. такая полная подкатегория, что для любой короткой точной последовательности

$$0 \to A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \to 0$$

над $\mathcal{A}$ объект A тогда и только тогда принадлежит подкатегории $\mathcal{B}$, когда этой подкатегории принадлежат объекты A' и A''. Пусть $\Sigma = \Sigma(\mathcal{B})$ — множество всех морфизмов s категории $\mathcal{A}$, для которых $\operatorname{Ker} s$ и $\operatorname{Coker} s$ принадлежат $\mathcal{B}$. Оказывается, что это множество допускает как исчисление левых, так и исчисление правых частных, причем соответствующая категория $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ совпадает с факторкатегорией $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ в смысле Гротендика (см. Гротендик [1]).

2.5.5. Пусть опять $\mathcal{A}$ — абелева категория, и пусть Σ — множество всех ее «существенных мономорфизмов», т. е. таких мономорфизмов $u: A' \to A$, что для произвольного морфизма $v: A \to A''$ категории $\mathcal{A}$ композиция $v \circ u$ тогда и только тогда является мономорфизмом, когда мономорфизмом является морфизм v. Можно проверить, что множество Σ допускает исчисление правых (но, вообще говоря, не левых) частных. Соответствующая категория $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ является «спектральной категорией» категории $\mathcal{A}$. В случае, когда $\mathcal{A}$ представляет собой категорию левых унитарных модулей над некоторым кольцом A с единицей (или, более общо, если каждый подобъект произвольного объекта категории $\mathcal{A}$ обладает пополнением, например, если каждый объект категории $\mathcal{A}$ вкладывается в инъективный объект), категория $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ является абелевой категорией, каждый морфизм которой расщепляется. Если, кроме того, кольцо A нётерово слева (или хотя бы локально нётерово; см Габриель [1]), то каждый объект категории $\mathcal{A}[\Sigma^{-1}]$ является прямой суммой простых объектов, причем множество всех простых объектов этой категории (рассматриваемых с точностью до изоморфизма) находится в естественном биективном соответствии с множеством всех неразложимых инъективных объектов категории $\mathcal{A}$ (также рассматриваемых с точностью до изоморфизма).

2.5.6. Пусть σ — произвольное бесконечное кардинальное число, и пусть Σ_σ — множество всех морфизмов $u: M \to N$ категории $\mathcal{E}ns$, обладающих следующими свойствами:

1) если $N \neq \varnothing$, то $M \neq \varnothing$;

2) мощность дополнения $N \setminus u(M)$ меньше σ;

3) существует такое подмножество M' множества M, что мощность дополнения $M \setminus M'$ меньше σ, а ограничение $u|_{M'}$ морфизма u на множестве M' инъективно.

Кроме того, пусть Σ_{σ^*} — множество всех морфизмов категории $\mathcal{E}ns$, удовлетворяющих лишь условиям 2) и 3). Без труда проверяется, что оба множителя Σ_σ и Σ_{σ^*} допускают исчисление левых частных.

§ 3. ИСЧИСЛЕНИЕ ЛЕВЫХ ЧАСТНЫХ И ПРЯМЫЕ ПРЕДЕЛЫ

3.1. Предложение. *Для любого множества $\Sigma \subset \mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$, допускающего исчисление левых частных, канонический функтор*

$$P_\Sigma: \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$$

перестановочен с конечными прямыми пределами.

Доказательство. Пусть T — конечная диаграммная схема, $\tau: T \to \mathcal{C}$ — диаграмма типа T над категорией $\mathcal{C}$ и in_t — каноническая инъекция объекта $\tau(t)$, $t \in \mathfrak{Ob}\,T$, в объект $\varinjlim \tau$. Для доказательства предложения достаточно показать, что для любого объекта c категории $\mathcal{C}$ отображение

$$\mathcal{C}[\Sigma^{-1}](P_\Sigma \varinjlim_t \tau t, c) \to \varprojlim_t \mathcal{C}[\Sigma^{-1}](P_\Sigma \tau t, c),$$

индуцированное морфизмами $P_\Sigma(\mathrm{in}_t)$, биективно. Но в силу изложенного в предыдущем пункте описания морфизмов категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] = \Sigma^{-1}\mathcal{C}$ последнее отображение мы можем считать совпадающим с каноническим отображением

$$\varinjlim_{s \in c \setminus \Sigma} \mathcal{C}(\varinjlim_t \tau t, \mathfrak{r}s) \to \varprojlim_t \varinjlim_{s \in c \setminus \Sigma} \mathcal{C}(\tau t, \mathfrak{r}s).$$

Поскольку множества $\mathcal{C}(\varinjlim_t \tau t, \mathfrak{r}s)$ и $\varprojlim_t \mathcal{C}(\tau t, \mathfrak{r}s)$ находятся в естественном биективном соответствии, нам нужно только доказать биективность канонического отображения

$$\varinjlim_s \varprojlim_t \mathcal{C}(\tau t, \mathfrak{r}s) \to \varprojlim_t \varinjlim_s \mathcal{C}(\tau t, \mathfrak{r}s).$$

Но это отображение действительно биективно, ибо в категории $\mathcal{E}ns$ конечные обратные пределы перестановочны с прямыми пределами по квазифильтрующимся категориям.

3.2. Следствие 1. *В условиях предложения* 3.1 *из того, что каждая конечная диаграмма над категорией* $\mathcal{C}$ *обладает прямым пределом, вытекает, что каждая конечная диаграмма над категорией* $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ *также обладает прямым пределом.*

Доказательство. Достаточно, как мы знаем, показать, что существует прямая сумма любого конечного семейства объектов категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ и что каждая пара морфизмов этой категории обладает коядром.

Пусть $(c_t, t \in T)$ — произвольное конечное семейство объектов категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$, и пусть $(\coprod_{t \in T} c_t, \mathrm{in}_t)$ — их прямая сумма в категории $\mathcal{C}$. Тогда из предложения 3.1 немедленно вытекает, что $(\coprod_{t \in T} c_t, P_\Sigma \mathrm{in}_t)$ представляет собой прямую сумму семейства $(c_t, t \in T)$ в категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$.

Пусть далее $f, g: c \to d$ — произвольные морфизмы категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$. По определению в множестве Σ существует такой морфизм $s: d \to d'$, а в категории $\mathcal{C}$ — такие два морфизма $f', g': c \to d'$, что $P_\Sigma f' = (P_\Sigma s) f$ и $P_\Sigma g' = (P_\Sigma s) g$. Пусть (e, π) — коядро пары (f', g') в категории $\mathcal{C}$. Из предложения 3.1 немедленно вытекает, что $(P_\Sigma e, P_\Sigma(\pi \circ s))$ представляет собой коядро пары (f, g) в категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$.

3.3. Следствие 2. *Если в условиях предложения* 3.1 *категория* $\mathcal{C}$ *аддитивна, то категория* $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ *также аддитивна.*

Доказательство. Напомним (см. Габриель [1]), что категория $\mathcal{C}$ аддитивна, если она обладает нулем, допускает конечные прямые суммы и множества ее морфизмов $\mathcal{C}(c, d)$ обладают строением абелевых групп, по отношению к которому операция компонирования морфизмов билинейна. Поэтому в силу следствия 1 нам нужно только доказать, что категория $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ обладает нулем и множества ее морфизмов $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}](c, d)$ можно снабдить строением абелевых групп, по отношению к которому операция компонирования морфизмов билинейна.

Пусть 0 — нуль категории $\mathcal{C}$. Покажем, что 0 является нулем также и в категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$. Поскольку из предложения 3.1, как легко видеть, немедленно вытекает, что объект 0 представляет собой евый нуль категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$, нам нужно только доказать, что этот объект является и правым нулем, для чего в свою очередь достаточно показать, что для любой диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} c \arrow[dr, "f"'] & 0 \arrow[d, "s"] \\ & d \end{tikzcd}$$

где $s \in \Sigma$, имеет место равенство $s \mid f = \mathrm{Id} 0 \mid 0^c$, где 0^c — нуль группы $\mathcal{C}(c, 0)$. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$0 \xrightarrow{s} d \underset{\mathrm{Id}\, d}{\overset{s \circ 0^d}{\rightrightarrows}} d.$$

Согласно условию d) п. 2.2, в множестве Σ существует такой морфизм $t: d \to d'$, что $t = t \circ \mathrm{Id}\, d = t \circ s \circ 0^d$. Следовательно, $tf = ts 0^d f = ts 0^d$, и поэтому $s \mid f = \mathrm{Id}\, 0 \mid 0^c$.

Далее, поскольку множества $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}](c, d)$ можно отождествить с прямыми пределами абелевых групп $\varinjlim_{s \in \Sigma} \mathcal{C}(c, \mathfrak{t}s)$, эти множества естественным образом являются абелевыми группами, причем по отношению к сложению в этих группах операция компонирования морфизмов, очевидно, билинейна. Тем самым следствие 2 полностью доказано.

3.4. Предложение. *Пусть $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — произвольный функтор, перестановочный с конечными прямыми пределами, и пусть Σ — подмножество множества $\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$, состоящее из всех морфизмов s, для которых морфизм Gs обратим. Тогда если категория $\mathcal{C}$ допускает конечные прямые пределы, то множество Σ допускает исчисление левых частных. При этом функтор $H: \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \to \mathcal{D}$, определенный соотношением $G = H \circ P_\Sigma$, консервативен и перестановочен с конечными прямыми пределами.*

Доказательство. Условия a) и b), которым должно удовлетворять множество Σ, очевидны. Проверим условие c). Пусть $X' \xleftarrow{s} X \xrightarrow{u} Y$, где $s \in \Sigma$. Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} GX \arrow[r, "Gu"] \arrow[d, "Gs"'] & GY \arrow[d, "G(\mathrm{in}_2)"] \\ GX' \arrow[r, "G(\mathrm{in}_1)"] & G(X' \sqcup_X Y) \end{tikzcd}$$

Поскольку этот квадрат, очевидно, коуниверсален (напомним, что по условию функтор G перестановочен с конечными прямыми пределами и, в частности, с амальгамами), а морфизм Gs обратим, морфизм $G(\mathrm{in}_2)$ также обратим, и потому морфизм in_2 принадлежит множеству Σ. Это означает, что условие с) выполнено с $Y' = X' \overset{X}{\sqcup} Y$, $u = \mathrm{in}_1$ и $t = \mathrm{in}_2$.

Проверим условие d). Пусть $f, g: X \to Y$ — такие морфизмы категории $\mathscr{C}$, что $fs = gs$, где $s: X' \to X$ — некоторый морфизм из Σ. Рассмотрим коядро $t: Y \to Y'$ пары (f, g). Так как функтор G перестановочен с прямыми пределами, морфизм Gt является коядром пары (Gf, Gg). Но, поскольку морфизм Gs обратим, морфизмы Gf и Gg совпадают, и потому коядро Gt также обратимо. Следовательно, $t \in \Sigma$. Таким образом, множество Σ допускает исчисление левых частных.

Покажем теперь, что морфизм u категории $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ обратим, если обратим морфизм Hu. Пусть $u = s|t$, где $s \in \Sigma$. Поскольку морфизм $Hu = (Gs)^{-1} \circ Gt$ обратим, морфизм Gt также обратим. Следовательно, $t \in \Sigma$, и морфизм $u = s|t$ обратим и обладает обратным морфизмом $t|s$.

Осталось показать, что функтор H перестановочен с конечными прямыми пределами. Поскольку для любой конечной диаграммы над категорией $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ существует прямой предел, для этого достаточно показать, что функтор H перестановочен с конечными прямыми суммами и с коядрами пар морфизмов. Но первое из этих утверждений очевидно, а второе легко доказывается рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве следствия 1.

3.5. Доказанное предложение применимо, в частности, к функтору $G = P_T$, где T — произвольное подмножество множества $\mathfrak{A}\mathrm{r}\,\mathscr{C}$, допускающее исчисление левых частных. В этом случае множество Σ является насыщением множества T, а категории $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ и $\mathscr{C}[T^{-1}]$ можно считать совпадающими. При этом множество Σ состоит, как легко видеть, из всех морфизмов $u: c \to d$, которые можно включить в коммутативную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"'] & d \arrow[d, "t"] \arrow[dl, "v"'] \\ c' \arrow[r, "u'"'] & d' \end{tikzcd}$$

где $s, t \in T$ (если такая диаграмма существует, то морфизм $P_T u = \mathrm{Id}\, d | u$ обладает обратным морфизмом $s|v$). Таким образом, *если категория $\mathscr{C}$ допускает конечные прямые пределы, то насыщение любого подмножества множества $\mathfrak{A}\mathrm{r}\,\mathscr{C}$, допускающего исчисление левых частных, также допускает исчисление левых частных.* Для таких категорий мы можем ограничиться рассмотрением лишь насыщенных подмножеств $\Sigma \subset \mathfrak{A}\mathrm{r}\,\mathscr{C}$, допускающих исчисление левых частных. Категории частных категории $\mathcal{C}$ по отношению к такого рода множествам Σ мы будем называть *категориями левых частных* категории $\mathcal{C}$. Согласно сказанному выше, категории левых частных категории $\mathcal{C}$ в некотором смысле классифицируют функторы, определенные в этой категории и перестановочные с конечными прямыми пределами.

Легко видеть, например, что каждая категория левых частных категории $\mathcal{E}ns$, отличная от самой категории $\mathcal{E}ns$, является одной из категорий $\mathcal{E}ns[\Sigma_\sigma^{-1}]$ или $\mathcal{E}ns[\Sigma_{\sigma\bullet}^{-1}]$, где σ — некоторое кардинальное число (см. пример 2.5.6). Аналогично, определив двойственным образом *категории правых частных*, мы немедленно получим, что единственными категориями правых частных категории $\mathcal{E}ns$ являются сама категория $\mathcal{E}ns$ и категория $\mathcal{E}ns[(\mathfrak{Ar}\,\mathcal{E}ns)^{-1}]$.

3.6. Предположим теперь, что категория $\mathcal{C}$ допускает конечные прямые и обратные пределы. Тогда для любого подмножества Σ множества $\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$, допускающего исчисление левых и правых частных, категория $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ также допускает конечные прямые и обратные пределы и функтор $P_\Sigma\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ перестановочен с этими пределами. Вообще можно показать, что многие свойства категории $\mathcal{C}$, связанные с понятием точности, сохраняются при переходе к категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$. Мы ограничимся здесь доказательством следующего предложения:

Предложение. *Для любой абелевой категории $\mathcal{C}$ и любого множества Σ, допускающего исчисление левых и правых частных, категория $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ абелева.*

Мы уже знаем, что категория $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ аддитивна и допускает ядра и коядра. Поэтому нам достаточно показать, что для любого морфизма $u\colon c \to d$ канонический морфизм $\theta\colon \mathrm{Coim}\, u \to \mathrm{Im}\, u$ обратим. Поскольку имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "P_\Sigma u'"'] & d \arrow[d, "P_\Sigma s"] \\ & d' \end{tikzcd}$$

с обратимым морфизмом $P_\Sigma s$, мы без ограничения общности можем считать, что морфизм u имеет вид $P_\Sigma v$, где $v\colon c \to d$ — некоторый морфизм категории $\mathcal{C}$. Пусть $\eta\colon \mathrm{Coim}\, v \to \mathrm{Im}\, v$ — канонический морфизм, определенный морфизмом v. Поскольку $\theta = P_\Sigma \eta$, морфизм θ обратим, если обратим морфизм η.

Так как в условиях доказанного предложения функтор P_Σ, очевидно, точен, то полная подкатегория $\mathcal{C}(\Sigma)$ категории $\mathcal{C}$, порожденная всеми объектами $c \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$, для которых объект $P_\Sigma c$ тривиален (является нулем), плотна в $\mathcal{C}$ (см. п. 2.5.4). Отсюда легко вытекает, что описанное в п. 2.5.4 отображение $\mathcal{B} \rightsquigarrow \Sigma(\mathcal{B})$ является биективным отображением множества плотных подкатегорий категории $\mathcal{C}$ на множество насыщенных подмножеств множества $\mathfrak{A}\mathfrak{r}\,\mathcal{C}$, допускающих исчисление левых и правых частных. Таким образом, для любой абелевой категории $\mathcal{C}$ понятия плотной подкатегории, категории левых и правых частных и насыщенного подмножества множества $\mathfrak{A}\mathfrak{r}\,\mathcal{C}$, допускающего исчисление левых и правых частных, по существу совпадают (находятся в естественном взаимно однозначном соответствии).

§ 4. ФУНКТОРЫ, СОПРЯЖЕННЫЕ С КАНОНИЧЕСКИМ ФУНКТОРОМ

Пусть Σ — множество морфизмов некоторой категории $\mathcal{C}$, допускающее исчисление левых частных. Рассмотрим вопрос о существовании функтора $D: \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \to \mathcal{C}$, сопряженного справа с функтором P_Σ. Как мы знаем, такой функтор D существует тогда и только тогда, когда для каждого объекта e категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ существует косвободный морфизм $\gamma: P_\Sigma d \to e$, где d — некоторый объект категории $\mathcal{C}$.

4.1. Определение. Пусть Σ — произвольное множество морфизмов категории $\mathcal{C}$. Мы будем говорить, что объект c категории $\mathcal{C}$ *замкнут слева относительно* Σ, если для любого морфизма s из Σ отображение $\mathcal{C}(s, c)$ биективно.

Имеет место следующее

Предложение. *Для любого множества Σ морфизмов категории $\mathcal{C}$, допускающего исчисление левых частных, следующие утверждения равносильны:*

(i) *функтор P_Σ обладает правым сопряженным функтором (обязательно вполне инъективным);*

(ii) *для любого объекта c категории $\mathcal{C}$ существует такой объект d, замкнутый слева относительно множества Σ, и такой морфизм $s: c \to d$, что морфизм $P_\Sigma s$ обратим.*

Доказательству этого предложения мы предпошлем несколько замечаний об объектах, замкнутых слева относительно множеств Σ, допускающих исчисление левых частных.

4.1.1. *Объект c категории $\mathcal{C}$ тогда и только тогда замкнут слева относительно множества Σ, допускающего исчисление левых частных, когда для любого морфизма $s \in \Sigma$ отображение $\mathcal{C}(s, c)$ надъективно.*

Нам нужно показать, что если для каждого морфизма s из Σ отображение $\mathcal{C}(s, c)$ надъективно, то оно также и инъективно, т. е. что диаграмма вида

$$a \xrightarrow{s} b \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} c, \qquad s \in \Sigma,$$

где $f \circ s = g \circ s$, может иметь место лишь при $f = g$. Но, согласно свойству d) из п. 2.2, для каждой такой диаграммы в множестве Σ существует такой морфизм t, что $t \circ f = t \circ g$. С другой стороны, поскольку отображение $\mathcal{C}(t, c)$ надъективно, существует такой морфизм p, что $p \circ t = \operatorname{Id} c$. Следовательно, равенство $t \circ f = t \circ g$ возможно лишь при $f = g$.

4.1.2. *Если объект c категории $\mathcal{C}$ замкнут слева относительно множества Σ, допускающего исчисление левых частных, то для любого объекта b категории $\mathcal{C}$ отображение*

$$P_\Sigma(b, c) : \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}[\Sigma^{-1}](b, c)$$

биективно.

При доказательстве утверждения 4.1.1 было показано, что для любого принадлежащего множеству Σ морфизма $s : c \to c'$ существует ретракция $p : c' \to c$. Следовательно, любой такой морфизм s является мономорфизмом, и каноническое отображение

$$\mathcal{C}(b, c) \to \varinjlim_s \mathcal{C}(b, c')$$

инъективно. Кроме того, так как имеет место диаграмма

$$c \xrightarrow{s} c' \overset{\operatorname{Id} c'}{\underset{sp}{\rightrightarrows}} c',$$

то в множестве Σ существует такой морфизм $t : c' \to c''$, что $t = tsp$. Таким образом, для любого морфизма $f : b \to c'$ имеют место равенства

$$s|f = ts|tf = ts|tspf = \operatorname{Id} c|pf.$$

Иными словами, отображение $\mathcal{C}(b, c) \to \varinjlim_s \mathcal{C}(b, c')$ надъективно. Для завершения доказательства остается воспользоваться предложением 2.4.

4.2. Доказательство предложения 4.1.

Рассмотрим пару сопряженных функторов $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ и произвольное подмножество Σ множества $\mathfrak{Ar}\,\mathcal{C}$, допускающее исчисление левых частных. Для каждого морфизма $s \in \Sigma$ и каждого объекта d категории $\mathcal{D}$ изоморфизм сопряжения от G к D позволяет нам отождествить отображение $\mathcal{C}(s, Dd)$ с отображением $\mathcal{D}(Gs, d)$. Следовательно, если функтор G заставляет морфизмы из Σ стать обратимыми, то все объекты вида Dd замкнуты слева относительно Σ.

В частности, если функтор $P_\Sigma: \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ обладает сопряженным справа функтором i, то для любого объекта c категории $\mathcal{C}$ объект $iP_\Sigma c$ замкнут слева относительно Σ. Пусть Ψ — морфизм сопряжения от P_Σ к i, а Φ — морфизм сопряжения, квазиобратный к морфизму Ψ. Поскольку, согласно утверждению (ii) предложения 1.3, морфизм Φ обратим и поскольку $(\Phi P_\Sigma) \circ (P_\Sigma \Psi) = \mathrm{Id}\, P_\Sigma$, функтор P_Σ заставляет морфизм Ψc: $c \to iP_\Sigma c$ стать обратимым. Следовательно, (i) $\Rightarrow$ (ii).

Обратно, предположим, что каждому объекту c категории $\mathcal{C}$ мы можем сопоставить такой замкнутый слева объект $i(c)$ и такой морфизм $a(c): c \to i(c)$, что морфизм $P_\Sigma a(c)$ обратим. Тогда для каждого объекта d категории $\mathcal{C}$ морфизм $a(c)$ индуцирует биективное отображение множества $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}](d, c)$ на множество $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}](d, i(c))$, канонически изоморфное множеству $\mathcal{C}(d, i(c))$ (см. утверждение 4.1.2). Следовательно, для любого объекта c категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ имеет место изоморфизм

$$\alpha(c): \mathcal{C}[\Sigma^{-1}](P_\Sigma d, c) \to \mathcal{C}(d, i(c))$$

функториальный по d. Но тогда для каждого морфизма γ: $c \to c'$ категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ существует один и только один морфизм $i(\gamma)$, обладающий тем свойством, что

$$\mathcal{C}(d, i(\gamma)) \circ \alpha(c) = \alpha(c') \circ (\mathcal{C}[\Sigma^{-1}](P_\Sigma d, \gamma)).$$

Теперь ясно, что соответствия $c \rightsquigarrow i(c)$ и $\gamma \rightsquigarrow i(\gamma)$ определяют некоторый функтор i и этот функтор сопряжен справа с функтором P_Σ. Следовательно, (ii) $\Rightarrow$ (i).

Глава II

СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 1. КАТЕГОРИИ ФУНКТОРОВ

В этом параграфе мы изложим некоторые общие результаты, связанные с понятием представимого функтора (см. Глоссарий). Обозначения оставляем прежние.

1.1. Для произвольной категории $\mathcal{D}$ рассмотрим категорию $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ контравариантных функторов, определенных на категории $\mathcal{D}$ и принимающих значения в категории множеств $\mathcal{E}ns$. Ясно, что морфизм f этой категории тогда и только тогда является эпиморфизмом (соответственно мономорфизмом или изоморфизмом), когда для любого объекта d категории $\mathcal{D}$ отображение $f(d)$ надъективно (соответственно инъективно или биективно). Далее, легко видеть, что

категория $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ допускает функториальные прямые и обратные пределы.

Действительно, для любой диаграммы $\tau\colon T \to \mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ над категорией $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ и любого объекта d категории $\mathcal{D}$ формулы

$$\tau_d(t) = \tau(t)\,(d), \qquad t \in \mathfrak{Ob}\, T,$$

$$\tau_d(a) = \tau(a)\,(d), \qquad a \in \mathfrak{Ar}\, T,$$

определяют, очевидно, некоторую диаграмму $\tau_d\colon T \to \mathcal{E}ns$ над категорией $\mathcal{E}ns$. Пусть $F(d)$ — предел (прямой или обратный) этой диаграммы. Аналогично, для любого морфизма $\alpha\colon d \to d'$ категории $\mathcal{D}$ формула

$$\tau_\alpha(t) = \tau(t)\,(\alpha), \qquad t \in \mathfrak{Ob}\, T,$$

определяет некоторый морфизм τ_α диаграммы $\tau_{d'}$ в диаграмму τ_d. Пусть $F(\alpha)$ — морфизм $F(d') \to F(d)$, индуцированный этим морфизмом. Ясно, что соответствия $d \rightsquigarrow F(d)$, $\alpha \rightsquigarrow F(\alpha)$ определяют некоторый функтор $F\colon \mathcal{D}^\circ \to \mathcal{E}ns$, являющийся пределом (соответственно прямым или обратным) диаграммы τ. Тем самым сформулированное выше утверждение полностью доказано.

Мы доказали даже большее, а именно мы описали, как в категории $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ строятся прямые и обратные пределы. Коротко это построение можно охарактеризовать, сказав, что пределы в категории $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ вычисляются «поаргументно». В частности, мы видим, что *для любого объекта d категории $\mathcal{D}$ функтор*

$$F \rightsquigarrow F(d)$$

из $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ в $\mathcal{E}ns$ перестановочен с прямыми и обратными пределами.

Покажем теперь, что

каждый функтор $F\colon \mathcal{D}^\circ \to \mathcal{E}ns$ является прямым пределом представимых функторов.

Действительно, пусть $\mathcal{D}/F$ — категория, объектами которой являются морфизмы категории $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$, имеющие вид $\alpha\colon \mathcal{D}(?, a) \to F$, и в которой морфизмами объекта $\alpha\colon \mathcal{D}(?, a) \to F$ в объект $\beta\colon \mathcal{D}(?, b) \to F$ являются морфизмы $f\colon a \to b$ категории $\mathcal{D}$, удовлетворяющие соотношению $\alpha = \beta \circ \mathcal{D}(?, f)$ (композиция этих морфизмов определяется очевидным образом). Пусть, далее,

$$d_F\colon \mathcal{D}/F \to \mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$$

— диаграмма, сопоставляющая объекту $\alpha\colon \mathcal{D}(?, a) \to F$ категории $\mathcal{D}/F$ представимый функтор $\mathcal{D}(?, a)$, а морфизму $f\colon \alpha \to \beta$ категории $\mathcal{D}/F$ — морфизм $\mathcal{D}(?, f)\colon \mathcal{D}(?, a) \to \mathcal{D}(?, b)$ категории $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$. Ясно, что морфизмы $\alpha\colon \mathcal{D}(?, a) \to F$ составляют прямой конус с базой d_F и конечной вершиной F. Поэтому они индуцируют некоторый морфизм $\alpha_F\colon \varinjlim d_F \to F$. Для завершения доказательства остается заметить, что этот морфизм очевидным образом обратим.

Пусть теперь F и G — произвольные функторы $\mathcal{D}^\circ \to \mathcal{E}ns$. Ясно, что каждый морфизм $\varphi\colon F \to G$ категории $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ индуцирует некоторый функтор

$$\mathcal{D}/\varphi\colon \mathcal{D}/F \to \mathcal{D}/G,$$

сопоставляющий объекту $\alpha\colon \mathcal{D}(?, a) \to F$ категории $\mathcal{D}/F$ объект $\varphi \circ \alpha\colon \mathcal{D}(?, a) \to G$ категории $\mathcal{D}/G$ и являющийся на множестве $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}/F}(\alpha, \beta) \subset \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(a, b)$ вложением этого множества в множество $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}/G}(\varphi \circ \alpha, \varphi \circ \beta) \subset \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(a, b)$. Этот функтор переводит, очевидно, диаграмму d_F в диаграмму d_G (т. е. удовлетворяет соотношению $d_F = d_G \circ \mathcal{D}/\varphi$) и потому индуцирует морфизм функторов

$$l_\varphi\colon \varinjlim d_F \to \varinjlim d_G.$$

Без труда проверяется, что соответствия $F \rightsquigarrow \varinjlim d_F$ и $\varphi \rightsquigarrow l_\varphi$ составляют некоторый функтор (из $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ в $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$), причем для любого морфизма $\varphi: F \to G$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim d_F & \xrightarrow{l_\varphi} & \varinjlim d_G \\ {\scriptstyle\alpha_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_G} \\ F & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

Это означает, что

изоморфизмы α_F *составляют морфизм функтора* $F \rightsquigarrow \varinjlim d_F$ *в тождественный функтор* $F \rightsquigarrow F$.

В этом смысле построенное нами представление функторов $F: \mathcal{D}^\circ \to \mathfrak{Ens}$ в виде прямого предела представимых функторов $\mathcal{D}(?, a)$ *согласовано с функторными морфизмами* $\varphi: F \to G$.

1.2. Пусть снова F — произвольный функтор $\mathcal{D}^\circ \to \mathfrak{Ens}$. Обозначая для любого объекта β категории $\mathcal{D}/F$ символом $\mathcal{D}(?, b)_\beta$ его область определения, введем в рассмотрение прямую сумму F_0 всевозможных функторов вида $\mathcal{D}(?, b)_\beta$, $\beta \in \mathfrak{Ob}\, \mathcal{D}/F$. Аналогично, обозначая для любого морфизма $f: \alpha \to \beta$ категории $\mathcal{D}/F$ символом $\mathcal{D}(?, a)_f$ область определения морфизма α, введем в рассмотрение прямую сумму F_1 всевозможных функторов вида $\mathcal{D}(?, a)_f$, $f \in \mathfrak{Ar}\, \mathcal{D}/F$. Пусть in_f и in_β — канонические инъекции объектов $\mathcal{D}(?, a)_f$ и $\mathcal{D}(?, b)_\beta$ в объекты F_1 и F_0 соответственно. Ясно, что соотношения

$$d_0 \circ \mathrm{in}_f = \mathrm{in}_\beta \circ \mathcal{D}(?, f), \quad d_1 \circ \mathrm{in}_f = \mathrm{in}_\beta$$

однозначно определяют некоторые морфизмы функторов d_0, d_1: $F_1 \to F_0$. При этом без труда проверяется, что

коядром пары $d_0, d_1: F_1 \rightrightarrows F_0$ *служит функтор* $\varinjlim d_F \approx F$.

Таким образом, для любого функтора $F: \mathcal{D}^\circ \to \mathfrak{Ens}$ имеет место «точная последовательность»

$$F_1 \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} F_0 \to F.$$

Мы будем говорить, что эта последовательность осуществляет *каноническое представление* функтора F (ср. Бурбаки «Коммутативная алгебра», 1.2.8). Можно считать, что функтор F «склеивается» из представимых функторов $\mathcal{D}(?, b)_\beta$; соотношения склеивания задаются при этом представимыми функторами $\mathcal{D}(?, a)_f$, а также морфизмами d_0 и d_1.

1.3. Предложение. *Если категория* $\mathcal{C}$ *допускает прямые пределы, то для любого функтора* $G: \mathcal{D}^\circ\mathfrak{Ens} \to \mathcal{C}$ *следующие утверждения равносильны:*

(i) *функтор* G *перестановочен с прямыми пределами;*

(ii) *функтор G сопряжен слева с некоторым функтором*

$$D\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns.$$

При этом функтор $G \rightsquigarrow G \circ h^{\mathcal{D}}$ определяет эквивалентность полной подкатегории категории $\mathcal{H}om(\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns, \mathcal{C})$, порожденной функторами G, перестановочными с прямыми пределами, с категорией $\mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{C})$.

Таким образом, каждый функтор H из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$ определяет пару сопряженных функторов $G\colon \mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns \to \mathcal{C}$ и $D\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$, причем $G \circ h^{\mathcal{D}} = H$.

Доказательство. Тот факт, что любой сопряженный слева функтор перестановочен с прямыми пределами, имеет общий характер (см. Глоссарий). Обратно, пусть G — произвольный функтор из $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ в $\mathcal{C}$, перестановочный с прямыми пределами, и пусть $D\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ — функтор $c \rightsquigarrow h_c^{\mathcal{C}} \circ G \circ h^{\mathcal{D}}$, так что $D(c)\colon a \rightsquigarrow \mathcal{C}(G(h_a^{\mathcal{D}}), c)$. Покажем, что этот функтор сопряжен справа с функтором G, причем соответствующий изоморфизм сопряжения

$$\varphi(f, c)\colon \mathcal{C}(Gf, c) \to \mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns(f, Dc)$$

определяется как морфизм, переводящий произвольный морфизм $\eta\colon Gf \to c$ категории $\mathcal{C}$ в морфизм $f \to Dc$ категории $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$, который для любого объекта a категории $\mathcal{D}$ отображает произвольный элемент $\lambda \in f(a)$ в композицию

$$G(h_a^{\mathcal{D}}) \xrightarrow{G(\alpha)} Gf \xrightarrow{\eta} c,$$

где α — морфизм, соответствующий элементу λ при канонической биекции множества $f(a)$ на множество $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns(h_a^{\mathcal{D}}, f)$ (ясно, что указанная композиция представляет собой элемент множества $(Dc)(a)$).

Если функтор f имеет вид $h_b^{\mathcal{D}}$, то множество $\mathcal{C}(Gf, c)$, совпадает с множеством $(Dc)(b)$, а отображение $\varphi(f, c)$ является, как нетрудно видеть, канонической биекцией множества $(Dc)(b)$ на множество $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns(h_b^{\mathcal{D}}, Dc)$. Таким образом, если функтор f представим, то отображение $\varphi(f, c)$ биективно. Так как каждый объект категории $\mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns$ является прямым пределом представимых функторов, так как функторы $f \rightsquigarrow \mathcal{C}(Gf, c)$ и $f \rightsquigarrow \mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns(f, Dc)$ переводят прямые пределы в обратные и, наконец, так как отображение $\varphi(f, c)$ функториально по f, то отображение $\varphi(f, c)$ биективно для всех f. Следовательно, функторы G и D сопряжены.

Для завершения доказательства предложения нам осталось, таким образом, лишь показать, что функтор $G \rightsquigarrow G \circ h^{\mathcal{D}}$ является эквивалентностью, и потому, в частности, каждый функтор $G\colon \mathcal{D}^\circ\mathcal{E}ns \to \mathcal{C}$, перестановочный с прямыми пределами, определяется своими значениями на представимых функторах. С этой целью мы каждому функтору $H:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ отнесем функтор $H':\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns\to\mathcal{C}$, сопоставляющий произвольному объекту $F:\mathcal{D}^{\circ}\to\mathcal{E}ns$ категории $\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns$ прямой предел функтора

$$H_F\colon (\mathcal{D}(?,a)\xrightarrow{\alpha}F)\rightsquigarrow Ha,$$

определенного на категории $\mathcal{D}/F$ и принимающего значения в категории $\mathcal{C}$. Для любого морфизма функторов $\varphi:F\to G$ морфизмом $H'\varphi$ является канонический морфизм

$$\varinjlim \mathcal{D}/\varphi\colon \varinjlim H_F\to\varinjlim H_G$$

(заметим, что $H_F=H_G\circ(\mathcal{D}/\varphi)$). Читатель самостоятельно без труда проверит, что функторы $G\rightsquigarrow G\circ h^{\mathcal{D}}$ и $H\rightsquigarrow H'$ квазиобратны друг к другу.

1.4. Интересное применение доказанного предложения мы получим, выбрав и зафиксировав некоторый объект g категории $\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns$. Поскольку прямые пределы и произведения в категории $\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns$ вычисляются «поаргументно», ясно, что функтор $?\times g\colon f\rightsquigarrow f\times g$ из $\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns$ в $\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns$ перестановочен с прямыми пределами. Следовательно, этот функтор сопряжен слева с некоторым функтором $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns}(g,?)$ из $\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns$ в $\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns$. Согласно построению, изложенному при доказательстве предложения 1.3, для любого объекта h категории $\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns$ функтор $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns}(g,h)$ из $\mathcal{D}^{\circ}$ в $\mathcal{E}ns$ определяется соответствием

$$a\rightsquigarrow \mathcal{D}^{\circ}\mathcal{E}ns(h_a^{\mathcal{D}}\times g,h).$$

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

2.1. Пусть Δ — категория, объектами которой являются упорядоченные множества

$$[n]=\{0,1,2,\dots,n\},\qquad n\in\mathbb{N},$$

а морфизмами — неубывающие отображения. Особое значение в дальнейшем будут иметь следующие морфизмы этой категории:

$\partial_n^i\colon [n-1]\to[n]$ — возрастающее инъективное отображение, не принимающее значения $i\in[n]$;

$\sigma_n^i\colon [n+1]\to[n]$ — неубывающее надъективное отображение, дважды принимающее значение $i\in[n]$.

В случае когда недоразумения невозможны, мы вместо ∂_n^i и σ_n^i будем писать просто ∂^i и σ^i.

Без труда проверяется, что эти отображения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\partial^j_{n+1}\partial^i_n = \partial^i_{n+1}\partial^{j-1}_n, \quad \text{если } i<j,$$
$$\sigma^j_n\sigma^i_{n+1} = \sigma^i_n\sigma^{j+1}_{n+1}, \quad \text{если } i\leqslant j,$$
$$(*)\qquad \sigma^j_{n-1}\partial^i_n = \begin{cases} \partial^i_{n-1}\sigma^{j-1}_{n-2}, & \text{если } i<j, \\ \mathrm{Id}[n-1], & \text{если } i=j \text{ или } i=j+1, \\ \partial^{i-1}_{n-1}\sigma^j_{n-2}, & \text{если } i>j+1. \end{cases}$$

2.2. Лемма. *Любое невозрастающее отображение $\mu\colon[m]\to[n]$ единственным образом записывается в виде*

$$(**)\qquad \mu = \partial^{i_s}_n\partial^{i_{s-1}}_{n-1}\dots\partial^{i_1}_{n-s+1}\sigma^{j_t}_{m-t}\dots\sigma^{j_2}_{m-2}\sigma^{j_1}_{m-1},$$

где

$$n\geqslant i_s>\dots>i_1\geqslant 0,$$
$$0\leqslant j_t<\dots<j_1<m,$$
$$n=m-t+s.$$

Доказательство. Пусть $j_t<j_{t-1}<\dots<j_1$ — числа $j\in[m]$, для которых $\mu(j)=\mu(j+1)$, и пусть $i_1<i_2<\dots<i_s$ — значения $i\in[n]$, не принимаемые отображением μ. Тогда ясно, что соотношение $(**)$ выполнено. Обратно, если μ имеет вид $(**)$, то индексы i_k и j_l инвариантно характеризуются описанным способом.

Мы будем называть разложение $(**)$ отображения μ *каноническим*. Из леммы 2. 2 непосредственно вытекает, что

категорию Δ можно отождествить с категорией Δ', порожденной объектами $[n]$ и морфизмами ∂^i_n, σ^j_m, подчиненными соотношениям $(*)$.

Действительно, поскольку в категории Δ выполнены соотношения $(*)$, существует единственный функтор $\Delta'\to\Delta$, являющийся тождественным отображением на объектах и морфизмах ∂^i_n и σ^j_m. При этом, поскольку каждый морфизм категории Δ является композицией морфизмов ∂^i_n и σ^j_m, отображения $\Delta'([m],[n])\to\Delta([m],[n])$ надъективны. Покажем, что эти отображения и инъективны.

Пусть морфизмы $\mu,\nu\colon[m]\to[n]$ категории Δ' имеют один и тот же образ в категории Δ. Поскольку соотношения $(*)$ выполнены в категории Δ', легко видеть, что морфизмы μ и ν обладают в Δ' разложениями вида $(**)$ (единственность этих разложений не предполагается). При отображении $\Delta'\to\Delta$ эти разложения переходят в канонические разложения образов морфизмов μ и ν. Поскольку эти образы совпадают, рассматриваемые разложения также совпадают. Следовательно, $\mu=\nu$.

2.3. Эпиморфизмами $p\colon [m]\to[n]$ категории Δ являются неубывающие надъективные отображения. Поэтому любой такой эпиморфизм обладает сечением, т. е. для него существует такой морфизм $s\colon [n]\to[m]$, что $p\circ s=\operatorname{Id}[n]$. Аналогично, мономорфизмами $s\colon [n]\to[m]$ категории Δ являются возрастающие инъективные отображения, и потому любой такой мономорфизм обладает ретракцией, т. е. для него существует такой морфизм $p\colon [m]\to[n]$, что $p\circ s=\operatorname{Id}[n]$.

2.4. Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная категория. *Симплициальным* (соответственно *косимплициальным) объектом категории* $\mathscr{C}$ называется произвольный функтор $X\colon \Delta^\circ\to\mathscr{C}$ (соответственно функтор $Y\colon \Delta\to\mathscr{C}$). Морфизмами симплициальных (косимплициальных) объектов считаются соответствующие функторные морфизмы.

Образ объекта $[n]$ категории Δ° (соответственно Δ) при функторе X (соответственно Y) мы будем обозначать символом X_n (соответственно Y^n) и будем называть его *n-м слоем* симплициального объекта X (косимплициального объекта Y). Аналогично, морфизмы $X(\partial_n^i)$ и $X(\sigma_m^j)$ (соответственно $Y(\partial_n^i)$ и $Y(\sigma_m^j)$) мы будем обозначать символами ${}_Xd_i^n$ и ${}_Xs_j^m$ или просто d_i и s_j (соответственно символами ${}^Y\partial_n^i$ и ${}^Y\sigma_m^j$ или просто ∂^i и σ^j). Морфизмы d_i и ∂^i мы будем называть *операторами граней*, а морфизмы s_j и σ^j — *операторами вырождения*. Ясно, что соотношения (*) остаются верными при замене морфизмов ∂_n^i и σ_m^j морфизмами ${}^Y\partial_n^i$ и ${}^Y\sigma_m^j$ (и при замене морфизма $\operatorname{Id}[n-1]$ морфизмом $\operatorname{Id}Y^n$). Кроме того, поскольку категория Δ полностью определяется объектами $[n]$, морфизмами ∂_n^i, σ_m^j и соотношениями (*), каждый косимплициальный объект Y полностью определяется объектами Y^n и морфизмами ∂^i, σ^j, удовлетворяющими соотношениям (*). Для любых двух косимплициальных объектов Y и Z каждый морфизм $f\colon Y\to Z$ представляет собой последовательность морфизмов $f^n\colon Y^n\to Z^n$ категории $\mathscr{C}$, удовлетворяющих для любых n и i соотношениям

$$ {}^Z\partial_n^i\circ f^{n-1}=f^n\circ{}^Y\partial_n^i,\quad {}^Z\sigma_n^i\circ f^{n+1}=f^n\circ{}^Y\sigma_n^i. $$

Аналогично, морфизмы d_i и s_j удовлетворяют следующим соотношениям, двойственным к соотношениям (*):

$$ d_i^n d_j^{n+1}=d_{j-1}^n d_i^{n+1},\quad \text{если } i<j, $$

$$ s_i^{n+1} s_j^n=s_{j+1}^{n+1} s_i^n,\quad \text{если } i\leqslant j, $$

(***)

$$ d_i^n s_j^{n-1}=\begin{cases} s_{j-1}^{n-2} d_i^{n-1}, & \text{если } i<j,\\ \operatorname{Id}X_{n-1}, & \text{если } i=j \text{ или } i=j+1,\\ s_j^{n-2} d_{i-1}^{n-1}, & \text{если } i>j+1. \end{cases} $$

При этом каждый симплициальный объект X полностью определяется объектами X_n и морфизмами d_i, s_j, удовлетворяющими соотношениям (***). Кроме того, для любых двух симплициальных объектов X и T каждый морфизм $g\colon X \to T$ представляет собой последовательность морфизмов $g_n\colon X_n \to T_n$ категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющих для любых n и i соотношениям

$$ {}_T d_i^n \circ g_n = g_{n-1} \circ {}_X d_i^n, \quad {}_T s_i^n \circ g_n = g_{n+1} \circ {}_X s_i^n. $$

2.5. Симплициальные объекты категории множеств $\mathcal{E}ns$ называются *симплициальными множествами*. Категория всех симплициальных множеств в соответствии с общими обозначениями Глоссария обозначается символом $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$. Особое значение для нас будут иметь симплициальные множества $\Delta(?, [n])\colon [p] \rightsquigarrow \Delta([p], [n])$. Эти множества мы будем обозначать символами $\Delta[n]$ и называть *стандартными n-мерными симплексами*.

Стандартный нульмерный симплекс $\Delta[0]$ мы будем также называть *симплициальной точкой*, а стандартный одномерный симплекс $\Delta[1]$ — *симплициальным отрезком*.

Каждый морфизм $\mu\colon [n] \to [m]$ категории Δ определяет (см. Глоссарий) некоторый морфизм

$$ \Delta(?, \mu)\colon \Delta[n] \to \Delta[m]. $$

Этот морфизм мы будем обозначать символом $\Delta(\mu)$.

Для произвольного симплициального множества X элементы множества X_n называются *n-мерными симплексами множества* X (при $n = 0$ они называются также *вершинами*, а при $n = 1$ — *ребрами*). В частности, тождественное отображение $\mathrm{Id}[n]$ является n-мерным симплексом симплициального множества $\Delta[n]$. Этот симплекс называется *фундаментальным симплексом* множества $\Delta[n]$. Мы знаем (см. Глоссарий, Представимые функторы), что для любого симплекса $x \in X_n$ существует один и только один морфизм из $\Delta[n]$ в X, отображающий фундаментальный симплекс $\mathrm{Id}[n]$ в x. Этот морфизм обозначается символом

$$ \widetilde{x}\colon \Delta[n] \to X $$

и называется *сингулярным n-мерным симплексом, ассоциированным с симплексом* x. Таким образом, между сингулярными симплексами симплициального множества X (т. е. всевозможными морфизмами вида $\Delta[n] \to X$) и симплексами этого множества имеется естественное биективное соответствие.

Симплициальным подмножеством симплициального множества X называется произвольный его «подфунктор» Y. По определению это означает, что для любого n множество Y_n является подмножеством множества X_n и операторы граней и вырождения множества Y индуцируются операторами граней и вырождения множества X.

Аналогично, *симплициальным фактормножеством* симплициального множества X называется такое симплициальное множество Y, что для любого n множество Y_n является фактормножеством множества X_n и операторы граней и вырождения множества Y индуцируются соответствующими операторами множества X.

В соответствии с общими результатами п. 1.1

категория $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ допускает прямые и обратные пределы, вычисляемые «послойно».

В частности, для любых симплициальных множеств X и Y определено их *(прямое) произведение* $X \sqcap Y = X \times Y$ (причем $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$) и их *(прямая) сумма* $X \sqcup Y$ (причем $(X \sqcup Y)_n = X_n \sqcup Y_n$).

Примеры симплициальных множеств

2.5.1. *Множество I_n.* Это симплициальное множество определяется как прямой предел диаграммы

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\Delta[1] & & \Delta[1] & & {} & \cdots & {} & & \Delta[1] \\
& \Delta[0] \arrow[ul, "\Delta(\partial^0)"'] \arrow[ur, "\Delta(\partial^0)"'] & & \Delta[0] \arrow[ul, "\Delta(\partial^1)"] \arrow[ur, "\Delta(\partial^1)"'] & & & & \Delta[0] \arrow[ul, "\Delta(\partial^e)"] \arrow[ur, "\Delta(\partial^e)"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой стандартный симплекс $\Delta[1]$ повторен n раз и где e равно нулю при n четном и единице при n нечетном.

В частности, $I_1 = \Delta[1]$. В явном виде множества I_n при $n > 1$ мы опишем ниже.

2.5.2. *Симплициальная окружность* Ω по определению представляет собой коядро пары морфизмов

$$\Delta(\partial^0),\ \Delta(\partial^1)\colon \Delta[0] \rightrightarrows \Delta[1].$$

2.5.3. Для любых симплициальных множеств X и Y мы будем символом $\mathcal{H}om(X, Y)$ обозначать симплициальное множество $[n] \rightsquigarrow \Delta^\circ \mathcal{E}ns(\Delta[n] \times X, Y)$ (см. п. 1.4). Согласно п. 1.4, для любых трех симплициальных множеств X, Y и Z имеет место изоморфизм

$$\varphi\colon \Delta^\circ \mathcal{E}ns(X \times Y, Z) \xrightarrow{\approx} \Delta^\circ \mathcal{E}ns(X, \mathcal{H}om(Y, Z)),$$

функториальный по X, Y и Z. В частности, для всех натуральных n имеют место изоморфизмы

$$\varphi_n\colon \Delta^\circ \mathcal{E}ns(\Delta[n] \times X \times Y, Z) \xrightarrow{\approx} \Delta^\circ \mathcal{E}ns(\Delta[n] \times X, \mathcal{H}om(Y, Z)),$$

составляющие функторный изоморфизм

$$\Phi: \mathcal{H}om(X \times Y, Z) \xrightarrow{\approx} \mathcal{H}om(X, \mathcal{H}om(Y, Z)).$$

§ 3. ОСТОВЫ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

3.1. Определение. Пусть X — произвольное симплициальное множество. Симплекс $x \in X_m$ этого множества называется *вырожденным*, если существует такой эпиморфизм $s: [m] \to [n]$, где $n < m$, и такой n-мерный симплекс y, что

$$x = X(s)\, y.$$

Предложение (лемма Эйленберга — Зильбера). *Для любого m-мерного симплекса x симплициального множества X существует такой эпиморфизм s: $[m] \to [n]$, $n \leqslant m$, и такой невырожденный n-мерный симплекс y, что $x = X(s)\, y$. Пара (s, y) этими условиями определяется однозначно.*

Доказательство (по Эйленбергу и Зильберу). Существование эпиморфизма s и симплекса y очевидно. Пусть наряду с парой (s, y) условиям леммы удовлетворяет также пара (s', y'), и пусть σ и σ' — сечения эпиморфизмов s и s'. Тогда

$$x = X(s)\, y, \qquad x = X(s')\, y',$$
$$y = X(\sigma)\, x, \qquad y' = X(\sigma')\, x,$$

и потому

$$y = X(\sigma)\, X(s')\, y' = X(s'\sigma)\, y'.$$

Поскольку симплекс y невырожден, последнее равенство возможно только тогда, когда отображение $s'\sigma$ мономорфно. Поэтому если $[n]$ и $[n']$ — области значений отображений s и s', то должно иметь место неравенство $n' \geqslant n$. Но роли n и n' совершенно симметричны, так что должно иметь место и неравенство $n \geqslant n'$. Следовательно, $n' = n$, и потому отображение $s'\sigma$ является возрастающей биекцией, т. е. тождественным отображением, множества $[n]$. Поэтому $y = y'$. Кроме того, изложенное рассуждение показывает, что любое сечение σ отображения s является также сечением отображения s'. Поэтому $s = s'$.

Значение леммы Эйленберга — Зильбера состоит в том, что она позволяет существенно упростить задание многих конкретных симплициальных множеств. Именно, согласно этой лемме, для полного описания некоторого симплициального множества X достаточно задать его невырожденные симплексы и действия на этих симплексах операторов граней. Все остальные симплексы будут находиться тогда во взаимно однозначном соответствии с парами вида (s, y), и действия операторов граней и вырождения на этих симплексах будут определяться соотношениями (***) и действиями операторов граней на невырожденных симплексах.

Например, построенное в п. 2.5.1 симплициальное множество I_n может быть описано, как легко видеть, следующим образом:

1) его невырожденными симплексами являются $n+1$ вершин, скажем $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, и n ребер, скажем $\tau_1, \ldots, \tau_n$;

2) операторы граней на симплексах $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ действуют по формулам

$$\partial_0\tau_1 = \sigma_0,\ \partial_0\tau_2 = \sigma_2, \ldots, \partial_0\tau_n = \begin{cases} \sigma_n, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \sigma_{n-1}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

$$\partial_1\tau_1 = \sigma_1,\ \partial_1\tau_2 = \sigma_1, \ldots, \partial_1\tau_n = \begin{cases} \sigma_{n-1}, & \text{если } n \text{ четно.} \\ \sigma_n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

Таким образом,«геометрически» симплициальное множество I_n представляет собой n-звенную ломаную.

Аналогично, симплициальная окружность Ω (см.п.2.5.2) содержит только два невырожденных симплекса: одну вершину σ и одно ребро τ, причем

$$\partial_0\tau = \partial_1\tau = \sigma.$$

3.2. Интересное применение леммы Эйленберга—Зильбера возникает в связи с диаграммами вида

$$\begin{array}{ccc} [m] & \xrightarrow{s} & [n] \\ {\scriptstyle s'}\big\downarrow & & \\ [n'] & & \end{array}$$

где s и s' — произвольные эпиморфизмы категории Δ. Ясно, что для любой такой диаграммы в категории Δ существует амальгама $[n'] \overset{s,s'}{\sqcup} [n]$. Покажем, что функтор $h^\Delta\colon \Delta \to \Delta^\circ \mathcal{E}ns$ перестановочен с такого рода амальгамами, т. е. что *симплициальное множество* $\Delta([n'] \overset{s,s'}{\sqcup} [n])$ *является амальгамой диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} \Delta[m] & \xrightarrow{\Delta(s)} & \Delta[n] \\ {\scriptstyle \Delta(s')}\big\downarrow & & \\ \Delta[n'] & & \end{array}$$

Действительно, пусть $\widetilde{y}\colon \Delta[n] \to X$ и $\widetilde{y}'\colon \Delta[n'] \to X$ — такие сингулярные симплексы некоторого симплициального множества X, что $\widetilde{y} \circ \Delta(s) = \widetilde{y}' \circ \Delta(s')$, и пусть $y \in X_n$ и $y' \in X_{n'}$ — симплексы, ассоциированные с сингулярными симплексами $\widetilde{y}$ и $\widetilde{y}'$. Тогда $X(s)\,y = X(s')\,y'$. Согласно лемме Эйленберга — Зильбера, существуют такие эпиморфизмы $t\colon [n] \to [p]$ и $t'\colon [n'] \to [p']$ и такие невырожденные симплексы $z \in X_p$ и $z' \in X_{p'}$, что $y = X(t)\,z$ и $y' = X(t')\,z'$. Тогда $X(ts)\,z = X(t's')\,z'$, и потому, ввиду единственности, $ts = t's'$ и $z = z'$. Следовательно, $\widetilde{y} = \widetilde{z} \circ \Delta(t)$ и $\widetilde{y}' = \widetilde{z} \circ \Delta(t')$, где $\widetilde{z}$ — сингулярный симплекс, ассоциированный с симплексом z. С другой стороны, из равенства $ts = t's'$ вытекает существование такого морфизма $r\colon [n'] \overset{s,s'}{\sqcup} [n] \to [p]$, что $t = r \circ \mathrm{in}_2$ и $t' = r \circ \mathrm{in}_1$, где in_1 и in_2 — канонические инъекции объектов $[n']$ и $[n]$ в амальгаму $[n'] \overset{s,s'}{\sqcup} [n]$. Следовательно, $\widetilde{y} = \widetilde{z} \circ \Delta(r) \circ \Delta(\mathrm{in}_2)$ и $\widetilde{y}' = \widetilde{z} \circ \Delta(r) \circ \Delta(\mathrm{in}_1)$, чем доказано, что морфизмы $\widetilde{y}$ и $\widetilde{y}'$ могут быть пропущены через $\Delta([n'] \overset{s,s'}{\sqcup} [n])$. То, что это может быть сделано только единственным образом, немедленно вытекает из существования для инъекции in_1, являющейся, очевидно, эпиморфизмом категории Δ, некоторого сечения. Действительно, тогда сечением обладает и морфизм $\Delta(\mathrm{in}_1)$, и, следовательно, этот морфизм является эпиморфизмом категории Δ.

3.3. Укажем еще одно применение леммы Эйленберга — Зильбера, относящееся к полной подкатегории $\underset{n}{\Delta}$ категории Δ, порожденной всеми объектами $[p]$, для которых $p \leqslant n$. Каждый функтор $Y\colon \underset{n}{\Delta}^\circ \to \mathscr{E}ns$ однозначно определяется множествами $Y([p])$, которые мы также будем обозначать через Y_p, и отображениями $Y(\partial_p^i)$, $Y(\sigma_{p-1}^j)$, $p \leqslant n$, обозначаемыми также через ${}_Yd_i^p$, ${}_Ys_j^{p-1}$ или d_i, s_j. Такого рода функторы называются *срезанными симплициальными множествами высоты* n. Функтор вложения $I_n\colon \underset{n}{\Delta} \to \Delta$ индуцирует функтор ограничения $R_n\colon \Delta^\circ\mathscr{E}ns \to \underset{n}{\Delta}^\circ\mathscr{E}ns$, который каждому симплициальному множеству X сопоставляет срезанное симплициальное множество $Y = R_nX$, определенное формулами

$$Y_p = X_p, \quad {}_Yd_i^p = {}_Xd_i^p, \quad {}_Ys_j^{p-1} = {}_Xs_j^{p-1}, \quad p \leqslant n.$$

Поскольку p-мерные симплексы можно отождествлять с p-мерными сингулярными симплексами, функтор R_n отождествляется с функтором

$$X \rightsquigarrow \underset{n}{\Delta}^\circ\mathscr{E}ns\,(\Delta[?],\ X),$$

где $?$ принимает все значения $p \leqslant n$. Этот функтор сопряжен справа с некоторым функтором $G_n\colon \underset{n}{\Delta}^\circ\mathscr{E}ns \to \Delta^\circ\mathscr{E}ns$, перестановочным с прямыми пределами и для любого $p \leqslant n$ сопоставляющим срезанному стандартному симплексу $\underset{n}{\Delta}[p]$ стандартный симплекс $\Delta[p]$.

Чтобы описать симплициальное множество G_nY для произвольного срезанного симплициального множества Y, мы рассмотрим (ср. п. 1.1 и 1.3) на категории $\underset{n}{\Delta}/Y$ следующие функторы:

$$d_Y: (\underset{n}{\Delta}[p] \xrightarrow{\beta} Y) \rightsquigarrow \underset{n}{\Delta}[p],$$

$$d_Y^n: (\underset{n}{\Delta}[p] \xrightarrow{\beta} Y) \rightsquigarrow \Delta[p],$$

$$(d_Y^n)_q: (\underset{n}{\Delta}[p] \xrightarrow{\beta} Y) \rightsquigarrow \Delta[p]_q.$$

Согласно п. 1.1, имеет место обратимый морфизм $\alpha_Y: \varinjlim d_Y \to Y$. Поэтому симплициальное множество G_nY можно отождествить с пределом $\varinjlim d_Y^n$, а его q-й слой $G_n(Y)_q$ — с пределом $\varinjlim (d_Y^n)_q$.

Поскольку при $q < n$ имеет место, очевидно, равенство $\varinjlim (d_Y^n)_q = (\varinjlim d_Y)_q$, множество R_nG_nY совпадает с пределом $\varinjlim d_Y$. Поэтому за морфизм сопряжения $\Psi_nY: Y \to R_nG_nY$ мы можем принять морфизм α_Y^{-1}, обратный к морфизму α_Y. Поскольку морфизм Ψ_n обратим, *функтор* G_n *вполне инъективен* (см. предложение 1.3 гл. I).

3.4. Рассмотрим теперь морфизм сопряжения $\Phi_n: G_nR_n \to \to \mathrm{Id}(\Delta^\circ\mathcal{E}ns)$, квазиобратный к морфизму Ψ_n.

Предложение. *Морфизм* Φ_n *является мономорфизмом, т. е. для любого симплициального множества* X *и любого натурального числа* $p \in \mathbf{N}$ *отображение* $(\Phi_nX)_p: (G_nR_nX)_p \to X_p$ *инъективно.*

Доказательство. По определению отображение $R_n\Phi_nX$ является ретракцией отображения Ψ_nR_nX. Следовательно, поскольку морфизм Ψ_n обратим, морфизм $R_n\Phi_n$ также обратим, и поэтому для любого $p \leqslant n$ отображение $(\Phi_nX)_p$ биективно. С другой стороны, согласно сказанному выше, симплициальное множество $Z = G_nR_nX$ является прямым пределом функтора

$$(\Delta_n[p] \xrightarrow{\beta} R_nX) \rightsquigarrow \Delta[p]$$

из $\underset{n}{\Delta}/R_nX$ в $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$. В частности, это означает, что множество Z является фактормножеством прямой суммы некоторого числа стандартных симплексов $\Delta[p]$ с $p \leqslant n$. Но при $q > n$ все q-мерные симплексы каждого из симплексов $\Delta[p]$ вырождены; поэтому вырождены и все q-мерные симплексы множества Z. Следовательно, для доказательства нашего предложения нам достаточно показать, что

если морфизм $\psi: Z \to X$ симплициальных множеств обладает тем свойством, что для любого $p \leqslant n$ отображение ψ_p инъективно, и если для любого $q > n$ все q-мерные симплексы множества Z вырожденны, то отображения ψ_p инъективны для всех p.

Рассмотрим произвольные q-мерные ($q > n$) симплексы z и z' множества Z. Согласно лемме Эйленберга — Зильбера, существуют такие эпиморфизмы $s:[q] \to [p]$ и $s':[q] \to [p']$ и такие невырожденные симплексы x и x', что $z = Z(s)x$ и $z' = Z(s')x'$. При этом заведомо $p, p' \leqslant n$. Так как при $r \leqslant n$ отображения ψ_r инъективны, то симплексы $\psi_p(x)$ и $\psi_{p'}(x')$ невырожденны (если, например, $\psi_p(x) = X(t)y$, где t — эпиморфизм, то $y = X(u)\psi_p(x)$, где u — сечение эпиморфизма t и, следовательно, $\psi_p(x) = \psi_p(Z(t)Z(u)\,x)$, т. е. $x = Z(t)Z(u)\,x$) и потому пары $(s, \psi_p(x))$ и $(s', \psi_{p'}(x'))$ представляют собой «разложения Эйленберга — Зильбера» симплексов $\psi_q(z)$ и $\psi_q(z')$. Следовательно, если $\psi_q(z) = \psi_q(z')$, то $s = s'$, $p = p'$, $x = x'$ и потому $z = z'$. Тем самым наше предложение полностью доказано.

3.5. Определение. Для любого симплициального множества X его *n-мерным остовом* $\mathrm{Sk}^n X$ называется такое его симплициальное подмножество Y, что при любом p множество Y_p состоит из всех симплексов, являющихся вырождениями q-мерных симплексов с $q \leqslant n$ (иными словами, Y_p состоит из всех симплексов $x \in X_p$, имеющих вид $X(s)y$, где $s:[p] \to [q]$ — некоторый эпиморфизм (причем $q \leqslant n$), а y — некоторый q-мерный симплекс множества X).

Следствие 1. *Для любого симплициального множества X отображение $\Phi_n X$: $G_n R_n X \to X$ индуцирует изоморфизм симплициального множества $G_n R_n X$ на n-мерный остов $\mathrm{Sk}^n X$ множества X.*

Доказательство. Мы уже знаем, что для любого p отображение $(\Phi_n X)_p$ инъективно. С другой стороны, каждый симплекс множества $G_n R_n X$ является вырождением некоторого p-мерного симплекса с $p \leqslant n$. Тем же свойством обладает, следовательно, и образ множества $G_n R_n X$ при отображенни $\Phi_n X$, который содержится поэтому в остове $\mathrm{Sk}^n X$ множества X. Наконец, так как при $q \leqslant n$ отображение $(\Phi_n X)_q$ биективно, то любой q-мерный симплекс y из X является образом некоторого симплекса $z \in (G_n R_n X)_q$. Следовательно, для любого эпиморфизма $s:[p] \to [q]$

симплекс $X(s)y$ является образом соответствующего вырождения симплекса z. Поэтому отображение $(\Phi_n X)_p: (G_n R_n X)_p \to (\mathrm{Sk}^n X)_p$ надъективно.

3.6. Мы будем говорить, что симплициальное множество X *имеет размерность*, не превосходящую n, если оно совпадает со своим n-мерным остовом. В этом случае множество X изоморфно множеству $G_n R_n X$ и, следовательно, является фактормножеством прямой суммы некоторого числа стандартных симплексов $\Delta[p]$, где $p \leqslant n$. Обратное утверждение также, очевидно, верно, так что справедливо

Следствие 2. *Функторы G_n и R_n определяют эквивалентность между категорией срезанных симплициальных множеств высоты n и полной подкатегорией категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$, состоящей из всех симплициальных множеств размерности $\leqslant n$.*

Пусть Y — симплициальное подмножество множества X, y — некоторый его p-мерный симплекс и (s, z) — разложение Эйленберга — Зильбера симплекса y в множестве X. Так как $z = X(\sigma)y$, где σ — произвольное сечение эпиморфизма s, то симплекс y лежит в Y, так что *пара (s, y) является разложением Эйленберга — Зильбера симплекса y и в подмножестве Y.*

В частности, отсюда следует, что если множество X имеет размерность $\leqslant n$, то тем же свойством обладает и любое его подмножество Y. При этом соответствие $Y \rightsquigarrow R_n Y$ между симплициальными подмножествами множества X и симплициальными подмножествами множества $R_n X$ биективно.

Рассмотрим, например, множество $X = \Delta[n]$. Ясно, что фундаментальный симплекс множества $\Delta[n]$ является его единственным невырожденным симплексом размерности n. Поскольку, с другой стороны, фундаментальный симплекс «порождает» множество $\Delta[n]$, отсюда следует, что множество $\Delta[n]$ имеет размерность n и каждое его собственное подмножество содержится в его $(n-1)$-мерном остове $\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta[n]$. Последний остов обыкновенно обозначается символом $\dot{\Delta}[n]$ и называется *границей* стандартного n-мерного симплекса $\Delta[n]$.

3.7. Рассмотрим теперь произвольное симплициальное фактормножество Y множества X, т.е. (ср.п.2.5) симплициальное множество, каждый слой Y_p которого является фактормножеством слоя X_p по некоторому отношению эквивалентности R_p, обладающему тем свойством, что для любого морфизма $f\colon [p] \to [q]$ категории Δ из соотношения $x \underset{R_q}{\sim} y$ вытекает соотношение

$$X(f)\, x \underset{R_p}{\sim} X(f)\, y.$$

Если множество X имеет размерность $\leqslant n$, то тем же свойством обладает и множество Y, причем в этом случае функтор $Y \rightsquigarrow R_n Y$ определяет биективное отображение множества всех симплициальных фактормножеств множества X на множество всех симплициальных фактормножеств множества $R_n X$.

Симплициальное множество X называется множеством *конечного типа*, если оно изоморфно фактормножеству прямой суммы некоторого конечного семейства стандартных симплексов. Иначе это означает, что множество X имеет конечную размерность и каждый его слой X_p состоит из конечного числа симплексов. При достаточно большом n фактормножества такого множества X находятся во взаимно однозначном соответствии с фактормножествами множества $R_n X$. Но множества $(R_n X)_p$ конечны и их конечное число. Следовательно, число симплициальных фактормножеств множества $R_n X$, а потому и множества X конечно. Аналогично показывается, что число симплициальных подмножеств множества X также конечно.

3.8. Произвольное симплициальное множество X является объединением своих остовов

$$\varnothing = \mathrm{Sk}^{-1} X \subset \mathrm{Sk}^0 X \subset \mathrm{Sk}^1 X \subset \ldots \subset \mathrm{Sk}^n X \subset \ldots .$$

Остов $\mathrm{Sk}^0 X$ имеет размерность 0 (или *дискретен*): он имеет те же вершины, что и множество X, и представляет собой прямую сумму некоторого семейства симплициальных точек $\Delta[0]$. Опишем в общем виде переход от остова $\mathrm{Sk}^{n-1} X$ к остову $\mathrm{Sk}^n X$. Пусть Σ^n — множество всех невырожденных n-мерных симплексов множества X. Рассмотрим семейство $(\Delta[n]_\sigma;\ \sigma \in \Sigma^n)$ стандартных n-мерных симплексов, снабженное индексами из множества Σ^n, и построим сингулярные симплексы $\tilde{\sigma}\colon \Delta[n]_\sigma \to X$, ассоциированные с симплексами $\sigma \in \Sigma^n$. Имеет место следующее

Предложение. *Для любого $n \geqslant 0$ квадрат*

$$\begin{array}{ccc}
\coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} \dot{\Delta}[n]_\sigma & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^{n-1} X \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \text{влож.}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \text{влож.}} \\
\coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} \Delta[n]_\sigma & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^n X
\end{array}$$

коуниверсален.

Доказательство. Согласно следствию 2 из п. 3.6, нам достаточно доказать, что для любого $p \leqslant n$ квадрат

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} (\dot{\Delta}[n]_\sigma)_p \arrow[r] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & (\mathrm{Sk}^{n-1}X)_p \arrow[d, "\text{влож.}"] \\ \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} (\Delta[n]_\sigma)_p \arrow[r] & (\mathrm{Sk}^n X)_p \end{tikzcd}$$

коуниверсален. При $p < n$ это очевидно, ибо в этом случае вертикальные стрелки являются биективными отображениями. При $p = n$ дополнение прямой суммы $\coprod_{\sigma \in \Sigma^n} (\dot{\Delta}[n])_p$ в прямой сумме $\coprod_{\sigma \in \Sigma^n} (\Delta[n])_p$ состоит из фундаментальных симплексов $\mathrm{Id}[n]_\sigma$, а дополнение слоя $(\mathrm{Sk}^{n-1})_p$ в слое $(\mathrm{Sk}^n X)_p$ — из всех невырожденных n-мерных симплексов множества X (т.е. является множеством Σ^n). Поэтому отображения $(\tilde{\sigma})_n$ индуцируют биективное отображение первого дополнения на второе. Следовательно, рассматриваемый квадрат коуниверсален и при $p = n$.

Наглядно доказанное предложение означает, что остов $\mathrm{Sk}^n X$ получается из остова $\mathrm{Sk}^{n-1} X$ «приклеиванием» некоторого числа стандартных симплексов $\Delta[n]$ по их границам $\dot{\Delta}[n]$.

3.9. В завершение этого параграфа опишем одно полезное представление симплициального множества $\dot{\Delta}[n]$. Рассмотрим диаграмму

$$(*) \qquad \coprod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \Delta[n-2]_{i,j} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{0 \leqslant i \leqslant n} \Delta[n-1]_i \xrightarrow{p} \Delta[n],$$

где $\Delta[n-1]_i$ и $\Delta[n-2]_{i,j}$ — попарно различные экземпляры симплексов $\Delta[n-1]$ и $\Delta[n-2]$ соответственно, морфизм p индуцирован морфизмами $\Delta(\partial_n^i)\colon \Delta[n-1]_i \to \Delta[n]$, а морфизмы u и v индуцированы морфизмами

$$\Delta(\partial_{n-1}^{j-1})\colon\ \Delta[n-2]_{i,j} \to \Delta[n-1]_i$$

и

$$\Delta(\partial_{n-1}^{i})\colon\ \Delta[n-2]_{i,j} \to \Delta[n-1]_j$$

соответственно. Без труда проверяется, что для любого q компонента

$$p_q\colon\ \coprod(\Delta[n-1]_i)_q \to \Delta[n]_q$$

морфизма p на q-м слое симплициального множества $\coprod \Delta[n-1]_i$ отображает этот слой на q-й слой $\dot{\Delta}[n]_q$ симплициального множества $\dot{\Delta}[n]$. Более того, эта компонента индуцирует биективное отображение коядра Coker (u_q, v_q) отображений u_q и v_q на слой $\dot{\Delta}[n]_q$. Следовательно,

морфизм p индуцирует изоморфизм коядра Coker (u, v) *морфизмов u и v на симплициальное множество* $\dot{\Delta}[n]$.

§ 4. СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА И КАТЕГОРИЯ КАТЕГОРИЙ

4.1. Из определения обратных пределов в категории $\mathcal{C}at$ немедленно следует, что функтор $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ из $\mathcal{C}at$ в $\mathcal{E}ns$ перестановочен с обратными пределами. Этот факт можно также установить, заметив, что указанный функтор сопряжен справа с функтором $\mathrm{Dis}\colon \mathcal{E}ns \to \mathcal{C}at$, сопоставляющим произвольному множеству A категорию $\mathrm{Dis}\, A$, объектами которой являются элементы множества A и в которой нет никаких морфизмов, кроме тождественных (категории такого рода называются *дискретными*).

Пусть $\mathcal{O}r$ — категория упорядоченных множеств (с невозрастающими отображениями в качестве морфизмов), и пусть $i\colon \mathcal{O}r \to \mathcal{C}at$ — функтор, сопоставляющий каждому упорядоченному множеству A категорию iA, для которой $\mathfrak{Ob}\, iA = A$, а $\mathfrak{Ar}\, iA$ представляет собой подмножество квадрата $A \times A$, состоящее из всех пар (a, b) с $b \leqslant a$. Отображениями $\mathfrak{d}_{iA}$ и $\mathfrak{r}_{iA}$ являются по определению ограничения проекций pr_1 и pr_2 квадрата $A \times A$ на множество A, а композиция морфизмов определяется формулой $(a, b) \circ (b, c) = (a, c)$.

Пусть H — ограничение функтора i на категории Δ (содержащейся, очевидно, в категории $\mathcal{O}r$). Согласно предложению 1.3, примененному к категориям $\mathcal{D} = \Delta$ и $\mathcal{C} = \mathcal{C}at$, функтор H определяет пару сопряженных функторов

$$G\colon \Delta^\circ \mathcal{E}ns \to \mathcal{C}at, \quad D\colon \mathcal{C}at \to \Delta^\circ \mathcal{E}ns,$$

причем $G \circ H^\Delta = H$.

4.2. Лемма. *При $n > 2$ вложение симплициального множества $\dot{\Delta}[n]$ в симплициальное множество $\Delta[n]$ индуцирует изоморфизм категории $G\dot{\Delta}[n]$ на категорию $G\Delta[n] \approx i[n]$. При $n = 1$ категория $G\dot{\Delta}[n]$ дискретна, а при $n = 2$ эта категория содержит три объекта (которые мы будем обозначать символами 0, 1 и 2) и, кроме тождественных морфизмов, еще только четыре морфизма $u\colon 1 \to 2$, $v\colon 0 \to 2$, $w\colon 0 \to 1$ и $u \circ w\colon 0 \to 2$.*

Доказательство. При $n = 1$ лемма тривиальна. Пусть $n > 1$. Так как функтор G перестановочен с прямыми пределами, то (см. п. 3.9) категорию $G\dot{\Delta}[n]$ можно отождествить с коядром пары

$$\coprod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} G\Delta[n-2]_{i,j} \underset{Gv}{\overset{Gu}{\rightrightarrows}} \coprod_{0 \leqslant i \leqslant n} G\Delta[n-1]_i.$$

Обозначая через $[p_k]$ подмножество множества $[p]$, состоящее из всех его элементов, отличных от k, а через $[p_{k,l}]$ подмножество множества $[p]$, состоящее из всех его элементов, отличных от k и l, мы можем морфизмы Gu и Gv отождествить с морфизмами

$$\coprod_{0\leqslant i<j\leqslant n} i[n_{i,j}] \overset{u'}{\underset{v'}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leqslant i\leqslant n} i[n_i],$$

индуцированными вложениями множества $[n_{i,j}]$ в множества $[n_i]$ и $[n_j]$ соответственно. Построив прямой предел этой диаграммы категорий, как это описано в Глоссарии, мы немедленно обнаружим, что соответствующая диаграммная схема X (см. Глоссарий, Категория категорий $\mathcal{C}at$) совпадает со схемой категории $i[n]$, так что нужное нам коядро является факторкатегорией категории $\mathcal{P}a\, i[n]$ по описанному в Глоссарии отношению эквивалентности.

Пусть $n > 2$, и пусть

$$\alpha = (a, a_1)\circ(a_1, a_2)\circ\cdots\circ(a_k, b)$$

— произвольный морфизм категории $\mathcal{P}a\, i[n]$. Поскольку $n > 2$, числа a, a_1, a_2 лежат в одном множестве вида $[n_i]$ и потому морфизмы (a, a_2) и $(a, a_1)\circ(a_1, a_2)$ эквивалентны (т. е. определяют один и тот же морфизм категории $\operatorname{Coker}(u', v')$). Поэтому морфизмы α и $(a_1, a_2)\circ\cdots\circ(a_k, b)$ также эквивалентны. Очевидная индукция по k показывает теперь эквивалентность морфизмов α и (a, b). Таким образом, любые два объекта категории $\operatorname{Coker}(u', v')$ соединены одним и только одним морфизмом. Поэтому $\operatorname{Coker}(u', v') \approx i[n]$.

Категория $G\dot{\Delta}[2]$ вычисляется аналогично.

Теперь мы уже без особого труда можем вычислить категорию GX для любого симплициального множества X.

Пусть X — произвольное симплициальное множество. Отнесем ему диаграммную схему $\mathfrak{X}$, определенную формулами

$$\mathfrak{Ob}\,\mathfrak{X} = X_0, \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{X} = X_1,$$

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{X}} = {}_X d_1^1, \qquad \mathfrak{r}_{\mathfrak{X}} = {}_X d_0^1.$$

Пусть $\mathcal{P}a\,\mathfrak{X}$ — категория путей диаграммной схемы $\mathfrak{X}$.

Предложение. *Для любого симплициального множества X категория GX является факторкатегорией категории $\mathcal{P}a\,\mathfrak{X}$, получающейся наложением соотношений*

$$s_0 x = \operatorname{Id} x \text{ для любого } x \in X_0,$$

$$(d_0\sigma)\circ(d_2\sigma) = d_1\sigma \text{ для любого } \sigma \in X_2.$$

Доказательство. Согласно предложению 3.8, для любого $n \geqslant 0$ имеет место коуниверсальный квадрат

$$(*)\qquad \begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma\in\Sigma^n} \dot{\Delta}[n]_\sigma & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^{n-1}X \\ {\scriptstyle\text{влож.}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{влож.}} \\ \coprod_{\sigma\in\Sigma^n} \Delta[n]_\sigma & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^n X \end{array}$$

Поэтому имеет место и коуниверсальный квадрат

$$(**)\qquad \begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma\in\Sigma^n} G\dot{\Delta}[n]_\sigma & \longrightarrow & G\mathrm{Sk}^{n-1}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma\in\Sigma^n} G\Delta[n]_\sigma & \longrightarrow & G\mathrm{Sk}^n X \end{array}$$

ибо функтор G перестановочен с прямыми пределами. Но при $n > 2$ левая стрелка последнего квадрата является, согласно лемме, изоморфизмом. Поэтому изоморфизмом будет и правая стрелка. Поскольку $X = \varinjlim \mathrm{Sk}^n X$, отсюда вытекает, что

$$GX = \varinjlim G(\mathrm{Sk}^n X) = G(\mathrm{Sk}^2 X).$$

С другой стороны, ясно, что $G(\mathrm{Sk}^0 X) = \mathrm{Dis}\, X_0$. Поэтому, рассмотрев квадрат (**) при $n = 1$, мы немедленно получим, что объектами категории $G(\mathrm{Sk}^1 X)$ являются элементы множества X_0, а ее морфизмы порождаются морфизмами $d_1 x \to d_0 x$, отвечающими симплексам $x \in X_1$. Для каждой вершины $x_0 \in X_0$ эти морфизмы удовлетворяют соотношению $s_0 x_0 = \mathrm{Id}\, x_0$.

Наконец, рассмотрев квадрат (**) при $n = 2$, мы немедленно получим, что категория $G(\mathrm{Sk}^2 X) = GX$ имеет требуемый вид.

4.3. Следствие. *Каждый морфизм сопряжения $\Phi: GD \to \mathrm{Id}\,\mathcal{C}at$ является изоморфизмом, и, следовательно, функтор D вполне инъективен.*

Таким образом, категория категорий $\mathcal{C}at$ эквивалентна некоторой полной подкатегории категории симплициальных множеств $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$.

Доказательство. По определению для любой категории $\mathcal{C}$

$$(D\mathcal{C})_n = \mathcal{C}at(i[n], \mathcal{C}).$$

В частности, $(D\mathcal{C})_0 = \mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$, $(D\mathcal{C})_1 = \mathfrak{Ar}\mathcal{C}$, а $(D\mathcal{C})_2$ представляет собой множество всевозможных троек (u, v, w) морфизмов категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющих соотношению $w = v \circ u$. В силу только что доказанного предложения отсюда непосредственно следует, что категории $GD\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}$ изоморфны. Этот изоморфизм функториален по $\mathcal{C}$ и определяет морфизм сопряжения от D к G. Таким образом, мы нашли обратимый морфизм сопряжения. Но тогда и любой морфизм сопряжения от D к G обратим (п. 1.3 гл.I).

§ 5. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА; ПЕРЕТАСОВКИ

5.1. Введем в множество $\mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$ объектов произвольной категории $\mathcal{C}$ отношение предпорядка, считая, что $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда в категории $\mathcal{C}$ существует хотя бы один морфизм с областью определения a и областью значений b. Пусть $O(\mathcal{C})$ — упорядоченное множество, ассоциированное с предупорядоченным множеством $\mathfrak{Ob}\,\mathcal{C}$. Легко видеть, что соответствие $\mathcal{C} \rightsquigarrow O(\mathcal{C})$ определяет некоторый функтор $O\colon \mathcal{C}at \to \mathcal{O}r$, сопряженный слева с построенным в п. 4.1 функтором $i\colon \mathcal{O}r \to \mathcal{C}at$. Пусть

$$C = D \circ i,\ O^1 = O \circ G,$$

где D и G — построенные в п. 4.1 функторы. Ясно, что функтор $C\colon \mathcal{O}r \to \Delta^\circ\mathcal{E}ns$ сопряжен справа с функтором $O^1\colon \Delta^\circ\mathcal{E}ns \to \mathcal{O}r$. Кроме того, мы знаем, что функтор D вполне инъективен (следствие 4.3). С другой стороны, очевидно, что функтор i также вполне инъективен. Следовательно, функтор C вполне инъективен. Поэтому, согласно предложению 1.3 гл. I, функтор O^1C изоморфен тождественному функтору $\mathrm{Id}\,\mathcal{O}r$. Впрочем, этот факт легко доказать и непосредственно, заметив, что для любого симплициального множества X упорядоченное множество O^1X ассоциировано в силу предложения 4.2 с предупорядоченным множеством X_0, отношеиие предпорядка в котором введено следующим соглашением: $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда в X существует такая последовательиость симплексов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что

$$d_1\sigma_1 = x,\ d_0\sigma_1 = d_1\sigma_2, \ldots,\ d_0\sigma_{n-1} = d_1\sigma_n,\ d_0\sigma_n = y.$$

5.2. Для любого упорядоченного множества E симплициальное множество CE задается по определению соответствием $[n] \rightsquigarrow \mathcal{C}at(i[n], iE)$. Поскольку функтор i вполне инъективен, это множество можно отождествить с симплициальным множеством $[n] \rightsquigarrow \mathcal{O}r([n], E)$. В частности, множество $C[n]$ можно считать совпадающим со стандартным симплексом $\Delta[n]$. Образ вершины симплекса $\Delta[0]$ в симплексе $\Delta[n]$ при морфизме η_i, отвечающем (в силу указанного отождествления) отображению $0 \rightsquigarrow i$ из $[0]$ в $[n]$, мы будем называть *i-й вершиной симплекса* $\Delta[n]$.

Аналогично, легко видеть, что симплициальное множество $C\{n\}$, где $\{n\}$ — множество $\{0, 1, \ldots, n\}$, упорядоченное неравенствами

$$0 < 1 > 2 < 3 > 4 < \ldots,$$

может быть отождествлено с симплициальным множеством I_n (см. п. 2.5.1). Образ вершины симплекса $\Delta[0]$ при морфизме $\varepsilon_i\colon \Delta[0] \to I_n$, отвечающем (в силу этого отождествления) отображению $0 \rightsquigarrow i$ из $[0]$ в $\{n\}$, мы будем называть *i-й вершиной симплициального множества* I_n и обозначать символом i.

5.3. Согласно сказанному выше, n-мерными симплексами симплициального множества CE, отвечающего упорядоченному множеству E, являются невозрастающие отображения $x\colon [n] \to E$. Каждое такое отображение определяет морфизм $Cx\colon C[n] \to CE$, являющийся не чем иным, как сингулярным n-мерным симплексом $\widetilde{x}$, ассоциированным с симплексом x. Симплекс x тогда и только тогда невырожден, когда он представляет собой инъективное отображение. С другой стороны, поскольку функтор C перестановочен с обратными пределами, он мономорфизмы переводит в мономорфизмы. Следовательно,

для любого невырожденного симплекса x симплициального множества CE ассоциированный сингулярный симплекс $\widetilde{x}\colon \Delta[n] \to CE$ является мономорфизмом.

Из этого замечания непосредственно следует, что образ стандартного симплекса $\Delta[n]$ при любом его морфизме в множество CE изоморфен симплексу $\Delta[n]$. В частности, множество CE не может содержать подмножества, изоморфного симплициальной окружности Ω (коядру пары $\Delta(\partial_1^0), \Delta(\partial_1^1)\colon \Delta[0] \rightrightarrows \Delta[1]$).

5.4. Рассмотрим *цепи* упорядоченного множества E, т. е. его конечные линейно упорядоченные подмножества. Для каждой цепи c, состоящей из $n_c + 1$ элементов, существует одно и только одно возрастающее отображение $x_c\colon [n_c] \to E$ (симплекс множества CE), образом которого является цепь c. Пусть множество E конечно, и пусть $c(1), \ldots, c(n)$ — все его максимальные цепи. Ясно, что отображение

$$\coprod_{1 \leqslant i \leqslant n} [n_{c(i)}] \xrightarrow{(x_{c(i)})} E$$

прямой суммы $\coprod_i [n_{c(i)}]$ в множество E, индуцированное отображениями $x_{c(i)}$, надъективно. Более того, это отображение определяет, очевидно, множество E как коядро пары

$$\coprod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [n_{c(i) \cap c(j)}] \underset{u}{\overset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{1 \leqslant i \leqslant n} [n_{c(i)}],$$

состоящей из отображений u и v, индуцированных вложениями цепей $c(i) \cap c(j)$ в цепи $c(i)$ и $c(j)$ соответственно. Следовательно, для любого p множество $O_K([p], E) = (CE)_p$ является коядром пары

$$\bigsqcup_{i<j} O_K([p], [n_{c(i) \cap c(j)}]) \rightrightarrows \bigsqcup_{i} O_K([p], [n_{c(i)}]),$$

и, значит, *симплициальное множество CE является коядром пары*

$$\bigsqcup_{i<j} \Delta[n_{c(i) \cap c(j)}] \rightrightarrows \bigsqcup_{i} \Delta[n_{c(i)}],$$

причем соответствующая проекция $\bigsqcup_{i} \Delta[n_{c(i)}] \to CE$ индуцирована, очевидно, сингулярными симплексами $\tilde{x}_{c(i)}$.

В частности, мы видим, что

для любого конечного упорядоченного множества E симплициальное множество CE имеет конечный тип.

5.5. Рассмотрим, например, упорядоченное множество $E = [p] \times \times [q]$. Геометрически это множество изображается прямоугольником на плоскости, а его максимальные цепи $c(i)$ — ломаными, соединяющими точку $(0, 0)$ с точкой (p, q) и не имеющими «падающих» участков; см. рис. 1, где $p = 3$, $q = 2$. Следуя Маклейну ([2], стр. 243),

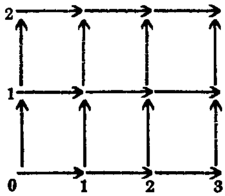


Рис. 1.

максимальные цепи $c(i)$ множества $[p] \times [q]$ можно описывать посредством «перетасовок». По определению *(p, q)-перетасовкой* $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q)$ называется такая пара последовательностей $i_1, \ldots, i_p$ и $j_1, \ldots, j_q$ натуральных чисел, что $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\} = \{1, 2, \ldots, p + + q\}$. Пусть $c(i)$ — произвольная максимальная цепь множества $[p] \times [q]$. Занумеровав элементы этой цепи числами от 0 до $p + q$, рассмотрим номера $i_1, \ldots, i_p$ тех ее элементов, которым предшествует элемент с той же второй компонентой. Иначе говоря, числа $i_1, \ldots, i_p$ являются номерами правых концов «горизонтальных отрезков» цепи $c(i)$; см. рис. 1. Все остальные числа от 1 до $p + q$ обозначим символами $j_1, \ldots, j_q$. Получающаяся (p, q)-перетасовка $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q)$ называется *перетасовкой, соответствующей максимальной цепи* $c(i)$. Например, изображенным на рис. 2 (стр. 112) максимальным цепям $c(i)$ и $c(j)$ соответствуют перетасовки (1, 3, 4; 2, 5) и

(2, 4, 5; 1, 3). Ясно, что перетасовка однозначно определяет соответствующую максимальную цепь.

Из этого описания максимальных цепей множества $[p] \times [q]$ немедленно следует, что каждая такая цепь содержит $p+q+1$ элементов и всех этих цепей ровно $\binom{p+q}{q}$ штук. С другой стороны, поскольку функтор C перестановочен с прямыми произведениями, множество $C([p] \times [q])$ мы можем отождествить с множеством $C[p] \times C[q] = \Delta[p] \times \Delta[q]$. Таким образом,

симплициальное множество $\Delta[p] \times \Delta[q]$ *является коядром пары*

$$\coprod_{1 \leqslant i < j \leqslant \binom{p+q}{q}} \Delta[n_{c(i) \cap c(j)}] \rightrightarrows \coprod_{1 \leqslant i \leqslant \binom{p+q}{q}} \Delta[n_{c(i)}],$$

где $n_{c(i)} = p+q$ для всех i.

§ 6. ГРУППОИДЫ

Мы собираемся аналогичным образом связать с категорией $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ категорию группоидов $\mathcal{G}r$. Однако прежде нам необходимо эту категорию изучить более детально.

6.1. Примеры.

6.1.1. Для любого множества E категория $\operatorname{Dis} E$ (см. п. 4.1) является группоидом.

6.1.2. Каждому множеству E можно сопоставить группоид $\operatorname{Sc} E$, множеством объектов которого является множество E, множеством морфизмов — множество $E \times E$, отображениями, сопоставляющими морфизмам их области определения и значений, — проекции $\mathrm{pr}_2\colon (x, y) \rightsquigarrow y$, $\mathrm{pr}_1\colon (x, y) \rightsquigarrow x$ и композиция в котором задается формулой

$$(x, y) \circ (y, z) = (x, z).$$

Тем самым мы, очевидно, получаем некоторый функтор $\operatorname{Sc}\colon \mathcal{E}ns \to \mathcal{G}r$ из $\mathcal{E}ns$ в $\mathcal{G}r$, как легко видеть, сопряженный справа с функтором $G \rightsquigarrow \mathfrak{Ob}\, G$ из $\mathcal{G}r$ в $\mathcal{E}ns$. Следовательно, в частности, функтор G перестановочен с прямыми пределами, а функтор Sc — с обратными.

Группоид G называется *односвязным*, если он изоморфен группоиду $\operatorname{Sc}(\mathfrak{Ob}\, G)$.

Замечание. Функтор $\operatorname{Sc}\colon \mathcal{E}ns \to \mathcal{G}r$ перестановочен с обратными, но не с прямыми пределами. Например, коядром пары

$\partial^0, \partial^1\colon [0] \rightrightarrows [1]$ в категории $\mathcal{E}ns$ является, очевидно, множество $[0]$, тогда как коядром соответствующей пары $\mathrm{Sc}\,\partial^0, \mathrm{Sc}\,\partial^1\colon \mathrm{Sc}[0] \rightrightarrows \mathrm{Sc}[1]$ служит группоид, имеющий один объект и группу $\mathbf{Z}$ в качестве группы автоморфизмов этого объекта.

Тем не менее в некоторых специальных случаях перестановочность функтора Sc с прямыми пределами все же имеет место. Например,

для любых двух множеств A и B с непустым пересечением $C = A \cap B$ имеет место коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sc}C & \longrightarrow & \mathrm{Sc}A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sc}B & \longrightarrow & \mathrm{Sc}D \end{array}$$

где $D = A \cup B$; иными словами,

$$\mathrm{Sc}\,D = \mathrm{Sc}\,A \overset{\mathrm{Sc}C}{\sqcup} \mathrm{Sc}\,B.$$

Покажем на примере доказательства этого утверждения, как используется изложенная в Глоссарии конструкция прямого предела категорий. Сохраняя обозначения, введенные в Глоссарии, примем за диаграмму $d\colon T \to \mathcal{C}at$ диаграмму

$$\mathrm{Sc}\,B \leftarrow \mathrm{Sc}\,C \to \mathrm{Sc}\,A.$$

В этом случае диаграммную схему X мы можем отождествить с подсхемой группоида $\mathrm{Sc}\,D$, множеством объектов которой является множество D, а множеством морфизмов — множество $(A \times A) \cup \cup (B \times B)$. Пусть $p\colon \mathcal{P}a\,X \to \varinjlim d$ — отображение отождествления, и пусть $j\colon \varinjlim d \to \mathrm{Sc}\,D$ — функтор, определенный рассматриваемым коммутативным квадратом. Нам нужно доказать, что функтор j представляет собой изоморфизм. Но на объектах этот функтор, является, очевидно, тождественным отображением, а на морфизмах он надъективен (ибо надъективен функтор $j \circ p$). Следовательно, нам нужно только показать, что функтор j на морфизмах инъективен, т. е. что для любых двух морфизмов α и β категории $\mathcal{P}a\,X$ из равенства $jp\alpha = jp\beta$ вытекает соотношение $\alpha \underset{S}{\sim} \beta$, где S — построенное в Глоссарии отношение эквивалентности (определяющее отображение p).

Пусть c — произвольный элемент множества C. Ясно, что для любого морфизма (z, t) схемы X в категории $\mathcal{P}a\,X$ имеет место соотношение $(z, t) \underset{S}{\sim} (z, c) \circ (c, t)$. Следовательно, для любого морфизма

$\alpha = (y, x_n) \circ \ldots \circ (x_1, x)$ категории $\mathcal{P}a\,X$ с областью определения x и областью значений y имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\alpha \underset{S}{\sim} &(y, x_n) \circ \ldots \circ (x_1, c) \circ (c, x) \underset{S}{\sim}\\ \underset{S}{\sim} &(y, x_n) \circ \ldots \circ (x_2, c) \circ (c, x_1) \circ (x_1, c) \circ (c, x) \underset{S}{\sim}\\ \underset{S}{\sim} &(y, x_n) \circ \ldots \circ (x_2, c) \circ (c, x) \underset{S}{\sim}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \underset{S}{\sim} &(y, c) \circ (c, x).\end{aligned}$$

Это показывает, что с точностью до эквивалентности морфизмы категории $\mathcal{P}a\,X$ однозначно определяются своими областями определения и значений: $\alpha \underset{S}{\sim} \beta$, если α и β имеют одни и те же области определений и значений. В частности, $\alpha \underset{S}{\sim} \beta$, если $jp\alpha = jp\beta$.

6.1.3. Группоид называется *точечным*, если он содержит только один объект. Как прямой, так и обратный предел точечных группоидов является точечным группоидом. Полная подкатегория категории $\mathcal{G}\kappa$, порожденная точечными группоидами, эквивалентна категории групп.

Группоид G называется *связным*, если он содержит хотя бы один объект и для любых двух объектов x и y множество $G(x, y)$ непусто. Ниже в п. 6.1.5 мы покажем, что группоид G, связен тогда и только тогда, когда он эквивалентен (как категория) точечному группоиду.

6.1.4. Группоид H называется *подгруппоидом* группоида G, если он является его подкатегорией, т. е. если множества $\mathfrak{Ob}\,H$ и $\mathfrak{Ar}\,H$ являются подмножествами множеств $\mathfrak{Ob}\,G$ и $\mathfrak{Ar}\,G$ соответственно и композиция в H индуцирована композицией в G. Максимальный связный подгруппоид группоида G называется его *компонентой связности*. Ясно, что каждый группоид является прямой суммой своих компонент связности. Группоид называется *вполне несвязным*, если все его компоненты связности точечны.

6.1.5. *Каждый группоид G эквивалентен вполне несвязному группоиду.*

Действительно, выбрав в каждой компоненте связности группоида G по объекту x_i, рассмотрим полную подкатегорию $G((x_i))$ этого группоида, порожденную объектами x_i, и покажем, что вложение j группоида $G((x_i))$ в группоид G является эквивалентностью категорий. Именно, мы построим такой функтор $p\colon G \to G((x_i))$, что композиция $j \circ p$ изоморфна тождественному функтору категории

G, а композиция $p \circ j$ является тождественным функтором категории $G((x_i))$.

Деревом группоида G мы будем называть его произвольный подгруппоид, изоморфный прямой сумме односвязных (см. п. 6.1.2) группоидов. Ясно, что каждое дерево содержится в некотором максимальном дереве и множество объектов каждого максимального дерева A совпадает с множеством объектов группоида G. Кроме того, для любого объекта a группоида G дерево A содержит один и только один морфизм вида $\varphi_a\colon x_{i(a)} \to a$, где $i(a)$ — компонента связности, содержащая объект a. Последнее обстоятельство позволяет нам определить функтор $j_A\colon G \to G((x_i))$, считая, что этот функтор объект a переводит в объект $x_{i(a)}$, а морфизм $f\colon a \to b$ — в морфизм $\varphi_b^{-1} \circ f \circ \varphi_a$. Очевидно, что функтор j_A и может быть принят за функтор p.

В случае когда группоид G обладает только одной компонентой связности (в которой выбран объект x_0), имеет место коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{вложение}"] \arrow[d, "\kappa"'] & G \arrow[d, "j_A"] \\ \{x_0\} \arrow[r, "\text{вложение}"] & G(x_0) \end{tikzcd}$$

где $\{x_0\}$ — группоид с единственным объектом x_0, имеющий единственный морфизм. Легко видеть, что этот квадрат коуниверсален.

6.2. *Группой Пуанкаре* группоида G *в объекте* g называется группа $G(g, g)$ всех автоморфизмов объекта g. Эту группу мы будем обозначать символом $\pi_1(G, g)$. Аналогично, для любого морфизма $\varphi\colon G \to H$ категории $\mathcal{G}_K$ мы символом $\pi_1(\varphi, g)$ будем обозначать морфизм групп

$$\varphi(g, g)\colon G(g, g) \to H(\varphi g, \varphi g),$$

индуцированный морфизмом φ.

Лемма («теорема ван Кампена»). *Пусть X, Y и Z — связные группоиды, и пусть морфизмы*

$$Y \xleftarrow{\beta} Z \xrightarrow{\alpha} X$$

индуцируют инъективные отображения множества $\mathfrak{Ob}\, Z$ в множества $\mathfrak{Ob}\, Y$ и $\mathfrak{Ob}\, X$ соответственно. Пусть, далее, z — произвольный объект группоида Z, а x, y и t — его образы в группоидах X, Y и $X \overset{Z}{\sqcup} Y$. Тогда имеет место канонический изоморфизм

$$\pi_1(X, x) \overset{\pi_1(Z, z)}{\sqcup} \pi_1(Y, y) \approx \pi_1(X \overset{Z}{\sqcup} Y, t)$$

амальгамы $\pi_1(X, x) \overset{\pi_1(Z, z)}{\sqcup} \pi_1(Y, y)$ *групп Пуанкаре*

$$\pi_1(Y, y) \xleftarrow{\pi_1(\beta, z)} \pi_1(Z, z) \xrightarrow{\pi_1(\alpha, z)} \pi_1(X, x)$$

на группу Пуанкаре $\pi_1 (X \overset{Z}{\sqcup} Y, t)$ *амальгамы* $X \overset{Z}{\sqcup} Y$.

Доказательство. Пусть C — максимальное дерево группоида Z, а A и B — максимальные деревья группоидов X и Y соответственно, «продолжающие» дерево C. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ B & \xleftarrow{\beta^1} & C & \xrightarrow{\alpha^1} & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y & \longleftarrow & z & \longrightarrow & x \end{array}$$

где α^1 и β^1 — морфизмы, индуцированные морфизмами α и β (остальные морфизмы диаграммы строятся очевидным образом). Легко видеть, что прямой предел такой диаграммы может быть вычислен двумя способами, а именно можно сначала вычислить прямые пределы всех трех столбцов, а затем перейти к пределу «по строкам» или же можно сначала вычислить пределы всех трех строк, а затем перейти к пределу «по столбцам» («свойство перестановочности двойных прямых пределов»).

Согласно утверждению 6.1.5, прямые пределы столбцов диаграммы $(*)$ канонически изоморфны точечным группоидам $Y(y)$, $Z(z)$ и $X(x)$ соответственно. Таким образом, совершая предельный переход «по столбцам», мы из диаграммы $(*)$ получим диаграмму

$$(**) \qquad Y(y) \xleftarrow{\beta_1} Z(z) \xrightarrow{\alpha_1} X(x),$$

морфизмы которой являются, очевидно, ограничениями морфизмов α и β. Ясно, что прямой предел диаграммы $(**)$ (а значит, и диаграммы $(*)$) является точечным группоидом, группа Пуанкаре которого представляет собой амальгаму $\pi_1(X, x) \overset{\pi_1(Z, z)}{\sqcup} \pi_1(Y, y)$.

С другой стороны, прямые пределы строк диаграммы естественным образом отождествляются с группоидом $T = X \overset{Z}{\sqcup} Y$, некоторым максимальным деревом D группоида T (см. п. 6.1.2) и группоидом $\{t\}$ соответственно. Следовательно, прямой предел диаграммы $(*)$ мы можем отождествить с амальгамой $T \overset{D}{\sqcup} \{t\}$, т. е. группоидом $T(t)$ (см. п. 6.1.5). Поэтому группой Пуанкаре этого предела является также и группа $\pi_1(X \overset{Z}{\sqcup} Y, t)$.

§ 7. ГРУППОИДЫ И СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

7.1. Пусть j — вложение категории $\mathcal{G}\kappa$ в категорию $\mathcal{C}at$, и пусть $\mathrm{Gr}\colon \mathcal{C}at \to \mathcal{G}\kappa$ — функтор $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{r}\,\mathcal{C}^{-1}]$ из п. 1.5.4 гл. I. Пусть, далее, G и D — функторы, построенные в п. 4.1. Рассмотрим функторы

$$\Pi = \mathrm{Gr} \circ G, \qquad D^1 = D \circ j.$$

Ясно, что функтор $\Pi\colon \Delta^\circ\mathcal{E}n\imath \to \mathcal{G}\kappa$ сопряжен слева к функтору $D^1\colon \mathcal{G}\kappa \to \Delta^\circ\mathcal{E}n\imath$ и однозначно с точностью до изоморфизма определен функтором $\Pi \circ h^\Delta$. При этом поскольку, согласно п. 4.1, категория $G\Delta[n]$ является категорией, ассоциированной с упорядоченным множеством $[n]$, группоид $\Pi\Delta[n]$ совпадает с односвязным группоидом $\mathrm{Sc}[n]$ (см. п. 6.1.2). Кроме того, согласно лемме 4.3, *функтор D^1 вполне инъективен.*

Для любого симплициального множества X группоид ΠX в явном виде описывается, согласно предложению 4.2, следующим образом:

Объектами группоида ΠX являются вершины множества X; его морфизмы порождены одномерными симплексами множества X и их формальными обратными, причем для любого $s \in X_1$ имеют место равенства $\mathfrak{d}_{\Pi X} s = d_1 x$ и $\mathfrak{r}_{\Pi X} s = d_0 s$; соотношения между этими порождающими морфизмами являются следствиями соотношений

$$s_0 x = \mathrm{Id}\, x, \qquad x \in X_0,$$

и

$$(d_0\sigma) \circ (d_2\sigma) = d_1\sigma, \qquad \sigma \in X_2.$$

7.2. Пусть I_n — симплициальное множество, определенное в п. 2.5.1, и пусть in_i — каноническая инъекция i-го экземпляра симплекса $\Delta[1]$ в множество I_n. Обозначив для произвольного морфизма $f\colon I_n \to X$ символом x_i одномерный симплекс множества X, ассоциированный с сингулярным симплексом $f \circ \mathrm{in}_i\colon \Delta[1] \to X$, рассмотрим отображение множества $\bigcup_{n \geqslant 0} \Delta^\circ\mathcal{E}n\imath(I_n, X)$ на множество $\mathfrak{A}\mathfrak{r}\,\Pi X$, сопоставляющее морфизму f морфизм $x_n^{(-1)^{n-1}} \circ \ldots \circ x_2^{-1} \circ x_1$ группоида ΠX. Очевидно, что это отображение надъективно. Более того, оно надъективно, если мы ограничимся рассмотрением лишь четных n. С другой стороны, ясно, что операция «приставления ломаных I_{2n} и I_{2p} друг к другу» индуцирует некоторое умножение

$$\Delta^\circ\mathcal{E}n\imath(I_{2n}, X) \times \Delta^\circ\mathcal{E}n\imath(I_{2p}, X) \to \Delta^\circ\mathcal{E}n\imath(I_{2(n+p)}, X),$$

причем построенное выше надъективное отображение переводит это умножение в композицию морфизмов. Таким образом,

каждый морфизм группоида ΠX задается некоторым (вообще говоря, не единственным) морфизмом $I_{2n} \to X$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\imath$, *причем закон композиции морфизмов группоида* ΠX *индуцируется операцией «приставления ломаных* I_{2n}».

7.3. Группоид ΠX мы будем называть *группоидом Пуанкаре* симплициального множества X. Множество X мы будем называть *связным* (соответственно *односвязным*), если группоид ΠX связен (соответственно односвязен). Симплициальное подмножество симплициального множества X мы будем называть его *компонентой связности*, если группоид Пуанкаре этого подмножества является компонентой связности группоида ΠX. Множество всех компонент связности симплициального множества X мы будем обозначать символом $\pi_0 X$.

Согласно п. 7.2, две вершины x и y симплициального множества X тогда и только тогда принадлежат одной компоненте связности этого множества, когда существует такой морфизм $f: I_n \to X$, что $f(0) = x$, $f(n) = y$ (см. п. 5.2.1), т. е. когда «в X существует путь, соединяющий вершины x и y».

Каждый морфизм $f: X \to Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ индуцирует, очевидно, некоторое отображение $\pi_0(f)$ множества $\pi_0 X$ в множество $\pi_0 Y$. Ясно, что соответствия $X \rightsquigarrow \pi_0 X$, $f \rightsquigarrow \pi_0 f$ представляют собой функтор из категории $D^\circ\mathcal{E}ns$ в категорию множеств $\mathcal{E}ns$. Без труда проверяется, что *функтор* π_0 *перестановочен с прямыми суммами и конечными прямыми произведениями.*

7.4. *Группой Пуанкаре* симплициального множества X в его вершине x_0 мы будем называть группу $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\Pi X, x_0)$ (см. п. 6.2). Для любого морфизма $f: X \to Y$ мы символом $\pi_1(f, x_0)$ или просто $\pi_1 f$ будем обозначать морфизм групп $\pi_1(\Pi f, x_0)$.

В этом месте удобно ввести в рассмотрение категорию $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ *пунктированных симплициальных множеств*, т. е. категорию, объектами которой являются пары (X, x_0), состоящие из симплициального множества X и некоторой его вершины x_0. Морфизмами $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ этой категории являются морфизмы $f: X \to Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, обладающие тем свойством, что $f(x_0) = y_0$.

Из определения непосредственно следует, что π_1 представляет собой функтор из категории $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ в категорию групп.

Предложение («теорема ван Кампена для симплициальных множеств»). *Пусть в диаграмме*

$$(X, x_0) \xleftarrow{f} (Z, z_0) \xrightarrow{g} (Y, y_0)$$

симплициальные множества X, Y *и* Z *связны, а компоненты* f_0 *и* g_0 *морфизмов* f *и* g *являются инъективными отображениями. Пусть* *далее* t_0 — *образ вершин* x_0 *и* y_0 *в симплициальном множестве* $X \overset{Z}{\sqcup} Y$. *Тогда*

$$\pi_1(X \overset{Z}{\sqcup} Y, t_0) \approx \pi_1(X, x_0) \overset{\pi_1(Z, z_0)}{\sqcup} \pi_1(Y, y_0).$$

Доказательство. Применяя к данной диаграмме функтор П, мы получим диаграмму

$$\Pi X \xleftarrow{\Pi f} \Pi Z \xrightarrow{\Pi g} \Pi Y$$

(над категорией $\mathcal{G}r$). Согласно лемме 4.2, эта диаграмма удовлетворяет условиям леммы 6.2. Для завершения доказательства остается заметить, что функтор П переводит любой коуниверсальный квадрат, а, следовательно, в частности, и квадрат

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \overset{Z}{\sqcup} Y \end{array}$$

снова в коуниверсальный квадрат.

7.5. Легко видеть, что *категория* $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ *допускает прямые произведения*. Именно, произведением объектов (X, x_0) и (Y, y_0) является, очевидно, объект $(X \times Y, (x_0, y_0))$. Покажем, что *функтор* π_1 *перестановочен с конечными произведениями*. Ясно, что для этого достаточно доказать перестановочность с конечными произведениями функтора П. Более того, поскольку функтор П перестановочен с прямыми пределами, достаточно показать, что группоид $\Pi(\Delta[n] \times \Delta[p])$ канонически изоморфен группоиду $\Pi\Delta[n] \times \Pi\Delta[n]$. Действительно, если это так, то, поскольку в категории $\mathcal{C}at$ произведения перестановочны с прямыми пределами (ибо функтор $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ сопряжен слева с функтором $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{F})$), для любых симплициальных множеств X и Y будут иметь место изоморфизмы

$$\Pi(X \times Y) \approx \Pi(\varinjlim_{\alpha} d_X(\alpha) \times \varinjlim_{\beta} d_Y(\beta)) \approx \Pi \varinjlim_{\alpha, \beta} (d_X(\alpha) \times d_Y(\beta)) \approx$$

$$\approx \varinjlim_{\alpha, \beta} \Pi(d_X(\alpha) \times d_Y(\beta)) \approx \varinjlim_{\alpha, \beta} (\Pi d_X(\alpha) \times \Pi d_Y(\beta)) \approx$$

$$\approx \varinjlim_{\alpha} (\Pi d_X(\alpha)) \times \varinjlim_{\beta} (\Pi d_Y(\beta)) \approx \Pi X \times \Pi Y$$

(см. п. 1.1), где $d_X \colon \Delta/X \to \Delta^\circ\mathcal{E}ns$ и $d_Y \colon \Delta/Y \to \Delta^\circ\mathcal{E}ns$ — состоящие из представимых функторов диаграммы (см. п. 1.1), прямыми пределами которых являются функторы X и Y.

Ясно, что произведение двух односвязных группоидов является односвязным группоидом (в частности, группоид $\Pi\Delta[n]\times\Pi\Delta[p]$ односвязен). Кроме того, канонический морфизм

$$\Pi(\Delta[n]\times\Delta[p])\to\Pi\Delta[n]\times\Pi\Delta[p]$$

на объектах биективен, а на морфизмах надъективен. Поэтому для завершения доказательства нам нужно только показать, что группоид $\Pi(\Delta[n]\times\Delta[p])$ также односвязен, т. е. что для любых его двух объектов существует один и только один морфизм, обладающий тем свойством, что первый из данных объектов является его областью определения, а второй — его областью значений.

Для этого мы воспользуемся изложенным в п. 5.5 описанием симплициального множества $\Delta[n]\times\Delta[p]$. Согласно этому описанию, одномерные симплексы симплициального множества $\Delta[n]\times\Delta[p]$ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами (x, y) элементов произведения $[n]\times[p]$, для которых $x\leqslant y$, а его двумерные симплексы находятся во взаимно однозначном соответствии с тройками (x, y, z) элементов произведения $[n]\times[p]$, для которых $x\leqslant y\leqslant z$. Следовательно, любой морфизм $\alpha\colon a\to b$ группоида $\Pi(\Delta[n]\times\Delta[p])$ задается путем вида

$$(x_n, x_{n-1})\circ\ldots\circ(x_2, x_1)\circ(x_1, x_0),$$

где $x_0=a$, $x_n=b$ и $x_i\leqslant x_{i+1}$ или $x_i\geqslant x_{i+1}$. Читатель может сам по индукции без труда показать, что любой такой путь эквивалентен пути

$$(b, y)\circ(y, a),$$

где y — точка $(1, 1)$. (Используйте описанные в п. 7.1 соотношения в группоиде ΠX и устройство двумерных симплексов множества $\Delta[n]\times\Delta[p]$.) Таким образом, морфизм α однозначно определяется его областями определения и значений.

7.6. Вообще говоря, функтор Π не перестановочен с ядрами пар морфизмов. Рассмотрим, например, коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\dot\Delta[2] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & \Delta[2] \arrow[d, "u"] \\
\Delta[2] \arrow[r, "v"] & X
\end{tikzcd}$$

где i — вложение. Ядром пары $\Delta[2]\overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}}X$ является множество $\dot\Delta[2]$, тогда как $\Pi\Delta[2]=\Pi X=\mathrm{Sc}[2]$ и ядром пары $\mathrm{Sc}[2]\rightrightarrows\mathrm{Sc}[2]$ служит группоид $\mathrm{Sc}[2]\neq\Pi\dot\Delta[2]$.

Таким образом, хотя функтор Π и перестановочен с прямыми произведениями (обратными пределами «дискретных» диаграмм), но с любыми обратными пределами он тем не менее не перестановочен.

Глава III

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СИМПЛИЦИАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

1.1. Для любого натурального n мы можем вполне упорядочить множество $\Delta([n], [1])$, считая, что $f \geqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(i) \leqslant g(i)$ для любого $i \in [n]$. Более того, упорядоченное таким образом множество $\Delta([n], [1])$ мы можем отождествить с множеством $[n+1]$ (это отождествление осуществляется соответствием $f \rightsquigarrow \operatorname{card} f^{-1}(0)$). В силу этого отождествления функтор $[n] \rightsquigarrow \Delta([n], [1])$ из Δ в Δ°, который мы будем обозначать символом II, описывается формулами

$$\mathrm{II}\,[n] = [n+1], \quad \mathrm{II}\partial_n^i = \sigma_n^i, \quad \mathrm{II}\sigma_n^i = \partial_{n+2}^{i+1}.$$

1.2. Пусть $\mathcal{T}op$ — категория топологических пространств и $\boldsymbol{I}$ — отрезок $[0, 1]$ числовой прямой $\boldsymbol{R}$. Для любого натурального n мы будем символом $\boldsymbol{I}^{[n]}$, а также символом $\boldsymbol{I}^{n+1}$ обозначать произведение $n+1$ экземпляров отрезка $\boldsymbol{I}$. Ясно, что это произведение контравариантно зависит от $[n]$ (множество точек пространства $\boldsymbol{I}^{[n]}$ может быть отождествлено с множеством $\mathcal{E}ns([n], \boldsymbol{I})$ отображений множества $[n]$ в отрезок $\boldsymbol{I}$), так что соответствие $[n] \rightsquigarrow \boldsymbol{I}^{[n]}$ определяет некоторое симплициальное топологическое пространство, которое мы будем обозначать символом $\boldsymbol{I}^?$. Композиция

$$\Delta \xrightarrow{\mathrm{II}} \Delta^\circ \xrightarrow{\boldsymbol{I}^?} \mathcal{T}op$$

является, следовательно, косимплициальным топологическим пространством (которое мы будем обозначать символом III). Для этого пространства

$$\mathrm{III}^n = \boldsymbol{I}^{n+2},$$

тогда как отображения $\partial_n^i \colon \boldsymbol{I}^{n+1} \to \boldsymbol{I}^{n+2}$ задаются формулой

$$(t_0, t_1, \ldots, t_n) \rightsquigarrow (t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n),$$

а отображения $\sigma_n^i \colon \boldsymbol{I}^{n+3} \to \boldsymbol{I}^{n+2}$ — формулой

$$(t_0, t_1, \ldots, t_{n+2}) \rightsquigarrow (t_0, \ldots, t_i, t_{i+2}, \ldots, t_{n+2}).$$

Символом Δ^n мы будем обозначать подпространство пространства I^{n+2}, состоящее из всех точек $(t_0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1})$, для которых

$$0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} = 1.$$

Последовательность Δ^0, Δ^1, ... составляет, очевидно, подфунктор функтора III. Этот подфунктор (косимплициальное топологическое пространство) мы будем обозначать символом $\Delta^?\colon \Delta \to \mathcal{T}op$.

1.3. В первую очередь мы найдем группу автоморфизмов функтора $\Delta^?$ (т. е. группу обратимых функторных морфизмов $\Delta^? \to \Delta^?$). Пусть $\mathfrak{G}$ — группа гомеоморфизмов s отрезка $[0, 1]$, обладающих тем свойством, что $s(0) = 0$ (и, следовательно, тем свойством, что $s(1) = 1$). Группа $\mathfrak{G}$ очевидным образом действует на функторе III: именно, любой гомеоморфизм $s \in \mathfrak{G}$ порождает для каждого n автоморфизм

$$s^n\colon (t_0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) \rightsquigarrow (st_0, st_1, \ldots, st_n, st_{n+1})$$

пространства $\mathrm{III}^n = I^{n+2}$, согласованный с операторами граней и вырождения. Более того, поскольку отображение s, очевидно, монотонно, оно оставляет на месте подмножество Δ^n пространства I^{n+2}, и потому автоморфизмы s^n индуцируют некоторый автоморфизм $s^?$ косимплициального топологического пространства $\Delta^?$. Ясно, что соответствие $s \rightsquigarrow s^?$ является гомоморфизмом группы $\mathfrak{G}$ в группу всех автоморфизмов косимплициального пространства $\Delta^?$.

П р е д л о ж е н и е. *Гомоморфизм $s \rightsquigarrow s^?$ является изоморфизмом группы $\mathfrak{G}$ гомеоморфизмов отрезка I, сохраняющих точку* 0, *на группу автоморфизмов косимплициального топологического пространства $\Delta^?$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Инъективность гомоморфизма $s \rightsquigarrow s^?$ очевидна. Покажем, что он и надъективен.

Пусть $s_0, s_1, \ldots$ — непрерывные автоморфизмы пространств $\Delta^0, \Delta^1, \ldots$, согласованные с операторами граней и вырождения. Поскольку автоморфизм s_1 согласован с оператором $\partial_1^0\colon \Delta^0 \to \Delta^1$, то $s_1(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$, и потому существует такой гомеоморфизм $s \in \mathfrak{G}$, что в введенных выше обозначениях $s^1 = s_1$. Рассмотрим теперь произвольный эпиморфизм $\sigma\colon [n] \to [1]$ категории Δ. Так как соответствующее этому эпиморфизму непрерывное отображение $\Delta^\sigma\colon \Delta^n \to \Delta^1$ имеет, очевидно, вид $(0, t_1, \ldots, t_n, 1) \rightsquigarrow (0, t_i, 1)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, и так как, с другой стороны, $\Delta^\sigma \circ s_n = s_1 \circ \Delta^\sigma$, то

$$s_n(0, t_1, \ldots, t_n, 1) = (0, st_1, \ldots, st_n, 1),$$

т. е. $s_n = s^n$. Тем самым наше предложение полностью доказано.

1.4. Применив предложение 1.3 гл. II к функтору $\Delta^?: \Delta \to \mathcal{T}op$, мы получим пару сопряженных функторов

$$S: \mathcal{T}op \to \Delta^\circ \mathcal{E}ns, \quad |?|: \Delta^\circ \mathcal{E}ns \to \mathcal{T}op.$$

Первый из этих функторов называется *сингулярным симплициальным функтором*. Он сопоставляет каждому топологическому пространству T симплициальное множество ST, для которого

$$(ST)_n = \mathcal{T}op(\Delta^n, T).$$

Симплексы этого симплициального множества называются *сингулярными симплексами* пространства T.

Второй функтор сопряжен слева с первым и переводит симплициальное множество X в прямой предел функтора

$$\delta_X: (\Delta[n] \xrightarrow{\alpha} X) \rightsquigarrow \Delta^n$$

из категории Δ/X в $\mathcal{T}op$ (см. п. 1.3 гл. II). Этот предел $|X|$ называется *геометрической реализацией* симплициального множества X. С точностью до изоморфизма функтор $|?|$ геометрической реализации однозначно характеризуется, согласно предложению 1.3 гл. II, следующими двумя свойствами:

a) функтор $|?|$ перестановочен с прямыми пределами;

b) композиция $|?| \circ h^\Delta$, где $h^\Delta: \Delta \to \Delta^\circ \mathcal{E}ns$ — функтор $[n] \rightsquigarrow \Delta[n]$, совпадает с функтором $\Delta^?: \Delta \to \mathcal{T}op$.

В частности,

геометрической реализацией $|\Delta[n]|$ *стандартного* n*-мерного симплекса* $\Delta[n]$ *является* n*-мерный геометрический симплекс* Δ^n.

1.5. В явном виде функтор $|?|$ можно описать, следуя методу п. 4.2 гл. II. Рассмотрим снова диаграмму

$$\coprod_{0\leqslant i<j\leqslant n} \Delta[n-2]_{i,j} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leqslant i\leqslant n} \Delta[n-1]_i \xrightarrow{p} \Delta[n]$$

из п. 3.9 гл. II и построим ее геометрическую реализацию. Ограничением геометрической реализации $|p|$ морфизма p на симплексе $|\Delta[n-1]_i|$ является гомеоморфизм f_i этого симплекса на *i-ю грань* Δ^n_i симплекса $\Delta^n = |\Delta[n]|$ (т. е. на пересечение симплекса $\Delta^n \subset \mathbf{R}^{n+2}$ с множеством точек $(t_0, \ldots, t_{n+1})$, для которых $t_i = t_{i+1}$). Композиция $f_{i,j}$ гомеоморфизма f_i с отображением

$$|\Delta(\partial^j_{n-1})|: |\Delta[n-2]_{i,j}| \to |\Delta[n-1]_i|$$

представляет собой гомеоморфизм симплекса $|\Delta[n-2]_{i,j}|$ на симплекс $\Delta_i^n \cap \Delta_j^n$. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \sqcup |\Delta[n-2]_{i,j}| \arrow[r, shift left, "|u|"] \arrow[r, shift right, "|v|"'] \arrow[d, "\sqcup f_{i,j}"] & \sqcup |\Delta[n-1]_i| \arrow[r, "|p|"] \arrow[d, "\sqcup f_i"] & |\Delta[n]| \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ \sqcup (\Delta_i^n \cap \Delta_j^n) \arrow[r, shift left, "u'"] \arrow[r, shift right, "v'"'] & \sqcup \Delta_i^n \arrow[r, "p'"] & \Delta^n \end{tikzcd}$$

отображение p' которой определено вложениями симплексов Δ_i^n в симплекс Δ^n, а отображения u' и v' определены вложениями симплексов $\Delta_i^n \cap \Delta_j^n$ соответственно в симплексы Δ_i^n и Δ_j^n.

Ясно, что отображение p' индуцирует гомеоморфизм коядра пары u', v' на границу $\dot{\Delta}^n$ симплекса Δ^n (объединение всех его граней). Так как функтор $|\,?\,|$ переводит коядра в коядра и так как отображения $\sqcup f_i$ и $\sqcup f_{i,j}$ являются гомеоморфизмами, то тем самым доказано следующее

Предложение. *Геометрическая реализация $|i|$ вложения i симплициального множества $\dot{\Delta}[n]$ в симплициальное множество $\Delta[n]$ является гомеоморфным отображением геометрической реализации $|\dot{\Delta}[n]|$ множества $\dot{\Delta}[n]$ на границу $\dot{\Delta}^n$ геометрической реализации Δ^n множества $\Delta[n]$.*

Пусть теперь X — произвольное симплициальное множество. Как мы знаем, его можно отождествить с прямым пределом $\varinjlim \mathrm{Sk}^n X$ множеств $\mathrm{Sk}^n X$ и, следовательно, пространство $|X|$ — с прямым пределом $\varinjlim |\mathrm{Sk}^n X|$ пространств $|\mathrm{Sk}^n X|$. Опишем строение последнего предела более подробно.

Остов $\mathrm{Sk}^0 X$ можно рассматривать как прямую сумму семейства симплициальных точек $\Delta[0]$, индексами которого являются вершины множества X. Поскольку геометрической реализацией симплициальной точки $\Delta[0]$ служит геометрическая точка Δ^0, отсюда следует, что пространство $|\mathrm{Sk}^0 X|$ является топологической прямой суммой точек, находящихся во взаимно однозначном соответствии с вершинами множества X. Другими словами, можно считать, что пространство $|\mathrm{Sk}^0 X|$ совпадает с множеством X_0, снабженным дискретной топологией.

Предполагая теперь, что для некоторого $n > 0$ пространство $|\mathrm{Sk}^{n-1} X|$ уже построено, построим пространство $|\mathrm{Sk}^n X|$. Поскольку функтор геометрической реализации перестановочен с амальгамами и прямыми суммами, из предложения 3.8 гл. II следует, что пространство $|\mathrm{Sk}^n X|$ является амальгамой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} |\dot{\Delta}[n]_\sigma| & \xrightarrow{p} & |\mathrm{Sk}^{n-1}X| \\ \Big\downarrow{\scriptstyle |\text{влож.}|} & & \\ \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} |\Delta[n]_\sigma| & & \end{array}$$

где p — отображение, которое на каждом слагаемом $|\dot{\Delta}[n]_\sigma|$ является ограничением геометрической реализации сингулярного симплекса $\tilde{\sigma}\colon \Delta[n]_\sigma \to X$. Как мы знаем, пространство $|\Delta[n]_\sigma|$ является геометрическим n-мерным симплексом (обозначим его через Δ^n_σ), а пространство $|\dot{\Delta}[n]_\sigma|$ — границей $\dot{\Delta}^n_\sigma$ симплекса Δ^n_σ. Поэтому рассматриваемая диаграмма приводит к универсальному квадрату:

$$\begin{array}{ccc} \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} \dot{\Delta}^n_\sigma & \rightarrow & |\mathrm{Sk}^{n-1}X| \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \text{влож.}} & & \Big\downarrow \\ \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} \Delta^n_\sigma & \rightarrow & |\mathrm{Sk}^n X| \end{array}$$

Таким образом, мы видим, что

пространство $|\mathrm{Sk}^n X|$ *получается из пространства* $|\mathrm{Sk}^{n-1}X|$ *приклеиванием геометрических n-мерных симплексов* Δ^n_σ *по их границам.*

Иначе говоря,

1) отображение $|\mathrm{Sk}^{n-1}X| \to |\mathrm{Sk}^n X|$ является гомеоморфизмом пространства $|\mathrm{Sk}^{n-1}X|$ на некоторое замкнутое подпространство пространства $|\mathrm{Sk}^n X|$ (которое мы будем отождествлять с пространством $|\mathrm{Sk}^{n-1}X|$);

2) дополнение подпространства $|\mathrm{Sk}^{n-1}X|$ в пространстве $|\mathrm{Sk}^n X|$ является топологической прямой суммой внутренностей $\mathring{\Delta}^n_\sigma$ геометрических симплексов Δ^n_σ;

3) подпространство U пространства $|\mathrm{Sk}^n X|$ тогда и только тогда открыто в $|\mathrm{Sk}^n X|$, когда пересечение $U \cap |\mathrm{Sk}^{n-1}X|$ открыто в $|\mathrm{Sk}^{n-1}X|$ и для любого $\sigma\in\Sigma^n$ прообраз множества U в симплексе Δ^n_σ открыт в Δ^n_σ.

В частности, непрерывное отображение $|\tilde{\sigma}|\colon \Delta_\sigma \to |\mathrm{Sk}^n X|$ определяет гомеоморфизм открытого симплекса $\mathring{\Delta}^n_\sigma$ на некоторую связную компоненту дополнения $|\mathrm{Sk}^n X| \setminus |\mathrm{Sk}^{n-1}X|$. Эту компоненту мы будем называть *n-мерной клеткой*, определенной симплексом σ.

1.6. Понятно, что сопряженные функторы и, значит, в частности, функторы S и $|\,?\,|$ имеют «одну и ту же» группу автоморфизмов. Согласно предложению 1.3 гл. II, группа автоморфизмов функтора $|\,?\,|$ совпадает с группой автоморфизмов косимплициального пространства $\Delta^?$, т. е. с группой $\mathfrak{G}$ строго монотонных отображений $s\colon \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{I}$, оставляющих на месте точки 0 и 1. Вычислим в явном виде, как эта группа действует на геометрической реализации $|X|$ произвольного симплициального множества X.

Действия группы $\mathfrak{G}$ на пространствах $|\mathrm{Sk}^n X|$ и $|X|$, очевидно, согласованы с вложением $|\mathrm{Sk}^n X|$ в $|X|$. Следовательно, $\mathfrak{G}$ сохраняет связные компоненты дополнения $|\mathrm{Sk}^n X| \setminus |\mathrm{Sk}^{n-1} X|$, т. е. n-мерные клетки пространства $|X|$. С другой стороны, поскольку непрерывное отображение $|\widetilde{\sigma}|\colon \Delta^n_\sigma \to |X|$ также согласовано с действием группы $\mathfrak{G}$ на пространствах Δ^n_σ и $|X|$ и поскольку группа $\mathfrak{G}$ транзитивно действует на $\mathring{\Delta}^n_\sigma$ (что немедленно вытекает из формулы $s(t_0, \ldots, t_{n+1}) = (st_0, \ldots, st_{n+1})$), эта группа транзитивно действует на каждой клетке пространства $|X|$. Тем самым доказано следующее

Предложение. *Для любого симплициального множества X клетки пространства $|X|$ являются орбитами группы $\mathfrak{G}$ автоморфизмов функтора геометрической реализации.*

В частности, поскольку для любого морфизма $f\colon X \to Y$ категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ отображение $|f|\colon |X| \to |Y|$ согласовано с действием группы $\mathfrak{G}$ на $|X|$ и $|Y|$, *это отображение переводит клетки пространства $|X|$ в клетки пространства $|Y|$.*

1.7. Построим теперь некоторую определенную базу открытых множеств пространства $|X|$. С этой целью мы опишем сейчас некоторое построение, позволяющее каждое открытое множество $\boldsymbol{U}_{n-1}$ пространства $|\mathrm{Sk}^{n-1} X|$ «распространить» на пространство $|\mathrm{Sk}^n X|$. Пусть $\lambda = (\lambda_\sigma)$ — произвольное семейство чисел из полуоткрытого интервала $(0, 1]$, индексами которых являются невырожденные симплексы σ множества X. Для каждого невырожденного симплекса $\sigma \in X_n$ мы рассмотрим центр тяжести G_σ геометрического симплекса Δ^n_σ и множество $\boldsymbol{U}_\sigma$ точек симплекса Δ^n_σ, имеющих вид $tG_\sigma + (1-t)M$, $0 \leqslant t < \lambda_\sigma$, где M — произвольная точка прообраза $|\widetilde{\sigma}|^{-1}(\boldsymbol{U}_{n-1})$ множества $\boldsymbol{U}_{n-1}$ в множестве $\dot{\Delta}^n_\sigma$. Ясно, что объединение $\boldsymbol{U}_n$ множества $\boldsymbol{U}_{n-1}$ со всеми множествами вида $|\widetilde{\sigma}|(\boldsymbol{U}_\sigma)$, $\sigma \in \Sigma^n$, пересекается с подпространством $|\mathrm{Sk}^{n-1} X|$ по множеству $\boldsymbol{U}_{n-1}$, а прообразами $|\widetilde{\sigma}|^{-1}(\boldsymbol{U}_n)$ множества $\boldsymbol{U}_n$ при геометрической реализации произвольного сингулярного симплекса $\widetilde{\sigma}$, $\sigma \in \Sigma^n$, служат множества $\boldsymbol{U}_\sigma$. Поэтому, согласно свойству 3) из п. 1.5, множество $\boldsymbol{U}_n$ открыто в пространстве $|\mathrm{Sk}^n X|$. При этом если подмножество $\boldsymbol{V}$ множества $\boldsymbol{U}_n$ обладает тем свойством, что пересечение $\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{U}_{n-1}$ и прообразы $\boldsymbol{V}_\sigma$ множества $\boldsymbol{V}$ в множествах $\boldsymbol{U}_\sigma$ открыты (в $\boldsymbol{U}_{n-1}$ или соответственно в U_σ), то, поскольку пересечение $V \cap |\mathrm{Sk}^{n-1}X|$ и прообразы $|\tilde{\sigma}|^{-1}(V)$ совпадают соответственно с пересечением $V \cap U_{n-1}$ и прообразами V_σ, множество V открыто в $|\mathrm{Sk}^n X|$, а потому и в U_n. Все это означает, что имеет место коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} |\tilde{\sigma}|^{-1}(U_{n-1}) & \longrightarrow & U_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} U_\sigma & \longrightarrow & U_n \end{array}$$

вертикальные стрелки которого являются вложениями, а горизонтальные индуцированы сингулярными симплексами $\tilde{\sigma}$.

Итерируя изложенную конструкцию, мы получаем последовательность $U_{n-1} \subset U_n \subset U_{n+1} \subset \ldots$ подмножеств пространства $|X|$, обладающую тем свойством, что любое U_r открыто в $|\mathrm{Sk}^r X|$ и является пересечением $|\mathrm{Sk}^r X| \cap U_{r+1}$. Поскольку пространство $|X|$ представляет собой топологический прямой предел пространств $|\mathrm{Sk}^r X|$, отсюда следует, что объединение U_{n-1}^λ множеств U_r открыто в $|X|$. Это открытое множество мы будем называть *распространением ширины* λ *множества* U_{n-1} *на пространство* $|X|$. Эта операция распространения согласована с операцией пересечения: для любых двух открытых множеств U_{n-1} и V_{n-1} пространства $|\mathrm{Sk}^{n-1}X|$ имеет место равенство

$$(U_{n-1} \cap V_{n-1})^\lambda = U_{n-1}^\lambda \cap V_{n-1}^\lambda.$$

В частности, если множества U_{n-1} и V_{n-1} не пересекаются, множества U_{n-1}^λ и V_{n-1}^λ также не пересекаются.

1.8. Пусть теперь x — произвольная точка пространства $|X|$, принадлежащая некоторой n-мерной клетке (соответствующей, скажем, симплексу σ), ε — произвольное число из открытого интервала $(0, 1)$ и 0_x — точка симплекса Δ_σ^n, переходящая при отображении $|\tilde{\sigma}|\colon \Delta_\sigma^n \to |X|$ в точку x. Пусть, далее, V_x^ε — образ в пространстве $|X|$ при отображении $|\tilde{\sigma}|$ подмножества симплекса Δ_σ^n, состоящего из всех точек вида $(1-t)\,0_x + tM$, где $0 \leqslant t < \varepsilon$, а M — произвольная точка границы $\dot{\Delta}_\sigma^n$ симплекса Δ_σ^n. Очевидно, что множество V_x^ε является открытой окрестностью точки x в пространстве $|\mathrm{Sk}^n X|$ и, следовательно, его распространение $V_x^{\varepsilon,\lambda}$ произвольной ширины λ — открытой окрестностью точки x в пространстве $|X|$. Столь же очевидно, что при всевозможных ε и λ множества $V_x^{\varepsilon,\lambda}$ составляют базис окрестностей точки x в пространстве $|X|$.

Предложение. *Геометрическая реализация $|X|$ произвольного симплициального множества X является хаусдорфовым пространством.*

Доказательство. Пусть x и y — различные точки пространства $|X|$, и пусть они принадлежат клеткам размерности m и p соответственно. Если $m < p$, то распространение ширины λ окрестности V_x^ε на пространство $|\mathrm{Sk}^p X|$ при достаточно малом ε не пересекается с окрестностью V_y^ε. Поэтому окрестности $V_x^{\varepsilon,\lambda}$ и $V_y^{\varepsilon,\lambda}$ точек x и y в пространстве $|X|$ также не пересекаются. Пусть $m = p$. В этом случае точки x и y лежат в открытом множестве $|\mathrm{Sk}^m X| \setminus |\mathrm{Sk}^{m-1} X|$ пространства $|\mathrm{Sk}^m X|$, гомеоморфном топологической прямой сумме пространств Δ_σ^n, $\sigma \in \Sigma^n$. Поэтому при достаточно малом ε окрестности V_x^ε и V_y^ε этих точек не пересекаются и, следовательно, окрестности $V_x^{\varepsilon,\lambda}$ и $V_y^{\varepsilon,\lambda}$ также не пересекаются.

1.9. Легко видеть, что для любого открытого подмножества U_{n-1} пространства $|\mathrm{Sk}^{n-1} X|$ построенное в п. 1.7 открытое (в $|\mathrm{Sk}^n X|$) множество U_n обладает тем свойством, что *множество U_{n-1} является его деформационным ретрактом*. Действительно, пусть $r_\sigma : I \times U_\sigma \to U_\sigma$ — ретрагирующая деформация множества U_σ на множество $|\tilde{\sigma}|^{-1}(U_{n-1})$ (где I — отрезок $[0, 1]$), определенная формулой

$$r_\sigma(1 - s, tG_\sigma + (1 - t) M) = stG_\sigma + (1 - st) M.$$

Легко видеть, что произведение $I \times U_n$ является амальгамой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \coprod_\sigma (I \times |\tilde{\sigma}|^{-1}(U_{n-1})) & \to & \coprod_\sigma (I \times U_\sigma) \\ \downarrow & & \\ I \times U_{n-1} & & \end{array}$$

(см. п. 1.7 и ниже п. 2.1). Поэтому существует непрерывное отображение $r: I \times U_n \to U_n$, индуцирующее на $I \times U_{n-1}$ каноническую проекцию на U_{n-1}, а на $I \times U_\sigma$ — отображение $(s, x) \rightsquigarrow |\tilde{\sigma}|\, r_\sigma(s, x)$. Это отображение и является ретрагирующей деформацией множества U_n на множество U_{n-1}.

Отсюда следует, что *множество U_{n-1} является деформационным ретрактом произвольного своего распространения U_{n-1}^λ на $|X|$*. Действительно, поскольку множество U_{n-1}^λ является прямым пределом множеств U_r, $r \geqslant n - 1$, мы можем построить его ретрагирующую деформацию $(s, x) \rightsquigarrow \rho(s, x)$ на U_{n-1}, ретрагируя множество U_n на множество U_{n-1} при s, пробегающем отрезок $[1/2, 1]$, множество U_{n+1} на множество U_n при s, пробегающем отрезок $[1/4, 1/2]$, множество U_{n+2} на множество U_{n+1} при s, пробегающем отрезок $[1/8, 1/4]$, и т. д.

Применив полученный результат к множествам $U_{n-1} = V_x^\varepsilon$, мы немедленно получим, что

каждая точка x пространства $|X|$ обладает базисом окрестностей, состоящим из открытых стягиваемых множеств.

§ 2. КАОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Для любых топологических пространств Y и Z мы символом $CO(Y, Z)$ будем обозначать множество всех непрерывных отображений из Y в Z, снабженное компактно-открытой топологией. В этой топологии открытыми множествами являются произвольные объединения конечных пересечений множеств вида $W(C, U)$, задаваемых произвольным компактным множеством $C \subset Y$ и произвольным открытым множеством $U \subset Z$ и состоящих их всех отображений $f\colon Y \to Z$, для которых $f(C) \subset U$.

Каждому отображению $f\colon X \times Y \to Z$ и произвольной точке $x \in X$ мы отнесем отображение $f_x\colon Y \to Z$, определенное соответствием $y \rightsquigarrow f(x, y)$. Известно, что если пространство Y локально компактно, то соответствие $f \rightsquigarrow (f_x)_{x \in X}$ определяет биективное отображение

$$\mathcal{T}op(X \times Y, Z) \xrightarrow{\approx} \mathcal{T}op(X, CO(Y, Z)).$$

Таким образом, в этом случае функтор $X \rightsquigarrow X \times Y$ сопряжен слева с функтором $Z \rightsquigarrow CO(Y, Z)$ и потому *перестановочен с прямыми пределами.*

Следовательно, если, кроме того, пространство X каонно (см. п. 1.5.3 гл. I) и потому является прямым пределом своих компактных подпространств X', то произведение $X \times Y$ будет прямым пределом произведений $X' \times Y$ и, являясь хаусдорфовым пространством, будет каонным пространством. Тем самым доказано, что

2.1.1. *Для любого каонного пространства X и любого локально компактного пространства Y имеет место равенство*

$$X \times Y = (X \times Y)_{\mathcal{K}a}$$

(о пространстве $(X \times Y)_{\mathcal{K}a}$ см. п. 1.5.3 гл. I).

2.1.2. Для каждого каонного пространства Y пространство $CO(Y, Z)$ можно рассматривать как обратный предел в категории $\mathcal{T}op$ пространств $CO(Y', Z)$, где Y' пробегает все компактные подпространства пространства Y. С другой стороны, для любых двух каонных пространств X и Y пространство $(X \times Y)_{\mathcal{K}a}$ является прямым пределом пространств $X' \times Y'$, где X' и Y' пробегают все компактные подпространства пространств X и Y соответственно. Поэтому для любых трех каонных пространств X, Y и Z имеют место следующие отождествления:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}a((X \times Y)_{\mathcal{K}a}, Z) &\approx \mathcal{T}op\,(\varinjlim (X' \times Y', Z)) \approx \\
&\approx \varprojlim_{X', Y'} \mathcal{T}op\,(X' \times Y', Z) \approx \\
&\approx \varprojlim_{X', Y'} \mathcal{T}op\,(X', CO(Y', Z)) \approx \\
&\approx \varprojlim_{X'} \mathcal{T}op\,(X', \varprojlim_{Y'} CO(Y', Z)) \approx \\
&\approx \mathcal{T}op\,(\varinjlim_{X'} X', CO(Y, Z)) \approx \\
&\approx \mathcal{T}op\,(X, CO(Y, Z)) \approx \\
&\approx \mathcal{K}a\,(X, CO_{\mathcal{K}a}(Y, Z)),
\end{aligned}
$$

где $CO_{\mathcal{K}a}(Y, Z)$ — каонное пространство $CO(Y, Z)_{\mathcal{K}a}$, соответствующее хаусдорфову пространству $CO(Y, Z)$. Тем самым доказано следующее

Предложение. *В категории $\mathcal{K}a$ каонных пространств функтор $X \rightsquigarrow (X \times Y)_{\mathcal{K}a}$ сопряжен слева с функтором $Z \rightsquigarrow CO_{\mathcal{K}a}(Y, Z)$ и потому, в частности, перестановочен с прямыми пределами.*

2.2. В соответствии с общими обозначениями теории категорий мы для любого каонного пространства B будем символом $\mathcal{K}a/B$ обозначать категорию, объектами которой являются морфизмы $\xi: X \to B$ категории $\mathcal{K}a$ с областью значений B. Морфизмами $\alpha: \xi \to \eta$ этой категории, где $\xi: X \to B$ и $\eta: Y \to B$, считаются произвольные морфизмы $\alpha: X \to Y$ категории $\mathcal{K}a$, для которых $\xi = \eta \circ \alpha$. Объекты ξ категории $\mathcal{K}a/B$ называются *пространствами над пространством* B. Впрочем, этот термин часто применяется не к самим объектам ξ, а к их областям определения X, и тогда морфизм $\xi: X \to B$ называется *структурным морфизмом* пространства X как пространства над пространством B.

Каждый морфизм $f: B' \to B$ категории $\mathcal{K}a$ определяет некоторый функтор $\mathcal{K}a/f$: $\mathcal{K}a/B \to \mathcal{K}a/B'$, сопоставляющий произвольному пространству X над пространством B пространство $(\mathcal{K}a/f)X$, являющееся коамальгамой $(B' \underset{B}{\times} X)_{\mathcal{K}a}$ (в категории $\mathcal{K}a$) диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\xi"] \\
B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

где ξ — структурный морфизм пространства $\boldsymbol{X}$. За структурный морфизм пространства $(\mathcal{K}a/\boldsymbol{f})\boldsymbol{X}$ принимается при этом его каноническая проекция на пространство $\boldsymbol{B}'$. Функтор $\mathcal{K}a/\boldsymbol{f}$ мы будем называть *функтором замены базы,* определенным морфизмом $\boldsymbol{f}$. В случае когда пространство $\boldsymbol{B}$ состоит только из одной точки, коамальгама $(\boldsymbol{B}' \underset{\boldsymbol{B}}{\times} \boldsymbol{X})_{\mathcal{K}a}$ сводится к произведению $(\boldsymbol{B}' \times \boldsymbol{X})_{\mathcal{K}a}$, так что в этом случае функтор замены базы перестановочен, согласно предыдущему предложению, с прямыми пределами. В общем же случае справедливо следующее

Предложение. *Если для диаграммы $\boldsymbol{\delta}\colon T \to \mathcal{K}a/\boldsymbol{B}$ над категорией $\mathcal{K}a/\boldsymbol{B}$ диаграмма $\boldsymbol{d}\colon T \to \mathcal{K}a$, сопоставляющая произвольному объекту $t \in T$ область определения морфизма $\boldsymbol{\delta}(t)$, обладает тем свойством, что пространство $\lim i \circ \boldsymbol{d}$, где i — вложение категории $\mathcal{K}a$ в категорию $\mathcal{T}op$, хаусдорфово, то для любого морфизма $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{B}' \to \boldsymbol{B}$ категории $\mathcal{K}a$ канонический морфизм*

$$\varinjlim_t (\boldsymbol{d}(t) \underset{\boldsymbol{B}}{\times} \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a} \to ((\varinjlim_t \boldsymbol{d}(t)) \underset{\boldsymbol{B}}{\times} \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a}$$

является обратимым морфизмом категории $\mathcal{K}a$ (гомеоморфизмом).

Доказательство. По определению пространство $(\boldsymbol{d}(t) \underset{\boldsymbol{B}}{\times} \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a}$ является ядром пары морфизмов $\boldsymbol{\delta}(t) \circ \mathrm{pr}_1,\ \boldsymbol{f} \circ \mathrm{pr}_2\colon$ $(\boldsymbol{d}(t) \times \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a} \to \boldsymbol{B}$, где pr_1 и pr_2 — канонические проекции произведения $(\boldsymbol{d}(t) \times \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a}$ на его сомножители. Следовательно, переходя к пределу (в категории $\mathcal{K}a$), мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(\boldsymbol{d}(t) \underset{\boldsymbol{B}}{\times} \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a} \arrow[r, "\text{вложение}"] \arrow[d] & (\boldsymbol{d}(t) \times \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a} \arrow[d] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
\varinjlim (\boldsymbol{d}(t) \underset{\boldsymbol{B}}{\times} \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "u"'] & \varinjlim (\boldsymbol{d}(t) \times \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a} \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "v"'] & \boldsymbol{B} \\
((\varinjlim \boldsymbol{d}(t)) \underset{\boldsymbol{B}}{\times} \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a} \arrow[r, "\text{вложение}"] & ((\varinjlim \boldsymbol{d}(t)) \times \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] &
\end{tikzcd}$$

все морфизмы которой «очевидны». Согласно предложению 2.1.2, морфизм $\boldsymbol{v}$ обратим, и мы хотим показать, что морфизм $\boldsymbol{u}$ также обратим. Поскольку пространство $((\varinjlim \boldsymbol{d}(t)) \underset{\boldsymbol{B}}{\times} \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a}$ является ядром пары морфизмов $((\varinjlim \boldsymbol{d}(t)) \times \boldsymbol{B}')_{\mathcal{K}a} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \boldsymbol{B}$, для этого достаточно показать, что отображение $\boldsymbol{j}$, образом которого служит

$\operatorname{Ker}(\alpha, \beta)$, инъективно и замкнуто. Так как отображение v обратимо и так как прямым пределом множеств $d(t)$ (рассматриваемых без топологии) является множество $\varinjlim d(t)$, то множество $\varinjlim (d(t) \times B')_{\mathcal{K}a}$ представляет собой прямой предел множеств $(d(t) \times B')_{\mathcal{K}a}$. Пусть L — прямой предел множеств $(d(t) \underset{B}{\times} B')_{\mathcal{K}a}$ (в категории $\mathcal{E}ns$). Вложения $(d(t) \underset{B}{\times} B')_{\mathcal{K}a} \to (d(t) \times B')_{\mathcal{K}a}$ определяют в пределе некоторое, очевидно инъективное, отображение множества L в множество $\varinjlim (d(t) \times B')_{\mathcal{K}a}$, являющееся композицией канонического надъективного отображения $p: L \to \varinjlim (d(t) \underset{B}{\times} B')_{\mathcal{K}a}$ и отображения j. Поэтому отображение p биективно, а отображение j инъективно.

Пусть теперь F — произвольное замкнутое подмножество пространства $\varinjlim (d(t) \underset{B}{\times} B')_{\mathcal{K}a}$. Мы должны показать, что множество $j(F)$ пространства $\varinjlim (d(t) \times B')_{\mathcal{K}a}$ также замкнуто. Так как в категории множеств $(d(t) \underset{B}{\times} B')_{\mathcal{K}a} = \operatorname{Ker}(\delta(t) \circ \mathrm{pr}_1, f \circ \mathrm{pr}_2)$ и $\operatorname{Im} j = \operatorname{Ker}(\alpha, \beta)$, то для любого t прообраз F' множества $j(F)$ в пространстве $(d(t) \times B')_{\mathcal{K}a}$ совпадает с прообразом F'' множества F в пространстве $(d(t) \underset{B}{\times} B')_{\mathcal{K}a}$. Поскольку множество F замкнуто, множество F'', а потому и множество F' также замкнуто. Поскольку это верно для любого t, множество $j(F)$ замкнуто.

§ 3. ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ФУНКТОРА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ С ПРЯМЫМИ И ОБРАТНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

3.1. Возвращаясь к изучению функтора геометрической реализации $|?|$, напомним, что по определению для любого симплициального множества X пространство $|X|$ является прямым пределом диаграммы

$$\delta_X : (\Delta[n] \xrightarrow{a} X) \rightsquigarrow \Delta^n$$

типа Δ/X над категорией $\mathcal{T}op$ (см. п. 1.4). Так как пространство $|X|$ хаусдорфово (см. п. 1.8) и является прямым пределом каонных пространств, т. е. хаусдорфовым факторпространством некоторой прямой суммы каонных пространств, то (см. п. 1.5.3 гл. I) *пространство* $|X|$ *каонно*. Этот факт позволяет нам рассматривать функтор $|?|$ как функтор из категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ в категорию каонных пространств $\mathcal{K}a$. Всюду в дальнейшем, если только явно не будет оговорено противное, *мы будем всегда считать функтор* $|\,?\,|$ *принимающим значения в категории* $\mathcal{K}a$. Смысл этого соглашения немедленно выясняется следующей теоремой (неверной при первоначальном понимании функтора $|\,?\,|$ как функтора со значениями в категории $\mathcal{T}op$):

Теорема. *Функтор геометрической реализации*

$$|\,?\,|:\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns\to\mathcal{K}a$$

перестановочен с прямыми пределами и конечными обратными пределами. Кроме того, этот функтор консервативен (т. е. морфизм α *категории* $\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns$ *обратим, если обратим морфизм* $|\alpha|$).

Из этой теоремы, в частности, следует, что функтор $|\,?\,|:\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns\to\mathcal{K}a$ произведения переводит в произведения, универсальные квадраты — в универсальные квадраты, коуниверсальные квадраты — в коуниверсальные квадраты, ядра — в ядра и коядра — в коядра. Например, пусть $f: X\to Y$ — произвольный морфизм категории $\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns$. Рассмотрим коммутативные квадраты

$$\begin{tikzcd} X\sqcap_Y X \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{in}_2"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{in}_1"] & Y\sqcup_X Y \end{tikzcd}$$

первый из которых универсален, а второй коуниверсален. Ясно, что морфизм f является композицией канонической проекции симплициального множества X на коядро $\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$, некоторого изоморфизма этого коядра на ядро $\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2)$ и канонического мономорфизма ядра $\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2)$ в симплициальное множество Y. Поэтому непрерывное отображение $|f|:|X|\to|Y|$ является композицией канонической проекции пространства $|X|$ на коядро $\mathrm{Coker}(|\mathrm{pr}_1|, |\mathrm{pr}_2|)$ (совпадающее с реализацией $|\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)|$ коядра $\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$), некоторого гомеоморфизма этого коядра на ядро $\mathrm{Ker}(|\mathrm{in}_1|, |\mathrm{in}_2|)$ (являющееся замкнутым подпространством пространства $|Y|$, которое может быть отождествлено с реализацией $|\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2)|$ ядра $\mathrm{Ker}(\mathrm{in}_1, \mathrm{in}_2)$) и отображения вложения ядра $\mathrm{Ker}(|\mathrm{in}_1|, |\mathrm{in}_2|)$ в пространство $|Y|$. Это показывает, что *функтор* $|\,?\,|$ *перестановочен также и с операцией построения образа морфизма.*

Из последнего замечания непосредственно вытекает, в частности, новое доказательство предложения п. 1.5 о гомеоморфности пространств $|\dot\Delta[n]|$ и $\dot\Delta^n$. Действительно, ясно, что граница $\dot\Delta[n]$ стандартного симплекса $\Delta[n]$ является образом рассмотренного в п. 1.5 морфизма p, а граница $\dot\Delta^n$ геометрического симплекса Δ^n — образом его геометрической реализации $|p|$.

Мы видим, какое большое значение имеет рассматриваемая теорема. Ее доказательству будет посвящена остальная часть этого параграфа. К сожалению, в ходе этого доказательства нам придется предварительно доказать некоторые из указанных выше ее следствий.

В первую очередь мы покажем, что *функтор* $|\,?\,|$ *перестановочен с прямыми пределами.*

Пусть, как и выше, i — вложение категории $\mathcal{K}a$ в категорию $\mathcal{T}op$. Мы уже знаем, что функтор $i \circ |\,?\,|$ перестановочен с прямыми пределами, так что для любой диаграммы $d\colon T \to \Delta^\circ\mathcal{E}ns$ пространство $\varinjlim (i \circ |\,?\,| \circ d)$ может быть отождествлено с пространством $i(|\varinjlim d|)$. Но так как последнее пространство хаусдорфово, то, согласно п. 1.5.3 гл. I, пространство $\varinjlim (i \circ |\,?\,| \circ d)$ может быть отождествлено с пространством $i\,(\varinjlim (|\,?\,| \circ d))$. Следовательно, пространство $i\,(\varinjlim (|\,?\,| \circ d))$ естественно гомеоморфно пространству $i\,(|\varinjlim d|)$, а, значит, пространство $\varinjlim (|\,?\,| \circ d)$ — пространству $|\varinjlim d|$.

3.2. Покажем далее, что *для любого мономорфизма* $f\colon X \to Y$ *категории* $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ *отображение* $|f|\colon |X| \to |Y|$ *инъективно и замкнуто.*

Ясно, что, без ограничения общности, мы симплициальное множество X можем считать подмножеством симплициального множества Y, а морфизм f — вложением. Пусть Σ'^n — множество невырожденных n-мерных симплексов множества Y, не принадлежащих множеству X. Рассуждения, аналогичные соображениям, использованным в п. 3.8 гл. II, показывают, что имеет место коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \coprod\limits_{\sigma \in \Sigma'^n} \dot{\Delta}[n]_\sigma & \longrightarrow & \mathrm{Sk}^{n-1} Y \cup X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ \coprod\limits_{\sigma \in \Sigma'^n} \Delta[n]_\sigma & \xrightarrow{q} & \mathrm{Sk}^n Y \cup X \end{array}$$

где i и f_{n-1} — вложения, а q — морфизм, индуцированный сингулярными симплексами $\tilde{\sigma}\colon \Delta[n]_\sigma \to Y$. Поэтому имеет место и коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \coprod\limits_{\sigma \in \Sigma'^n} \dot{\Delta}_\sigma & \longrightarrow & |\mathrm{Sk}^{n-1} Y \cup X| \\ {\scriptstyle |i|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |f_{n-1}|} \\ \coprod\limits_{\sigma \in \Sigma'^n} \Delta_\sigma & \longrightarrow & |\mathrm{Sk}^n Y \cup X| \end{array}$$

(ибо по уже доказанному функтор $|\,?\,|$ перестановочен с прямыми пределами). Но отображение $|i|$, а следовательно, и отображение $|f_{n-1}|$ инъективно и замкнуто. Поэтому, переходя к пределу, мы немедленно получаем, что отображение

$$|f|\colon |X| = |\mathrm{Sk}^{-1}Y \cup X| \to \varinjlim_n |\mathrm{Sk}^n Y \cup X| = |Y|$$

также инъективно и замкнуто.

3.3. Покажем теперь, что *функтор геометрической реализации перестановочен с ядрами.*

Пусть N — ядро пары морфизмов $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, и пусть $i\colon N \to X$ — каноническая инъекция. Согласно п. 3.2, отображение $|i|\colon |N| \to |X|$ инъективно и замкнуто. Поэтому для доказательства нашего утверждения достаточно лишь доказать, что $|i|$ отображает пространство $|N|$ на подпространство пространства $|X|$, состоящее из всех точек $x \in |X|$, для которых $|f|(x) = |g|(x)$ (т. е. на ядро пары $|f|, |g|\colon |X| \rightrightarrows |Y|$). Но поскольку отображения $|f|$ и $|g|$ согласованы с действиями группы автоморфизмов функтора $|\,?\,|$ на пространствах $|X|$ и $|Y|$, из равенства $|f|(x) = |g|(x)$ вытекает, что отображения $|f|$ и $|g|$ совпадают на всей орбите точки x и потому совпадают на замыкании содержащей точку x клетки C; см. п. 1.6. Пусть $\sigma \in X_n$ — невырожденный симплекс, соответствующий клетке C, а $\tilde{\sigma}\colon \Delta[n] \to X$ — отвечающий ему сингулярный симплекс. Тогда $|f \circ \tilde{\sigma}| = |g \circ \tilde{\sigma}|$. Пусть, далее, $\tau \in I_m$ — невырожденный симплекс, соответствующий клетке $|f|(C) = |q|(C)$, а $\tilde{\tau}\colon \Delta[m] \to Y$ — отвечающий ему сингулярный симплекс. Тогда в категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ существуют такие эпиморфизмы $p, q\colon \Delta[n] \to \Delta[m]$, что $f \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\tau} \circ p$, $g \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\tau} \circ q$ и, следовательно, $|\tilde{\tau} \circ p| = |\tilde{\tau} \circ q|$. Поскольку отображение $|\tilde{\tau}|$ инъективно на внутренности симплекса Δ^m, равенство $|\tilde{\tau} \circ p| = |\tilde{\tau} \circ q|$ возможно только тогда, когда отображения $|p|$ и $|q|$ совпадают на внутренности симплекса $|\Delta[n]|$, а потому и на всем этом симплексе. С другой стороны, ясно, что равенство $|p| = |q|$ возможно только при $p = q$. Это доказывает, что $f \circ \tilde{\sigma} = g \circ \tilde{\sigma}$, т. е. что $f(\sigma) = g(\sigma)$. Следовательно, $\sigma \in N$. Таким образом, точка x действительно принадлежит образу отображения $|i|$.

3.4. Чтобы доказать, что функтор $|?|$ перестановочен с конечными обратными пределами, нам осталось доказать, что он перестановочен с прямыми произведениями. Для этого мы покажем сначала, что для любой пары p, q натуральных чисел *каноническое отображение*

$$|\Delta[p]\times\Delta[q]|\to|\Delta[p]|\times|\Delta[q]|$$

является гомеоморфизмом

Воспользуемся построенным в п. 5.5 гл.II представлением симплициального множества $\Delta[p]\times\Delta[q]$ как коядра пары морфизмов

$$\coprod_{1\leqslant i<j\leqslant\binom{p+q}{p}}\Delta[n_{c(i)\cap c(j)}]\overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}}\coprod_{1\leqslant i\leqslant\binom{p+q}{p}}\Delta[n_{c(i)}],$$

где $c(i)$ пробегает все максимальные цепи множества $[p]\times[q]$, а морфизмы u и v определены вложениями цепей $c(i)\cap c(j)$ в цепи $c(i)$ и $c(j)$ соответственно.

Пусть $s_0, s_1, \ldots, s_{p+1}$ — координаты точек пространства R^{p+2}; $t_0, t_1, \ldots, t_{q+1}$ — координаты точек пространства R^{q+2} и $u_0, u_1, \ldots, u_{p+q+1}$ — координаты точек симплекса $\Delta^{p+q}\subset R^{p+q+2}$. Каждой максимальной цепи $c(i)$ множества $[p]\times[q]$ мы отнесем отображение f_i симплекса $\Delta^{p+q}\approx|\Delta[n_{c(i)}]|$ в пространство $R^{p+2}\times R^{q+2}$, переводящее точку $u=(u_0, u_1, \ldots, u_{p+q+1})$ в точку $(s_0, s_1, \ldots, s_{q+1}; t_0, t_1, \ldots, t_{q+1})$, определенную формулами

$$s_0=u_0,\ s_1=u_{i_1}, \ldots, s_p=u_{i_p},\ s_{p+1}=u_{p+q+1},$$

$$t_0=u_0,\ t_1=u_{j_1}, \ldots, t_q=u_{j_q},\ t_{q+1}=u_{p+q+1},$$

где $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q)$ — перетасовка, соответствующая цепи $c(i)$ (см. п. 5.5 гл.II). Ясно, что это отображение определяет гомеоморфизм симплекса Δ^{p+q} на некоторый геометрический симплекс $\Delta_{c(i)}$, расположенный в пространстве $R^{p+2}\times R^{q+2}$ (и даже в его подпространстве $\Delta^p\times\Delta^q$). Например, для цепей $c(i)$ и $c(j)$, изображенных

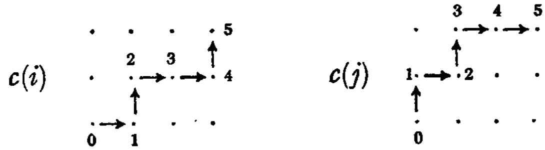


Рис. 2

на рис. 2, симплекс $\Delta_{c(i)}$ определяется соотношениями

$$0=s_0=t_0\leqslant s_1\leqslant t_1\leqslant s_2\leqslant s_3\leqslant t_2\leqslant s_4=t_3=1,$$

а симплекс $\Delta_{c(j)}$ — соотношениями

$$0=s_0=t_0\leqslant t_1\leqslant s_1\leqslant t_2\leqslant s_2\leqslant s_3\leqslant s_4=t_3=1.$$

Компонируя отображение f_i с отображением $|\Delta[n_{c(i)\cap c(j)}]| \to$ $\to |\Delta[n_{c(i)}]|$, определенным вложением цепи $c(i)\cap c(j)$ в цепь $c(j)$, мы получаем некоторое гомеоморфное отображение $f_{i,j}$ симплекса $|\Delta[n_{c(i)\cap c(j)}]|$ на симплекс $\Delta_{c(i)}\cap\Delta_{c(j)}$. Для цепей $c(i)$ и $c(j)$, изображенных на рис. 2, симплекс $\Delta_{c(i)}\cap\Delta_{c(j)}$ определяется соотношениями

$$0 = s_0 = t_0 \leqslant s_1 = t_1 \leqslant s_2 = s_3 = t_2 \leqslant s_4 = t_3 = 1,$$

а отображение $f_{i,j}$ — формулой

$$f_{i,j}(u_0, u_1, u_2, u_3) = (u_0, u_1, u_2, u_2, u_3;\ u_0, u_1, u_2, u_3).$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\sqcup |\Delta[n_{c(i)\cap c(j)}]| \arrow[r, shift left, "|u|"] \arrow[r, shift right, "|v|"'] \arrow[d, "\sqcup f_{i,j}"] & \sqcup |\Delta[n_{c(i)}]| \arrow[d, "\sqcup f_i"] \\
\sqcup (\Delta_{c(i)}\cap\Delta_{c(j)}) \arrow[r, shift left, "u'"] \arrow[r, shift right, "v'"'] & \sqcup \Delta_{c(i)}
\end{tikzcd}$$

отображения u' и v' которой определены вложениями симплексов $\Delta_{c(i)}\cap\Delta_{c(j)}$ в симплексы $\Delta_{c(i)}$ и $\Delta_{c(j)}$ соответственно. Из сказанного выше непосредственно следует, что эта диаграмма коммутативна. причем отображения $\sqcup f_{i,j}$ и $\sqcup f_i$ являются гомеоморфизмами, Поэтому эта диаграмма определяет гомеоморфное отображение коядра Coker $(|u|, |v|)$ пары $|u|$, $|v|$ на коядро Coker (u', v') пары u', v'. Но, поскольку функтор $|?|$ перестановочен с прямыми пределами, геометрическая реализация морфизма $\pi\colon \sqcup\Delta[n_{c(i)}] \to$ $\to \Delta[p]\times\Delta[q]$, индуцированного вложениями цепей $c(i)$ в множество $[p]\times[q]$, определяет, очевидно, отождествление коядра Coker$(|u|,|v|)$ с пространством $|\Delta[p]\times\Delta[q]|$. С другой стороны, вложения симплексов $\Delta_{c(i)}$ в произведение $\Delta^p\times\Delta^q\subset \boldsymbol{R}^{p+2}\times\boldsymbol{R}^{q+2}$ определяют, как легко видеть, отождествление коядра Coker (u', v') с произведением $\Delta^p\times\Delta^q$. Тем самым мы получаем некоторый вполне определенный гомеоморфизм пространства $|\Delta[p]\times\Delta[q]|$ на произведение $\Delta^p\times\Delta^q$. Для завершения доказательства остается заметить, что этот гомеоморфизм совпадает, очевидно, с каноническим отображением $|\Delta[p]\times\Delta[q]| \to |\Delta[p]|\times|\Delta[q]|$.

3.5. Пусть теперь X и Y — произвольные симплициальные множества. Как мы знаем (см. п. 1.1 гл. II), эти множества можно отождествить с прямыми пределами диаграмм $d_X\colon \Delta/X \to \Delta^\circ\mathcal{E}ns$ и $d_Y\colon \Delta/Y \to \Delta^\circ\mathcal{E}ns$ соответственно. С другой стороны, в категории каонных пространств произведение перестановочно с прямыми пределами (предложение 2.1.2). Поэтому

$$\begin{aligned} |X\times Y| &\approx |\varinjlim_{\alpha} d_X(\alpha)\times\varinjlim_{\beta} d_Y(\beta)|\approx \\ &\approx |\varinjlim_{\alpha,\beta}(d_X(\alpha)\times d_Y(\beta))|\approx \\ &\approx \varinjlim_{\alpha,\beta}|d_X(\alpha)\times d_Y(\beta)|\approx \\ &\approx \varinjlim_{\alpha,\beta}(|d_X(\alpha)|\times|d_Y(\beta)|)\approx \\ &\approx (\varinjlim_{\alpha}|d_X(\alpha)|\times\varinjlim_{\beta}|d_Y(\beta)|)_{\mathcal{K}a}\approx \\ &\approx (|X|\times|Y|)_{\mathcal{K}a} \end{aligned}$$

(ср. аналогичное рассуждение в п. 7.5 гл. II). Остается показать, что композиция этих гомеоморфизмов совпадает с каноническим отображением $|X\times Y|\to(|X|\times|Y|)_{\mathcal{K}a}$. Но это очевидно.

3.6. Покажем, наконец, что *функтор геометрической реализации консервативен*. Пусть $f\colon X\to Y$ — произвольный необратимый морфизм категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$. Нам нужно показать, что морфизм $|f|$ также необратим (не является гомеоморфизмом).

Если морфизм f представляет собой мономорфизм, то симплициальное множество Y содержит невырожденный симплекс σ, не являющийся образом никакого симплекса множества X. Поскольку орбиты группы автоморфизмов функтора $|?|$ в пространстве $|Y|$ взаимно однозначно отвечают невырожденным симплексам множества Y, орбита, соответствующая симплексу σ, не принадлежит образу отображения $|f|$. Следовательно, это отображение не гомеоморфно.

Пусть морфизм f не является мономорфизмом. Рассмотрим определенное этим морфизмом отношение эквивалентности на множестве X. По определению два симплекса x и y множества X эквивалентны по этому отношению, если они имеют одну и ту же размерность, скажем q, и $f_q(x)=f_q(y)$. Как подмножество произведения $X\times X$ это отношение является, очевидно, не чем иным, как коамальгамой $X\underset{Y}{\times}X$ диаграммы $X\xrightarrow{f}Y\xleftarrow{f}X$. Поэтому, поскольку функтор $|?|$ перестановочен с конечными обратными пределами, реализация $|X\underset{Y}{\times}X|$ симплициального множества $X\underset{Y}{\times}X$ является коамальгамой $|X| \underset{|Y|}{\times} |X|$ диаграммы $|X| \xrightarrow{|f|} |Y| \xleftarrow{|f|} |X|$, т. е. является отношением эквивалентности, определенным на пространстве $|X|$ отображением $|f|$. Но, поскольку морфизм f не является по условию мономорфизмом, определенное им отношение эквивалентности $X \underset{Y}{\times} X$ отлично от тождественного отношения, представляемого диагональю D_X множества X (т. е. подмножеством произведения $X \times X$, состоящим из всех пар вида (x, x)). Поэтому его геометрическая реализация $|X| \underset{|Y|}{\times} |X|$ отлична от диагонали $D_{|X|}$ (являющейся, очевидно, реализацией диагонали D_X). Следовательно, каноническая проекция пространства $|X|$ на факторпространство $|X|/|X| \underset{|Y|}{\times} |X|$ не инъективна. Но отображение $|f|$ является, очевидно, композицией этой проекции и некоторого (инъективного) отображения $|X|/|X| \underset{|Y|}{\times} |X| \to |Y|$. Поэтому отображение $|f|$ также не инъективно, т. е. гомеоморфизмом не является.

Тем самым теорема 3.1 полностью доказана.

3.7. Заметим, что функтор $|?|$, вообще говоря, не перестановочен с бесконечными обратными пределами. Например, для любого кардинального числа c образом канонического отображения пространства $|\Delta[1]^c|$ в пространство $|\Delta[1]|^c$ является подмножество последнего пространства, состоящее из точек, координаты которых принимают лишь конечное число различных значений.

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОКАЛЬНО ТРИВИАЛЬНЫХ МОРФИЗМОВ

4.1. Морфизм $f\colon Y \to X$ категории $\Delta^\circ\mathscr{E}nl$ называется *тривиальным*, если существуют такое симплициальное множество F и такой изоморфизм $\alpha\colon X \times F \approx Y$, что $\mathrm{pr}_1 = f \circ \alpha$, где pr_1 — каноническая проекция произведения $X \times F$ на первый его множитель X. В этом случае для любого сингулярного нульмерного симплекса $\tilde{x}\colon \Delta[0] \to X$ симплициальное множество $f^{-1}(x) = \Delta[0] \underset{\tilde{x}, f}{\times} Y$ изоморфно множеству F. Мы будем симплициальное множество F называть *слоем* тривиального морфизма f.

Морфизм $f\colon Y \to X$ категории $\Delta^\circ\mathscr{E}nl$ называется *локально тривиальным*, если для каждого сингулярного симплекса $\tilde{\sigma}\colon \Delta[n] \to X$ проекция коамальгамы $\Delta[n] \underset{\tilde{\sigma}, f}{\times} X$ на стандартный симплекс $\Delta[n]$ тривиальна. Пусть F_σ — слой этой проекции. В случае когда все слои F_σ изоморфны одному и тому же симплициальному множеству F, мы будем морфизм f называть локально тривиальным морфизмом *со слоем* F. Так обязательно будет, если симплициальное множество X связно (п.7.3 гл. II).

Аналогично, морфизм $\boldsymbol{u}\colon \boldsymbol{L}\to\boldsymbol{K}$ категории каонных пространств $\mathcal{K}a$ называется *тривиальным морфизмом со слоем* $\boldsymbol{T}$, если существует такой гомеоморфизм $\boldsymbol{\beta}\colon (\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{T})_{\mathcal{K}a}\approx\boldsymbol{L}$, что $\mathrm{pr}_1=\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{\beta}$, где pr_1, — как всегда, проекция произведения на его первый множитель. Морфизм $\boldsymbol{u}$ называется *локально тривиальным*, если каждая точка $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{K}$ обладает такой открытой окрестностью $\boldsymbol{U}$, что морфизм $\boldsymbol{u}^{-1}(\boldsymbol{U})\to\boldsymbol{U}$, индуцированный морфизмом $\boldsymbol{u}$, тривиален (заметим, что, согласно п. 1.5.3 гл.I, открытые можества $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{u}^{-1}(\boldsymbol{U})$ являются каонными пространствами). В случае когда слои этих тривиальных морфизмов все изоморфны одному и тому же (каонному) пространству $\boldsymbol{T}$, морфизм $\boldsymbol{u}$ называется локально тривиальным морфизмом *со слоем* $\boldsymbol{T}$.

Подчеркнем, что, поскольку в последних определениях мы все произведения рассматриваем в категории $\mathcal{K}a$, эти определения отличны от классических.

4.2. Теорема. *Функтор геометрической реализации* $|\ ?\ |\colon \Delta^\circ\mathcal{E}n\iota\to$ $\to\mathcal{K}a$ *переводит локально тривиальные морфизмы со слоем* F *в локально тривиальные морфизмы со слоем* $|F|$.

Доказательство. Пусть $f\colon Y\to X$ — локально тривиальный морфизм категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\iota$ со слоем F, $\boldsymbol{x}$ — произвольная точка пространства $|X|$, m — размерность клетки $\boldsymbol{U}_m$ пространства $|X|$, содержащей точку $\boldsymbol{x}$, и σ — невырожденный симплекс симплициального множества X, соответствующий этой клетке. Пусть, далее, $\boldsymbol{U}_n$, $n\geqslant m$, и $\boldsymbol{U}$ — распространения ширины $\lambda=1$ клетки $\boldsymbol{U}_m$ на пространства $|\mathrm{Sk}^n X|$ и $|X|$ соответственно (таким образом, в обозначениях п. 1.8 множество $\boldsymbol{U}$ является не чем иным, как окрестностью $\boldsymbol{V}^{1;1}_{\boldsymbol{x}}$ точки $\boldsymbol{x}$). Мы покажем, что морфизм $|f|$ индуцирует тривиальный морфизм со слоем $|F|$ множества $|f|^{-1}(\boldsymbol{U})$ на множество $\boldsymbol{U}$. Для этого мы, согласно определению, должны построить некоторый гомеоморфизм $\boldsymbol{\alpha}\colon (\boldsymbol{U}\times|F|)_{\mathcal{K}a}\to|f|^{-1}(\boldsymbol{U})$, обладающий тем свойством, что $\mathrm{pr}_1=\boldsymbol{q}\circ\boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{q}\colon |f|^{-1}(\boldsymbol{U})\to\boldsymbol{U}$ — морфизм, индуцированный морфизмом $|f|$.

Поскольку пространство $\boldsymbol{U}$ является прямым пределом пространств $\boldsymbol{U}_n$, пространство $(\boldsymbol{U}\times|F|)_{\mathcal{K}a}$ — прямым пределом пространств $(\boldsymbol{U}_n\times|F|)_{\mathcal{K}a}$ (п. 2.1), а пространство $|f|^{-1}(\boldsymbol{U})$, являющееся, очевидно, коамальгамой $(\boldsymbol{U}\underset{|X|}{\times}|\boldsymbol{Y}|)_{\mathcal{K}a}$, — прямым пределом пространств $|f|^{-1}(\boldsymbol{U}_n)=(\boldsymbol{U}_n\underset{|X|}{\times}|Y|)_{\mathcal{K}a}$, для построения гомеоморфизма $\boldsymbol{\alpha}$ достаточно построить прямую систему гомеоморфизмов

$$\boldsymbol{\alpha}_n\colon (\boldsymbol{U}_n\times|F|)_{\mathcal{K}a}\to|f^{-1}|\,(\boldsymbol{U}_n),$$

обладающих тем свойством, что $\mathrm{pr}_1 = q_n \circ \alpha_n$, где $q_n\colon |f|^{-1}(U_n) \to U_n$ — морфизм, индуцированный морфизмом $|f|$.

4.2.1. Построение начального изоморфизма α_m затруднений не вызывает. Действительно, по условию нам задан некоторый изоморфизм β симплициального множества $\Delta[m]\times F$ на симплициальное множество $\Delta[m] \underset{\tilde\sigma,f}{\times} F$, согласованный с каноническими проекциями этих множеств на симплициальное множество $\Delta[m]$. Так как отображение $|\tilde\sigma|$ индуцирует гомеоморфизм внутренности симплекса $|\Delta[m]|$ на множество U_m, то, согласно теореме 3.1, пространства $(U_m\times|F|)_{\mathcal{K}a}$ и $|f|^{-1}(U_m)$ отождествляются с некоторыми открытыми множествами пространств $|\Delta[m]\times F|$ и $|\Delta[m]\underset{\tilde\sigma,f}{\times} Y|$ соответственно, и за изоморфизм α_m мы можем принять отображение этих множеств, индуцированное морфизмом $|\beta|$.

4.2.2. Пусть теперь для некоторого $n > m$ изоморфизм α_{n-1} уже построен. Рассмотрим над категорией $\mathcal{K}a$ коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} U_\sigma\underset{|X|}{\times}|Y| \arrow[rr] \arrow[dd] & & |f|^{-1}(U_n) \arrow[dd] \\
\coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} \dot U_\sigma\underset{|X|}{\times}|Y| \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & |f|^{-1}(U_{n-1}) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} U_\sigma \arrow[rr] & & U_n \\
\coprod\limits_{\sigma\in\Sigma^n} \dot U_\sigma \arrow[ur] \arrow[rr] & & U_{n-1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

нижним квадратом которой служит коуниверсальный квадрат, построенный в п. 1.7 (для упрощения записи мы символом $\dot U_\sigma$ обозначаем здесь пространство $|\tilde\sigma|^{-1}(\dot U_{n-1})$), а верхний квадрат получается из нижнего применением функтора замены базы, определенного морфизмом $|f|\colon |Y| \to |X|$, и потому также коуниверсален (предложение 2.2).

Ясно, что гомеоморфизм $\alpha_{n-1}\colon (U_{n-1}\times|F|)_{\mathcal{K}a} \approx |f|^{-1}(U_{n-1})$ индуцирует после замены базы (посредством морфизмов $|\tilde\sigma|$) некоторые гомеоморфизмы $\alpha_\sigma\colon \dot U_\sigma\times|F| \to \dot U_\sigma\underset{|X|}{\times}|Y|$, согласованные с проекциями на $\dot U_\sigma$ (см. п. 2.1.1). С другой стороны, поскольку морфизм f локально тривиален, имеют место изоморфизмы $\beta_\sigma\colon \Delta[n]_\sigma \times$

$\times F \approx \Delta[n]_\sigma \underset{X}{\times} Y$, согласованные с проекциями на $\Delta[n]_\sigma$, геометрические реализации $|\beta_\sigma|$ которых, ввиду того что функтор геометрической реализации перестановочен с произведениями и коамальгамами, индуцируют некоторые гомеоморфизмы

$$\gamma_\sigma\colon U^\sigma \times |F| \approx U_\sigma \underset{|X|}{\times} |X| \text{ и } \delta_\sigma\colon \dot{U}_\sigma \times |F| \approx \dot{U}_\sigma \underset{|X|}{\times} Y.$$

Согласно доказываемой ниже лемме 4.2.3, автоморфизм $\delta_\sigma^{-1} \circ \alpha_\sigma$ произведения $\dot{U}_\sigma \times |F|$, согласованный с канонической проекцией этого произведения на пространство $\dot{U}_\sigma$, может быть продолжен до некоторого автоморфизма ψ_σ произведения $U_\sigma \times |F|$, согласованного с его проекцией на U_σ. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup U_\sigma \times |F| \arrow[d, "\bigsqcup(\gamma_\sigma \circ \psi_\sigma)"'] & \bigsqcup \dot{U}_\sigma \times |F| \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\bigsqcup \alpha_\sigma"'] & (U_{n-1} \times |F|)_{\mathcal{X}a} \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] \\
\bigsqcup U_\sigma \underset{|X|}{\times} |Y| & \bigsqcup \dot{U}_\sigma \underset{|X|}{\times} |Y| \arrow[l] \arrow[r] & |f|^{-1}(U_{n-1})
\end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которой строятся очевидным образом, причем эта диаграмма согласована с каноническими проекциями на первые множители (базы). Поэтому вертикальные изоморфизмы этой диаграммы индуцируют некоторый гомеоморфизм α_n амальгамы $(U_n \times |F|)_{\mathcal{X}a}$ ее верхней строки на амальгаму $(U_n \underset{|X|}{\times} |Y|)_{\mathcal{X}a} \approx$ $\approx |f|^{-1}(U_n)$ ее нижней строки (см. п. 2.2). Ясно, что этот гомеоморфизм обладает всеми нужными свойствами.

Тем самым теорема 4.2 полностью доказана (по модулю леммы 4.2.3).

4.2.3. Лемма. *Пусть A и F — каонные пространства. Тогда для любого ретракта B пространства A каждый автоморфизм φ произведения $(B \times F)_{\mathcal{X}a}$, согласованный с проекцией на первый множитель (т. е. обладающий тем свойством, что* $\mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi$), *может быть продолжен до некоторого автоморфизма ψ произведения $(A \times F)_{\mathcal{X}a}$, также согласованного с проекцией на первый множитель.*

Доказательство. Отображение φ имеет вид $(x, y) \rightsquigarrow (x, \Phi(x)y)$, где Φ — некоторое непрерывное отображение пространства B в пространство $CO(F, F)$ (см. п. 2.1.2), обладающее тем свойством, что для любой точки $x \in B$ отображение $\Phi(x)\colon F \to F$ обратимо, причем соответствующее отображение $x \rightsquigarrow \Phi(x)^{-1}$ пространства

$\boldsymbol{B}$ в пространство $\boldsymbol{CO}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F})$ непрерывно (непрерывное отображение $(x, y) \rightsquigarrow (x, \Phi(x)^{-1}y)$ является при этом автоморфизмом, обратным к автоморфизму φ). Пусть $\boldsymbol{r}$ — ретракция пространства $\boldsymbol{A}$ на пространство $\boldsymbol{B}$. Ясно, что отображение $\Psi = \Phi \circ \boldsymbol{r}$ обладает аналогичными свойствами, и потому формула $\psi(x, y) = (x, \Psi(x)\, y)$ определяет некоторый автоморфизм пространства $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{F})_{\mathcal{X}a}$, согласованный с проекцией на первый множитель и продолжающий автоморфизм φ.

Глава IV

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КАТЕГОРИЯ

§ 1. ГОМОТОПИИ

1.1. Пусть Y и Z — симплициальные множества и $\mathcal{H}om(Y, Z)$ — симплициальное множество, описанное в п. 2.5.3 гл. II. Вершинами множества $\mathcal{H}om(Y, Z)$ являются морфизмы $f\colon Y \to Z$. Для любых двух вершин f и g каждый одномерный симплекс h множества $\mathcal{H}om(Y, Z)$, такой, что $d_1 h = f$ и $d_0 h = g$, представляет собой морфизм $h\colon \Delta[1] \times Y \to Z$, для которого диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \Delta[0]\times Y\approx Y \arrow[dl, "\Delta(\partial_1^1)\times Y"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \Delta[1]\times Y \arrow[rr, "h"] & & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \Delta[0]\times Y\approx Y \arrow[dl, "\Delta(\partial_1^0)\times Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \Delta[1]\times Y \arrow[rr, "h"] & & Z \end{tikzcd}$$

коммутативны. Такого рода морфизмы мы будем называть *гомотопиями*, связывающими морфизм f с морфизмом g.

Пусть, далее, I_n — симплициальное множество, построенное в п. 2.5.1 гл. II (см. также п. 5.2.1 гл. II). Морфизм $h\colon I_n \times Y \to Z$ мы будем называть *составной гомотопией длины* n, связывающей морфизм f с морфизмом g, если имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \Delta[0]\times Y\approx Y \arrow[dl, "\varepsilon_0\times Y"'] \arrow[dr, "f"] & \\ I_n\times Y \arrow[rr, "h"] & & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \Delta[0]\times Y\approx Y \arrow[dl, "\varepsilon_n\times Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ I_n\times Y \arrow[rr, "h"] & & Z \end{tikzcd}$$

Поскольку $\Delta[1] = I_1$, просто гомотопии мы можем рассматривать как составные гомотопии длины 1.

Морфизмы f и g симплициального множества Y в симплициальное множество Z мы будем называть *гомотопными*, если существует хотя бы одна составная гомотопия, связывающая эти морфизмы. Согласно п. 7.3 гл. II, морфизмы f и g из Y в Z тогда и только тогда гомотопны, когда они принадлежат одной и той же компоненте связности симплициального множества $\mathcal{H}om(Y, Z)$. Ясно, что отношение гомотопности морфизмов является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются *гомотопическими классами*. Класс, содержащий морфизм f, мы будем обозначать символом $\bar{f}$. При $Y = \Delta[0]$ множество $\mathcal{H}om(Y, Z)$

совпадает с множеством Z, так что гомотопические классы в этом случае являются не чем иным, как множествами вершин компонент связности симплициального множества Z.

1.2. Пример. Упорядочим множество $\{0, 1, 2\}$ отношением, определенным неравенствами $0 \geqslant 1 \geqslant 2$. Пусть r_n^i — возрастающее отображение произведения $\{0, 1, 2\} \times [n]$ в множество $[n]$, определенное формулами

$$r(0, j) = j, \qquad r(1, j) = \begin{cases} j, & \text{если } j \geqslant i, \\ i, & \text{если } j \leqslant i, \end{cases} \qquad r(2, j) = i.$$

(На рис. 3 изображено множество $\{0, 1, 2\} \times [2]$ и около каждого его элемента написано соответствующее значение функции r_2^i.)

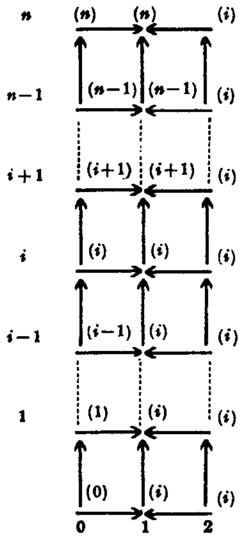


Рис. 3

Согласно п. 5.2 гл. II, симплициальное множество, соответствующее упорядоченному множеству $\{0, 1, 2\} \times [n]$, совпадает с симплициальным множеством $I_2 \times \Delta[n]$. Поэтому отображение r_n^i мы можем рассматривать как составную гомотопию $I_2 \times \Delta[n] \to \Delta[n]$ длины 2. Эта гомотопия связывает тождественное отображение стандартного симплекса $\Delta[n]$ с «проекцией этого симплекса на его i-ю вершину».

Заметим, что при $i \neq n$ тождественное отображение симплекса $\Delta[n]$ с «проекцией этого симплекса на его i-ю вершину» никакой гомотопией длины 1 связать нельзя.

1.3. Для любых симплициальных множеств Y и Z мы будем множество всех гомотопических классов морфизмов $Y \to Z$ временно обозначать символом $\pi_0(Y, Z)$. Как было отмечено в п. 1.1, это множество можно также рассматривать как множество компонент связности симплициального множества $\mathcal{H}om(Y, Z)$. Покажем, что *закон композиции*

$$\Delta^\circ \mathcal{E}ns(X, Y) \times \Delta^\circ \mathcal{E}ns(Y, Z) \to \Delta^\circ \mathcal{E}ns(X, Z)$$

категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ согласован с отношением гомотопности и потому определяет некоторое отображение

$$\pi_0(X, Y) \times \pi_0(Y, Z) \to \pi_0(X, Z).$$

С этой целью мы каждому морфизму $h\colon \Delta[n] \times X \to Y$ сопоставим морфизм $\tilde{h}\colon \Delta[n] \times X \to \Delta[n] \times Y$, компонентами которого являются каноническая проекция произведения $\Delta[n] \times X$ на симплекс $\Delta[n]$ и морфизм h, и рассмотрим морфизм симплициальных множеств

$$\nu_{X, Y, Z}\colon \mathcal{H}om(X, Y) \times \mathcal{H}om(Y, Z) \to \mathcal{H}om(X, Z),$$

переводящий пару $(h, k) \in \mathcal{H}om(X, Y)_n \times \mathcal{H}om(Y, Z)_n$ в морфизм $l\colon \Delta[n] \times X \to Z$, для которого $\tilde{l} = \tilde{k} \circ \tilde{h}$, т. е. в морфизм, являющийся композицией морфизмов

$$\Delta[n] \times X \xrightarrow{\tilde{h}} \Delta[n] \times Y \xrightarrow{k} Z.$$

На нульмерных симплексах (т. е. на морфизмах категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$) морфизм $\nu_{X, Y, Z}$ совпадает, очевидно, с законом композиции категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$. С другой стороны, поскольку функтор π_0, сопоставляющий каждому симплициальному множеству множество его компонент связности, перестановочен с конечными произведениями, отображение $\nu_{X, Y, Z}$ индуцирует некоторое отображение

$$\mu_{X, Y, Z}\colon \ \pi_0(X, Y) \times \pi_0(Y, Z) \to \pi_0(X, Z).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что это отображение согласовано с каноническими отображениями, сопоставляющими каждому нульмерному симплексу содержащую его компоненту связности.

Отображения $\mu_{X, Y, Z}$ мы можем принять за отображения, определяющие закон композиции некоторой категории, объектами которой являются симплициальные множества, а морфизмами — гомотопические классы морфизмов категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$. Эту категорию мы будем называть *категорией симплициальных множеств по модулю гомотопии* и будем обозначать ее символом $\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}$. Функтор из категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ в категорию $\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}$, являющийся тождественным отображением на объектах и сопоставляющий каждому морфизму категории $\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell$ его гомотопический класс, мы будем называть *каноническим функтором*.

Пусть $f: X \to Y$ и $g: Y \to Y'$ — произвольные морфизмы категории $\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell$. Обозначив гомотопический класс морфизма $g \circ f$ символом $\pi_0(X, g)\bar{f}$, где, как и выше, $\bar{f}$ — гомотопический класс морфизма f, мы, очевидно, получим некоторое отображение $\pi_0(X, g)$ множества $\pi_0(X, Y)$ в множество $\pi_0(X, Y')$, причем соответствия $Y \rightsquigarrow \pi_0(X, Y)$, $g \rightsquigarrow \pi_0(X, g)$ представляют собой некоторый функтор из категории $\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell$ в категорию множеств $\mathcal{E}n\ell$. Аналогично определяется функтор $X \rightsquigarrow \pi_0(X, Y)$, $f \rightsquigarrow \pi_0(f, Y)$, $f: X \to X'$, из категории $(\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell)^\circ$ в категорию $\mathcal{E}n\ell$, так что фактически мы имеем функтор двух переменных

$$\pi_0: (\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell)^\circ \times \Delta^\circ \mathcal{E}n\ell \to \mathcal{E}n\ell.$$

Ясно, что этот функтор является композицией функтора

$$\mathcal{H}om: (\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell)^\circ \times \Delta^\circ \mathcal{E}n\ell \to \Delta^\circ \mathcal{E}n\ell$$

и функтора $\pi_0: \Delta^\circ \mathcal{E}n\ell \to \mathcal{E}n\ell$, сопоставляющего каждому симплициальному множеству множество его компонент связности.

Легко видеть, что морфизмы $g, h: Y \to Y'$ категории $\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell$ тогда и только тогда гомотопны, когда для любого симплициального множества X имеет место равенство

$$\pi_0(X, g) = \pi_0(X, h).$$

Действительно, положив $X = Y$ и применив обе стороны этого равенства к гомотопическому классу тождественного морфизма симплициального множества Y, мы немедленно получим, что $\bar{g} = \bar{h}$. Обратное утверждение очевидно.

Двойственным образом морфизмы g и h тогда и только тогда гомотопны, когда для любого симплициального множества X имеет место равенство $\pi_0(g, X) = \pi_0(h, X)$.

1.4. Предложение. *Канонический функтор $\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell \to \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell}$ перестановочен с конечными прямыми суммами и произведениями.*

Доказательство. Пусть $(Y_i)_{i \in I}$ — конечное семейство симплициальных множеств. Ясно, что канонические проекции pr_i произведения $\prod_{i \in I} Y_i$ на его множители индуцируют биективные отображения

$$\psi_n: \Delta^\circ \mathcal{E}n\ell(\Delta[n] \times X, \prod_{i \in I} Y_i) \xrightarrow{\approx} \prod_{i \in I} \Delta^\circ \mathcal{E}n\ell(\Delta[n] \times X, Y_i), \ n \geqslant 0,$$

составляющие изоморфизм

$$\psi : \mathcal{H}om(X, \coprod_{i \in I} Y_i) \xrightarrow{\approx} \coprod_{i \in I} \mathcal{H}om(X, Y_i).$$

С другой стороны, поскольку функтор π_0 перестановочен с конечными произведениями, множество компонент связности произведения $\coprod_i \mathcal{H}om(X, Y_i)$ естественным образом отождествляется с произведением множеств $\pi_0(\mathcal{H}om(X, Y_i)) = \pi_0(X, Y_i)$ компонент связности сомножителей. Поэтому на компонентах связности изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм

$$\pi_0\psi : \pi_0(X, \coprod_{i \in I} Y_i) \xrightarrow{\approx} \coprod_{i \in I} \pi_0(X, Y_i).$$

Для конечных сумм доказательство проводится аналогично.

1.5. Согласно п. 2.5.3 гл. II, для любых симплициальных множеств X, Y, и Z имеет место изоморфизм

$$\Phi : \mathcal{H}om(X \times Y, Z) \xrightarrow{\approx} \mathcal{H}om(X, \mathcal{H}om(Y, Z)).$$

Поэтому имеет место и изоморфизм

$$\pi_0\Phi : \pi_0(X \times Y, Z) \xrightarrow{\approx} \pi_0(X, \mathcal{H}om(Y, Z)).$$

Отсюда непосредственно следует, что для любых двух гомотопных морфизмов $f, g : Z \to Z'$ категории $\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell$ морфизмы $\mathcal{H}om(Y, f)$ и $\mathcal{H}om(Y, g)$ также гомотопны. Действительно, для любого симплициального множества X имеет место равенство $\pi_0(X \times Y, f) = \pi_0(X \times Y, g)$, а потому и равенство $\pi_0(X, \mathcal{H}om(Y, f)) = \pi_0(X, \mathcal{H}om(Y, g))$. Аналогично доказывается, что для любых двух гомотопных морфизмов $f', g' : Y \to Y'$ морфизмы $\mathcal{H}om(f', Z)$ и $\mathcal{H}om(g', Z)$ также гомотопны.

Это означает, что *функтор*

$$\mathcal{H}om : (\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell)^\circ \times \Delta^\circ \mathcal{E}n\ell \to \Delta^\circ \mathcal{E}n\ell$$

определяет «после факторизации» некоторый функтор

$$(\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell})^\circ \times \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell} \to \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell}.$$

Последний функтор мы также будем обозначать символом $\mathcal{H}om$.

§ 2. АНОДИННЫЕ МОРФИЗМЫ

Для каждого натурального $n \geqslant 1$ и каждого натурального $k \leqslant n$ мы символом $\Lambda^k[n]$ будем обозначать симплициальное подмножество стандартного симплекса $\Delta[n]$, состоящее из всех возрастающих отображений f: $[p] \to [n]$, обладающих тем свойством, что их образ не содержит множества $[n]\setminus\{k\}$. Геометрической реализацией множества $\Lambda^k[n]$ является объединение $n-1$-мерных граней геометрического симплекса Δ^n, содержащих его k-ю вершину. Мы будем симплициальное множество $\Lambda^k[n]$ называть *k-м колпачком* симплекса $\Delta[n]$.

2.1. Множество A мономорфизмов категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ называется *насыщенным*, если

(i) множеству A принадлежат все изоморфизмы;

(ii) множество A «инвариантно относительно амальгам», т. е. для любого коуниверсального квадрата

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X' \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

в котором морфизм ξ принадлежит A, морфизм η также принадлежит A;

(iii) каждый «ретракт» морфизма из A лежит в A, т. е. если в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\eta"'] & X \arrow[d, "\xi"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & X' \end{tikzcd}$$

имеют место соотношения

$$v \circ u = \operatorname{Id} X, \quad v' \circ u' = \operatorname{Id} X'$$

и морфизм η принадлежит A, то морфизм ξ также принадлежит A;

(iv) множество A инвариантно относительно «счетных композиций» и любых прямых сумм, т. е. для любых морфизмов $f_i: X_i \to X_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots,$ из A морфизм $X_1 \to \varinjlim_i X_i$ лежит в A и для любого семейства (g_α) морфизмов $g_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$ из A морфизм $\bigsqcup_\alpha g_\alpha: \bigsqcup_\alpha X_\alpha \to \bigsqcup_\alpha Y_\alpha$ лежит в A.

Пересечение всех насыщенных множеств, содержащих данное множество мономорфизмов B, очевидно, насыщено. Оно называется *насыщенным множеством, порожденным множеством B*.

Рассмотрим следующие три множества мономорфизмов:

B_1. Это множество состоит по определению из всех морфизмов вложения вида $\Lambda^k[n] \to \Delta[n]$, где k и n — произвольные натуральные числа, подчиненные соотношениям $n \geqslant 1$, $k \leqslant n$.

B_2. Это множество состоит по определению из всех морфизмов вложения вида $\Delta[1] \times \dot{\Delta}[n] \cup \{e\} \times \Delta[n] \to \Delta[1] \times \Delta[n]$, где n — произвольное натуральное число, а $e = 0, 1$ (символ $\dot{\Delta}[n]$, как всегда, обозначает границу стандартного симплекса $\Delta[n]$, см. п. 3.6 гл. II, а символ $\{e\}$ — образ симплициальной точки $\Delta[0]$ при ее морфизме $\Delta(\partial_0^e)$ в симплициальный отрезок $\Delta[1]$).

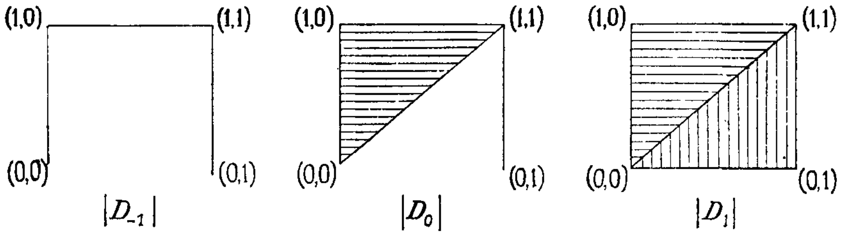
B_3. Это множество состоит по определению из всех морфизмов вложения вида $\Delta[1] \times Y \cup \{e\} \times X \to \Delta[1] \times X$, где X — произвольное симплициальное множество, Y — его произвольное подмножество, а $e = 0, 1$.

Теорема. *Насыщенные множества, порожденные множествами B_1, B_2 и B_3, совпадают.*

Доказательство. Пусть A_1, A_2 и A_3 — насыщенные множества, порожденные множествами B_1, B_2 и B_3 соответственно. Мы покажем последовательно, что $A_2 \subset A_1$ (п. 2.1.1), $A_3 \subset A_2$ (п. 2.1.2) и $A_1 \subset A_3$ (п. 2.1.3).

2.1.1. Считая для определенности $e = 1$, покажем, что морфизм вложения $\Delta[1] \times \dot{\Delta}[n] \cup \{e\} \times \Delta[n] \to \Delta[1] \times \Delta[n]$ принадлежит множеству A_1.

Пусть $c(i)\colon [n+1] \to [1] \times [n]$ — строго возрастающее отображение, принимающее значения $(0, i)$ и $(1, i)$, и пусть $C_i\colon \Delta[n+1] \to \Delta[1] \times \Delta[n]$ — морфизм, отвечающий этому отображению при функторе $C\colon \mathcal{O}\kappa \to \Delta^\circ\mathcal{E}ns$ из п. 5.1 гл. II. Пусть, далее, D_{-1} — симплициальное множество $\Delta[1] \times \dot{\Delta}[n] \cup \{e\} \times \Delta[n]$, а D_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, — объединение множества D_{-1} с образами морфизмов $C_0, C_1, \ldots, C_i$. Например, при $n = 1$ множества D_i (точнее, их геометрические реализации) имеют следующий вид:



Легко видеть (например, на основе результатов п. 5.5 гл. II), что для любого n множество D_n совпадает с произведением $\Delta[1] \times \Delta[n]$. Поэтому нам достаточно лишь доказать, что все морфизмы вложения $D_{i-1} \to D_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, принадлежат множеству A_1. Но это непосредственно следует из условия (ii) определения насыщенного множества, поскольку прообразом множества D_{i+1} в симплексе $\Delta[n]$ при морфизме C_i является множество $\Lambda^{i+1}[n+1]$ и потому имеет место коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{i+1}[n+1] \arrow[r, "u"] \arrow[d] & D_{i-1} \arrow[d] \\ \Delta[n+1] \arrow[r, "v"] & D_i \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которого являются вложениями, а морфизмы u и v индуцированы морфизмом C_i.

2.1.2. Покажем теперь, что для любого симплициального множества X и любого его подмножества Y морфизм вложения $\Delta[1] \times$ $\times\, Y \cup \{e\} \times X \to \Delta[1] \times X$ принадлежит множеству A_2.

Как уже было замечено в п. 3.2 гл. III, рассуждения, использованные в п. 3.8 гл. II, показывают, что имеет место коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma'^n} \dot{\Delta}[n]_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & Y \cup \mathrm{Sk}^{n-1}X \arrow[d] \\ \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma'^n} \Delta[n]_\sigma \arrow[r] & Y \cup \mathrm{Sk}^n X \end{tikzcd}$$

где Σ'^n — множество всех n-мерных невырожденных симплексов множества X, не принадлежащих множеству Y. Этот квадрат порождает коммутативный квадрат

$$(*)\quad \begin{tikzcd} \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma'^n} (\Delta[1] \times \dot{\Delta}[n]_\sigma \cup \{e\} \times \Delta[n]_\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \Delta[1] \times (Y \cup \mathrm{Sk}^{n-1}X) \cup \{e\} \times X \arrow[d] \\ \coprod\limits_{\sigma\in\Sigma'^n} (\Delta[1] \times \Delta[n]_\sigma) \arrow[r] & \Delta[1] \times (Y \cup \mathrm{Sk}^n X) \cup \{e\} \times X \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которого являются вложениями, а горизонтальные индуцированы сингулярными симплексами $\tilde{\sigma}\colon \Delta[n] \to X$. Согласно условию (iv) определения насыщенного множества, левая вертикальная стрелка этого квадрата принадлежит множеству A_2. Поэтому если рассматриваемый квадрат коуниверсален, то, согласно условию (ii), его правая вертикальная стрелка также будет принадлежать множеству A_2. Но тогда и морфизм вложения симплициального множества $\Delta[1] \times Y \cup \{e\} \times X = \Delta[1] \times (Y \cup \mathrm{Sk}^{-1}X) \cup \{e\} \times$ $\times\, X$ в симплициальное множество $\Delta[1] \times X = \varinjlim\limits_{n}(\Delta[1] \times$ $\times\, (Y \cup \mathrm{Sk}^n X) \cup \{e\} \times X)$ также будет принадлежать A_2 (условие (iv)). Таким образом, для завершения доказательства нам нужно только показать, что квадрат (∗) коуниверсален, т. е. что симплициальное множество $\Delta[1]\times(Y\cup \mathrm{Sk}^n X)\cup\{e\}\times X$ является амальгамой симплициальных множеств $\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma'^n}(\Delta[1]\times\Delta[n]_\sigma)$ и $\Delta[1]\times\times(Y\cup\mathrm{Sk}^{n-1}X)\cup\{e\}\times X$ с объединенным симплициальным множеством $\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma'^n}(\Delta[1]\times\dot\Delta[n]_\sigma\cup\{e\}\times\Delta[n]_\sigma)$.

С этой целью мы рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\{e\}\times X & \{e\}\times(Y\cup\mathrm{Sk}^{n-1}X) \arrow[l]\arrow[r] & \Delta[1]\times(Y\cup\mathrm{Sk}^{n-1}X) \\
\bigsqcup\limits_{\sigma\in\Sigma'^n}(\{e\}\times\dot\Delta[n]_\sigma) \arrow[u]\arrow[d] & \bigsqcup\limits_{\sigma\in\Sigma'^n}(\{e\}\times\dot\Delta[n]_\sigma) \arrow[l]\arrow[r]\arrow[u]\arrow[d] & \bigsqcup\limits_{\sigma\in\Sigma'^n}(\Delta[1]\times\dot\Delta[n]_\sigma) \arrow[u]\arrow[d] \\
\bigsqcup\limits_{\sigma\in\Sigma'^n}(\{e\}\times\Delta[n]_\sigma) & \bigsqcup\limits_{\sigma\in\Sigma'^n}(\{e\}\times\Delta[n]_\sigma) \arrow[l]\arrow[r] & \bigsqcup\limits_{\sigma\in\Sigma'^n}(\Delta[1]\times\Delta[n]_\sigma)
\end{tikzcd}$$

морфизмы которой строятся очевидным образом.

Ясно, что амальгамами строк этой диаграммы являются соответственно симплициальные множества

$$\Delta[1]\times(Y\cup\mathrm{Sk}^{n-1}X)\cup\{e\}\times X,$$
$$\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma'^n}(\Delta[1]\times\dot\Delta[n]_\sigma\cup\{e\}\times\Delta[n]_\sigma),$$
$$\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma'^n}(\Delta[1]\times\Delta[n]_\sigma),$$

а амальгамами ее столбцов — симплициальные множества

$$\{e\}\times X,$$
$$\{e\}\times(Y\cup\mathrm{Sk}^n X),$$
$$\Delta[1]\times(Y\cup\mathrm{Sk}^n X).$$

Поэтому амальгамой амальгам столбцов является симплициальное множество $\Delta[1]\times(Y\cup\mathrm{Sk}^n X)\cup\{e\}\times X$. Поскольку прямой предел любой «прямоугольной» коммутативной диаграммы можно вычислять либо сначала по строкам, а потом по столбцам, либо сначала по столбцам, а потом по строкам, отсюда непосредственно вытекает, что симплициальное множество $\Delta[1]\times(Y\cup\mathrm{Sk}^n X)\cup\{e\}\times X$ действительно является амальгамой множеств $\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma'^n}(\Delta[1]\times\Delta[n]_\sigma)$ и $\Delta[1]\times(Y\cup\mathrm{Sk}^{n-1}X)\cup\{e\}\times X$ с объединенным симплициальным множеством $\bigsqcup_{\sigma\in\Sigma'^n}(\Delta[1]\times\dot\Delta[n]_\sigma\cup\{e\}\times\Delta[n]_\sigma)$.

2.1.3. Покажем, наконец, что морфизмы вложения $\Lambda^k[n]\to\Delta[n]$ принадлежат множеству A_3.

Пусть $k < n$, и пусть u_n^k — отображение $i \rightsquigarrow (1, i)$ множества $[n]$ в множество $[1] \times [n]$, а v_n^k: $[1] \times [n] \to [n]$ — ретракция отображения u_n^k, определенная формулами

$$v_n^k(1, i) = i, \quad v_n^k(0, i) = \begin{cases} i, & \text{если } i \leqslant k, \\ k, & \text{если } i \geqslant k. \end{cases}$$

Легко видеть, что морфизм $C(u_n^k)\colon \Delta[n] \to \Delta[1] \times \Delta[n]$, отвечающий отображению u_n^k при функторе C из п. 5.1 гл. II, индуцирует некоторый морфизм симплициального множества $\Lambda^k[n]$ в симплициальное множество $\Delta[1] \times \Lambda^k[n] \cup \{0\} \times \Delta[n]$, а морфизм $C(v_n^k)$: $\Delta[1] \times \Delta[n] \to \Delta[n]$, отвечающий отображению v_n^k, — некоторый морфизм симплициального множества $\Delta[1] \times \Lambda^k[n] \cup \{0\} \times \Delta[n]$ в симплициальное множество $\Lambda^k[n]$. Иными словами, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^k[n] \arrow[r] \arrow[d] & \Delta[n] \times \Lambda^k[n] \cup \{0\} \times \Delta[n] \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^k[n] \arrow[d] \\
\Delta[n] \arrow[r, "C(u_n^k)"] & \Delta[1] \times \Delta[n] \arrow[r, "C(v_n^k)"] & \Delta[n]
\end{tikzcd}$$

Поэтому, согласно условию (iii) определения насыщенного множества, морфизм вложения $\Lambda^k[n] \to \Lambda[n]$ принадлежит множеству A_3.

При $k = n$ (и вообще при $k > 0$) доказательство нроводится аналогично с заменой отображений u_n^k и v_n^k отображениями w_n^k: $i \rightsquigarrow (0, i)$ и t_n^k, где

$$t_n^k(0, i) = i, \quad t_n^k(1, i) = \begin{cases} k, & \text{если } i \leqslant k, \\ i, & \text{если } i \geqslant k. \end{cases}$$

Тем самым теорема 2.1 полностью доказана.

2.1.4. Определение. Мономорфизмы категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\imath$, принадлежащие насыщенному множеству $A_1 = A_2 = A_3$, порожденному каждым из множеств B_1, B_2 и B_3, называются *анодинными морфизмами.*

2.2. Предложение. *Если вложение симплициального подмножества K в симплициальное множество L является анодинным морфизмом, то для любого симплициального множества X и любого его подмножества Y вложение*

$$K \times X \cup L \times Y \to L \times X$$

также является анодинным морфизмом.

Доказательство. Пусть A — множество всех мономорфизмов $u\colon K' \to L'$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\imath$, обладающих тем свойством, что индуцированные ими морфизмы

$$K' \times X \overset{K' \times Y}{\sqcup} L' \times Y \to L' \times X$$

являются анодинными морфизмами. Поскольку, в случае когда мономорфизм u является вложением, амальгамой $K' \times X \overset{K' \times Y}{\sqcup} L' \times Y$ служит симплициальное множество $K' \times X \cup L' \times Y$, а индуцированным морфизмом $K' \times X \overset{K' \times Y}{\sqcup} L' \times Y \to L' \times X$ является вложение этого множества в множество $L' \times X$, множество A содержит все морфизмы вложения, удовлетворяющие заключению предложения 2.2. Поэтому для доказательства этого предложения достаточно доказать, что множество A содержит все анодинные морфизмы. Но легко видеть, что это множество насыщенно. Следовательно, нам достаточно показать, что оно содержит множество B_3.

Пусть u — произвольный морфизм множества B_3. По определению существуют такое симплициальное множество X' и такое его симплициальное подмножество Y', что морфизм u является морфизмом вложения симплициального множества $K' = \Delta[1] \times Y' \cup \{e\} \times X'$ в симплициальное множество $L' = \Delta[1] \times X'$. Рассмотрим индуцированный этим морфизмом морфизм

$$K' \times X \overset{K' \times Y}{\sqcup} L' \times Y \to L' \times X,$$

т. е. морфизм вложения

$$K' \times X \cup L' \times Y \to L' \times X.$$

Поскольку

$$K' \times X \cup L' \times Y = \Delta[1] \times (Y' \times X \cup X' \times Y) \cup \{e\} \times X' \times X$$

и

$$L' \times X = \Delta[1] \times X' \times X,$$

этот морфизм вложения анодинен (лежит в B_3). Следовательно, морфизм u принадлежит множеству A.

2.3. Образы (т. е. гомотопические классы) анодинных морфизмов категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\imath$ в категории $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n\imath}$ симплициальных множеств по модулю гомотопии мы также будем называть анодинными морфизмами.

Теорема. *Множество анодинных морфизмов категории $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n\imath}$ симплициальных множеств по модулю гомотопии допускает исчисление левых частных* (см. п. 2.2 гл. I).

Доказательство. Пусть A — множество анодинных морфизмов категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ и $\bar{A}$ — его образ в категории $\overline{\Delta^\circ\mathscr{E}ns}$. Нам нужно проверить, что множество $\bar{A}$ удовлетворяет условиям a), b), c) и d) из п. 2.2 гл. I. Но ясно, что условия a) и b) немедленно вытекают из условий (i) и (iv) определения насыщенного множества, а условие c) — из условия (ii). Поэтому нам нужно проверить лишь выполнение условия d).

Пусть $s: X' \to X$ — анодинный морфизм категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ и $f, g: X \to Y$ — такие морфизмы этой категории, что морфизм $f \circ s$ гомотопен морфизму $g \circ s$. Мы должны доказать существование в категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ такого анодинного морфизма $t: Y \to Y'$, что морфизм $t \circ f$ гомотопен морфизму $t \circ g$.

Пусть $h': I_n \times X' \to Y$ — составная гомотопия, связывающая морфизм $f \circ s$ с морфизмом $g \circ s$, и пусть $\{0\}$ и $\{n\}$ — образы симплициальной точки $\Delta[0]$ при ее морфизмах ε_0 и ε_n в симплициальное множество I_n. Отождествим симплициальное множество X' с его образом в симплициальном множестве X при морфизме s. Тогда, согласно предложению 2.2, морфизм вложения $\{0\} \times X \cup \{n\} \times X \cup I_n \times X' \to I_n \times X$ будет анодинным морфизмом. Рассмотрим, с другой стороны, морфизм k симплициального множества $\{0\} \times X \cup \{n\} \times X \cup I_n \times X'$ в симплициальное множество Y, индуцирующий морфизм f на множестве $\{0\} \times X \approx X$, морфизм g на множестве $\{n\} \times X \approx X$ и морфизм h' на множестве $I_n \times X'$. Пусть Y' — амальгама диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times X \cup \{n\} \times X \cup I_n \times X' & \xrightarrow{k} & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \text{влож.}} & & \\ I_n \times X & & \end{array}$$

а t и h — канонические инъекции множеств Y и $I_n \times X$ в амальгаму Y'. Согласно условию (ii) из п. 2.1, морфизм t является анодинным морфизмом. С другой стороны, ясно, что морфизм h представляет собой составную гомотопию, связывающую морфизм $t \circ f$ с морфизмом $t \circ g$. Тем самым теорема 2.3 полностью доказана.

2.3.1. Определение. Категория частных категории $\overline{\Delta^\circ\mathscr{E}ns}$ по множеству всех анодинных морфизмов называется *гомотопической категорией*. Эту категорию мы будем обозначать символом $\mathscr{H}$.

Согласно предложению 3.1 гл. I, *канонический функтор* $P_{\bar{A}}: \overline{\Delta^\circ\mathscr{E}ns} \to \mathscr{H}$ *перестановочен с конечными прямыми пределами и, следовательно, в частности, с конечными прямыми суммами.*

При этом из предложения 1.4 вытекает, что в категории $\mathcal{H}$ конечные прямые суммы существуют и строятся точно так же, как в категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$. Позже мы увидим, что аналогичное утверждение справедливо и для конечных прямых произведений.

§ 3. ПОЛНЫЕ СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

В этом параграфе мы намереваемся показать, что канонический функтор $P_{\bar{A}}: \Delta^\circ\mathcal{E}ns \to \mathcal{H}$ обладает сопряженным справа функтором, так что к нему применимо предложение 1.3 гл. I. Согласно предложению 4.1 гл. I, для этого нам достаточно каждому симплициальному множеству X отнести некоторый анодинный морфизм $a(X): X \to X_K$, область значений X_K которого замкнута слева по отношению к множеству $\bar{A}$. Предварительно мы должны будем изучить один специальный класс симплициальных множеств, замкнутых слева по отношению к множеству $\bar{A}$.

3.1. Определение. Морфизм $p: E \to B$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ называется *расслоением* (в смысле Кана), если для любого анодинного морфизма $i: K \to L$ и любого коммутативного квадрата

$$(*)\qquad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ L & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

существует такой морфизм $w: L \to E$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, что $u = w \circ i$ и $v = p \circ w$. Симплициальное множество E называется *полным*, если однозначно определенный морфизм $E \to \Delta[0]$ является расслоением. Таким образом, симплициальное множество E полно, если для любого анодинного морфизма $i: K \to L$ и любого морфизма $u: K \to E$ существует такой морфизм $w: L \to E$, что $u = w \circ i$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & E \\ L \arrow[ur, dashed, "w"'] & \end{tikzcd}$$

Каждому морфизму $p: E \to B$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ мы можем сопоставить множество P мономорфизмов $i: K \to L$ этой категории, обладающих тем свойством, что для любого коммутативного квадрата вида $(*)$ существует морфизм w, для которого $u = w \circ i$ и $v = p \circ w$. Ясно, что это множество насыщенно. Поэтому морфизм p тогда и только тогда является расслоением, когда множество P содержит одно из множеств B_1, B_2 и B_3, рассмотренных в п. 2.1.

В частности, *симплициальное множество E тогда и только тогда полно, когда любой морфизм вида $\Lambda^k[n] \to E$ может быть продолжен до морфизма $\Delta[n] \to E$.*

3.1.1. Непосредственно из определения вытекают следующие свойства расслоений:

(i′) любой изоморфизм является расслоением;

(ii′) если в универсальном квадрате

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

морфизм p является расслоением, то расслоением является и морфизм p';

(iii′) если в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & B \end{tikzcd}$$

обладающей тем свойством, что $v \circ u = \mathrm{Id}E$ и $v' \circ u' = \mathrm{Id}B$, морфизм p' является расслоением, то расслоением является и морфизм p;

(iv′) если в бесконечной счетной последовательности

$$\ldots \to X_3 \xrightarrow{p_3} X_2 \xrightarrow{p_2} X_1 \xrightarrow{p_1} X_0$$

все морфизмы p_n являются расслоениями, то каноническая проекция $p\colon \varprojlim_n X_n \to X_0$ также является расслоением; для любого семейства (p_α) расслоений $p_\alpha\colon E_\alpha \to B_\alpha$ морфизм $\prod_\alpha p_\alpha\colon \prod_\alpha E_\alpha \to \prod_\alpha B_\alpha$ также является расслоением.

Заметим, в частности, что произведение $X \times Y$ двух полных симплициальных множеств также является полным симплициальным множеством.

Для любого морфизма $p\colon E \to B$ категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ и любой вершины b_0 симплициального множества B определена коамальгама F_{b_0} диаграммы

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[0] \arrow[r, "\tilde{b}_0"] & B \end{tikzcd}$$

Эта коамальгама называется *слоем* морфизма p над вершиной b_0 (ср. п. 4.1 гл. III). Из свойства (ii′) непосредственно вытекает, что *каждый слой F_{b_0} произвольного расслоения $p: E \to B$ является полным симплициальным множеством.*

3.1.2. Докажем теперь несколько важных свойств расслоений, непосредственно из определений не вытекающих.

Для любого расслоения $p: E \to B$ и любого симплициального множества X морфизм

$$\mathcal{H}om(X, p): \mathcal{H}om(X, E) \to \mathcal{H}om(X, B)$$

является расслоением.

Действительно, пусть имеет место коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & \mathcal{H}om(X, E) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}om(X,p)} \\ L & \xrightarrow{v} & \mathcal{H}om(X, B) \end{array}$$

где i — некоторый анодинный морфизм. Мы знаем (см. п. 2.5.3 гл. II), что функтор $? \times X$ сопряжен слева с функтором $\mathcal{H}om(X, ?)$. Соответствующий функторный изоморфизм

$$\Delta^\circ \mathcal{E}ns(?, \mathcal{H}om(X, ?)) \approx \Delta^\circ \mathcal{E}ns(? \times X, ?)$$

позволяет сопоставить морфизмам u и v некоторые морфизмы $u': K \times X \to E$ и $v': L \times X \to B$, обладающие тем свойством, что для них имеет место коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} K \times X & \xrightarrow{u'} & E \\ {\scriptstyle i\times X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ L \times X & \xrightarrow{v'} & B \end{array}.$$

Так как, согласно предложению 2.2, морфизм $i \times X$ является анодинным морфизмом и так как морфизм p представляет собой расслоение, то существует такой морфизм $w': L \times X \to E$, что $u' = w' \circ (i \times X)$ и $v' = p \circ w'$. Отвечающий морфизму w' морфизм $w: L \to \mathcal{H}om(X, E)$ обладает тогда тем свойством, что $u = w \circ i$ и $v = \mathcal{H}om(X, p) \circ w$.

В случае $B = \Delta[0]$ симплициальное множество $\mathcal{H}om(X, B)$ совпадает с множеством $\Delta[0]$. Следовательно,

для любого полного симплициального множества E симплициальное множество $\mathcal{H}om(X, E)$ также полно (каково бы ни было симплициальное множество X).

3.1.3. *Для любого мономорфизма $j: Y \to X$ категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ и любого полного симплициального множества E морфизм*

$$\mathcal{H}om(j, E): \mathcal{H}om(X, E) \to \mathcal{H}om(Y, E)$$

является расслоением.

Действительно, пусть имеет место коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & \mathcal{H}om(X, E) \arrow[d, "\mathcal{H}om(j,E)"] \\ L \arrow[r, "v"] & \mathcal{H}om(Y, E) \end{tikzcd}$$

где i — некоторый анодинный морфизм. Соответствующие морфизмам u и v морфизмы $u': K \times X \to E$ и $v': L \times Y \to E$ определяют коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} K \times Y \arrow[r] \arrow[d, "i \times Y"'] & K \times X \arrow[d, "u'"] \\ L \times Y \arrow[r, "v'"] & E \end{tikzcd}$$

и потому индуцируют некоторый морфизм $t: (L \times Y) \overset{K \times Y}{\sqcup} (K \times X) \to E$. Отождествив посредством мономорфизмов i и j симплициальные множества K и Y с соответствующими подмножествами симплициальных множеств L и X, мы можем амальгамой $(L \times Y) \overset{K \times Y}{\sqcup} (K \times X)$ считать объединение $L \times Y \cup K \times X$. Тогда, поскольку морфизм вложения $L \times Y \cup K \times X \to L \times X$ является, согласно предложению 2.2, анодинным морфизмом, а симплициальное множество E по условию полно, морфизм t может быть продолжен до некоторого морфизма $w': L \times X \to E$. Отвечающий морфизму w' морфизм $w: L \to \mathcal{H}om(X, E)$ и обладает, очевидно, тем свойством, что $u = w \circ i$ и $v = \mathcal{H}om(j, E) \circ w$.

3.1.4. Предложение. *Для любого анодинного морфизма $i: K \to L$ и любого полного симплициального множества E отображение*

$$\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}(i, E): \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}(L, E) \to \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}(K, E)$$

биективно.

Доказательство. Из определений непосредственно следует, что отображение $\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}(i, E)$ надъективно. Поэтому для доказательства предложения достаточно сослаться на результаты п. 4.1.1 гл. I.

В терминологии п. 4 гл. I предложение 3.1.4 означает, что *любое полное симплициальное множество замкнуто слева по отношению к множеству $\bar{A}$ анодинных морфизмов категории $\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}$.*

3.1.5. Морфизм категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ мы будем называть *гомотопической эквивалентностью,* если он определяет обратимый морфизм категории $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$.

Следствие. *Для любого анодинного морфизма* $i\colon K \to L$ *и любого полного симплициального множества* E *морфизм*

$$\mathcal{H}om(i, E)\colon \mathcal{H}om(L, X) \to \mathcal{H}om(K, X)$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Нужно доказать, что для любого симплициального множества T отображение $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}(T, \mathcal{H}om(i, E))$ биективно. Но функторный изоморфизм $\pi_0(\Phi)$ из п. 1.5 позволяет отождествить это отображение с отображением $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}(T \times i, E)$. Остается заметить, что последнее является в силу предложений 2.2 и 3.1.4 биективным отображением.

3.2. Теперь мы уже в состоянии доказать основную теорему этого параграфа.

Теорема. *Канонический функтор* $P_{\overline{A}}\colon \overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns} \to \mathcal{H}$ *обладает правым сопряженным функтором.*

Доказательство. Согласно предложению 3.1.4, достаточно доказать (см. п. 4.1 гл. I), что в категории $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ для любого симплициального множества X существует анодинный морфизм $a(X)\colon X \to X_K$, область значений X_K которого является полным симплициальным множеством.

Называя *X-колпачком* произвольную тройку $\gamma = (n, k, u)$, состоящую из натурального числа $n = n(\gamma)$, большего единицы, натурального числа $k = k(\gamma)$, подчиненного неравенствам $0 \leqslant k \leqslant n$, и некоторого морфизма $u = u(\gamma)$ колпачка $\Lambda^k[n]$ в симплициальное множество X, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_\gamma \Lambda^{k(\gamma)}[n(\gamma)] & \xrightarrow{u(X)} & X \\
\Big\uparrow{\scriptstyle v(X)} & & \\
\coprod_\gamma \Delta[n(\gamma)] & &
\end{array}$$

где γ пробегает все X-колпачки, морфизм $u(X)$ индуцирован морфизмами $u(\gamma)$, а морфизм $v(X)$ индуцирован вложениями колпачков $\Lambda^{k(\gamma)}[n(\gamma)]$ в симплексы $\Delta[n(\gamma)]$. Пусть $X_{(1)}$ — амальгама этой диаграммы. Поскольку морфизм $v(X)$ является, очевидно, анодинным морфизмом, канонический морфизм $w(X)$ симплициального множества X в амальгаму $X_{(1)}$ также анодинен. Следовательно, положив $X_{(2)} = X_{(1)(1)}, \ldots, X_{(n+1)} = X_{(n)(1)}, \ldots$ и $w_n(X) = w(X_{(n)})$, мы получим бесконечную последовательность

$$X \xrightarrow{w(X)} X_{(1)} \xrightarrow{w_1(X)} X_{(2)} \xrightarrow{w_2(X)} X_{(3)} \to \cdots$$

анодинных морфизмов.

Согласно условию (iv) определения насыщенного множества, каноническая инъекция $e(X): X \to X_K$ симплициального множества X в прямой предел X_K симплициальных множеств $X_{(n)}$ является анодинным морфизмом. Поэтому для доказательства теоремы нам нужно только показать, что предел X_K является полным симплициальным множеством (и принять за $a(X)$ гомотопический класс морфизма $e(X)$).

Пусть f — произвольный морфизм колпачка $\Lambda^k[n]$ в симплициальное множество X_K. Поскольку колпачок $\Lambda^k[n]$ является симплициальным множеством конечного типа (п. 3.4 гл. II), существует такое p, что морфизм f разлагается в композицию некоторого морфизма $\Lambda^k[n] \to X_{(p)}$ и канонической инъекции $X_{(p)} \to X_K$. Но из построения симплициального множества $X_{(p)}$ непосредственно вытекает, что любой морфизм $\Lambda^k[n] \to X_{(p)}$ может быть продолжен до некоторого морфизма $\Delta[n] \to X_{(p+1)}$. Следовательно, морфизм f также продолжается до некоторого морфизма $\Delta[n] \to X_K$. Таким образом, симплициальное множество X_K полно.

3.2.1. Согласно изложенному в п. 4.2 гл. I при доказательстве предложения 4.1 гл. I построению, функтор $\mathcal{H} \to \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}$, сопряженный справа с каноническим функтором $P_{\overline{\Delta}}$, сопоставляет каждому симплициальному множеству X симплициальное множество X_K, а каждому морфизму $g: X \to Y$ категории $\mathcal{H}$ морфизм $g_K: X_K \to Y_K$ категории $\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}$, обладающий тем свойством, что $(P_{\overline{\Delta}} a(Y)) \circ g = P_{\overline{\Delta}}(g_K \circ a(X))$ (этим условием морфизм g_K однозначно определяется). При этом соответствующий морфизм сопряжения задается соответствием

$$X \rightsquigarrow a(X).$$

Кроме того, для любого симплициального множества T соответствие $f \rightsquigarrow (P_{\overline{\Delta}} a(X))^{-1} (P_{\overline{\Delta}} f)$ определяет биективное отображение

$$\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}(T, X_K) \xrightarrow{\approx} \mathcal{H}(T, X).$$

Все это означает, что справедлива следующая

Теорема. *Функтор $X \to X_K$ определяет эквивалентность категории $\mathcal{H}$ с полной подкатегорией категории $\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}$, порожденной полными симплициальными множествами.*

3.2.2. Из этой теоремы, в частности, вытекает, что

канонический функтор $P_{\overline{\mathcal{A}}}: \overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell} \to \mathcal{H}$ *перестановочен с конечными прямыми произведениями.*

Действительно, пусть (X_i) — произвольное конечное семейство симплициальных множеств. Согласно утверждению (iv′) п. 3.1.1, произведение $\prod_i X_{iK}$ симплициальных множеств X_{iK} в категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell$ является полным симплициальным множеством, а, согласно предложению 2.2, морфизм $\prod_i a(X_i): \prod_i X_i \to \prod_i X_{iK}$ является анодинным морфизмом. Поэтому, согласно теореме 3.2.1 и предложению 1.4, имеют место изоморфизмы

$$\mathcal{H}(T, \prod_i X_i) \approx \overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell}(T, \prod_i X_{iK}) \approx \prod_i \overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell}(T, X_{iK}) \approx \prod_i \mathcal{H}(T, X_i).$$

Следовательно, симплициальное множество $\prod_i X_i$ является произведением симплициальных множеств X_i и в категории $\mathcal{H}$. Но это и означает, что функтор $P_{\overline{\mathcal{A}}}$ перестановочен с конечными произведениями.

3.2.3. Из следствия 3.1.5, в частности, вытекает, что функтор $(Y, Z) \rightsquigarrow \mathcal{H}om(Y, Z_K)$ из категории $(\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell})^\circ \times \mathcal{H}$ в категорию $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell}$ индуцирует после факторизации некоторый функтор

$$\mathcal{H}^\circ \times \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

который мы будем обозначать тем же символом $\mathcal{H}om$. С другой стороны, согласно результатам п. 1.5 и теореме 3.2.1, имеют место изоморфизмы

$$\mathcal{H}(X \times Y, Z) \approx \overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell}(X \times Y, Z_K) \approx \overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell}(X, \mathcal{H}om(Y, Z_K)) \approx$$
$$\approx \mathcal{H}(X, \mathcal{H}om(Y, Z_K)).$$

Таким образом,

для любого симплициального множества Y *функтор* $Z \rightsquigarrow \mathcal{H}om(Y, Z_K)$ *из* $\mathcal{H}$ *в* $\mathcal{H}$ *сопряжен слева с функтором* $X \rightsquigarrow X \times Y$.

§ 4. ПУНКТИРОВАННЫЕ СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

В этом параграфе полученные выше результаты переформулируются на случай пунктированных симплициальных множеств. Поскольку доказательства повторяются, как правило, почти дословно, мы их опускаем.

4.1. Напомним, что *пунктированным симплициальным множеством* называется пара (X, x_0), состоящая из некоторого симплициального множества X и некоторого нульмерного симплекса x_0 этого множества. Как правило, вместо (X, x_0) мы будем писать просто X, называя при этом симплекс x_0 *отмеченной вершиной* симплициального множества X. *Морфизмом* пунктированного симплициального множества (X, x_0) в пунктированное симплициальное множество (Y, y_0) называется произвольный морфизм $f\colon X \to Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, обладающий тем свойством, что $f(x_0) = y_0$. Ясно, что для любых морфизмов $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ и $g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ композиция $g \circ f$ является морфизмом $(X, x_0) \to (Z, z_0)$. Это превращает совокупность всех пунктированных симплициальных множеств и всех их морфизмов в категорию. Эту категорию мы будем обозначать символом $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ и будем называть ее *категорией пунктированных симплициальных множеств*. В соответствии с указанным выше сокращенным обозначением множество всех морфизмов пунктированного множества (X, x_0) в пунктированное множество (Y, y_0) мы будем обозначать символом $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns(X, Y)$ (вместо более полного обозначения $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns((X_0, x_0), (Y, y_0)))$.

Рассматривая симплициальный отрезок $\Delta[1]$ как пунктированное симплициальное множество, мы всегда будем считать (не оговаривая этого явно), что за его отмеченную вершину принято отображение $[0] \to [1]$, переводящее 0 в 0. Ту же самую вершину мы будем принимать и за отмеченную вершину пунктированного симплициального множества $\dot{\Delta}[1]$. Симплициальную окружность Ω (см. п. 2.5.2 гл. II) мы будем считать пунктированным симплициальным множеством, отмеченной вершиной которого является его единственная вершина.

4.1.1. Легко видеть, что *категория* $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ *допускает прямые и обратные пределы*. Например, как уже отмечалось, прямым произведением двух пунктированных симплициальных множеств (X, x_0) и (Y, y_0) является симплициальное множество $X \times Y$, в котором отмечена вершина (x_0, y_0). С другой стороны, прямой суммой пунктированных симплициальных множеств (X, x_0) и (Y, y_0) является симплициальное множество, представляющее собой амальгаму в категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Delta[0] & \xrightarrow{\tilde{y}_0} & Y \\ {\scriptstyle \tilde{x}_0}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

за отмеченную вершину которого принят общий образ вершин x_0 и y_0. Эту прямую сумму мы будем обозначать символом $X \vee Y$.

Симплициальная точка $\Delta[0]$ является, очевидно, нулевым объектом категории $.\Delta^\circ \mathcal{E}n\iota$. Для любых пунктированных симплициальных множеств (X, x_0) и (Y, y_0) существует один и только один морфизм из (X, x_0) в (Y, y_0), «проходящий» через $\Delta[0]$. Этот морфизм называется *нулевым морфизмом* и обозначается символом 0^X_Y.

Морфизм из X в $X \times Y$, компонентами которого являются морфизмы $\operatorname{Id} X$ и $0^X_{X\times Y}$, и морфизм из Y в $X \times Y$ с компонентами $\operatorname{Id} Y$ и $0^Y_{X\times Y}$ индуцируют некоторый морфизм

$$i_{X,Y}\colon X \vee Y \to X \times Y,$$

образом которого служит симплициальное подмножество $X \times \{y_0\} \cup \cup \{x_0\} \times Y$ множества $X \times Y$ (здесь, как и выше, $\{x_0\}$ обозначает образ симплициальной точки $\Delta[0]$ при морфизме $\tilde{x}_0\colon \Delta[0] \to X$; аналогичный смысл имеет символ $\{y_0\}$). Амальгаму (в категории $\Delta^\circ \mathcal{E}n\iota$) диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X \vee Y & \xrightarrow{i_{X,Y}} & X \times Y \\ \downarrow & & \\ \Delta[0] & & \end{array}$$

мы превратим в пунктированное симплициальное множество, принимая за его отмеченную вершину образ симплекса (x_0, y_0). Это пунктированное симплициальное множество мы будем обозначать символом $X \wedge Y$ и будем называть его *стянутым произведением* пунктированных множеств X и Y. Ясно, что свойства коммутативности и ассоциативности прямого произведения остаются справедливыми и для стянутого произведения.

4.1.2. Для любых пунктированных симплициальных множеств (Y, y_0) и (Z, z_0) мы будем символом $\mathcal{H}om.(Y, Z)$ обозначать симплициальное подмножество множества $\mathcal{H}om\,(Y, Z)$, состоящее из всех морфизмов $f\colon \Delta[n] \times Y \to Z$, переводящих $\Delta[n] \times \{y_0\}$ в $\{z_0\}$. Симплициальное множество $\mathcal{H}om.(Y, Z)$ мы будем считать пунктированным, приняв за его отмеченную вершину нулевой морфизм 0^Y_Z. При $Y = \dot{\Delta}[1]$ морфизм $f\colon \Delta[n] \times \dot{\Delta}[1] \to Z$, переводящий $\Delta[n] \times \{0\}$ в $\{z_0\}$, определяется своим ограничением на $\Delta[n] \times \{1\} \approx \Delta[n]$. Поэтому

множество $\mathcal{H}om.(\dot{\Delta}[1], Z)$ естественно изоморфно множеству Z.

Для любых трех пунктированных симплициальных множеств (X, x_0), (Y, y_0) и (Z, z_0) множество $.\Delta^\circ \mathcal{E}n\iota\,(X, \mathcal{H}om.(Y, Z))$ является подмножеством множества $\Delta^\circ\mathcal{E}ns(X, \mathcal{H}om\,(Y, Z))$, состоящим из всех морфизмов x, для которых имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Delta[0] \arrow[r, "\widetilde{0}_Z^Y"] \arrow[d, "\widetilde{x}_0"'] & \mathcal{H}om(Y, Z) \arrow[d, "\mathcal{H}om(\widetilde{y}_0,\, Z)"] \\
X \arrow[ur, "x"] \arrow[r, "u"] & \mathcal{H}om(\Delta[0], Z)
\end{tikzcd}$$

(если в симплициальном множестве $\mathcal{H}om(\Delta\,[0], Z)$ отмечена вершина $\widetilde{z}_0$, то морфизм u этой диаграммы является нулевым морфизмом). Указанный в п. 2.5.3 гл. II изоморфизм φ^{-1} сопоставляет морфизму x морфизм $x'\colon X\times Y \to Z$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X\times Y \arrow[r, "\widetilde{x}_0\times Y"] \arrow[d, "X\times\widetilde{y}_0"'] \arrow[dr, "x'"] & \Delta\,[0]\times Y \approx Y \arrow[d, "0_Z^Y"] \\
X\times\Delta[0] \approx X \arrow[r, "0_Z^X"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Следовательно, морфизм x' индуцирует на симплициальном подмножестве $X\times\{y_0\}\cup\{x_0\}\times Y$ нулевой морфизм, так что его можно «пропустить» через $X\wedge Y$. Это показывает, что функторный изоморфизм φ индуцирует некоторый изоморфизм

$$(*) \qquad \varphi_\cdot : .\Delta^\circ\mathcal{E}ns_\cdot(X\wedge Y, Z) \xrightarrow{\approx} .\Delta^\circ\,\mathcal{E}ns_\cdot(X, \mathcal{H}om\,.(Y, Z)).$$

Заметим теперь, что для любого пунктированного симплициального множества A и любого $n \geqslant 0$ имеет место изоморфизм

$$.\Delta^\circ\,\mathcal{E}ns_\cdot(\Delta'\,[n], A) \approx A_n,$$

где $\Delta'\,[n]$ — симплициальное множество $\Delta\,[n] \sqcup \Delta\,[0]$, в котором отмечена симплициальная точка $\Delta\,[0]$. Поэтому при $X = \Delta'[n]$ изоморфизм $(*)$ дает изоморфизм

$$.\Delta^\circ\mathcal{E}ns_\cdot(\Delta'\,[n]\wedge Y, Z) \approx \mathcal{H}om\,.(Y, Z)_n.$$

Следовательно,

$$\mathcal{H}om\,.(X\wedge Y, Z)_n \approx .\Delta^\circ\mathcal{E}ns_\cdot(\Delta'\,[n]\wedge X\wedge Y, Z) \approx$$

$$\approx .\Delta^\circ\,\mathcal{E}ns_\cdot(\Delta'\,[n]\wedge X, \mathcal{H}om\,.(Y, Z)) \approx \mathcal{H}om\,.(X, \mathcal{H}om\,.(Y, Z))_n,$$

так что имеет место изоморфизм

$$.\Phi\colon \mathcal{H}om\,.(X\wedge Y, Z) \xrightarrow{\approx} \mathcal{H}om\,.(X, \mathcal{H}om.(Y, Z)).$$

4.2. Вершинами симплициального множества $\mathcal{H}om_{\cdot}(Y, Z)$ являются морфизмы из (Y, y_0) в (Z, z_0). Его одномерными симплексами будут гомотопии h, связывающие морфизм $f = d_1h$ с морфизмом $g = d_0h$ и обладающие тем свойством, что они переводят $\Delta[1]\times\{y_0\}$ в $\{z_0\}$. О таких гомотопиях мы будем говорить, что они *сохраняют отмеченные вершины*. Аналогично, о составной гомотопии $I_n\times Y \to Z$ мы будем говорить, что она *сохраняет отмеченные вершины*, если эта гомотопия подмножество $I_n\times\{y_0\}$ переводит в подмножество $\{z_0\}$.

Два морфизма f и g из (Y, y_0) в (Z, z_0) мы будем называть *гомотопными* (или, более распространенно, *гомотопными относительно отмеченных вершин)*, если эти морфизмы принадлежат одной компоненте связности симплициального множества $\mathcal{H}om_{\cdot}(Y, Z)$ или, что равносильно, если они связаны некоторой составной гомотопией h: $I_n\times Y \to Z$, сохраняющей отмеченные вершины.

Пусть $\pi_0^{\cdot}(Y, Z)$ — множество всех компонент связности симплициального множества $\mathcal{H}om_{\cdot}(Y, Z)$. Ясно, что построенные в п. 1.3 отображения $\nu_{X,Y,Z}$ переводят произведение $\mathcal{H}om_{\cdot}(X, Y)\times\mathcal{H}om_{\cdot}(Y, Z)$ в множество $\mathcal{H}om_{\cdot}(X, Z)$ и потому индуцируют некоторые отображения

$$\mu^{\cdot}_{X,Y,Z}\colon \pi_0^{\cdot}(X, Y)\times\pi_0^{\cdot}(Y, Z) \to \pi_0^{\cdot}(X, Z).$$

Категорию, объектами которой являются пунктированные симплициальные множества, множествами морфизмов — множества $\pi_0^{\cdot}(Y, Z)$, и закон композиции которой определен отображениями $\mu^{\cdot}_{X,Y,Z}$, мы будем называть *категорией пунктированных симплициальных множеств по модулю гомотопии* и будем обозначать ее символом $\overline{{}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns}$. *Каноническим функтором* из категории ${}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns$ в категорию $\overline{{}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns}$ мы будем называть функтор, тождественный на объектах и индуцирующий на каждом множестве ${}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns(Y, Z)$ каноническое отображение этого множества на множество $\pi_0^{\cdot}(Y,Z) = \overline{{}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns}(Y,Z)$. *Этот функтор перестановочен с конечными прямыми суммами и конечными прямыми произведениями.*

Построенный в п. 4.1.2 изоморфизм ${}_{\cdot}\Phi$ индуцирует некоторый изоморфизм

$$\pi_0^{\cdot}(\Phi)\colon \overline{{}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns}(X\wedge Y, Z) \xrightarrow{\approx} \overline{{}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns}(X, \mathcal{H}om_{\cdot}(Y, Z)).$$

По определению для любых двух гомотопных морфизмов $f, g\colon X \to X'$ категории ${}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns$ и любых пунктированных симплициальных множеств Y и Z имеет место равенство $\overline{{}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns}(f, \mathcal{H}om_{\cdot}(Y, Z)) = \overline{{}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns}(g, \mathcal{H}om_{\cdot}(Y, Z))$. Поэтому для таких морфизмов имеет место и равенство

$$\overline{{}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns}(f\wedge Y, Z) = \overline{{}_{\cdot}\Delta^{\circ}\mathcal{E}ns}(g\wedge Y, Z).$$

Но это равенство возможно для любого Z только тогда, когда морфизмы $f\wedge Y$ и $g\wedge Y$ гомотопны. В силу «симметричности» стянутого произведения морфизмы $X\wedge e$ и $X\wedge d$ для любых двух гомотопных морфизмов e и d также гомотопны. Это показывает, что функтор $(X, Y)\rightsquigarrow X\wedge Y$ из $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns\times.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ в $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ индуцирует некоторый функтор из $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}\times.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ в $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$. Этот функтор мы будем обозначать тем же символом $\wedge$. Аналогично функтор $\mathcal{H}om.$ из $(.\Delta^\circ\mathcal{E}ns)^\circ\times.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ в $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ индуцирует некоторый функтор $\mathcal{H}om.$ из $(.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns})^\circ\times.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ в $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$.

4.3. Морфизм f категории $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ называется *анодинным морфизмом,* если его образ при каноническом функторе $(X, x_0)\rightsquigarrow X$ из $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ в $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ является анодинным морфизмом. Множество $.\bar{A}$ всех анодинных морфизмов категории $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ допускает исчисление левых частных. Соответствующую категорию частных мы будем называть *пунктированной гомотопической категорией* и будем обозначать ее символом $.\mathcal{H}$. В соответствии со сказанным выше обозначение $.\mathcal{H}((X, x_0), (Y, y_0))$, где (X, x_0) и (Y, y_0) — некоторые пунктированные симплициальные множества, мы будем сокращать до обозначения $.\mathcal{H}(X, Y)$.

Канонический функтор из категории $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ в категорию $.\mathcal{H}$ перестановочен, очевидно, с конечными прямыми суммами, которые по-прежнему будем обозначать символом $\vee$. Кроме того, для любого пунктированного симплициального множества Z и любого анодинного морфизма $i\colon Y\to X$ категории $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ морфизм $Z\wedge i\colon Z\wedge\wedge Y\to Z\wedge X$ также является анодинным морфизмом. Действительно, пусть $j\colon Y\to X$ — морфизм из $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns(Y, X)$, образом которого в множестве $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}(Y, X)$ является морфизм i. Без ограничения общности мы можем предполагать, что симплициальное множество Y является подмножеством симплициального множества X и что морфизм j является морфизмом вложения. Тогда в категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
Z\times Y\cup\{z_0\}\times X \arrow[rr, "u"] \arrow[ddd, "v"'] & & Z\times X \arrow[ddd, "w"] \\
& Z\times\{y_0\}\cup\{z_0\}\times X \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& \Delta[0] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Z\wedge Y \arrow[rr, "Z\wedge j"] & & Z\wedge Z
\end{tikzcd}$$

где u — вложение, w — каноническая проекция, а морфизм v индуцирует каноническую проекцию на $Z\times Y$ и нулевой морфизм на $\{z_0\}\times X$. Согласно определению стянутого произведения, внутренние квадраты этой диаграммы коуниверсальны. Поэтому коуниверсален и ее внешний квадрат. Но, согласно предложению 2.2, морфизм u анодинен. Следовательно, в силу условия (ii) определения насыщенного множества (п. 2.1) анодинен и морфизм $Z\wedge j$, а значит, и морфизм $Z\wedge i$.

Аналогично показывается, что морфизм $i\wedge Z$ анодинен, если анодинен морфизм i. Это означает, что функтор $(X, Y)\rightsquigarrow X\wedge Y$ из $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}n s}\times.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ в $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ определяет некоторый функтор из $.\mathcal{H}\times.\mathcal{H}$ в $.\mathcal{H}$. Этот функтор мы будем обозначать тем же символом $\wedge$.

4.3.1. Для любого пунктированного симплициального множества X построенное в п. 3.2 полное симплициальное множество X_K мы будем считать пунктированным множеством, отмеченной вершиной которого является образ при морфизме $e(X): X\to X_K$ отмеченной вершины x_0 симплициального множества X. В силу этого соглашения анодинный морфизм $a(X): X\to X_K$ категории $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ будет анодинным морфизмом и категории $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$. Для любого пунктированного симплициального множества T отображение

$$.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}(T, X_K)\to.\mathcal{H}\ (T, X),$$

определенное соответствием $f\rightsquigarrow(pa(X))^{-1}\circ(pf)$, где p — канонический функтор $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}\to.\mathcal{H}$, биективно. Кроме того, для любого морфизма $g: X\to Y$ категории $.\mathcal{H}$ существует в категории $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ один и только один морфизм $g_K: X_K\to Y_K$, удовлетворяющий соотношению $(pa(Y))\circ g = p(g_K\circ a(X))$. Следовательно, *соответствия $X\rightsquigarrow X_K$, $g\rightsquigarrow g_K$ определяют некоторый функтор из $.\mathcal{H}$ в $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$, сопряженный справа к каноническому функтору p: $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}\to.\mathcal{H}$ и индуцирующий эквивалентность пунктированной гомотопической категории $.\mathcal{H}$ с полной подкатегорией категории $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$, порожденной всеми пунктированными полными симплициальными множествами.*

Отсюда, как и в п. 3.2.2, вытекает, что *канонический функтор p: $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}\to.\mathcal{H}$ перестановочен и с конечными прямыми произведениями.* Кроме того, функтор $(Y, Z)\rightsquigarrow\mathcal{H}om.\ (Y, Z_K)$ из $(.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns})^\circ\times$ $\times.\mathcal{H}$ в $.\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ индуцирует некоторый функтор из $.\mathcal{H}^\circ\times.\mathcal{H}$ в $.\mathcal{H}$, который мы будем обозначать тем же символом $\mathcal{H}om$. При этом для любого пунктированного симплициального множества Y *функ-*

тор $Z \rightsquigarrow \mathcal{H}om.(Y, Z_K)$ *из* $.\mathcal{H}$ *в* $.\mathcal{H}$ *сопряжен справа к функтору* $X \rightsquigarrow X \wedge Y$. Действительно,

$$.\mathcal{H}(X \wedge Y,\ Z) \approx .\ \Delta^\circ \mathcal{E}ns(X \wedge Y,\ Z_K) \approx .\ \Delta^\circ \mathcal{E}ns(X,\ \mathcal{H}om.(Y,\ Z_K)) \approx$$
$$\approx .\mathcal{H}om(X,\ \mathcal{H}om.(Y,\ Z_K)).$$

Последний из этих изоморфизмов вытекает из того, что *для любого пунктированного полного симплициального множества* $(T,\ t_0)$ *симплициальное множество* $\mathcal{H}om.(Y,\ T)$ *также полно.* Для доказательства же этого обстоятельства достаточно вспомнить, что, согласно определению (см. п. 4.1.2.), симплициальное множество $\mathcal{H}om.(Y,\ T)$ является коамальгамой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{H}om(Y,\ T) \\ & & \downarrow \\ \Delta[0] & \xrightarrow{\tilde{t}_0} & T \approx \mathcal{H}om(\Delta[0],\ T), \end{array}$$

и воспользоваться утверждением п. 3.1.3 и свойством (ii′) из п.3.1.1

4.4. Замечание. Соответствие $X \rightsquigarrow X_K$ определяет некоторый функтор $?_K$ из категории $.\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ в категорию $.\Delta^\circ \mathcal{E}ns$, а соответствие $X \rightsquigarrow e(X)$ — функторный морфизм функтора $\mathrm{Id}\ X$ в функтор $?_K$, так что для любого морфизма $f\colon X \to Y$ категории $.\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e(X)} & X_K \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_K} \\ Y & \xrightarrow{e(Y)} & Y_K \end{array}$$

В дальнейшем мы будем функтор $?_K$ называть *функтором пополнения по Кану,* а пару $(e,\ ?_K)$ — *парой Кана.*

4.5. В качестве приложения полученных общих результатов и как упражнение на исчисление левых частных мы сейчас покажем, что *симплициальную окружность* Ω *в пунктированной гомотопической категории* $.\mathcal{H}$ *можно снабдить строением когруппы.*

Именно, мы покажем, что в категории $.\mathcal{H}$ существует такой морфизм

$$\varphi\colon \Omega \to \Omega \vee \Omega,$$

что для любого пунктированного симплициального множества T индуцированное этим морфизмом отображение

$$.\mathcal{H}(\varphi,\ T)\colon .\mathcal{H}(\Omega \vee \Omega,\ T) \approx .\mathcal{H}(\Omega,\ T) \times .\mathcal{H}(\Omega,\ T) \to .\mathcal{H}(\Omega,\ T)$$

является групповым законом на множестве $.\mathcal{H}(\Omega,\ T)$.

Известно (и легко показывается), что морфизм φ тогда и только тогда обладает этим свойством, когда

(i) диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega \vee \Omega \arrow[d, "\Omega \vee \varphi"] \\
\Omega \vee \Omega \arrow[r, "\varphi \vee \Omega"] & \Omega \vee \Omega \vee \Omega
\end{tikzcd}$$

коммутативна;

(ii) композиция

$$\Omega \xrightarrow{\varphi} \Omega \vee \Omega \xrightarrow{\psi} \Omega,$$

где ψ — морфизм $\Omega \vee \Omega \to \Omega$, компонентами которого являются нулевой и тождественный морфизмы, представляет собой тождественный морфизм объекта Ω;

(iii) существует такой морфизм $c\colon \Omega \to \Omega$, что композиция

$$\Omega \xrightarrow{\varphi} \Omega \vee \Omega \xrightarrow{c \vee \Omega} \Omega \vee \Omega \xrightarrow{\delta} \Omega,$$

где δ—кодиагональный морфизм $\Omega \vee \Omega \to \Omega$, компонентами которого являются тождественные морфизмы объекта Ω, представляет собой нулевой морфизм объекта Ω.

Чтобы построить обладающий этими свойствами морфизм φ, мы для любого симплициального множества X рассмотрим амальгаму $\widetilde{X}$ диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sk}^0 X \arrow[r, "\text{вложение}"] \arrow[d] & X \\
\Delta[0]
\end{tikzcd}$$

В частности, например, $\widetilde{\Delta[1]} = \Omega$. Ясно, что любой морфизм $f\colon X \to Y$ индуцирует некоторый морфизм $\widetilde{f}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, причем если мы будем считать множества $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ пунктированными (заметим, что каждое из этих множеств содержит только одну вершину), то морфизм $\widetilde{f}$ будет морфизмом и пунктированных множеств.

Рассмотрим теперь в категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Omega \approx \Delta[1] \arrow[dr, "\widetilde{\Delta(\partial_2^1)}"'] & \Omega \vee \Omega \arrow[d, "s"] \\
 & \widetilde{\Delta[2]}
\end{tikzcd}$$

где s — морфизм, компонентами которого являются морфизмы $\widetilde{\Delta(\partial_2^2)}$ и $\widetilde{\Delta(\partial_0^2)}$. Очевидно, что прямую сумму $\Omega \vee \Omega$ мы можем отождествить с множеством $\widetilde{\Lambda^1[2]}$, а морфизм s — с вложением $\widetilde{\Lambda^1[2]} \to \widetilde{\Delta[2]}$. Следовательно, поскольку коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1[2] & \longrightarrow & \widetilde{\Lambda^1[2]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[2] & \longrightarrow & \widetilde{\Delta[2]} \end{array}$$

вертикальные стрелки которого являются вложениями, а горизонтальные — каноническими инъекциями, коуниверсален, морфизм s анодинен. Поэтому имеет смысл формула

$$\varphi = (qs)^{-1} \circ q(\widetilde{\Delta(\partial_2^1)}),$$

где q — канонический функтор $.\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns} \to .\mathscr{H}$ (см. описание морфизмов категории левых частных, данное в п. 2.3 гл. I).

Тот факт, что определенный этой формулой морфизм φ категории $.\mathscr{H}$ обладает свойствами (i), (ii) и (iii), вытекает из доказываемых ниже (см. п. 5.5) общих утверждений. Поэтому прямую проверку этих свойств мы оставляем читателю.

§ 5. ГРУППА ПУАНКАРЕ ПУНКТИРОВАННОГО СИМПЛИЦИАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

В этом параграфе мы докажем, что

для любого пунктированного симплициального множества (X, x_0) построенная в п. 7.4 гл. II группа Пуанкаре $\pi_1(X, x_0)$ изоморфна построенной выше группе $.\mathscr{H}(\Omega, X)$ морфизмов (категории $.\mathscr{H}$) симплициальной окружности Ω в множество X.

5.1. В первую очередь мы покажем, что для любого полного симплициального множества X образ его слоя X_1 в множестве морфизмов группоида $\Pi(X)$ совпадает со всем этим множеством.

Действительно, пусть α — произвольный морфизм группоида $\Pi(X)$. Согласно п. 7.2 гл. II, этот морфизм является образом некоторого морфизма $f\colon I_n \to X$. Наряду с этим морфизмом рассмотрим морфизм $i\colon I_n \to \Delta[n]$, отвечающий монотонному отображению

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & < & 1 & > & 2 & < & 3 & > & 4 \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & < & n & > & 1 & < & n-1 & > & 2 \ldots \end{array}$$

Поскольку этот морфизм, очевидно, анодинен, диаграмму

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \Delta[n] & \end{tikzcd}$$

мы можем дополнить таким морфизмом $F\colon \Delta[n] \to X$, что $F \circ i = f$. Пусть $\Delta(j)\colon \Delta[1] \to \Delta[n]$ — морфизм, отвечающий монотонному отображению $j\colon [1] \to [n]$, переводящему 0 в 0, а 1 — в целую часть числа $(n+1)/2$. Ясно, что образом ребра симплициального множества X, определенного морфизмом $F \circ \Delta(j)$, как раз и является морфизм α.

5.2. *Для любого полного симплициального множества X группоид Пуанкаре ΠX может быть описан следующим образом:*

его объектами являются нульмерные симплексы множества X;

его морфизмами являются классы эквивалентности $[s]$ одномерных симплексов s множества X по отношению эквивалентности, в котором одномерные симплексы s и t тогда и только тогда эквивалентны, когда существует такая гомотопия $h\colon \Delta[1] \times \dot{\Delta}[1] \to X$, связывающая сингулярные симплексы $\tilde{s}$ и $\tilde{t}$, что ее ограничение на $\Delta[1] \times \dot{\Delta}[1]$ является композицией канонической проекции $\Delta[1] \times \dot{\Delta}[1] \to \dot{\Delta}[1]$ и некоторого морфизма $\dot{\Delta}[1] \to X$;

областью определения морфизма $[s]$ является симплекс $d_1 s$, а его областью значений — симплекс $d_0 s$ (ясно, что эти симплексы не зависят от выбора симплекса s в классе эквивалентности $[s]$);

композиция морфизмов удовлетворяет соотношениям

$$[d_1\sigma] = [d_0\sigma] \circ [d_2\sigma],$$

где σ — произвольный двумерный симплекс симплициального множества X.

Действительно, эти условия определяют некоторый группоид, который мы временно обозначим символом GX. Мы должны доказать, что этот группоид естественно изоморфен группоиду ΠX. Рассмотрим с этой целью группоид ΓX путей диаграммной схемы $d_0, d_1\colon X_1 \to X_0$. Ясно, что тождественное отображение множества X_0 и каноническое отображение множества X_1 на множество морфизмов группоида GX определяют некоторый функтор $p\colon \Gamma X \to GX$. Этот функтор, очевидно, согласован с соотношениями, определяющими группоид ΠX (см. п. 7.1 гл. II), и потому он индуцирует некоторый функтор $q\colon \Pi X \to GX$.

На морфизмах функтор q, очевидно, надъективен. Поэтому для доказательства нашего утверждения достаточно доказать, что этот функтор на морфизмах инъективен.

Пусть α и β — такие морфизмы группоида ΠX, что $q\alpha = q\beta$. Согласно п. 5.1, морфизмы α и β являются образами некоторых одномерных симплексов s и t симплициального множества X, так что равенство $q\alpha = q\beta$ равносильно равенству $[s] = [t]$. Поэтому в множестве X существует такой двумерный симплекс σ, что $d_2\sigma = s$, $d_1\sigma = t$ и $d_0\sigma = s_0d_0s = s_0d_0t$.

Но тогда, согласно п. 7.1 гл. II, имеет место равенство $\alpha = \beta$.

5.3. Полученный результат применим, в частности, к группоиду $\Pi(X, Y) = \Pi(\mathcal{H}om(X, Y))$, где X — произвольное симплициальное множество, а Y — произвольное полное симплициальное множество (см. п. 3.1.2). Таким образом,

объектами группоида $\Pi(X, Y)$ *являются морфизмы* $f\colon X \to Y$;

морфизмами группоида $\Pi(X, Y)$ *являются классы эквивалентности* $[h]$ *гомотопий* $h\colon \Delta[1]\times X \to Y$ *по отношению эквивалентности, в котором две гомотопии тогда и только тогда эквивалентны, когда они связаны гомотопией* $H\colon \Delta[1]\times\Delta[1]\times X \to Y$, *обладающей тем свойством, что ее ограничение на* $\Delta[1]\times\dot{\Delta}[1]\times X$ *является композицией канонической проекции* $\Delta[1]\times\dot{\Delta}[1]\times X \to \dot{\Delta}[1]\times X$ *и некоторого морфизма* $\dot{\Delta}[1]\times X \to Y$;

если гомотопия h *связывает морфизм* f *с морфизмом* g, *то любая эквивалентная ей гомотопия также связывает* f *с* g; *при этом морфизм* f *является областью определения морфизма* $[h]$, *а морфизм* g *— его областью значений*;

для любого морфизма $g\colon \Delta[2]\times X \to Y$ *имеет место равенство*

$$[g\circ(\Delta(\partial_2^1)\times X)] = [g\circ(\Delta(\partial_2^0)\times X)]\circ[g\circ(\Delta(\partial_2^2)\times X)].$$

В частности,

если симплициальное множество Y *полно, то гомотопные морфизмы* $f, g\colon X \to Y$, *т.е. морфизмы, связанные некоторой составной гомотопией* $I_n\times X \to Y$, *можно связать и простой гомотопией* $\Delta[1]\times X \to Y$ *(ср. замечание в конце п. 1.2)*.

Аналогично, результаты п. 5.2 применимы и к группоиду $\Pi^{\cdot}(X, Y) = \Pi(\mathcal{H}om_{\cdot}(X, Y))$, где X и Y — пунктированные симплициальные множества, причем множество Y полно (см. п. 4.3.1). Следовательно,

группоид $\Pi^{\cdot}(X, Y)$ *допускает аналогичное описание, отличающееся от описания группоида* $\Pi(X, Y)$ *лишь тем, что все гомотопии предполагаются сохраняющими отмеченные вершины.*

В частности,

морфизмы $f, g: X \to Y$, гомотопные относительно отмеченных вершин x_0 и y_0, можно связать простой гомотопией $\Delta[1]\times X \to Y$, сохраняющей отмеченные вершины.

5.4. Рассмотрим теперь группу Пуанкаре $\pi_1(X, x_0)$ полного пунктированного симплициального множества (X, x_0). Пусть X_1^1 — множество всех одномерных симплексов множества X, обладающих тем свойством, что $d_0 s = d_1 s = x_0$. Ясно, что для каждого такого симплекса s соответствующий сингулярный симплекс $\tilde{s}: \Delta[1] \to X$ имеет вид $s' \circ p$, где $p: \Delta[1] \to \Omega$ — каноническая проекция, а $s': \Omega \to X$ — некоторый морфизм. Кроме того, ясно, что получающееся таким образом отображение $s \rightsquigarrow s'$ множества X_1^1 на множество $.\Delta^\circ\mathcal{E}n\iota(\Omega, X)$ биективно и согласовано с отношениями эквивалентности, определенными в п. 5.2 и 4.2. Поэтому оно определяет некоторое биективное отображение фактормножества $\pi_1(X, x_0)$ на фактормножество $\overline{.\Delta^\circ\mathcal{E}n\iota}(\Omega, X)$. Но, поскольку симплициальное множество X полно, каноническое отображение множества $\overline{.\Delta^\circ\mathcal{E}n\iota}(\Omega, X)$ на множество $.\mathcal{H}(\Omega, X)$ также биективно. Следовательно, множество $.\mathcal{H}(\Omega, X)$ биективно отображается на множество $\pi_1(X, x_0)$. Для завершения доказательства сформулированного в начале этого параграфа утверждения (для случая полного X) остается поэтому лишь доказать, что это биективное отображение сохраняет групповую операцию (является изоморфизмом групп). Но это непосредственно получается простым сравнением определений.

5.5. Рассмотрим, наконец, произвольное (вообще говоря, неполное) пунктированное симплициальное множество (X, x_0). Для любого такого множества имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccc} .\mathcal{H}(\Omega, X) & \xrightarrow{.\mathcal{H}(\Omega,\, e(X))} & .\mathcal{H}(\Omega, X_K) \\ & & \big\downarrow \approx \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\pi_1(e(X))} & \pi_1(X_K, e(X)(x_0)) \end{array}$$

вертикальный морфизм которой является построенным в п. 5.4 изоморфизмом. Поскольку морфизм $e(x)$ анодинен, отображение $\mathcal{H}(\Omega, e(X))$ биективно. С другой стороны, ясно, что построенный в п. 3.2 морфизм $v(X)$ индуцирует изоморфизм группоидов Пуанкаре. Следовательно, поскольку функтор Π перестановочен с прямыми пределами, морфизмы $w(X)$ и $e(X)$ также индуцируют изоморфизмы группоидов Пуанкаре. Таким образом, в частности, отображение $\pi_1(e(X))$ биективно.

Компонируя рассмотренные биективные отображения, мы получим некоторое биективное отображение множества $\mathscr{H}(\Omega, X)$ на группу $\pi_1(X, x_0)$. Это отображение функториально по X и потому определяет на множестве $\mathscr{H}(\Omega, X)$ некоторое функториальное по X групповое строение. Тем самым симплициальное множество Ω оказывается снабженным некоторым строением когруппы. Для завершения доказательства осталось проверить, что это строение совпадает со строением, введенным в п. 4.5. Эта проверка сводится к простому сопоставлению определений, и мы оставим ее читателю.

Глава V

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Мы даем здесь унифицированное построение некоторых точных последовательностей, встречающихся в алгебраической топологии. Наши доказательства по существу не отличаются от доказательств Пуппе. Они лишь более абстрактны, самодвойственны и иногда несколько проще (!).

Символом $\mathcal{O}$ мы обозначаем *нулевую категорию*, содержащую только один объект и только один морфизм. Каждый объект x произвольной категории $\mathcal{X}$ мы будем отождествлять, следуя известному обыкновению, с функтором из $\mathcal{O}$ в $\mathcal{X}$, сопоставляющим объекту категории $\mathcal{O}$ объект x, а морфизму категории $\mathcal{O}$ — морфизм $\mathrm{Id}\, x$.

§ 1. БИКАТЕГОРИИ

1.1. *Бикатегорией* $\mathfrak{C}$ называется совокупность:

некоторого множества $\mathfrak{C}_0$, элементы которого называются *объектами* бикатегории $\mathfrak{C}$;

некоторых категорий $\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, y)$, определенных для любых объектов x, y бикатегории $\mathfrak{C}$;

некоторых функторов

$$\mu_{x,y,z}\colon \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, y)\times\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(y, z)\to\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, z),$$

определенных для любых объектов x, y, z бикатегории $\mathfrak{C}$ и удовлетворяющих следующим двум аксиомам:

(i) для любой четверки (x, y, z, t) объектов бикатегории $\mathfrak{C}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, y)\times\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(y, z)\times\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(z,t) \arrow[r, "\mathrm{Id}\times\mu_{y,z,t}"] \arrow[d, "\mu_{x,y,z}\times\mathrm{Id}"'] & \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, y)\times\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(y, t) \arrow[d, "\mu_{x,y,t}"] \\
\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, z)\times\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(z, t) \arrow[r, "\mu_{x,z,t}"] & \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, t)
\end{tikzcd}$$

(аксиома ассоциативности);

(ii) для любого объекта x бикатегории $\mathfrak{C}$ в категории $\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, x)$ существует такой объект i_x, что для любого объекта y имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
O \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, y) \arrow[rr, "i_x \times \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\approx"'] & & \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, x) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, y) \arrow[dl, "\mu_{x,x,y}"] \\
& \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, y) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(y, x) \times O \arrow[rr, "\mathrm{Id} \times i_x"] \arrow[dr, "\approx"'] & & \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(y, x) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, x) \arrow[dl, "\mu_{y,x,x}"] \\
& \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(y, x) &
\end{tikzcd}$$

(аксиома существования нейтральных объектов).

Объекты категорий $\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(x, y)$ называются *морфизмами первого ранга* бикатегории $\mathfrak{C}$, а их морфизмы — *морфизмами второго ранга* бикатегории $\mathfrak{C}$. Функторы $\mu_{x,y,z}$ называются *функторами композиции*.

Для упрощения обозначений категорию $\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(t, z)$ мы иногда будем обозначать символом z^t. Аналогично, для любого морфизма первого ранга $f: x \to y$ и любого обьекта t функтор

$$\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(t, f): \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(t, x) \to \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(t, y),$$

индуцированный функтором композиции $\mu_{t,x,y}$, будет обозначаться символом f^t и для любого морфизма второго ранга $\alpha: f \to f'$ функторный морфизм

$$\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(t, \alpha): \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(t, f) \to \mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(t, f'),$$

сопоставляющий произвольному объекту a категории $\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(t, x)$ морфизм $\mu_{t,x,y}(\mathrm{Id}\, a, \alpha)$ категории $\mathcal{H}om_{\mathfrak{C}}(t, y)$, будет обозначаться символом α^t.

1.2. Важнейшим примером бикатегории служит бикатегория категорий $\mathfrak{Cat}$. Объектами этой бикатегории являются категории, принадлежащие некоторому раз навсегда фиксированнному «универсальному множеству». Для любых категорий x и y категория $\mathcal{H}om_{\mathfrak{Cat}}(x, y)$ является категорией функторов из x в y. Функторы композиции $\mu_{x,y,z}$ бикатегории $\mathfrak{Cat}$ определяются обычной композицией функторов.

Можно указать и много других бикатегорий, «близких» к бикатегории $\mathfrak{Cat}$. Например, можно вместо всех категорий рассматривать лишь аддитивные категории, вместо любых функторов — лишь аддитивные функторы и т. п.

1.3. Для любой бикатегории $\mathfrak{C}$ мы символом $\mathfrak{C}_{1,2}$ будем обозначать прямую сумму категорий $\mathscr{Hom}_{\mathfrak{C}}(x, y)$, символом $\mathfrak{C}_1$ — множество объектов категории $\mathfrak{C}_{1,2}$ (множество морфизмов первого ранга бикатегории $\mathfrak{C}$), символом $\mathfrak{C}_2$ — множество морфизмов категории $\mathfrak{C}_{1,2}$ (множество морфизмов второго ранга бикатегории $\mathfrak{C}$), символами $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{r}_1$ — отображения, сопоставляющие в категории $\mathfrak{C}_{1,2}$ произвольному морфизму его области определения и значений соответственно, и символом $\mathfrak{i}_1$ — отображение множества $\mathfrak{C}_1$ в множество $\mathfrak{C}_2$, сопоставляющее произвольному объекту категории $\mathfrak{C}_{1,2}$ тождественный морфизм этого объекта. Композицию двух компонируемых (т. е. удовлетворяющих соотношению $\mathfrak{d}_1\alpha = \mathfrak{r}_1\beta$) морфизмов α и β категории $\mathfrak{C}_{1,2}$ мы будем обозначать символом $\mu_{1,2}(\beta, \alpha)$ или символом $\alpha \circ \beta$.

Аналогично, символом $\mathfrak{C}_{0,1}$ мы будем обозначать категорию, множеством объектов которой является множество $\mathfrak{C}_0$, а множеством морфизмов объекта x в объект y является множество объектов категории $\mathscr{Hom}_{\mathfrak{C}}(x, y)$. Закон композиции этой категории индуцирован функторами $\mu_{x,y,z}$. Отображения, сопоставляющие произвольному морфизму этой категории его области определения и значений, мы будем обозначать соответственно символами $\mathfrak{d}_0$ и $\mathfrak{r}_0$. Предусмотренное аксиомой существования нейтральных объектов отображение $x \rightsquigarrow i_x$ будет обозначаться символом $\mathfrak{i}_0$. Композиция двух компонируемых ($\mathfrak{d}_0 g = \mathfrak{r}_0 f$) морфизмов f и g категории $\mathfrak{C}_{0,1}$ будет обозначаться символом $\mu_{0,1}(f, g)$ или символом $g \bullet f$ (а иногда просто gf).

Наконец, символом $\mathfrak{C}_{0,2}$ мы будем обозначать категорию, множеством объектов которой является множество $\mathfrak{C}_0$, а множеством морфизмов — множество $\mathfrak{C}_2$. Отображениями в этой категории, сопоставляющими произвольному морфизму его области определения и значений, являются соответственно отображения $\mathfrak{d}_0\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_0\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_0\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1$. Закон композиции категории $\mathfrak{C}_{0,2}$ индуцирован функторами $\mu_{x,y,z}$. Композицию двух компонируемых морфизмов α и α' категории $\mathfrak{C}_{0,2}$ мы будем обозначать символом $\mu_{0,2}(\alpha, \alpha')$ или символом $\alpha' * \alpha$ (а иногда даже и $\alpha'\alpha$). В случае когда морфизм α' (соответственно морфизм α) имеет вид $\mathfrak{i}_1(f)$, композицию $\alpha' * \alpha$ мы будем обозначать символом $f * \alpha$ или $f\alpha$ (соответственно символом $\alpha' * f$ или $\alpha' f$).

Введенные категории связаны следующими соотношениями:

a) для любых морфизмов $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ второго ранга, удовлетворяющих соотношениям

$$\mathfrak{r}_1\alpha = \mathfrak{d}_1\beta, \quad \mathfrak{r}_1\alpha' = \mathfrak{d}_1\beta'$$

и

$$\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\alpha = \mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\beta = \mathfrak{d}_0\mathfrak{d}_1\alpha' = \mathfrak{d}_0\mathfrak{d}_1\beta',$$

имеет место формула

$$(\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha) = (\beta' * \beta) \circ (\alpha' * \alpha);$$

b) тождественное отображение множества $\mathfrak{C}_0$ и отображение $\mathfrak{i}_1$: $\mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2$ составляют некоторый функтор из категории $\mathfrak{C}_{0,1}$ в категорию $\mathfrak{C}_{0,2}$.

Ясно, что бикатегория $\mathfrak{C}$ полностью определяется диаграммой множеств

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}_2 \arrow[r, bend left, "\mathfrak{d}_1"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{r}_1"'] & \mathfrak{C}_1 \arrow[l, "\mathfrak{i}_1"'] \arrow[r, bend left, "\mathfrak{d}_0"] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{r}_0"'] & \mathfrak{C}_0 \arrow[l, "\mathfrak{i}_0"'] \end{tikzcd}$$

и отображениями

$$\mu_{1,2}: \mathfrak{C}_2 \underset{\mathfrak{r}_1,\mathfrak{d}_1}{\times} \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_2,$$

$$\mu_{0,1}: \mathfrak{C}_1 \underset{\mathfrak{r}_0,\mathfrak{d}_0}{\times} \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_1,$$

$$\mu_{0,2}: \mathfrak{C}_2 \underset{\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1,\mathfrak{d}_0\mathfrak{d}_1}{\times} \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_2.$$

Кроме того, можно показать (мы этим фактом пользоваться не будем), что эти данные тогда и только тогда определяют некоторую бикатегорию, когда

(i) имеют место равенства

$$\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_0\mathfrak{d}_1, \quad \mathfrak{d}_0\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{d}_0\mathfrak{d}_1;$$

(ii) отображение $\mu_{1,2}$ (соответственно отображения $\mu_{0,1}$ и $\mu_{0,2}$) является законом композиции некоторой категории, множеством объектов которой служит множество $\mathfrak{C}_1$ (соответственно множество $\mathfrak{C}_0$), множеством морфизмов — множество $\mathfrak{C}_2$ (соответственно множества $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$), отображениями, сопоставляющими произвольному морфизму его области определения и значений, — отображения $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{r}_1$ (соответственно отображения $\mathfrak{d}_0$ и $\mathfrak{r}_0$ и отображения $\mathfrak{d}_0\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1$) и для которой отображение $\mathfrak{i}_1$ (соответственно отображения $\mathfrak{i}_0$ и $\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_0$) является отображением, сопоставляющим произвольному объекту его тождественный морфизм;

(iii) имеют место указанные выше свойства a) и b).

1.4. Мы будем рассматривать лишь бикатегории $\mathfrak{X}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

A. *Для любых объектов x и y бикатегории $\mathfrak{X}$ категория $\mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, y)$ является группоидом.*

B. *В бикатегории $\mathfrak{X}$ существует такой объект* 0, *что для любого объекта x этой бикатегории категории $\mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(0, x)$ и $\mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, 0)$ изоморфны нулевой категории $\mathcal{O}$.*

Каждый объект, удовлетворяющий условию B, мы будем называть *нулевым объектом*. Среди всех нулевых объектов мы выберем один, который будем обозначать символом $0_{\mathfrak{X}}$ (или просто 0). Этот объект мы будем называть *отмеченным нулевым объектом* бикатегории $\mathfrak{X}$. Для любого объекта x бикатегории $\mathfrak{X}$ мы будем символом 0^x (соответственно символом 0_x) обозначать (по условию единственный) морфизм первого ранга, областью определения (соответственно областью значений) которого служит объект x, а областью значений (соответственно областью определения) — объект $0_{\mathfrak{X}}$. Для любых двух объектов x и y бикатегории $\mathfrak{X}$ символом 0^x_y или просто 0 мы будем обозначать морфизм первого ранга $0_y \cdot 0^x$. Этот морфизм мы будем называть *нулевым морфизмом* объекта x в объект y. От выбора объекта $0_{\mathfrak{X}}$ он не зависит.

Изучение общих бикатегорий (удовлетворяющих условиям A и B) мы сведем к изучению *бикатегории $\mathfrak{Gr}$ пунктированных группоидов*. Объектами этой бикатегории являются *пунктированные группоиды*, т. е. пары (G, g_0), состоящие из произвольного группоида G (принадлежащего фиксированному «универсальному множеству») и некоторого его объекта g_0 (называемого *отмеченным объектом*). Для любых двух пунктированных группоидов $x = (G, g_0)$ и $y = (H, h_0)$ категорией $\mathcal{H}om_{\mathfrak{Gr}}(x, y)$ является подкатегория категории $\mathcal{H}om(G, H)$ всех функторов из G в H, состоящая из функторов, переводящих объект g_0 в объект h_0, и из функторных морфизмов φ этих функторов, удовлетворяющих соотношению $\varphi(x_0) = \mathrm{Id}\, y_0$. Функторы композиции бикатегории $\mathfrak{Gr}$ определяются очевидным образом.

1.5. Для любых объектов x и y бикатегории $\mathfrak{X}$, удовлетворяющей условиям A и B, мы группоид $\mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, y)$ будем всегда считать пунктированным группоидом с отмеченным объектом 0_y^x. Коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} O \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(y, z) \arrow[r, "0_y^x \times \mathrm{Id}"] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, y) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(y, z) \arrow[d, "\mu_{x,y,z}"] & \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, y) \times O \arrow[l, "\mathrm{Id} \times 0_z^y"'] \arrow[d] \\ O \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, z) & O \arrow[l] \end{tikzcd}$$

показывает, что для любых трех объектов x, y и z бикатегории $\mathfrak{X}$ функтор композиции $\mu_{x,y,z}$ переводит отмеченный объект $(0_y^x, 0_z^y)$ группоида $\mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, y) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(y, z)$ в отмеченный объект 0_z^x группоида $\mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, z)$.

1.6. Множество мы будем называть *пунктированным множеством*, если в нем отмечен некоторый его элемент. Для любых двух объектов x и y бикатегории $\mathfrak{X}$ пунктированное множество $\pi_0(\mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, y))$, в котором отмечена компонента связности объекта 0_y^x, мы будем обозначать символом $|x, y|$. Поскольку множество компонент связности произведения группоидов естественно изоморфно произведению множеств компонент связности сомножителей, функторы композиции

$$\mu_{x,y,z}: \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, y) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(y, z) \to \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, z)$$

индуцируют некоторые отображения

$$|x, y, z|: |x, y| \times |y, z| \to |x, z|,$$

что позволяет нам построить категорию $\overline{\mathfrak{X}}$, объектами которой являются объекты бикатегории $\mathfrak{X}$, множествами морфизмов — множества $|x, y|$ и закон композиции которой определяется отображениями $|x, y, z,|$. Образ произвольного объекта $f: x \to y$ категории $\mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(x, y)$ в множестве $|x, y|$ мы будем обозначать символом $[f]$.

Категорию $\overline{\mathfrak{X}}$ мы будем называть «бикатегорией $\mathfrak{X}$ по модулю гомотопии». Ясно, что объект $0_{\mathfrak{X}}$ является нулевым объектом этой категории.

§ 2. ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПУНКТИРОВАННЫХ ГРУППОИДОВ

Прежде чем излагать общие методы построения точных последовательностей в некоторых бикатегориях $\mathfrak{X}$, удовлетворяющих условиям А и В, мы рассмотрим «стандартную» бикатегорию $\mathfrak{Gr}$.

2.1. Пусть $\mathcal{A}r\ \mathfrak{Gr}$ — категория, объектами которой являются произвольные морфизмы $f: X \to Y$ пунктированных группоидов (морфизмы первого ранга бикатегории $\mathfrak{Gr}$), а морфизмами — диаграммы вида

$$\chi:\quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

где f, f', u, v — произвольные морфизмы пунктированных группоидов, а α — произвольный морфизм функтора vf в функтор $f'u$ (морфизм второго ранга бикатегории $\mathfrak{Gr}$). Таким образом, хотя сама диаграмма χ, вообще говоря, не коммутативна, но соответствующая ей диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[u]}"'] & Y \arrow[d, "{[v]}"] \\ X' \arrow[r, "{[f']}"'] & Y' \end{tikzcd}$$

над категорией $\overline{\mathfrak{Gr}}$ уже коммутативна. К морфизмам категории $\mathcal{A}\kappa\,\mathfrak{Gr}$ относятся, в частности, произвольные коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

(для таких морфизмов $\alpha = \mathrm{Id}$).

Областью определения морфизма

$$\chi:\quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

считается по определению морфизм $f: X \to Y$, а его областью значений — морфизм $f': X' \to Y'$. За композицию $\chi'' = \chi' \circ \chi$ морфизмов

$$\chi:\quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd} \qquad \text{и} \qquad \chi':\quad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u'"'] & Y' \arrow[d, "v'"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\alpha'"] \\ X'' \arrow[r, "f''"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

принимается морфизм

$$\chi'':\quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u''"'] & Y \arrow[d, "v''"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\alpha''"] \\ X'' \arrow[r, "f''"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

для которого

$$u'' = u'u, \quad v'' = v'v, \quad \alpha'' = (\alpha' * u) \circ (v' * \alpha).$$

На категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr}$ мы рассмотрим функтор Γ, определяемый следующим образом:

Произвольному объекту $f\colon X \to Y$ категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr}$ функтор Γ сопоставляет пунктированный группоид Γf, объектами которого являются пары вида (x, h), где x — произвольный объект группоида X, а h — произвольный морфизм группоида Y вида $y_0 \to f(x)$. Морфизмами группоида Γf с областью определения (x, h) и областью значений (x', h') являются по определению такие морфизмы $\xi\colon X \to X'$ группоида X, что $h' = f(\xi) \circ h$. Эти морфизмы компонируются «как в X». Отмеченным объектом группоида Γf считается пара $(x_0, \mathrm{Id}\ y_0)$.

Произвольному морфизму

$$\chi\colon \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr}$ функтор Γ сопоставляет морфизм $\Gamma\chi$ группоида Γf в группоид $\Gamma f'$, определенный соответствием

$$(x, h) \rightsquigarrow (u(x),\ \alpha(x) \circ (vh)).$$

Ясно, что

$$\Gamma(\chi' \circ \chi) = \Gamma(\chi') \circ \Gamma(\chi),$$

так что соответствия $f \rightsquigarrow \Gamma f$, $\chi \rightsquigarrow \Gamma\chi$ действительно определяют некоторый функтор из категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr}$ в категорию пунктированных группоидов $\mathcal{G}r = \mathfrak{Gr}_{0,1}$.

Легко видеть, что этот функтор обладает тем свойством, что для любого морфизма χ, для которого морфизмы u и v являются эквивалентностями группоидов, морфизм $\Gamma\chi$ также является эквивалентностью.

Каждому морфизму $f\colon X \to Y$ пунктированных группоидов мы отнесем морфизм группоидов

$$pf\colon \Gamma f \to X,$$

сопоставляющий паре (x, h) ее первую компоненту x. Ясно, что соответствие $f \rightsquigarrow pf$ является морфизмом функтора $\Gamma\colon f \rightsquigarrow \Gamma f$ в функтор $f \rightsquigarrow X$, сопоставляющий произвольному объекту $f\colon X \to Y$ категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr}$ его область определения X.

Кроме того, мы каждому морфизму $f\colon X \to Y$ отнесем функторный морфизм (морфизм второго ранга бикатегории $\mathfrak{Gr}$)

$$hf\colon 0 \to f \cdot (pf)$$

нулевого морфизма $0\colon \Gamma f \to Y$ в составной морфизм $\Gamma f \xrightarrow{pf} X \xrightarrow{f} Y$, сопоставляющий объекту (x, h) группоида Γf его вторую компоненту $h\colon y_0 \to f(x)$. Ясно, что соответствие $f \rightsquigarrow hf$ также является морфизмом некоторых функторов (а именно функтора $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr} \to \mathfrak{Gr}_{0,1}$, сопоставляющего морфизму $f\colon X \to Y$ нулевой морфизм $0\colon \Gamma f \to Y$, в функтор $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr} \to \mathfrak{Gr}_{0,1}$, сопоставляющий морфизму $f\colon X \to Y$ морфизм $f \cdot (pf)\colon \Gamma f \to Y$).

2.2. Особое значение в дальнейшем будут иметь пунктированные группоиды $\Omega X = \Gamma x_0$, где x_0 в соответствии с принятым в начале этой главы соглашением — функтор $O \to X$, переводящий объект категории (группоида) O в отмеченный объект x_0 пунктированного группоида X. Ясно, что группоид ΩX дискретен (является дискретной категорией; см. п. 4.1 гл. II) и что его объектами можно считать морфизмы группоида X вида $l\colon x_0 \to x_0$. (Таким образом, множество объектов группоида ΩX можно отождествить с множеством элементов группы Пуанкаре $\pi_1(X, x_0)$.) Отмеченным объектом группоида ΩX является тождественный морфизм $\mathrm{Id}\, x_0$ (единица группы $\pi_1(X, x_0)$).

Каждый морфизм пунктированных группоидов $f\colon X \to Y$ определяет по формуле

$$(\Omega f)(l) = f(l)$$

некоторый морфизм $\Omega f\colon \Omega X \to \Omega Y$ группоида ΩX в группоид ΩY. Ясно, что

соответствия $X \rightsquigarrow \Omega X$, $f \rightsquigarrow \Omega f$ определяют некоторый функтор Ω из категории $^{\cdot}\mathcal{G}r$ в категорию $^{\cdot}\mathcal{G}r$.

Рассмотрим, с другой стороны, пунктированный группоид $\Gamma(pf)$, отвечающий морфизму $pf\colon \Gamma f \to X$. Объекты этого группоида естественным образом отождествляются с парами (h, h_1), состоящими из произвольного морфизма $h_1\colon x_0 \to x$ группоида X и произвольного морфизма $h\colon y_0 \to f(x)$ группоида Y. Морфизмами группоида $\Gamma(pf)$ с областью определения (h, h_1) и областью значений (h', h'_1) являются такие морфизмы ξ группоида X, что $h'_1 = \xi \circ h_1$ и $h' = f(\xi) \circ h$. Компонируются эти морфизмы «как в X». Отмеченным объектом группоида $\Gamma(pf)$ является пара $(\mathrm{Id}\, y_0, \mathrm{Id}\, x_0)$.

Тот факт, что соответствие $f \rightsquigarrow pf$ является морфизмом функторов, означает, что для любого морфизма

$$\chi\colon \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, "\alpha"'] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$U\colon\quad \begin{array}{ccc} \Gamma f & \xrightarrow{pf} & X \\ {\scriptstyle\Gamma\chi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \Gamma f' & \xrightarrow{pf'} & X' \end{array}$$

Эта диаграмма, рассматриваемая как морфизм категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr}$, сама определяет морфизм

$$\Gamma U\colon \Gamma(pf) \to \Gamma(pf'),$$

переводящий пару (h, h_1) в пару $(v(h_1), u(h_1))$. При этом без труда проверяется, что

соответствия $f \rightsquigarrow \Gamma(pf)$, $\chi \rightsquigarrow \Gamma U$ определяют некоторый функтор из категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr}$ в категорию $\mathcal{G}r$.

Пусть

$$p^2f = p(pf).$$

Ясно, что соответствие $f \rightsquigarrow p^2f$ определяет морфизм функтора $f \rightsquigarrow \Gamma(pf)$ в функтор $\Gamma\colon f \rightsquigarrow \Gamma f$. При этом для любого морфизма $f\colon X \to Y$ пунктированных группоидов морфизм

$$p^2f\colon \Gamma(pf) \to \Gamma f$$

паре (h, h_1) сопоставляет пару (x, h), где x — область значений морфизма h_1.

Аналогично, функторный морфизм $h(pf)$ нулевого морфизма $0\colon \Gamma(pf) \to X$ в морфизм $(pf)(p^2f)\colon \Gamma(pf) \to X$ сопоставляет каждой паре (h, h_1) морфизм $h_1\colon x_0 \to x$.

В дальнейшем важную роль будет играть морфизм

$$rf\colon \Omega Y \to \Gamma(pf),$$

определенный для любого морфизма $f\colon X \to Y$ пунктированных группоидов формулой

$$(rf)(l) = (l, \operatorname{Id} x_0),$$

где $l\colon y_0 \to y_0$ — произвольный объект группоида ΩY. Легко видеть, что этот морфизм обладает «свойством естественности», т. е. что соответствие $f \rightsquigarrow rf$ представляет собой морфизм некоторых функторов $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr} \to \mathcal{G}r$ (а именно функтора, сопоставляющего произвольному объекту $f\colon X \to Y$ категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{Gr}$ пунктированный группоид ΩY, в построенный выше функтор, сопоставляющий объекту $f\colon X \to Y$ пунктированный группоид $\Gamma(pf)$). Это означает, что для любого морфизма

$$\chi\colon\quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\alpha"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

категории $\mathcal{A}\kern-2pt\ell\,\mathfrak{Gr}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Gamma(pf) \arrow[r, "\Gamma v"] & \Gamma(pf') \\ \Omega Y \arrow[u, "rf"] \arrow[r, "\Omega v"] & \Omega Y' \arrow[u, "rf'"'] \end{tikzcd}$$

Аналогичным свойством естественности обладает, конечно, и морфизм

$$qf\colon \Omega Y \to \Gamma f,$$

определенный формулой

$$(gf)(l) = (x_0, l),$$

где $l\colon y_0 \to y_0$ — произвольный объект группоида ΩY. Впрочем, это вытекает и из того, что, как показывает очевидная непосредственная проверка, морфизм qf является композицией морфизмов rf и p^2f:

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(pf) \arrow[dr, "p^2f"] & \\ \Omega Y \arrow[ur, "rf"] \arrow[rr, "qf"] & & \Gamma f \end{tikzcd}$$

Рассмотрим теперь морфизм

$$r'f\colon \Gamma(pf) \to \Omega Y,$$

сопоставляющий паре (h, h_1) морфизм $f(h_1)^{-1} \circ h\colon y_0 \to y_0$. Ясно, что $r'f \circ rf = \mathrm{Id}\,\Omega Y$. С другой стороны, морфизм $rf \circ r'f\colon \Gamma(pf) \to \Gamma(pf)$ переводит произвольную пару (h, h_1) в пару $(f(h_1)^{-1}h, \mathrm{Id}\,x_0)$. Но эти две пары связаны, очевидно, морфизмом h_1^{-1} (рассматриваемым как морфизм группоида $\Gamma(pf)$) и потому принадлежат одной компоненте связности группоида $\Gamma(pf)$. Отсюда следует, что морфизмы $[rf]$ и $[r'f]$ категории $\overline{\mathfrak{Gr}}$, соответствующие морфизмам rf и $r'f$, взаимно обратны, т. е. что морфизмы rf и $r'f$ квазиобратны друг другу. Тем самым доказано, что

для любого морфизма $f\colon X \to Y$ пунктированных группоидов группоид $\Gamma(pf)$ эквивалентен дискретному группоиду ΩY.

2.3. Каждое отображение группы $\pi_1(X, x_0)$ в себя можно отождествить с некоторым морфизмом пунктированных группоидов $\Omega X \to \Omega X$. В частности, отображение $\xi \to \xi^{-1}$ («инверсия» группы $\pi_1(X, x_0)$) определяет некоторый морфизм

$$\delta X\colon \Omega X \to \Omega X$$

(вместо σX мы часто будем писать просто σ). Легко видеть, что над категорией $\overline{\mathfrak{Gr}}$ для любого морфизма $f\colon X \to Y$ пунктированных группоидов имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma(pf) & \\
\Omega X \arrow[ur, "{[q(pf)\circ\sigma]}"] \arrow[rr, "{[\Omega f]}"] & & \Omega Y \arrow[ul, "{[rf]}"']
\end{tikzcd}$$

Действительно, произвольный объект l группоида ΩX переводится морфизмом $q(pf)\circ\sigma$ в пару $(\mathrm{Id}\, y_0,\ l^{-1})$, а морфизмом $(rf)\circ\Omega f$ — в пару $(f(l),\ \mathrm{Id}\, x_0)$. Поскольку морфизм l, рассматриваемый как морфизм группоида $\Gamma(pf)$, является, очевидно, морфизмом первой пары во вторую, эти пары принадлежат одной компоненте связности этого группоида и потому морфизмы $q(pf)\circ\sigma$ и $(rf)\circ\Omega f$ определяют один и тот же морфизм категории $\overline{\mathfrak{Gr}}$.

2.4. Сопоставив диаграмму п. 2.3 с диаграммой п. 2.2, построенной для морфизма pf, мы немедленно получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(p^2f) \arrow[r, "{[p^3f]}"] & \Gamma(pf) \\
\Omega X \arrow[u, "{[r(pf)\circ\sigma]}"] \arrow[r, "{[\Omega f]}"] & \Omega Y \arrow[u, "{[rf]}"']
\end{tikzcd}$$

Итерируя это построение и учитывая определения и диаграмму п. 2.2, мы получаем над категорией $\overline{\mathfrak{Gr}}$ коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \Gamma(p^4f) \arrow[r, "{[p^5f]}"] & \Gamma(p^3f) \arrow[r, "{[p^4f]}"] & \Gamma(p^2f) \arrow[r, "{[p^3f]}"] & \Gamma(pf) \arrow[r, "{[p^2f]}"] & \Gamma f \arrow[r, "{[pf]}"] & X \arrow[r, "{[f]}"] & Y \\
\ldots \arrow[r] & \Omega(\Gamma(pf)) \arrow[u, "{[r(p^3f)\circ\sigma]}"] \arrow[r, "{[\Omega(p^2f)]}"] & \Omega(\Gamma f) \arrow[u, "{[r(p^2f)]}"] \arrow[r, "{[\Omega(pf)]}"] & \Omega X \arrow[u, "{[r(pf)\circ\sigma]}"] \arrow[r, "{[\Omega f]}"] & \Omega Y \arrow[u, "{[rf]}"] \arrow[ur, "{[qf]}"'] & & & \\
\ldots \arrow[r] & \Omega(\Omega Y) \approx O \arrow[u, "{[\Omega(rf)]}"] \arrow[ur, "{[\Omega(qf)]}"'] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

все вертикальные стрелки которой являются изоморфизмами.

Применив к этой диаграмме функтор π_0 и заметив, что

1) для любого морфизма $g\colon G \to G'$ пунктированных группоидов, для которого морфизм $[g]$ обратим, отображение $\pi_0 g\colon \pi_0 G \to \pi_0 G'$ биективно;

2) любой морфизм $f\colon X \to Y$ пунктированных группоидов индуцирует точную последовательность

$$\pi_0(\Gamma f) \xrightarrow{\pi_0(pf)} \pi_0 X \xrightarrow{\pi_0 f} \pi_0 Y$$

пунктированных множеств (т. е. такую последовательность, что образ отображения $\pi_0(pf)$ совпадает с прообразом при отображении $\pi_0 f$ отмеченного элемента множества $\pi_0 Y$);

3) множество $\pi_0(\Omega Y)$ совпадает с множеством $\pi_1(Y, y_0)$, мы немедленно получим, что *имеет место точная последовательность пунктированных множеств*

$$(1) \to \pi_1(\Gamma f) \xrightarrow{\pi_1(\Gamma f)} \pi_1 X \xrightarrow{\pi_1 f} \pi_1 Y \xrightarrow{\pi_0(qf)} \pi_0(\Gamma f) \xrightarrow{\pi_0(pf)} \pi_0 X \xrightarrow{\pi_0 f} \pi_0 Y.$$

2.4.1. Ясно, что начальный отрезок

$$(1) \to \pi_1(\Gamma f) \xrightarrow{\pi_1(\Gamma f)} \pi_1 X \xrightarrow{\pi_1 f} \pi_1 Y$$

этой последовательности является даже *точной последовательностью групп*. Кроме того, *группа $\pi_1 Y$ естественным образом действует справа на множестве $\pi_0(\Gamma f)$*. Действительно, пусть (x, h) — произвольный объект группоида Γf. Для любого элемента α группы $\pi_0(\Omega Y) = \pi_1 Y$ мы положим $(x, h)\alpha = (x, h\alpha)$. Ясно, что перейдя к компонентам связности, мы тем самым получаем некоторое действие группы $\pi_1 Y$ на множестве $\pi_0(\Gamma f)$.

§ 3. ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

Вернемся теперь к общему случаю произвольной бикатегории $\mathfrak{X}$, удовлетворяющей условиям А и В из п. 1.4.

3.1. Пусть $f: x \to y$ — произвольный морфизм первого ранга бикатегории $\mathfrak{X}$. Предположим, что этому морфизму сопоставлена тройка $\Phi f = (\Gamma f, pf, hf)$, состоящая из некоторого объекта Γf бикатегории $\mathfrak{X}$, морфизма первого ранга $pf: \Gamma f \to X$ и морфизма второго ранга $hf: 0_y^{\Gamma f} \to f \cdot (pf)$. Для каждого объекта t бикатегории $\mathfrak{X}$ тройка Φf определяет некоторый функтор

$$\varphi^t f: (\Gamma f)^t \to \Gamma(f^t)$$

обозначения $(\Gamma f)^t$ и f^t разъяснены в п. 1.1; определение группоида $\Gamma(f^t)$ см. п. 2.1), сопоставляющий произвольному морфизму первого ранга $g: t \to \Gamma f$ пару $((pf)\, g, (hf) * g)$, являющуюся по определению объектом группоида $\Gamma(f^t)$, и произвольному морфизму второго ранга $\gamma: g \to g'$ — морфизм второго ранга $(pf) * \gamma$ с областью определения $((pf)\, g, (hf) * g)$ и областью значений $((pf)\, g', (hf) * g')$ (смысл знака $*$ см. в п. 1.3). Очевидно, что для этого функтора имеет место коммутативная диаграмма пунктированных группоидов

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma f)^t \arrow[r, "(pf)^t"] \arrow[d, "\varphi^t f"] & x^t \arrow[r, "f^t"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & y^t \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\Gamma(f^t) \arrow[r, "(pf^t)"] & x^t \arrow[r, "f^t"] & y^t
\end{tikzcd}$$

3.2. Функтор $F: X \to Y$, где X и Y — произвольные группоиды, называется *связным*, если этот функтор надъективен как на объектах, так и на морфизмах и если для любого объекта b группоида Y группоид $F^{-1}(b)$ связен (по определению объектами группоида $F^{-1}(b)$ являются объекты группоида X, переходящие в объект b, а его морфизмами — морфизмы группоида X, переходящие в морфизм $\mathrm{Id}\, b$). Очевидно, что любой связный функтор индуцирует биективное отображение множества $\pi_0 X$ на множество $\pi_0 Y$.

Теперь у нас все готово для того, чтобы сформулировать еще одно условие на нашу бикатегорию $\mathfrak{X}$:

C. *Для любого морфизма первого ранга $f: x \to y$ бикатегории $\mathfrak{X}$ существует такая тройка $(\Gamma f, pf, hf)$, что для любого объекта t бикатегории $\mathfrak{X}$ функтор $\varphi^t f: (\Gamma f)^t \to \Gamma(f^t)$ связен.*

Легко показать (непосредственным обращением к определениям), что условие связности функтора $\varphi^t f$ равносильно следующим двум условиям:

C_1. *Для любого морфизма первого ранга $g: t \to x$ и любого морфизма второго ранга $h: 0 \to fg$ существует такой морфизм первого ранга $g': t \to \Gamma f$, что $g = (pf) g'$ и $h = (hf) * g'$. Для любого другого морфизма первого ранга $g'': t \to \Gamma f$, обладающего этим свойством, существует такой морфизм второго ранга $\gamma: g' \to g''$, что $(pf) * \gamma = \mathrm{Id}\, g$.*

C_2. *Для любого морфизма второго ранга $\gamma: (pf) g' \to (pf) g''$, удовлетворяющего соотношению $(f * \gamma) \circ ((hf) * g') = (hf) * g''$, существует такой морфизм второго ранга $\delta: g' \to g''$, что $\gamma = (pf) * \delta$.*

Заметим, что второе из утверждений условия C_1 является частным случаем условия C_2 (получающимся при $\gamma = \mathrm{Id}\, g$).

3.2.1. В случае когда морфизм f является нулевым морфизмом $0: 0 \to y$, первую компоненту Γf тройки $(\Gamma f, pf, hf)$, предусмотренной условием C, мы будет обозначать символом Ωy и называть *пространством петель* объекта y.

3.2.2. *Бикатегория группоидов* $\mathfrak{Gr}$ *удовлетворяет условию* C. Достаточно определить тройку $(\Gamma f, pf, hf)$ в соответствии с п. 2.1. Кроме того, для этой бикатегории предусмотренный условием C_1 морфизм первого ранга g' однозначно определяется морфизмами g и h, а предусмотренный условием C_2 морфизм δ однозначно определяется морфизмом γ.

3.3. Начиная с этого места, мы неизменно будем предполагать, что рассматриваемая бикатегория $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условиям A, B и C.

Для любого морфизма первого ранга $f: x \to y$ бикатегории $\mathfrak{X}$, любой тройки $\Phi f = (\Gamma f, pf, hf)$, удовлетворяющей условию C, и любого объекта t указанный в п. 3.1 функтор $\varphi^t f$ индуцирует биективное отображение

$$[\varphi^t f]: |t, \Gamma f| \to \pi_0(\Gamma(f^t))$$

множества $|t, \Gamma f| = \pi_0((\Gamma f)^t)$ на множество $\pi_0(\Gamma(f^t))$. Это означает, что функтор $t \rightsquigarrow \pi_0(\Gamma(f^t))$ из категории $(\overline{\mathfrak{X}})^\circ$ в категорию $\mathcal{E}ns$ представим и что его представлением служит пара $(\Gamma f, (pf, hf))$. В частности, мы видим, что объект Γf и морфизм $[pf]$ определены морфизмом f однозначно с точностью до изоморфизма категории $\overline{\mathfrak{X}}$.

Ввиду этой «единственности с точностью до гомотопической эквивалентности» нам по существу безразлично, какую тройку Φf мы выберем для каждого морфизма первого ранга $f: x \to y$. Будем пока считать, что этот выбор мы раз навсегда совершили и зафиксировали. В дальнейшем к зависимости наших построений от выбора тройки Φf мы еще вернемся.

В частном случае, когда морфизм f является нулевым морфизмом $0 \to y$ и, следовательно, объект Γf является пространством петель Ωy объекта y (п. 3.2.1), этот объект представляет функтор из категории $(\overline{\mathfrak{X}})^\circ$ в категорию $\mathcal{E}ns$, сопоставляющий каждому объекту t категории $(\overline{\mathfrak{X}})^\circ$ группу Пуанкаре $\pi_1(y^t, 0)$ группоида $y^t = \mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(t, y)$ в объекте 0. Это означает, что

объект Ωy *является группой категории* $\overline{\mathfrak{X}}$.

3.4. Перенося на общий случай изложенные в п. 2.1 построения, мы введем в рассмотрение категорию $\mathcal{A}r\,\mathfrak{X}$, объектами которой являются морфизмы первого ранга бикатегории $\mathfrak{X}$, а морфизмами — диаграммы вида

$$\chi:\quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\alpha"] \\ x' \arrow[r, "f'"] & y' \end{tikzcd}$$

где f, f', u, v — произвольные морфизмы первого ранга бикатегории $\mathfrak{X}$, а $\alpha: vf \to f'u$ — произвольный морфизм второго ранга этой бикатегории. Таким образом, для любой такой диаграммы χ диаграмма

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[u]}"'] & y \arrow[d, "{[v]}"] \\ x' \arrow[r, "{[f']}"] & y' \end{tikzcd}$$

над категорией $\overline{\mathfrak{X}}$ коммутативна. Композицией $\chi'' = \chi' \circ \chi$ морфизмов

$$\chi:\ \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & y \arrow[d, "v"] \\ x' \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, phantom, "\chi"] & y' \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \chi':\ \begin{tikzcd} x' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u'"'] & y' \arrow[d, "v'"] \\ x'' \arrow[r, "f''"'] \arrow[ur, phantom, "\chi'"] & y'' \end{tikzcd}$$

считается при этом морфизм

$$\chi'':\ \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u''"'] & y \arrow[d, "v''"] \\ x'' \arrow[r, "f''"'] \arrow[ur, phantom, "\alpha''"] & y'' \end{tikzcd}$$

для которого $u'' = u'u$, $v'' = v'v$ и $\alpha'' = (\alpha' * u) \circ (v' * \alpha)$ (ср. п. 2.1).

Согласно условию C_1 п. 3.2 (примененному к морфизмам f', $u \circ (pf)$ и $(\alpha * (\dot{p}f))$ $(v * (hf)))$, для любого морфизма χ категории $\mathcal{A}k\,\mathfrak{X}$ существует в бикатегории $\mathfrak{X}$ такой морфизм первого ранга $\Gamma\chi\colon \Gamma f \to \Gamma f'$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Gamma f \arrow[r, "\Gamma\chi"] \arrow[d, "pf"'] & \Gamma f' \arrow[d, "pf'"] \\ X \arrow[r, "u"] & X' \end{tikzcd}$$

и морфизм $(hf') * (\Gamma\chi)$ совпадает с составным морфизмом

$$0 \xrightarrow{v * (hf)} vf(pf) \xrightarrow{\alpha * (pf)} f'u(pf).$$

3.4.1. В отличие от частного случая бикатегории $\mathfrak{Gr}$ морфизм $\Gamma\chi$, вообще говоря, не определяется однозначно морфизмом χ. Однако класс $[\Gamma\chi]$ этого морфизма уже однозначно определен морфизмом χ (см. п. 3.3).

Аналогично, мы не можем утверждать, что для любых двух компонируемых морфизмов χ' и χ категории $\mathcal{A}k\,\mathfrak{X}$ имеет место равенство

$$\Gamma(\chi' \circ \chi) = \Gamma(\chi') \circ \Gamma(\chi).$$

Однако, как мы сейчас покажем, для классов $[\Gamma\chi]$ такого рода равенство все же имеет место.

3.4.2. Очевидно, что в произвольной бикатегории $\mathfrak{X}$, удовлетворяющей условиям A, B и C, для любого морфизма χ категории $\mathcal{A}k\,\mathfrak{X}$

имеет место коммутативная диаграмма пунктированных группоидов

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma f)^t \arrow[rr, "(\Gamma\chi)^t"] \arrow[dd, "\varphi^t f"'] \arrow[dr, "(pf)^t"] & & (\Gamma f')^t \arrow[dd, "\varphi^t f'"] \arrow[dr, "(pf')^t"] & \\
& x^t \arrow[rr, "u^t"] & & x'^t \\
\Gamma(f^t) \arrow[rr, "\Gamma(\chi^t)"] \arrow[ur, "p(f^t)"'] & & \Gamma(f'^t) \arrow[ur, "p(f'^t)"'] &
\end{tikzcd}$$

Следовательно, если мы посредством отображений $\pi_0(\varphi^t f)$ и $\pi_0(\varphi^t f')$ отождествим множества $|t, \Gamma f|$ и $|t, \Gamma f'|$ с множествами $\pi_0(\Gamma(f^t))$и $\pi_0(\Gamma(f'^t))$ соответственно, то морфизм $|t, \Gamma\chi|$ совпадет с морфизмом $\pi_0(\Gamma\chi^t)$. С другой стороны, если для морфизма χ морфизмы u и v являются гомотопическими эквивалентностями, т. е. если морфизмы $[u]$ и $[v]$ категории $\overline{\mathfrak{X}}$ обратимы, то функторы u^t и v^t являются эквивалентностями группоидов и потому эквивалентностью является функтор $\Gamma\chi^t$. Поэтому в таком случае отображение $\pi_0(\Gamma\chi^t) = |t,\Gamma\chi|$ биективно, и, следовательно, морфизм $[\Gamma\chi]$ обратим. Таким образом,

если морфизмы $[u]$ и $[v]$ обратимы, то морфизм $[\Gamma\chi]$ также обратим.

Пусть теперь χ и χ' — произвольные компонируемые морфизмы категории $\mathcal{A}k\,\mathfrak{X}$, и пусть $\chi''=\chi'\circ\chi$. Тогда $\chi''^t=\chi'^t\circ\chi^t$ и потому $\Gamma(\chi''^t)= \Gamma(\chi'^t)\circ\Gamma(\chi^t)$. Следовательно, $\pi_0(\Gamma\chi''^t) = \pi_0(\Gamma\chi'^t)\circ\pi_0(\Gamma\chi^t)$, т. е. $|t, \Gamma\chi''| = |t, \Gamma\chi'|\circ|t, \Gamma\chi|$. Так как это верно для любого t, то

$$[\Gamma(\chi'\circ\chi)] = [\Gamma\chi']\circ[\Gamma\chi].$$

Тем самым доказано, что

соответствия $f \rightsquigarrow \Gamma f$, $\chi \rightsquigarrow [\Gamma\chi]$ определяют некоторый функтор из категории $\mathcal{A}k\,\mathfrak{X}$ в категорию $\overline{\mathfrak{X}}$.

Допуская определенную вольность, мы будем обозначать этот функтор тем же символом Γ.

3.4.3. В частном случае, когда морфизм χ имеет вид

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{Id}"] & y
\end{tikzcd}$$

морфизм $\Gamma\chi$ является некоторым морфизмом первого ранга $\Omega x \to \Omega y$. Этот морфизм мы будем обозначать символом Ωf. Ясно, что

соответствия $x \rightsquigarrow \Omega x$, $f \rightsquigarrow [\Omega f]$ определяют некоторый функтор Ω из категории $\mathfrak{X}_{0,1}$ (см. п. 1.3) в категорию $\overline{\mathfrak{X}}$.

В случае когда бикатегория $\mathfrak{X}$ является бикатегорией пунктированных группоидов $\mathfrak{Gr}$, для любого морфизма первого ранга $F: X \to Y$ морфизм $\pi_0(\Omega F)$ является гомоморфизмом групп. Поэтому, выписав диаграмму (*) п. 3.4.2 для морфизма χ, заданного диаграммой

$$\begin{tikzcd}
(\Omega x)^t \arrow[r, "(\Omega f)^t"] \arrow[d, "\varphi^t 0_x"'] & (\Omega y)^t \arrow[d, "\varphi^t 0_y"] \\
\Omega(x^t) \arrow[r, "\Omega(f^t)"] & \Omega(y^t)
\end{tikzcd}$$

и заметив, что морфизмы $[\varphi^t 0_x]$ и $[\varphi^t 0_y]$ определяют объекты Ωx и Ωy как группы категории $\overline{\mathfrak{X}}$, мы немедленно получим, что для любого морфизма первого ранга f бикатегории $\mathfrak{X}$ морфизм $[\Omega f]$ является гомоморфизмом групп. Таким образом,

функтор Ω мы можем считать функтором из категории $\mathfrak{X}_{0,1}$ в категорию групп категории $\overline{\mathfrak{X}}$.

Если морфизмы первого ранга $f, f': x \to y$ бикатегории $\mathfrak{X}$ связаны некоторым морфизмом второго ранга $\alpha: f \to f'$, то для любого объекта t группоиды $\Omega(f^t)$ и $\Omega(f'^t)$ совпадают. Поэтому множества $|t, \Omega f|$ и $|t, \Omega f'|$ также совпадают, а значит, совпадают и морфизмы $[\Omega f]$ и $[\Omega f']$. Таким образом, из равенства $[f] = [f']$ вытекает равенство $[\Omega f] = [\Omega f']$. Это показывает, что

функтор Ω индуцирует некоторый функтор (также обозначаемый символом Ω) из категории $\overline{\mathfrak{X}}$ в категорию $\overline{\mathfrak{X}}$.

3.4.4. Любой морфизм первого ранга $f: x \to y$ бикатегории $\mathfrak{X}$ определяет морфизм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{Id}"] & y \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
x \arrow[r, "f"'] & y
\end{tikzcd}$$

категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{X}$. Соответствующий этому морфизму морфизм $\Gamma\chi$ мы будем обозначать символом qf. Таким образом, по определению морфизм qf представляет собой морфизм первого ранга $\Omega y \to \Gamma f$, удовлетворяющий соотношениям $(pf)(qf) = 0_x^{\Omega y}$ и $(hg) * (qf) = h(0_y)$ (см. п. 3.4). Класс этого морфизма в категории $\overline{\mathfrak{X}}$ однозначно определен морфизмом f.

§ 4. ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ: ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. ТЕОРЕМЫ ИНВАРИАНТНОСТИ

Последовательностью (компонируемой) длины n над категорией $\overline{\mathfrak{X}}$ называется произвольная диаграмма вида

$$x_n \xrightarrow{f_n} x_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_2 \xrightarrow{f_2} x_1 \xrightarrow{f_1} x_0$$

над категорией $\overline{\mathfrak{X}}$. Пусть

$$y_n \xrightarrow{g_n} y_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_2 \xrightarrow{g_2} y_1 \xrightarrow{g_1} y_1$$

— вторая такая последовательность. *Морфизмом* первой последовательности во вторую называется произвольная последовательность морфизмов $h_i\colon x_i \to y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, категории $\overline{\mathfrak{X}}$, для которой имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_n & \xrightarrow{f_n} & x_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & x_2 & \xrightarrow{f_2} & x_1 & \xrightarrow{f_1} & x_0 \\
{\scriptstyle h_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{n-1}} & \cdots & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} \\
y_n & \xrightarrow{g_n} & y_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & y_2 & \xrightarrow{g_2} & y_1 & \xrightarrow{g_1} & y_0
\end{array}$$

Эти морфизмы компонируются очевидным образом, так что совокупность всех компонируемых последовательностей длины n над категорией $\overline{\mathfrak{X}}$ и всех их морфизмов является категорией.

4.1. Будем называть *выбором* произвольную пару $\mathcal{S} = (\Phi, \Psi)$, состоящую из отображения Φ, сопоставляющего каждому объекту f категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{X}$ некоторую тройку $(\Gamma f, pf, hf)$, предусмотренную условием C, и из отображения Ψ, сопоставляющего каждому морфизму χ категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{X}$ некоторый морфизм первого ранга $\Gamma\chi$ бикатегории $\mathfrak{X}$, обладающий указанными в п. 3.4 свойствами.

Зафиксировав некоторый выбор $\mathcal{S}$, мы можем каждому объекту $f\colon x \to y$ категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{X}$ сопоставить бесконечную последовательность

$$\cdots \Omega^2 x \to \xrightarrow{[\Omega^2 f]} \Omega^2 y \xrightarrow{[\Omega qf]} \Omega\Gamma f \xrightarrow{[\Omega pf]} \Omega x \xrightarrow{[\Omega f]} \Omega y \xrightarrow{[qf]} \Gamma f \xrightarrow{[pf]} x \xrightarrow{[f]} y$$

над категорией $\overline{\mathfrak{X}}$ (см. п. 3.4.3 и 3.4.4). Аналогично, каждому морфизму

$$\chi\colon\quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\alpha"] \\ x' \arrow[r, "f'"] & y' \end{tikzcd}$$

категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{X}$ мы можем сопоставить диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Omega^2 y \arrow[r, "{[\Omega qf]}"] \arrow[d, "{[\Omega^2 v]}"] & \Omega\Gamma f \arrow[r, "{[\Omega pf]}"] \arrow[d, "{[\Omega\Gamma\chi]}"] & \Omega x \arrow[r, "{[\Omega f]}"] \arrow[d, "{[\Omega u]}"] & \Omega y \arrow[r, "{[qf]}"] \arrow[d, "{[\Omega v]}"] & \Gamma f \arrow[r, "{[pf]}"] \arrow[d, "{[\Gamma\chi]}"] & x \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[u]}"] & y \arrow[d, "{[v]}"] \\
\cdots \arrow[r] & \Omega^2 y' \arrow[r, "{[\Omega qf']}"] & \Omega\Gamma f' \arrow[r, "{[\Omega pf']}"] & \Omega x' \arrow[r, "{[\Omega f']}"] & \Omega y' \arrow[r, "{[qf']}"] & \Gamma f' \arrow[r, "{[pf']}"] & x' \arrow[r, "{[f']}"] & y'.
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что *эта диаграмма коммутативна*, т. е. что морфизмы ..., $[\Omega^2 v]$, $[\Omega\Gamma\chi]$, $[\Omega u]$, $[\Omega v]$, $[\Gamma\chi]$, $[u]$, $[v]$ составляют некоторый морфизм категории компонируемых последовательностей бесконечной длины над категорией $\overline{\mathfrak{X}}$.

Действительно, правый квадрат этой диаграммы коммутативен в силу определения морфизма χ. Следующий квадрат коммутативен в силу определения морфизма $\Gamma\chi$. Чтобы доказать, что третий справа квадрат также коммутативен, мы заметим, что, согласно результатам п. 3.4.2 и 3.4.4, морфизмы $[\Gamma\chi][qf]$ и $[qf'][\Omega v]$ могут быть отождествлены соответственно с морфизмами $[\Gamma\chi']$ и $[\Gamma\chi'']$, где χ' и χ'' — морфизмы категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{X}$, определенные диаграммами

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & y \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
x \arrow[r] \arrow[d, "u"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{Id}"] & y \arrow[d, "v"] \\
x' \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\alpha"] & y'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & y \arrow[d, "v"] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{Id}"] & y' \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
x' \arrow[r, "f'"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{Id}"] & y'
\end{tikzcd}$$

Но ясно, что $\chi' = \chi''$, и, следовательно, $[\Gamma\chi][qf] = [qf'][\Omega v]$.

Коммутативность остальных квадратов вытекает очевидным образом из коммутативиости рассмотренных начальных квадратов.

Теперь ясно, что *описанная конструкция определяет некоторый функтор* $\Omega = \Omega^{\mathcal{S}}$ *из категории* $\mathcal{A}r\,\mathfrak{X}$ *в категорию компонируемых последовательностей бесконечной длины над категорией* $\overline{\mathfrak{X}}$.

4.2. Напомним, что последовательность пунктированных множеств

$$T_n \xrightarrow{\tau_n} T_{n-1} \to \cdots \to T_1 \xrightarrow{\tau_1} T_0$$

называется *точной*, если каждое множество $\tau_{i+1}(T_{i+1})$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, совпадает с прообразом отмеченного элемента множества T_{i-1} при отображении τ_i.

Основная теорема. *Для любого морфизма $f\colon x \to y$ произвольной бикатегории $\mathfrak{X}$, удовлетворяющей условиям* A, B *и* C, *и любого объекта t этой бикатегории имеет место точная последовательность пунктированных множеств*

$$\ldots \to |t, \Omega x| \xrightarrow{|t, \Omega f|} |t, \Omega y| \xrightarrow{|t, qf|} |t, \Gamma f| \xrightarrow{|t, pf|} |t, x| \xrightarrow{|t, f|} |t, y|.$$

При этом пунктированные множества ..., $|t, \Omega x|$, $|t, \Omega y|$ *являются группами, а связывающие их отображения — гомоморфизмами групп. Кроме того, группа $|t, \Omega y|$ действует справа на множестве $|t, \Gamma f|$, причем в это действие переводится отображением $|t, qf|$ действие группы $|t, \Omega y|$ на себе посредством правых сдвигов.*

Мы будем последовательность

$$x_n \xrightarrow{f_n} x_{n-1} \to \cdots \to x_1 \xrightarrow{f_1} x_0$$

над категорией $\overline{\mathfrak{X}}$ называть *r-точной*, если для любого объекта t категории $\overline{\mathfrak{X}}$ последовательность пунктированных множеств

$$|t, x_n| \xrightarrow{|t, f_n|} |t, x_{n-1}| \to \cdots \to |t, x_1| \xrightarrow{|t, f_1|} |t, x_0|$$

является точной последовательностью. В этой терминологии основная теорема утверждает, что для любого морфизма f построенная в п. 4.1 *последовательность $\Omega^{\delta} f$ является r-точной последовательностью.*

Доказательство основной теоремы мы изложим в следующем параграфе.

4.3. Морфизмы $[f]$, $[f']\colon x \to y$ категории $\overline{\mathfrak{X}}$ называются *изоморфными*, если в категории $\overline{\mathfrak{X}}$ существуют такие обратимые морфизмы $[u]\colon x \to x'$ и $[v]\colon y \to y'$, что $[f'][u] = [v][f]$.

Первая теорема инвариантности. *Если для морфизмов первого ранга $f\colon x \to y$ и $f'\colon x' \to y$ бикатегории $\mathfrak{X}$ морфизмы $[f]$ и $[f']$ категории $\overline{\mathfrak{X}}$ изоморфны, то соответствующие последовательности*

$$\cdots \to \Omega x \xrightarrow{[\Omega f]} \Omega y \xrightarrow{[qf]} \Gamma f \xrightarrow{[pf]} x \xrightarrow{[f]} y$$

и

$$\cdots \to \Omega x' \xrightarrow{[\Omega f']} \Omega y' \xrightarrow{[qf']} \Gamma f' \xrightarrow{[pf']} x' \xrightarrow{[f']} y,$$

также изоморфны.

Доказательство. По условию в категории $\mathcal{A}r\,\mathfrak{X}$ существует хотя бы один морфизм

$$\chi:\quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\alpha"] \\ x' \arrow[r, "f'"] & y' \end{tikzcd}$$

для которого морфизмы $[u]$ и $[v]$ обратимы. Согласно п. 3.4.2 и 3.4.3, этот морфизм индуцирует изоморфизм $\Omega^{\mathcal{S}}\chi$ последовательности $\Omega^{\mathcal{S}}f$ на последовательность $\Omega^{\mathcal{S}}f'$.

Теорема 4.3 применима, в частности, к морфизмам f и f', для которых $[f]=[f']$. Таким образом,

с точностью до изоморфизма последовательность $\Omega^{\mathcal{S}}f$ зависит только от класса $[f]$ морфизма f.

4.4. Функтор

$$\Omega^{\mathcal{S}}: f \rightsquigarrow (\cdots \to \Omega y \xrightarrow{[qf]} \Gamma f \xrightarrow{[pf]} x \xrightarrow{f} y)$$

зависит, очевидно, от выбора $\mathcal{S}$. Однако, как мы сейчас покажем, эта зависимость «очень слаба».

Вторая теорема инвариантности. *Функторы $\Omega^{\mathcal{S}}$ и $\Omega^{\mathcal{S}'}$, соответствующие двум различным выборам $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ (в одной и той же бикатегории $\mathfrak{X}$, удовлетворяющей условиям* A, B *и* C), *изоморфны.*

Доказательство. Объекты и морфизмы Γf, Ωy, Ωf, pf, hf, qf, ..., соответствующие выбору $\mathcal{S}'$, условимся отмечать штрихом: $\Gamma' f$, $\Omega' y$, $\Omega' f$, $p'f$, $h'f$, $g'f$, ... Согласно условию C_1 (примененному к тройке $\Phi' f$ и морфизмам pf и hf), для любого морфизма первого ранга $f: x \to y$ бикатегории $\mathfrak{X}$ существует такой морфизм первого ранга $wf: \Gamma f \to \Gamma' f$, что $(p'f)(wf)=pf$ и $(h'f) * (wf) = hf$. Для каждого объекта t бикатегории $\mathfrak{X}$ этот морфизм удовлетворяет соотношению $(\varphi'' f)(wf)^t = \varphi^t f$ и, следовательно, соотношению $\pi_0(\varphi'' f) \circ \pi_0((wf)^t) = \pi_0(\varphi^t f)$. Но, согласно условию C, отображения $\pi_0(\varphi'' f)$ и $\pi_0(\varphi^t f)$ биективны. Поэтому биективно и отображение $\pi_0((wf)^t) = |t, wf|$. Следовательно, морфизм $[wf]$ категории $\overline{\mathfrak{X}}$ обратим.

Далее, для любого морфизма

$$\chi:\quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\alpha"] \\ x' \arrow[r, "f'"] & y' \end{tikzcd}$$

категории $\mathcal{A}k\,\mathfrak{X}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}(p'f')\,(wf')\,(\Gamma\chi) &= (pf')\,(\Gamma\chi) = u(pf) = u(p'f)\,(wf) = \\ &= (p'f')\,(\Gamma'\chi)\,(wf);\\ (h'f') * (wf') * (\Gamma\chi) &= (hf') * (\Gamma\chi) = (\alpha * pf) \circ (v * hf) = \\ &= (\alpha * p'f * wf) \circ (v * h'f * wf) = \\ &= [(\alpha * p'f) \circ (v * h'f)] * (wf) = \\ &= (h'f') * (\Gamma'\chi) * (wf).\end{aligned}$$

Поэтому, согласно условию C_1, существует такой морфизм второго ранга γ: $(wf')\,(\Gamma\chi) \to (\Gamma'\chi)\,(wf)$, что $(p'f') * \gamma = \mathrm{Id}$. Иными словами, имеет место морфизм

$$\begin{tikzcd} \Gamma f \arrow[r, "\Gamma\chi"] \arrow[d, "wf"'] & \Gamma f' \arrow[d, "wf'"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\gamma"] \\ \Gamma' f \arrow[r, "\Gamma'\chi"'] & \Gamma' f' \end{tikzcd}$$

категории $\mathcal{A}k\,\mathfrak{X}$. В частности,

$$(*) \qquad [wf']\,[\Gamma\chi] = [\Gamma'\chi]\,[wf].$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \Omega^2 y \arrow[r, "{[\Omega qf]}"] \arrow[d, "{[\Omega w 0_y]}"'] & \Omega\Gamma f \arrow[r, "{[\Omega pf]}"] \arrow[d, "{[\Omega wf]}"'] & \Omega x \arrow[r, "{[\Omega f]}"] \arrow[d, "{[w0_x]}"] & \Omega y \arrow[r, "{[qf]}"] \arrow[d, "{[w0_y]}"'] & \Gamma f \arrow[r, "{[pf]}"] \arrow[d, "{[wf]}"'] & x \arrow[r, "{[f]}"] & y \\ \cdots \arrow[r] & \Omega\Omega' y \arrow[r, "{[\Omega q'f]}"] \arrow[d, "{[w0_{\Omega' y}]}"'] & \Omega\Gamma' f \arrow[ur, "{[\Omega p'f]}"] \arrow[d, "{[w0_{\Gamma' f}]}"'] & \Omega' x \arrow[r, "{[\Omega' f]}"] & \Omega' y \arrow[r, "{[q'f]}"] & \Gamma' f \arrow[ur, "{[p'f]}"'] & & \\ \cdots \arrow[r] & \Omega'^2 y \arrow[r, "{[\Omega' q'f]}"] & \Omega'\Gamma' f \arrow[ur, "{[\Omega' p'f]}"'] & & & & & \end{tikzcd}$$

Легко видеть, что эта диаграмма коммутативна. Действительно, правый треугольник этой диаграммы коммутативен по определению морфизма wf. Примыкающий к нему квадрат коммутативен в силу формулы $(*)$, примененной к морфизму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & y \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\mathrm{Id}"] \\ x \arrow[r, "f"'] & y \end{tikzcd}$$

Следующий квадрат коммутативен в силу формулы (*), примененной к морфизму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{Id}"] & y \end{tikzcd}$$

Коммутативность левого треугольника вытекает из коммутативности правого, а коммутативность лежащего под ним параллелограмма вытекает из формулы (*), примененной к морфизму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & F'f \arrow[d, "p'f"] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{Id}"] & x \end{tikzcd}$$

и т. д.

Коммутативность рассмотренной диаграммы означает, в частности, что морфизмы

$$\ldots, [w0_{\Omega'\Gamma'f}]\,[\Omega w0_{\Gamma'f}]\,[\Omega^2 wf],\ [w0_{\Omega'x}]\,[\Omega w0_x],$$
$$[w0_{\Omega'y}]\,[\Omega w0_y],\ [w0_{\Gamma'f}]\,[\Omega wf],\ [w0_x],\ [w0_y],\ [wf],\ \mathrm{Id}\,x,\ \mathrm{Id}\,y$$

составляют некоторый морфизм Wf последовательности $\Omega\mathscr{S}f$ в последовательность $\Omega\mathscr{S}'f$. Поскольку все компоненты морфизма Wf обратимы, этот морфизм является изоморфизмом.

Для завершения доказательства остается показать, что построенный морфизм последовательностей обладает свойством функториальности. Очевидную проверку этого обстоятельства мы оставляем читателю.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Согласно п. 3.1 и 3.2, последовательность

$$|t, \Gamma f| \xrightarrow{|t,\, pf|} |t, x| \xrightarrow{|t,\, f|} |t, y|$$

изоморфна точной (см. п. 2.4) последовательности

$$\pi_0(\Gamma(f^t)) \xrightarrow{\pi_0(p(f^t))} \pi_0(x^t) \xrightarrow{\pi_0(f^t)} \pi_0(y^t).$$

Поэтому эта последовательность точна, а следовательно, точна и бесконечная последовательность

$$(*)\quad \cdots \to |t, \Gamma p^2 f| \xrightarrow{|t,\, p^3 f|} |t, \Gamma p f| \xrightarrow{|t,\, p^2 f|} |t, \Gamma f| \xrightarrow{|t,\, pf|} |t, x| \xrightarrow{|t,\, f|} |t, y|,$$

где, как и выше, $p^{n+1}f = p(p^n f)$.

Таким образом, для доказательства точности указанной в основной теореме 4.2 последовательности нам достаточно показать, что эта последовательность изоморфна последовательности (*).

Для облегчения понимания соответствующего доказательства мы сначала изложим вкратце основные идеи, на которых оно основано.

5.1. Согласно условию C_1 (примененному к морфизмам pf, qf и $\mathrm{Id}\, 0_x^{\Omega y}$), для любого морфизма первого ранга $f\colon x \to y$ существует такой морфизм первого ранга $rf\colon \Omega y \to \Gamma pf$, что $(p^2 f)(rf) = qf$ и $(hpf) * rf = \mathrm{Id}\, 0_x^{\Omega y}$. В случае когда бикатегория $\mathfrak{X}$ является бикатегорией пунктированных группоидов $\mathfrak{Gr}$, морфизмом rf является морфизм, рассмотренный в п. 2.2.

Аналогично, для любого объекта x бикатегории $\mathfrak{X}$ существует такой морфизм $\sigma x\colon \Omega x \to \Omega x$ (обозначаемый также просто через σ), что $(p\, 0_x)(\sigma x) = 0^{\Omega x}$ и $(h\, 0_x) * \sigma x = (h 0_x)^{-1}$. В случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{Gr}$ морфизмом σ является морфизм, построенный в п. 2.3. При этом для любого объекта t произвольной бикатегории $\mathfrak{X}$ имеет место коммутативная диаграмма пунктированных группоидов

$$\begin{tikzcd}
(\Omega x)^t \arrow[r, "(\sigma x)^t"] \arrow[d, "\varphi^t 0_x"'] & (\Omega x)^t \arrow[d, "\varphi^t 0_x"] \\
\Omega(x^t) \arrow[r, "\sigma(x^t)"] & \Omega(x^t)
\end{tikzcd}$$

откуда следует, поскольку отображение $\pi_0(\sigma(x^t))$ является инверсией $\xi \rightsquigarrow \xi^{-1}$, что отображение $|t, \sigma x|$ группы $|t, \Omega x|$ на себя также представляет собой инверсию. Следовательно, морфизм $[\sigma x]$ обратим (причем $[\sigma x]^{-1} = [\sigma x]$). Кроме того, для любого морфизма первого ранга $f\colon x \to y$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Omega x \arrow[r, "{[\Omega f]}"] \arrow[d, "{[\sigma x]}"'] & \Omega y \arrow[d, "{[\sigma y]}"] \\
\Omega x \arrow[r, "{[\Omega f]}"] & \Omega y
\end{tikzcd}$$

Морфизмы rf и σx позволяют построить следующую диаграмму:

$$(*)\qquad \begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Gamma p^5 f \arrow[r, "{[p^6 f]}"] & \Gamma p^4 f \arrow[r, "{[p^5 f]}"] & \Gamma p^3 f \arrow[r, "{[p^4 f]}"] & \Gamma p^2 f \arrow[r, "{[p^3 f]}"] & \Gamma p f \arrow[r, "{[p^2 f]}"] & \Gamma f \arrow[r, "{[pf]}"] & x \arrow[r, "{[f]}"] & y \\
\cdots \arrow[r] & \Omega\Gamma p^2 f \arrow[r, "{[\Omega p^3 f]}"] \arrow[u, "{[rp^4 f]}"] & \Omega\Gamma p f \arrow[r, "{[\Omega p^2 f]}"] \arrow[u, "{[rp^3 f][\sigma]}"] & \Omega\Gamma f \arrow[r, "{[\Omega p f]}"] \arrow[u, "{[rp^2 f]}"] & \Omega x \arrow[r, "{[\Omega f]}"] \arrow[u, "{[rpf][\sigma]}"] & \Omega y \arrow[u, "{[rf]}"] \arrow[ur, "{[qf]}"'] & & & \\
\cdots \arrow[r] & \Omega^2 x \arrow[r, "{[\Omega^2 f]}"] \arrow[u, "{[\Omega rpf][\Omega\sigma]}"] & \Omega^2 y \arrow[u, "{[\Omega rf]}"] \arrow[ur, "{[\Omega qf]}"'] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Мы покажем, что эта диаграмма коммутативна и что ее вертикальные стрелки являются изоморфизмами. Тем самым основная часть теоремы 4.2 будет полностью доказана (см. начало этого параграфа).

Правый треугольник диаграммы коммутативен в силу определения морфизма rf. Пусть коммутативность примыкающего к нему квадрата уже доказана, т. е. доказано, что для любого морфизма первого ранга $f\colon x \to y$ имеет место соотношение

$$(**)\qquad [rf][\Omega f] = [p^3 f][rpf][\sigma x].$$

Тогда, применив это соотношение к морфизму $pf\colon \Gamma f \to x$, мы немедленно получим, что

$$\begin{aligned}[rpf][\sigma x][\Omega pf] &= [rpf][\Omega pf][\sigma\Gamma f] = \\ &= [p^4 f][rp^2 f][\sigma\Gamma f][\sigma\Gamma f] = [p^4 f][rp^2 f],\end{aligned}$$

т. е. что следующий квадрат диаграммы $(*)$ также коммутативен. Аналогичное рассуждение применимо и к любому другому квадрату верхней половины диаграммы $(*)$. Что же касается ее нижней половины, то она получается из верхней применением функтора Ω и потому коммутативна вместе с ней. Таким образом, для доказательства коммутативности всей диаграммы $(*)$ достаточно доказать лишь соотношение $(**)$.

Аналогично, легко видеть, что для доказательства того, что все вертикальные стрелки диаграммы $(*)$ являются изоморфизмами, достаточно доказать, что изоморфизмом является морфизм $[rf]$.

Доказательство этих утверждений будет по существу основываться на рассмотрении «пространственной» диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma p^2 f)^t \arrow[rr, "(p^3 f)^t"] \arrow[dd, dashed, "\varphi^t_3 f"'] & & (\Gamma p f)^t \arrow[rr, "(p^2 f)^t"] \arrow[dd, dashed, "\varphi^t_2 f"'] & & (\Gamma f)^t \arrow[r, "(pf)^t"] \arrow[dd, dashed, "\varphi^t f"] & x^t \arrow[r, "f^t"] \arrow[dd, dashed, "\mathrm{Id}"] & y^t \arrow[dd, dashed, "\mathrm{Id}"] \\
& (\Omega x)^t \arrow[ul, "(r(pf)\sigma)^t"'] \arrow[rr, "(\Omega f)^t"] \arrow[dd, dashed, "\varphi^t 0"] & & (\Omega y)^t \arrow[ul, "(rf)^t"'] \arrow[ur, "(qf)^t"'] \arrow[dd, dashed, "\varphi^t 0"] & & & \\
\Gamma p^2(f^t) \arrow[rr, "p^3(f^t)"] & & \Gamma p(f^t) \arrow[rr, "p^2(f^t)"] & & \Gamma(f^t) \arrow[r, "p(f^t)"] & x^t \arrow[r, "f^t"] & y^t \\
& \Omega(x^t) \arrow[ul, "(rp(f^t))\sigma"] \arrow[rr, "\Omega(f^t)"] & & \Omega(y^t) \arrow[ul, "r(f^t)"] \arrow[ur, "q(f^t)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Мы покажем, что «боковые грани» этой диаграммы коммутативны и что ее вертикальные стрелки индуцируют на множествах компонент связности биективные отображения. Тем самым рассмотрение «верха» этой диаграммы мы сведем к рассмотрению ее «низа», а к нему мы уже сможем применить известные нам результаты для пунктированных группоидов.

5.2. В первую очередь мы рассмотрим морфизм $[rf]$.

Лемма. *Если в коммутативной диаграмме пунктированных группоидов*

$$T:\quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & Y \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ X' & \xrightarrow{F'} & Y \end{array}$$

функтор T связен, то функтор $\Gamma T\colon \Gamma F \to \Gamma F'$, соответствующий этой диаграмме, также связен.

Доказательство очевидно (напомним, что $\Gamma T\colon (x, h) \rightsquigarrow \rightsquigarrow (Tx, h)$; см. п. 2.1).

Согласно этой лемме, функтор $\Gamma\varphi^t f\colon \Gamma(pf)^t \to \Gamma p(f^t)$, соответствующий коммутативной диаграмме

$$\varphi^t f:\quad \begin{array}{ccc} (\Gamma f)^t & \xrightarrow{p(f)^t} & x^t \\ {\scriptstyle \varphi^t f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ \Gamma(f^t) & \xrightarrow{(pf^t)} & x^t \end{array}$$

(см. п. 3.1), связен. Поэтому функтор

$$\varphi_2^t f = (\Gamma\varphi^t f) \circ (\varphi^t pf),$$

являясь композицией связных функторов, также связен и, значит, индуцирует биективное отображение $\pi_0(\varphi_2^t f)$. С другой стороны, из определения морфизма rf немедленно вытекает, что имеет место коммутативная диаграмма

$$Sf:\quad \begin{array}{ccc} (\Omega y)^t & \xrightarrow{\varphi^t 0_y} & \Omega(y^t) \\ {\scriptstyle (rf)^t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r(f^t)} \\ (\Gamma pf)^t & \xrightarrow{\varphi_2^t f} & \Gamma p(f^t) \end{array}$$

Применив к этой диаграмме функтор π_0 и заметив, что отображения $\pi_0(\varphi^t 0_y)$, $\pi_0(r(f^t))$ и $\pi_0(\varphi_2^t f)$ биективны (первое — в силу связности функтора $\varphi^t 0_y$, второе — по доказанному в п. 2.2, третье — по сказанному выше), мы немедленно получим, что отображение $\pi_0((rf)^t)$, т. е. отображение $|t, rf|$, также биективно. Поскольку это верно для любого t, морфизм $[rf]$ обратим.

5.3. Докажем теперь соотношение (**) из п. 5.1.

Рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\varphi^t(pf):\quad \begin{array}{ccc} (\Gamma pf)^t & \xrightarrow{(p^2f)^t} & (\Gamma f)^t \\ {\scriptstyle \varphi^t(pf)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ \Gamma(pf)^t & \xrightarrow{p(pf)^t} & (\Gamma f)^t \end{array}$$

$$U:\quad \begin{array}{ccc} \Gamma(pf)^t & \xrightarrow{p(pf)^t} & (\Gamma f)^t \\ {\scriptstyle \Gamma(\varphi^t f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^t f} \\ \Gamma p(f^t) & \xrightarrow{p^2(f^t)} & \Gamma(f^t) \end{array}$$

и их композицию

$$\Xi:\quad \begin{array}{ccc} (\Gamma pf)^t & \xrightarrow{(p^2f)^t} & (\Gamma f)^t \\ {\scriptstyle \varphi_2^t f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^t f} \\ \Gamma p(f^t) & \xrightarrow{p^2(f^t)} & \Gamma(f^t) \end{array}$$

Поскольку, согласно сказанному выше, отображения $[\varphi_2^t f]$ и $[\varphi^t f]$ обратимы, отображение $[\Gamma\Xi]$, индуцированное функтором $\Gamma\Xi\colon \Gamma(p^2f)^t \to \Gamma p^2(f^t)$, определенным диаграммой Ξ, также обратимо (п. 3.4.2), а значит, обратимо и отображение $[\varphi_3^t f]$, индуцированное функтором

$$\varphi_3^t f = (\Gamma\Xi)\ (\varphi^t(p^2f)).$$

Заметим, что последний функтор связан с функтором $\varphi_2^t f$ коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(p^2f)^t & \xrightarrow{p^3(f)^t} & (\Gamma pf)^t \\ {\scriptstyle \varphi_3^t f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2^t f} \\ \Gamma p^2(f^t) & \xrightarrow{(p^3f)^t} & \Gamma p(f^t) \end{array}$$

Кроме того,

$$\varphi_3^t f = (\Gamma U)\ (\Gamma\varphi^t(pf))\ (\varphi^t(p^2f)) = (\Gamma U)\ (\varphi_2^t(pf)).$$

5.3.1. Согласно свойству естественности морфизма rf (п. 2.2), коммутативная диаграмма пунктированных группоидов

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma f)^t & \xrightarrow{(pf)^t} & x^t \\ {\scriptstyle \varphi^t f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ \Gamma(f^t) & \xrightarrow{p(f^t)} & x^t \end{array}$$

определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Omega(x^t) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "r(pf)^t"'] & \Omega(x^t) \arrow[d, "rp(f^t)"] \\
\Gamma p(pf)^t \arrow[r, "\Gamma U"] & \Gamma p^2(f^t)
\end{tikzcd}$$

«Приставив» к этой диаграмме коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(\Omega x)^t \arrow[r, "\varphi^t 0_x"] \arrow[d, "(rpf)^t"'] & \Omega(x^t) \arrow[d, "r(pf)^t"] \\
(\Gamma p^2 f)^t \arrow[r, "\varphi_2^t(pf)"] & \Gamma p(pf)^t
\end{tikzcd}$$

(см. п. 5.2) и приняв во внимание последнюю формулу п. 5.3, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(\Omega x)^t \arrow[r, "\varphi^t 0_x"] \arrow[d, "(rpf)^t"'] & \Omega(x^t) \arrow[d, "rp(f^t)"] \\
(\Gamma p^2 f)^t \arrow[r, "\varphi_3^t f"] & \Gamma p^2(f^t)
\end{tikzcd}$$

Но, как мы знаем, $(\varphi^t 0_x)(\sigma x)^t = \sigma(x^t)(\varphi^t 0_x)$ (п. 5.1). Поэтому имеет место и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\Omega x)^t \arrow[r, "\varphi^t 0_x"] \arrow[d, "(rpf)^t (\sigma x)^t"'] & \Omega(x^t) \arrow[d, "(rp(f^t))(\sigma(x^t))"] \\
(\Gamma p^2 f)^t \arrow[r, "\varphi_3^t f"] & \Gamma p^2(f^t)
\end{tikzcd}$$

5.3.2. Рассмотрим теперь «кубическую» диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(\Gamma p^2 f)^t \arrow[rr, "(p^3 f)^t"] \arrow[dd, dashed] & & (\Gamma p f)^t \arrow[dd, dashed] & \\
 & (\Omega x)^t \arrow[ul, "(rpf)^t (\sigma x)^t"'] \arrow[rr, "(\Omega f)^t"] \arrow[dd, dashed] & & (\Omega y)^t \arrow[ul, "(rf)^t"'] \arrow[dd, dashed] \\
\Gamma p^2(f^t) \arrow[rr, "p^3(f^t)"] & & \Gamma p(f^t) & \\
 & \Omega(x^t) \arrow[ul, "(rp(f^t))\sigma(x^t)"] \arrow[rr, "\Omega(f^t)"'] & & \Omega(y^t) \arrow[ul, "r(f^t)"']
\end{tikzcd}$$

Согласно п. 5.3.1, 5.3, 5.2 и 3.4.3, «боковые грани» этого куба коммутативны, а, согласно п. 5.3, 5.2 и 3.2, вертикальные стрелки индуцируют биективные отображения множеств компонент связности. Кроме того, применив к «низу» этого куба функтор π_0, мы, согласно п. 2.4, получим коммутативную диаграмму. Следовательно, коммутативную диаграмму мы получим и применив функтор π_0 к «верху» этого куба. Таким образом,

$$|t, p^3f| \circ |t, rpf| \circ |t, \sigma x| = |t, rf| \circ |t, \Omega f|.$$

Поскольку объект t произволен, соотношение (**) тем самым полностью доказано.

5.3.3. Поскольку тот факт, что пунктированные множества ..., $|t, \Omega x|$, $|t, \Omega y|$ являются группами, а связывающие их отображения — гомоморфизмами групп, непосредственно вытекает из результатов п. 3.4.3, для завершения доказательства теоремы 4.2 нам остается лишь определить действие группы $|t, \Omega y|$ на множестве $|t, \Gamma f|$ и доказать, что отображение $|t, qf|$переводит в это действие действие группы$|t, \Omega y|$ на себе посредством правых сдвигов. Но, как мы знаем, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}(\Omega y)^t & \xrightarrow{(qf)^t} & (\Gamma f)^t \\ {\scriptstyle \varphi^t 0_y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^t f} \\ \Omega(y^t) & \xrightarrow{q(f^t)} & \Gamma(f^t)\end{array}$$

вертикальные стрелки которой индуцируют биективные отображения $\pi_0(\varphi^t 0_y)$ и $\pi_0(\varphi^t f)$. С другой стороны, согласно п. 2.4.1, группа $\Omega(y^t)$ действует на множестве $\Gamma(f^t)$, причем отображение $q(f^t)$ переводит в это действие действие группы $\Omega(y^t)$ на себе посредством правых сдвигов. Следовательно, применив отображения $\pi_0(\varphi^t 0_y)$ и $\pi_0(\varphi^t f)$, мы и получим нужное нам действие группы $\pi_0((\Omega y)^t) = |t, \Omega y|$ на множестве $\pi_0((\Gamma f)^t) = |t, \Gamma f|$.

Теорема 4.2 тем самым полностью доказана.

Следствие. *Если для морфизма $f\colon x \to y$ объект x изоморфен в категории $\overline{\mathfrak{X}}$ нулевому объекту $0_{\mathfrak{X}}$, то для любого объекта t бикатегории $\mathfrak{X}$ множество $|t, \Gamma f|$ является группой, изоморфной группе $|t, \Omega y|$.*

5.4. Замечание. Из «пространственной диаграммы» п. 5.1 вытекает, что последовательность длины четыре

$$|t, \Omega x| \xrightarrow{|t, \Omega f|} |t, \Omega y| \xrightarrow{|t, qf|} |t, \Gamma f| \xrightarrow{|t, pf|} |t, x| \xrightarrow{|t, f|} |t, y|$$

изоморфна точной последовательности

$$\pi_0(\Omega(x^t)) \xrightarrow{\pi_0(\Omega(f^t))} \pi_0(\Omega(y^t)) \xrightarrow{\pi_0(q(f^t))} \pi_0(\Gamma(f^t)) \xrightarrow{\pi_0(p(f^t))} \pi_0(x^t) \xrightarrow{\pi_0(f^t)} \pi_0(y^t)$$

и потому сама точна. Таким образом, точность этой «укороченной» последовательности имеет место для любой бикатегории $\mathfrak{X}$, удовлетворяющей лишь условиям А и В. Условие С для этого не нужно.

§ 6. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

6.1. Прежде чем положить конец этому «долгому пути через пустыню», мы покажем еще, как полученные результаты могут быть дуализированы.

Пусть $\mathfrak{Y}$ — произвольная бикатегория. Бикатегория $\mathfrak{Y}^\circ$ называется *двойственной* к бикатегории $\mathfrak{Y}$, если она имеет те же объекты, ее категории морфизмов определены формулой

$$\mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}^\circ}(x, y) = \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(y, x),$$

а функторы композиции

$$\overset{\circ}{\mu}_{x, y, z} : \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}^\circ}(x, y) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}^\circ}(y, z) \to \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}^\circ}(x, z)$$

являются композициями канонических изоморфизмов

$$\mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(y, x) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(z, y) \to \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(z, y) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(y, x)$$

и функторов композиции

$$\mu_{z, y, x} : \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(z, y) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(y, x) \to \mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(z, x)$$

бикатегории $\mathfrak{Y}$.

Коротко можно сказать, что «при переходе от $\mathfrak{Y}$ к $\mathfrak{Y}^\circ$ сохраняются объекты и морфизмы второго ранга, тогда как морфизмы первого ранга меняют свои направления». Каждому свойству бикатегории $\mathfrak{Y}^\circ$ соответствует некоторое свойство бикатегории $\mathfrak{Y}$, называемое *двойственным свойством.*

6.2. Например, если бикатегория $\mathfrak{Y}$ удовлетворяет условиям А и В из п. 1.4, то бикатегория $\mathfrak{Y}^\circ$ также удовлетворяет этим условиям. Таким образом, эти условия сами себе двойственны. Найдем условие, двойственное условию С.

Пусть $f: x \to y$ — произвольный морфизм первого ранга бикатегории $\mathfrak{Y}$, удовлетворяющей условиям А и В, и пусть $\Psi f = (Cf, if, kf)$ — тройка, состоящая из некоторого объекта Cf, некоторого морфизма первого ранга $if: y \to Cf$ и некоторого морфизма второго ранга $kf: 0 \to (if) f$. Для каждого объекта t бикатегории $\mathfrak{Y}$ тройка

Ψf определяет некоторый функтор $\psi_t f\colon (Cf)_t \to \Gamma(f_t)$ (символом z_t, где t — объект бикатегории $\mathfrak{Y}$, мы обозначаем группоид $\mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(z, t)$, а символом f_t, где $f\colon x \to y$ — морфизм первого ранга бикатегории $\mathfrak{Y}$, — функтор $\mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(f, t)\colon y_t \to z_t$). Функтор ψ_t сопоставляет произвольному морфизму первого ранга $g\colon Cf \to t$ пару $(g(if), g * (kf))$, являющуюся по определению объектом группоида $\Gamma(f_t)$ (см. п. 2.1), и каждому морфизму второго ранга $\gamma\colon g \to g'$ — морфизм второго ранга $\gamma * (if)$. Очевидно, что для этого функтора имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(Cf)_t \arrow[r, "(if)_t"] \arrow[d, "\psi_t f"] & y_t \arrow[r, "f_t"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & x_t \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
\Gamma(f_t) \arrow[r, "p(f_t)"] & y_t \arrow[r, "f_t"] & x_t
\end{tikzcd}$$

Условие, двойственное условию С, формулируется следующим образом:

С°. *Для любого морфизма первого ранга $f\colon x \to y$ бикатегории $\mathfrak{Y}$ существует такая тройка $\Psi f = (Cf, if, kf)$, что для любого объекта t бикатегории $\mathfrak{Y}$ функтор $\psi_t f\colon (Cf)_t \to \Gamma(f_t)$, соответствующий этой тройке, связен.*

Действительно, ясно, что бикатегория $\mathfrak{Y}^\circ$ тогда и только тогда удовлетворяет условию С, когда бикатегория $\mathfrak{Y}$ удовлетворяет условию С°.

6.3. Пусть $\mathcal{A}k'\mathfrak{Y}$ — категория, объектами которой являются морфизмы первого ранга $f\colon x \to y$ бикатегории $\mathfrak{Y}$, а морфизмами — диаграммы вида

$$\rho\colon\quad \begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & y \arrow[d, "v"] \\
x' \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, phantom, "\beta"] & y'
\end{tikzcd}$$

где u, v, f, f' — морфизмы первого ранга, а β — морфизм второго ранга $f'u \to vf$. Областью определения (значений) морфизма ρ по определению считается морфизм f (соответственно морфизм f'). Композицией $\rho'' = \rho' \circ \rho$ морфизмов

$$\rho\colon\quad \begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & y \arrow[d, "v"] \\
x' \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, phantom, "\beta"] & y'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\rho'\colon\quad \begin{tikzcd}
x' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u'"'] & y' \arrow[d, "v'"] \\
x'' \arrow[r, "f''"'] \arrow[ur, phantom, "\beta'"] & y''
\end{tikzcd}$$

называется морфизм

$$\rho'':\quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u'u"'] & y \arrow[d, "v'v"] \arrow[dl, phantom, "\beta''"] \\ x'' \arrow[r, "f''"'] & y'' \end{tikzcd}$$

для которого $\beta'' = (v' * \beta) \circ (\beta' * u)$.

6.3.1. Предполагая, что бикатегория $\mathfrak{Y}$ удовлетворяет условиям A, B и C°, отнесем каждому объекту $f\colon x \to y$ категории $\mathcal{A}\kappa'\mathfrak{Y}$ некоторую тройку $\Psi f = (Cf, if, kf)$, предусмотренную условием C°, а каждому морфизму

$$\rho:\quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & y \arrow[d, "v"] \arrow[dl, phantom, "\beta"] \\ x' \arrow[r, "f'"'] & y' \end{tikzcd}$$

этой категории — морфизм первого ранга $C\rho\colon Cf \to Cf'$, для которого $(C\rho)(if) = (if')\,v$ и $(C\rho) * (kf) = ((if') * \beta) \circ ((kf') * u)$ (такой морфизм существует в силу условия C°). В случае когда y является нулевым объектом бикатегории $\mathfrak{Y}$, объект Cf мы будем обозначать символом Σx и будем называть его *надстройкой над объектом* x. Ясно, что функтор $t \rightsquigarrow |\Sigma x, t|$ изоморфен функтору, сопоставляющему объекту t группу Пуанкаре группоида $\mathcal{H}om_{\mathfrak{Y}}(x, t)$ в точке 0_t^x. Следовательно,

надстройка Σx является когруппой категории $\overline{\mathfrak{Y}}$.

Морфизм $C\rho\colon \Sigma x \to \Sigma y$, соответствующий морфизму

$$\rho:\quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{Id}"] \\ 0 \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

мы будем обозначать символом Σf. Ясно, что соответствия $x \rightsquigarrow \Sigma x$, $f \rightsquigarrow \Sigma f$ определяют некоторый функтор Σ из категории $\mathfrak{Y}_{0,1}$ в категорию $\overline{\mathfrak{Y}}$. Этот функтор индуцирует некоторый функтор (по-прежнему обозначаемый символом Σ) из категории $\overline{\mathfrak{Y}}$ в категорию $\overline{\mathfrak{Y}}$.

Морфизм $C\rho\colon Cf \to \Sigma x$, соответствующий морфизму

$$\rho:\quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\,x"'] & y \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\mathrm{Id}"] \\ x \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

мы будем обозначать символом jf.

6.3.2. Сопоставив каждому объекту $f\colon x \to y$ категории $\mathcal{A}r'\mathfrak{Y}$ последовательность

$$(*) \qquad x \xrightarrow{[f]} y \xrightarrow{[if]} Cf \xrightarrow{[jf]} \Sigma x \xrightarrow{[\Sigma f]} \Sigma y \xrightarrow{[\Sigma if]} \Sigma Cf \xrightarrow{[\Sigma jf]} \Sigma^2 x \longrightarrow \cdots$$

над категорией $\overline{\mathfrak{Y}}$ и каждому морфизму

$$\rho\colon \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & y \arrow[d, "v"] \\ x' \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, phantom, "\beta"] & y' \end{tikzcd}$$

категории $\mathcal{A}r'\mathfrak{Y}$ морфизм последовательностей

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[u]}"'] & y \arrow[r, "{[if]}"] \arrow[d, "{[v]}"'] & Cf \arrow[r, "{[jf]}"] \arrow[d, "{[C\rho]}"'] & \Sigma x \arrow[r, "{[\Sigma f]}"] \arrow[d, "{[\Sigma u]}"'] & \Sigma y \arrow[r, "{[\Sigma if]}"] \arrow[d, "{[\Sigma v]}"'] & \Sigma Cf \arrow[r, "{[\Sigma jf]}"] \arrow[d, "{[\Sigma C\rho]}"'] & \Sigma^2 x \arrow[r] \arrow[d, "{[\Sigma^2 u]}"'] & \cdots \\ x' \arrow[r, "{[f']}"] & y' \arrow[r, "{[if']}"] & Cf' \arrow[r, "{[jf']}"] & \Sigma x' \arrow[r, "{[\Sigma f']}"] & \Sigma y' \arrow[r, "{[\Sigma if']}"] & \Sigma Cf' \arrow[r, "{[\Sigma jf']}"] & \Sigma^2 x' \arrow[r] & \cdots, \end{tikzcd}$$

мы, очевидно, получим некоторый функтор из категории $\mathcal{A}r'\mathfrak{Y}$ в категорию бесконечных компонируемых последовательностей над категорией $\overline{\mathfrak{Y}}$. Объекты Σx, Σy, $\Sigma Cf, \ldots$ последовательности $(*)$ являются при этом когруппами категории $\overline{\mathfrak{Y}}$, а связывающие их морфизмы $[\Sigma f]$, $[\Sigma if], \ldots$ — гомоморфизмами когрупп.

При другом выборе объектов и морфизмов $Cf, if, kf, C\rho$ получается изоморфный функтор.

Последовательность $(*)$ *l-точна*, т. е. для любого объекта t бикатегории $\mathfrak{Y}$ последовательность пунктированных множеств

$$\to |\Sigma^2 x, t| \xrightarrow{|\Sigma jf, t|} |\Sigma Cf, t| \xrightarrow{|\Sigma if, t|} |\Sigma y, t| \xrightarrow{|\Sigma f, t|} |\Sigma x, t| \xrightarrow{|jf, t|} |Cf, t| \xrightarrow{|if, t|} |y, t| \xrightarrow{|f, t|} |x, t|$$

является точной последовательностью.

6.4. Предположим теперь, что бикатегория $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ удовлетворяет условиям A, B, C и C°. В этом случае обе группы $|\Sigma x, y|$ и $|x, \Omega y|$ могут быть отождествлены с группой Пуанкаре группоида $\mathcal{H}om_{\mathfrak{X}}(y, x)$ в точке 0_y^x (см. п. 6.3.1 и 3.3). Следовательно,

функтор $x \rightsquigarrow \Sigma x$ из $\overline{\mathfrak{X}}$ в $\overline{\mathfrak{X}}$ сопряжен слева с функтором $y \rightsquigarrow \Omega y$.

Кроме того, общеизвестное рассуждеиие показывает, что для любого объекта y бикатегории $\mathfrak{X}$, являющегося группой категории $\overline{\mathfrak{X}}$, оба строения группы иа множестве $|\Sigma x, y| = |x, \Omega y|$ (одно определяемое когруппой Σx, другое — группой y) совпадают и являются строениями абелевой группы. Таким образом, в этом случае объект Ωy является абелевой группой категории $\overline{\mathfrak{X}}$. В частности,

для любого объекта t объект $\Omega^2 t$ является абелевой группой категории $\overline{\mathfrak{X}}$.

Аналогично показывается, что

для любого объекта t объект $\Sigma^2 t$ является абелевой когруппой категории $\overline{\mathfrak{X}}$.

Наконец, морфизм

$$\rho:\quad \begin{tikzcd} \Gamma f \arrow[r] \arrow[d, "pf"'] & 0 \arrow[d] \\ x \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "(hf)^{-1}"] & f \end{tikzcd}$$

категории $\mathscr{A}\kappa'\mathfrak{X}$ (напомним, что морфизм hf является морфизмом группоида $\mathscr{H}om_{\mathfrak{X}}(\Gamma f, y)$ и потому обратим) определяет некоторый морфизм

$$\Sigma\Gamma f \to Cf.$$

Аналогично определяется канонический морфизм

$$\Gamma f \to \Omega Cf.$$

§ 7. ПЕРВЫЙ ПРИМЕР: ПУНКТИРОВАННЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

7.1. Для любых пунктированных топологических пространств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ с отмеченными точками $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{y}_0$ мы будем символом $\mathscr{H}om.(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ обозначать пунктированное симплициальное множество, n-й слой $\mathscr{H}om.(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})_n$ которого состоит из всевозможных непрерывных отображений h произведения $\Delta^n \times \boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, отображающих подмножество $\Delta^n \times \boldsymbol{x}_0$ в точку $\boldsymbol{y}_0$ (здесь, как и в предыдущих главах, Δ^n — геометрический симплекс размерности n). Операторы граней и вырождения этого симплициального множества определяются очевидным образом.

Заметив, что симплексы $h \in \mathscr{H}om.(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})_n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с отображениями $\widetilde{h}: \Delta^n \times \boldsymbol{X} \to \Delta^n \times \boldsymbol{Y}$, переводящими точку $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}) \in \Delta^n \times \boldsymbol{X}$ в точку $(\boldsymbol{d}, h(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{x})) \in \Delta^n \times \boldsymbol{Y}$, мы для любых трех пунктированных топологических пространств $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$ определим морфизм симплициальных множеств

$$\nu_{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}}: \mathscr{H}om.(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \times \mathscr{H}om.(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) \to \mathscr{H}om.(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}),$$

сопоставив произвольной паре $(h, k) \in \mathscr{H}om.(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})_n \times \mathscr{H}om.(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})_n$ отображение l: $\Delta^n \times \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$, для которого $\widetilde{l} = \widetilde{k} \circ \widetilde{h}$.

Поскольку функтор Π, сопоставляющий симплициальному множеству K его группоид Пуанкаре ΠK, перестановочен с конечными произведениями (п. 7. 5 гл. II), морфизм $\nu_{X,Y,Z}$ индуцирует некоторый функтор

$$\mu_{X,Y,Z} : \Pi\,\mathcal{H}om.(X, Y)\times\Pi\,\mathcal{H}om.(Y, Z) \to \Pi\,\mathcal{H}om.(X, Z).$$

Определим теперь бикатегорию $.\mathfrak{Top}$, объектами которой являются пунктированные топологические пространства, положив

$$\mathcal{H}om_{.\mathfrak{Top}}(X, Y) = \Pi\,\mathcal{H}om.(X, Y)$$

и приняв за соответствующие функторы композиции функторы $\mu_{X,Y,Z}$. Морфизмами первого ранга бикатегории $.\mathfrak{Top}$ являются, таким образом, непрерывные отображения пунктированных топологических пространств, переводящие отмеченные точки в отмеченные. Чтобы описать ее морфизмы второго ранга, рассмотрим непрерывные отображения $\alpha: I\times X \to Y$ (где $I = [0, 1]$), обладающие тем свойством, что $\alpha(t, x_0) = y_0$ для всех $t\in I$ (т. е. являющиеся гомотопиями относительно отмеченных точек). Для таких отображений также можно говорить о гомотопиях (по-прежнему относительно отмеченных точек). Именно, гомотопией, связывающей два отображения α и β, где $\alpha(t, x_0) = y_0$, $\beta(t, x_0) = y_0$, называется такое отображение $h: I\times I\times X \to Y$, что

$$h(s, t, x_0) = y_0 \qquad \text{для любой точки} \qquad (s, t)\in I\times I,$$

$$h(0, t, x) = \alpha(t, x), \quad h(1, t, x) = \beta(t, x) \text{ для любой точки } (t, x)\in I\times X,$$

$$\left.\begin{aligned} h(s, 0, x) &= \alpha(0, x) = \beta(0, x)\\ h(s, 1, x) &= \alpha(1, x) = \beta(1, x)\end{aligned}\right\} \text{ для любой точки } (s, x)\in I\times X).$$

Гомотопические классы $[\alpha]$ гомотопий α и являются морфизмами второго ранга бикатегории $\mathfrak{Top}$. Областью определения $\mathfrak{d}_1[\alpha]$ морфизма $[\alpha]$ является отображение $f: x \rightsquigarrow \alpha(0, x)$ (оно зависит, очевидно, лишь от класса $[\alpha]$ отображения α), а его областью определения $\mathfrak{r}_1[\alpha]$ — отображение $g: x \rightsquigarrow \alpha(1, x)$ (также зависящее только от класса $[\alpha]$). Композиция морфизмов второго ранга $[\alpha]$, индуцированная функторами $\mu_{X,Y,Z}$, совпадает с их «очевидной» композицией.

7.2. Легко видеть, что

бикатегория $\mathfrak{Top}$ *удовлетворяет условиям* А *и* В.

Действительно, условие А выполнено по определению. Приняв за нулевой объект 0 пространство, состоящее из одной точки, мы немедленно получим, что условие В также выполнено.

Поскольку бикатегория $\underline{.\mathfrak{Top}}$ удовлетворяет условиям А и В, для нее определена категория $.\overline{\mathfrak{Top}}$. Объектами этой категории являются пунктированные топологические пространства, а морфизмами — гомотопические классы непрерывных отображений, переводящих отмеченные точки в отмеченные (по отношению к гомотопиям, сохраняющим отмеченные точки). В топологической литературе принято множества гомотопических классов

$$|X, Y| = .\overline{\mathfrak{Top}}(X, Y)$$

обозначать через $[X, Y]$. Мы также будем следовать этому обыкновению.

Рассмотрим теперь для произвольного пунктированного топологического пространства (Y, y_0) пространство $E(Y, y_0)$, точками которого являются непрерывные отображения $\gamma: Y \to Y$, обладающие тем свойством, что $\gamma(0) = y_0$, и топология которого является компактно-открытой топологией. Каждому морфизму первого ранга $f: X \to Y$ бикатегории $.\mathfrak{Top}$ (т. е. непрерывному отображению $X \to Y$, переводящему точку x_0 в точку y_0) мы отнесем подпространство Γf пространства $E(Y, y_0) \times X$, состоящее из всех пар (γ, x), для которых $\gamma(1) = f(x)$. Принимая за pf отображение $(\gamma, x) \rightsquigarrow x$ и за hf гомотопический класс отображения $(t, \gamma, x) \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \gamma(t)$, мы без труда проверим, что тройка $(\Gamma f, pf, \gamma f)$ обладает всеми предусмотренными условием С свойствами. Таким образом,

бикатегория $.\mathfrak{Top}$ *удовлетворяет условию* С.

7.3. Для любых пунктированных топологических пространств Z и T с отмеченными точками z_0 и t_0 соответственно мы будем символом $Z \wedge T$ обозначать пунктированное пространство, получающееся из произведения $Z \times T$ стягиванием в точку его подмножества $Z \times \{t_0\} \cup \{z_0\} \times T$. Отмеченной точкой пространства $Z \wedge T$ мы будем при этом считать образ указанного подмножества.

Рассмотрим, в частности, пространство $I \wedge X$, где I — отрезок $[0, 1]$, рассматриваемый как пунктированное пространство с отмеченной точкой 0. Пространство $I \wedge X$ является, очевидно, конусом над пространством X, в котором стянута в точку образующая, проходящая через точку x_0. Пусть $f: X \to Y$ — произвольный морфизм первого ранга бикатегории $.\mathfrak{Top}$, и пусть Cf — амальгама диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & I \wedge X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

где u — композиция отображения $x \rightsquigarrow (1, x)$ пространства X в пространство $I \times X$ и канонической проекции $I \times X \to I \wedge X$. За отмеченную точку амальгамы Cf мы примем образ точки y_0 при канонической инъекции $if\colon Y \to Cf$. Легко видеть, что тройка (Cf, if, kf), где kf — гомотопический класс композиции канонической проекции $I \times X \to I \wedge X$ и канонического отображения $I \wedge X \to Cf$, обладает всеми предусмотренными условием C° свойствами. Таким образом,

бикатегория $.\mathfrak{Top}$ *удовлетворяет и условию* C°.

Следовательно, к бикатегории $.\mathfrak{Top}$ применимы все результаты предыдущих параграфов. В частности, определены пространства, ΩX и ΣX, являющиеся соответственно обычным пространством петель пространства X в точке x_0 (т. е. подпространством пространства $E(X, x_0)$, состоящим из всех γ, для которых $\gamma(1) = x_0$) и так называемой *приведенной надстройкой* над пространством X (т. е. надстройкой, в которой стянута в точку образующая, проходящая через точку x_0). При этом

для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ *пунктированных пространств, переводящего отмеченную точку в отмеченную, и любого пунктированного пространства* T *имеют место точные последовательности пунктированных множеств*

$$\ldots \to [T, \Omega X] \to [T, \Omega Y] \to [T, \Gamma f] \to [T, X] \to [T, Y],$$

$$\ldots \to [\Sigma Y, T] \to [\Sigma X, T] \to [Cf, T] \to [Y, T] \to [X, T]$$

Эти последовательности называются *последовательностями Пуппе*. Члены $\ldots, [T, \Omega X], [T, \Omega Y]$ и $\ldots, [\Sigma Y, T], [\Sigma X, T]$ этих последовательностей (т. е. все члены, кроме последних трех) являются группами (причем, за исключением последних трех из них, даже абелевыми), а связывающие их отображения — гомоморфизмами групп.

Кроме того,

для любых пунктированных пространств X *и* Y *имеет место равенство*

$$[\Sigma X, Y] = [X, \Omega Y]$$

(впрочем, ясно, что это равенство, очевидно, справедливо не только для гомотопических классов, но и для самих непрерывных отображений).

7.4. Пусть теперь пространство X является подпространством пространства Y. Говорят, что пара (Y, X) удовлетворяет *аксиоме о распространении гомотопии*, если любое непрерывное отображение пространства $I \times X \cup \{0\} \times Y$ в произвольное пространство T может быть распространено на все произведение $I \times Y$.

Пример. *Для любого симплициального множества L и произвольного его симплициального подмножества K пара $(|L|, |K|)$ удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии.*

Действительно, согласно результатам гл. III, геометрическая реализация $|i|$ морфизма вложения i подмножества $(\Delta[1]\times K)\cup\cup(\{0\}\times L)$ в множество $\Delta[1]\times L$ является отображением вложения подпространства $(\boldsymbol{I}\times|K|)\cup(\{0\}\times|L|)$ в пространство $\boldsymbol{I}\times|L|$. С другой стороны, поскольку морфизм i анодинен, подпространство $(\boldsymbol{I}\times|K|)\cup(\{0\}\times|L|)$ является деформационным ретрактом пространства $\boldsymbol{I}\times|L|$. Поэтому любое отображение подпространства $(\boldsymbol{I}\times|K|)\cup(\{0\}\times|L|)$ в произвольное пространство $\boldsymbol{T}$ можно распространить на все пространство $\boldsymbol{I}\times|L|$.

7.5. Для произвольного подпространства $\boldsymbol{X}$ пространства $\boldsymbol{Y}$ символом $\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{X}$ мы будем обозначать факторпространство пространства $\boldsymbol{Y}$, получающееся стягиванием в точку подпространства $\boldsymbol{X}$. Факторпространство $\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{X}$ мы всегда будем рассматривать как пунктированное пространство, отмеченной точкой которого является образ подпространства $\boldsymbol{X}$.

Лемма. *Если пунктированное пространство $\boldsymbol{X}$ стягивается по себе в точку x_0, т. е. если существует ретрагирующая деформация пространства $\boldsymbol{X}$ на точку x_0, и если пара $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии, то каноническая проекция $\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{X}$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. По определению ретрагирующая деформация пространства $\boldsymbol{X}$ на точку x_0 представляет собой такое отображение $h\colon \boldsymbol{I}\times\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$, что

$$h(1, x) = h(t, x_0) = x_0, \qquad x\in\boldsymbol{X},\ t\in\boldsymbol{I},$$

и

$$h(0, x) = x, \qquad x\in\boldsymbol{X}.$$

Отнесем этой деформации отображение g подпространства $(\boldsymbol{I}\times\times\boldsymbol{X})\cup(\{0\}\times\boldsymbol{Y})$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, совпадающее на $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{X}$ с отображением h и являющееся отображением $(0, y)\rightsquigarrow y$ на $\{0\}\times\boldsymbol{Y}$. По условию отображение g может быть распространено до некоторого отображения $f\colon \boldsymbol{I}\times\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{Y}$. Отображение $f_1\colon y\rightsquigarrow f(1\, y)$ является, очевидно, композицией канонической проекции $p\colon \boldsymbol{Y}\rightsquigarrow\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{X}$ и некоторого отображения $s\colon \boldsymbol{Y}/\boldsymbol{X}\rightsquigarrow\boldsymbol{Y}$. Отображение s обладает, таким образом, тем свойством, что его композиция $s\circ p$ с проекцией p гомотопна тождественному отображению $\mathrm{Id}\,\boldsymbol{Y}$. С другой стороны, переходя к факторпространствам, мы, очевидно, получим из отображения f некоторое отображение $e\colon \boldsymbol{I}\times(\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{X})\to\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{X}$, обладающее тем свойством, что $e(0, z) = z$ и $e(1, z) = (p\circ s)(z)$, т. е. являющееся гомотопией, связывающей композицию $p\circ s$ с тождественным отображением $\mathrm{Id}(Y/X)$. Таким образом, каноническая проекция p действительно является гомотопической эквивалентностью с обратной эквивалентностью s.

7.6. Покажем теперь, что

если пара (Y, X) удовлетворяет аксиоме о распространении гомотопии, то пара $(Cf, I\wedge X)$, где f — отображение вложения $X\to Y$, также удовлетворяет этой аксиоме.

Действительно, ясно, что пространство $I\times Cf$ является амальгамой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} I\times X & \xrightarrow{I\times u} & I\times(I\wedge X) \\ \big\downarrow{\scriptstyle I\times f} & & \\ I\times Y & & \end{array}$$

Поэтому для любого непрерывного отображения $g\colon I\times(I\wedge X)\cup\cup\{0\}\times Cf\to T$ каждое его распространение на $I\times Cf$ однозначно определяется некоторым распространением на $I\times Y$ ограничения отображения g на $I\times X\cup\{0\}\times Y$.

С другой стороны, очевидно, что пространство $I\wedge X$ стягивается по себе в точку, причем пространство $Cf/I\wedge X$ канонически гомеоморфно пространству Y/X, так что каноническую проекцию пространства Cf на пространство $Cf/I\wedge X$ мы можем рассматривать как отображение на пространство Y/X, Поэтому, согласно только что доказанной лемме, имеет место

Предложение. *Для любой пары (Y, X), удовлетворяющей аксиоме о распространении гомотопии, пространство Cf, где f — вложение $X\to Y$, гомотопически эквивалентно пространству Y/X, причем эта эквивалентность осуществляется канонической проекцией $p\colon Cf\to Y/X$.*

Из этого предложения, в частности, следует, что в соответствующей последовательности Пуппе

$$\cdots\to[\Sigma Cf, T]\to[\Sigma Y, T]\to[\Sigma X, T]\to[Cf, T]\to[Y, T]\to[X, T]$$

пространство Cf можно всюду заменить пространством Y/X. Получающаяся последовательность пунктированных множеств

$$\cdots\to[\Sigma(Y/X), T]\to[\Sigma Y, T]\to[\Sigma X, T]\to[Y/X, T]\to[Y, T]\to[X, T]$$

называется *последовательностью Баррата*. Она точна для любой пары (Y, X) пунктированных пространств, удовлетворяющей аксиоме о распространении гомотопии (и любого пунктированного пространства T).

§ 8. ВТОРОЙ ПРИМЕР: КОМПЛЕКСЫ НАД АБЕЛЕВОЙ КАТЕГОРИЕЙ

8.1. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная абелева категория. *Комплексом X над категорией $\mathcal{A}$ (или дифференциальным объектом категории $\mathcal{A}$)* называется такая последовательность

$$\ldots \longleftarrow X_{-2} \xleftarrow{d^X_{-2}} X_{-1} \xleftarrow{d^X_{-1}} X_0 \xleftarrow{d^X_0} X_1 \xleftarrow{d^X_1} X_2 \longleftarrow \ldots \longrightarrow X_n \xleftarrow{d^X_n} X_{n+1} \longleftarrow \ldots$$

объектов и морфизмов категории $\mathcal{A}$, что для любого n имеет место равенство $d^X_{n-1} \circ d^X_n = 0$. Как правило, морфизм d^X_n мы будем обозначать просто через d_n или даже через d и будем называть его *граничным оператором* (или *дифференциалом*) комплекса X.

Морфизмом $f\colon X \to Y$ комплекса X в комплекс Y называется такая последовательность морфизмов $f_n\colon X_n \to Y_n$ категории $\mathcal{A}$, что $d_n \circ f_{n+1} = f_n \circ d_n$ для любого n. Эти морфизмы компонируются очевидным образом. Ясно, что тем самым совокупность $K(\mathcal{A})$ всех комплексов X над категорией A и всех их морфизмов определяется как категория. Мы будем эту категорию называть *категорией комплексов* над категорией $\mathcal{A}$.

8.2. В случае когда категория $\mathcal{A}$ является категорией $\mathcal{Ab}$ абелевых групп, мы можем каждому комплексу X сопоставить некоторый группоид ΠX, множеством объектов которого является ядро $\operatorname{Ker} d_{-1}$ гомоморфизма $d_{-1}\colon X_0 \to X_{-1}$, а множеством морфизмов — прямая сумма $\operatorname{Ker} d_{-1} \oplus \operatorname{Coker} d_1$ ядра $\operatorname{Ker} d_{-1}$ гомоморфизма d_{-1} и коядра $\operatorname{Coker} d_1 = X_1/d_1X_2$ гомоморфизма $d_1\colon X_2 \to X_1$. При этом областью определения морфизма (x, f), $x \in \operatorname{Ker} d_{-1}$, $f \in \operatorname{Coker} d_1$, является объект x, а областью значений — объект $x + df$, где $d\colon \operatorname{Coker} d_1 \to \operatorname{Ker} d_{-1}$ — гомоморфизм, индуцированный (в силу соотношения $d_0 \circ d_1 = 0$) гомоморфизмом $d_0\colon X_1 \to X_0$. Композиция морфизмов группоида ΠX определяется формулой

$$(x + df,\ g)\,(x, f) = (x,\ f + g).$$

Тензорным произведением $X \otimes Y$ комплексов абелевых групп X и Y называется комплекс Z, составляющие Z_n которого являются прямыми суммами тензорных произведений $X_p \otimes Y_q$ с $p + q = n$, а граничный оператор d определяется формулой

$$d(x \otimes y) = (dx) \otimes y + (-1)^p\, x \otimes (dy),$$

где $x \in X_p$, $y \in Y_q$ (в правой части этой формулы первое слагаемое принадлежит группе $X_{p-1} \otimes Y_q \subset Z_{n-1}$, а второе — группе $X_p \otimes Y_{q-1} \subset Z_{n-1}$).

В дальнейшем важную роль будет играть канонический функтор

$$C: \Pi X \times \Pi Y \to \Pi(X \otimes Y),$$

сопоставляющий произвольному объекту (x, y) группоида $\Pi X \times \Pi Y$ (т. е. произвольному элементу произведения $X_0 \times Y_0$) объект $x \otimes y$ группоида $\Pi(X \otimes Y)$, а произвольному морфизму $((x, f), (y, g))$ группоида $\Pi X \times \Pi Y$ морфизм $(x \otimes y, h)$ группоида $\Pi(X \otimes Y)$, где $h = (x + df) \otimes g + f \otimes y$ — смежный класс элемента $(x + df) \otimes g' + f' \otimes y$ в группе $\operatorname{Coker} d_1^Z = Z_1/d_1 Z_2$ (здесь f' и g' — представители смежных классов f и g в группах X_1 и Y_1 соответственно).

8.3. Общий случай произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$ мы сведем к случаю категории $\mathcal{Ab}$, сопоставив любым двум комплексам X и Y над категорией $\mathcal{A}$ комплекс абелевых групп $\mathcal{Hom}(X, Y)$, для которого

$$\mathcal{Hom}_n(X, Y) = \prod_{p \in \mathbf{Z}} \mathcal{A}(X_p, Y_{p+n})$$

и

$$df = (df_p - (-1)^n f_{p-1} d)_{p \in \mathbf{Z}},$$

где $f = (f_p)_{p \in \mathbf{Z}}$ — произвольный элемент произведения $\prod\limits_{p \in \mathbf{Z}} \mathcal{A}(X_p, Y_{p+n})$. При этом для любых трех комплексов X, Y и Z определен морфизм комплексов

$$\nu_{X, Y, Z}: \mathcal{Hom}(X, Y) \otimes \mathcal{Hom}(Y, Z) \to \mathcal{Hom}(X, Z),$$

сопоставляющий элементу $(f_p) \otimes (g_p)$ группы $\mathcal{Hom}_m(X, Y) \otimes \mathcal{Hom}_n(Y, Z)$ элемент $((-1)^{mn} g_{p+m} \circ f_p)$ группы $\mathcal{Hom}_{m+n}(X, Z)$.

Морфизмы комплекса X в комплекс Y можно отождествить с элементами f группы $\mathcal{Hom}_0(X, Y)$, для которых $df = 0$, т. е. с объектами группоида $\Pi\, \mathcal{Hom}(X, Y)$.

Морфизмы $f, g: X \to Y$ называются *(цепно) гомотопными*, если существует такой элемент $t \in \mathcal{Hom}_1(X, Y)$, что

$$g - f = d \circ t + t \circ d,$$

т. е. если $g - f = dt$ (элементы t, обладающие этим свойством, называются при этом *гомотопиями*, связывающими морфизмы f и g).

Аналогично, две гомотопии t и s (связывающие одни и те же морфизмы f и g) называются *гомотопными*, если существует такой элемент $u \in \mathcal{H}om_2(X, Y)$, что

$$t - s = d \circ u - u \circ d,$$

т. е. если $t - s = du$ (при этом элементы u называются *гомотопиями второй ступени*, связывающими гомотопии первой ступени s и t). Ясно, что морфизмы $f \to g$ группоида $\Pi\, \mathcal{H}om(X, Y)$ естественно отождествляются с гомотопическими классами гомотопий t, связывающих морфизм f с морфизмом g.

8.4. Теперь у нас все готово для построения некоторой бикатегории $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$, которую мы будем называть *бикатегорией комплексов над категорией* $\mathcal{A}$.

Объектами бикатегории $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$ по определению являются комплексы над категорией $\mathcal{A}$. Ее категориями морфизмов $\mathcal{H}om_{\mathfrak{K}(\mathcal{A})}(X,Y)$ являются группоиды $\Pi\, \mathcal{H}om(X, Y)$, соответствующие (см. п. 8.2) комплексам абелевых групп $\mathcal{H}om(X, Y)$:

$$\mathcal{H}om_{\mathfrak{K}(\mathcal{A})}(X, Y) = \Pi\, \mathcal{H}om(X, Y).$$

Функторами композиции

$$\mu_{X, Y, Z}\colon \mathcal{H}om_{\mathfrak{K}(\mathcal{A})}(X, Y) \times \mathcal{H}om_{\mathfrak{K}(\mathcal{A})}(Y, Z) \to \mathcal{H}om_{\mathfrak{K}(\mathcal{A})}(X, Z)$$

бикатегории $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$ являются композиции канонических функторов

$$\Pi\, \mathcal{H}om(X, Y) \times \Pi\, \mathcal{H}om(Y, Z) \to \Pi\, (\mathcal{H}om(X, Y) \otimes \mathcal{H}om(Y, Z))$$

(см. п. 8.2) и функторов $\Pi\, \nu_{X, Y, Z}$, индуцированных функторами $\nu_{X, Y, Z}$.

Таким образом, морфизмами первого ранга бикатегории $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$ являются морфизмы комплексов, а морфизмами второго ранга с областью определения $f\colon X \to Y$ и областью значений $g\colon X \to Y$ — гомотопические классы гомотопий $t \in \mathcal{H}om_1(X, Y)$, связывающих морфизмы f и g.

8.5. Очевидно, что

бикатегория $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$ *удовлетворяет условиям* А *и* В.

При этом нулевым объектом этой бикатегории является комплекс, все составляющие которого равны нулю (категории $\mathcal{A}$).

Объектами соответствующей категории $\overline{\mathfrak{K}(\mathcal{A})}$ являются комплексы над категорией $\mathcal{A}$, а морфизмами — гомотопические классы морфизмов комплексов (морфизмов первого ранга бикатегории $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$). Таким образом, категория $\overline{\mathfrak{K}(\mathcal{A})}$ совпадает с категорией $\overline{K}(\mathcal{A})$, рассмотренной в п. 2.5.3 гл. I.

Произвольному морфизму первого ранга $f\colon X \to Y$ бикатегории $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$ мы сопоставим комплекс Γf, являющийся «простым» комплексом, соответствующим «двойному комплексу»

$$\begin{tikzcd}
& \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & -2 \\
\cdots \arrow[r] & Y_1 \arrow[u] \arrow[r, "-d_0"] & Y_0 \arrow[u] \arrow[r, "-d_1"] & Y_{-1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & -1 \\
\cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[u, "f_1"'] \arrow[r, "d_0"] & X_0 \arrow[u, "f_0"'] \arrow[r, "d_1"] & X_{-1} \arrow[u, "f_{-1}"'] \arrow[r] & \cdots & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & 1 \\
& \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \\
& 1 & 0 & -1 & &
\end{tikzcd}$$

Иными словами, Γf представляет собой комплекс, для которого

$$(\Gamma f)_n = X_n \oplus Y_{n+1},$$

и граничный оператор

$$d\colon X_n \oplus Y_{n+1} \to X_{n-1} \oplus Y_n$$

который индуцирует на слагаемом X_n морфизм $X_n \to X_{n-1} \oplus Y_n$ с компонентами d_{n-1} и f_n, а на слагаемом Y_{n+1} — морфизм $Y_{n+1} \to X_{n-1} \oplus Y_n$ с компонентами 0 и $-d_n$.

Далее мы определим морфизм первого ранга

$$pf\colon \Gamma f \to X,$$

считая, что на составляющей $X_n \oplus Y_{n+1}$ он является канонической проекцией этой прямой суммы на слагаемое X_n, и морфизм второго ранга

$$hf\colon 0 \to f(pf),$$

являющийся гомотопическим классом гомотопии $t \in \mathcal{H}om_1(\Gamma f, Y)$, компонентами которой являются канонические проекции прямых сумм $(\Gamma f)_n = X_n \oplus Y_{n+1}$ на слагаемые Y_{n+1}.

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что построенная таким образом тройка $(\Gamma f, pf, hf)$ обладает всеми предусмотренными условием C свойствами. Таким образом,

бикатегория $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$ *удовлетворяет условию* C.

8.6. Отнесем теперь произвольному морфизму первого ранга $f: X \to Y$ бикатегории $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$ комплекс Cf, соответствующий двойному комплексу

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & -1 \\
\cdots \arrow[r] & Y_1 \arrow[u] \arrow[r, "d_0"] & Y_0 \arrow[u] \arrow[r, "d_{-1}"] & Y_{-1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[u, "-f_1"'] \arrow[r, "-d_0"] & X_0 \arrow[u, "-f_0"'] \arrow[r, "-d_{-1}"] & X_{-1} \arrow[u, "-f_{-1}"'] \arrow[r] & \cdots & +1 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & +2 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & & \\
 & +1 & 0 & -1 & &
\end{tikzcd}$$

Таким образом,

$$(Cf)_n = X_{n-1} \oplus Y_n,$$

и граничный оператор

$$d: X_{n-1} \oplus Y_n \to X_{n-2} \oplus Y_{n-1}$$

комплекса Cf индуцирует на слагаемом X_{n-1} морфизм с компонентами $-d_{n-2}$ и $-f_{n-1}$, а на слагаемом Y_n морфизм с компонентами 0 и d_{n-1}.

Морфизм первого ранга

$$if: Y \to Cf$$

мы определим как морфизм, компонентами которого являются канонические инъекции объектов Y_n в прямые суммы $X_{n-1} \oplus Y_n$, а морфизм второго ранга

$$kf: 0 \to (if) \circ f$$

как класс гомотопии $s \in \mathcal{H}om_1(X, Cf)$, компонентами которой являются морфизмы $-k_n$, где k_n — каноническая инъекция объекта X_n в прямую сумму $(Cf)_{n+1} = X_n \oplus Y_{n+1}$.

Читатель может сам показать, что тройка (Cf, if, kf) обладает предусмотренным условием C° свойством. Таким образом,

бикатегория $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$ *удовлетворяет и условию* C°.

Следовательно, к этой бикатегории применимы все результаты предыдущих параграфов. В частности, *для любого морфизма комплексов $f: X \to Y$ имеет место r-точная последовательность*

$$\ldots \to \Omega\Gamma f \xrightarrow{[\Omega p f]} \Omega X \xrightarrow{[\Omega f]} \Omega Y \xrightarrow{[qf]} \Gamma f \xrightarrow{[pf]} X \xrightarrow{[f]} Y$$

и l-точная последовательность

$$X \xrightarrow{[f]} Y \xrightarrow{[if]} Cf \xrightarrow{[jf]} \Sigma X \xrightarrow{[\Sigma f]} \Sigma Y \xrightarrow{[\Sigma i f]} \Sigma Cf \to \ldots .$$

При этом, как легко видеть, пространство петель ΩX и надстройка ΣX определяются формулами

$$(\Omega X)_n = X_{n+1},\ d_n^{\Omega X} = -d_{n+1}^X,$$

$$(\Sigma X)_n = X_{n-1},\ d_n^{\Sigma X} = -d_{n-1}^X.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $\Sigma = \Omega^{-1}$ и $Cf = \Sigma\Gamma f$ (ср. п. 6.4).

Замечание. Пусть H_n — гомологический функтор из категории $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$ в категорию $\mathcal{A}$ (по определению этот функтор сопоставляет комплексу X объект $H_n(X) = \operatorname{Ker} d_{n-1}^X/\operatorname{Coker} d_n^X$). Легко видеть, что любую r-точную последовательность комплексов $X \xrightarrow{[f]} Y \xrightarrow{[g]} Z$ функтор H_n переводит в точную последовательность

$$H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(Z).$$

С другой стороны, ясно, что

$$H_n(\Omega X) = H_{n+1}(X).$$

Поэтому

для любого морфизма комплексов $f: X \to Y$ имеет место точная последовательность

$$\ldots \to H_{n+1}(\Gamma f) \to H_{n+1}(X) \to H_{n+1}(Y) \to H_n(\Gamma f) \to H_n(X) \to H_n(Y) \to \ldots$$

В связи с последней последовательностью стоит заметить, что в случае, когда морфизм f является эпиморфизмом, функторы H_n (для всех n) принимают на комплексе Γf то же значение, что и на комплексе $\operatorname{Ker} f$. Двойственным образом, для любого мономорфизма f функторы H_n принимают одинаковые значения на комплексах Cf и $\operatorname{Coker} f$.

Глава VI

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КАТЕГОРИИ

В этой главе результаты предыдущей главы применяются к симплициальным множествам. Кроме того, мы, пользуясь случаем, доказываем ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основной теоремы гл. VII.

§ 1. ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

1.1. Пусть (X, x_0) и (Y, y_0) — произвольные пунктированные симплициальные множества, и пусть $\Pi^{\cdot}(X, Y)$ — группоид Пуанкаре симплициального множества $\mathcal{H}om.(X, Y)$. Поскольку группоид Пуанкаре произведения симплициальных множеств может быть отождествлен с произведением группоидов сомножителей (п. 7.5 гл. II), для любых трех пунктированных симплициальных множеств (X, x_0), (Y, y_0) и (Z, z_0) построенный в п. 4.2 гл. IV морфизм

$$\mathcal{H}om.(X, Y) \times \mathcal{H}om.(Y, Z) \to \mathcal{H}om.(X, Z)$$

индуцирует некоторый морфизм

$$\Pi^{\cdot}_{X, Y, Z}\colon \Pi^{\cdot}(X, Y) \times \Pi^{\cdot}(Y, Z) \to \Pi^{\cdot}(X, Z).$$

Ясно, что морфизмы $\Pi^{\cdot}_{X, Y, Z}$ можно принять за функторы композиций некоторой бикатегории, объектами которой являются пунктированные симплициальные множества и которая удовлетворяет условиям A и B из п. 1.4 гл. V. Эту бикатегорию мы будем обозначать символом $((.\Delta^{\circ}\mathcal{E}n\iota))$.

Морфизмами первого ранга бикатегории $((.\Delta^{\circ}\mathcal{E}n\iota))$ являются морфизмы пунктированных симплициальных множеств, а морфизмами второго ранга — классы эквивалентности гомотопий (вообще говоря, составных), связывающих морфизмы первого ранга (соответствующее отношение эквивалентности читатель может без труда описать сам на основе общих результатов п. 7.1 гл. II).

Поскольку компонентами связности симплициального множества являются по определению компоненты связности его группоида Пуанкаре, множества $\overline{.\Delta^{\circ}\mathcal{E}n\iota}(X, Y) = \Pi^{\cdot}_0(X, Y)$ (см. п. 4.2 гл. IV) совпадают с множествами $|X, Y|$ морфизмов категории $\overline{((.\Delta^{\circ}\mathcal{E}n\iota))}$, соответствующей бикатегории $((.\Delta^{\circ}\mathcal{E}n\iota))$ (см. п. 1.6 гл. V). Таким образом, категории $\overline{.\Delta^\circ\mathcal{E}n\iota}$ и $\overline{((.\Delta^\circ\mathcal{E}n\iota))}$ по существу совпадают, так что мы их можем не различать. Однако множества $|X, Y|$ и $.\mathcal{H}(X, Y)$ (см. п. 4.3 гл. IV) различать необходимо (по крайней мере в случае, когда симплициальное множество Y не полно).

1.2. Пусть $.\mathfrak{Kan}$ — полная подбикатегория бикатегории $((.\Delta^\circ\mathcal{E}n\iota))$, порожденная полными пунктированными симплициальными множествами. Таким образом, от бикатегории $((.\Delta^\circ\mathcal{E}n\iota))$ бикатегория $.\mathfrak{Kan}$ отличается только тем, что содержит меньше объектов (именно, только полные пунктированные симплициальные множества). Ее категориями морфизмов и функторами композиции являются те же категории $\Pi^{\cdot}(X, Y)$ и функторы $\Pi^{\cdot}_{X, Y, Z}$, что и для бикатегории $((.\Delta^\circ\mathcal{E}n\iota))$ (но, конечно, эти категории и функторы рассматриваются лишь для полных симплициальных множеств X, Y и Z). Морфизмы (первого и второго рангов) этой бикатегории описаны в п. 5.3 гл. IV.

Очевидно, что бикатегория $.\mathfrak{Kan}$ удовлетворяет условиям A и B. Покажем, что она удовлетворяет также и условию C.

Пусть $f: X \to Y$ — произвольный морфизм полных пунктированных симплициальных множеств. Этому морфизму мы отнесем пунктированное симплициальное множество Γf, являющееся коамальгамой диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}om.(\Delta[1], Y) \arrow[d, "e"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

морфизм e которой индуцирован (в силу отождествления $Y = \mathcal{H}om.(\dot{\Delta}[1], Y)$; см. п. 4.1.2 гл. IV) вложением симплициального множества $\dot{\Delta}[1]$ в симплиципиальное множество $\Delta[1]$. Из утверждения (ii′) п. 3.1.1 гл. IV вытекает в силу доказываемой ниже леммы 1.2.1, что симплициальное множество Γf полно.

За морфизм первого ранга

$$\mathfrak{p}f: \Gamma f \to X$$

мы примем каноническую проекцию pr_1 коамальгамы Γf на симплициальное множество X, а чтобы построить морфизм второго ранга

$$hf: 0 \to f \cdot (\mathfrak{p}f)$$

заметим, что проекция pr_2 коамальгамы Γf на симплициальное множество $\mathcal{H}om.(\Delta[1], Y)$ канонически определяет (см. п. 4.1.2 гл. IV) некоторый морфизм $\Delta[1] \wedge \Gamma f \to Y$, а потому и некоторый морфизм $\Delta[1] \times \Gamma f \to Y$. Этот морфизм представляет собой гомотопию, связывающую нулевой морфизм $0: \Gamma f \to Y$ с морфизмом

$e \circ \mathrm{pr}_2 = f \cdot (pf) : \Gamma f \to Y$. Класс эквивалентности этой гомотопии мы и примем за морфизм hf.

1.2.1. Лемма. *Для любого мономорфизма i: $K \to L$ пунктированных симплициальных множеств и любого полного пунктированного симплициального множества Y морфизм*

$$\mathcal{H}om.(i, Y) : \mathcal{H}om.(L, Y) \to \mathcal{H}om.(K, Y)$$

является расслоением.

Доказательство непосредственно вытекает из результатов п. 3.1.3 гл. IV, утверждения (ii′) п. 3.1.1 гл. IV и из того факта, что имеет место универсальный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om.(L, Y) \arrow[r, "\text{вложение}"] \arrow[d, "\mathcal{H}om.(i, Y)"'] & \mathcal{H}om(L, Y) \arrow[d, "\mathcal{H}om(i, Y)"] \\
\mathcal{H}om.(K, Y) \arrow[r, "\text{вложение}"] & \mathcal{H}om(K, Y)
\end{tikzcd}$$

1.2.2. Построив тройку $(\Gamma f, pf, hf)$, мы должны теперь показать, что она удовлетворяет условию C или, что равносильно, условиям C_1 и C_2 (см. п. 3.2 гл. V).

Условие C_1 (точнее, его первая часть) проверяется совсем просто. Действительно, пусть t: $T \to X$ — произвольный морфизм первого ранга бикатегории $.\mathfrak{Kan}$, и пусть h: $0 \to f \circ t$ — произвольный морфизм второго ранга этой бикатегории. Нам нужно найти такой морфизм первого ранга τ: $T \to \Gamma f$, что $t = (pf) \circ \tau$ и $h = (hf) * \tau$. По определению морфизм h является классом эквивалентности некоторой гомотопии $\Delta[1] \times T \to Y$, связывающей нулевой морфизм 0: $T \to Y$ с морфизмом $f \circ t$: $T \to Y$ и сохраняющей отмеченные точки. Но любую такую гомотопию мы можем, очевидно, разложить в композицию канонической проекции $\Delta[1] \times T \to \Delta[1] \wedge T$ и некоторого морфизма H: $\Delta[1] \wedge T \to Y$, ограничение которого на $T = \dot{\Delta}[1] \wedge T$ является морфизмом $f \circ t$. Пусть H_1: $T \to \mathcal{H}om.(\Delta[1], Y)$ — морфизм, канонически соответствующий морфизму H. Тогда $e \circ H_1 = f \circ t$ и потому определен морфизм τ: $T \to \Gamma f$ с компонентами t и H_1. Для завершения доказательства остается заметить, что этот морфизм обладает, очевидно, всеми нужными свойствами.

Проверим теперь условие C_2 (и тем самым, в частности, вторую часть условия C_1). Пусть $\tau, \tau' : T \to \Gamma f$ — произвольные морфизмы первого ранга бикатегории $.\mathfrak{Kan}$, и пусть

$$t = (pf) \circ \tau, \quad h = (hf) * \tau,$$

$$t' = (pf) \circ \tau', \quad h' = (hf) * \tau'.$$

Нам нужно показать, что для любого морфизма второго ранга $a: t \to t'$, удовлетворяющего соотношению $(f * a) \circ h = h'$, существует такой морфизм второго ранга $\alpha: \tau \to \tau'$, что $a = (pf) * \alpha$. Рассмотрим с этой целью произведение $\Delta[1] \times \Delta[1] \times T$ (схематически это произведение изображено на рис. 4).

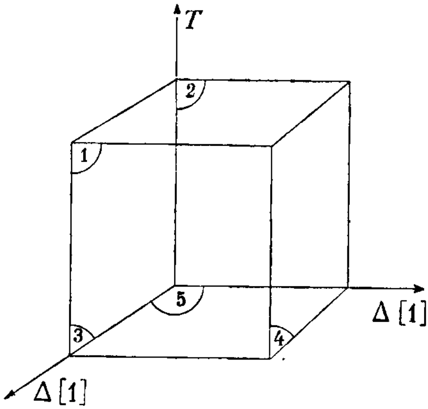


Рис. 4

Пусть $\Delta[1] \times T \to Y$ — гомотопия, классом эквивалентности которой является морфизм h. Эту гомотопию мы можем разложить в композицию канонического изоморфизма $\Delta[1] \times T \to \Delta[1] \times \{0\} \times T$ и некоторого морфизма $H: \Delta[1] \times \{0\} \times T \to Y$ (морфизм H определен, таким образом, на грани 3 нашего «куба»). Аналогично морфизм h' определяет некоторый морфизм $H': \Delta[1] \times \{1\} \times T \to Y$ (заданный на грани 4), а морфизм a — морфизм $A': \{1\} \times \Delta[1] \times T \to Y$ (заданный на грани 1). Пусть B — композиция морфизма A' с морфизмом f (эта композиция также задана на грани 1).

Поскольку $h' = (f * a) \circ h$, существует морфизм $\alpha_1: \Delta[1] \times \Delta[1] \times T \to Y$, индуцирующий на гранях 3, 4 и 1 соответственно морфизмы H, H' и B и переводящий «грани» $\Delta[1] \times \Delta[1] \times \{t_0\}$ и $\{0\} \times \Delta[1] \times T$ в отмеченную вершину y_0 симплициального множества Y (примените результаты п. 5.2 гл. IV к полному симплициальному множеству $\mathcal{H}om.(T, Y)$). Ясно, что морфизм α_1 индуцирует некоторый морфизм $\alpha_2: \Delta[1] \wedge (\Delta[1] \times T) \to Y$, а потому и некоторый морфизм $\alpha_3: \Delta[1] \times T \to \mathcal{H}om.(\Delta[1], Y)$, причем $e \circ \alpha_3 = f \circ A$, где $A: \Delta[1] \times T \to Y$ — гомотопия, определяющая морфизм a. Поэтому определен морфизм $\Delta[1] \times T \to \Gamma f$, компонентами которого являются морфизмы A и α_3. Класс эквивалентности α последней гомотопии и обладает, очевидно, тем свойством, что $a = (pf) * \alpha$.

Тем самым полностью доказано, что

бикатегория $.\mathfrak{Kan}$ *удовлетворяет условию* C.

1.3. Следовательно, над категорией полных пунктированных симплициальных множеств по модулю гомотопии для любого морфизма $f: X \to Y$ полных пунктированных симплициальных множеств имеет место γ-точная последовательность

$$(*) \qquad \cdots \to \Omega^2 Y \xrightarrow{[\Omega q f]} \Omega \Gamma f \xrightarrow{[\Omega p f]} \Omega X \xrightarrow{[\Omega f]} \Omega Y \xrightarrow{[qf]} \Gamma f \xrightarrow{[pf]} X \xrightarrow{[f]} Y.$$

Более того, поскольку, как мы знаем, для любого пунктированного симплициального множества T множества

$$\cdots .\overline{\Delta^\circ \mathscr{E}ns}(T, \Omega Y), .\overline{\Delta^\circ \mathscr{E}ns}(T, \Gamma f), \ .\overline{\Delta^\circ \mathscr{E}ns}(T, X), .\overline{\Delta^\circ \mathscr{E}ns}(T, Y),$$

а также множества

$$\cdots .\mathscr{H}(T, \Omega Y), .\mathscr{H}(T, \Gamma f), .\mathscr{H}(T, X), .\mathscr{H}(T, Y)$$

могут быть канонически отождествлены с множествами

$$\cdots .\overline{\Delta^\circ \mathscr{E}ns}(T_K, \Omega Y), .\overline{\Delta^\circ \mathscr{E}ns}(T_K, \Gamma f), .\overline{\Delta^\circ \mathscr{E}ns}(T_K, X), .\overline{\Delta^\circ \mathscr{E}ns}(T_K Y),$$

где T_K — полное симплициальное множество, являющееся пополнением множества T (см. п. 3.2 гл. IV), то

последовательность $(*)$, *рассматриваемая над категориями* $.\overline{\Delta^\circ \mathscr{E}ns}$ *или* $.\mathscr{H}$, *также является* γ-*точной последовательностью.*

Участвующее в последовательности $(*)$ симплициальное множество ΩY по определению является коамальгамой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & \mathscr{H}om.(\Delta[1], Y) \\ & & \downarrow e \\ \Delta[0] = \mathscr{H}om.(\Delta[0], Y) & \to & \mathscr{H}om.(\dot{\Delta}[1], Y) = Y \end{array}$$

и потому может быть отождествлено с симплициальным множеством $\mathscr{H}om.(\Omega, Y)$, где Ω — симплициальная окружность (см. п. 2.5.2 гл. II). Отсюда в силу сказанного в п. 3.3 гл. V непосредственно вытекает, что

группа $.\Delta^\circ \mathscr{E}ns(T, \mathscr{H}om.(\Omega, Y))$ *канонически изоморфна группе* $\pi_1(\mathscr{H}om.(T, Y))$.

Впрочем, этот изоморфизм можно в силу канонического изоморфизма

$$.\Delta^\circ \mathscr{E}ns(\Omega, \mathscr{H}om.(T, Y)) \xrightarrow{\approx} \pi_1(\mathscr{H}om.(T, Y))$$

(см. п. 5.4 гл. IV) получить также из канонических изоморфизмов

$$.\Delta^\circ\mathscr{E}ns(T, \mathscr{H}om.(\Omega, Y)) \approx .\Delta^\circ\mathscr{E}ns(T \wedge \Omega, Y) \approx .\Delta^\circ\mathscr{E}ns(\Omega, \mathscr{H}om.(T, Y))$$

(см. п. 4.1.2 гл. IV).

1.4. Рассмотрим теперь морфизм первого ранга $p: E \to B$ бикатегории $.\mathfrak{Kan}$, являющийся расслоением (см. п. 3.1 гл. IV). Пусть F — слой этого расслоения над вершиной b_0 симплициального множества B, т. е. коамальгама диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta[0] & \xrightarrow{\widetilde{b}_0} & B \end{array}$$

(см. п. 3.1.1 гл. IV). Пусть, далее, $i: F \to E$ — морфизм вложения, а $j: F \to \Gamma p$ — морфизм, компонентами которого являются морфизм i и нулевой морфизм слоя F в симплициальное множество $\mathscr{H}om.(\Delta[1], B)$.

Лемма. *Морфизм $j: F \to \Gamma p$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть $k: [1] \times [1] \to [1]$ — возрастающее отображение, задаваемое соответствием

$$\begin{array}{ll} (1, 0),\ (0, 0),\ (0, 1) & \rightsquigarrow 0, \\ (1, 1) & \rightsquigarrow 1. \end{array}$$

Функтор C из п. 5.1 гл. II сопоставляет этому отображению некоторый морфизм $C(k): \Delta[1] \times \Delta[1] \to \Delta[1]$, являющийся, очевидно, гомотопией, связывающей нулевой морфизм $0: \Delta[1] \to \Delta[1]$ симплициального отрезка $\Delta[1]$ с его тождественным морфизмом $\mathrm{Id}\Delta[1]$ (таким образом, симплициальный отрезок $\Delta[1]$ «стягиваем по себе в точку») и потому определяющей некоторый морфизм

$$l: \Delta[1] \wedge \Delta[1] \to \Delta[1],$$

ограничением которого на симплициальном множестве $\Delta[1] = \dot{\Delta}[1] \wedge \Delta[1]$ является тождественный морфизм $\mathrm{Id}\Delta[1]$.

Рассмотрим морфизм

$$\mathscr{H}om.(l, B): \mathscr{H}om.(\Delta[1], B) \to \mathscr{H}om.(\Delta[1] \wedge \Delta[1], B),$$

индуцированный морфизмом l. Этому морфизму канонически соответствует (см. п. 4.1.2 гл. IV) некоторый морфизм

$$l': \Delta[1] \wedge \mathscr{H}om.(\Delta[1], B) \to \mathscr{H}om.(\Delta[1], B),$$

композиция которого с каноническим морфизмом $\Delta[1] \times \mathscr{H}om.(\Delta[1], B) \to \Delta[1] \wedge \mathscr{H}om.(\Delta[1], B)$ представляет собой гомотопию, связывающую нулевой морфизм симплициального множества $\mathscr{H}om.(\Delta[1], B)$ с его тождественным морфизмом (так что симплициальное множество $\mathscr{H}om.(\Delta[1], B)$ также стягиваемо по себе в точку). Пусть

$$h_2\colon \Delta[1] \times \Gamma p \to \mathscr{H}om.(\Delta[1], B)$$

— композиция морфизмов

$$\Delta[1] \times \Gamma p \xrightarrow{\text{кан.}} \Delta[1] \wedge \Gamma p \xrightarrow{\Delta[1] \wedge \mathrm{pr}_2} \Delta[1] \wedge \mathscr{H}om.(\Delta[1], B) \xrightarrow{l'} \mathscr{H}om.(\Delta[1], B).$$

Поскольку морфизм $j\colon F \to \Gamma p$ является, как легко видеть, мономорфизмом, мы можем симплициальное множество F считать подмножеством симплициального множества Γp. Имея это в виду, рассмотрим диаграмму

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} (\Delta[1] \times F) \cup (\{1\} \times \Gamma p) \arrow[r, "h_1'"] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[1] \times \Gamma p \arrow[r, "e \circ h_2"] & B \end{tikzcd}$$

где h_1' — морфизм, индуцирующий на $\Delta[1] \times F$ каноническую проекцию этого произведения на слой F, а на $\{1\} \times \Gamma p = \Gamma p$ являющийся канонической проекцией pr_1 коамальгамы Γp диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{H}om.(\Delta[1], B) \arrow[d, "e"] \\ E \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

на симплициальное множество B.

Ясно, что диаграмма $(*)$ коммутативна. Поэтому, поскольку морфизм $p\colon E \to B$ является расслоением, а морфизм вложения симплициального множества $(\Delta[1] \times F) \cup (\{1\} \times \Gamma p)$ в симплициальное множество $\Delta[1] \times \Gamma p$ — анодинным морфизмом (он принадлежит множеству B_3, порождающему множество анодинных морфизмов), диаграмму $(*)$ можно пополнить с сохранением коммутативности некоторым морфизмом

$$h_1\colon \Delta[1] \times \Gamma p \to E.$$

Таким образом, для этого морфизма имеет место коммутативная диаграмма

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} \Delta[1] \times \Gamma p \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & \mathscr{H}om.(\Delta[1], B) \arrow[d, "e"] \\ E \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

а его ограничением на множестве $(\Delta[1] \times F) \cup (\{1\} \times \Gamma p)$ является морфизм h_1'.

Из коммутативности диаграммы (**) следует, что морфизмы h_1 и h_2 определяют некоторый морфизм

$$h\colon \Delta[1] \times \Gamma p \to \Gamma p.$$

Этот морфизм на подмножестве $\{1\} \times \Gamma p = \Gamma p$ является, очевидно, тождественным морфизмом симплициального множества Γp, а на подмножестве $\{0\} \times \Gamma p = \Gamma p$ он определяет морфизм $\Gamma p \to F$, являющийся ретракцией симплициального множества Γp на его подмножество F. Тем самым доказано, что подмножество F множества Γp является его деформационным ретрактом, и, следовательно, морфизм вложения $j\colon F \to \Gamma p$ представляет собой гомотопическую эквивалентность.

1.5. Согласно этой лемме, мы можем в последовательности (*) п. 1.3 (написанной для морфизма p) всюду заменить симплициальное множество Γp симплициальным множеством F. Таким образом,

в пунктированной гомотопической категории $\cdot\mathscr{H}$ для любого расслоения $p\colon E \to B$ категории $\cdot\Delta^\circ\mathscr{E}ns$, база B которого является полным симплициальным множеством, имеет место r-точная последовательность

$$\cdots \to \Omega^2 B \xrightarrow{\Omega([j]^{-1}[qp])} \Omega F \xrightarrow{[\Omega i]} \Omega E \xrightarrow{[\Omega p]} \Omega B \xrightarrow{[j]^{-1}[qp]} F \xrightarrow{[i]} E \xrightarrow{[p]} B.$$

Замечание. Мы здесь воспользовались тем очевидным фактом, что для любого расслоения $E \to B$ симплициальное множество E полно, если полно симплициальное множество B.

Ясно, что построенная r-точная последовательность функториально зависит от расслоения p, т. е. любая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "e"] & B \arrow[d, "b"] \\
F' \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "p'"] & B'
\end{tikzcd}$$

над категорией $\cdot\Delta^\circ\mathscr{E}ns$, строки которой являются расслоениями, индуцирует над категорией $\cdot\mathscr{H}$ коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Omega B \arrow[r, "{[j]^{-1}[qp]}"] \arrow[d, "{[\Omega b]}"'] & F \arrow[r, "{[i]}"] \arrow[d, "{[f]}"'] & E \arrow[r, "{[p]}"] \arrow[d, "{[e]}"'] & B \arrow[d, "{[b]}"'] \\
\cdots \arrow[r] & \Omega B' \arrow[r, "{[j']^{-1}[qp']}"] & F' \arrow[r, "{[i']}"] & E' \arrow[r, "{[p']}"] & B'
\end{tikzcd}$$

§ 2. КОНУСЫ

2.1. Покажем теперь, что бикатегория $\mathfrak{Kan}$ удовлетворяет также и условию C°, двойственному условию C (см. п. 6.2 гл. V).

Пусть $f: X \to Y$ — произвольный морфизм пунктированных симплициальных множеств. *Конусом* над морфизмом f мы будем называть амальгаму Cf диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \\ \Delta[1] \wedge X & & \end{array}$$

где

$$\varepsilon: X \approx \dot{\Delta}[1] \wedge X \to \Delta[1] \wedge X$$

— морфизм, индуцированный вложением симплициального множества $\dot{\Delta}[1]$ в симплициальное множество $\Delta[1]$. Каноническую инъекцию симплициального множества Y в амальгаму Cf мы будем обозначать символом if. С другой стороны, каноническую инъекцию симплициального множества $\Delta[1] \wedge X$ в амальгаму Cf можно рассматривать как сохраняющую отмеченные вершины гомотопию, связывающую нулевой морфизм с морфизмом $(if) \cdot f$. Эта инъекция определяет, следовательно, некоторый морфизм второго рода $0 \to (if) \cdot f$ бикатегории $((.\Delta^\circ\mathcal{E}n\mathfrak{s}))$, который мы будем обозначать символом kf.

Поскольку бикатегория $((.\Delta^\circ\mathcal{E}n\mathfrak{s}))$ удовлетворяет условиям A и B из п. 1.4 гл. V, тройка (Cf, if, kf) определяет для каждого пунктированного симплициального множества T некоторый функтор из группоида $(Cf)_T$ в группоид $\Gamma(f_T)$ (см. п. 6.2 гл. V). Условие C° утверждает, что этот функтор связен. Однако, к сожалению, это, вообще говоря, неверно, так что это условие для тройки (Cf, if, kf) не выполнено. Тем не менее справедлива следующая

Лемма. *Если симплициальное множество T полно, то функтор $(Cf)_T \to \Gamma(f_T)$, определенный тройкой (Cf, if, kf), связен.*

Доказательство. Мы должны проверить условия, двойственные к условиям C_1 и C_2. Первое из этих двойственных условий утверждает, что для любого морфизма первого рода $i: Y \to T$ и любого морфизма второго рода $k: 0 \to i \cdot f$ существует такой морфизм $r: Cf \to T$, что $r(if) = i$ и $r * (kf) = k$. Чтобы построить этот морфизм, мы заметим, что, поскольку симплициальное множество T полно, морфизм k задается некоторым морфизмом $K: \Delta[1] \wedge X \to T$. Ясно, что морфизм $r: Cf \to T$, компонентами которого являются морфизмы K и i, обладает всеми нужными свойствами.

Пусть теперь $r, r' : Cf \to T$ — произвольные морфизмы первого рода, и пусть

$$i = r(if), \quad i' = r'(if), \quad k = r * (kf), \quad k' = r' * (kf).$$

Условие, двойственное условию C_2, утверждает, что для любого морфизма второго рода $a: i \to i'$, удовлетворяющего соотношению $(a * f) \circ k = k'$, существует такой морфизм второго рода $\alpha: r \to r'$, что $a = \alpha * (if)$. Построение этого морфизма вполне аналогично построению морфизма α из п. 1.2.2, и мы оставляем его читателю.

2.2. Покажем теперь, что

бикатегория $.\mathfrak{Kan}$ *удовлетворяет условию* C°.

Пусть для морфизма $f: X \to Y$ симплициальные множества X и Y полны. Условие C° для бикатегории $.\mathfrak{Kan}$ было бы в силу предыдущей леммы, очевидно, доказано, если бы мы показали, что в этом случае симплициальное множество Cf также полно. Однако *это не всегда так*. Поэтому вместо симплициального множества Cf приходится рассматривать его пополнение $C'f = (Cf)_K$ (см. п. 3.2 гл. IV). Пусть $a: Cf \to C'f$ — соответствующий анодинный морфизм, и пусть $i'f = a(if)$ и $k'f = a * (kf)$. Мы покажем, что

для тройки $(C'f, i'f, k'f)$ *выполнено условие* C°.

Ясно, что для любого полного пунктированного симплициального множества T функтор $(C'f)_T \to \Gamma(f_T)$, определенный тройкой $(C'f, i'f, k'f)$, является композицией функтора $a_T: (C'f)_T \to (Cf)_T$, индуцированного анодинным морфизмом a, и функтора $(Cf)_T \to \Gamma(f_T)$, определенного тройкой (Cf, if, kf). Поскольку последний функтор, согласно лемме, связен, нам достаточно поэтому лишь доказать, что связен функтор a_T, т. е. что на объектах он надъективен и для любого морфизма β группоида $(Cf)_T$, имеющего вид $ja \to j'a$, где j, j' — некоторые объекты группоида $(C'f)_T$, существует такой морфизм $\alpha: j \to j'$ группоида $(C'f)_T$, что $\beta = \alpha * a$.

Надъективность функтора a_T на объектах означает, что каждый морфизм симплициального множества Cf в симплициальное множество T может быть распространен до некоторого морфизма симплициального множества $C'f$. Но это действительно так, ибо морфизм a анодинен, а симплициальное множество T полно.

Пусть теперь $j, j': C'f \to T$ — произвольные объекты группоида $(C'f)_T$, и пусть $\beta: ja \to j'a$ — произвольный морфизм группоида $(Cf)_T$, связывающий объекты ja и $j'a$. Рассмотрим гомотопию $B: \Delta[1] \times Cf \to T$, определяющую морфизм β (см. п. 5.2 гл. IV). Поскольку, согласно п. 2.2 гл. IV, морфизм

$$(\Delta[1] \times Cf) \cup (\dot{\Delta}[1] \times C'f) \to \Delta[1] \times C'f$$

анодинен, мы можем гомотопию B распространить до некоторой гомотопии $A: \Delta[1] \times C'f \to T$, связывающей морфизмы j и j'. Образ α гомотопии A в группоиде $(C'f)_T$ и обладает, очевидно, тем свойством, что $\beta = \alpha * a$.

Тем самым справедливость условия C° для бикатегории $\mathcal{K}an$ полностью доказана.

В частности, мы видим (см. п. 6.4 гл. V), что

для любого полного пунктированного симплициального множества Y симплициальное множество $\Omega^2 Y$ является абелевой группой категории $\mathcal{H}$.

2.3. Вернемся теперь к произвольным пунктированным симплициальным множествам X и Y.

Для любого пунктированного симплициального множества X мы символом ΣX будем обозначать симплициальное множество $\Omega \wedge X$, где Ω — симплициальная окружность (п. 2.5.2 гл. II). Это симплициальное множество мы будем называть *надстройкой* над множеством X. Оно является не чем иным, как конусом нулевого морфизма $X \to 0$.

Для любого морфизма $f: X \to Y$ пунктированных симплициальных множеств коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}X"'] & Y \arrow[d, "0^Y"] \\ X \arrow[r, "0^X"] & 0 \end{tikzcd}$$

индуцирует некоторый морфизм jf конуса Cf в надстройку ΣX. Иначе морфизм jf можно определить как морфизм амальгамы Cf в симплициальное множество ΣX, компонентами которого являются канонический морфизм $\Delta[1] \wedge X \to \Sigma X$ и нулевой морфизм $Y \to \Sigma X$.

Теорема. *Для любого морфизма $f: X \to Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ последовательность*

$$\text{(i)} \qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{if} Cf \xrightarrow{jf} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma if} \Sigma Cf \xrightarrow{\Sigma jf} \Sigma^2 X \to \cdots$$

определяет над пунктированной гомотопической категорией l-точную последовательность.

Таким образом, для любого пунктированного симплициального множества T имеет место точная последовательность пунктированных множеств

$$(\mathrm{i})_T \qquad \cdots \to \mathcal{H}(\Sigma Y, T) \xrightarrow{\mathcal{H}(\Sigma f, T)} \mathcal{H}(\Sigma X, T) \xrightarrow{\mathcal{H}(jf, T)}$$
$$\to \mathcal{H}(Cf, T) \xrightarrow{\mathcal{H}(if, T)} \mathcal{H}(Y, T) \xrightarrow{\mathcal{H}(f, T)} \mathcal{H}(X, T).$$

При этом ясно, что последовательности (i) и $(\mathrm{i})_T$ функториально зависят от морфизма f.

Доказательство теоремы. Сравним последовательность (i) с l-точной последовательностью, построенной в п. 6.3.2 гл. V. Пусть $?_K$ — функтор пополнения по Кану (см. п. 4.4 гл. IV) и e — соответствующий анодинный морфизм. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "if"] \arrow[dr, "i_K f"'] & Cf \arrow[r, "jf"] \arrow[d, "e(Cf)"] & \Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] \arrow[d, "e(\Sigma X)"] & \Sigma Y \arrow[r, "\Sigma if"] \arrow[d, "e(\Sigma Y)"] \arrow[dr, "\Sigma(i_K f)"] & \Sigma Cf \arrow[r, "\Sigma jf"] \arrow[d, "\Sigma e(Cf)"] & \Sigma^2 X \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma e(\Sigma X)"] & \cdots \\
 & & C_K f \arrow[r, "j_K f"] & \Sigma_K X \arrow[r, "\Sigma_K f"] & \Sigma_K Y \arrow[dr, "\Sigma_K i_K f"'] & \Sigma C_K f \arrow[r, "\Sigma(j_K f)"] \arrow[d, "e(\Sigma C_K f)"] & \Sigma\Sigma_K X \arrow[r] \arrow[d, "e(\Sigma\Sigma_K f)"] & \cdots \\
 & & & & & \Sigma_K C_K f \arrow[r, "\Sigma_K(j_K f)"] & \Sigma_K^2 X \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

где

$$C_K f = (Cf)_K,\ \Sigma_K Z = (\Sigma Z)_K\ (Z = X, Y),\ i_K f = e(Cf) \circ if$$

и

$$j_K f = (jf)_K.$$

Поскольку все вертикальные стрелки этой диаграммы являются анодинными морфизмами (п. 4.3 гл. IV), последовательность (i) изоморфна (в пунктированной гомотопической категории) последовательности

$$\text{(ii)} \qquad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_K f} C_K f \xrightarrow{j_K f} \Sigma_K X \xrightarrow{\Sigma_K f} \Sigma_K Y \xrightarrow{\Sigma_K(i_K f)} \Sigma_K C_K f \to \cdots$$

Таким образом, нам нужно только доказать, что последовательность (ii) l-точна.

Если симплициальные множества X и Y полны, то последовательность (ii), очевидно, l-точна (см. п. 2.2 этой главы и п. 6.3.2 гл. V).

Пусть полно только симплициальное множество X. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\text{(iii)} \qquad \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}X"'] \arrow[dr, phantom, "①"] & Y \arrow[r, "if"] \arrow[d, "e(Y)"] \arrow[dr, phantom, "②"] & Cf \arrow[r, "jf"] \arrow[d, "\varepsilon f"] \arrow[dr, phantom, "③"] & \Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\Sigma X"] \arrow[dr, phantom, "④"] & \Sigma Y \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma e(Y)"] & \cdots \\
X \arrow[r, "g"] & Y_K \arrow[r, "ig"] & Cg \arrow[r, "jg"] & \Sigma X \arrow[r, "\Sigma g"] & \Sigma Y_K \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

где $g = e(Y)f$ и где εf — морфизм, индуцированный морфизмом $e(Y)$. Ясно (см. п. 4.3 гл. IV), что все вертикальные стрелки этой диаграммы являются анодинными морфизмами (вопрос может возникнуть только по отношению к морфизму εf, но этот морфизм анодинен, поскольку квадрат 2, очевидно, коуниверсален). Следовательно, в пунктированной гомотопической категории вертикальные стрелки являются изоморфизмами, так что мы возвращаемся тем самым к предыдущему случаю.

Пусть, наконец, оба симплициальных множества X и Y произвольны. Рассмотрим коммутативную диаграмму

(iv)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e(X)"'] & Y \arrow[r, "if"] \arrow[d, "\mathrm{in}_2"] & Cf \arrow[r, "jf"] \arrow[d, "\varepsilon' f"] & \Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] \arrow[d, "\Sigma e(X)"] & \Sigma Y \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma \mathrm{in}_2"] & \cdots \\ X_K \arrow[r, "\mathrm{in}_1"] & Y' \arrow[r, "i(\mathrm{in}_1)"] & C(\mathrm{in}_1) \arrow[r, "j(\mathrm{in}_1)"] & \Sigma X_K \arrow[r, "\Sigma(\mathrm{in}_1)"] & \Sigma Y' \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

где Y' — амальгама диаграммы $X_K \xleftarrow{e(X)} X \xrightarrow{f} Y$, in_1 и in_2 — канонические инъекции, а $\varepsilon' f$ — морфизм, индуцированный морфизмом in_2. Морфизм in_2 анодинен, поскольку первый квадрат этой диаграммы коуниверсален, а морфизм $\varepsilon' f$ анодинен, поскольку коуниверсален квадрат

$$\begin{tikzcd} X \wedge \Delta[1] \arrow[r] \arrow[d, "e(X) \wedge \mathrm{Id}"'] & Cf \arrow[d, "\varepsilon' f"] \\ X_K \wedge \Delta[1] \arrow[r] & C(\mathrm{in}_1) \end{tikzcd}$$

Следовательно, все вертикальные стрелки рассматриваемой диаграммы являются анодинными морфизмами и потому в пунктированной гомотопической категории определяют изоморфизмы. Таким образом, и этот случай сводится к предыдущему.

Тем самым теорема полностью доказана.

2.4. Предположим теперь, что морфизм $f: X \to Y$ является мономорфизмом категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$. Пусть Y/X — амальгама диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0^X"'] & Y \\ 0 & \end{tikzcd}$$

(в случае когда морфизм f является вложением, говорят, что симплициальное множество Y/X получено из симплициального множества Y «стягиванием его подмножества X в точку»). Поскольку морфизм 0^X является композицией морфизма $\varepsilon: X \to \Delta[1] \wedge X$

из п. 2.1 с нулевым морфизмом $\Delta[1]\wedge X \to 0$, симплициальное множество Y/X совпадает с симплициальным множеством $Cf/\Delta[1]\wedge X$, так что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f"'] & \Delta[1]\wedge X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "if"] & Cf \arrow[r, "\rho"] & Y/X \end{tikzcd}$$

где ρ — морфизм амальгамы Cf в симплициальное множество Y/X, компонентами которого являются каноническая проекция $p: Y \to Y/X$ и нулевой морфизм.

Пусть $h: \Delta[1]\wedge\Delta[1]\wedge X \to \Delta[1]\wedge X$ — морфизм $l\wedge \mathrm{Id}\, X$, где l — морфизм $\Delta[1]\wedge\Delta[1] \to \Delta[1]$ из п. 1.4. Морфизм h мы можем рассматривать как (сохраняющую отмеченные вершины) гомотопию, связывающую нулевой морфизм с тождественным морфизмом симплициального множества $\Delta[1]\wedge X$. Существование такой гомотопии означает по определению, что симплициальное множество $\Delta[1]\wedge X$ стягиваемо по себе в точку. Поэтому в силу доказываемой ниже леммы 2.4.1 имеет место

Предложение. *Для любого мономорфизма $f: X \to Y$ пунктированных симплициальных множеств канонический морфизм $Cf \to Y/X$ индуцирует в пунктированной гомотопической категории обратимый морфизм.*

Значит, последовательность (i) п. 2.3 изоморфна (над категорией $\mathcal{H}$) последовательности

(i′) $$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Y/X \xrightarrow{if\circ\rho^{-1}} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \longrightarrow \cdots$$

Таким образом,

для любого мономорфизма $f: X \to Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ последовательность (i′) индуцирует l-точную последовательность над категорией $\mathcal{H}$.

2.4.1. Лемма. *Если для мономорфизма $u: U \to V$ симплициальное множество U стягиваемо по себе в точку, то каноническая проекция*

$$p: V \to V/U$$

индуцирует в категории $\mathcal{H}$ обратимый морфизм.

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.5 гл. V. Поскольку симплициальное множество U стягиваемо, существует (вообще говоря, составная) гомотопия $h: I_n \times U \to U$, сохраняющая отмеченные вершины и связывающая нулевой морфизм с морфизмом $\mathrm{Id}\, U$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}(I_n\times U)\cup(\{0\}\times V) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & V \arrow[d, dashed, "\sigma"] \\ I_n\times V \arrow[r, dashed, "G"] & V'\end{tikzcd}$$

где g — морфизм, совпадающий на $I_n\times U$ с гомотопией h и на $\{0\}\times V$ с морфизмом $\mathrm{Id}\, V$ (мы считаем, что U вложено в V посредством мономорфизма u), V' — амальгама левой верхней части рассматриваемой диаграммы (состоящей из сплошных стрелок), а σ и G — канонические морфизмы. Ясно, что морфизм σ анодинен, а морфизм G представляет собой (сохраняющую отмеченные вершины) гомотопию, связывающую морфизм σ с морфизмом $f\colon V\to V'$, являющимся композицией канонической проекции p и некоторого морфизма $r\colon V/U\to V'$. Пусть q — морфизм категории $\mathscr{H}$, определенный диаграммой

$$V/U \xrightarrow{r} V' \xleftarrow{\sigma} V$$

(см. п. 2.3 гл. I). Поскольку $f=r\circ p$, морфизм $q\circ p$ категории $\mathscr{H}$ определяется диаграммой

$$V \xrightarrow{f} V' \xleftarrow{\sigma} V.$$

Но $[f]=[\sigma]$ в категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$. Следовательно, $q\circ p=\mathrm{Id}\, V$ в категории $\mathscr{H}$.

Для завершения доказательства леммы осталось доказать, что в категории $\mathscr{H}$ имеет место и равенство $p\circ q=\mathrm{Id}$. Рассмотрим с этой целью каноническую проекцию $p'\colon V'\to V'/U$ и морфизм $\sigma'\colon V/U\to V'/U$, индуцированный морфизмом σ. Ясно, что морфизм $p\circ q$ категории $\mathscr{H}$ определяется диаграммой

$$V/U \xrightarrow{p'\circ r} V'/U \xleftarrow{\sigma'} V/U,$$

если только морфизм σ' анодинен. Но это действительно так, поскольку ясно, что квадрат

$$\begin{tikzcd}V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\sigma"'] & V/U \arrow[d, "\sigma'"] \\ V' \arrow[r, "p'"] & V'/U\end{tikzcd}$$

коуниверсален. С другой стороны, гомотопия G индуцирует, очевидно, некоторый морфизм симплициального множества $I_n\times(V/U)$ в симплициальное множество V'/U, являющийся (сохраняющей отмеченные точки) гомотопией, связывающей морфизм σ' с морфизмом $p'\circ r$. Таким образом, $[\sigma'] = [p'\circ r]$ в категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ и потому $p\circ q = \mathrm{Id}(V/U)$ в категории $\mathcal{H}$.

Тем самым лемма полностью доказана.

§ 3. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

3.1. Пусть X — произвольное пунктированное симплициальное множество. Согласно п. 2.3, надстройкой ΣX над множеством X называется стянутое произведение $\Omega\wedge X$. Но, как мы знаем, функтор $Y \rightsquigarrow Y\wedge X$ из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$ сопряжен слева с рассмотренным в п. 4.3.1 гл. IV функтором $Z \rightsquigarrow \mathcal{H}om.(X, Z_K)$. Поэтому этот функтор перестановочен с прямыми суммами, так что, в частности, канонический морфизм

$$(\Omega\wedge X)\vee(\Omega\wedge X) \to (\Omega\vee\Omega)\wedge X$$

является изоморфизмом. Скомпонировав этот изоморфизм с морфизмом $\varphi\wedge X$, где φ — построенное в п. 4.5 гл. IV коумножение в когруппе Ω, мы получим некоторый морфизм

$$\Sigma X\vee\Sigma X \to \Sigma X,$$

являющийся, как легко видеть, коумножением, т. е. определяющий симплициальное множество ΣX как когруппу категории $\mathcal{H}$. При этом для любого морфизма $x\colon X\to X'$ категории $\mathcal{H}$ индуцированный морфизм $\Sigma x\colon \Sigma X\to\Sigma X'$ является, очевидно, гомоморфизмом когрупп. В частности, морфизмы Σf, Σif, Σjf, ... из последовательности (i) теоремы 2.3 являются гомоморфизмами когрупп.

Кроме того, если симплициальное множество X само уже является когруппой категории $\mathcal{H}$, то рассматриваемое коумножение в симплициальном множестве ΣX, во-первых, совпадает с коумножением, аналогичным образом индуцированным коумножением δ когруппы X, и, во-вторых, обладает свойством коммутативности, так что в этом случае когруппа ΣX абелева. В частности, когруппы $\Sigma^2 X$, $\Sigma^2 Y$, ... из последовательности (i) теоремы 2.3 являются, таким образом, абелевыми когруппами.

3.2. Рассмотрим теперь для произвольного пунктированного симплициального множества T множества

$$\pi_0 T = \mathcal{H}(\dot{\Delta}[1], T),$$

$$\pi_1 T = \mathcal{H}(\Sigma\dot{\Delta}[1], T),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pi_n T = \mathcal{H}(\Sigma^n\dot{\Delta}[1], T),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ввиду сказанного в п. 3.1 на множестве $\pi_n T$ при $n \geqslant 1$ естественным образом определяется строение группы, а при $n \geqslant 2$ — даже абелевой группы. Эта группа называется *n-й гомотопической группой* пунктированного симплициального множества T.

Множество $\pi_0 T$ совпадает, очевидно, с множеством компонент связности симплициального множества T. Кроме того, поскольку для любого пунктированного симплициального множества Y составной морфизм

$$Y \approx Y \times \{1\} \xrightarrow{\text{влож.}} Y \times \dot{\Delta}[1] \xrightarrow{\text{кан. пр.}} Y \wedge \dot{\Delta}[1]$$

является, очевидно, изоморфизмом, так что, в частности, симплициальное множество $\Sigma\dot{\Delta}[1] = \Omega \wedge \dot{\Delta}[1]$ изоморфно симплициальной окружности Ω, то группа $\pi_1 T$ совпадает с группой Пуанкаре симплициального множества T в его отмеченной вершине (см. п. 5 гл. IV).

Стоит еще заметить, что ввиду изоморфизма $\Sigma\dot{\Delta}[1] \approx \Omega$ симплициальное множество $\Sigma^n \dot{\Delta}[1]$ для любого $n \geqslant 1$ отождествляется со стянутым произведением $\wedge^n \Omega$ n экземпляров окружности Ω. Поэтому при $n \geqslant 1$ группы $\pi_n T$ можно определять также формулой

$$\pi_n T = \mathcal{H}(\wedge^n \Omega, T), \quad n \geqslant 1.$$

Пусть p — каноническая проекция симплициального отрезка $\Delta[1]$ на симплициальную окружность Ω. Рассмотрим составной морфизм

$$q_n\colon \Delta[1] \times \ldots \times \Delta[1] \xrightarrow{p \times \cdots \times p} \Omega \times \cdots \times \Omega \xrightarrow{\text{кан. пр.}} \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega,$$

являющийся, очевидно, эпиморфизмом категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$. Из определения симплициальной окружности Ω как коядра пары морфизмов

$$\Delta(\partial_1^0), \Delta(\partial_1^1) : \Delta[0] \rightrightarrows \Delta[1]$$

непосредственно вытекает, что имеет место коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{вложение}"] \arrow[d] & \Delta[1]^n \arrow[d, "q_n"] \\ \Delta[0] \arrow[r] & \wedge^n \Omega \end{tikzcd}$$

где $A = \bigcup_{n=p+q+1} \Delta[1]^p \times \dot{\Delta}[1] \times \Delta^q[1]$. Это означает, что

пунктированное симплициальное множество $\wedge^n \Omega$ получается из «n-мерного куба» $\Delta[1]^n$ стягиванием его «границы» A в точку.

Симплициальное множество $\wedge^n \Omega$ мы будем называть *n-мерной симплициальной сферой.*

3.3. Согласно п. 4.2 гл. IV и п. 4.3.1 гл. IV, для любого пунктированного симплициального множества X и любого пунктированного полного симплициального множества T имеет место функториальный изоморфизм

$$.\mathcal{H}(\Sigma X,\ T) \approx .\mathcal{H}(X,\ \Omega T),$$

где $\Omega T = \mathcal{H}om.(\Omega,\ T)$ (см. п. 1.3). Следовательно, для любого $n \geqslant 1$ имеют место функториальные изоморфизмы

$$.\mathcal{H}(\Sigma^n X,\ T) \approx .\mathcal{H}(\Sigma^{n-1} X,\ \Omega T) \approx \ldots \approx .\mathcal{H}(X,\ \Omega^n T).$$

В частности,

для любого пунктированного полного симплициального множества T имеют место групповые изоморфизмы

$$\pi_n T \approx \pi_{n-1}(\Omega T) \approx \ldots \approx \pi_0(\Omega^n T).$$

Кроме того, для любого морфизма $f\colon Z \to T$ пунктированных полных симплициальных множеств точная последовательность

$$\to .\mathcal{H}(X,\Omega Z) \xrightarrow{.\mathcal{H}(X,\,\Omega f)} .\mathcal{H}(X,\Omega T) \xrightarrow{.\mathcal{H}(X,\,qf)} .\mathcal{H}(X,\Gamma f) \xrightarrow{.\mathcal{H}(X,\,pf)} .\mathcal{H}(X,Z) \xrightarrow{.\mathcal{H}(X,\,f)} .\mathcal{H}(X,\ T)$$

изоморфна последовательности

$$\to .\mathcal{H}(\Sigma X,Z) \xrightarrow{.\mathcal{H}(\Sigma X,\,f)} .\mathcal{H}(\Sigma X,\ T) \longrightarrow .\mathcal{H}(X,\ \Gamma f) \xrightarrow{.\mathcal{H}(X,\,pf)} .\mathcal{H}(X,\ Z) \xrightarrow{.\mathcal{H}(X,\,f)} .\mathcal{H}(X,\ T).$$

Следовательно, последняя последовательность также точна. В частности, при $X = \dot{\Delta}[1]$ мы получаем, что

для любого морфизма $f\colon Z \to T$ пунктированных полных симплициальных множеств имеет место точная последовательность

$$\ldots \to \pi_n(\Gamma f) \xrightarrow{\pi_n(pf)} \pi_n Z \xrightarrow{\pi_n f} \pi_n T \to \pi_{n-1}(\Gamma f) \to \ldots$$
$$\ldots \to \pi_1 Z \xrightarrow{\pi_1 f} \pi_1 T \to \pi_0(\Gamma f) \xrightarrow{\pi_0(pf)} \pi_0 Z \xrightarrow{\pi_0 f} \pi_0 T$$

Эта последовательность называется *гомотопической последовательностью морфизма* $f\colon Z \to T$. Ясно, что она функториально зависит от f.

Аналогично, для любого расслоения

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B,$$

база B которого является полным симплициальным множеством, построенная в п. 1.5 точная последовательность

$$\ldots \to \Omega B \to F \xrightarrow{[i]} E \xrightarrow{[p]} B \quad .$$

приводит к точной последовательности

$$\ldots \to \pi_n F \xrightarrow{\pi_n i} \pi_n E \xrightarrow{\pi_n p} \pi_n B \to \pi_{n-1} F \to \ldots$$
$$\ldots \to \pi_2 B \to \pi_1 F \xrightarrow{\pi_1 i} \pi_1 E \xrightarrow{\pi_1 p} \pi_1 B \to \pi_0 F \xrightarrow{\pi_0 i} \pi_0 E \xrightarrow{\pi_0 p} \pi_0 B$$

Эта последовательность называется *гомотопической последовательностью расслоения p*. Она функториально зависит от p.

3.4. Построенные выше симплициальные сферы можно описывать многими различными способами и тем самым получать много различных определений групп $\pi_n T$. Например, как мы сейчас покажем,

в пунктированной гомотопической категории $\mathscr{H}$ симплициальная сфера $\wedge^n \Omega$ изоморфна симплициальному множеству $\Delta[n]/\dot{\Delta}[n]$, получающемуся стягиванием в точку границы $\dot{\Delta}[n]$ стандартного симплекса $\Delta[n]$, а также изоморфна границе $\dot{\Delta}[n+1]$ симплекса $\Delta[n+1]$:

$$\wedge^n \Omega \approx \Delta[n]/\dot{\Delta}[n] \approx \dot{\Delta}[n+1].$$

Таким образом,

$$\pi_n T \approx \mathscr{H}(\Delta[n]/\dot{\Delta}[n], T) \approx \mathscr{H}(\dot{\Delta}[n+1], T).$$

Действительно, ясно, что в категории $\Delta^\circ \mathscr{E}ns$ морфизм

$$\Delta[\partial^0_{n+1}]: \Delta[n] \to \Delta[n+1]$$

индуцирует изоморфизм

$$\Delta[n]/\dot{\Delta}[n] \approx \dot{\Delta}[n+1]/\Lambda^0[n+1].$$

Поскольку симплициальное множество $\Lambda^0[n+1]$ стягиваемо по себе в точку (гомотопией, связывающей тождественный морфизм множества $\Lambda^0[n+1]$ с его нулевым морфизмом, является, например, морфизм $C(v^0_{n+1})$; см. п. 2.1.3 гл. IV), отсюда следует (см. лемму 2.4.1), что

$$\Delta[n]/\dot{\Delta}[n] \approx \dot{\Delta}[n+1]$$

в категории $\mathscr{H}$.

Далее, пусть f — каноническое вложение симплициального множества $\dot{\Delta}[n]$ в симплициальное множество $\Delta[n]$. По определению в категории $\Delta^\circ \mathscr{E}ns$ имеют место коуниверсальные квадраты

$$\begin{tikzcd} \dot{\Delta}[n] \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \Delta[1] \wedge \dot{\Delta}[n] \arrow[d] \\ \Delta[n] \arrow[r, "if"] & Cf \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Delta[n] \arrow[r, "if"] \arrow[d] & Cf \arrow[d] \\ \Delta[0] \arrow[r] & Cf/\Delta[n] \end{tikzcd}$$

Поэтому композиция

$$\begin{tikzcd} \dot\Delta[n] \arrow[r] \arrow[d] & \Delta[1] \wedge \dot\Delta[n] \arrow[d] \\ \Delta[0] \arrow[r] & Cf/\dot\Delta[n] \end{tikzcd}$$

этих квадратов также является коуниверсальным квадратом, так что симплициальное множество $Cf/\dot\Delta[n]$ является конусом нулевого морфизма $\dot\Delta[n] \to 0$. Следовательно,

$$Cf/\dot\Delta[n] \approx \Sigma\dot\Delta[n]$$

в категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$.

Поскольку симплициальное множество $\Delta[n]$ стягиваемо по себе в точку, отсюда вытекает, что в категории $\mathscr{H}$

$$\Sigma\dot\Delta[n] \approx Cf.$$

С другой стороны, согласно результатам п. 2.4,

$$Cf \approx \Delta[n]/\dot\Delta[n].$$

Поэтому в категории $\mathscr{H}$ имеет место изоморфизм

$$\Delta[n]/\dot\Delta[n] \approx \Sigma\dot\Delta[n],$$

т. е. (при $n \geqslant 1$) изоморфизм

$$\Delta[n]/\dot\Delta[n] \approx \Sigma(\Delta[n-1]/\dot\Delta[n-1]).$$

Следовательно,

$$\Delta[n]/\dot\Delta[n] \approx \Sigma(\Delta[n-1]/\dot\Delta[n-1]) \approx \Sigma^2(\Delta[n-2]/\dot\Delta[n-2]) \approx \cdots$$

$$\cdots \approx \Sigma^{n-1}(\Delta[1]/\dot\Delta[1]) = \Sigma^{n-1}\Omega = \Sigma^n\dot\Delta[1].$$

§ 4. РАССЛОЕНИЯ

4.1. Напомним (см. Глоссарий), что по любой категории $\mathcal{C}$ можно построить новую категорию $\mathcal{A}r\,\mathcal{C}$, объектами которой являются морфизмы $p: E \to B$ категории $\mathcal{C}$, а морфизмами объекта $p: E \to B$ в объект $p': E' \to B'$—пары (u, v) морфизмов $u: E \to E'$ и $v: B \to B'$ категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющие соотношению $p'u = vp$. Таким образом, для любых двух морфизмов $p: E \to B$ и $p': E' \to B'$ категории $\mathcal{C}$ множество $(\mathcal{A}r\,\mathcal{C})(p, p')$ морфизмов $p \to p'$ категории $\mathcal{A}r\,\mathcal{C}$ представляет собой коамальгаму множеств

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}(E, E') \arrow[d, "\mathcal{C}(E, p')"] \\ \mathcal{C}(B, B') \arrow[r, "\mathcal{C}(p, B')"] & \mathcal{C}(E, B') \end{tikzcd}$$

4.2. В частности, для любых двух морфизмов $p\colon E\to B$ и $p'\colon E'\to B'$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ множество $(\mathcal{A}r\Delta^\circ\mathcal{E}ns)(p, p')$ представляет собой коамальгаму диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \Delta^\circ\mathcal{E}ns(E, E') \arrow[d, "\Delta^\circ\mathcal{E}ns(E, p')"] \\ \Delta^\circ\mathcal{E}ns(B, B') \arrow[r, "\Delta^\circ\mathcal{E}ns(p, B')"] & \Delta^\circ\mathcal{E}ns(E, B') \end{tikzcd}$$

По аналогии введем в рассмотрение диаграмму симплициальных множеств

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}om(E, E') \arrow[d, "\mathcal{H}om(E, p')"] \\ \mathcal{H}om(B, B') \arrow[r, "\mathcal{H}om(p, B')"] & \mathcal{H}om(E, B') \end{tikzcd}$$

Коамальгаму этой диаграммы мы будем обозначать символом $\mathcal{H}om(p, p')$. По определению n-мерными симплексами этого симплициального множества являются пары (h, k), для которых имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Delta[n]\times E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Delta[n]\times p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ \Delta[n]\times B \arrow[r, "k"] & B' \end{tikzcd}$$

Операторы граней и вырождения симплициального множества $\mathcal{H}om(p, p')$ определяются очевидным образом. Легко видеть, что

если морфизм p' является расслоением, а симплициальное множество B' полно, то симплициальное множество $\mathcal{H}om(p, p')$ также полно.

4.1.2. Морфизмы $p\to p'$ категории $\mathcal{A}r\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ называются *гомотопными*, если они принадлежат одной компоненте связности симплициального множества $\mathcal{H}om(p, p')$. Пусть $\pi_0(p, p')$ — множество компонент связности этого симплициального множества. Ясно, что для любых трех морфизмов $p\colon E\to B$, $p'\colon E'\to B'$ и $p''\colon E''\to B''$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ отображение компонирования

$$(\mathcal{A}r\Delta^\circ\mathcal{E}ns)(p, p')\times(\mathcal{A}r\Delta^\circ\mathcal{E}ns)(p', p'')\longrightarrow(\mathcal{A}r\Delta^\circ\mathcal{E}ns)(p, p'')$$

согласовано с отношением гомотопности морфизмов и потому индуцирует некоторое отображение

$$\pi_0(p, p')\times\pi_0(p', p'')\to\pi_0(p, p'').$$

Это позволяет нам ввести в рассмотрение *категорию морфизмов категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ по модулю гомотопии.* По определению объектами этой категории являются морфизмы категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, а морфизмами объекта p в объект p' — элементы множества $\pi_0(p, p')$. Об изоморфных объектах p и p' этой категории, рассматриваемых как морфизмы категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, мы будем говорить, что они имеют *один и тот же гомотопический тип*.

4.1.3. Рассмотрим случай, когда симплициальное множество E является симплициальным подмножеством симплициального множества E', симплициальное множество B — симплициальным подмножеством симплициального множества B', а морфизм $p: E \to B$ индуцирован морфизмом $p': E' \to B'$. В этом случае мы будем говорить, что морфизм p является *деформационным ретрактом* морфизма p', если имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Delta[1]\times E' & \xrightarrow{h} & E' \\ {\scriptstyle \Delta[1]\times p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ \Delta[1]\times B' & \xrightarrow{k} & B' \end{array}$$

причем

1) ограничения морфизмов h и k на симплициальных подмножествах $\{0\}\times E' \approx E'$ и $\{0\}\times B' \approx B'$ являются тождественными морфизмами (симплициальных множеств E' и B' соответственно);

2) ограничения морфизмов h и k на симплициальных подмножествах $\{1\}\times E' \approx E'$ и $\{1\}\times B' \approx B'$ являются композициями некоторых морфизмов $v: E' \to E$ и $v': B' \to B$ с морфизмами вложения $u: E \to E'$ и $u': B \to B'$ соответственно;

3) ограничения морфизмов h и k на симплициальных подмножествах $\Delta[1]\times E$ и $\Delta[1]\times B$ являются композициями канонических проекций $\Delta[1]\times E \to E$ и $\Delta[1]\times B \to B$ с морфизмами вложения $u: E \to E'$ и $u': B \to B'$.

Пару (h, k), удовлетворяющую сформулированным условиям (и, следовательно, являющуюся, в частности, одномерным симплексом симплициального множества $\mathcal{H}om(p, p')$, мы будем называть *ретрагирующей деформацией* морфизма p' на морфизм p.

По определению, если морфизм p является деформационным ретрактом морфизма p', то имеет место коммутативная диаграмма.

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & E' & \xrightarrow{v} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & B \end{array}$$

в которой $v\circ u = \operatorname{Id} E$ и $v'\circ u' = \operatorname{Id} B$. Таким образом, морфизмы $v\circ u$ и $v'\circ u'$ определяют тождественный морфизм $p \to p$. Кроме того, определенный морфизмами $u\circ v: E' \to E'$ и $u'\circ v': B' \to B'$ морфизм $p' \to p'$ гомотопен тождественному морфизму $p' \to p'$.

Следовательно,

если морфизм p является деформационным ретрактом морфизма p', то морфизмы p' и p имеют один и тот же гомотопический тип.

В случае когда морфизм p' является расслоением, мы из диаграммы (*) немедленно получаем (см. утверждение (ii) п. 3.1.1 гл. IV), что

каждый деформационный ретракт расслоения является расслоением.

4.2. Другой важный случай возникает, когда «базы» B и B' совпадают. Рассмотрим в этом случае канонический морфизм

$$\mathcal{H}om(p,\ p') \to \mathcal{H}om(B,\ B).$$

Слой (см. п. 3.1.1 гл. IV) этого морфизма над тождественным морфизмом $\mathrm{Id}\ B$ симплициального множества B (являющимся по определению нульмерным симплексом симплициального множества $\mathcal{H}om(B,\ B)$) мы будем обозначать символом $\mathcal{H}om_B(p,\ p')$ (или символом $\mathcal{H}om_B(E,\ E')$). Согласно результатам п. 3.1.1 гл. IV и п. 3.1.2 гл. V,

если морфизм p' является расслоением, то симплициальное множество $\mathcal{H}om_B(p,\ p')$ полно.

Ясно, что n-мерные симплексы симплициального множества $\mathcal{H}om_B(p,\ p')$ можно отождествить с морфизмами $h\colon \Delta[n]\times E \to E'$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, для которых имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Delta[n]\times E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p\circ \mathrm{pr}_2"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

где pr_2 — каноническая проекция на второй сомножитель. В частности, нульмерные симплексы этого множества можно отождествить с морфизмами $u\colon E \to E'$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, удовлетворяющими соотношению $p'u = p$, т. е. с морфизмами категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns/B$ симплициальных множеств над множеством B (см. Глоссарий, К а т е г о р и и м о р ф и з м о в).

Морфизмы p и p' категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ с общей областью значений B мы будем называть *изоморфными относительно B*, если они изоморфны как объекты категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns/B$.

4.2.1. Аналогично, для любых двух морфизмов $p\colon E \to B$ и $p'\colon E' \to B$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ с общей областью значений B морфизмы $u,\ u'\colon E \to E'$, удовлетворяющие соотношению $p = p'u =$

$=p'u'$ (т. е. являющиеся морфизмами $p \to p'$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell/B$), называются *гомотопными относительно* B, если они принадлежат одной компоненте связности симплициального множества $\mathcal{H}om_B(p, p')$. Пусть $\pi_0^B(p, p')$ — множество компонент связности этого симплициального множества. Ясно, что для любых трех морфизмов $p: E \to B$, $p': E' \to B$ и $p'': E'' \to B$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell$ с общей областью значений B отображение компонирования

$$\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell(E, E') \times \Delta^\circ\mathcal{E}n\ell\ (E', E'') \to \Delta^\circ\mathcal{E}n\ell\ (E, E'')$$

индуцирует некоторое отображение

$$\pi_0^B(p, p') \times \pi_0^B(p', p'') \to \pi_0^B(p,\ p'').$$

Это позволяет нам ввести в рассмотрение *категорию симплициальных множеств над B по модулю гомотопии.* Объектами этой категории являются морфизмы категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell$ с областью значений B, а морфизмами — элементы множеств $\pi_0^B(p,\ p')$. Об изоморфных объектах p и p' этой категории, рассматриваемых как морфизмы категории $\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell$, мы будем говорить, что они имеют *один и тот же гомотопический тип относительно* B.

4.2.2. В случае когда симплициальное множество E является симплициальным подмножеством симплициального множества E', а морфизм p — ограничением морфизма p', мы будем говорить, что морфизм p (или симплициальное множество E) представляет собой *деформационный ретракт* морфизма p' (или соответственно симплициального множества E') *относительно симплициального множества* B, если существует такой морфизм $h: \Delta[1] \times \times E' \to E'$, удовлетворяющий соотношению $p' \circ h = p \circ \mathrm{pr}_2$, что его ограничениями на симплициальных подмножествах $\{0\} \times E' \approx \approx E'$, $[1] \times E' \approx E'$ и $\Delta[1] \times E$ являются соответственно тождественный морфизм симплициального множества E', композиция некоторого морфизма $E' \to E$ с морфизмом вложения $E \to E'$ и каноническая проекция симплициального множества $\Delta[1] \times E$ на симплициальное множество E. Такого рода морфизм h мы будем называть *ретрагирующей деформацией* симплициального множества E' на симплициальное множество E *относительно симплициального множества* B. Как и выше, показывается, что

если морфизм p является деформационным ретрактом морфизма p' относительно симплициального множества B, то морфизмы p и p' имеют один и тот же гомотопический тип относительно B.

4.3. Вернемся снова к симплициальному множеству $\mathcal{H}om(p, p')$ (см. п. 4.1.1). Согласно определению этого множества, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om(B, E') & \xrightarrow{\mathcal{H}om(p,E')} & \mathcal{H}om(E, E') \\ {\scriptstyle \mathcal{H}om(B,p')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}om(E,p')} \\ \mathcal{H}om(B, B') & \xrightarrow{\mathcal{H}om(p, B')} & \mathcal{H}om(E, B') \end{array}$$

индуцирует некоторый морфизм

$$p/p'\colon \mathcal{H}om(B, E') \to \mathcal{H}om(p, p')$$

с компонентами $\mathcal{H}om(p, E')$ и $\mathcal{H}om(B, p')$.

Предложение. *Для любого расслоения $p\colon E \to B$ и любого мономорфизма $i\colon Y \to X$ морфизм*

$$i/p\colon \mathcal{H}om(X, E) \to \mathcal{H}om(i, p)$$

является расслоением.

Доказательство. Нужно показать, что для любой коммутативной диаграммы вида

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{a} & \mathcal{H}om(X, E) \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i/p} \\ V & \xrightarrow{b} & \mathcal{H}om(i, p) \end{array}$$

где u — произвольный анодинный морфизм, существует такой морфизм $d\colon V \to \mathcal{H}om(X, E)$, что $du = a$ и $(i/p)d = b$. При этом мы без ограничения общности можем, очевидно, считать морфизм u вложением.

Пусть $b_1\colon V \to \mathcal{H}om(Y, E)$ и $b_2\colon V \to \mathcal{H}om(X, B)$ — компоненты морфизма b, и пусть $a'\colon U \times X \to E$, $b_1'\colon V \times Y \to E$ и $b_2'\colon V \times X \to B$ — морфизмы, канонически ассоциированные с морфизмами a, b_1 и b_2' соответственно (см. п. 2.5.3 гл. II). Коммутативность диаграммы $(*)$ означает, что имеют место равенства

$$\mathcal{H}om(i, E) \circ a = b_1 \circ u, \quad \mathcal{H}om(X, p) \circ a = b_2 \circ u,$$

т. е. равенства

$$(**) \qquad a' \circ (U \times i) = b_1' \circ (u \times Y), \quad p \circ a' = b_2' \circ (u \times X).$$

Кроме того, морфизмы b_1 и b_2 связаны, очевидно, соотношением

$$\mathcal{H}om(Y, p) \circ b_1 = \mathcal{H}om(i, B) \circ b_2,$$

равносильным соотношению

$$(***) \qquad p\circ b_1' = b_2'\circ (V\times i).$$

Первое из соотношений (**) означает, что морфизмы a' и b_1' совпадают на общей части $U\times Y$ их областей определения. Поэтому определен морфизм

$$c'\colon V\times Y\cup U\times X \to E,$$

ограничениями которого на симплициальных множествах $V\times Y$ и $U\times X$ являются морфизмы b_1' и a' соответственно. При этом соотношение (***) и второе из соотношений (**) показывают, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} V\times Y\cup U\times X \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ V\times X \arrow[r, "b_2'"] & B \end{tikzcd}$$

Поскольку, согласно п. 2.2 гл. IV, левая вертикальная стрелка этой диаграммы является анодинным морфизмом (а по условию морфизм p является расслоением), существует такой морфизм $d'\colon V\times X \to E$, являющийся распространением морфизма c', что $p\circ d' = b_2'$. Но тогда ясно, что морфизм $d\colon V \to \mathcal{H}om(X, E)$, канонически соответствующий морфизму d', удовлетворяет требуемым соотношениям $du = a$ и $(i/p)\, d = b$.

Частными случаями доказанного предложения являются предложения 3.1.2 гл. IV и 3.1.3 гл V. Действительно, если Y пусто, морфизм i/p совпадает, очевидно, с морфизмом $\mathcal{H}om(X, p)$, а если $B = \Delta[0]$, он совпадает с морфизмом $\mathcal{H}om(i, E)$.

4.3.1. Мы будем говорить, что морфизм $p\colon E \to B$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ удовлетворяет *аксиоме о накрывающем пути*, если для любой коммутативной диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} \Delta[0] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[1] \arrow[r, "v"] & B \end{tikzcd}$$

существует такой морфизм $w\colon \Delta[1] \to E$, что $wj = u$ и $pw = v$.

Следствие. *Для любого морфизма $p\colon E \to B$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ следующие свойства равносильны:*

(i) *морфизм p является расслоением;*

(ii) *для каждого мономорфизма* $i\colon Y \to X$ *категории* $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ *морфизм*

$$i/p\colon \mathcal{H}om(X, E) \to \mathcal{H}om(i, p)$$

удовлетворяет аксиоме о накрывающем пути.

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) непосредственно вытекает из предложения 4.3. С другой стороны, свойство (ii) означает, что для любого симплициального множества X, любого его симплициального подмножества Y и любой коммутативной диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} \Delta[1]\times Y \cup \{e\}\times X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[1]\times X \arrow[r, "b"] & B \end{tikzcd}$$

$e=0, 1$, существует такой морфизм $c\colon \Delta[1]\times X \to E$, являющийся распространением морфизма a, что $pc = b$. Но, согласно п. 3.1 гл. IV, это и означает, что морфизм p является расслоением.

4.3.2. Применим теперь предложение 4.3 к симплициальным множествам $X = \Delta[n]$ и $Y = \dot\Delta[n]$ (при $n = 0$ множество Y мы считаем пустым). За морфизм i мы примем морфизм вложения. В этом случае каждая вершина симплициального множества $\mathcal{H}om(i, p)$ задается, очевидно, парой (a, b), состоящей из некоторого сингулярного симплекса $b\colon \Delta[n]\to B$ базы B и такого морфизма $a\colon \dot\Delta[n]\to E$, что $p\circ a = b|_{\dot\Delta[n]}$. При этом вершинами симплициального множества $\mathcal{H}om(\Delta[n], E)$, лежащими над вершиной (a, b) (т. е. принадлежащими соответствующему слою $F_{a,b}$ расслоения i/p), являются такие сингулярные симплексы $e\colon \Delta[n]\to E$, что $p\circ e = b$ и $e|_{\dot\Delta[n]} = a$.

Сингулярные симплексы симплициального множества E мы будем называть *B-эквивалентными*, если они принадлежат одной компоненте связности некоторого слоя $F_{a,b}$ морфизма i/p. Таким образом, для того чтобы сингулярные симплексы $e_0\colon \Delta[n]\to E$ и $e_1\colon \Delta[n]\to E$ были B-эквивалентны, необходимо в первую очередь, чтобы они принадлежали одному слою, т. е. чтобы они удовлетворяли соотношениям $e_0|_{\dot\Delta[n]} = e_1|_{\dot\Delta[n]}$ и $pe_0 = pe_1$. Кроме того, поскольку морфизм $i/p\colon \mathcal{H}om(\Delta[n], E)\to\mathcal{H}om(i, p)$ является, согласно предложению 4.3, расслоением, каждый его слой $F_{a,b}$ представляет собой полное симплициальное множество, и потому вершины этого слоя тогда и только тогда принадлежат одной компоненте связности, когда они являются вершинами некоторого одномерного симплекса. Иными словами, сингулярные симплексы $e_0\colon \Delta[n]\to E$ и $e_1\colon \Delta[n]\to E$, удовлетворяющие соотношениям

$e_0|\dot{\Delta}[n] = e_1|\dot{\Delta}[n] (= a)$ и $pe_0 = pe_1 (= b)$, тогда и только тогда B-эквивалентны, когда существует такой морфизм $h: \Delta[1] \times \Delta[n] \to E$, что морфизмы $h|_{\Delta[1]\times\dot{\Delta}[n]}$ и $p \circ h$ являются композициями канонических проекций $\Delta[1] \times \dot{\Delta}[n] \to \dot{\Delta}[n]$ и $\Delta[1] \times \Delta[n] \to \Delta[n]$ с морфизмами $a: \dot{\Delta}[n] \to E$ и $b: \Delta[n] \to B$ соответственно.

Симплексы симплициального множества E (одной и той же размерности n) мы будем называть *B-эквивалентными*, если B-эквивалентны соответствующие сингулярные симплексы $\Delta[n] \to E$.

Лемма. *Вырожденные симплексы симплициального множества E тогда и только тогда B-эквивалентны, когда они совпадают.*

Доказательство немедленно вытекает из следующей леммы:

4.3.3. Лемма. *Если для двух n-мерных вырожденных симплексов x и y некоторого симплициального множества E имеют место равенства*

$$d_i x = d_i y, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n,$$

то $x = y$.

Доказательство. Пусть $x = s_p d_p x$ и $y = s_q d_q y$. При $p = q$ лемма очевидна. Пусть $p \neq q$, и пусть для определенности $p < q$. Тогда

$$x = s_p d_p x = s_p d_p y = s_p d_p s_q d_q y = s_p s_{q-1} d_p d_q y = s_q s_p d_p d_q y = s_q \xi,$$

где $\xi = s_p d_p d_q y$. Следовательно, $d_q x = d_q s_q \xi = \xi$ и потому $x = s_q d_q x = s_q d_q y = y$.

§ 5. МИНИМАЛЬНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

5.1. Расслоение $p: E \to B$ мы будем называть *минимальным*, если симплексы симплициального множества E тогда и только тогда B-эквивалентны (см. п. 4.3.2), когда они совпадают (в этом случае мы будем также говорить, что симплициальное множество E *минимально над* симплициальным множеством B). Иными словами, расслоение p минимально, если для любого n каждая компонента связности произвольного слоя расслоения $i/p: \mathcal{H}om(\Delta[n], E) \to \mathcal{H}om(i, p)$, где i — морфизм вложения $\dot{\Delta}[n] \to \Delta[n]$, содержит одну и только одну вершину.

Пусть $e = 0$ или $e = 1$, и пусть t_1 и t_2 — такие одномерные симплексы симплициального множества $\mathcal{H}om(\Delta[n], E)$, что $(i/p)t_1 = (i/p)t_2$ и $d_e t_1 = d_e t_2$. Положим $t = (i/p)t_1 = (i/p)t_2$. Поскольку морфизм i/p является расслоением (предложение 4.3), в симплициальном множестве $\mathcal{H}om(\Delta[n], E)$ существует такой двумерный симплекс σ, что $d_{1+e}\sigma = t_1$, $d_e\sigma = t_2$ и $(i/p)\,\sigma = s_e t$. Это показывает, что симплексы $d_{1-e}t_1$ и $d_{1-e}t_2$ B-эквивалентны (соответствующей гомотопией является симплекс $d_{2(1-e)}\sigma$). Поэтому, если расслоение минимально, эти симплексы совпадают. Обратно, ясно, что если для любых t_1 и t_2, подчиненных указанным выше условиям, симплексы $d_{1-e}t_1$ и $d_{1-e}t_2$ совпадают, то расслоение p минимально. Тем самым доказано, что расслоение $p\colon E \to B$ тогда и только тогда минимально, когда для любой диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} \Delta[1] \times \dot{\Delta}[n] \cup \{e\} \times \Delta[n] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "j"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[1] \times \Delta[n] \arrow[r, "b"] \arrow[ur, shift left, "t_1"] \arrow[ur, shift right, "t_2"'] & B \end{tikzcd} \qquad n \geqslant 0, \; e = 0, 1$$

в которой $a = t_1 j = t_2 j$ и $b = pt_1 = pt_2$, ограничения морфизмов t_1 и t_2 на симплициальном множестве $\{1 - e\} \times \Delta[n]$ совпадают.

Следующие свойства минимальных расслоений очевидны:

5.1.1. Если в универсальном квадрате

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

морфизм p является минимальным расслоением, то минимальным расслоением является и морфизм p' (ср. утверждение (ii) п. 3.1.1 гл. IV).

5.1.2. Если в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & B \end{tikzcd}$$

имеют место соотношения $v \circ u = \operatorname{Id} E$ и $v' \circ u' = \operatorname{Id} B$, а морфизм p' является минимальным расслоением, то морфизм p также является минимальным расслоением (ср. утверждение (iii′) п. 3.1.1 гл. IV).

Покажем теперь, что справедлива следующая

Теорема (теорема существования минимальных расслоений). *Для любого расслоения $p\colon E \to B$ существует такое симплициальное подмножество E' симплициального множества E, что ограничение p' расслоения p на E' является минимальным расслоением и одновременно деформационным ретрактом расслоения p относительно симплициального множества B.*

Доказательство. Выберем в каждом классе B-эквивалентных симплексов симплициального множества E по представителю. Будем эти представители (а также соответствующие сингулярные симплексы) называть *отмеченными* симплексами (отмеченными сингулярными симплексами) симплициального множества E. Их выбор мы подчиним только одному условию: если рассматриваемый класс B-эквивалентных симплексов содержит вырожденный симплекс, то за представителя этого класса мы выбираем именно этот вырожденный симплекс. Ясно, что тогда каждый вырожденный симплекс будет отмечен (см. лемму 4.3.3).

Пусть теперь E' — максимальное симплициальное подмножество симплициального множества E, состоящее только из отмеченных симплексов. Легко видеть, что если для некоторого n-мерного отмеченного симплекса e симплициального множества E все симплексы d_ie, $0 \leqslant i \leqslant n$, принадлежат симплициальному подмножеству E', то сам симплекс e также принадлежит E'. Действительно, пусть E'' — наименьшее симплициальное подмножество симплициального множества E, содержащее E' и e. Ясно, что любой симплекс из E'' либо принадлежит E', либо совпадает с e, либо вырожден. Поэтому, в частности, все симплексы множества E'' отмечены, так что в силу максимальности симплициального подмножества E' обязательно имеет место равенство $E'' = E'$. Следовательно, симплекс e принадлежит E'.

Покажем теперь, что ограничение p' расслоения p на симплициальном подмножестве E' является деформационным ретрактом расслоения p относительно B. Пусть $\mathfrak{d}$ — семейство всех симплициальных подмножеств D множества E, содержащих подмножество E' и обладающих тем свойством, что E' является их деформационным ретрактом относительно B. Рассмотрим всевозможные пары (D, h), состоящие из произвольного подмножества D семейства $\mathfrak{d}$ и некоторой гомотопии $h: \Delta[1] \times D \to E$, являющейся композицией ретрагирующей деформации $\Delta[1] \times D \to D$ и морфизма вложения $D \to E$. Ясно, что среди всех таких пар существуют максимальные (по отношению к естественному их упорядочению). Пусть (D, h) — такая максимальная пара. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что $D = E$.

Пусть это не так. Тогда в симплициальном множестве E существует симплекс e, не принадлежащий симплициальному подмножеству D и имеющий минимальную возможную размерность. Пусть $\tilde{e}: \Delta[n] \to E$ — соответствующий сингулярный симплекс, и пусть D' — наименьшее симплициальное подмножество множества E, содержащее D и e. Ясно, что сингулярный симплекс $\tilde{e}$ переводит границу $\dot{\Delta}[n]$ симплекса $\Delta[n]$ в симплициальное подмножество D, так что определен морфизм $h \circ (\Delta[1] \times (\tilde{e}\,|_{\dot{\Delta}[n]}))$.

Легко видеть, что существует гомотопия $k\colon \Delta[1]\times\Delta[n]\to E$, связывающая сингулярный симплекс $\tilde{e}$ с некоторым отмеченным сингулярным симплексом $\Delta[n]\to E$, совпадающая на $\Delta[1]\times\dot{\Delta}[n]$ с морфизмом $h\circ(\Delta[1]\times(\tilde{e}\,|_{\dot{\Delta}[n]}))$ и удовлетворяющая соотношению $p\circ k = p\circ\tilde{e}\circ \mathrm{pr}_2$, где $\mathrm{pr}_2\colon \Delta[1]\times\Delta[n]\to\Delta[n]$ — каноническая проекция. Действительно, построение этой гомотопии равносильно построению в симплициальном множестве $\mathcal{H}om(\Delta[n], E)$ такого одномерного симплекса, что он:

1) «накрывает» заданный одномерный симплекс симплициального множества $\mathcal{H}om(i, p)$;

2) имеет заданную первую вершину $\Delta[0]\to\mathcal{H}om(\Delta[n], E)$;

3) обладает тем свойством, что его вторая вершина отмечена, т. е. является заранее выбранной вершиной некоторой компоненты связности соответствующего слоя расслоения i/p.

Ясно, что такого рода одномерный симплекс всегда можно построить.

Гомотопия k позволяет нам очевидным образом распространить гомотопию h до некоторой гомотопии $h'\colon \Delta[1]\times D'\to E$, являющейся композицией ретрагирующей деформации $\Delta[1]\times D'\to D'$ с морфизмом вложения $D'\to E$. Поскольку это противоречит максимальности пары (D, h), тем самым доказано, что $D = E$, т. е. что морфизм p' является деформационным ретрактом расслоения p относительно симплициального множества B. Но тогда этот морфизм обязательно является расслоением и, очевидно, минимальным.

Теорема полностью доказана.

5.3. Теорема. *Минимальные расслоения $p\colon E\to B$ и $p'\colon E'\to B$, имеющие один и тот же гомотопический тип относительно B, изоморфны относительно B.*

Доказательство. Пусть $u\colon E\to E'$ и $v\colon E'\to E$ — такие морфизмы симплициальных множеств над симплициальным множеством B, что морфизмы vu и uv гомотопны относительно B тождественным морфизмам $\mathrm{Id}\,E$ и $\mathrm{Id}\,E'$ соответственно. Согласно доказываемой ниже лемме 5.3.1, морфизмы vu и uv являются изоморфизмами относительно B. Но тогда изоморфизмами относительно B будут и морфизмы u и v.

5.3.1. Лемма. *Если расслоение $p\colon E\to B$ минимально, то любой морфизм $u\colon E\to E$, удовлетворяющий соотношению $pu = p$ и гомотопный относительно B тождественному морфизму $\mathrm{Id}\,E$, является изоморфизмом категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$.*

Доказательство. Согласно п. 4.2, симплициальное множество $\mathcal{H}om_B(p, p)$ полно. Следовательно, морфизм u тогда и только тогда гомотопен относительно B морфизму $\mathrm{Id}\,E$, когда существует такая гомотопия $h\colon \Delta[1]\times E\to E$, связывающая морфизмы u и $\mathrm{Id}\,E$, что $ph = p\circ \mathrm{pr}_2$, где $\mathrm{pr}_2\colon \Delta[1]\times E\to E$ — каноническая проекция.

Тот факт, что морфизм $u\colon E\to E$ является изоморфизмом категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, означает, что для любого n отображение $u_n\colon E_n\to E_n$ инъективно и надъективно. Полагая $E_{-1}=\varnothing$, мы видим, что при $n=-1$ это утверждение верно. Для доказательства его при любом $n\geqslant 0$ мы воспользуемся индукцией.

a) Пусть для каждого $r\leqslant n$ инъективность отображения u_r уже доказана. Рассмотрим симплексы $x, x'\in E_n$, для которых $u_n(x)=u_n(x')$. Мы должны доказать, что $x=x'$. Пусть $\widetilde{x}$ и $\widetilde{x}'$ — сингулярные симплексы, соответствующие симплексам x и x'. Тогда $p\circ\widetilde{x}=p\circ\widetilde{x}'$ и (по предположению индукции) $\widetilde{x}\,|_{\dot\Delta[n]}=\widetilde{x}'\,|_{\dot\Delta[n]}$. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Delta[1]\times\dot\Delta[n]\cup\{1\}\times\Delta[n] \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\Delta[1]\times\Delta[n] \arrow[ur, shift left, "h\circ(\mathrm{Id}\times\widetilde{x})"] \arrow[ur, shift right, "h\circ(\mathrm{Id}\times\widetilde{x}')"'] \arrow[r, "p\circ\widetilde{x}\circ\mathrm{pr}_2"] & B
\end{tikzcd}$$

где v — ограничение морфизмов $h\circ(\mathrm{Id}\times\widetilde{x})$ и $h\circ(\mathrm{Id}\times\widetilde{x}')$ на симплициальном множестве $\Delta[1]\times\dot\Delta[n]\cup\{1\}\times\Delta[n]$. Но отсюда, как мы знаем (см. п. 5.1), вытекает, что морфизмы $h\circ(\mathrm{Id}\times\widetilde{x})$ и $h\circ(\mathrm{Id}\times\widetilde{x}')$ совпадают на множестве $\{0\}\times\Delta[n]$. Следовательно, $\widetilde{x}=\widetilde{x}'$, и потому $x=x'$.

b) Пусть для каждого $r\leqslant n$ доказана также и надъективность отображения u_r, и пусть x — произвольный n-мерный симплекс симплициального множества E. Согласно предположению индукции, для любого i, $0\leqslant i\leqslant n$, в симплициальном множестве E существует такой $n-1$-мерный симплекс y_i, что $u_{n-1}(y_i)=d_i x$, причем, согласно уже доказанной инъективности, симплексы y определены этим условием однозначно. Рассмотрим морфизм $y\colon\dot\Delta[n]\to E$, определенный симплексами y_i.

По определению этот морфизм удовлетворяет соотношению $p\circ y=p\circ(\widetilde{x}\,|_{\dot\Delta[n]})$. Поэтому составной морфизм

$$\Delta[1]\times\dot\Delta[n]\xrightarrow{\mathrm{Id}\times y}\Delta[1]\times E\xrightarrow{h}E$$

совпадает на симплициальном множестве $\{1\}\times\Delta[n]$ с морфизмом

$$\{1\}\times\Delta[n]\xrightarrow{\approx}\Delta[n]\xrightarrow{\widetilde{x}}E.$$

Следовательно, морфизмы $h \circ (\mathrm{Id} \times y)$ и $\tilde{x}$ определяют некоторый морфизм

$$\varphi\colon \Delta[1] \times \dot{\Delta}[n] \cup \{1\} \times \Delta[n] \longrightarrow E.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Delta[1] \times \dot{\Delta}[n] \cup \{1\} \times \Delta[n] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\Delta[1] \times \Delta[n] \arrow[r, "p \circ \tilde{x} \circ \mathrm{pr}_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма коммутативна, и ее левый морфизм анодинен. Поэтому существует такой морфизм

$$\Phi\colon \Delta[1] \times \Delta[n] \longrightarrow E,$$

являющийся распространением морфизма φ, что $p \circ \Phi = p \circ \tilde{x} \circ \mathrm{pr}_2$. Пусть $\tilde{z}$ — сингулярный симплекс, являющийся ограничением морфизма Φ на симплициальном множестве $\{0\} \times \Delta[n] \approx \Delta[n]$, и пусть $z \in E_n$ — соответствующий симплекс симплициального множества E. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\Delta[1] \times \dot{\Delta}[n] \cup \{0\} \times \Delta[n] \arrow[r] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\Delta[1] \times \Delta[n] \arrow[r, "p \circ \tilde{x} \circ \mathrm{pr}_2"] \arrow[ur, shift left, "\Phi"] \arrow[ur, shift right, "h_0(\mathrm{Id} \times \tilde{z})"'] & B
\end{tikzcd}$$

и потому (см. п. 5.1) морфизмы Φ и $h \circ (\mathrm{Id} \times \tilde{z})$ совпадают на симплициальном множестве $\{1\} \times \Delta[n]$. Но это, очевидно, и означает, что $x = u_n(z)$. Таким образом, морфизм u_n надъективен.

Лемма 5.3.1 и вместе с ней теорема 5.3 полностью доказаны.

5.3.2. Следствие. *Минимальные расслоения, являющиеся деформационными ретрактами относительно B данного расслоения $p\colon E \to B$, изоморфны относительно B.*

5.4. Напомним (см. п. 4.1 гл. III), что морфизм $p\colon E \to B$ категории $\Delta^\circ\mathscr{E}n\mathfrak{s}$ называется *локально тривиальным*, если для любого $n \geqslant 0$ и любого n-мерного симплекса x симплициального множества B имеет место универсальный квадрат вида

$$\begin{tikzcd}
F \times \Delta[n] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\Delta[n] \arrow[r, "\tilde{x}"] & B
\end{tikzcd}$$

где F — некоторое симплициальное множество, изоморфное слою морфизма p над произвольной вершиной симплекса x. Ясно, что с точностью до изоморфизма слой локально тривиального морфизма p над произвольной вершиной b симплициального множества B зависит только от компоненты связности этой вершины.

Теорема. *Каждое минимальное расслоение локально тривиально.*

Доказательство. Согласно свойству 5.1.1, для любого симплекса x симплициального множества B коамальгама $\Delta[n] \underset{x,p}{\widetilde{\times}} E$ минимальна над стандартным симплексом $\Delta[n]$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что любое минимальное расслоение $E \to \Delta[n]$ тривиально, т. е. изоморфно относительно $\Delta[n]$ произведению $\Delta[n] \times F$ (см. п. 4.1 гл. III).

Пусть f — тождественный морфизм стандартного симплекса $\Delta[n]$, а g — морфизм $\Delta[n] \to \Delta[n]$, индуцированный отображением $[n] \to [n]$, переводящим все множество $[n]$ в элемент 0. Легко видеть, что морфизмы f и g гомотопны (они связаны, например, гомотопией $C(v_n^0)$; см. п. 2.1.3 гл. IV). Поэтому (см. ниже предложение 5.4.1) коамальгамы $\Delta[n] \underset{f,p}{\times} E$ и $\Delta[n] \underset{g,p}{\times} E$ изоморфны относительно $\Delta[n]$. Но первая из этих коамальгам совпадает, очевидно, с множеством E, а вторая является произведением $\Delta[n] \times F$, где F — слой морфизма p над вершиной $[0] \to [n]$ симплекса $\Delta[n]$. Тем самым теорема полностью доказана.

5.4.1. Предложение. *Если расслоение $p: E \to B$ минимально, то для любых двух гомотопных морфизмов $f, g: A \to B$ минимальные расслоения $A \underset{f,p}{\times} E \to A$ и $A \underset{g,p}{\times} E \to A$ изоморфны относительно A.*

Доказательство. Без ограничения общности можно, очевидно, предполагать, что морфизмы f и g связаны некоторой простой гомотопией h. Имея это в виду, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \underset{f,p}{\times} E \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "q_0"'] & (\Delta[1] \times A) \underset{h,p}{\times} E \arrow[d, "q"'] & A \underset{g,p}{\times} E \arrow[l, "j_1"'] \arrow[d, "q_1"] \\
A \arrow[r, "i_0"] & \Delta[1] \times A & A \arrow[l, "i_1"']
\end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой являются каноническими проекциями, а морфизмы i_0, j_0 (соответственно морфизмы i_1, j_1) индуцированы морфизмом $\Delta(\partial_1^1) \times A : \Delta[0] \times A \to \Delta[1] \times A$ (соответственно морфизмом $\Delta(\partial_1^0) \times A : \Delta[0] \times A \to \Delta[1] \times A$). Пусть, далее, h_0 (соответственно h_1) — гомотопия, связывающая морфизм $\Delta(\partial_1^1 \circ \sigma_0^0)$ с тождественным морфизмом $\mathrm{Id}\,\Delta[1]$ симплициального множества $\Delta[1]$ (соответственно тождественный морфизм $\mathrm{Id}\,\Delta[1]$ с морфизмом $\Delta(\partial_1^0 \circ \sigma_0^0)$; см. п. 2.1 гл. II. Согласно доказываемой ниже лемме 5.4.2, существует такая гомотопия k_0 (гомотопия k_1), связывающая морфизм $j_0 r_0$, где r_0 — некоторая ретракция морфизма j_0 (являющегося, очевидно, мономорфизмом), с тождественным морфизмом симплициального множества $(\Delta[1] \times A) \underset{h,p}{\times} E$ (соответственно тождественный морфизм симплициального множества $(\Delta[1] \times A) \underset{h,p}{\times} E$ с морфизмом $j_1 r_1$, где r_1 — некоторая ретракция морфизма j_1, также являющегося мономорфизмом), что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{CD} \Delta[1] \times E' @>{k_0}>> E' \\ @V{\Delta[1]\times q}VV @VV{q}V \\ \Delta[1] \times B' @>{k_0 \times A}>> B' \end{CD}$$

(соответственно коммутативная диаграмма

$$\begin{CD} \Delta[1] \times E' @>{k_1}>> E' \\ @V{\Delta[1]\times q}VV @VV{q}V \\ \Delta[1] \times B' @>{k_1 \times A}>> B' \end{CD} \qquad);$$

для упрощения записи в этих диаграммах обозначено $E' = (\Delta[1] \times \times A) \underset{h,p}{\times} E$ и $B' = \Delta[1] \times A$. Очевидным образом отсюда следует, что морфизмы $r_1 j_0$ и $r_0 j_1$ определяют взаимно обратные изоморфизмы категории симплициальных множеств над симплициальным множеством A по модулю гомотопии (п. 4.2.1). Следовательно, морфизмы q_0 и q_1 имеют относительно A один и тот же гомотопический тип. Но тогда, согласно теореме 5. 3, эти морфизмы (являющиеся, очевидно, минимальными расслоениями) изоморфны относительно A.

5.4.2. Лемма. *Пусть $p: E \to B$ — произвольное расслоение, $j: A \to B$ — произвольный мономорфизм (категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$) и $q: B \to A$ — некоторая ретракция мономорфизма j. Тогда для любой гомотопии h, связывающей тождественный морфизм* $\mathrm{Id}\,B$ *симплициального множества B с морфизмом jq (или морфизм jq с морфизмом* $\mathrm{Id}\,B$*), существует такая гомотопия k, связывающая морфизм* $\mathrm{Id}\,E$ *с морфизмом вида* $(\mathrm{pr}_2) \circ r$, *где* pr_2 *— каноническая проекция* $A \underset{j,p}{\times} E \to E$, *а r — некоторая ее ретракция (или соответственно морфизм* $(\mathrm{pr}_2)\circ r$ *с морфизмом* $\mathrm{Id}\,E$*), что имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Delta[1]\times E & \xrightarrow{k} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta[1]\times p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta[1]\times B & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Доказательство. Искомая гомотопия k (мы ограничиваемся случаем гомотопии h, связывающей морфизм $\mathrm{Id}\,B$ с морфизмом jq; случай гомотопии h, связывающей морфизм jq с морфизмом $\mathrm{Id}\,B$, рассматривается аналогично) представляет собой одномерный симплекс симплициального множества $\mathcal{H}om(E, E)$, начальной вершиной которого служит тождественный морфизм $\mathrm{Id}\,E$ и который морфизмом $\mathcal{H}om(\mathrm{pr}_2, E)$ отображается в композицию

$$a\colon \Delta[1]\times(A\underset{j,p}{\times}E)\xrightarrow{\text{канон.}}A\underset{j,p}{\times}E\xrightarrow{\mathrm{pr}_2}E,$$

а морфизмом $\mathcal{H}om(E, p)$ — в композицию

$$b\colon \Delta[1]\times E\xrightarrow{\Delta[1]\times p}\Delta[1]\times B\xrightarrow{h}B.$$

Иными словами, гомотопия k представляет собой одномерный симплекс симплициального множества $\mathcal{H}om(E, E')$, «начинающийся» в вершине $\mathrm{Id}\,E$ и переходящий при морфизме $\mathrm{pr}_2/p\colon \mathcal{H}om(E, E)\to$ $\to\mathcal{H}om(\mathrm{pr}_2, p)$ в одномерный симплекс (a, b) симплициального множества $\mathcal{H}om(\mathrm{pr}_2, p)$. Но, согласно предложению 4.3, морфизм pr_2/p является в нашем случае расслоением (ибо морфизм pr_2 является, очевидно, мономорфизмом). Поэтому такого рода одномерный симплекс всегда существует.

5.4.3. Следствие. *Все слои произвольного расслоения со связной базой B имеют один и тот же гомотопический тип (являются изоморфными объектами категории* $\overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$*).*

Доказательство немедленно вытекает из сопоставления теорем 5.4 и 5.2.

5.5. Морфизм φ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ (или категории $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$) мы будем называть *представителем* морфизма f категории $\mathcal{H}$ (соответственно категории $.\mathcal{H}$), если образ морфизма φ в категории $\mathcal{H}$ (категории $.\mathcal{H}$) изоморфен морфизму f. Ясно, что любой морфизм f категории $\mathcal{H}$ (категории $.\mathcal{H}$) обладает хотя бы одним представителем в категории $\Delta^\circ\mathscr{E}n\ell$ (в категории $.\Delta^\circ\mathscr{E}n\ell$). Действительно, морфизм f определяется диаграммой вида

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "\varphi"'] & y \arrow[d, "\sigma"] \\ & y' \end{tikzcd}$$

с анодинным морфизмом σ (см. п. 2.3 гл. I) и потому его образ в категории $\mathscr{H}$ изоморфен образу морфизма φ (поскольку образ морфизма σ в категории $\mathscr{H}$ по определению является изоморфизмом).

Теорема. *Для любого морфизма f категории $\mathscr{H}$ (категории $.\mathscr{H}$) существует представитель, являющийся минимальным расслоением.*

Доказательство. Докажем сначала

5.5.1. Предложение. *Для любого морфизма $p\colon E \to B$ категории $\Delta^\circ\mathscr{E}n\ell$ существует коммутативный треугольник*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

в котором морфизм a анодинен, а морфизм p' является расслоением.

Доказательство. Называя *p-колпачками* четверки, $\gamma = (n(\gamma), k(\gamma), u(\gamma), v(\gamma))$, состоящие из целого числа $n(\gamma) \geqslant 1$, целого неотрицательного числа $k(\gamma) \leqslant n(\gamma)$ и морфизмов $u(\gamma)\colon \Lambda h\,[n(\gamma)] \to E$ и $v(\gamma)\colon \Delta\,[n(\gamma)] \to B$ категории $\Delta^\circ\mathscr{E}n\ell$, для которых имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{k(\gamma)}\,[n(\gamma)] \arrow[r, "u(\gamma)"] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta\,[n(\gamma)] \arrow[r, "v(\gamma)"] & B \end{tikzcd}$$

рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\gamma} \Lambda^{k(\gamma)}[n(\gamma)] \arrow[r, "u(p)"] \arrow[d, "\text{влож.}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \coprod\limits_{\gamma} \Delta\,[n(\gamma)] \arrow[r, "v(p)"] & B \end{tikzcd}$$

где γ пробегает всевозможные p-колпачки, а $u(p)$ и $v(p)$ представляют собой морфизмы с компонентами $u(\gamma)$ и $v(\gamma)$ соответственно. Пусть E_1^p — амальгама диаграммы

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\gamma} \Lambda^{k(\gamma)}[n(\gamma)] \arrow[r, "u(p)"] \arrow[d] & E \\ \coprod\limits_{\gamma} \Delta\,[n(\gamma)] & \end{tikzcd}$$

Тогда определен морфизм

$$\pi_1(p): E_1^p \to B$$

с компонентами $v(p)$ и p. Кроме того, имеет место канонический морфизм

$$w(p): E \to E_1^p,$$

являющийся, очевидно, анодинным морфизмом (поскольку анодинным морфизмом является вложение $\bigsqcup_\gamma \Lambda^{k(\gamma)}[n(\gamma)] \to \bigsqcup_\gamma \Delta[n(\gamma)]$).

Положив теперь

$$\pi_{n+1}(p) = \pi_1(\pi_n(p)), \qquad n \geqslant 1,$$

и

$$E_{n+1}^p = (E_n^p)_1^{\pi_n(p)}, \qquad n \geqslant 1,$$

мы, очевидно, получим над категорией $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "w(p)"] \arrow[drr, "p"'] & E_1^p \arrow[r, "w(\pi_1(p))"] \arrow[dr, "\pi_1(p)"] & E_2^p \arrow[r, "w(\pi_2(p))"] \arrow[d, "\pi_2(p)"] & E_3^p \arrow[r] \arrow[dl, "\pi_3(p)"] & \cdots \\ & & B & & \end{tikzcd}$$

все горизонтальные морфизмы которой анодинны. Пусть E_∞^p — прямой предел симплициальных множеств E_n^p, и пусть $w_\infty(p): E \to E_\infty^p$ и $\pi_\infty(p): E_\infty^p \to B$ — морфизмы, индуцированные соответственно морфизмами $w(\pi_n(p))$ и $\pi_n(p)$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "w_\infty(p)"] \arrow[dr, "p"'] & & E_\infty^p \arrow[dl, "\pi_\infty(p)"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

При этом, поскольку морфизмы $w(\pi_n(p))$ анодинны, морфизм $w_\infty(p)$ также анодинен. Кроме того, ясно, что морфизм $\pi_\infty(p)$ является расслоением (поскольку расслоениями являются все морфизмы $\pi_n(p)$; см. аналогичное рассуждение в конце доказательства теоремы 3.2 гл. IV). Тем самым предложение 5.5.1 полностью доказано.

5.5.2. Для доказательства теоремы 5.5 (в случае категории $\mathcal{K}$) теперь остается лишь заметить, что в предусмотренном предложением 5.5.1 коммутативном треугольнике расслоение p' можно, согласно теореме 5.2, сделать минимальным. При этом морфизм a хотя и перестанет быть анодинным, но по-прежнему будет определять изоморфизм категории $\mathscr{H}$.

Чтобы аналогичным образом доказать теорему 5.5 для категории $\cdot\mathscr{H}$, необходимо перенести теорему 5.2 на случай расслоений p, сохраняющих отмеченные вершины. Этот перенос осуществляется автоматически: нужно лишь проследить, чтобы отмеченная вершина e_0 симплициального множества E оказалась среди симплексов, «отмеченных» в смысле п. 5.2. Действительно, тогда построенная при доказательстве теоремы 5.2 ретрагирующая деформация будет сохранять отмеченные вершины.

5.6. Полное симплициальное множество A называется *минимальным*, если морфизм $A \to \Delta[0]$ является минимальным расслоением.

Лемма. *Каждое пунктированное полное минимальное симплициальное множество A, для которого все группы $\pi_n A$, $n \geqslant 0$, тривиальны (состоят лишь из одного элемента), изоморфно симплициальной точке $\Delta[0]$.*

Доказательство. Проведем индукцию по остовам $\mathrm{Sk}^n A$ симплициального множества A. Ясно, что $\mathrm{Sk}^{-1} A \approx \mathrm{Sk}^{-1} \Delta[0]$. Пусть уже доказано, что для любого $r < n$ имеет место изоморфизм $\mathrm{Sk}^r A \approx \mathrm{Sk}^r \Delta[0]$. Покажем, что тогда и $\mathrm{Sk}^n A \approx \mathrm{Sk}^n \Delta[0]$. Если это не так, то в симплициальном множестве A существует хотя бы один невырожденный n-мерный симплекс x. Пусть $\tilde{x}: \Delta[n] \to \to A$ — сингулярный симплекс, соответствующий симплексу x. Этот симплекс отображает симплициальное множество $\dot{\Delta}[n]$ в симплициальное множество $\mathrm{Sk}^{n-1} A$, содержащееся в силу предположения индукции в симплициальном подмножестве $\{a\}$, порожденном отмеченной вершиной a симплициального множества A. Поэтому сингулярный симплекс $\tilde{x}$ разлагается в композицию морфизмов

$$\Delta[n] \xrightarrow{\text{кан.}} \Delta[n]/\dot{\Delta}[n] \xrightarrow{y} A.$$

Возникающий таким образом морфизм y в силу канонической биекции

$$\cdot\mathscr{H}(\Delta[n]/\dot{\Delta}[n],\ A) \approx \pi_n A$$

(см. п. 3.4) определяет некоторый элемент группы $\pi_n A$. Поскольку эта группа тривиальна, морфизм y должен быть гомотопен нулевому морфизму (относительно отмеченных вершин симплициальных множеств $\Delta[n]/\dot{\Delta}[n]$ и A). Но тогда симплекс $\tilde{x}$ будет, очевидно, $\Delta[0]$-эквивалентен нулевому морфизму и, следовательно, в силу минимальности симплициального множества A сам будет нулевым морфизмом. Поэтому симплекс x будет вопреки предположению вырожденным симплексом.

5.6.1 Теорема (Уайтхед). *Морфизм $f: X \to Y$ пунктированной гомотопической категории $\mathcal{H}$ между связными симплициальными множествами X и Y тогда и только тогда является изоморфизмом, когда для любого $n \geqslant 1$ изоморфизмом является гомоморфизм $\pi_n f: \pi_n X \to \pi_n Y$.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. При доказательстве достаточности мы можем заменить морфизм f любым изоморфным ему морфизмом g. Поэтому ввиду теоремы 5.5 мы можем считать симплициальные множества X и Y полными, а морфизм f — минимальным расслоением. Пусть A — слой расслоения f. В силу условия теоремы из точности гомотопической последовательности

$$\ldots \to \pi_{n+1}X \to \pi_n Y \to \pi_n A \to \pi_n X \to \pi_n Y \to \ldots$$

расслоения f (см. п. 3.3) непосредственно вытекает, что симплициальное множество A (очевидно, полное и минимальное) удовлетворяет условиям леммы 5.6 и потому изоморфно (в категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$) симплициальной точке $\Delta[0]$. Но тогда расслоение f, будучи минимальным и потому локально тривиальным, является, очевидно, изоморфизмом (категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$, а потому и категории $\mathcal{H}$).

Глава VII

КОМБИНАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КАТЕГОРИИ

1.1. Топологические пространства мы будем в этой главе обозначать символами $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ и т. п. Симплициальное множество, компонентами которого являются множества $\mathcal{T}op(\Delta^n \times \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, мы будем обозначать символом $\mathcal{H}om(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ (ср. п. 7.1 гл. V). Множество компонент связности этого симплициального множества мы будем обозначать символом $\pi_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$. Аналогично п. 7.1 гл. V определены морфизмы компонирования

$$\nu_{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}}: \mathcal{H}om(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \times \mathcal{H}om(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) \to \mathcal{H}om\,(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}),$$

индуцирующие некоторые отображения

$$\varphi_{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}}: \pi_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \times \pi_0(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) \to \pi_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}).$$

Это позволяет нам ввести в рассмотрение *категорию* $\overline{\mathcal{T}op}$ *топологических пространств по модулю гомотопии*, объектами которой являются топологические пространства, а морфизмами — элементы множеств $\pi_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

1.2. Поскольку построенные в п. 1.4 гл. III функторы

$$S: \mathcal{T}op \to \Delta^\circ \mathcal{E}ns, \quad |\,?\,|: \Delta^\circ \mathcal{E}ns \to \mathcal{T}op$$

сопряжены, для любого симплициального множества X, любого топологического пространства $\boldsymbol{Y}$ и любого целого числа n имеет место естественный изоморфизм

$$(*) \qquad \mathcal{T}op(|\Delta[n] \times X|, \boldsymbol{Y}) \approx \Delta^\circ \mathcal{E}ns(\Delta[n] \times X, S\boldsymbol{Y}),$$

а потому и естественный изоморфизм

$$\mathcal{T}op(\Delta^n \times |X|, \boldsymbol{Y}) \approx \Delta^\circ \mathcal{E}ns(\Delta[n] \times X, S\boldsymbol{Y})$$

(ибо пространство $|\Delta[n]| = \Delta^n$ компактно и, следовательно, пространства $|\Delta[n] \times X|$ и $\Delta^n \times |X|$ естественно гомеоморфны; см. п. 3.1 гл. III и п. 2.1.1). Эти изоморфизмы составляют естественный изоморфизм

$$(**) \qquad \mathcal{H}om(|X|, \boldsymbol{Y}) \approx \mathcal{H}om(X, S\boldsymbol{Y}),$$

который в свою очередь индуцирует изоморфизм множеств компонент связности

$$\overline{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \approx \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}(X, SY).$$

Теперь легко видеть (ср. п. 1.5 гл. IV), что

функтор геометрической реализации $|\,?\,|$ *индуцирует «после факторизации» некоторый функтор*

$$\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns} \to \overline{\mathcal{T}op},$$

а сингулярный функтор S — *некоторый функтор*

$$\overline{\mathcal{T}op} \to \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}.$$

Эти функторы мы будем обозначать прежними символами $|\,?\,|$ и S и будем их по-прежнему называть *функтором геометрической реализации* и *сингулярным функтором* соответственно. Построенный выше изоморфизм показывает, что

функтор $S\colon \overline{\mathcal{T}op} \to \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}$ *сопряжен справа с функтором*

$$|\,?\,|\colon \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns} \to \overline{\mathcal{T}op}.$$

1.3. Ниже мы покажем (см. п. 1.6 и 1.7), что геометрическая реализация $|j|$ произвольного анодинного морфизма j категории $\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}$ является изоморфизмом категории $\overline{\mathcal{T}op}$. Отсюда следует, что функтор $|\,?\,|\colon \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns} \to \overline{\mathcal{T}op}$ может быть разложен в композицию канонического функтора $P_{\overline{\mathrm{A}}}\colon \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns} \to \mathcal{H}$ (см. п. 2.3.1 гл. IV) и некоторого функтора

$$\|\,?\,\|\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{T}op},$$

который мы также будем называть *функтором геометрической реализации*. Согласно лемме 1.3.1 гл. I, этот функтор сопряжен слева с функтором $\mathcal{S} = P_{\overline{\mathrm{A}}} \circ S$, который мы по-прежнему будем называть *сингулярным функтором*.

Основная теорема (Милнор). *Функтор геометрической реализации*

$$\|\,?\,\|\colon \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{T}op}$$

вполне инъективен.

Мы докажем эту теорему в § 3. Из нее, согласно предложению 1.3 гл. I, следует, что функтор $\mathcal{S}$ индуцирует эквивалентность некоторой категории частных категории $\overline{\mathcal{T}op}$ и категории $\mathcal{H}$. Принимая во внимание также теорему 3.2.1 гл. IV, мы, таким образом, окончательно получаем, что

Следующие категории эквивалентны:

1) *гомотопическая категория* $\mathcal{H}$;

2) *категория полных симплициальных множеств по модулю гомотопии;*

3) *полная подкатегория категории* $\overline{\mathcal{T}op}$, *порожденная топологическими пространствами, изоморфными (в категории* $\overline{\mathcal{T}op}$) *геометрическим реализациям симплициальных множеств;*

4) *определенная функтором* $\mathcal{S}$ *категория частных категории* $\overline{\mathcal{T}op}$.

1.4. Напомним, что непрерывное отображение $p: X \to B$ называется *расслоением* (в смысле Серра), если для любого целого $n \geqslant 1$ и любых двух непрерывных отображений

$$f: I^n \to B, \qquad g: I^{n-1} \times \{0\} \to X$$

(где I — единичный интервал $[0,1]$), связанных соотношением

$$p \circ g = f|_{I^{n-1} \times \{0\}},$$

существует такое непрерывное отображение $h: I^n \to X$, что

$$g = h|_{I^{n-1} \times \{0\}}, \; f = p \circ h.$$

Это понятие расслоения имеет по отношению к базе B «локальный характер», т. е.

если для непрерывного отображения $p: X \to B$ *каждая точка пространства* B *обладает такой открытой окрестностью* U, *что индуцированное отображением* p *непрерывное отображение* $p^{-1}(U) \to U$ *является расслоением, то само отображение* p *также представляет собой расслоение.*

Действительно, для любых отображений f и g указанного выше вида мы можем куб I^n подразделить на столь малые кубы, чтобы отображение f переводило каждый из этих кубов в открытое множество $U \subset B$, для которого отображение $p^{-1}(U) \to U$ является расслоением. Тогда требуемое распространение h отображения g мы можем построить, шаг за шагом распространяя отображение g на кубы этого подразделения.

Ясно, что если пространства X и B каонны (п. 1.5.3 гл. I), то любой тривиальный (см. п. 4.1 гл. III) морфизм $p: X \to B$ является расслоением. В силу локального характера понятия расслоения отсюда немедленно вытекает, что расслоением является и любой локально тривиальный морфизм каонных пространств. В частности (см. п. 5.4 гл. IV и п. 4.2 гл. II), *для каждого локально тривиального морфизма* $q: X \to B$ *категории* $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ *отображение*

$$|q|: |X| \to |B|$$

является расслоением.

1.5. С другой стороны,

для любого расслоения $p: X \to B$ *морфизм*

$$Sp: SX \to SB$$

категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ *является расслоением* (в смысле Кана; см. п. 3.1 гл. IV).

Действительно, рассмотрим над категорией $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ произвольную коммутативную диаграмму вида

$$\begin{CD} \Lambda^k[n] @>e>> SX \\ @V\text{влож.}VV @VVSpV \\ \Delta[n] @>x>> SB \end{CD}$$

Нам достаточно доказать (см. п. 3.1 гл. IV), что для любой такой диаграммы в категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ существует морфизм $r: \Delta[n] \to SX$, удовлетворющий соотношениям

$$r|_{\Lambda^k[n]} = e, \qquad x = (Sp)\circ r.$$

С этой целью мы рассмотрим над категорией $\mathcal{T}op$ соответствующую (в силу сопряженности функторов $|\ ?\ |$ и S) коммутативную диаграмму

$$\begin{CD} |\Lambda^k[n]| @>f>> X \\ @V|\text{влож.}|VV @VVpV \\ |\Delta[n]| @>y>> B \end{CD}$$

Поскольку непрерывное отображение p является по условию расслоением и поскольку непрерывное отображение $|\text{влож.}|$ изоморфно, очевидно, отображению вложения $I^{n-1} \times \{0\} \to I^n$ (см. п. 4.1 гл. VI), существует такое непрерывное отображение $s: |\Delta[n]| \to X$, что $s\circ|\text{влож.}| = f$ и $p\circ s = y$. Но тогда соответствующий отображению s морфизм $r: \Delta[n] \to SX$ будет, очевидно, обладать всеми требуемыми свойствами.

1.6. В случае когда пространство B состоит только из одной точки, ясно, что для любого пространства X однозначно определенное отображение $X \to B$ является расслоением. Поскольку в этом случае симплициальное множество SB является симплициальной точкой $\Delta[0]$, мы в качестве следствия только что доказанного утверждения немедленно получаем, что

сингулярное симплициальное множество SX произвольного топологического пространства X является полным симплициальным множеством.

Пусть теперь $j: K \to L$ — произвольный анодинный морфизм категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$. Согласно следствию 3.1.5 гл. IV и только что доказанному утверждению, для любого топологического пространства X морфизм

$$\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}(j, SX): \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}(L, SX) \to \overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}(K, SX)$$

категории $\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}ns}$ обратим. Но тогда обратим и морфизм $\overline{\mathcal{T}op}(|j|, X)$. Следовательно, как и утверждалось выше,

геометрическая реализация $|j|$ произвольного анодинного морфизма j категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ является обратимым морфизмом в $\overline{\mathcal{T}op}$.

1.7. Обратимость морфизмов $|j|$ можно доказать и другим более «геометричным» способом. Именно, пусть E — подмножество множества $\mathcal{A}r\mathcal{T}op$, состоящее из всех непрерывных отображений $i: A \to B$, обладающих следующими свойствами:

a) отображение i является гомеоморфизмом пространства A на некоторое подпространство пространства B;

b) подпространство $i(A)$ пространства B является его деформационным ретрактом (т. е. существует такое непрерывное отображение $h: [\alpha, \beta] \times B \to B$, где $[\alpha, \beta]$ — некоторый отрезок действительной оси, что

$$\left.\begin{aligned} &h(\alpha, b) \in i(A), \\ &h(\beta, b) = b, \end{aligned}\right\} \text{для любой точки } b \in B,$$

$$h(t, i(a)) = i(a) \qquad \text{для любого } t \in [\alpha, \beta] \text{ и любой точки } a \in A).$$

Ясно, что все морфизмы множества E обратимы в категории $\overline{\mathcal{T}op}$. Поэтому нам достаточно доказать, что для любого анодинного морфизма j категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$ отображение $|j|$ принадлежит множеству E.

Но ясно, что для любых n и k геометрическая реализация морфизма вложения $\Lambda^k[n] \to \Delta[n]$ принадлежит множеству E. Поэтому для доказательства включения $|j| \in E$ достаточно доказать, что множество E *насыщенно*, т. е. оно содержит все гомеоморфизмы, инвариантно относительно амальгам, вместе с некоторым морфизмом содержит все его ретракции и замкнуто относительно операций счетной композиции и прямой суммы (ср. п. 2.1 гл. IV).

Мы ограничимся доказательством замкнутости множества E относительно операции счетной композиции, оставляя проверку остальных перечисленных свойств читателю.

Пусть $i_n: X_{n-1} \to X_n$ — произвольная последовательность морфизмов множества E. Ясно, что без ограничения общности мы можем считать эти морфизмы вложениями, так что будет иметь место последовательность вложенных друг в друга топологических пространств

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \ldots X = \varinjlim X_n,$$

каждый член которой является деформационным ретрактом следующего. Мы должны доказать, что в этих условиях пространство X_0 является деформационным ретрактом пространства $X = \varinjlim X_n$.

Тот факт, что подпространство X_{n-1} является деформационным ретрактом пространства X_n, означает, что существует непрерывное отображение $h_n: \left[1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n+1}\right] \times X_n \to X_n$, обладающее указанными выше свойствами. В частности, для любой точки $x \in X_n$ точка $j_n(x) = h_n\left(1-\frac{1}{n},\ x\right)$ принадлежит подпространству X_{n-1}. Определим отображение $H_n: [0, 1] \times X_n \to X_n$, полагая

$$H_n(t, \cdot) = \begin{cases} x, & \text{если } t > 1 - \frac{1}{n+1}, \\ h_{n-p}(t, j_{n-p+1} \circ \ldots \circ j_n(x)), & \text{если } 1 - \frac{1}{n-p} \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{n-p+1}. \end{cases}$$

Легко цеть, что отображения H_n определяют некоторое непрерывное отображение H: $[0, 1] \times X \to X$, которое и будет по отношению к вложению $X_0 \to X$ отображением h, предусмотренным пунктом b) сформулированного выше определения.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПУНКТИРОВАННОЙ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КАТЕГОРИИ

2.1. Введем в рассмотрение функтор

$$.S: .\mathcal{T}op \to .\Delta^\circ \mathcal{E}ns,$$

определенный для произвольного пунктированного топологического пространства (X, x_0) формулой

$$.S(X, x_0) = (SX, x_0'),$$

где x_0' — каноническое отображение $\Delta^0 \to X$, образом которого является точка x_0 (и которое рассматривается как нульмерный симплекс симплициального множества SX). Аналогично определим функтор

$$.|\ ?\ |: .\Delta^\circ \mathcal{E}ns \to .\mathcal{T}op,$$

полагая для любого пунктированного симплициального множества (T, t_0)

$$.|T, t_0| = (|T|, t'_0),$$

где t'_0 — образ отображения $|\widetilde{t}_0|: \Delta^0 \to |T|$, отвечающего сингулярному симплексу $\widetilde{t}_0$: $\Delta[0] \to T$.

Функторы $.S$ и $.|\,?\,|$ мы по-прежнему будем называть *сингулярным функтором* и *функтором геометрической реализации*.

Ясно, что биекция

$$\mathcal{T}op(|T|, X) \approx \Delta^\circ \mathcal{E}ns(T, SX)$$

индуцирует биективное отображение подмножества $.\mathcal{T}op(.|T|, X)$ множества $\mathcal{T}op(|T|, X)$ на подмножество $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns(T, .SX)$ множества $\Delta^\circ\mathcal{E}ns(T, SX)$. Таким образом,

функтор $.|\,?\,|$ *сопряжен слева с функтором* $.S$.

2.2. Для любых пунктированных топологических пространств (Z, z_0) и (Y, y_0) мы будем символом $\mathcal{H}om.(Z, Y)$ обозначать симплициальное подмножество симплициального множества $\mathcal{H}om(Z, Y)$ (см. п. 1.1), состоящее из непрерывных отображений $f: \Delta^n \times Z \to Y$, переводящих подмножество $\Delta^n \times \{z_0\}$ в точку y_0 (ср. п. 7.1 гл. V). Ясно, что для любого пунктированного симплициального множества (X, x_0) построенный в п. 1.2 изоморфизм (**) индуцирует некоторый изоморфизм

$$\mathcal{H}om\,.(.|X|, Y) \approx \mathcal{H}om\,.(X, .SY),$$

а потому (после перехода к компонентам связности) — изоморфизм

$$|\,.|X|, Y| \approx |X, .SY|.$$

(Мы используем здесь обозначения гл. V; в п. 4.2 гл. IV множество $|X, .SY|$ обозначалось символом $\pi_0^\bullet(X, .SY)$). Следовательно, функтор геометрической реализации определяет некоторый функтор из категории $\overline{.\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$ в категорию $\overline{.\mathcal{T}op}$ пунктированных топологических пространств по модулю гомотопии (в п. 7.2 гл. V последняя категория обозначалась символом $.\mathfrak{Top}$). Этот функтор мы по-прежнему будем обозначать символом $\overline{.|\,?\,|}$. Аналогично функтор $.S$ определяет некоторый функтор $.S: \overline{\mathcal{T}op} \to \overline{\Delta^\circ\mathcal{E}ns}$, сопряженный справа с функтором $.|\,?\,|$.

2.3. Согласно п. 1.6, для любого пунктированного топологического пространства Y пунктированное симплициальное множество $.SY$ полно. Поэтому это симплициальное множество замкнуто слева по отношению к множеству $.\bar{A}$ анодинных морфизмов категории $.\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell}$ (см. п. 4.3 гл. IV). Отсюда, как и в п. 1.6, непосредственно вытекает, что геометрическая реализация произвольного анодинного морфизма категории $.\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell}$ является обратимым морфизмом категории $.\overline{\mathcal{T}op}$ и потому функтор $.\overline{|\,?\,|}$ разлагается в композицию канонического функтора $P_{.\mathfrak{X}}\colon .\overline{\Delta^\circ \mathcal{E}n\ell} \to .\mathcal{H}$ и некоторого функтора

$$.\|?\|\colon .\mathcal{H} \to .\overline{\mathcal{T}op},$$

который мы по-прежнему будем называть *функтором геометрической реализации.* Согласно п. 1.3.1 гл. I, этот функтор сопряжен слева с сингулярным функтором $.\mathcal{S} = P_{.\mathfrak{X}} \circ .\mathcal{S}$.

Основная теорема (Милнор). *Функтор геометрической реализации*

$$.\|?\|\colon .\mathcal{H} \to .\overline{\mathcal{T}op}$$

вполне инъективен.

Мы докажем эту теорему в § 3. Из нее немедленно вытекает (ср. п. 1.3), что

Следующие категории эквивалентны:

1) *пунктированная гомотопическая категория $.\mathcal{H}$;*

2) *категория полных пунктированных симплициальных множеств по модулю гомотопии;*

3) *полная подкатегория категории $.\overline{\mathcal{T}op}$, порожденная пунктированными топологическими пространствами, изоморфными (в категории $.\overline{\mathcal{T}op}$) геометрическим реализациям пунктированных симплициальных множеств;*

4) *определенная функтором $.\mathcal{S}$ категория частных категории $.\overline{\mathcal{T}op}$.*

2.4. Пусть пунктированное симплициальное множество (T, t_0) обладает тем свойством, что его геометрическая реализация $|T|$ является локально компактным пространством. Тогда, согласно предложению 2.1.1 гл. III и теореме 3.1 гл. III, для любого пунктированного симплициального множества (Z, z_0) каноническое отображение пространства $|Z \times T|$ на топологическое произведение $|Z| \times |T|$ пространств $|Z|$ и $|T|$ является гомеоморфизмом. Более того, будучи перестановочен с прямыми пределами, функтор геометрической реализации переводит коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{t_0\} \cup \{z_0\} \times T & \longrightarrow & Z \times T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[0] & \longrightarrow & Z \wedge T \end{array}$$

над категорией $.\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ в коуниверсальный квадрат над категорией $.\mathcal{T}op$. Следовательно,

пространство $|Z \wedge T|$ *канонически гомеоморфно пространству* $|Z| \wedge |T|$ *(конечно, лишь при сделанном выше предположении, что пространство* $|T|$ *локально компактно).*

Рассмотрим теперь для произвольного морфизма $f: X \to Y$ пунктированных симплициальных множеств построенный в п. 2. 1 гл. VI коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle if} \\ \Delta[1] \wedge X & \longrightarrow & Cf. \end{array}$$

Функтор геометрической реализации переводит этот квадрат снова в коуниверсальный квадрат. С другой стороны, по только что доказанному $|\Delta[1] \wedge X| = I \wedge |X|$. Поэтому $|Cf| = C|f|$ (см. п. 7.3 гл. V). Аналогичным образом без труда показывается, что

вся бесконечная последовательность

$$|X| \xrightarrow{|f|} |Y| \xrightarrow{|if|} |Cf| \xrightarrow{|jf|} |\Sigma X| \xrightarrow{|\Sigma f|} |\Sigma Y| \to \cdots$$

совпадает с последовательностью

$$|X| \xrightarrow{|f|} |Y| \xrightarrow{i|f|} C|f| \xrightarrow{j|f|} \Sigma|X| \xrightarrow{\Sigma|f|} \Sigma|Y| \to \cdots.$$

2.5. Используя сингулярный функтор $.\mathcal{S}$, мы для любого пунктированного топологического пространства $\boldsymbol{T}$ определим его *гомотопические группы* $\pi_n\boldsymbol{T}$ формулой

$$\pi_n\boldsymbol{T} = \pi_n(.\mathcal{S}\boldsymbol{T}).$$

Обозначая символом S^n сферу размерности n, мы, согласно п. 3.2 гл. VI, немедленно получаем, что имеют место изоморфизмы

$$\pi_n\boldsymbol{T} = .\mathscr{H}(\Sigma^n\dot{\Delta}[1],\ .S\boldsymbol{T}) \approx |.||\Sigma^n\dot{\Delta}[1]||,\ \boldsymbol{T}| \approx |\Sigma^n S^\circ, \boldsymbol{T}| = |S^n, \boldsymbol{T}|.$$

Таким образом, группу $\pi_n\boldsymbol{T}$ можно определить как группу всех морфизмов $S^n \to \boldsymbol{T}$ категории пунктированных топологических пространств по модулю гомотопии.

Заметим теперь, что, согласно п. 1.5,

для любого расслоения $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{B}$ *категории* $.\mathcal{T}op$ *(т. е. морфизма пунктированных топологических пространств, являющегося расслоением в смысле Серра) морфизм*

$$.S\boldsymbol{p}: .S\boldsymbol{X} \to .S\boldsymbol{B}$$

является расслоением в смысле Кана, причем слоем этого расслоения служит симплициальное множество $.SF$, *где* F — *слой расслоения* p *над отмеченной точкой пространства* B.

Согласно п. 3.3 гл. VI, отсюда немедленно вытекает, что

для любого расслоения $p: X \to B$ *категории* $.\mathcal{T}op$ *имеет место точная последовательность*

$$\cdots \to \pi_{n+1}B \to \pi_n F \to \pi_n X \xrightarrow{\pi_n p} \pi_n B \to \cdots$$
$$\cdots \to \pi_2 B \to \pi_1 F \to \pi_1 X \xrightarrow{\pi_1 p} \pi_1 B \to \pi_0 F \to \pi_0 X \xrightarrow{\pi_0 p} \pi_0 B.$$

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ МИЛНОРА

3.1. Согласно п. 1.3 и 2.3, имеют место изоморфизмы сопряжения

$$\overline{\mathcal{T}op}(\|X\|, Y) \approx \mathcal{H}(X, SY) \text{ и } .\overline{\mathcal{T}op}(.\|X\|, Y) \approx .\mathcal{H}(X, .SY).$$

Пусть

$$\Psi X: X \to S\|X\| \text{ и } .\Psi X: X \to .S\|X\|$$

— соответствующие морфизмы сопряжения. Согласно предложению 1.3 гл. I, для доказательства теорем Милнора 1.3 и 2.3 достаточно доказать, что для любого объекта X категории $\mathcal{H}$ (категории $.\mathcal{H}$) морфизм ΨX (морфизм $.\Psi X$) является изоморфизмом категории $\mathcal{H}$ (категории $.\mathcal{H}$). Для этого нам будет нужна следующая

Лемма (Милнор). *Для любого целого* $n \geqslant 0$ *и любого объекта* X *категории* $.\mathcal{H}$ *отображение*

$$\pi_0(.\Psi X): \pi_n X \to \pi_n(.S\, .\|X\|)$$

биективно.

Доказательство этой леммы мы проведем индукцией по числу n. Ясно, что при $n = 0$ лемма справедлива. Пусть она уже доказана для всех чисел, меньших некоторого n.

Поскольку каждый объект X категории $.\mathcal{H}$ изоморфен (в $.\mathcal{H}$) пунктированному полному симплициальному множеству, мы без ограничения общности можем симплициальное множество X считать полным. Имея это в виду, рассмотрим индуцированный морфизмом вложения $\dot{\Delta}[1] \to \Delta[1]$ морфизм

$$p: \mathcal{H}om\, .(\Delta[1], X) \to \mathcal{H}om\, .(\dot{\Delta}[1], X) \approx X$$

категории $.\Delta^\circ\mathcal{E}ns$. Согласно предложению 1.2.1 гл. VI, этот морфизм является расслоением со слоем $\Omega X = \mathcal{H}om\, .(\Omega, X)$. Применив к этому расслоению теорему 5.2 гл. VI, мы получим некоторое минимальное расслоение

$$(*) \qquad F \xrightarrow{i'} E \xrightarrow{p'} X,$$

являющееся деформационным ретрактом расслоения p относительно X. Мы знаем (см. доказательство леммы 1.4 гл. VI), что симплициальное множество $\mathscr{H}om\,.(\Delta[1], X)$ стягиваемо по себе в точку (изоморфно в категории $.\mathscr{H}$ симплициальной точке $\Delta[0]$). Поэтому симплициальное множество E также стягиваемо по себе в точку. С другой стороны, согласно теореме 5.4 гл. VI, расслоение p' локально тривиально, и потому ввиду предложений 1.4 и 1.5 имеет место расслоение

$$(**) \qquad .S\,.|F| \xrightarrow{.S\,.|i'|} .S\,.|E| \xrightarrow{.S\,.|p'|} .S\,.|X|.$$

С расслоением $(*)$ расслоение $(**)$ связано коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{i'} & E & \xrightarrow{p'} & X \\ {\scriptstyle .\Psi F}\downarrow & & {\scriptstyle .\Psi E}\downarrow & & {\scriptstyle .\Psi X}\downarrow \\ .S\,.|F| & \longrightarrow & .S\,.|E| & \longrightarrow & .S\,.|X|, \end{array}$$

индуцирующей морфизм

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \to & \pi_n E & \longrightarrow & \pi_n X & \longrightarrow & \pi_{n-1} F & \longrightarrow & \pi_{n-1} E & \to \cdots \\ & {\scriptstyle \pi_n(.\Psi E)}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_n(.\Psi X)}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_{n-1}(.\Psi F)}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_{n-1}(.\Psi E)}\downarrow & \\ \cdots \to & \pi_n(.S\,.|E|) & \longrightarrow & \pi_n(.S\,.|X|) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(.S\,.|F|) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(.S\,.|E|) & \to \cdots \end{array}$$

точных последовательностей гомотопических групп. Поскольку в категории $.\mathscr{H}$ симплициальное множество E изоморфно симплициальной точке $\Delta[0]$, симплициальное множество $.S\,.|E|$ также изоморфно (в категории $.\mathscr{H}$) симплициальной точке $\Delta[0]$. Поэтому группы

$$\pi_n E, \ \pi_{n-1} E, \ \pi_n(.S\,.|E|), \ \pi_{n-1}(.S\,.|E|)$$

тривиальны и, следовательно, имеют место изоморфизмы

$$\pi_n X \approx \pi_{n-1} F, \ \pi_n(.S\,.|X|) \approx \pi_{n-1}(.S\,.|F|)$$

(при $n = 1$ здесь следует воспользоваться результатами п. 5.3.3 гл. V). Но по предположению индукции $\pi_{n-1} F \approx \pi_{n-1}(.S\,.|F|)$. Следовательно,

$$\pi_n X \approx \pi(.S\,.|X|).$$

Тем самым лемма полностью доказана.

3.2. Перейдем теперь непосредственно к доказательству обратимости морфизмов ΨX и $.\Psi X$.

a) В случае когда симплициальное множество X пунктировано и связно, обратимость морфизма $.\Psi X$ непосредственно вытекает в силу теоремы Уайтхеда (см. п. 5.6.1 гл. VI) из леммы 3.1.

b) Пусть теперь X — произвольное (не пунктированное) симплициальное множество (объект категории $\mathscr{K}$). Ясно, что без ограничения общности мы можем считать симплициальное множество X связным. Выбрав в нем произвольную вершину x_0, рассмотрим пунктированное симплициальное множество $\widetilde{X} = (X, x_0)$. Пусть $i: (T, t_0) \to T$ — пренебрегающий функтор $.\mathscr{K} \to \mathscr{K}$. Ясно, что $i(.S\ .\|\widetilde{X}\|) = S\|X\|$ и $i(.\Psi\widetilde{X}) = \Psi X$. С другой стороны, согласно a), морфизм $\Psi\widetilde{X}$ обратим. Следовательно, обратим и морфизм ΨX.

c) Пусть, наконец, X — произвольное пунктированное симплициальное множество. Согласно a), морфизм $.\Psi X$ обратим на компоненте связности множества X, содержащей отмеченную точку. Кроме того, согласно b), морфизм $\Psi(iX) = i(.\Psi X)$ также обратим. Поэтому для доказательства обратимости морфизма $.\Psi X$ достаточно воспользоваться следующей леммой:

Лемма. *Пусть X и X' — произвольные объекты категории $.\mathscr{K}$, и пусть Y и Y' — их компоненты связности, содержащие отмеченные точки. Пусть, далее, $f: X \to X'$ — такой морфизм категории $.\mathscr{K}$, что морфизм if категории $\mathscr{K}$ обратим, так же как и морфизм $g: Y \to Y'$ категории $.\mathscr{K}$, индуцированный морфизмом f. Тогда морфизм f также обратим.*

Доказательство этой леммы мы предоставим читателю.

Приложение 1

НАКРЫТИЯ

§ 1. НАКРЫТИЯ ГРУППОИДОВ

1.1. Пусть G — произвольный группоид. *Накрытием* группоида G мы будем называть произвольный морфизм $p: R \to G$ категории группоидов $\mathcal{G}r$, обладающий тем свойством, что для каждого коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sc}[0] & \xrightarrow{i} & R \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{Sc}[1] & \xrightarrow{j} & G \end{array}$$

существует единственный морфизм $s: \mathrm{Sc}[1] \to R$, оставляющий эту диаграмму коммутативной, т. е. такой, что $ps = j$ и $sq = i$.

Задание морфизма i равносильно заданию некоторого объекта (а именно объекта $i(0)$) группоида R, а задание морфизма j равносильно заданию некоторого морфизма (а именно морфизма $j(0,1)$) группоида G. При этом для морфизма q имеются лишь две возможности, соответствующие выбору либо области определения, либо области значений морфизма $j(0,1)$. В свете этих замечаний непосредственно ясно, что свойство морфизма $p: R \to G$ быть накрытием означает, что для любого морфизма $\alpha: y \to x$ группоида G и любого объекта z' группоида R, «проектирующегося» либо в объект x, либо в объект y (т. е. обладающего тем свойством, что $p(z') = z$, где $z = x$ или y), существует в группоиде R единственный морфизм $\alpha': y' \to x'$, «накрывающий» морфизм α (т. е. такой, что $p(\alpha') = \alpha$) и обладающий тем свойством, что $z' = x'$ или y' (в зависимости от z).

В категории $\mathcal{G}r/G$ морфизмов $R \to G$ накрытия $p: R \to G$ порождают некоторую полную подкатегорию R/G. По определению морфизмами этой подкатегории с областью определения $p: R \to G$ и областью значений $p': R' \to G$ являются морфизмы $f: R \to R'$ категории $\mathcal{G}r$, удовлетворяющие соотношению $p'f = p$.

1.2. *Локальной системой* на группоиде G мы будем называть произвольный контравариантный функтор из группоида G в категорию множества $\mathcal{E}ns$ (контравариантные функторы выбраны здесь исключительно из соображений удобства обозначений). Все локальные системы на группоиде G составляют категорию $G^\circ\mathcal{E}ns$. Сравним эту категорию с категорией накрытий R/G.

Пусть $p: R \to G$ — произвольное накрытие группоида G. Для любого объекта x группоида G обозначим символом $\mathsf{L}(p)(x)$ множество $p^{-1}(x)$ всех объектов группоида R, проектирующихся в объект x. Как мы знаем (см. выше), для любого морфизма $\alpha: y \to x$ группоида G и любого объекта $x' \in \mathsf{L}(p)(x)$ существует в группоиде R один и только один морфизм $\alpha': y' \to x'$ с областью значений x', накрывающий морфизм α. Мы определим морфизм

$$\mathsf{L}(p)(\alpha): L(p)(x) \to L(p)(y),$$

положив

$$\mathsf{L}(p)(\alpha): x' \rightsquigarrow y'.$$

Ясно, что соответствия $x \rightsquigarrow \mathsf{L}(p)(x)$ и $\alpha \rightsquigarrow \mathsf{L}(p)(\alpha)$, определяют на группоиде G некоторую локальную систему $\mathsf{L}(p)$, а соответствие $p \rightsquigarrow \mathsf{L}(p)$ — некоторый функтор

$$\mathsf{L}: \mathsf{R}/G \to G^\circ\mathcal{E}ns.$$

Обратно, пусть L — произвольная локальная система на группоиде G. Рассмотрим группоид $R(L)$, объектами которого являются элементы прямой суммы $\bigsqcup_{x \in G} L(x)$, а морфизмами — пары (α, x'), состоящие из некоторого морфизма $\alpha: y \to x$ группоида G и произвольного элемента x' множества $L(x)$. Областью значений морфизма (α, x') считается при этом объект x', а его областью определения — объект $L(\alpha)(x') \in L(y)$. Композиция морфизмов определяется формулой

$$(\alpha, x') \circ (\beta, L(\alpha)(x')) = (\alpha \circ \beta, x').$$

Пусть $\mathsf{R}(L): R(L) \to G$ — морфизм группоидов, переводящий объекты $x' \in L(x)$ в объект x, а морфизмы (α, x') — в морфизм α. Очевидно, что этот морфизм является накрытием группоида G и что соответствие $L \to \mathsf{R}(L)$ определяет некоторый функтор

$$\mathsf{R}: G^\circ\mathcal{E}ns \to \mathsf{R}/G.$$

Т е о р е м а. *Функторы* $\mathsf{L}: \mathsf{R}/G \to G^\circ\mathcal{E}ns$ *и* $\mathsf{R}: G^\circ\mathcal{E}ns \to \mathsf{R}/G$ *являются квазиобратными эквивалентностями.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы сводится к серии тривиальных проверок. Мы предоставим сделать их читателю.

1.3. Накрытие $p: R \to G$ называется *универсальным,* если для любого накрытия $q: S \to G$, любого объекта x группоида R и любого объекта y группоида S, связанных соотношением $p(x) = q(y)$, существует единственный морфизм $f: R \to S$, для которого $q \circ f = p$ и $y = f(x)$.

Следствие. *Следующие свойства накрытия $p: R \to G$ равносильны:*

(i) *локальная система* $\mathsf{L}(p): G^\circ \to \mathcal{E}ns$ *является представимым функтором;*

(ii) *группоид R односвязен;*

(iii) *накрытие p универсально.*

Доказательство этого следствия мы также оставим читателю.

1.4. Пусть $f: H \to G$ — произвольный морфизм группоидов. Каждому накрытию $p: R \to G$ этот морфизм позволяет отнести каноническую проекцию коамальгамы $H \underset{G}{\times} R$ на ее первый множитель H. Легко видеть, что эта проекция (будем ее обозначать символом $f^{-1}(p)$) является накрытием группоида H, так что соответствие $p \rightsquigarrow f^{-1}(p)$ определяет некоторый функтор

$$\mathsf{R}/f: \mathsf{R}/G \to \mathsf{R}/H.$$

Аналогично, соответствие $L \rightsquigarrow L \circ f^\circ$, где $f^\circ: H^\circ \to G^\circ$ — морфизм двойственных группоидов, индуцированный морфизмом f, определяет некоторый функтор

$$f^\circ\mathcal{E}ns: G^\circ\mathcal{E}ns \to H^\circ\mathcal{E}ns.$$

Легко видеть, что функтор $(f^\circ\mathcal{E}ns) \circ \mathsf{L}$ изоморфен функтору $\mathsf{L} \circ (\mathsf{R}/f)$, а функтор $(\mathsf{R}/f) \circ \mathsf{R}$—функтору $\mathsf{R} \circ (f^\circ\ \mathcal{E}ns)$. Иными словами, диаграмма

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{R}/H & \xleftarrow{\mathsf{R}/f} & \mathsf{R}/G \\ {\scriptstyle \mathsf{L}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \mathsf{R}} & & {\scriptstyle \mathsf{L}}\downarrow\uparrow{\scriptstyle \mathsf{R}} \\ H^\circ\mathcal{E}ns & \xleftarrow{f^\circ\mathcal{E}ns} & G^\circ\mathcal{E}ns \end{array}$$

с точностью до изоморфизма коммутативна.

Предложение. *Функтор R/f является эквивалентностью тогда и только тогда, когда эквивалентностью является функтор f.*

Доказательство. Из коммутативности диаграммы $(*)$ непосредственно вытекает, что функторы R/f и $f^\circ\mathcal{E}ns$ одновременно являются или не являются эквивалентностями. Кроме того, ясно, что для любой эквивалентности f функтор $f^\circ\mathcal{E}ns$ также является эквивалентностью. Поэтому нам нужно только доказать, что функтор f является эквивалентностью, если эквивалентностью является функтор $f^\circ\mathcal{E}ns$. Пусть $f^*: H^\circ\mathcal{E}ns \to G^\circ\mathcal{E}ns$— эквивалентность, квазиобратная к эквивалентности $f^\circ\mathcal{E}ns$: $G^\circ\ \mathcal{E}ns \to H^\circ\mathcal{E}ns$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^\circ\mathcal{E}ns & \xrightarrow{f^*} & G^\circ\mathcal{E}ns \\ {\scriptstyle h^H}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h^G} \\ H & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

(о функторах h^H и h^G см. Глоссарий, Представимые функторы). Легко видеть, что с точностью до изоморфизма эта диаграмма коммутативна, т. е. имеет место функторный морфизм $f^* \circ h^H \to h^G \circ f$ (обязательно являющийся изоморфизмом, поскольку все рассматриваемые категории являются группоидами). Действительно, пусть x и y — произвольные объекты группоида H. По определению

$$h_x^H(y) = H(y, x)$$

и

$$((f^\circ \mathcal{E}ns)\, h_{fx}^G)(y) = (h_{fx}^G \circ f^\circ)(y) = (h_{fx}^G)(fy) = G(fy, fx).$$

Поэтому формула

$$F_x \alpha = f(\alpha), \qquad \alpha \in H(y, x),$$

определяет некоторый морфизм F_x функтора $h_x^H\colon H^\circ \to \mathcal{E}ns$ в функтор $(f^\circ \mathcal{E}ns)\, h_{fx}^G\colon H^\circ \to \mathcal{E}ns$. По сопряженности этому морфизму соответствует морфизм $\widetilde{F}_x$ функтора $f^*(h_x^H)\colon G^\circ \to \mathcal{E}ns$ в функтор $h_{fx}^G\colon G^\circ \to \mathcal{E}ns$. Морфизмы $\widetilde{F}_x$ и составляют, очевидно, морфизм функтора $f^* \circ h^H\colon H \to G^\circ \mathcal{E}ns$ в функтор $h^G \circ f\colon H \to G^\circ \mathcal{E}ns$.

Будучи эквивалентностью, функтор f^* вполне инъективен. Функторы h^H и h^G также вполне инъективны. Поэтому ввиду коммутативности диаграммы (*) функтор f также вполне инъективен и потому осуществляет эквивалентность группоида H с некоторым полным подгруппоидом G' группоида G. При этом в силу результатов п. 6.1.5 гл. II за подгруппоид G' мы можем принять прямую сумму всех компонент связности группоида G, пересекающихся с образом группоида H. Так как вложение $G' \to G$ индуцирует, очевидно, эквивалентность категорий $G'^\circ \mathcal{E}ns$ и $G^\circ \mathcal{E}ns$, то $G' = G$.

§ 2. НАКРЫТИЯ ГРУППОИДОВ И СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ НАКРЫТИЯ

2.1. Пусть X — произвольное симплициальное множество. Его *накрытием* мы будем называть произвольный морфизм $p\colon E \to X$ категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$, обладающий тем свойством, что для каждой коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Delta[0] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "v"] & X \end{tikzcd}$$

существует единственный морфизм $s\colon \Delta[n] \to E$, оставляющий эту диаграмму коммутативной, т. е. такой, что $p \circ s = v$ и $s \circ i = u$.

Аналогично случаю накрытий группоидов это условие означает, что для любого симплекса x симплициального множества X и любой вершины e симплициального множества E, накрывающей некоторую вершину симплекса x, в симплициальном множестве E существует один и только один симплекс, накрывающий симплекс x и имеющий своей вершиной данную вершину e.

Все накрытия $p: E \to X$ симплициального множества X порождают некоторую полную подкатегорию R/X категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns/X$. Каждый морфизм $f: X' \to X$ категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ определяет некоторый функтор

$$\mathsf{R}/f: \mathsf{R}/X \to \mathsf{R}/X',$$

сопоставляющий произвольному накрытию $p: E \to X$ накрытие, $p': X' \underset{X}{\times} E \to X'$, являющееся проекцией коамальгамы $X' \underset{X}{\times} E$ на ее первый множитель X'. Функтор R/f мы будем называть *функтором замены базы*. Накрытие p' мы будем иногда обозначать также символом $f^{-1}(p)$.

Рассмотрим, в частности, случай $X = \Delta[0]$. Так как для каждого n существует только один морфизм $\Delta[n] \to \Delta[0]$, то для любого накрытия $E \to \Delta[0]$ каждый симплекс симплициального множества E однозначно определяется любой из своих вершин. Это показывает, что $E = \mathrm{Sk}^\circ E$, т. е. что симплициальное множество E дискретно (см. п. 3.8 гл. II). Поэтому категорию $\mathsf{R}/\Delta[0]$ мы можем отождествить с категорией множеств $\mathscr{E}ns$.

Пусть снова X — произвольное симплициальное множество, a — некоторая его вершина и $\widetilde{a}: \Delta[0] \to X$ — соответствующий сингулярный симплекс. Рассмотрим функтор $\mathsf{R}/\widetilde{a}$. Согласно только что сказанному, мы можем считать, что областью значений этого функтора является категория множеств $\mathscr{E}ns$. Для любого накрытия $p: E \to X$ множество $(\mathsf{R}/\widetilde{a})(p) = \widetilde{a}^{-1}(p)$ мы будем называть *слоем* этого накрытия над вершиной a.

2.2. Предложение. *Морфизм $p: E \to X$ категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ тогда и только тогда является накрытием, когда он представляет собой локально тривиальный морфизм с дискретными слоями.*

Доказательство этого предложения проводится без особого труда, и мы оставим его читателю.

Предложение 2.2 показывает, что наше понятие накрытия для симплициальных множеств «согласовано» с классическим понятием накрытия для топологических пространств (см. ниже п. 3.1).

2.3. Пусть X — произвольное симплициальное множество и G — произвольный группоид. Ясно, что построенные в п. 7.1 гл. II функторы Π и D индуцируют некоторые функторы

$$\Pi_X\colon \Delta^\circ\mathcal{E}ns/X \to \mathcal{G}r/\Pi X, \quad D_G\colon \mathcal{G}r/G \to \Delta^\circ\mathcal{E}ns/DG.$$

Предложение. *Функторы Π_X и D_G переводят накрытия в накрытия. Таким образом, эти функторы индуцируют некоторые функторы*

$$\mathsf{R}/X \to \mathsf{R}/\Pi X, \quad \mathsf{R}/G \to \mathsf{R}/DG,$$

которые мы будем обозначать теми же символами Π_X и D_G.

Доказательство предложения 2.3 мы разобьем на две части.

2.3.1. Пусть $p\colon R \to G$ — произвольное накрытие группоида G. Любой коммутативной диаграмме вида

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} \Delta[0] & \longrightarrow & DR \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Dp} \\ \Delta[n] & \longrightarrow & DG \end{array}$$

соответствует по сопряженности диаграмма группоидов

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Sc}[0] & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{Sc}[n] & \longrightarrow & G \end{array}$$

Индукцией по n легко показывается, что для последней диаграммы существует единственный морфизм $\mathrm{Sc}[n] \to R$, оставляющий эту диаграмму коммутативной. Но тогда соответствующий морфизм $\Delta[n] \to DR$ оставляет коммутативной диаграмму (1) и является единственным морфизмом с этим свойством. Поскольку это верно для любой диаграммы вида (1), морфизм $DR \xrightarrow{Dp} DG$ является, следовательно, накрытием.

2.3.2. Пусть $p\colon E \to X$ — произвольное накрытие симплициального множества X. Рассмотрим произвольную коммутативную диаграмму вида

$$(3)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Sc}[0] & \longrightarrow & \Pi E \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Pi p} \\ \mathrm{Sc}[1] & \longrightarrow & \Pi X \end{array}$$

Как мы знаем, задание такой диаграммы равносильно заданию некоторого морфизма f группоида ΠX и некоторого объекта e группоида ΠE, переходящего при морфизме Πp в одну из «концевых точек» морфизма f. Для доказательства того, что морфизм $\Pi p\colon \Pi E \to \Pi X$ является накрытием, нам следует, во-первых, построить некоторый морфизм g группоида ΠE, «концевой точкой» которого является объект e и который морфизмом Πp переводится в морфизм f, и, во-вторых, доказать, что этими условиями морфизм g определяется единственным образом.

Согласно п. 7.2 гл. II, морфизм f задается некоторым морфизмом $\xi\colon I_n \to X$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Delta[0] \arrow[r, "\tilde{e}"] \arrow[d, "\varepsilon_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I_n \arrow[r, "\xi"] & X \end{tikzcd}$$

По условию эту диаграмму можно с сохранением коммутативности дополнить некоторым морфизмом $\eta\colon I_n \to E$. Морфизм g группоида ΠE, соответствующий морфизму η, и будет, очевидно, искомым морфизмом, «накрывающим» морфизм f.

Для доказательства единственности морфизма g достаточно, очевидно, показать, что морфизм g', аналогичным образом построенный по некоторому другому представителю $\xi'\colon I_p \to X$ морфизма f, совпадает с морфизмом g. При этом из данного в п. 7.1 гл. II описания соотношений в группоиде Пуанкаре произвольного симплициального множества непосредственно вытекает, что равенство $g = g'$ нам достаточно доказать лишь в случае, когда $\xi = \sigma \circ \alpha$ и $\xi' = \sigma \circ \beta$, где σ — произвольный морфизм $\Delta[2] \to X$, а $\alpha\colon I_2 \to \Delta[2]$ и $\beta\colon I_1 = \Delta[1] \to \Delta[2]$ — морфизмы, ассоциированные (см. п. 5.1 гл. II) с монотонными отображениями

$$\begin{matrix} 0 < 1 > 2 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 < 2 > 1 \end{matrix} \qquad \text{и} \qquad \begin{matrix} 0 < 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0 < 1 \end{matrix}$$

соответственно.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Delta[0] \arrow[r, "\tilde{e}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[2] \arrow[r, "\sigma"'] & X \end{tikzcd}$$

По условию эту диаграмму мы можем с сохранением коммутативности дополнить некоторым морфизмом $\tau\colon \Delta[2] \to E$. При этом морфизмом η, отвечающим морфизму ξ, будет, очевидно, морфизм $\tau\circ\alpha$, а морфизмом η', отвечающим аналогичным образом морфизму ξ', — морфизм $\tau\circ\beta$. Но тогда (см. п. 7.1 гл. II) морфизмы g и g', определенные морфизмами η и η', будут, очевидно, совпадать.

2.4. Рассмотрим морфизм сопряжения $\Psi\colon \mathrm{Id}\,\Delta^\circ\mathscr{E}ns \to D\Pi$. Каждому симплициальному множеству X этот морфизм сопоставляет некоторый морфизм $\Psi X\colon X \to D\Pi X$. Пусть

$$\mathsf{R}/\Psi X\colon \mathsf{R}/D\Pi X \to \mathsf{R}/X$$

— соответствующий функтор замены базы. Определим функтор $\mathsf{D}_X\colon \mathsf{R}/\Pi X \to \mathsf{R}/X$, полагая

$$\mathsf{D}_X = (\mathsf{R}/\Psi X)\circ D_{\Pi X}.$$

2.4.1. Т е о р е м а. *Функторы* D_X *и* Π_X *являются квазиобратными эквивалентностями.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что функтор Π_X сопряжен слева с функтором D_X. Кроме того, для любой вершины $a\in X_0$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathsf{R}/X \arrow[rr, shift left, "\Pi_X"] \arrow[dr] & & \mathsf{R}/\Pi X \arrow[ll, shift left, "\mathsf{D}_X"] \arrow[dl] \\ & \mathscr{E}ns & \end{tikzcd}$$

наклонные стрелки которой представляют собой функторы, сопоставляющие произвольному накрытию его слой над вершиной (объектом) a, коммутативна с точностью до изоморфизма. Следовательно, для любого накрытия симплициального множества X морфизм сопряжения

$$\mathrm{Id}(\mathsf{R}/X) \to \mathsf{D}_X\Pi_X$$

индуцирует изоморфизм нульмерных остовов, и аналогично для любого накрытия группоида ΠX морфизм сопряжения

$$\Pi_X\mathsf{D}_X \to \mathrm{Id}(R/\Pi X)$$

определяет морфизм, являющийся на объектах изоморфизмом. Теорема 2.4.1 непосредственно вытекает теперь из следующего предложения, доказательство которого мы оставляем читателю:

2.4.2. П р е д л о ж е н и е. *Морфизм категории* R/X, *где* X — *произвольное симплициальное множество, является изоморфизмом, если он индуцирует изоморфизм нульмерных остовов. Аналогично, морфизм категории* R/G, *где* G — *произвольный группоид, является изоморфизмом, если он индуцирует изоморфизм множеств объектов.*

2.5. Пусть $f\colon X' \to X$ — произвольный морфизм категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$. Рассмотрим диаграммы

$$(1)\quad \begin{array}{ccc} \mathsf{R}/X & \xrightarrow{\Pi_X} & \mathsf{R}/\Pi X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{R}/f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{R}/\Pi f} \\ \mathsf{R}/X' & \xrightarrow{\Pi_{X'}} & \mathsf{R}/\Pi X' \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{ccc} \mathsf{R}/\Pi X & \xrightarrow{\mathsf{D}_X} & \mathsf{R}/X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{R}/\Pi f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{R}/f} \\ \mathsf{R}/\Pi X' & \xrightarrow{\mathsf{D}_{X'}} & \mathsf{R}/X' \end{array}$$

Поскольку функтор D перестановочен с обратными пределами и, в частности, с коамальгамами, диаграмма (2) с точностью до изоморфизма коммутативна. Поскольку пары (Π_X, D_X) и $(\Pi_{X'}, \mathsf{D}_{X'})$ состоят из квазиобратных эквивалентностей, то же верно и для диаграммы (1).

2.6. Отсюда следует, что функтор замены базы R/f является эквивалентностью тогда и только тогда, когда эквивалентностью является функтор $\mathsf{R}/\Pi f$. Но в п. 1.4 было показано, что функтор $\mathsf{R}/\Pi f$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда эквивалентностью является функтор Πf. С другой стороны, в случае когда симплициальные множества X и X' звязны, утверждение о том, что функтор Πf является эквивалентностью, означает, что морфизм f индуцирует изоморфизм групп Пуанкаре. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Для морфизма $f\colon X' \to X$ связных симплициальных множеств функтор R/f тогда и только тогда является эквивалентностью, когда морфизм f индуцирует изоморфизм групп Пуанкаре симплициальных множеств X' и X.*

§ 3. СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ НАКРЫТИЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ НАКРЫТИЯ

3.1. Напомним (ср. п. 4.1 гл. III), что морфизм $p\colon E \to X$ категории $\mathcal{T}o_2$ называется *локально тривиальным морфизмом со слоем* F, если для любой точки x пространства X существует такое открытое множество $U \subset X$, содержащее эту точку, и такой гомеоморфизм произведения $U \times F$ на прообраз $p^{-1}(U)$ множества U, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \approx & p^{-1}(U) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & U & \end{array}$$

Подчеркнем, что даже в случае, когда пространства E, X и F каонны, это определение не совпадает с определением, данным в п. 4.1 гл. III. Однако если пространство F локально компактно, то каждый локально тривиальный морфизм категории $\mathcal{K}a$ со слоем F

будет локально тривиальным морфизмом и категории $\mathcal{T}op$. В частности, это верно, когда пространство F дискретно.

Напомним, далее, что в категории топологических пространств *накрытием пространства* X называется локально тривиальный морфизм с дискретным слоем, областью значений которого является это пространство. Полную подкатегорию категории $\mathcal{T}op/X$, объектами которой являются накрытия пространства X, мы будем обозначать символом R/X.

Каждое непрерывное отображение $f\colon X' \to X$ очевидным образом (ср. п. 2.1) определяет *функтор замены базы*

$$\mathsf{R}/f\colon \mathsf{R}/X \to \mathsf{R}/X'.$$

В случае когда отображение f представляет собой вложение точки x в пространство X, функтор R/f сопоставляет накрытию $p\colon E \to X$ дискретное топологическое пространство $p^{-1}(x)$ — *слой* накрытия p над точкой x.

3.2. Ясно, что функторы S и $|?|$ индуцируют некоторые функторы

$$S_X\colon \mathsf{R}/X \to \Delta^\circ\mathcal{E}ns/SX, \quad |?|_X\colon \mathsf{R}/X \to \mathcal{T}op/|X|.$$

Более того, эти функторы на самом деле принимают значения в категориях R/SX и R/X соответственно. Иными словами, имеет место следующая

Теорема. *Образ топологического накрытия при сингулярном функторе S является симплициальным накрытием. Геометрическая реализация симплициального накрытия является топологическим накрытием.*

Доказательство. Пусть $p\colon E \to X$ — произвольное топологическое накрытие. Нам нужно показать, что любую коммутативную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} \Delta[0] \arrow[r] \arrow[d] & SE \arrow[d, "Sp"] \\ \Delta[n] \arrow[r] & SX \end{tikzcd}$$

мы можем с сохранением коммутативности дополнить некоторым морфизмом $\Delta[n] \to SE$. Но, поскольку функторы S и $|?|$ сопряжены, для этого нам достаточно показать, что аналогичным образом можно дополнить соответствующую коммутативную диаграмму топологических пространств

$$\begin{tikzcd} \Delta^0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Это легко делается сначала для $n = 1$ (напомним, что накрытие p является расслоением; см. п. 1.4 гл. VII), а затем и для любого n (достаточно рассмотреть отрезки симплекса Δ^n, соединяющие его вершину $u(\Delta^0)$ с точками противоположной грани).

Обратно, пусть $p: E \to X$ — произвольное симплициальное расслоение. Согласно предложению 2.2, морфизм p локально тривиален и обладает дискретными слоями (одними и теми же над каждой компонентой связности симплициального множества X). Так как геометрическая реализация дискретного симплициального множества является, очевидно, дискретным топологическим пространством, то в силу теоремы 4.2 гл. III отображение $|p|: |E| \to |X|$ является, следовательно, локально тривиальным морфизмом категории $\mathcal{K}a$ с дискретными слоями (одними и теми же над каждой компонентой связности пространства $|X|$). Следовательно (см. п. 3.1), отображение $|p|$ будет накрытием в категории $\mathcal{T}op$.

Замечание. Пусть $x \in X$ и $a \in X_0$. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathsf{R}/X \arrow[rr, "S_X"] \arrow[dr] & & \mathsf{R}/SX \arrow[dl] \\ & \mathcal{E}n\ell & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{R}/X \arrow[rr, "|?|_X"] \arrow[dr] & & \mathsf{R}/|X| \arrow[dl] \\ & \mathcal{E}n\ell & \end{tikzcd}$$

наклонные стрелки которых представляют собой функторы, сопоставляющие каждому накрытию его слой (над точкой x или вершиной a соответственно). Из приведенного выше доказательства непосредственно вытекает, что *эти диаграммы коммутативны с точностью до изоморфизма.*

3.2.1. Рассмотрим теперь морфизм сопряжения

$$\Psi: \mathrm{Id}\,\Delta^\circ\mathcal{E}n\ell \to S|?|$$

(см. п. 1.3 гл. II). Для любого симплициального множества X морфизм $\Psi X: X \to S|X|$ определяет соответствующий функтор замены базы

$$\mathsf{R}/\Psi X: \mathsf{R}/S|X| \to \mathsf{R}/X.$$

Определим функтор $\mathsf{S}_X: \mathsf{R}/|X| \to \mathsf{R}/X$, полагая

$$\mathsf{S}_X = (\mathsf{R}/\Psi X) \circ S_{|X|}.$$

Теорема. *Функторы* $|?|_X: \mathsf{R}/X \to \mathsf{R}/|X|$ *и* $\mathsf{S}_X: \mathsf{R}/|X| \to \mathsf{R}/X$ *являются квазиобратными эквивалентностями.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.4.1. Роль предложения 2.4.2 играет при этом следующее предложение о топологических накрытиях локально связных пространств (напомним, что геометрическая реализация произвольного симплициального множества локально связна; см. п. 1.10 гл. III):

3.2.2. Предложение. *Если пространство X локально связно, то любой морфизм*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

категории R/X, *являющийся изоморфизмом на слоях, сам является изоморфизмом.*

3.2.3. Замечание. Поскольку функторы $|?|$ и S перестановочны с конечными обратными пределами (см., в частности, теорему 3.1), а потому и с коамальгамами, для любого морфизма $f\colon X' \to X$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}/X \arrow[r, "|?|_X"] \arrow[d, "\mathrm{R}/f"'] & \mathrm{R}/|X| \arrow[d, "\mathrm{R}/|f|"] \\ \mathrm{R}/X' \arrow[r, "|?|_{X'}"] & \mathrm{R}/|X'| \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{R}/|X| \arrow[r, "S_X"] \arrow[d, "\mathrm{R}/|f|"'] & \mathrm{R}/X \arrow[d, "\mathrm{R}/f"] \\ \mathrm{R}/|X'| \arrow[r, "S_{X'}"] & \mathrm{R}/X' \end{tikzcd}$$

коммутативны с точностью до изоморфизма.

3.3. В п. 3.2.1 мы показали, что функтор $|?|_X\colon \mathrm{R}/X \to \mathrm{R}/|X|$ осуществляет эквивалентность категорий. Ниже мы покажем, что в случае, когда пространство X удовлетворяет некоторым простым теоретико-множественным условиям, функтор $S_X\colon \mathrm{R}/X \to \mathrm{R}/SX$ также является эквивалентностью. Для этого нам в первую очередь необходимо напомнить определение *группоида Пуанкаре* $G(X)$ произвольного топологического пространства X.

Объектами группоида $G(X)$ являются по определению нульмерные симплексы симплициального множества SX, т. е. точки пространства X. Его морфизмами являются классы одномерных симплексов симплициального множества SX (т. е. в силу отождествления $I = \Delta^1$, задаваемого соответствием $t \rightsquigarrow (0, t, 1)$, — классы непрерывных отображений $I \to X$) по отношению эквивалентности, в котором $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ и существует такое отображение $h\colon I \times I \to X$, что $h(0, ?) = f$, $h(1, ?) = g$ и $h(t, e) = f(e) = g(e)$ для всех $t \in I$ и любого $e = 0, 1$. Областью определения морфизма, представленного отображением f, считается при этом точка $f(0)$, а его областью значений — точка $f(1)$. Композиция морфизмов группоида $G(X)$ индуцируется соответствием $(f, g) \rightsquigarrow g * f$, где f и g — такие отображения $I \to X$, что $f(1) = g(0)$, а $g * f$ — отображение $I \to X$, определенное формулой

$$(g * f)(t) = \begin{cases} f(2t), \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g(2t-1), \text{ если } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тот факт, что тем самым действительно получается некоторый группоид, проверяется непосредственно. При этом морфизм, обратный к морфизму, представленному отображением f, задается отображением f^-, для которого $f^-(t) = f(1-t)$. Без труда доказывается (ср. п. 5.2 гл. IV), что

группоид $G(X)$ *изоморфен группоиду* ΠSX.

Группой Пуанкаре $\pi_1(X, x)$ пространства X в точке x мы будем называть группу $\pi_1(SX, x)$. Из предыдущего утверждения непосредственно вытекает, что эта группа совпадает с классической группой Пуанкаре, а также с группой $\pi_1(X, x)$ в смысле п. 2.5 гл. VII.

3.4. *Локальными системами* над топологическим пространством X мы будем называть локальные системы над группоидом ΠSX, т. е. объекты категории $(\Pi SX)^\circ\mathcal{E}ns$ (см. п. 1.2). Из сказанного выше немедленно следует, что это определение равносильно обычному.

Вместо интересующего нас функтора $S_X\colon \mathsf{R}/X \to \mathsf{R}/SX$ удобнее рассматривать функтор $\mathsf{D}_X\colon \mathsf{R}/X \to (\Pi SX)^\circ\mathcal{E}ns$, являющийся композицией функторов

$$\mathsf{R}/X \xrightarrow{S_X} \mathsf{R}/SX \xrightarrow{\Pi_{SX}} \mathsf{R}/\Pi SX \xrightarrow{\mathsf{L}} (\Pi SX)^\circ\mathcal{E}ns.$$

Поскольку функторы Π_{SX} и L являются эквивалентностями, функтор S_X является эквивалентностью одновременно с функтором D_X.

В явном виде функтор D_X описывается следующим образом. Пусть $p\colon E \to X$ — произвольное накрытие пространства X, и пусть u — произвольный сингулярный одномерный симплекс пространства X, начинающийся в точке x и кончающийся в точке y. Для каждой точки ω слоя $p^{-1}(y)$ существует один и только один одномерный сингулярный симплекс v пространства E, для которого $p \circ v = u$ и $v(1) = \omega$. Полагая $u^*(\omega) = v(0)$, мы получим, таким образом, некоторое отображение $u^*\colon p^{-1}(y) \to p^{-1}(x)$. Ясно, что если симплексы u и u' определяют один и тот же морфизм группоида ΠSX, то $u^* = u'^*$. В этих обозначениях функтор D_X определяется формулами

$$(\mathsf{D}_X p)(x) = p^{-1}(x), \quad (\mathsf{D}_X p)(u) = u^*.$$

3.5. Предложение. *Для любого локально линейно связного пространства* X *функтор* $S_X\colon \mathsf{R}/X \to \mathsf{R}/SX$ *вполне инъективен.*

3.6. Теорема. *Если пространство X локально линейно связно и локально односвязно (т. е. каждая его точка обладает односвязной открытой окрестностью), то функтор $S_X\colon \mathrm{R}/X \to \mathrm{R}/SX$ осуществляет эквивалентность категорий.*

Согласно сказанному выше, эти утверждения можно вместо функтора S_X доказывать для функтора D_X. С другой стороны, в свете данного выше описания функтора D_X доказательства этих утверждений для этого функтора «общеизвестны». Мы оставляем их читателю.

3.7. Согласно результатам п. 1.9 гл. III, для любого симплициального множества X пространство $|X|$ локально линейно связно и локально односвязно, т. е. удовлетворяет условиям теоремы 3.6. Следовательно, функтор $S_{|X|}$ осуществляет эквивалентность категорий. С другой стороны, согласно теореме 3.2.1, функтор

$$S_X = (\mathrm{R}/\Psi X) \circ S_{|X|}$$

также осуществляет эквивалентность категорий. Поэтому функтор $\mathrm{R}/\Psi X$ тоже осуществляет эквивалентность категорий. В свете теоремы 2.6 это означает, что имеет место следующая теорема, являющаяся частным случаем теоремы Милнора:

3.7.1. Теорема. *Для любого пунктированного симплициального множества (X, x_0) морфизм ΨX индуцирует изоморфизм групп Пуанкаре:*

$$\pi_1(\Psi X, x_0)\colon \pi_1(X, x_0) \approx \pi_1(S\,|X|, x_0).$$

В силу предложения 7.4 гл. II отсюда немедленно вытекает

3.7.2. Следствие (теорема ван Кампена для геометрических реализаций). *Пусть связное симплициальное множество X представлено в виде объединения*

$$X = A \cup B$$

его связных симплициальных подмножеств A и B, пересечение $A \cap B$ которых связно. Тогда для любой вершины $x_0 \in (A \cap B)_0$ имеет место канонический изоморфизм

$$\pi_1(|X|, x_0) \approx \pi_1(|A|, x_0) \overset{\pi_1(|A\cap B|, x_0)}{\sqcup} \pi_1(|B|, x_0).$$

Приложение 2

ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

§ 1. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕНБЕРГА

1.1. Для произвольного симплициального множества X мы будем символом C_nX обозначать свободную абелеву группу $X_n^{(\mathbf{Z})}$, порожденную n-мерными симплексами множества X. Пусть $\delta_i^n: C_nX \to C_{n-1}X$—гомоморфизм, порожденный оператором граней $d_i^n: X_n \to X_{n-1}$. Полагая

$$\delta = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \delta_i^n,$$

мы, как легко видеть, получим некоторую дифференциальную абелеву группу (комплекс)

$$\cdots \to C_nX \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1}X \to \cdots \to C_1X \to C_0X,$$

которую будем обозначать символом C_*X. Эта группа функториально зависит от X, т. е. существует функтор C_* из категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ в категорию дифференциальных абелевых групп, совпадающий на объектах с соответствием $X \rightsquigarrow C_*X$. Группы гомологий дифференциальной абелевой группы C_*X обозначаются через H_nX и называются *группами гомологий симплициального множества* X. Они также функториально зависят от X.

Для произвольного топологического пространства Y группы гомологий симплициального множества SY называются *группами гомологий пространства* Y. Они функториально зависят от Y и обозначаются символами H_nY.

Из результатов гл. VII легко вытекает следующая известная

Теорема (Эйленберг). *Для любого симплициального множества X имеет место канонический изоморфизм*

$$H_nX \approx H_n|X|.$$

1.2. Доказательство. Пусть

$$\Psi X: X \to S|X|$$

— морфизм сопряжения (п. 1.4 гл. III). Мы докажем теорему Эйленберга, показав, что морфизм ΨX является изоморфизмом. Поскольку, согласно теореме Милнора (п. 1.4 гл. VII), для любого симплициального множества X этот морфизм индуцирует обратимый морфизм гомотопической категории $\mathscr{H}$, для этого достаточно показать, что

функтор H_n является композицией канонического функтора $\Delta^\circ\mathscr{E}ns \to \mathscr{H}$ и некоторого функтора $\mathscr{H} \to \mathscr{A}b$.

Согласно доказываемой ниже лемме 1.4, для любых гомотопных морфизмов f и g категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ имеет место равенство $H_n f = H_n g$. Поэтому функтор H_n индуцирует некоторый функтор, определенный на категории $\overline{\Delta^\circ\mathscr{E}ns}$ симплициальных множеств по модулю гомотопии и принимающий значения в категории $\mathscr{A}b$. С другой стороны, по определению категория $\mathscr{H}$ является категорией частных категории $\overline{\Delta^\circ\mathscr{E}ns}$ по множеству анодинных морфизмов. Следовательно, для доказательства теоремы нам нужно только показать, что для любого анодинного морфизма s морфизм $H_n s$ обратим.

Пусть Σ — множество всех морфизмов категории $\Delta^\circ\mathscr{E}ns$, для которых морфизм $H_n s$ обратим. Легко видеть, что это множество содержит все морфизмы вложения вида $\Lambda^k[n] \to \Delta[n]$, ибо каждый такой морфизм индуцирует, как мы знаем, обратимый морфизм категории $\overline{\Delta^\circ\mathscr{E}ns}$. Нам нужно показать, что множество Σ содержит все анодинные морфизмы. Согласно только что сказанному, для этого достаточно показать, что множество Σ насыщенно в смысле п. 2.1 гл. VI. Но условия (i), (iii) и (iv) определения насыщенного множества выполнены для множества Σ очевидным образом, а условие (ii) непосредственно вытекает из доказываемой ниже леммы 1.3, поскольку для любого коуниверсального квадрата

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ {\scriptstyle\xi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\eta} \\ X' & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

квадрат

$$\begin{array}{ccc} C_*X & \longrightarrow & C_*Y \\ {\scriptstyle C_*\xi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle C_*\eta} \\ C_*X' & \longrightarrow & C_*Y' \end{array}$$

также коуниверсален (ибо функтор $X \rightsquigarrow C_*X$ перестановочен, как легко видеть, с прямыми пределами).

Таким образом, для завершения доказательства теоремы Эйленберга нам осталось лишь доказать леммы 1.3 и 1.4.

1.3. Лемма. *Если в коуниверсальном квадрате*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\delta"] & D \end{tikzcd}$$

абелевых дифференциальных групп морфизм α является мономорфизмом и для любого n морфизм $H_n\alpha$ обратим, то морфизм $H_n\beta$ также обратим.

Доказательство. Легко видеть, что коуниверсальность рассматриваемого квадрата означает, что имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{(\gamma,\, -\alpha)} B \oplus C \xrightarrow{(\beta,\, \delta)} D \longrightarrow 0$$

абелевых дифференциальных групп. Рассмотрим соответствующую точную последовательность групп гомологий

$$\dots \to H_nA \xrightarrow{(H_n\gamma,\, -H_n\alpha)} H_nB \oplus H_nC \xrightarrow{(H_n\beta,\, H_n\delta)} H_nD \longrightarrow H_{n-1}A \to \dots .$$

Поскольку морфизмы $H_n\alpha$ и $H_{n-1}\alpha$ обратимы, эта последовательность распадается в короткие точные последовательности вида

$$0 \longrightarrow H_nA \xrightarrow{(H_n\gamma,\, -H_n\alpha)} H_nB \oplus H_nC \xrightarrow{(H_n\beta,\, H_n\delta)} H_nD \longrightarrow 0,$$

т.е. в коуниверсальные квадраты

$$\begin{tikzcd} H_nA \arrow[r, "H_n\gamma"] \arrow[d, "H_n\alpha"'] & H_nB \arrow[d, "H_n\beta"] \\ H_nC \arrow[r, "H_n\delta"] & H_nD \end{tikzcd}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что если в коуниверсальном квадрате абелевых групп левый вертикальный морфизм обратим, то правый вертикальный морфизм также обратим.

1.4. Лемма. *Гомотопные морфизмы $f, g\colon X \to Y$ симплициальных множеств индуцируют гомотопные морфизмы C_*f, C_*g: $C_*X \to C_*Y$ дифференциальных групп.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем, очевидно, предполагать, что морфизмы f и g связаны простой гомотопией $h\colon \Delta[1]\times X \to X$, так что $f = h\varepsilon_0$ и $g = h\varepsilon_1$, где $\varepsilon_0 = \Delta(\partial_1^1)\times X$ и $\varepsilon_1 = \Delta(\partial_1^0)\times X$ (см. п. 1.1 гл. IV). Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что морфизмы $C_*(\varepsilon_0)\colon C_*X \to C_*(\Delta[1]\times X)$ и $C_*(\varepsilon_1)\colon G_*X \to C_*(\Delta[1]\times X)$ гомотопны, т. е. что существуют гомоморфизмы $s_n\colon C_nX \to C_{n+1}(\Delta[1]\times X)$, удовлетворяющие для любого n соотношениям

$$\delta_{n+1}s_n + s_{n-1}\delta_n = C_n(\varepsilon_1) - C_n(\varepsilon_0).$$

Легко видеть, что такие гомоморфизмы можно, например, определить формулой

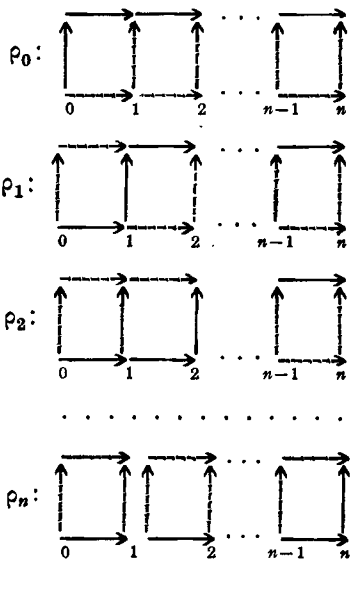
$$s_n x = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \left(\tau_i, {}_X s_i^n x\right), \qquad x \in X_n,$$

где τ_i — симплекс размерности $n+1$ симплициального множества $\Delta[1]$, являющийся неубывающим отображением, принимающим $i+1$ раз значение 0.

Это определение гомоморфизма s_n будет, возможно, более понятным, если мы заметим, что этот гомоморфизм можно рассматривать как морфизм функтора $C_n\colon \Delta^\circ \mathcal{E}ns \to \mathcal{A}b$ в функтор $C_{n+1}(\Delta[1] \times {?})\colon X \rightsquigarrow C_{n+1}(\Delta[1] \times X)$. Поскольку группа $C_n X$ является свободной абелевой группой $X_n^{(\mathbf{Z})}$, порожденной множеством X_n, гомоморфизм s_n можно считать морфизмом функтора $?_n\colon \Delta^\circ \mathcal{E}ns \to \mathcal{E}ns$ в функтор $C_{n+1}(\Delta[1] \times {?})$, рассматриваемый как функтор $\Delta^\circ \mathcal{E}ns \to \mathcal{E}ns$. Но функтор $?_n$ канонически изоморфен функтору $\Delta^\circ \mathcal{E}ns(\Delta[n], ?)$. Поэтому гомоморфизм s_n однозначно определяется некоторым элементом s'_n группы

$$C_{n+1}(\Delta[1] \times \Delta[n]) \approx O_K([n+1], [1] \times [n])^{(\mathbf{Z})}.$$

Как нетрудно проверить, этот элемент s'_n представляет собой альтернированную сумму возрастающих отображений $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, задаваемых (см. п. 5.5 гл. II) цепями



§ 2. ПРИВЕДЕННЫЕ ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ ПУНКТИРОВАННЫХ СИМПЛИЦАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

2.1. Свободной абелевой группой $(E, e)^{(\mathbf{Z})}$, порожденной пунктированным множеством (E, e), мы будем называть факторгруппу порожденной множеством E свободной абелевой группы $E^{(\mathbf{Z})}$ по соотношению $e = 0$.

Для произвольного пунктированного симплициального множества $X = (X, x)$ обозначим символом $\dot{C}_* X$ абелеву дифференциальную группу, компонентами $\dot{C}_n X$ которой являются свободные абелевы группы, порожденные пунктированными множествами (X_n, x_n), где $x_n = s_0^{n-1} \ldots s_0^0 x$. Граничные операторы этой дифференциальной группы определяются «как в п. 1.1». Группы гомологий дифференциальной группы $\dot{C}_* X$ обозначаются через $\dot{H}_n X$ и называются *приведенными группами гомологий* пунктированного симплициального множества (X, x). Они функториально зависят от (X, x).

Чтобы найти соотношения, связывающие группы $H_n X$ и $\dot{H}_n X$, рассмотрим дифференциальную группу Z_*, для которой

$$Z_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n < 0, \\ \mathbf{Z}, & \text{если } n \geqslant 0, \end{cases}$$

и граничный оператор $d_n : Z_n \to Z_{n-1}$ которой определяется формулами

$$d_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \leqslant 0 \text{ или если } n \text{ нечетно}, \\ \operatorname{Id} \mathbf{Z}, \text{ если } n > 0 \text{ и четно}. \end{cases}$$

Ясно, что имеет место точная последовательность

$$0 \to Z_* \to C_* X \to \dot{C}_* X \to 0.$$

В соответствующей точной последовательности групп гомологий группы $H_n Z_*$ при $n \neq 0$ равны нулю, а группа $H_0 Z_*$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$. Поэтому

$$H_n X \approx \dot{H}_n X \quad \text{при } n \neq 0$$

и имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathbf{Z} \to H_0 X \to \dot{H}_0 X \to 0,$$

причем образом группы $\mathbf{Z}$ в группе $H_0 X$ является, как легко видеть, циклическая подгруппа, образующей которой является компонента связности симплициального множества X, содержащая вершину x (здесь мы пользуемся тем очевидным фактом, что группа $H_0 X$ представляет собой свободную абелеву группу, образующими которой являются компоненты связности симплициального множества X).

2.2. Согласно п. 2.1 гл. VI, для любого морфизма $f\colon X \to Y$ категории $.\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ имеет место коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & Y \arrow[d, "if"] \\ \Delta[1] \wedge X \arrow[r] & Cf \end{tikzcd}$$

Поскольку функторы $\dot C_n\colon .\Delta^\circ\mathscr{E}ns \to \mathscr{A}b$ перестановочны, очевидно, с прямыми пределами, квадрат

$$\begin{tikzcd} \dot C_* X \arrow[r] \arrow[d] & \dot C_* Y \arrow[d] \\ \dot C_*(\Delta[1] \wedge X) \arrow[r] & \dot C_*(Cf) \end{tikzcd}$$

также коуниверсален, так что имеет место точная последовательность дифференциальных групп

$$0 \to \dot C_* X \to \dot C_* Y \oplus \dot C_*(\Delta[1] \wedge X) \to \dot C_*(Cf) \to 0.$$

В соответствующей точной последовательности групп гомологий

$$\cdots \to \dot H_{n+1}(Cf) \xrightarrow{\partial_{n+1} f} \dot H_n X \xrightarrow{(\dot H_n f,\, -\dot H_n \varepsilon)} \dot H_n Y \oplus \dot H_n(\Delta[1] \wedge X) \xrightarrow{(\dot H_n(if),\, \dot H_n \eta)} \dot H_n(Cf) \to \cdots$$

все группы $\dot H_n(\Delta[1] \wedge X)$ равны нулю (ибо в категории $.\Delta^\circ\mathscr{E}ns$ симплициальное множество $\Delta[1] \wedge X$ изоморфно симплициальной точке $\Delta[0]$), так что эта последовательность на самом деле имеет вид

$$(f_*) \qquad \cdots \to \dot H_{n+1}(Cf) \xrightarrow{\partial_{n+1} f} \dot H_n X \xrightarrow{\dot H_n f} \dot H_n Y \xrightarrow{\dot H_n(if)} \dot H_n(Cf) \to \cdots$$

В частности, для морфизма $0\colon X \to \Delta[0]$ имеет место последовательность

$$(0_*) \qquad \cdots \to \dot H_{n+1}(\Sigma f) \xrightarrow{\partial_{n+1} 0} \dot H_n X \xrightarrow{\dot H_n 0} \dot H_n \Delta[0] \xrightarrow{\dot H_n(i0)} \dot H_n(\Sigma f) \to \cdots.$$

Так как $\dot H_n \Delta[0] = 0$ для всех n, то, следовательно,

$$\dot H_{n+1}(\Sigma X) \approx \dot H_n X.$$

Кроме того, коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\, X"'] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "0"] & \Delta[0] \end{tikzcd}$$

индуцирует морфизм точных последовательностей

$$\begin{tikzcd} (f_*) \cdots \arrow[r] & \dot H_{n+1}(Cf) \arrow[r, "\partial_{n+1} f"] \arrow[d, "\dot H_{n+1}(jf)"] & \dot H_n X \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & \dot H_n Y \arrow[r] \arrow[d] & \dot H_n(Cf) \arrow[r] \arrow[d, "\dot H_n(jf)"] & \cdots \\ (0_*) \cdots \arrow[r] & \dot H_{n+1}(\Sigma X) \arrow[r, "\partial_{n+1} 0"] & \dot H_n X \arrow[r] & \dot H_n \Delta[0] \arrow[r] & \dot H_n(\Sigma X) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Таким образом, для любого $n \geqslant 0$ имеет место коммутативная треугольная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\dot{H}_{n+1}(Cf) \arrow[d, "\dot{H}_{n+1}(if)"] \arrow[dr, "\partial_{n+1}f"] & \\
\dot{H}_{n+1}(\Sigma X) \arrow[r, "\approx", "\partial_{n+1}0"'] & \dot{H}_n X
\end{tikzcd}$$

§ 3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ ПРЕДЕЛОВ

В следующем параграфе мы изложим построение спектральной последовательности произвольного расслоения. Для этого нам будут нужны некоторые общие конструкции, которым мы посвятим настоящий параграф. Во всем этом параграфе *мы будем считать фиксированной некоторую абелеву категорию $\mathcal{M}$, допускающую точные бесконечные прямые суммы.*

3.1. В п. 4.1 гл. II произвольной малой категории $\mathcal{A}$ было сопоставлено некоторое симплициальное множество $D\mathcal{A}$. В явном виде это симплициальное множество описывается следующим образом:

n-мерными симплексами симплициального множества $D\mathcal{A}$ при $n = 0$ являются объекты категории $\mathcal{A}$, а при $n > 0$ — последовательности $\alpha = (\alpha_n, \ldots, \alpha_2, \alpha_1)$ компонируемых морфизмов категории $\mathcal{A}$:

$$a_n \xleftarrow{\alpha_n} a_{n-1} \leftarrow \cdots \leftarrow a_2 \xleftarrow{\alpha_2} a_1 \xleftarrow{\alpha_1} a_0;$$

операторы граней и вырождения симплициального множества $D\mathcal{A}$ задаются формулами

$$d_i^n(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = \begin{cases} \mathfrak{t}\alpha \text{ при } n = 1,\ i = 0; \\ \mathfrak{b}\alpha \text{ при } n = 1,\ i = 1; \\ (\alpha_n, \ldots, \alpha_2) \text{ при } n > 1,\ i = 0; \\ (\alpha_n, \ldots, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+1}\alpha_i, \alpha_{i-1}, \ldots, \alpha_1) \text{ при } n > 1, 0 < i < n; \\ (\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1) \text{ при } n > 0,\ i = n; \end{cases}$$

$$s_0^0 a = (\mathrm{Id}\, a) \text{ при } n = 0;$$

$$s_i^n(\alpha_n, \ldots, \alpha_1) = (\alpha_n, \ldots, \alpha_{i+1}, \mathrm{Id}\, a_i, \alpha_i \ldots, \alpha_1) \text{ при } n \geqslant 1,\ 0 \leqslant i \leqslant n.$$

3.2. Рассмотрим теперь категорию $\mathcal{A}\mathcal{M}$ функторов из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{M}$. Для любого объекта L категории $\mathcal{A}\mathcal{M}$ и любого $n \geqslant 0$ мы положим

$$C_n(\mathcal{A}, L) = \begin{cases} \coprod\limits_a La, & a \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{A} = (D\mathcal{A})_0, \\ \coprod\limits_\alpha L\alpha, & \alpha \in (D\mathcal{A})_n, \quad n > 0, \end{cases}$$

где $L\alpha = La_0$, (см. п. 3.1). Далее мы определим операторы

$$d_i^n\colon C_n(\mathcal{A}, L) \to C_{n-1}(\mathcal{A}, L),$$
$$s_i^n\colon C_n(\mathcal{A}, L) \to C_{n+1}(\mathcal{A}, L),$$

считая, что при $n > 0$ оператор d_0^n на слагаемом $L\alpha$ объекта $C_n(\mathcal{A}, \alpha)$ является составным морфизмом

$$L\alpha \xrightarrow{L\alpha_1} L(d_0^n\alpha) \xrightarrow{\mathrm{in}_{d_0\alpha}} C_{n-1}(\mathcal{A}, L),$$

оператор d_i^n, $i > 0$, — составным морфизмом

$$L\alpha \xrightarrow{\mathrm{Id}} L(d_i^n\alpha) \xrightarrow{\mathrm{in}_{d_i\alpha}} C_{n-1}(\mathcal{A}, L),$$

а оператор s_i^n — составным морфизмом

$$L\alpha \xrightarrow{\mathrm{Id}} L(s_i^n\alpha) \xrightarrow{\mathrm{in}_{s_i\alpha}} C_{n+1}(\mathcal{A}, L).$$

При $n = 0$ мы за оператор s_0^0 примем морфизм, являющийся на слагаемом La морфизмом

$$La \xrightarrow{\mathrm{Id}} L(s_0^0a) \xrightarrow{\mathrm{in}_{s_0^0 a}} C_1(\mathcal{A}, L).$$

Без труда проверяется, что тем самым мы получим некоторый симплициальный объект

$$C_*(\mathcal{A}, L) = (C_n(\mathcal{A}, L), d_i^n, s_i^n)$$

категории $\mathcal{M}$. Его *объект гомологий* (т. е. объект гомологий дифференциального объекта $(C_*(\mathcal{A}, L), \delta_*)$, где $\delta_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} (-1)^i d_i^n)$, мы будем обозначать символом $H_n(\mathcal{A}, L)$.

3.3. Рассмотрим функтор

$$\varinjlim{}^{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A}\mathcal{M} \to \mathcal{M},$$

определенный соответствием $L \rightsquigarrow \varinjlim L$. Пусть

$$\varinjlim_n^{\mathcal{A}} : \mathcal{A}\mathcal{M} \to \mathcal{M}|$$

— его n-й левый сателлит.

Предложение. *Объект* $H_n(\mathcal{A}, L)$ *совпадает с объектом* $\varinjlim_n^{\mathcal{A}} L$. *В частности,*

$$H_0(\mathcal{A}, L) = \varinjlim L.$$

Доказательство. По определению объект H_0 $(\mathcal{A}, L)$ является коядром пары

$$d_0, d_1 : \coprod_{\alpha \in (D\mathcal{A})_1} L\alpha \rightrightarrows \coprod_{a \in (D\mathcal{A})_0} La.$$

Но, согласно классической конструкции прямого предела, это же коядро является и пределом $\varinjlim L$ (ибо $(D\mathcal{A})_1 = \mathfrak{Ar}\mathcal{A}$ и $(D\mathcal{A})_0 = \mathfrak{Ob}\mathcal{A}$). Таким образом, при $n = 0$ предложение 3.3 справедливо.

Для доказательства предложения 3.3 в общем случае мы заметим, что функтор $C_*(\mathcal{A}, L)$ точен по L и потому любая короткая точная последовательность функторов L обычным образом порождает бесконечную точную последовательность соответствующих объектов гомологий. Это означает, что функторы $H_n(\mathcal{A}, L)$ принадлежат некоторой связанной точной последовательности функторов. Поэтому наше предложение будет доказано, если мы покажем, что эта последовательность функторов обладает свойством универсальности. Но это немедленно вытекает из того, что имеет место

3.4. Лемма. *Каждый функтор* $L: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ *является эпиморфным образом некоторого функтора* $M: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, *обладающего тем свойством, что* $H_n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = 0$ *при всех* $n > 0$.

Доказательство. В конструкции п. 3.2 тот факт, что функтор L определен не только на объектах, но и на морфизмах, использовался лишь при построении оператора d_0^n. Поэтому эта конструкция позволяет по каждому отображению $N: \mathfrak{Ob}\mathcal{A} \to \mathfrak{Ob}\mathcal{M}$ построить некоторые объекты $C_n(\mathcal{A}, N)$ и операторы s_i^n и d_j^n, $j > 0$.

С другой стороны, по любому такому отображению N мы можем построить некоторый функтор $i^*N: \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, полагая для любого объекта a категории $\mathcal{A}$

$$(i^*N)(a) = \coprod_{\mathfrak{t}\alpha = a} N(\mathfrak{d}\alpha),$$

где суммирование распространено на все морфизмы $\alpha: x \to a$ категории $\mathcal{A}$ с областью значений a, и считая, что для любого морфизма $\xi: a \to b$ категории $\mathcal{A}$ морфизм $(i^*N)(\xi): (i^*N)(a) \to (i^*N)(b)$

индуцирует на слагаемом $N(\mathfrak{b}\alpha)$ объекта $(i^*N)(a)$ тождественный морфизм этого слагаемого на слагаемое $N(\mathfrak{b}\,\xi\alpha) = N(\mathfrak{b}\alpha)$ объекта $(i^*N)(b)$. Для построенного таким образом функтора i^*N объекты $C_n(\mathcal{A},\ i^*N)$ выражаются, очевидно, формулой

$$C_n(\mathcal{A}, i^*N) = \bigsqcup_\alpha (i^*N)(a_0) = \bigsqcup_\alpha \bigsqcup_\beta N(\mathfrak{b}\beta),$$

где α пробегает все n-мерные симплексы $a_n \xleftarrow{\alpha_n} \ldots \xleftarrow{\alpha_1} a_0$ симплициального множества $D\mathcal{A}$, а β пробегает все морфизмы категории $\mathcal{A}$ с областью значений a_0. Поскольку каждую пару $(\alpha,\ \beta)$ мы можем отождествить с последовательностью $a_n \xleftarrow{\alpha_n} \ldots \xleftarrow{\alpha_1} a_0 \xleftarrow{\beta} \mathfrak{b}\beta$, отсюда непосредственно вытекает, что

$$C_n(\mathcal{A},\ i^*N) = C_{n+1}(\mathcal{A},\ N).$$

Ясно, что в силу этого отождествления операторы $'d_i^n$ и $'s_i^n$ симплициального множества $C_*(\mathcal{A},\ i^*N)$ связаны с операторами d_i^n и s_i^n соотношениями

$$'d_i^n = d_{i+1}^{n+1}, \quad 's_i^n = s_{i+1}^{n+1}.$$

Поэтому для граничного оператора

$$'\delta_n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i\, 'd_i^n$$

будут иметь место соотношения

$$s_0^n\, '\delta_n + '\delta_{n+1} s_0^{n+1} = \mathrm{Id}, \qquad n > 0.$$

Кроме того,

$$s_0^0 d_1^1 + '\delta_1 s_0^1 = \mathrm{Id} \quad \text{и} \quad d_1^1 s_0^0 = \mathrm{Id}.$$

Это означает, что морфизмы $(s_0^1,\ s_0^2,\ \ldots)$ составляют гомотопию дифференциального объекта $(C_*(\mathcal{A},\ i^*N),\ \delta_*)$, связывающую его тождественный морфизм с нулевым. Следовательно,

$$H_n(\mathcal{A},\ i^*N) = 0 \text{ при } n > 0.$$

(При этом $H_0(\mathcal{A},\ i^*N) = \bigsqcup\limits_{a \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{A}} Na$.)

Пусть теперь L — произвольный функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{M}$. Определим функтор M формулой

$$M = i^*N,$$

где N — отображение $\mathfrak{Ob}\,\mathcal{A} \to \mathfrak{Ob}\,\mathcal{M}$, индуцированное функтором L. В свете только что доказанного равенства для завершения доказательства леммы нам остается лишь построить некоторый эпиморфизм $p\colon \mathcal{M} \to L$.

Такого рода эпиморфизмом является, например, морфизм функторов, сопоставляющий каждому объекту a категории $\mathcal{A}$ морфизм

$$pa\colon \coprod_{\mathfrak{t}\alpha = a} L\mathfrak{b}\alpha \to L\alpha,$$

индуцирующий на слагаемом $L\mathfrak{b}\alpha$ морфизм $L\alpha$. Тем самым лемма 3.4 полностью доказана.

Замечание. Отображения $N\colon \mathfrak{Ob}\,\mathcal{A} \to \mathfrak{Ob}\,\mathcal{M}$ мы можем рассматривать как функторы $\mathcal{A}_0 \to \mathcal{M}$, где $\mathcal{A}_0$ — категория, имеющая те же объекты, что и категория $\mathcal{A}$, но лишь тождественные морфизмы (*максимальная дискретная подкатегория категории* $\mathcal{A}$).

3.5. Рассмотрим теперь произвольный функтор $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, где $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ — малые категории. Соответствие $L \rightsquigarrow L \circ f$ определяет некоторый функтор $\mathcal{A}\mathcal{M} \to \mathcal{B}\mathcal{M}$, который мы будем обозначать символом f_*. Хорошо известно (Кан [4]), что для функтора f_* существует левый сопряженный функтор $f^*\colon \mathcal{B}\mathcal{M} \to \mathcal{A}\mathcal{M}$, который строится следующим образом:

Пусть a — произвольный объект категории $\mathcal{A}$. *Левым слоем* f/a *функтора* f *над объектом* a называется категория, объектами которой являются пары (b, ξ), состоящие из произвольного объекта b категории $\mathcal{B}$ и произвольного морфизма $\xi\colon fb \to a$ категории $\mathcal{A}$. Морфизмами $(b, \xi) \to (b', \xi')$ этой категории являются морфизмы $\beta\colon b \to b'$ категории $\mathcal{B}$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} fb \arrow[dd, "f\beta"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ & a \\ fb' \arrow[ur, "\xi'"'] & \end{tikzcd}$$

Пусть теперь N — произвольный функтор $\mathcal{B} \to \mathcal{M}$. Мы определим функтор $f^*N\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, принимая за объект $(f^*N)(a)$ прямой предел функтора $(b, \xi) \rightsquigarrow Nb$ из f/a в $\mathcal{M}$, и считая, что для любого морфизма $\alpha\colon a \to a'$ категории $\mathcal{A}$ морфизм $(f^*N)(\alpha)\colon (f^*N)(a) \to (f^*N)(a')$ индуцирован функтором $f/\alpha\colon f/a \to f/a'$, определенным соответствием $(b, \xi) \rightsquigarrow (b, \alpha\xi)$. Таким образом,

$$(f^*N)(a) = \varinjlim_{x \in f/a} N(\mathrm{pr}_1\, x)$$

и

$$(f^*N)(\alpha)\colon \varinjlim_{x \in f/a} N(\mathrm{pr}_1\, x) \to \varinjlim_{y \in f/a'} N(\mathrm{pr}_1\, y).$$

Пример. При $\mathcal{B} = \mathcal{A}_0$ (см. замечание 3.4) и $f = i$, где i — вложение категории $\mathcal{A}_0$ в категорию $\mathcal{A}$, функтор i^*N совпадает для любого функтора $N: \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}$ с функтором i^*N, построенным в п. 3.4.

3.6. Теорема. *Для каждого функтора $N: \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ имеет место (при данном функторе $f: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$) спектральная последовательность*

$$E^2_{p,q} = \varinjlim{}_p^{\mathcal{A}} ((L_q f^*) N) \Rightarrow \varinjlim{}_{p+q}^{\mathcal{B}} N,$$

где

$$\varinjlim{}_p^{\mathcal{A}} L \approx H_p(\mathcal{A}, L), \quad \varinjlim{}_n^{\mathcal{B}} N \approx H_n(\mathcal{B}, N) \quad \text{и} \quad L_q f^*$$

— левые сателлиты функторов $\varinjlim L$, $\varinjlim N$ и f^* соответственно.

Доказательство. Ясно, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}\mathcal{M} & & \mathcal{A}\mathcal{M} \arrow[ll, "f_*"'] \\ & \mathcal{M} \arrow[ul, "\Gamma_{\mathcal{B}}"] \arrow[ur, "\Gamma_{\mathcal{A}}"'] & \end{tikzcd}$$

где $\Gamma_{\mathcal{A}}$ и $\Gamma_{\mathcal{B}}$ — функторы, сопоставляющие произвольному объекту m категории $\mathcal{M}$ постоянные функторы соответственно из категорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в категорию $\mathcal{M}$, принимающие значение m. Поэтому функтор $\varinjlim \mathcal{B}$, сопряженный слева с функтором $\Gamma_{\mathcal{B}}$, изоморфен функтору $\varinjlim \mathcal{A} \circ f^*$. Следовательно, для построения требуемой спектральной последовательности мы можем применить стандартную конструкцию спектральной последовательности составного функтора (см. Картан — Эйленберг [1], гл. XVI, п. 3 или Гротендик [1]). Для этого нам нужно только проверить, что

(i) для функтора f^* существуют левые сателлиты $L_n f^*$;

(ii) любой функтор $N: \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ является эпиморфным образом некоторого функтора $N': \mathcal{B} \to \mathcal{M}$, обладающего тем свойством, что

$$(L_n f^*) N' = 0 \quad \text{и} \quad \varinjlim{}_n^{\mathcal{A}} (f^* N') = 0$$

при любом $n > 0$.

3.7. Для доказательства утверждения (i) достаточно — (см. Рёрль [1]) построить достаточно большое семейство объектов категории $\mathcal{B}\mathcal{M}$, т. е. такое семейство $\mathcal{F}$ функторов $\mathcal{B} \to \mathcal{M}$, что

а) для любой короткой точной последовательности $0 \to N' \to N \to F \to 0$ над категорией $\mathcal{B}\mathcal{M}$, где $F \in \mathcal{F}$, последовательность $0 \to f^*N' \to f^*N \to f^*F$ точна;

b) для любой короткой точной последовательности $0 \to N' \to \to N \to N'' \to 0$ над категорией $\mathcal{B}\mathcal{M}$ существует коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & F'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

все строки и столбцы которой точны и объекты F', F и F'' которой принадлежат семейству $\mathcal{F}$.

Рассмотрим с этой целью семейство $\mathcal{F}$, состоящее из всех функторов вида j^*P, где P — произвольный функтор $\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}$ (см. замечание 3.4), а j — функтор вложения $\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}$. Покажем, что это семейство $\mathcal{F}$ обладает свойствами a) и b).

Ясно, что для любого объекта a категории $\mathcal{A}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_0\mathcal{M} \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "j^*"'] & (f/a)_0\mathcal{M} \arrow[d, "k^*"] \\
\mathcal{B}\mathcal{M} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{1*}"] & (f/a)\mathcal{M},
\end{tikzcd}$$

где $k: (f/a)_0 \to f/a$ — вложение, а π — функтор $(f/a)_0 \to \mathcal{B}_0$, индуцированный проекцией $\mathrm{pr}_1: (b, \xi) \rightsquigarrow b$. С другой стороны, для любого объекта a категории $\mathcal{A}$ объект $(f^*N)\,a$ категории $\mathcal{M}$ является пределом $\varinjlim\,(\mathrm{pr}_{1*}N)$ функтора $\mathrm{pr}_{1*}N$. В силу результатов п. 3.4 свойство a) для семейства $\mathcal{F}$ следует отсюда непосредственно. Что же касается свойства b), то оно немедленно вытекает из тех же результатов п. 3.4 и функториального характера конструкции $N \to j^*N$.

Тем самым утверждение (i) п. 3.6 полностью доказано.

Для доказательства утверждения (ii) достаточно, очевидно, показать, что для любого $n > 0$ и любого функтора $P: \mathcal{B}_0 \to \mathcal{M}$ имеет место равенство

$$\varinjlim{}_n^{\mathcal{A}} f^*(j^*P) = 0.$$

Но это немедленно вытекает из результатов п. 3.4, поскольку в силу соотношения $fj = if_0$, где f_0 — функтор $\mathcal{B}_0 \to \mathcal{A}_0$, индуцированный функтором f, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_0\mathcal{M} \arrow[r, "f_0^*"] \arrow[d, "j^*"'] & \mathcal{A}_0\mathcal{M} \arrow[d, "i^*"] \\
\mathcal{B}\mathcal{M} \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{A}\mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Таким образом, теорема 3.6 полностью доказана.

Замечание. Можно дать более «ученое» определение построенного в п. 3.2 симплициального объекта $C_*(\mathcal{A}, L)$, используя «стандартные конструкции» в смысле Годемана — Губера. Именно стандартная конструкция в категории $\mathcal{A}\mathcal{M}$, получающаяся из тривиальной конструкции категории $\mathcal{A}_0\mathcal{M}$ с помощью пары сопряженных функторов i_* и i^* (см. Губер [1]), позволяет известным образом строить в категории $\mathcal{A}\mathcal{M}$ $\varinjlim$-ациклические резольвенты. С другой стороны, легко видеть, что функтор $\varinjlim^{\mathcal{A}}: \mathcal{A}\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ переводит эти резольвенты как раз в дифференциальные объекты $C_*(\mathcal{A}, L)$.

3.8. Замечание. Согласно результатам п. 3.7, мы можем вычислять левые сателлиты $L_q f^*$ функтора f^* с помощью резольвент, состоящих из объектов вида $j * P$. С другой стороны, ясно, что для любого объекта a категории $\mathcal{A}$ функтор $?\,a: L \rightsquigarrow La$ является точным функтором. Поэтому для любого функтора $N: \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ объект $((L_q f^*)N)\, a$ совпадает со значением на N левого q-го сателлита функтора $(?a)\circ f^*$. Но, как легко видеть, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\mathcal{M} \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{1*}"'] & \mathcal{A}\mathcal{M} \arrow[d, "?a"] \\
(f/a)\mathcal{M} \arrow[r, "\varinjlim^{(f/a)}"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

так что $(?\,a)\circ f^* = \varinjlim^{(f/a)} \circ \mathrm{pr}_{1*}$. С другой стороны, ясно, что функтор pr_{1*} точен и переводит каждый объект вида j^*P в $\varinjlim$-ациклический объект. Поэтому значение на N левого q-го сателлита функтора $\varinjlim^{(f/a)}\circ \mathrm{pr}_{1*}$ равно $\varinjlim_q^{(f/a)}(N\,\mathrm{pr}_1)$, где $\varinjlim_q^{(f/a)}: (f/a)\,\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — левый q-й сателлит функтора $\varinjlim^{(f/a)}: (f/a)\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Таким образом,

$$((L_q f^*)\,N)\,a = \varinjlim_q^{(f/a)}(N\,\mathrm{pr}_1).$$

Эта формула обобщает (на любые q) изложенную в п. 3.5 конструкцию Кана.

§ 4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАССЛОЕНИЯ

4.1. Свяжем теперь общие конструкции предыдущего параграфа с теорией гомологий симплициальных множеств.

Пусть X — произвольное симплициальное множество. Рассмотрим функтор $p: \Delta/X \to \Delta$, переводящий произвольный объект $\Delta[m] \xrightarrow{x} X$ категории Δ/X в объект $[m]$ категории Δ (см. п. 1.1 гл. II).

Пусть $p^\circ\colon (\Delta/X)^\circ \to \Delta^\circ$ — функтор, индуцированный функтором p. Для любого объекта $[n]$ категории Δ° объектами категории $p^\circ/[n]$ (см. п. 3.5) являются, очевидно, пары $(\widetilde{y}, \mu)$, состоящие из произвольного сингулярного симплекса $\widetilde{y}\colon \Delta[m] \to X$ симплициального множества X и некоторого морфизма $\mu\colon [n] \to [m]$ категории Δ. Как легко видеть,

(1) для любого такого объекта $(\widetilde{y}, \mu)$ существует один и только один его морфизм в объект $(\widetilde{y}\circ(\Delta\mu), \operatorname{Id}[n])$;

(2) отображение, сопоставляющее каждому симплексу $x \in X_n$ компоненту связности (т. е. максимальную связную полную подкатегорию) категории $p^\circ/[n]$, содержащую объект $(\widetilde{x}, \operatorname{Id}[n])$, является биективным отображением множества X_n на множество всех компонент связности категории $p^\circ/[n]$;

(3) объекты вида $(\widetilde{x}, \operatorname{Id}[n])$ являются правыми нулями (терминальными объектами) содержащих их компонент связности категории $p^\circ/[n]$.

Из этих свойств непосредственно следует, в частности, что

для любого функтора $F\colon p^\circ/[n] \to \mathcal{M}$ имеет место равенство

$$\varinjlim F = \coprod_{x\in X_n} F(\widetilde{x}, \operatorname{Id}[n]).$$

Рассмотрим теперь произвольный функтор $L\colon (\Delta/X)^\circ \to \mathcal{M}$. Соответствующий ему функтор $p^{\circ *}L$ представляет собой функтор $\Delta^\circ \to \mathcal{M}$, т. е. является симплициальным объектом категории $\mathcal{M}$. Этот объект мы будем обозначать символом $C_*(X, L)$. Из результатов предыдущего абзаца и определения функтора f^* (см. п. 3.5) немедленно вытекает, что

$$C_n(X, L) = \coprod_{x\in X_n} L\widetilde{x}.$$

При этом оператор граней $d_i^n\colon C_n(X, L) \to C_{n-1}(X, L)$ является морфизмом, индуцирующим на слагаемом $L\widetilde{x}$ составной морфизм

$$L\widetilde{x} \xrightarrow{L\alpha} L(\widetilde{d_i^n x}) \xrightarrow{\operatorname{in}_{d_i x}} C_{n-1}(X, L),$$

где α — морфизм

$$\begin{tikzcd}
\Delta[n-1] \arrow[rr, "\Delta(\partial_n^i)"] \arrow[dr, "\widetilde{d_i^n x}"'] & & \Delta[n] \arrow[dl, "\widetilde{x}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

категории Δ/X.

Объекты гомологий симплициального объекта $C_*(X, L)$ $\left(\text{относительно граничного оператора } \delta_n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i d_i^n\right)$ мы будем обозначать символом $H_n(X, L)$. В случае когда функтор L постоянен, мы вместо $H_n(X, L)$ будем писать $H_n(X, M)$, где $M \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{M}$ — значение, принимаемое функтором L. При $\mathcal{M} = \mathcal{A}b$ и $M = \mathbf{Z}$ объект $H_n(X, M)$ совпадает, очевидно, с построенной в п. 1.1 группой гомологий H_nX симплициального множества X.

4.2. Предложение. *Для любого n имеет место естественный изоморфизм*

$$H_n((\Delta/X)^\circ, L) \approx H_n(X, L)$$

(см. п. 3.2 и 4.1).

Доказательство. Ясно, что функтор $p^{\circ *}\colon (\Delta/X)^\circ\mathcal{M} \to \Delta^\circ\mathcal{M}$ точен. Поэтому спектральная последовательность теоремы 3.6 для объекта $H_n((\Delta/x)^\circ, L)$ вырождается в изоморфизм на объект $H_n(\Delta^\circ, p^{\circ *}L)$. С другой стороны, из доказываемой ниже леммы непосредственно вытекает, что объект $H_n(\Delta^\circ, p^{\circ *}L)$ изоморфен объекту $H_n(X, L)$.

Лемма. *Для любого симплициального объекта C категории $\mathcal{M}$ имеет место естественный изоморфизм*

$$H_nC \approx \varinjlim{}_n C.$$

Доказательство. По существу эта лемма общеизвестна (и, согласно Дольду и Пуппе, равносильна аналогичному утверждению о дифференциальных объектах). Все же мы для полноты приведем здесь ее доказательство.

Во-первых, объект H_0C совпадает с объектом $\varinjlim C$, поскольку диаграмма $\partial_1^0, \partial_1^1\colon [0] \rightrightarrows [1]$ над категорией Δ, как легко видеть, *коинициальна* в Δ (т. е. предел $\varprojlim F$ произвольного функтора F, определенного на категории Δ, является обратным пределом диаграммы $F\partial_1^0, F\partial_1^1\colon F[0] \to F[1]$). Во-вторых, для функторов H_n ? имеет место классическая связанная точная последовательность функторов. Поэтому для доказательства леммы нам нужно только показать, что любой функтор $L\colon \Delta^\circ \to \mathcal{M}$ является эпиморфным образом некоторого функтора L', обладающего тем свойством, что

$$\varinjlim{}_n L = H_nL' = 0$$

для любого $n > 0$.

С этой целью мы применим в категории $\mathcal{A} = \Delta^\circ$ изложенное в п. 3.4 построение. В рассматриваемом случае отображение N представляет собой не что иное, как некоторое семейство (N_m) объектов категории $\mathcal{M}$, занумерованное натуральными числами.

Пусть $L = i^*N$. Согласно п. 3.4, нам нужно только показать, что $H_m L' = 0$ при $m > 0$. При этом мы без ограничения общности можем, очевидно, предполагать, что $N_m = 0$ для всех m, отличных от некоторого фиксированного n. Но ясно, что в этом случае объект $(i^*N)_m$ является прямой суммой некоторого числа экземпляров объекта $M = N_n$, причем число слагаемых равно числу элементов множества $\Delta([m], [n])$. Иными словами, $(i^*N)_m = C_m(\Delta[n], M)$. При этом, как нетрудно убедиться, это отождествление согласовано с операторами граней и вырождения. Следовательно, $H_m(i^*N) = H_m(\Delta[n], M)$. Поскольку симплициальная точка $\Delta[0]$ является деформационным ретрактом стандартного симплекса $\Delta[n]$ (п. 1.2 гл. IV), для завершения доказательства леммы нам остается воспользоваться следующей леммой:

4.3. Лемма. *Для любого объекта M категории $\mathcal{M}$ морфизмы*

$$H_n(f, M),\ H_n(g, M)\colon H_n(X, M) \rightrightarrows H_n(Y, M),$$

индуцированные гомотопными морфизмами $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ категории $\Delta^\circ\mathfrak{Ens}$, совпадают.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.4, и мы его опустим (см. также ниже лемму 4.8).

4.4. Вернемся на минуту к объектам $H_n(\mathcal{A}, L)$, построенным в п. 3.2. Пусть функтор $L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ обладает тем свойством, что для любого морфизма α категории $\mathcal{A}$ морфизм $L\alpha$ категории $\mathcal{M}$ обратим. Тогда, полагая

$$L^{-1}a = La, \qquad a \in \mathfrak{Ob}\,\mathcal{A},$$

$$L^{-1}\alpha = (L\alpha)^{-1}, \quad \alpha \in \mathfrak{Ar}\,\mathcal{A},$$

мы, как легко видеть, получим некоторый функтор $L^{-1}\colon \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{M}$.

Предложение. *Объекты $H_n(\mathcal{A}, L)$ и $H_n(\mathcal{A}^\circ, L^{-1})$ естественно изоморфны.*

Доказательство. По определению

$$C_n(\mathcal{A}^\circ, L^{-1}) = \coprod_\alpha La_n,$$

где суммирование распространено на все n-членные последовательности

$$a_n \xleftarrow{\alpha_n} a_{n-1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow a_1 \xleftarrow{\alpha_1} a_0$$

морфизмов категории $\mathcal{A}$. Легко видеть, что морфизмы

$$(-1)^n \bigsqcup_{\alpha} L(\alpha_n \ldots \alpha_1) : La_0 \to La_n$$

определяют изоморфизм дифференциального объекта $C_*(\mathcal{A}, L)$ на дифференциальный объект $C_*(\mathcal{A}^\circ, L^{-1})$.

4.5. Рассмотрим теперь произвольный морфизм $f: X \to Y$ категории $\Delta^\circ \mathcal{E}ns$. Этот морфизм определяет функтор

$$\Delta/f: \Delta/X \to \Delta/Y,$$

переводящий сингулярный симплекс $\Delta[n] \xrightarrow{\widetilde{x}} X$ в сингулярный симплекс $\Delta[n] \xrightarrow{f\widetilde{x}} Y$. Согласно п. 3.5, Δ/f определяет некоторый функтор

$$(\Delta/f)^*: (\Delta/X)\,\mathcal{M} \to (\Delta/Y)\,\mathcal{M}.$$

Оказывается, что последнему функтору можно дать следующее простое описание:

Пусть $\widetilde{y}: \Delta[n] \to Y$ — произвольный сингулярный симплекс симплициального множества Y. Рассмотрим коамальгаму F_y диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Delta[n] & \xrightarrow{\widetilde{y}} & Y. \end{array}$$

По определению симплекс $\widetilde{y}$ является объектом категории Δ/Y, так что определен левый слой $(\Delta/f)/\widetilde{y}$ (см. п. 3.5) функтора Δ/f над $\widetilde{y}$. Легко видеть, что этот слой совпадает с категорией Δ/F_y. Поэтому для любого функтора $L: \Delta/X \to \mathcal{M}$ функтор $(\Delta/f)^*L: \Delta/Y \to \mathcal{M}$ определяется соответствием

$$\widetilde{y} \rightsquigarrow \varinjlim_{x \in F_y} L(\mathrm{pr}_2 x).$$

Нас особенно будут интересовать функторы $L: \Delta/X \to \mathcal{M}$ (а также функторы $L: (\Delta/X)^\circ \to \mathcal{M}$), обладающие тем свойством, что для любого морфизма α категории Δ/X морфизм $L\alpha$ категории $\mathcal{M}$ обратим. Такие функторы мы будем называть *ковариантными* (соответственно *контравариантными*) *локальными системами на симплициальном множестве* X. Из предложений 4.2, 4.4 и только что сделанного замечания немедленно вытекает, что для любой контравариантной локальной системы L на симплициальном множестве X и любого сингулярного симплекса $\widetilde{y}$ симплициального множества Y имеет место равенство

$$(L_n((\Delta/f)^*)L^{-1})(\widetilde{y}) = H_n(F_y, L|_{F_y}),$$

где $L|_{F_y}$ — составной функтор

$$(\Delta/F_y)^\circ \xrightarrow{(\Delta/\mathrm{pr}_2)^\circ} (\Delta/X)^\circ \xrightarrow{L} \mathcal{M}.$$

Предложение. *В случае когда морфизм $f\colon X \to Y$ является расслоением, функтор*

$$(L_q((\Delta/f)^*))\, L^{-1}\colon \widetilde{y} \rightsquigarrow H_q(F_y, L|_{F_y})$$

представляет собой ковариантную локальную систему на симплициальном множесте Y.

Мы докажем это предложение ниже. Контравариантную локальную систему на симплициальном множестве Y, ассоциированную с ковариантной локальной системой $(L_q((\Delta/f)^*))\, L^{-1}$, мы будем обозначать символом $\mathcal{H}_q(f, L)$, и будем называть ее *локальной системой гомологий слоев.*

Теорема. *Для любого расслоения $f\colon X \to Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ и любой контравариантной локальной системы L на симплициальном множестве X (принимающей значения в абелевой категории, допускающей бесконечные точные прямые суммы) имеет место спектральная последовательность*

$$E^2_{p,q} = H_p(Y, \mathcal{H}_q(f, L)) \Rightarrow H_{p+q}(X, L).$$

Доказательство этой теоремы немедленно вытекает из теоремы 3.6 и предложения 4.2.

4.6. Доказательство предложения 4.5. Пусть

$$\begin{tikzcd} \Delta[n'] \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "\widetilde{y'}"'] & & \Delta[n] \arrow[dl, "\widetilde{y}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

— произвольный морфизм категории Δ/Y. Нам нужно доказать, что соответствующий этому морфизму морфизм

$$H_q(F_t, L)\colon H_q(F_{y'}, L|_{F_{y'}}) \to H_q(F_y, L|_{F_y})$$

обратим. Ясно, что это достаточно сделать лишь при $t = \Delta(\partial^i_n)$ и при $t = \Delta(\sigma^i_n)$. Но в первом случае морфизм t обладает такой ретракцией s, что морфизм ts гомотопен тождественному морфизму $\mathrm{Id}\,\Delta[n]$. Поэтому, применив лемму 5.4.2 гл. VI (с $E = F_y$, $B = \Delta[n]$ и $A = \Delta[n-1]$), мы в силу доказываемой ниже леммы 4.9

немедленно получим, что морфизм $H_q(F_t, L)$ действительно обратим. Во втором случае морфизм t обладает таким сечением s, что морфизм st гомотопен тождественному морфизму $\mathrm{Id}\,\Delta[n+1]$. Поэтому, снова применив лемму 5.4.2 гл. VI (но уже с $E = F_{y'}$, $B = \Delta[n+1]$ и $A = \Delta[n]$), мы опять получим, что морфизм $H_q(F_t, L)$ обратим.

Таким образом, нам остается лишь доказать лемму 4.9.

4.7. Рассмотрим с этой целью на симплициальном множестве Y произвольную контравариантную локальную систему L. Мы сопоставим этой системе некоторую локальную систему $\rho L\colon (\Pi Y)^\circ \to \mathscr{M}$ на группоиде Пуанкаре ΠY симплициального множества Y (см. приложение 1, п. 1.2). Именно, для произвольной вершины $x \in Y_0$ мы положим $(\rho L)\,x = L\widetilde{x}$, где $\widetilde{x}$ — сингулярный симплекс, соответствующий вершине x. Далее, для любого одномерного симплекса $s \in Y_1$ мы положим $(\rho L)\,s = (L\beta)\,(L\alpha)^{-1}$, где α и β — следующие морфизмы:

$$\begin{tikzcd}
\Delta[0] \arrow[rr, "\Delta(\partial_1^0)"] \arrow[dr, "\widetilde{d_0 s}"'] & & \Delta[1] \arrow[dl, "\widetilde{s}"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta[1] \arrow[rr, "\Delta(\partial_1^1)"] \arrow[dr, "\widetilde{s}"'] & & \Delta[0] \arrow[dl, "\widetilde{ds_1}"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

категории Δ/Y. Легко видеть, что так построенный морфизм $(\rho L)\,s\colon (\rho L)\,(d_0 s) \to (\rho L)\,(d_1 s)$ обратим и согласован с описанными в п. 7.1 гл. II соотношениями, определяющими группоид ΠY. Поэтому соответствие $s \rightsquigarrow (\rho L)\,s$ индуцирует некоторое соответствие $\alpha \rightsquigarrow (\rho L)\,\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{Ar}\,\Pi Y$.

Обратно, пусть P — произвольная локальная система на группоиде ΠY. Мы определим контравариантную локальную систему τP на симплициальном множестве Y, полагая для любого симплекса $x \in Y_n$

$$(\tau P)\,\widetilde{x} = P(Y(\eta_n)x),$$

где $\eta_n\colon [0] \to [n]$ — отображение, переводящее точку 0 в себя. Аналогично, для любого морфизма

$$\begin{tikzcd}
\Delta[m] \arrow[rr, "\Delta(\varepsilon)"] \arrow[dr, "\widetilde{y}"'] & & \Delta[n] \arrow[dl] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

категории Δ/Y мы положим

$$(\tau P)\,(\Delta(\varepsilon)) = P(\Delta(\theta)),$$

где $\theta\colon [1] \to [n]$ — такое отображение, что $\eta_n = \theta\partial_1^1$ и $\varepsilon\eta_n = \theta\partial_1^0$.

Без труда проверяется, что функторы ρ и τ квазиобратны друг к другу. Следовательно,

функтор $\rho: L \rightsquigarrow \rho L$ осуществляет эквивалентность категории контравариантных локальных систем на симплициальном множестве Y с категорией локальных систем на группоиде ΠY.

В частности, отсюда следует, что

любая контравариантная локальная система на связном и односвязном симплициальном множестве изоморфна постоянной системе.

4.8. Для каждого морфизма $f: X \to Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ и любой контравариантной локальной системы L на симплициальном множестве Y (принимающей значения в категории $\mathcal{M}$) мы будем символом $f^{-1}L$ обозначать контравариантную локальную систему

$$(\Delta/X)^\circ \xrightarrow{(\Delta/f)^\circ} (\Delta/Y)^\circ \xrightarrow{L} \mathcal{M}$$

на симплициальном множестве X. Ясно, что для любого q морфизм f индуцирует некоторый морфизм

$$H_q(f, L): H_q(X, f^{-1}L) \to H_q(Y, L).$$

Лемма. *Если морфизмы $f, g: X \to Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$ гомотопны, то для любой контравариантной локальной системы L на симплициальном множестве Y локальные системы $f^{-1}L$ и $g^{-1}L$ изоморфны. Более того, связывающий эти системы изоморфизм $i: f^{-1}L \xrightarrow{\approx} g^{-1}L$ можно выбрать так, чтобы для любого q имела место коммутативная диаграмма*

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} H_q(X, f^{-1}L) \arrow[rr, "H_q(X, i)"] \arrow[dr, "H_q(f, L)"'] & & H_q(X, g^{-1}L) \arrow[dl, "H_q(g, L)"] \\ & H_q(Y, L) & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Без ограничения общности мы, очевидно, можем предполагать, что морфизмы f и g связаны простой гомотопией $h: \Delta[1] \times X \to Y$, так что $f = h\varepsilon_0$ и $g = h\varepsilon_1$. Пусть $\mathrm{pr}_2: \Delta[1] \times X \to X$ — каноническая проекция. Ясно, что локальные системы на группоиде $\Pi(\Delta[1] \times X)$, соответствующие (см. п. 4.7) локальным системам $h^{-1}L$ и $\mathrm{pr}_2^{-1}\varepsilon_0^{-1}h^{-1}L$, изоморфны. Следовательно, локальные системы $h^{-1}L$ и $\mathrm{pr}_2^{-1}\varepsilon_0^{-1}h^{-1}L$ также изоморфны. Это показывает, что лемму нам достаточно доказать лишь при $Y = \Delta[1] \times X$, $f = \varepsilon_0$, $g = \varepsilon_1$ и $L = \mathrm{pr}_2^{-1}N$, где N —

— некоторая контравариантная локальная система на симплициальном множестве X.

Но в этом случае обе локальные системы $\varepsilon_0^{-1}L$ и $\varepsilon_1^{-1}L$ совпадают, очевидно, с системой N. Поэтому за изоморфизм i мы можем принять тождественный морфизм $\operatorname{Id} N$ локальной системы N. Таким образом, для завершения доказательства нам остается только показать, что для этого изоморфизма имеет место коммутативная диаграмма (*), т. е. что морфизмы

$$H_q(\varepsilon_0, L),\ H_q(\varepsilon_1 L): H_q(X, N) \rightrightarrows H_q(\Delta[1] \times X, L),$$

индуцированные морфизмами ε_0 и ε_1, совпадают. Как известно, для этого в свою очередь достаточно построить морфизмы

$$s_n: C_n(X, N)_*^* \to C_{n+1}(\Delta[1] \times X, L),$$

удовлетворяющие при любом n соотношению

$$(**) \qquad \delta_{n+1}s_n + s_{n-1}\delta_n = C_n(\varepsilon_1, L) - C_n(\varepsilon_0, L).$$

По определению $n+1$-мерными симплексами симплициального множества $\Delta[1] \times X$ являются пары вида (τ, y), где $\tau \in (\Delta[1])_{n+1}$ и $y \in X_{n+1}$. При этом $L(\tau, y) = Ny$. С другой стороны, согласно п. 4.1, объект $C_n(X, N)$ является прямой суммой объектов вида $N\tilde{x}$. Для любого $i, 0 \leqslant i \leqslant n$, мы определим на слагаемом $N\tilde{x}$ морфизм $\chi_i: N\tilde{x} \to C_{n+1}(\Delta[1] \times X, L)$ как составной морфизм

$$N\tilde{x} \xrightarrow{N(\sigma_n^i)} N({}_X s_i^n x) = L(\tau_i, {}_X s_i^n x) \xrightarrow{\text{in}} C_{n+1}(\Delta[1] \times X, L),$$

где τ_i — симплекс $[n+1] \to [1]$ симплициального множества $\Delta[1]$, принимающий значение 0 точно $i+1$ раз, а in — каноническое вложение слагаемого $L(\tau_i, {}_X s_i^n x)$ в объект $C_{n+1}(\Delta[1] \times X, L)$. Обобщая построение п. 4.1, мы определим теперь морфизм s_n, считая, что на слагаемом $N\tilde{x}$ он является альтернированной суммой $\chi_0 - \chi_1 + \ldots + (-1)^n \chi_n$ морфизмов χ_i. Тот факт, что так определенные морфизмы s_n удовлетворяют соотношениям (**), проверяется непосредственно.

Теперь мы уже без труда можем доказать нужную нам лемму.

4.9. Лемма. *Для любого морфизма $u: X \to Y$ категории $\Delta^\circ\mathcal{E}ns$, являющегося гомотопической эквивалентностью, и любой контравариантной локальной системы L на симплициальном множестве Y морфизмы*

$$H_q(u, L): H_q(X, u^{-1}L) \to H_q(Y, L)$$

являются для всех q изоморфизмами.

Доказательство. Так как морфизм uv гомотопен тождественному морфизму $\mathrm{Id}\, Y$, то, согласно лемме 4.8, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, u^{-1}L) \arrow[r, "H_q(u, L)"] & H_q(Y, L) \arrow[d, "\approx"', "H_q(Y, i)"] \\
& H_q(Y, v^{-1}u^{-1}L) \arrow[ul, "H_q(v, u^{-1}L)"]
\end{tikzcd}$$

Следовательно, морфизм $H_q(v, u^{-1}L)$ является мономорфизмом (ибо морфизм $H_q(Y, i)$ обратим).

Аналогично, поскольку морфизм vu гомотопен тождественному морфизму $\mathrm{Id}\, X$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, u^{-1}L) & \\
H_q(X, u^{-1}v^{-1}u^{-1}L) \arrow[u, "H_q(X, j)", "\approx"'] \arrow[r, "H_q(u, v^{-1}u^{-1}L)"] & H_q(Y, v^{-1}u^{-1}L) \arrow[ul, "H_q(v, u^{-1}L)"']
\end{tikzcd}$$

показывающая, что морфизм $H_q(v, u^{-1}L)$ является эпиморфизмом.

Следовательно, морфизм $H_q(v, u^{-1}L)$, а значит, и морфизм $H_q(u, L)$ обратим.

ЛИТЕРАТУРА

Андре (André M.)
1. Limites et fibrés, *Compt. rend.*, 260, 756—759 (1965).
2. Derived functors in non-abelian categories (mimeographed notes).

Артин (Artin M.)
1. Grothendieck topology (mimeographed notes), Harvard, 1962.

Артин, Мазур (Artin M., Mazur B.)
1. On the van Kampen theorem, *Topology*, **5**, 179—189 (1966).

Баррат (Barratt M. G.)
1. Track groups, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) **5**, 71—106 (1955).

Баррат, Гугенхейм, Мур (Barratt M. G., Guggenheim V.K.A.M., Moore J.C.)
1. On semisimplicial fibre bundles, *Amer. J. Math.*, **81**, 639—657 (1959).

Вердье (Verdier J.)
1. Thesis, to appear.

Габриель (Gabriel P.)
1. Catégories abeliennes, *Bull. Soc. Math. France*, **90**, 1962.

Годеман (Godement R.)
1. Théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.

Гротендик (Grothendieck A.)
1. Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhuku Math. J.*, Ser II, **9**, 120 — 221 (1957). (Есть русский перевод: Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, ИЛ, М., 1961.)

Губер (Huber P.J.)
1. Homotopy theory in general categories, *Math. Ann.*, **144**, 361—385 (1961). (Есть русский перевод: *Математика*, 9 : 4, 41—67).

Гугенхейм (Guggenheim V.K.A.M.)
1. On supercomplexes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85**, 35—51 (1957).

Дольд (Dold A.)
1. Die geometrische Realisierung eines schiefen kartesischen Produktes, *Arch. Math.*, **9** (1958).

Дольд, Пуппе (Dold A., Puppe D.)
1. Homologie nicht additiver Funktoren, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **11**, 201—312 (1961).

Зильбер (Zilber J.A.)
1. Categories in homotopy theory, Dissertation (mimeographed) Harvard University, 1963.

Кан (Kan D.M.)
1. Abstract homotopy, I, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, **41**, 1092 (1955).
2. Abstract homotopy, II, III, IV, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.*, **42**, 255, 419, 542 (1956).

3. A combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math.*, 67, 282—312 (1958). (Есть русский перевод: *Математика*, 6:1, 3 (1962).)
4. Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 7, 294—329 (1958). (Есть русский перевод: *Математика*, 3: 2, 3—38.)
5. On homotopy theory and C.S.S. groups, *Ann. of Math.*, 68, 38—53 (1958).
6. The Hurewicz theorem, Proc. Int. Symp. Algebraic Topology and its applications, Mexico, 1956.
7. On the homotopy relation for C.S.S. maps, *Bol. Soc. Math. Mexicana*, 1957, 75—81.
8. On C.S.S. complexes, *Amer. J. Math.*, 79, 449—476 (1957).
9. On C.S.S. categories, *Bol. Soc. Math. Mexicana*, 1957, 82—94.
10. Minimal free C.S.S. groups, *Ill. J. Math.*, 2, 537—547 (1958).
11. A relation between CW complexes and free C.S.S. groups, *Amer. J. Math.* 81, 512—528 (1959).

Картан А. (Cartan H.)
1. Séminaire E.N.S. 1956/57, exposé 1.

Картан А., Эйленберг (Cartan H., Eilenberg S.)
1. Homological algebra, Princeton University Press, 1956. (Есть русский перевод: Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960.)

Ламотке (Lamotke K.)
1. Beiträge zur Homotopietheorie simplizialer Mengen, *Bonn. Math. Schr.*, 17 (1963).

Маклейн (Maclane S.)
1. Simplicial topology, Lecture notes by J. Yao, Chicago, 1959.
2. Homology, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114. Springer, 1963. (Есть русский перевод: Маклейн С., Гомология, „Мир", М., 1966.)

Милнор (Milnor J.W.)
1. The construction FK, Princeton University (mimeographed), 1955.
2. The geometric realization of a semi-simplicial complex, *Ann. Math.*, 65, 357—362 (1957).
3. On spaces having the homotopy type of a CW-complex, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90, 272—280 (1959).

Митчелл (Mitchell B.)
1. Theory of Categories, New York, Academic Press

Мур (Moore J.C.)
1. Semi-simplicial complexes and Postnikov systems, Proc. Int. Symp. on algebraic topology and its applications, Mexico, 1956.
2. Homotopie des complexes monoidaux, Séminaire H. Cartan, 1954/55.
3. Systémes de Postnikov et complexes monoidaux, Séminaire H. Cartan 1954/55.
4. Seminar on algebraic homotopy, Lecture notes, Princeton, 1955.
5. C.S.S. complexes and Postnikov systems, Lecture notes Princeton, 1957.

Пуппе (Puppe D.)
1. Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I, *Math. Z.*, 69, 299—344 (1958).

Рёрль (Röhrl H.)
1. Über Satelliten halbexakter Funktoren, *Math. Z.*, 79, fasc 3 (1962).

Спеньер (Spanier E.H.)
1. Duality S-theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 62, 194—203 (1956). (Есть русский перевод: *Математика*, 3: 1, 17—25 (1959).)

Спеньер, Уайтхед (Spanier E.H., Whitehead H.C.)
1. Duality in homotopy theory, *Mathematika*, № 2, 58—80 (1955).

Уайтхед (Whitehead J.H.C.)
1. Combinatorial homotopy I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 213—245 (1949).

Хилтон (Hilton P.J.)
1. Homotopy theory and duality, Cornell University, 1959 (mimeographed lecture notes); Gordon and Breach, 1965.

Хилтон, Уайли (Hilton P.J., Wylie S.)
1. Homology theory, an introduction to algebraic topology, Cambridge University Press, 1960. (Есть русский перевод: Хилтон, Уайли, Теория гомологий, „Мир", М., 1967.)

Цисман (Zisman M.)
1. Quelques propriétés des fibrés au sens de Kan, *Inst. Fourier, Grenoble*, 10, 345 — 457 (1960).

Эйленберг, Зильбер (Eilenberg S., Zilber J.A.)
1. Semi-simplicial complexes and singular homology, *Ann. of Math.*, 51, 499—513 (1950).
2. On products of complexes, *Amer. J. Math.*, 75, 200—204 (1953).

Экман, Хилтон (Eckmann B., Hilton P.J.)
1. Groupes d'homotopie et dualité, *Compt. rend.*, 246, 2444, 2555, 2991 (1958). (Есть русский перевод: *Математика*, 4: 3, 3—18.)
2. Transgression homotopique et cohomologique, *Compt. rend.*, 247, 620 (1958). (Есть русский перевод: *Математика*, 4: 3, 18—24.)

Эпштейн (Epstein D.B.A.)
1. Semisimplicial objects and the Eilenberg-Zilber theorem, *Invent. math. fasc.*, 3, 1 (1966).

Предметный указатель

Оглавление

П. ГАБРИЕЛЬ, М. ЦИСМАН

КАТЕГОРИИ ЧАСТНЫХ и ТЕОРИЯ ГОМОТОПИЙ

Редактор *Г. Цукерман*
Художник *Ф. Лейн*
Художественный редактор *В. Шаповалов*
Технический редактор *Е. Потапенкова*
Корректор *В. Постнова*

Сдано в набор 29/VI 1970 г.
Подписано к печати 24/VIII 1971 г.
Бумага тип. № 1 $60 \times 90^1/_{16} = 9{,}25$ бум. л.
Усл. печ. л. 18,50. Уч.-изд. л. 14,33
Изд. № 1/5136. Цена 1 р. 50 к. Зак. 828

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Напечатано в Румынии
Полиграфическое предприятие «13 Дечембрие»
Бухарест, 1971

696