ариас

Х. Гаевский
К. Грёгер
К. Захариас

MATHEMATISCHE LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN

HERAUSGEGEBEN VON DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER DDR
ZENTRALINSTITUT FÜR MATHEMATIK UND MECHANIK

II. ABTEILUNG
MATHEMATISCHE MONOGRAPHIEN

BAND 38

NICHTLINEARE OPERATORGLEICHUNGEN UND OPERATORDIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

HERBERT GAJEWSKI · KONRAD GRÖGER
KLAUS ZACHARIAS

AKADEMIE-VERLAG BERLIN
1974

Х. ГАЕВСКИЙ, К. ГРЁГЕР, К. ЗАХАРИАС

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПЕРАТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО

В.Г. ЗАДОРОЖНЕГО и А.И. ПЕРОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

В.И. СОБОЛЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА

1978

УДК 517.944+519.55

Теория монотонных операторов — быстро развивающаяся ветвь нелинейного функционального анализа, которая находит широкое применение при исследовании и приближенном решении краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

В книге излагается связь между краевыми задачами и задачами с краевыми и начальными условиями для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, с одной стороны, и операторными и операторными дифференциальными уравнениями с монотонными операторами — с другой; проводится тщательное исследование таких уравнений и указываются алгоритмы приближенного отыскания решений.

Книга доступна студентам старших курсов физико-математических специальностей и полезна всем, интересующимся методами исследования и приложениями нелинейного функционального анализа.

Редакция литературы по математическим наукам

Г $\frac{20203\text{-}003}{041(01)\text{-}78}$ 3-78

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая читателю книга является переводом одного из томов серии «Учебники и монографии по математике», издаваемой Академией наук ГДР, и посвящена важному и бурно развивающемуся разделу нелинейного функционального анализа — теории монотонных операторов и ее приложениям. Вместе с монографией М. М. Вайнберга «Вариационный метод и метод монотонных операторов» («Наука», 1974) она может послужить хорошим введением в предмет и подготовить читателя к изучению журнальной литературы.

Принадлежность книги к указанной выше серии определила характер изложения. В ней приводятся (в большинстве случаев без доказательств) все необходимые сведения из общего функционального анализа и обстоятельно обсуждаются функционально-аналитические формулировки краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. При изложении основного материала все утверждения снабжаются подробными доказательствами и дается достаточное число примеров, иллюстрирующих общие понятия и теоремы. К достоинствам книги следует отнести явное указание методов, при помощи которых могут быть получены приближенные решения рассматриваемых краевых задач, и выяснение условий сходимости этих методов.

Отметим своеобразие стиля изложения, при котором замечания к теоремам вклиниваются между формулировками и доказательствами и сюда же вставляются необходимые леммы вместе с их доказательствами.

Для русского издания авторы прислали ряд исправлений и уточнений. Мы приносим им за это искреннюю благодарность.

В. И. Соболев

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

После опубликования немецкого издания появилось много новых работ по теории монотонных операторов и ее применениям. Мы хотели бы в особенности отметить монографии Брезиса [5], Барбу [1], Дюво и Лионса [1]. Некоторые из обсуждаемых в книге вопросов в свете новых результатов можно было бы изложить короче. Однако мы отказались от соответствующих изменений, чтобы не задерживать выход в свет русского издания. К тому же, на наш взгляд, книга в данном ее виде и сегодня отвечает своему основному назначению — быть введением в теорию монотонных операторов и ее применения. Мы ограничились тем, что устранили обнаруженные нами неточности и опечатки и пополнили список литературы.

Нас радует появление русского перевода нашей книги, и мы надеемся, что она будет полезна ее читателям в Советском Союзе.

Берлин, октябрь 1976

Х. Гаевский *К. Грёгер* *К. Захариас*

ПРЕДИСЛОВИЕ

При надлежащей интерпретации понятия производной многие важные классы краевых задач и задач с краевыми и начальными условиями для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными можно трактовать как операторные уравнения или операторные дифференциальные уравнения в рефлексивных банаховых пространствах и изучать при помощи теории монотонных операторов.

Теория монотонных операторов в рефлексивных банаховых пространствах является сегодня одной из важнейших областей нелинейного функционального анализа. Ее истоки лежат в так называемых вариационных методах, и приблизительно с 1960 г. она быстро и плодотворно развивается в тесном взаимодействии с теорией выпуклых функций и теорией нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

В настоящей книге, носящей учебный характер, дается изложение основных фактов теории монотонных операторов и эта теория систематически применяется к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. В первой главе собраны вспомогательные сведения из классического функционального анализа. Во второй главе объясняется связь между краевыми задачами для эллиптических дифференциальных уравнений и операторными уравнениями в рефлексивных банаховых пространствах. В гл. III представлены важнейшие понятия, методы и результаты теории операторных уравнений с монотонными операторами в рефлексивных банаховых пространствах. В гл. IV вводятся пространства функций со значениями в банаховых пространствах и показывается, в каком смысле задачу с краевыми и начальными условиями для дифференциальных уравнений с частными производными можно понимать как задачу с начальными условиями для операторных дифференциальных уравнений в рефлексивных банаховых пространствах. В гл. V—VII исследуются различные классы задач Коши для операторных дифференциальных уравнений.

Теории монотонных операторов и ее приложениям посвящены также вышедшие в последние годы монографии Лионса [1] и Вайнберга [3]. В то время как в этих монографиях рассматриваются преимущественно вопросы существования, в данной книге особое внимание уделяется доказательству сходимости приближенных методов. Однако ввиду ограниченного объема книги мы не смогли остановиться на целом ряде проблем, связанных с численной реализацией приближенных методов. Укажем лишь, что проблемы такого рода уже рассматривались Михлиным [3] в связи с вариационными методами. В качестве примера назовем проблему выбора подходящей полной системы функций при численной реализации метода Галёркина.

Для ориентации в начале каждой главы дается краткое изложение ее содержания. В основном тексте почти не делается ссылок на литературу. Литературные указания и некоторые исторические сведения можно найти в замечаниях, которыми заканчиваются все главы, за исключением первой. Приведенный в конце книги список литературы никоим образом не претендует на полноту. Насколько это было возможно, мы ссылались на работы обзорного характера.

Для понимания книги достаточно знать основы функционального анализа. Ради удобства читателя все вспомогательные сведения из функционального анализа включены в текст.

Книга задумана в первую очередь как рабочее введение в теорию монотонных операторов и руководство по приложениям этой теории к нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными. Кроме того, она может служить основой курса лекций по нелинейному функциональному анализу.

Берлин, апрель 1974

Х. Гаевский К. Грёгер К. Захариас

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В этой главе собраны основные понятия и вспомогательные сведения, которые нам понадобятся далее при исследовании дифференциальных уравнений средствами функционального анализа. Доказательства большинства формулируемых здесь предложений о банаховых и гильбертовых пространствах можно найти в любом стандартном руководстве по функциональному анализу (Люстерник и Соболев [1], Иосида [1], Канторович и Акилов [1], Смирнов [1]). Обстоятельное изложение вводимых в данной главе понятий топологии и теории локально выпуклых пространств имеется, например, в книгах Иосиды [1], Данфорда и Шварца [1], Канторовича и Акилова [1]. Те результаты о банаховых и гильбертовых пространствах, которые в указанных книгах не рассматриваются или лишь кратко затрагиваются, приведены с доказательствами.

§ 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1.1. Семейство τ подмножеств множества X называется *топологией* в X, если оно удовлетворяет следующим условиям:

a) Пустое множество и все множество X принадлежат τ.

b) Объединение произвольного числа множеств из τ принадлежит τ.

c) Пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ.

Пара $\{X, \tau\}$, состоящая из множества X и топологии τ в нем, называется *топологическим пространством.* Когда это не приводит к недоразумениям, мы будем топологическое пространство $\{X, \tau\}$ обозначать, как и лежащее в его основе множество, через X. Элементы топологического пространства именуют точками. Множества из τ называют *открытыми* множествами топологического пространства $\{X, \tau\}$. Дополнения к открытым множествам называют *замкнутыми* множествами. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих некоторое множество $M \subset X$, называется *замыканием* этого множества, а объединение всех открытых множеств, содержащихся в M, — его *внутренностью*. Замыкание и внутренность множества M обозначаются соответственно через $\bar{M}$ и $\operatorname{int} M$. Множество $\bar{M} \setminus \operatorname{int} M$ называют *границей* множества M.

Определение 1.2. Множество U топологического пространства X называется *окрестностью* точки $x \in X$, если оно содержит открытое множество V, такое, что $x \in V$.

Определение 1.3. Семейство β подмножеств в X называется *базисом* топологического пространства X, если любое открытое множество этого пространства является объединением множеств из β.

Лемма 1.1. Семейство β подмножеств множества X является базисом некоторой топологии в X точно тогда, когда

a) для любых $U, V \in \beta$ и $x \in U \cap V$ существует $W \in \beta$, такое, что $x \in W \subset U \cap V$;

b) X является объединением всех множеств из β.

Определение 1.4. Множество M в топологическом пространстве X называется (всюду) *плотным*, если $\bar{M} = X$. Топологическое пространство X *сепарабельно*, если в нем существует счетное плотное множество.

Определение 1.5. Отображение A топологического пространства X в топологическое пространство Y называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности V точки $y_0 = Ax_0$ существует такая окрестность U точки x_0, что из $x \in U$ следует $Ax \in V$. Говорят, что отображение $A \in (X \to Y)$ [1]) *непрерывно*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Определение 1.6. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым* (или *отделимым*), если у любых двух различных точек x и y пространства X имеются непересекающиеся окрестности.

Определение 1.7. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ точек топологического пространства X *сходится* в X к $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует натуральное число $N(U)$, такое, что при $n > N(U)$ все x_n принадлежат U. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, то x называется ее *пределом*.

Замечание 1.1. В хаусдорфовом пространстве всякая последовательность $\{x_n\}$ имеет не более одного предела.

---

[1]) Для произвольных множеств M и N мы обозначаем через $(M \to N)$ совокупность всех определенных на M отображений со значениями в N.

Определение 1.8. Множество M топологического пространства M называется *компактным*, если оно замкнуто и каждая последовательность его точек содержит хотя бы одну сходящуюся подпоследовательность [1]).

§ 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 2.1. Функция d, ставящая в соответствие каждой паре $\{x, y\}$ элементов множества X неотрицательное вещественное число, называется *расстоянием* (или *метрикой*) в X, если она при любых $x, y, z \in X$ удовлетворяет следующим условиям:

a) $d(x, y) = 0$ точно тогда, когда $x = y$;
b) $d(x, y) = d(y, x)$;
c) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (*неравенство треугольника*).

Пара $\{X, d\}$, состоящая из множества X и метрики d в нем, называется *метрическим пространством*. Когда это не приводит к недоразумениям, мы будем метрическое пространство $\{X, d\}$ обозначать, как и лежащее в его основе множество, через X.

Определение 2.2. Для произвольной точки x_0 метрического пространства X множество $\{x \mid x \in X,\ d(x, x_0) < R\}$ называется *открытым шаром* радиуса R с центром в точке x_0, а множество $\{x \mid x \in X,\ d(x, x_0) \leqslant R\}$ — *замкнутым шаром* радиуса R с центром в x_0.

Замечание 2.1. Открытые шары метрического пространства X можно принять в качестве базиса некоторой топологии в X. Всюду далее мы будем рассматривать метрические пространства как топологические именно в этом смысле. (Введением такой топологии оправдывается использование прилагательных «открытый» и «замкнутый» в определении 2.2.) Всякое метрическое пространство хаусдорфово.

Замечание 2.2. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X сходится к точке $x \in X$ в смысле топологии этого пространства точно тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Вместо $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ обычно пишут $x_n \to x$ в X. Отображение A метрического пространства X в метрическое пространство Y

[1]) Обычно такие множества называют секвенциально компактными, однако для метрических пространств, которые в основном рассматриваются в данной книге, эти понятия совпадают. — *Прим. ред.*

непрерывно в точке $x \in X$ в том и только том случае, если $x_n \to x$ в X влечет $Ax_n \to Ax$ в Y.

Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если она удовлетворяет условию $\lim\limits_{n, m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$. Метрическое пространство X *полно*, если каждая фундаментальная последовательность в нем сходится (к элементу из X).

Определение 2.4. Отображение A метрического пространства X в себя называется *сжимающим отображением* (или, короче, *сжатием*), если существует такое число $q < 1$, что для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство $d(Ax, Ay) \leqslant qd(x, y)$. При этом число q называется *постоянной сжатия* для отображения A.

Теорема 2.1 (принцип неподвижной точки Банаха). *В полном метрическом пространстве X всякое сжимающее отображение A имеет точно одну неподвижную точку x, т. е. такую точку $x \in X$, что $Ax = x$. При этом для любого элемента x_0 из X последовательность $\{x_n\}$, определенная соотношениями $x_{n+1} = Ax_n$, $n = 0$, $1, \ldots$, сходится к неподвижной точке x и имеет место оценка*

$$d(x_n, x) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_0, Ax_0).$$

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 3.1. Говорят, что на множестве X задана (вещественная) *линейная структура* λ, если для любых двух элементов $x, y \in X$ определена их сумма $x + y \in X$, а также определено произведение $tx \in X$ любого элемента $x \in X$ на любое вещественное число t, причем удовлетворяются следующие условия:

a) $x + y = y + x$;

b) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

c) в X существует элемент 0 со свойством $x + 0 = x$ $\forall x \in X$;

d) для каждого $x \in X$ существует элемент $-x \in X$ со свойством $x + (-x) = 0$;

e) $1 \cdot x = x$, $s(tx) = (st)x$;

f) $(s + t)x = sx + tx$, $t(x + y) = tx + ty$.

Здесь x, y, z — произвольные элементы из X и s, t — произвольные вещественные числа.

Пара $\{X, \lambda\}$, состоящая из множества X и заданной на нем (вещественной) линейной структуры λ, называется (вещественным) *линейным* (или *векторным*) *пространством*. Когда это не приводит к недоразумениям, мы будем линейное пространство $\{X, \lambda\}$ обозначать, как и лежащее в его основе множество, через X.

Замечание 3.1. Линейные пространства можно определить над произвольным полем, в частности также над полем комплексных чисел. Поскольку мы будем использовать в дальнейшем только вещественные пространства, то в предыдущем определении мы ограничились этим случаем.

Определение 3.2. Подмножество F линейного пространства X называется его *подпространством*, если для любых вещественных чисел s, t из включений $x, y \in F$ следует включение $sx + ty \in F$, т. е. если F представляет собой линейное пространство относительно определенных в X операций. Пересечение всех подпространств линейного пространства X, содержащих данное множество $M \subset X$, называется *линейной оболочкой* этого множества.

Замечание 3.2. Линейная оболочка множества $M \subset X$ является подпространством в X; она состоит из линейных комбинаций элементов множества M, т. е. из элементов вида $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, $t_i \in R^1$, $x_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь R^1 обозначает пространство вещественных чисел.

Определение 3.3. Элементы $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства называются *линейно независимыми*, если из соотношения $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = 0$ следует, что $t_1 = \ldots = t_n = 0$. В противном случае $x_1, \ldots, x_n$ называются *линейно зависимыми*. Линейное пространство X называют *n-мерным*, если в нем есть n линейно независимых элементов, а любые $n + 1$ элементов линейно зависимы. Если в X имеется сколь угодно большое число линейно независимых элементов, то говорят, что пространство X *бесконечномерно*.

Определение 3.4. Отображение A линейного пространства X в линейное пространство Y называется *линейным отображением* или *линейным оператором* [1]), если для любых $x, y \in X$ и любых вещественных чисел s, t имеет место равенство $A(sx + ty) = sAx + tAy$.

Определение 3.5. Отображения линейного пространства X в пространство R^1 вещественных чисел называют *функционалами*.

[1]) Здесь и в дальнейшем мы используем термин «оператор» как синоним термина «отображение».

В случае когда такое отображение линейно, говорят о *линейном функционале*.

Определение 3.6. Подмножество M линейного пространства X называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками x и y этому множеству принадлежит и соединяющий их отрезок, т. е. множество $\{tx+(1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$.

§ 4. ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 4.1. Под *полунормой* на линейном пространстве X понимается всякий функционал p, который удовлетворяет следующим условиям:

a) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$;

b) $p(tx) = |t|p(x)$.

Линейное пространство, являющееся одновременно и топологическим, называется *локально выпуклым пространством*, если существует такое семейство μ полунорм на X, что

a) если $p(x)=0$ для каждого $p \in \mu$, то $x=0$;

b) совокупность (выпуклых) множеств вида $\{x \mid x \in X,\ p_i(x-x_0) < \varepsilon_i$ для $i=1, \ldots, n\}$ образует базис топологии в X (здесь x_0 — произвольная точка из X, $p_1, \ldots, p_n$ — любая конечная система полунорм из μ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — любая конечная система положительных вещественных чисел).

Замечание 4.1. Локально выпуклые пространства хаусдорфовы.

Замечание 4.2. Пусть X — линейное пространство и μ — какое угодно семейство полунорм на нем. Тогда множества вида $\{x \mid p_i(x-x_0) < \varepsilon_i,\ x_0 \in X,\ p_i \in \mu,\ i=1, \ldots, n\}$ в силу леммы 1.1 образуют базис некоторой топологии в X, т. е. семейство μ индуцирует топологию на X. Если из того, что $p(x)=0$ для каждого $p \in \mu$, следует, что $x=0$, то X, наделенное топологией, индуцируемой μ, будет локально выпуклым пространством.

Замечание 4.3. Последовательность $\{x_n\}$ точек локально выпуклого пространства X сходится к $x \in X$ в том и только том случае, если для каждой полунормы $p \in \mu$ выполняется соотношение $\lim\limits_{n \to \infty} p(x_n - x) = 0$. Полунормы $p \in \mu$ являются непрерывными функционалами на X.

Определение 4.2. Последовательность $\{x_n\}$ точек локально выпуклого пространства X называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любой окрестности U

нуля существует натуральное число $N(U)$, такое, что при $n, m > N(U)$ имеет место включение $x_n - x_m \in U$. Локально выпуклое пространство X называется *полным* [1]), если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится (к элементу из X).

Замечание 4.4. На множестве всех непрерывных линейных отображений локально выпуклого пространства X в локально выпуклое пространство Y, которое мы в дальнейшем всегда будем обозначать через $\mathscr{L}(X, Y)$, можно естественным образом определить линейную структуру при помощи соотношений

$$(A+B)x = Ax + Bx \qquad \forall x \in X,$$
$$(tA)x = t(Ax) \qquad \forall x \in X, \quad \forall t \in R^1.$$

Здесь A и B — любые элементы из $\mathscr{L}(X, Y)$. Линейное пространство $\mathscr{L}(X, Y)$ можно превратить в локально выпуклое пространство, используя семейство полунорм $p_{x,q}(A) = q(Ax)$ (где x — произвольный элемент из X, q — произвольная непрерывная полунорма на Y). Соответствующую топологию мы будем называть *простой топологией* в $\mathscr{L}(X, Y)$, а сходимость относительно простой топологии — *поточечной сходимостью.* Пространство $\mathscr{L}(X, Y)$ может быть топологизировано также различными другими способами.

Определение 4.3. Пусть X — локально выпуклое пространство. Пространство $X^* = \mathscr{L}(X, R^1)$ линейных непрерывных функционалов на X называется *сопряженным* к X.

Замечание 4.5. Значение линейного функционала $f \in X^*$ в точке $x \in X$ мы часто вместо $f(x)$ будем записывать в виде $\langle f, x\rangle$. Функцию $\langle \cdot, \cdot \rangle$, определенную на $X^* \times X$, называют *скалярным произведением между* X^* и X.

Теорема 4.1 (теорема Хана — Банаха). *Пусть X — линейное пространство, p — некоторая полунорма на X и Y — некоторое подпространство в X. Пусть, далее, f — линейный функционал на Y, такой, что*

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad \forall x \in Y.$$

Тогда существует линейный функционал f_1 на X, который удовлетворяет следующим условиям:

a) $f_1(x) = f(x) \qquad \forall x \in Y$ (*т. е. f_1 является продолжением f*);

b) $|f_1(x)| \leqslant p(x) \qquad \forall x \in X.$

[1]) Точнее, секвенциально полным. — *Прим. ред.*

Замечание 4.6. Пусть X — локально выпуклое пространство. Из теоремы 4.1 следует, что для каждого $x \in X$, $x \neq 0$, существует элемент $f \in X^*$, такой, что $f(x) \neq 0$.

Замечание 4.7. Каждое локально выпуклое пространство X можно наделить новой локально выпуклой топологией, используя полунормы $p_f(x) = |f(x)|$, $f \in X^*$. Соответствующая топология называется *слабой* (или *ослабленной*) *топологией* в X, а соответствующая сходимость — *слабой сходимостью в* X. Последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится в X к $x \in X$ в том и только том случае, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ для каждого $f \in X^*$. При этом об элементе x говорят как о *слабом пределе* последовательности $\{x_n\}$ в X.

Множества M локально выпуклого пространства X, замкнутые в смысле слабой топологии, кратко называют *слабо замкнутыми.* Будут использоваться соответственно и термины *«слабо открытый»*, *«слабо полный»*, *«слабо компактный»*.

Определение 4.4. Пусть локально выпуклое пространство X содержится в локально выпуклом пространстве Y. Отображение $I \in (X \to Y)$, определяемое равенством

$$Ix = x \qquad \forall x \in X,$$

называется *оператором вложения* или, короче, *вложением* X в Y. Говорят, что X непрерывно вложено в Y, если оператор I непрерывен.

§ 5. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение 5.1. Под *нормой* $\|\cdot\|$ на линейном пространстве X понимается всякий функционал, который удовлетворяет следующим условиям:

a) $\|x\| = 0$ точно тогда, когда $x = 0$;

b) $\|tx\| = |t|\,\|x\| \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in R^1$;

c) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых x, $y \in X$ (неравенство треугольника).

Пара $\{X, \|\cdot\|\}$, состоящая из линейного пространства X и нормы $\|\cdot\|$ на нем, называется *нормированным пространством.* Когда это не приводит к недоразумениям, мы будем нормированное пространство $\{X, \|\cdot\|\}$ обозначать, как и лежащее в его основе линейное пространство, через X.

Если линейное пространство X наделено некоторой нормой, то мы часто будем обозначать ее (чтобы отличать от норм в других пространствах) через $\|\cdot\|_X$.

Замечание 5.1. В нормированном пространстве можно ввести расстояние при помощи равенства $d(x, y) = \|x - y\|$. Имея это в виду, мы будем рассматривать всякое нормированное пространство как метрическое (а тем самым и как топологическое). Последовательность $\{x_n\}$ точек нормированного пространства X сходится в смысле топологии этого пространства к точке $x \in X$ точно тогда, когда $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Замечание 5.2. Пусть X — нормированное пространство. Норма на X является, очевидно, и полунормой (см. определение 4.1) и потому индуцирует, согласно замечанию 4.2, некоторую топологию на X. Последняя совпадает с топологией, индуцированной метрикой. В этом смысле X одновременно является и локально выпуклым пространством. При этом понятия фундаментальной последовательности и полноты в смысле метрического пространства согласуются с соответствующими понятиями в смысле локально выпуклого пространства.

Определение 5.2. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, определенные на линейном пространстве X, называются *эквивалентными*, если существуют такие числа m_1 и m_2, что

$$\|x\|_1 \leqslant m_1 \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leqslant m_2 \|x\|_1 \qquad \forall x \in X.$$

Замечание 5.3. На конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Замечание 5.4. Эквивалентные нормы на линейном пространстве X порождают одинаковые топологии.

Определение 5.3. Подмножество M нормированного пространства X называется *полным* в X, если его линейная оболочка плотна в X.

Определение 5.4. Линейное отображение A нормированного пространства X в нормированное пространство Y называется *ограниченным*, если существует такая постоянная K, что для всех $x \in X$ выполняется условие $\|Ax\|_Y \leqslant K\|x\|_X$.

Теорема 5.1. *Линейное отображение A нормированного пространства X в нормированное пространство Y точно тогда непрерывно, когда оно ограничено.*

Замечание 5.5. Если X и Y — нормированные пространства, то на локально выпуклом пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$ можно ввести норму с помощью равенства

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y, \qquad A \in \mathscr{L}(X, Y).$$

В дальнейшем в случае нормированных пространств X и Y под $\mathscr{L}(X, Y)$ мы будем иметь в виду пространство, нормированное именно таким способом.

Определение 5.5. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством.*

Замечание 5.6. Сопряженное $X^* = \mathscr{L}(X, R^1)$ к нормированному пространству X является банаховым пространством.

Теорема 5.2 (теорема Хана — Банаха). *Каждый линейный непрерывный функционал f, определенный на подпространстве F нормированного пространства X, можно продолжить без изменения нормы на все пространство X, т. е. существует такой функционал $f_1 \in X^*$, что $\|f_1\| = \|f\|$ и $f_1(x) = f(x)$ для всех $x \in F$.*

Следствие. Для любого замкнутого подпространства F нормированного пространства X и любого $x \notin F$ найдется элемент $f \in X^*$ с такими свойствами:

a) $f(y) = 0 \quad \forall y \in F$;

b) $f(x) \neq 0$.

Замечание 5.7. Теорема 5.2 — частный случай теоремы 4.1.

Замечание 5.8. Для нормы $\|f\|_{X^*}$ линейного функционала $f \in X^*$ имеет место равенство (см. замечания 5.5 и 4.5)

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X = 1} \langle f, x\rangle.$$

Из теоремы Хана — Банаха можно вывести, что

$$\|x\|_X = \sup_{\|f\|_{X^*} = 1} \langle f, x\rangle.$$

Для любых $x \in X$ и $f \in X^*$ имеет место неравенство

$$\langle f, x\rangle \leqslant \|f\|_{X^*} \|x\|_X.$$

Теорема 5.3 (теорема Банаха — Штейнгауза). *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и $\{A_n\}$ — последовательность операторов из $\mathscr{L}(X, Y)$. Если для каждого $x \in X$ последовательность $\{\|A_n x\|\}$ ограничена, то ограничена и последовательность $\{\|A_n\|\}$.*

Замечание 5.9. Для каждого элемента x нормированного пространства X существует единственный элемент $x^{**} \in X^{**} = (X^*)^*$, обладающий свойством

$$\langle x^{**}, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle \quad \forall x^* \in X^*.$$

При этом $\|x\|_X = \|x^{**}\|_{X^{**}}$. Таким образом, пространство X можно рассматривать как подпространство банахова пространства X^{**}. В дальнейшем мы так и будем делать.

Определение 5.6. Банахово пространство X называется *рефлексивным*, если $X = X^{**}$.

Теорема 5.4. *Пространство X^*, сопряженное к банахову пространству X, является рефлексивным одновременно с пространством X.*

Лемма 5.1. Для любого оператора $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ существует точно один оператор $A^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$, такой, что для любых $x \in X$ и $y^* \in Y^*$ выполняется соотношение

$$\langle y^*, Ax\rangle = \langle A^*y^*, x\rangle.$$

Определение 5.7. Оператор $A^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$, соответствующий по лемме 5.1 оператору $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, называется *сопряженным* к A. Если пространство X рефлексивно и оператор $A \in \mathscr{L}(X, X^*)$ обладает свойством $A^* = A$, то говорят, что этот оператор *самосопряжен.*

Замечание 5.10. Обычную сходимость в нормированном пространстве X, т. е. сходимость в смысле топологии, определяемой нормой, мы часто для отличия от слабой сходимости (см. замечание 4.7) будем называть *сильной* сходимостью в X. Всякая последовательность $\{x_n\}$, сильно сходящаяся в X к элементу x, сходится также и слабо к x в X. Обратное, вообще говоря, неверно. В конечномерном случае сильная и слабая сходимости совпадают. Для обозначения сильной сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x мы используем запись $x_n \to x$, а для обозначения слабой сходимости $\{x_n\}$ к x — запись $x_n \rightharpoonup x$.

Теорема 5.5. *Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства X слабо сходится к $x \in X$ точно тогда, когда последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ для всех f из некоторого плотного в X^* множества функционалов.*

Лемма 5.2. Если $\{x_n\}$ — слабо сходящаяся к x последовательность в нормированном пространстве X и $\{f_n\}$ — сильно сходящаяся к f последовательность в сопряженном пространстве X^*, то

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, x_n\rangle = \langle f, x\rangle.$$

Теорема 5.6. *Пусть M — выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства X. Тогда для каждой точки $x \notin M$ существует функционал $f \in X^*$, такой, что*

$$\langle f, x\rangle > \sup_{y \in M} \langle f, y\rangle.$$

Теорема 5.7. *Если M — выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства X и $\{x_n\}$ — слабо сходящаяся последовательность точек из M, то ее предел x тоже принадлежит M.*

Лемма 5.3. Если последовательность $\{x_n\}$ в банаховом пространстве X слабо сходится к x, то

$$\|x\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Теорема 5.8. *Рефлексивные банаховы пространства слабо полны.*

Теорема 5.9. *В рефлексивном банаховом пространстве каждый замкнутый шар слабо компактен. Следовательно, каждая ограниченная последовательность имеет слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема 5.10. *Если замкнутый шар K рефлексивного банахова пространства X содержится в объединении некоторой системы слабо открытых множеств, то он содержится в объединении конечного числа множеств этой системы.*

Следствие. Пусть Φ — некоторая система слабо замкнутых подмножеств замкнутого шара в рефлексивном банаховом пространстве. Если для любой конечной подсистемы $\Psi \subset \Phi$ имеет место соотношение $\bigcap\limits_{U \in \Psi} U \neq \varnothing$, то $\bigcap\limits_{U \in \Phi} U \neq \varnothing$.

Лемма 5.4. Если все слабо сходящиеся подпоследовательности ограниченной последовательности $\{x_n\}$ в рефлексивном банаховом пространстве сходятся к одному и тому же элементу x, то x является слабым пределом этой последовательности.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся $f \in X^*$, $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$, $j = 1, 2, \ldots$, последовательности $\{x_n\}$, такие, что для $j = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$|\langle f, x_{n_j}\rangle - \langle f, x\rangle| > \varepsilon. \tag{5.1}$$

По теореме 5.9 последовательность $\{x_{n_j}\}$ обладает слабо сходящейся подпоследовательностью, пределом которой по предположению является элемент x. Но это противоречит неравенствам (5.1). Лемма доказана.

Определение 5.8. Отображение A замкнутого подмножества M банахова пространства X в банахово пространство Y называется *деминепрерывным*, если из того, что $x_n \to x$ в X, $x_n \in M$, следует, что $Ax_n \rightharpoonup Ax$ в Y.

Определение 5.9. Банахово пространство X называется *строго выпуклым*, если из $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ и $x \neq y$ следует $\|x + y\| < 2$. Пространство X называется *равномерно выпуклым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ и $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ следует $\|x + y\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon))$.

Теорема 5.11. *Каждое равномерно выпуклое банахово пространство рефлексивно.*

Теорема 5.12. *Если X — равномерно выпуклое банахово пространство, то из $x_n \rightharpoonup x$ в X и $\|x_n\| \to \|x\|$ следует $x_n \to x$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $\|x\| = 1$ и $\|x_n\| \neq 0$. Положим $y_n = x_n / \|x_n\|$; тогда $\|y_n\| = 1$ и $y_n \rightharpoonup x$. Далее, в силу равномерной выпуклости X

$$2(1 - \delta(\|y_n - x\|)) \geqslant \|y_n + x\| \geqslant \langle f, y_n + x\rangle;$$

здесь δ — некоторая неубывающая функция, причем $\delta(\xi) > 0$ для $\xi > 0$, и $f \in X^*$, $\|f\| = 1$. Отсюда при $n \to \infty$ получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} 2(1 - \delta(\|y_n - x\|)) \geqslant \sup_{\|f\|=1} 2\langle f, x\rangle = 2\|x\| = 2.$$

Это возможно только при условии, что $y_n \to x$. Следовательно, и $x_n = \|x_n\| y_n \to x$. Теорема доказана.

Лемма 5.5. Если сопряженное X^* к банахову пространству X является строго выпуклым, то для каждого $x \in X$ существует точно один элемент $Jx \in X^*$, обладающий свойством

$$\langle Jx, x\rangle = \|x\|_X^2 = \|Jx\|_{X^*}^2. \tag{5.2}$$

Доказательство. Для $x \in X$ формула

$$f(tx) = t\|x\|_X^2, \qquad t \in R^1,$$

определяет на одномерном пространстве, порожденном элементом x, линейный функционал f с нормой $\|x\|_X$. По теореме Хана — Банаха существует продолжение $Jx \in X^*$ функционала f, имеющее ту же самую норму. Для этого продолжения Jx соотношение (5.2), очевидно, выполняется.

Если для двух элементов $f_1, f_2 \in X^*$

$$\langle f_i, x\rangle = \|x\|_X^2 = \|f_i\|_{X^*}^2, \qquad i = 1, 2,$$

то

$$\|f_1 + f_2\|_{X^*} \|x\|_X \geqslant \langle f_1 + f_2, x\rangle = \|f_1\|_{X^*}^2 + \|f_2\|_{X^*}^2 = 2\|f_1\|_{X^*} \|x\|_X.$$

Вследствие строгой выпуклости пространства X^* это возможно только при $f_1 = f_2$. Следовательно, Jx определяется формулой (5.2) однозначно. Тем самым лемма полностью доказана.

Определение 5.10. Пусть X — банахово пространство, сопряженное X^* к которому строго выпукло. Преобразование $J \in (X \to X^*)$, характеризуемое соотношением (5.2), называется *дуализующим отображением* [1]) для пространства X.

Лемма 5.6. Для рефлексивного банахова пространства X со строго выпуклым сопряженным X^* дуализующее отображение деминепрерывно.

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ в X. Тогда, в силу (5.2), $\|Jx_n\|_{X^*} = \|x_n\|_X \to \|x\|_X$. По теореме 5.9 последовательность $\{Jx_n\}$ содержит подпоследовательность $\{Jx_{n_j}\}$, слабо сходящуюся в X^* к некоторому $f \in X^*$. Тогда для любого $y \in X$

$$\langle f, y\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle Jx_{n_j}, y\rangle \leqslant \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j}\|_X \|y\|_X = \|x\|_X \|y\|_X,$$

откуда следует, что $\|f\|_{X^*} \leqslant \|x\|_X$. С другой стороны,

$$\langle f, x\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle Jx_{n_j}, x_{n_j}\rangle = \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j}\|_X^2 = \|x\|_X^2.$$

Следовательно,

$$\langle f, x\rangle = \|x\|_X^2 = \|f\|_{X^*}^2.$$

Это значит, что $f = Jx$. Деминепрерывность J вытекает теперь из леммы 5.4, примененной к последовательности $\{Jx_n\}$. Лемма доказана.

Замечание 5.11. Пусть X и Y — банаховы пространства. Их декартово произведение $X \times Y$, являющееся линейным пространством с естественным образом определенными операциями, можно превратить в банахово пространство, если ввести на $X \times Y$ норму

$$\|\{x, y\}\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Соответственно можно наделить структурой банахова пространства декартово произведение любого конечного числа банаховых пространств.

Отметим, что имеются и другие простые способы нормировать декартовы произведения банаховых пространств.

Замечание 5.12. Если банаховы пространства X и Y непрерывно вложены в локально выпуклое пространство V, то их пересечение $X \cap Y$ можно превратить в банахово пространство, введя норму

$$\|x\|_{X\cap Y} = \|x\|_X + \|x\|_Y. \tag{5.3}$$

---

[1]) В оригинале Dualitätsabbildung. М. М. Вайнберг [3] употребляет термин «дуальное отображение». — *Прим. ред.*

Замечание 5.13. Если банаховы пространства X и Y непрерывно вложены в локально выпуклое пространство V, то множество $\{x+y \mid x \in X,\ y \in Y\}$, которое мы будем обозначать через $X+Y$, можно превратить в банахово пространство, введя на нем норму

$$\|z\|_{X+Y} = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y \\ x+y=z}} \max(\|x\|_X, \|y\|_Y). \tag{5.4}$$

Это замечание в отличие от двух предыдущих нуждается в подробном обосновании.

Если $\|z\|_{X+Y} = 0$, то согласно (5.4) для любого натурального числа n найдутся такие элементы $x_n \in X$, $y_n \in Y$, что

$$z = x_n + y_n, \quad \|x_n\|_X < \frac{1}{n}, \quad \|y_n\|_Y < \frac{1}{n}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ сходится в X и тем самым в V к 0. Соответствующее утверждение верно и для последовательности $\{y_n\}$. Следовательно, $x_n + y_n \to 0$ в V, откуда вытекает, что $z = 0$. Остальные свойства нормы $\|\cdot\|_{X+Y}$ проверяются без труда.

Докажем теперь полноту $X+Y$ относительно введенной нормы. Пусть $\{z_n\}$ — фундаментальная последовательность в $X+Y$. Она содержит подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, $k=0, 1, \ldots$, обладающую свойством

$$\|z_{n_k} - z_{n_{k-1}}\|_{X+Y} < 2^{-k} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

На основании определения нормы (5.4) существует разложение

$$z_{n_k} - z_{n_{k-1}} = u_k + v_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $u_k \in X$, $\|u_k\|_X < 2^{1-k}$, $v_k \in Y$, $\|v_k\|_Y < 2^{1-k}$. Далее,

$$z_{n_0} = u_0 + v_0, \quad u_0 \in X, \quad v_0 \in Y.$$

Положим

$$x_k = \sum_{i=0}^{k} u_i, \quad y_k = \sum_{i=0}^{k} v_i.$$

Тогда

$$z_{n_k} = x_k + y_k.$$

Последовательность $\{x_k\}$ сходится в X в силу построения, и аналогично последовательность $\{y_k\}$ сходится в Y. Пределы этих последовательностей обозначим соответственно через x и y и положим $z = x + y$. Тогда

$$\|z - z_{n_k}\|_{X+Y} \leqslant \max(\|x - x_k\|_X, \|y - y_k\|_Y).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{z_{n_k}\}$ сходится в $X+$ $+Y$ к z. Из оценки

$$\|z-z_n\|_{X+Y}\leqslant\left\|z-z_{n_k}\right\|_{X+Y}+\left\|z_{n_k}-z_n\right\|_{X+Y}$$

и того факта, что $\{z_n\}$ — фундаментальная последовательность, вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|z-z_n\|_{X+Y}=0$.

Замечание 5.14. Пусть для двух банаховых пространств X и Y выполняются условия

$$\begin{gathered} X\subset Y, \quad X \text{ плотно в } Y, \\ \|x\|_Y\leqslant\gamma\|x\|_X \quad \forall x\in X, \quad \gamma=\mathrm{const}. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Тогда каждый элемент $f\in Y^*$, рассматриваемый только на X, определяет некоторый непрерывный линейный функционал на X, т. е. некоторый элемент $f_X\in X^*$. Соответствие $f\to f_X$ является взаимно однозначным, поскольку f однозначно определяется своими значениями на X. Следовательно, Y^* можно отождествить с некоторым подпространством в X^*. Будем считать, что это отождествление проведено. Тогда

$$\langle f,\, x\rangle\leqslant\|f\|_{Y^*}\|x\|_Y\leqslant\gamma\|f\|_{Y^*}\|x\|_X \quad \forall x\in X,$$

т. е. $\|f\|_{X^*}\leqslant\gamma\|f\|_{Y^*}$. Из (5.5) вытекает, что

$$Y^*\subset X^*, \quad \|f\|_{X^*}\leqslant\gamma\|f\|_{Y^*} \quad \forall f\in Y^*. \tag{5.6}$$

Покажем, что если X рефлексивно, то Y^* плотно в X^*. Если для $x\in X$

$$\langle f,\, x\rangle=0 \quad \forall f\in Y^*,$$

то $x=0$. В силу рефлексивности X это означает, что линейный функционал на X^*, который обращается в нуль на Y^*, является нулевым. По следствию из теоремы Хана — Банаха 5.2 это возможно лишь в том случае, когда замыкание множества Y^* в X^* совпадает со всем пространством X^*.

Замечание 5.15. Пусть X и Y — два банаховых пространства, непрерывно вложенных в локально выпуклое пространство V, и пусть их пересечение $X\cap Y$, наделенное нормой (5.3), плотно как в X, так и в Y. На основании предыдущего замечания пространства X^* и Y^* можно рассматривать как подпространства в $(X\cap Y)^*$. Поэтому можно построить X^*+Y^*, и

$$X^*+Y^*\subset(X\cap Y)^*. \tag{5.7}$$

При заданных предположениях можно также образовать $X+Y$. Пространство $X\cap Y$, очевидно, плотно и в $X+Y$. Следовательно, как X, так и Y плотны в $X+Y$. В силу предыдущего замечания $(X+Y)^*$ можно рассматривать как подпространство в X^* и в Y^* и тем самым как подпространство в $X^* \cap Y^*$, т. е.

$$(X+Y)^* \subset X^* \cap Y^*. \tag{5.8}$$

Теорема 5.13. *Пусть X и Y — банаховы пространства, непрерывно вложенные в локально выпуклое пространство V. Пусть, далее, $X \cap Y$, наделенное нормой* (5.3), *плотно в X и в Y. Тогда*

$$X^* + Y^* = (X \cap Y)^*$$

и

$$(X+Y)^* = X^* \cap Y^*$$

как в смысле равенства множеств, так и в смысле равенства норм.

Доказательство. Рассмотрим подпространство Z в $X \times Y$, заданное формулой

$$Z = \{\{x, x\} \mid x \in X \cap Y\}.$$

Для заданного $f \in (X \cap Y)^*$ положим

$$u(\{x, x\}) = f(x) \qquad \forall x \in X \cap Y.$$

Тогда u будет линейным функционалом на Z с нормой $\|u\|_{Z^*} = \|f\|_{(X \cap Y)^*}$ (см. определение нормы на $X \times Y$ в замечании 5.11). По теореме Хана — Банаха функционал u имеет продолжение v на пространство $X \times Y$, такое, что

$$\|v\|_{(X+Y)^*} = \|u\|_{Z^*} = \|f\|_{(X \cap Y)^*}.$$

Положим

$$g(x) = v(\{x, 0\}) \qquad \forall x \in X$$

и

$$h(y) = v(\{0, y\}) \qquad \forall y \in Y.$$

Тогда, очевидно, $g \in X^*$, $h \in Y^*$ и

$$\max(\|g\|_{X^*}, \|h\|_{Y^*}) \leqslant \|v\|_{(X+Y)^*} = \|f\|_{(X \cap Y)^*}.$$

По построению

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad \forall x \in X \cap Y,$$

т. е. $f = g + h \in X^* + Y^*$; поэтому

$$\|f\|_{X^*+Y^*} \leqslant \max(\|g\|_{X^*}, \|h\|_{Y^*}) \leqslant \|f\|_{(X \cap Y)^*}.$$

С другой стороны,

$$\|f\|_{(X\cap Y)^*} = \sup_{\|x\|_X+\|x\|_Y=1} f(x) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\|_X+\|x\|_Y=1} \inf_{\substack{g\in X^*\\ h\in Y^*\\ g+h=f}} (\|g\|_{X^*}\|x\|_X + \|h\|_{Y^*}\|x\|_Y) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\substack{g\in X^*\\ h\in Y^*\\ g+h=f}} \max(\|g\|_{X^*},\ \|h\|_{Y^*}) = \|f\|_{X^*+Y^*}.$$

Вместе с (5.7) эти соотношения доказывают первую часть теоремы.

Пусть теперь $f\in X^*\cap Y^*$. Если $x+y=x_1+y_1$ для x, $x_1\in X$ и y, $y_1\in Y$, то $x-x_1=y_1-y\in X\cap Y$ и, следовательно,

$$f(x-x_1)=f(y_1-y), \tag{5.9}$$

откуда

$$f(x)+f(y)=f(x_1)+f(y_1). \tag{5.10}$$

Продолжим f до функционала на $X+Y$, полагая для $z=x+y$

$$f(z)=f(x)+f(y).$$

Соотношение (5.10) показывает, что так определенное значение не зависит от представления z в виде $z=x+y$. Так как

$$f(z)\leqslant \inf_{\substack{x\in X\\ y\in Y\\ x+y=z}} (\|f\|_{X^*}\|x\|_X+\|f\|_{Y^*}\|y\|_Y) \leqslant (\|f\|_{X^*}+\|f\|_{Y^*})\|z\|_{X+Y},$$

то $f\in(X+Y)^*$ и $\|f\|_{(X+Y)^*}\leqslant\|f\|_{X^*\cap Y^*}$. С учетом (5.8) этим доказано совпадение $(X+Y)^*$ и $X^*\cap Y^*$ как множеств. Чтобы доказать равенство норм, достаточно установить неравенство $\|f\|_{X^*\cap Y^*}\leqslant\|f\|_{(X+Y)^*}$. Для произвольного $\varepsilon>0$ найдется $x\in X$, такое, что

$$\|f\|_{X^*}\leqslant f(x)+\varepsilon, \qquad \|x\|_X=1.$$

Соответственно найдется $y\in Y$, такое, что

$$\|f\|_{Y^*}\leqslant f(y)+\varepsilon, \qquad \|y\|_Y=1.$$

Имеем

$$\|f\|_{X^*\cap Y^*}=\|f\|_{X^*}+\|f\|_{Y^*}\leqslant f(x+y)+2\varepsilon\leqslant$$
$$\leqslant\|f\|_{(X+Y)^*}\|x+y\|_{X+Y}+2\varepsilon\leqslant$$
$$\leqslant\|f\|_{(X+Y)^*}\max(\|x\|_X,\ \|y\|_Y)+2\varepsilon=$$
$$=\|f\|_{(X+Y)^*}+2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует искомая оценка для нормы. Теорема доказана.

§ 6. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определение 6.1. Функция $(\cdot, \cdot)$, которая каждым двум элементам x и y линейного пространства H ставит в соответствие вещественное число (x, y), называется *скалярным произведением* на H, если она удовлетворяет следующим условиям:

a) $(x, y) = (y, x)$;
b) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
c) $(tx, y) = t(x, y) \quad \forall t \in R^1$;
d) $(x, x) > 0 \quad$ при $\quad x \neq 0$.

Здесь x, y, z — произвольные элементы из H.

Пара $\{H, (\cdot, \cdot)\}$, состоящая из линейного пространства H и скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ на нем, называется *предгильбертовым пространством.* Когда это не приводит к недоразумениям, мы будем предгильбертово пространство $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ обозначать, как и лежащее в его основе линейное пространство, через H.

Замечание 6.1. В предгильбертовом пространстве можно ввести норму по формуле $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Мы будем всегда рассматривать предгильбертово пространство как нормированное именно в этом смысле.

Определение 6.2. Полное предгильбертово пространство называется *гильбертовым пространством.*

Замечание 6.2. Всякое гильбертово пространство является равномерно выпуклым банаховым пространством. Имеет место равенство

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2.$$

Лемма 6.1 (неравенство Шварца). Для любых элементов x, y гильбертова пространства

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

Теорема 6.1 (теорема представления Рисса). *Для каждого гильбертова пространства H существует точно одно взаимно однозначное линейное отображение R пространства H^* на H, обладающее следующими свойствами:*

a) $(Rf, x) = \langle f, x\rangle \quad \forall f \in H^*$;
b) $\|Rf\|_H = \|f\|_{H^*}$.

Замечание 6.3. Этот оператор $R \in (H^* \to H)$ называется *рисовским оператором* для пространства H. На H^* можно ввести скалярное произведение, положив $(f, g) = (Rf, Rg)$. Сопряженное к гильбертову пространству при этом также становится гильбертовым пространством. Теорема представления Рисса позволяет отождествлять пространства H^* и H (отождествляются линейный функционал $f \in H^*$ и элемент $Rf \in H$). Этой возможностью мы будем в дальнейшем часто пользоваться.

Лемма 6.2. Пусть $J \in (H \to H^*)$ — дуализующее отображение для гильбертова пространства H, определенное равенством

$$\langle Jx, x\rangle = \| x \|_H^2 = \| Jx \|_{H^*}^2 \qquad \forall x \in H$$

(см. лемму 5.5). Тогда для любых $x, y \in H$

$$\langle Jx, y\rangle = (x, y).$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение между H^* и H, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение на H.

Доказательство. При фиксированном $x \in H$ рассмотрим (x, y) как функционал от y. Этот функционал линеен и согласно лемме 6.1 ограничен, а значит, и непрерывен. Таким образом, для каждого x существует элемент $f \in H^*$, обладающий свойством

$$\langle f, y\rangle = (x, y) \qquad \forall y \in H. \tag{6.1}$$

Используя (6.1) при $y = x$, получаем

$$\| f \|_{H^*} \| x \|_H \geqslant \langle f, x\rangle = (x, x) = \| x \|_H^2.$$

С другой стороны,

$$\langle f, y\rangle = (x, y) \leqslant \| x \|_H \| y \|_H.$$

Следовательно,

$$\langle f, x\rangle = \| x \|_H^2 = \| f \|_{H^*}^2.$$

Отсюда в силу строгой выпуклости гильбертова пространства H^* вытекает по лемме 5.5 равенство $f = Jx$. Тем самым наша лемма доказана.

Замечание 6.4. Из леммы 6.2 вытекает, что дуализующее отображение для гильбертова пространства H является линейным. Как показывает сравнение теоремы 6.1 и леммы 6.2, очевидно, $J = R^{-1}$.

Определение 6.3. Два элемента x и y гильбертова пространства H называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Два подпространства F_1 и F_2 в H называются ортогональными, если каждый элемент из F_1 ортогонален к каждому элементу из F_2. Совокупность всех элементов из H, ортогональных к данному подпространству F, называется его *ортогональным дополнением* и обозначается через $F^\perp$.

Лемма 6.3. Пусть F — замкнутое подпространство гильбертова пространства H. Тогда его ортогональное дополнение $F^{\perp}$ также является замкнутым подпространством в H и каждый элемент $x \in H$ допускает единственное разложение вида $x = y + z$ с $y \in F$ и $z \in F^{\perp}$.

Определение 6.4. Если $x = y + z$ — представление элемента $x \in H$ в виде суммы элементов $y \in F$ и $z \in F^{\perp}$, то y называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство F. Отображение $P_F \in (H \to H)$, которое каждому элементу $x \in H$ ставит в соответствие его ортогональную проекцию на подпространство F, называют *проектором* (или *проекционным оператором*, или *оператором проектирования*) H на F.

Замечание 6.5. Проектор P_F гильбертова пространства H на замкнутое подпространство F линеен и непрерывен. Кроме того, он *идемпотентен* и *симметричен*, т. е. $P_F^2 = P_F$ и $(P_F x, y) = (x, P_F y)$ для любых $x, y \in H$.

Определение 6.5. Линейное отображение A гильбертова пространства H в его сопряженное H^* называется *положительно определенным*, если для некоторой постоянной $c > 0$ выполняется соотношение

$$\langle Ax, x\rangle \geqslant c\|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

В заключение этого параграфа рассмотрим одну ситуацию, которая неоднократно будет нам встречаться ниже при изучении операторных и операторных дифференциальных уравнений.

Пусть заданы рефлексивное банахово пространство $\{V, \|\cdot\|\}$ и гильбертово пространство $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ с нормой $|\cdot|$, и пусть для этих пространств выполняются условия

$$\begin{gathered} V \subset H, \quad V \text{ плотно в } H, \\ |x| \leqslant \gamma\|x\| \quad \forall x \in V, \quad \gamma = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Согласно замечанию 5.14, при этих предположениях сопряженное к H пространство H^* можно рассматривать как подпространство сопряженного к V пространства V^*. Так как V рефлексивно, то H^* плотно в V^*, и

$$\|f\|_* \leqslant \gamma|f|_* \quad \forall f \in H^*,$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма в V^* и $|\cdot|_*$ — норма в H^*.

Будем считать далее, что пространства H^* и H отождествлены в соответствии с теоремой представления Рисса. Тогда

$$V \subset H \subset V^*,$$

причем пространство H непрерывно вложено в пространство V^* и плотно в нем.

При отождествлении H с H^* и H^* с некоторым подпространством в V^* элемент $y \in H$ отождествляется с элементом $f_y \in V^*$, для которого имеет место равенство

$$(y, x) = \langle f_y, x \rangle \quad \forall x \in V,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение между V^* и V. Поскольку мы отождествляем y и f_y, то не возникнет недоразумений, если при условиях (6.2) скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между V^* и V мы будем обозначать, как и скалярное произведение на H, через $(\cdot, \cdot)$.

Типичный и важный для приложений пример описанной ситуации доставляют пространства $V = H_0^m(G)$ и $H = L^2(G)$, которые вводятся в следующей главе.

ГЛАВА II

ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В этой главе дается функционально-аналитическая формулировка краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений.

В § 1 мы вводим пространства функций, которые используются при функционально-аналитической трактовке эллиптических дифференциальных уравнений, и указываем нужные нам свойства этих пространств.

В § 2 подробно описывается связь между эллиптическими краевыми задачами и операторными уравнениями в рефлексивных банаховых пространствах.

§ 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ РАССМОТРЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В этом параграфе собран вспомогательный материал из теории меры и интеграла, а также теории функциональных пространств, который понадобится нам при изучении краевых задач. На доказательствах мы, за единственным исключением, не останавливаемся. Предполагаются известными понятия и теоремы элементарной топологии n-мерного эвклидова пространства P^n и теории вещественных функций многих переменных.

В первом пункте определяются пространства непрерывно дифференцируемых функций. Во втором пункте мы напоминаем некоторые основные понятия и теоремы из теории интеграла Лебега, а в третьем приводим нужные нам результаты из теории пространств L^p. Четвертый пункт посвящен некоторым понятиям и теоремам теории распределений (обобщенных функций). Наконец, в пятом пункте собран ряд результатов из теории пространств Соболева.

Сведущему читателю достаточно ознакомиться с вводимыми в этом параграфе обозначениями. Доказательства приводимых утверждений можно найти, например, в литературе, указанной в замечаниях к этой главе.

1. ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть R^n есть n-мерное эвклидово пространство (рассматриваемое с обычной топологией). Точки пространства R^n мы обозначаем через $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть G — открытое множество в R^n. Для m раз непрерывно дифференцируемой (вещественной) функции u на G мы через $D^\alpha u$ обозначаем, как обычно, частную производную

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс из неотрицательных целых чисел.

Определение 1.1. Через $C^m(\bar{G})$ обозначается множество функций u, определенных на замыкании $\bar{G}$ открытого множества G и обладающих следующими свойствами:

a) функция u является m раз непрерывно дифференцируемой на G;

b) каждую частную производную $D^\alpha u$ порядка $|\alpha| \leqslant m$ можно продолжить до непрерывной функции на $\bar{G}$.

Замечание 1.1. При $m = 0$ мы получаем множество непрерывных функций на $\bar{G}$. Его обозначают обычно просто через $C(\bar{G})$.

Лемма 1.1. Пусть замыкание $\bar{G}$ открытого множества $G \subset R^n$ компактно. Тогда $C^m(\bar{G})$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{C^m(\bar{G})} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \bar{G}} |D^\alpha u(x)|. \tag{1.1}$$

Замечание 1.2. Напомним, что множество в R^n компактно точно тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Сходимость последовательности $\{u_k\} \subset C^m(\bar{G})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ по норме (1.1), очевидно, означает равномерную сходимость всех производных порядка $\leqslant m$ на компакте $\bar{G}$.

Будем считать, что линейная структура в $C^m(\bar{G})$ (как и во всех определяемых далее функциональных пространствах) задана естественным образом.

Определение 1.2. *Носителем* определенной и непрерывной на открытом множестве $G \subset R^n$ функции u называется множество

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \mid u(x) \neq 0\}} \cap G.$$

Определение 1.3. a) Через $C_0^m(G)$ будем обозначать множество всех определенных и m раз непрерывно дифференцируемых на открытом множестве $G \subset R^n$ функций с компактными (в G) носителями.

b) Через $C_0^\infty(G)$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых на открытом множестве $G \subset R^n$ функций с компактными (в G) носителями.

Замечание 1.3. Можно показать, что $C_0^\infty(G)$ содержит не только тривиальный элемент $u = 0$. Пусть $K \subset G$ — компактное множество и G_1 — такое открытое множество, что $\bar{G}_1 \subset G$ и $K \subset G_1 \subset G$. Тогда можно указать функцию $u \in C_0^\infty(G)$, обладающую следующими свойствами: $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$ для $x \in G$, $u(x) = 1$ для $x \in K$ и $u(x) = 0$ для $x \notin G_1$.

2. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Прежде всего напомним некоторые понятия из теории меры Лебега в эвклидовом пространстве R^n.

Мерой n-мерного замкнутого интервала

$$I = \{x \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

называется число

$$\operatorname{mes}(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Так как всякое открытое множество $O \subset R^n$ можно представить в виде не более чем счетного объединения замкнутых интервалов I_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, без общих внутренних точек:

$$O = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu,$$

то естественным образом определяется мера открытого множества:

$$\operatorname{mes}(O) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{mes}(I_\nu).$$

Можно показать, что определенная таким образом мера (возможно, равная $+\infty$) не зависит от способа представления множества O в виде объединения замкнутых интервалов без общих внутренних точек.

Внешняя мера произвольного множества $G \subset R^n$ определяется как

$$\overline{\operatorname{mes}}(G) = \inf_{O \supset G} \operatorname{mes}(O),$$

причем нижняя грань берется по всем открытым множествам O, содержащим G. Множество $G \subset R^n$ называется *измеримым*, если

$$\inf_{O \supset G} \overline{\text{mes}}\,(O \setminus G) = 0;$$

в этом случае полагают

$$\text{mes}\,(G) = \overline{\text{mes}}\,(G).$$

Особую роль играют измеримые множества с мерой, равной нулю (*множества меры нуль*). Заметим, что каждое подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль и объединение счетного числа множеств меры нуль является множеством меры нуль.

Принято говорить, что некоторое условие выполняется *почти всюду* на множестве $G \subset R^n$ (или для *почти всех* его точек), если множество точек, где это условие не выполняется, имеет нулевую меру.

Лемма 1.2. Мера Лебега *вполне аддитивна* (или *счетно аддитивна*). Это означает, что

$$\text{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}\,(G_k)$$

для любой последовательности $\{G_k\}$ попарно непересекающихся измеримых множеств $G_k \subset R^n$.

Определение 1.4. Вещественная функция u, определенная на измеримом множестве $G \subset R^n$, называется *измеримой*, если для каждого вещественного числа a измеримо множество

$$E = \{x \in G \mid u(x) > a\}.$$

Из обширной теории измеримых функций мы приведем здесь лишь следующие результаты:

Лемма 1.3. Пусть на измеримом множестве $G \subset R^n$ определена последовательность $\{u_k\}$ измеримых функций. Если для некоторой функции u на G имеет место соотношение

$$\lim_{k \to \infty} u_k(x) = u(x) \quad \text{при почти всех } x \in G,$$

то u является измеримой функцией.

Лемма 1.4. Любая непрерывная на открытом или замкнутом множестве $G \subset R^n$ функция измерима.

Лемма 1.5. Пусть $\{y_1, \ldots, y_m\} \to F(y_1, \ldots, y_m)$ — непрерывная функция на m-мерном эвклидовом пространстве R^m. Если функции $x \to g_i(x)$, $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $i = 1, \ldots, m$, измеримы на $G \subset R^n$, то функция

$$x \to F(g_1(x), \ldots, g_m(x))$$

также измерима на G.

Изложим некоторые понятия и результаты теории интегрируемых (или, как еще говорят, суммируемых) по Лебегу функций. Всюду ниже мы предполагаем, что $G \subset R^n$ — измеримое множество.

Определение 1.5. Функция u, определенная на $G \subset R^n$, называется *простой*, если она на некотором конечном числе попарно непересекающихся измеримых множеств G_k $(k = 1, \ldots, K)$ с $\operatorname{mes}(G_k) < \infty$ принимает постоянные значения c_k, а на множестве $G \setminus \sum\limits_{k=1}^{K} G_k$ равна нулю. *Интегралом* от простой функции u по множеству G называется число

$$I(u) = \sum_{k=1}^{K} c_k \operatorname{mes}(G_k).$$

При этом пишут

$$I(u) = \int_G u(x)\,dx.$$

Определение 1.6. Функция u, определенная почти всюду на G, называется *интегрируемой* (*по Лебегу*) по множеству (или на множестве) G, если существует последовательность $\{u_j\}$ простых функций, которая почти всюду на G сходится к u и для которой последовательность $\{I(u_j)\}$ сходится. В этом случае

$$I(u) = \lim_{j \to \infty} I(u_j)$$

называют *интегралом* (*Лебега*) от функции u по G и пишут

$$I(u) = \int_G u(x)\,dx.$$

Замечание 1.4. Можно показать, что значение $I(u)$ не зависит от выбора фигурирующей в определении последовательности $\{u_j\}$.

Определение 1.7. Две функции u_1, u_2, определенные на G, называются *эквивалентными*, если $u_1(x) = u_2(x)$ для почти всех $x \in G$.

Лемма 1.6. Если функция u_1 интегрируема по G, то интегрируема по G и любая ей эквивалентная функция u_2 и

$$\int_G u_1(x)\,dx = \int_G u_2(x)\,dx.$$

Лемма 1.7. Пусть $B \subset G$ — измеримое множество. Тогда каждая функция u, интегрируемая по G, интегрируема и по B и

$$\int_B u(x)\,dx = \int_G C_B(x)\,u(x)\,dx,$$

где C_B — *характеристическая* (*индикаторная*) функция множества B, т. е.

$$C_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in B, \\ 0 & \text{при} \quad x \in G \setminus B. \end{cases}$$

Приведем еще два результата о последовательностях интегрируемых функций.

Лемма 1.8 (Фату). Пусть $\{u_k\}$ — последовательность неотрицательных интегрируемых на G функций, таких, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_G u_k(x)\,dx < \infty.$$

Тогда функция $x \to \varliminf\limits_{k\to\infty} u_k(x)$ интегрируема по G, причем

$$\int_G \varliminf_{k\to\infty} u_k(x)\,dx \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_G u_k(x)\,dx.$$

Теорема 1.1 (Лебег). *Пусть $\{u_k\}$ — последовательность интегрируемых функций на G, почти всюду на G сходящаяся к функции u. Если существует интегрируемая на G функция v, такая, что почти всюду на G*

$$|u_k(x)| \leqslant v(x), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

то функция u также интегрируема на G и

$$\int_G u(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_G u_k(x)\,dx.$$

3. ПРОСТРАНСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Всюду ниже G — некоторое измеримое множество в R^n. Мы не будем различать функции, эквивалентные между собой на G в смысле определения 1.7. Поэтому, когда мы в настоящем пункте говорим о функциях, под ними, строго говоря, нужно понимать классы эквивалентных друг другу функций.

Определение 1.8. Через $L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначается множество всех измеримых функций $u \in (G \to R^1)$, для которых

$$\int_G |u(x)|^p \, dx < \infty.$$

Лемма 1.9. Множество $L^p(G)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{L^p(G)} = \left(\int_G |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{1.2}$$

Пространство $L^2(G)$ (при $p = 2$) представляет собой гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_G u(x) v(x) \, dx.$$

Определение 1.9. Через $L_r^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначается множество всех вектор-функций $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ с $u_i \in L^p(G)$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Лемма 1.10. Множество $L_r^p(G)$ есть банахово пространство относительно нормы

$$\|u\|_{L_r^p(G)} = \left(\int_G \left(\sum_{i=1}^r |u_i(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}.$$

Пространство $L_r^2(G)$ (при $p = 2$) является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_G \sum_{i=1}^r u_i(x) v_i(x) \, dx.$$

Определение 1.10. Измеримая функция $u \in (G \to R^1)$ называется *существенно ограниченной* на G, если она эквивалентна некоторой ограниченной функции, т. е. если существует такая постоянная M, что

$$|u(x)| \leqslant M \quad \text{при почти всех } x \in G.$$

Нижнюю грань всех допустимых постоянных M обозначают через [1]) $\operatorname{vrai}\max\limits_{x \in G} |u(x)|$. Множество всех (классов, эквивалентных

[1]) Vrai — истинный (*франц.*).— *Прим. ред.*

друг другу) измеримых существенно ограниченных функций обозначается через $L^{\infty}(G)$.

Лемма 1.11. Множество $L^{\infty}(G)$ есть банахово пространство относительно нормы

$$\|u\|_{L^{\infty}(G)} = \operatorname*{vrai\,max}_{x \in G} |u(x)|.$$

Приведем несколько важных неравенств, которыми мы будем неоднократно пользоваться.

Для $1 < p < \infty$ число q, удовлетворяющее равенству $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, называется *сопряженным* к (или с) p *показателем.* Показателем, сопряженным к $p = 1$, соответственно к $p = \infty$, по определению считается $q = \infty$, соответственно $q = 1$.

Лемма 1.12 (неравенство Гёльдера). Если p, q — сопряженные показатели, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $u \in L^p(G)$, $v \in L^q(G)$, то $uv \in L^1(G)$ и

$$\left| \int_G u(x)\, v(x)\, dx \right| \leqslant \|u\|_{L^p(G)} \|v\|_{L^q(G)}.$$

Лемма 1.13 (неравенство Минковского). Для любых u, $v \in L^p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, справедливо неравенство

$$\|u + v\|_{L^p(G)} \leqslant \|u\|_{L^p(G)} + \|v\|_{L^p(G)}.$$

Замечание 1.5. Очевидно, это неравенство есть не что иное, как неравенство треугольника в банаховом пространстве $L^p(G)$.

Лемма 1.14 (неравенства Кларксона). Пусть u, $v \in L^p(G)$. Тогда если p и q — сопряженные показатели, то при $1 < p \leqslant 2$

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^q_{L^p(G)} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^q_{L^p(G)} \leqslant \frac{1}{2^{q-1}} \left(\|u\|^p_{L^p(G)} + \|v\|^p_{L^p(G)} \right)^{q-1}$$

и при $2 \leqslant p < \infty$

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^p_{L^p(G)} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^p_{L^p(G)} \leqslant \frac{1}{2} \left(\|u\|^p_{L^p(G)} + \|v\|^p_{L^p(G)} \right).$$

Лемма 1.15. При $1 < p < \infty$ банаховы пространства $L^p(G)$ и $L^p_r(G)$ равномерно выпуклы и, значит (см. теорему 5.11 гл. I), рефлексивны.

Лемма 1.16. При $1 \leqslant p < \infty$ банаховы пространства $L^p(G)$ сепарабельны.

Лемма 1.17. Пусть $f \in (L^p(G))^*$ — линейный функционал из сопряженного пространства к банахову пространству $L^r(G)$,

$1 \leqslant p < \infty$. Тогда существует точно один элемент $v \in L^q(G)$ (где q — сопряженный с p показатель), такой, что

$$\langle f, u\rangle = \int_G u(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall u \in L^p(G),$$

причем

$$\| f \|_{(L^p(G))^*} = \| v \|_{L^q(G)}.$$

Замечание 1.6. В силу неравенства Гёльдера каждый элемент $v \in L^q(G)$ порождает некоторый непрерывный линейный функционал на $L^p(G)$. Поэтому если отождествить линейные функционалы $f \in (L^p(G))^*$, $1 \leqslant p < \infty$, с однозначно соответствующими им согласно лемме 1.17 «порождающими» элементами $v \in L^q(G)$, то можно сказать, что сопряженным к банахову пространству $L^p(G)$ служит банахово пространство $L^q(G)$. При $p = 2$ мы получаем в точности теорему Рисса о представлении линейных функционалов (теорема 6.1 гл. I) для случая гильбертова пространства $L^2(G)$.

В силу леммы 1.17 слабая сходимость последовательности $\{u_n\} \subset L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, к элементу $u \in L^p(G)$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_G u_n(x)\, v(x)\, dx = \int_G u(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in L^q(G).$$

Заметим еще, что пространства $L^p(G)$ при $1 \leqslant p < \infty$ являются слабо полными. (В случае $1 < p < \infty$ это утверждение следует из леммы 1.15 и теоремы 5.8 гл. I.)

Лемма 1.18. Из каждой сходящейся в $L^p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ последовательности $\{u_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, сходящуюся почти всюду на G.

Лемма 1.19. Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и последовательность $\{u_n\} \subset L^p(G)$ такова, что

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^p(G)$$

и

$$u_n(x) \to v(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in G.$$

Тогда $u = v$.

Доказательство. а) Прежде всего покажем, что функция v почти всюду конечна. Вследствие слабой сходимости последовательности $\{u_n\}$ существует (см. лемму 5.3 гл. I) постоянная M, такая, что

$$\| u_n \|_{L^p(G)} \leqslant M \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Согласно лемме 1.3 функция v измерима на G. Из леммы Фату следует, что

$$\int\limits_G \lim_{n\to\infty} |u_n(x)|^p\,dx = \int\limits_G \varliminf_{n\to\infty} |u_n(x)|^p\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_G |u_n(x)|^p\,dx \leqslant M^p,$$

поэтому $v \in L^p(G)$. Но всякая интегрируемая функция почти всюду конечна.

b) Изменяя, если надо, функции u_n на множестве меры нуль, можно считать, что последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится при каждом $x \in G$. Положим

$$E_k = \{x \mid x \in G,\ \sup_{n\geqslant k} |u_n(x)| \geqslant k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, E_k измеримо. Имеем

$$\bigcap_k E_k = \{x \mid x \in G,\ \varlimsup_{n\to\infty} |u_n(x)| = +\infty\}.$$

Так же, как и в п. а), можно показать, что

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcap_k E_k\Big) = 0,$$

откуда, ввиду включений $E_k \supset E_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}(E_k) = 0.$$

Пусть $x \in G \setminus E_k$. Тогда для любого $w \in L^q(G)$

$$|u_n(x)\,w(x)| \leqslant k\,|w(x)|, \qquad n \geqslant k.$$

В силу слабой сходимости последовательности $\{u_n\}$ получаем по теореме Лебега

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G\setminus E_k} u_n(x)\,w(x)\,dx = \int\limits_{G\setminus E_k} u(x)\,w(x)\,dx = \int\limits_{G\setminus E_k} v(x)\,w(x)\,dx.$$

Следовательно, $u(x) = v(x)$ для почти всех $x \in G \setminus E_k$. Так как $mes(E_k) \to 0$ при $k \to \infty$, то окончательно заключаем, что $u(x) = v(x)$ для почти всех $x \in G$. Лемма доказана.

Лемма 1.20. Пусть $G \subset R^n$ открыто и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда подмножеств $C_0^\infty(G)$ пространства $L^p(G)$ всюду плотно.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ)

Всюду в этом пункте G — некоторое открытое множество в R^n. Мы определяем распределения (обобщенные функции) как элементы сопряженного пространства к локально выпуклому пространству, получающемуся из множества $C_0^\infty(G)$ путем введения топологии с помощью подходящей системы полунорм. Значение распределений для теории дифференциальных уравнений в частных производных состоит прежде всего в том, что в пространстве распределений операция дифференцирования является непрерывным оператором (понятие производной естественным образом обобщается на случай распределений). При введении топологии на множестве $C_0^\infty(G)$ мы следуем методу Гординга — Лионса; другой метод задания этой топологии восходит к Л. Шварцу.

Определение 1.11. Пусть $\rho = \{\rho_\alpha\}$ — некоторое семейство функций, определенных и непрерывных на множестве G. Семейство $\{\operatorname{supp} \rho_\alpha\}$ их носителей называется *локально конечным* в G, если каждое компактное множество в G имеет непустые пересечения лишь с конечным числом множеств семейства.

Определение 1.12. Введем на множестве $C_0^\infty(G)$ систему полунорм

$$p_\rho(\varphi) = \sum_\alpha \sup_{x \in G} |\rho_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x)|, \qquad \varphi \in C_0^\infty(G). \tag{1.3}$$

При этом $\rho = \{\rho_\alpha\}$ пробегает все семейства непрерывных функций на G с локально конечными семействами носителей.

Замечание 1.7. Суммирование в (1.3) при каждом фиксированном $\varphi \in C_0^\infty(G)$ распространяется вследствие локальной конечности семейства $\{\operatorname{supp} \rho_\alpha\}$ только на конечное число мультииндексов α.

Лемма 1.21. Будучи наделено системой полунорм (1.3), $C_0^\infty(G)$ становится локально выпуклым пространством; мы используем для него общепринятое обозначение $\mathscr{D}(G)$.

Укажем, что́ означает сходимость последовательности $\{\varphi_k\}$ в пространстве $\mathscr{D}(G)$; при этом можно ограничиться случаем сходимости к нулю.

Лемма 1.22. Последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}(G)$ сходится к нулю точно тогда, когда в G существует компактное множество K, такое, что

a) $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ для $k = 1, 2, \ldots$;

b) последовательность $\{D^\alpha \varphi_k\}$ равномерно сходится в K к нулю для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Определение 1.13. *Распределениями* (*обобщенными функциями*) на открытом множестве $G \subset R^n$ называются элементы сопряженного к $\mathscr{D}(G)$ пространства $\mathscr{D}^*(G)$. Для $u \in \mathscr{D}^*(G)$ и $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ мы пишем

$$u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle.$$

Замечание 1.8. Пространство $\mathscr{D}^*(G)$ можно превратить в локально выпуклое пространство, наделив его простой топологией (см. замечание 4.4 гл. I). Напомним, что окрестности U распределения $u \in \mathscr{D}^*(G)$ в простой топологии задаются в виде

$$U(\varphi, \varepsilon; u) = \{v \in \mathscr{D}^*(G) \mid |v(\varphi_i) - u(\varphi_i)| < \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, m\},$$

где $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ и $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ — произвольные (конечные) системы элементов из $\mathscr{D}(G)$ и положительных чисел соответственно. Сходимость последовательности распределений $\{u_k\}$ к распределению u в $\mathscr{D}^*(G)$ означает поточечную сходимость, т. е. то, что

$$\lim_{k\to\infty} u_k(\varphi) = u(\varphi) \quad \text{для каждого} \quad \varphi \in \mathscr{D}(G).$$

Приведем эквивалентные характеризации распределений, с которыми несколько удобнее работать, чем с определением 1.13.

Лемма 1.23. Линейный функционал u на множестве $C_0^\infty(G)$ является распределением на G точно тогда, когда он удовлетворяет одному из следующих (равносильных) условий:

a) для всякого компактного множества $K \subset G$ существуют положительная постоянная C и целое число k, такие, что

$$|u(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in G} |D^\alpha \varphi(x)|$$

для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ с $\operatorname{supp} \varphi \subset K$;

b) для всякой последовательности $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(G)$, сходящейся к нулю в описанном в лемме 1.22 смысле,

$$u(\varphi_n) \to 0.$$

Замечание 1.9. Укажем несколько примеров распределений.

a) Пусть $x \in G$. Распределение

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(G),$$

называется *δ-функцией* (или *δ-распределением*) *Дирака.*

b) Пусть u — *локально интегрируемая* на G функция; это означает, что

$$\int_K |u(x)|\, dx < \infty$$

для каждого компактного множества $K \subset G$. Функция u определяет распределение

$$f_u(\varphi) = \int_G u(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(G). \tag{1.4}$$

Локально интегрируемые функции u и v, которым отвечает одно и то же распределение (т. е. $f_u(\varphi) = f_v(\varphi)$ $\forall \varphi \in \mathscr{D}(G)$), эквивалентны в смысле определения 1.7. Обратно, эквивалентные локально интегрируемые функции определяют по формуле (1.4) одинаковые распределения. Если эквивалентные функции рассматривать как не различающиеся между собой, то можно отождествить каждую локально интегрируемую функцию u с отвечающей ей обобщенной функцией f_u [1]). В частности, если обобщенная функция является непрерывной функцией, то эта непрерывная функция определена однозначно, так как почти всюду равные непрерывные на G функции равны всюду.

Другой важный класс распределений образуют функции, с которыми мы познакомимся ниже при рассмотрении пространств Соболева.

Определение 1.14. Пусть D^α — дифференциальный оператор

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. *Производная* $D^\alpha u$ *распределения* u на G задается формулой

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(G).$$

Лемма 1.24. Отображение $u \to D^\alpha u$ является непрерывным отображением пространства $\mathscr{D}^*(G)$ (наделенного простой топологией) в себя.

Замечание 1.10. Пусть u — m раз непрерывно дифференцируемая функция на G. Тогда производные порядков $\leqslant m$ от u в смысле обычного дифференциального исчисления и в смысле теории распределений совпадают между собой. Это утверждение сразу следует из правила интегрирования по частям, согласно которому мы для каждого мультииндекса α с $|\alpha| \leqslant m$ и всякой функции $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ имеем

$$\int_G (D^\alpha u(x))\, \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G u(x)\, D^\alpha \varphi(x)\, dx.$$

5. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Здесь мы сформулируем только простейшие свойства этого важного класса функциональных пространств. При этом мы не стараемся приводить для каждого случая наиболее тонкие результаты. В частности, мы совсем не будем использовать

[1]) Отсюда и термин «обобщенная функция». — *Прим. ред.*

производные дробного порядка и некоторые уточнения теорем Соболева, связанные с гёльдеровской непрерывностью.

Везде в этом пункте $G \subset R^n$ — это некоторая область, т. е. открытое и связное множество.

Определение 1.15. Через $W^{k,p}(G)$ $(1 \leqslant p < \infty,\ k \geqslant 0)$ обозначается множество всех распределений $u \in \mathcal{D}^*(G)$, являющихся вместе со всеми своими производными $D^\alpha u$ порядка $|\alpha| \leqslant k$ функциями из $L^p(G)$. Эти множества $W^{k,p}(G)$ называются *пространствами Соболева* (или *соболевскими пространствами*).

Лемма 1.25. При $1 \leqslant p < \infty$ соболевское пространство $W^{k,p}(G)$ представляет собой банахово пространство относительно нормы

$$\|u\|_{W^{k,p}(G)} = \left(\int_G \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha u|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p}. \tag{1.5}$$

При $1 \leqslant p < \infty$ пространства $W^{k,p}(G)$ сепарабельны; при $1 < p < \infty$ они к тому же равномерно выпуклы и, следовательно, рефлексивны. В частном случае $p = 2$ соболевское пространство $W^{k,2}(G)$, которое мы в дальнейшем будем обозначать через $H^k(G)$, является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u,\ v)_{H^k(G)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} (D^\alpha u,\ D^\alpha v) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_G D^\alpha u D^\alpha v\, dx. \tag{1.6}$$

Определение 1.16. Через $W_0^{k,p}(G)$ обозначается замыкание множества $C_0^\infty(G)$ в $W^{k,p}(G)$ относительно нормы (1.5). Соответственно $H_0^k(G)$ обозначает замыкание множества $C_0^\infty(G)$ в гильбертовом пространстве $H^k(G)$ относительно нормы, порожденной скалярным произведением (1.6).

Лемма 1.26 (неравенство Фридрихса). Если G — ограниченная область в R^n, то для каждого мультииндекса β с $0 \leqslant |\beta| \leqslant k$ и для каждого $u \in W_0^{k,p}(G)$

$$\int_G |D^\beta u(x)|^p\, dx \leqslant C \sum_{|\alpha|=k} \int_G |D^\alpha u(x)|^p\, dx,$$

где C — постоянная, зависящая только от области G, а также от β, p и k.

Следствие. Пусть G — ограниченная область. Тогда формула

$$\|u\|_{W_0^{k,p}(G)} = \left(\int_G \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p}$$

определяет в $W_0^{k,p}(G)$ норму, эквивалентную норме (1.5). Соответственно при $p=2$ норма, определяемая в $H_0^k(G)$ скалярным произведением

$$(u, v)_{H_0^k(G)} = \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

эквивалентна норме, задаваемой скалярным произведением (1.6).

Значение пространств Соболева состоит прежде всего в том, что элементы этих пространств при надлежащих соотношениях между индексами k, p и размерностью пространства n обладают некоторыми свойствами регулярности и их можно «вкладывать» различными способами в другие функциональные пространства. Ниже мы приводим некоторые важнейшие теоремы вложения Соболева для случая, когда G — ограниченная область с достаточно гладкой границей.

Определение 1.17 (Кальдерон). Граница Γ области $G \subset R^n$ называется *регулярной*, если существуют такое конечное открытое покрытие $\{U_i\}$ этой границы, такое конечное множество открытых (конечных) конусов K_j и такое $\varepsilon > 0$, что

a) для каждой точки из Γ шар радиуса ε с центром в этой точке целиком лежит в некотором множестве из покрытия $\{U_i\}$;

b) для каждой точки из $U_i \cap G$ конус с вершиной в этой точке, получаемый параллельным переносом некоторого конуса K_j, целиком лежит в G.

Лемма 1.27. Ограниченная область G имеет регулярную границу Γ тогда и только тогда, когда существуют константы $R>0$ и $L>0$, такие, что для каждой точки $x_0 \in \Gamma$ можно указать такую ее окрестность $U(x_0)$, получающуюся при помощи движения (т. е. при помощи параллельного переноса и вращения) из множества

$$U_0 = \left\{y = \{y_1, \ldots, y_n\} \,\middle|\, \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2} < R, \ |y_n| < 2LR\right\},$$

что выполняются следующие условия:

a) точка $y = \{0, \ldots, 0\} \in U_0$ переходит в x_0;

b) пересечению $U(x_0) \cap \Gamma$ соответствует поверхность

$$y_n = f(y_1, \ldots, y_{n-1}), \qquad \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2} < R,$$

где функция f липшиц-непрерывна, т. е.

$$|f(y_1, \ldots, y_{n-1}) - f(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1})| \leqslant L \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |y_i - \bar{y}_i|^2};$$

c) пересечению $U(x_0)\cap G$ соответствует множество

$$\{y\in U_0 \mid \sqrt{y_1^2+\ldots y_{n-1}^2}<R,\ f(y_1,\ldots,y_{n-1})<y_n<2LR\}.$$

Замечание 1.11. Ограниченные выпуклые области G пространства R^n имеют регулярные границы.

Для ограниченной области с регулярной границей можно естественным образом определить $(n-1)$-мерную лебегову поверхностную меру σ_{n-1}, а именно можно в качестве значения этой меры для части гиперповерхности $U(x_0)\cap\Gamma$ взять интеграл

$$\sigma_{n-1}(U(x_0)\cap\Gamma)=\int\limits_{K_0}\sqrt{1+|\operatorname{grad} f|^2}\,dy_1\ldots dy_{n-1},$$

где $K_0=\{\{y_1,\ldots,y_{n-1}\} \mid \sqrt{y_1^2+\ldots+y_{n-1}^2}<R\}$. (В силу липшиц-непрерывности f градиент $\operatorname{grad} f=\left\{\frac{\partial f}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\right\}$ существует почти всюду относительно меры Лебега в R^{n-1}.) Далее очевидным образом определяются измеримые подмножества границы Γ и измеримые и интегрируемые относительно построенной $(n-1)$-мерной поверхностной меры функции. Можно показать, что эта поверхностная мера не зависит от выбора координатной системы, используемой для представления границы Γ.

Область с регулярной границей для почти всех точек $x\in\Gamma$ (относительно $(n-1)$-мерной поверхностной меры) обладает однозначно определенным (внешним) нормальным вектором, т. е. таким вектором $\nu=\{\nu_1,\ldots,\nu_n\}$ с $|\nu|=\sqrt{\nu_1^2+\ldots+\nu_n^2}=1$, что

$$\left(\nu,\ \frac{x-y}{|x-y|}\right)\to 0 \quad \text{для} \quad y\to x;\quad x,\ y\in\Gamma.$$

(Здесь $(\cdot,\cdot)$ обозначает обычное скалярное произведение в R^n.)

В случае ограниченной области G с регулярной границей для каждой вектор-функции $\{u_1,\ldots,u_n\}$ с $u_i\in C^1(G)$ справедлива *формула Гаусса* [1])

$$\int\limits_G\sum_{i=1}^n\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,dx=\int\limits_\Gamma\sum_{i=1}^n u_i\nu_i\,d\sigma_{n-1}.$$

---

[1]) Называемая также формулой Гаусса — Остроградского, а еще чаще — формулой Стокса. — *Прим. ред.*

По аналогии с банаховыми пространствами $L^p(G)$ мы обозначаем через $L^p(\Gamma)$, $1 \leqslant p < \infty$, множество всех (классов, эквивалентных между собой относительно $(n-1)$-мерной поверхностной меры) функций $u \in (\Gamma \to R^1)$, для которых

$$\int_\Gamma |u(x)|^p \, d\sigma_{n-1} < +\infty.$$

Множество $L^p(\Gamma)$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |u(x)|^p \, d\sigma_{n-1}\right)^{1/p}.$$

Теорема 1.2 (теорема вложения Соболева). *Пусть G — ограниченная область с регулярной границей и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда*

$$W^{k,p}(G) \subset W^{j,r}(G)$$

для $0 \leqslant j < k$ и каждого r, удовлетворяющего условию $\frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} \leqslant \frac{1}{r} < 1$; кроме того,

$$\|u\|_{W^{j,r}(G)} \leqslant C \|u\|_{W^{k,p}(G)} \quad \forall u \in W^{k,p}(G), \tag{1.7}$$

где постоянная C зависит от G, j, k, p и r. Если $\frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} < 0$, то

$$W^{k,p}(G) \subset C^j(\bar{G})$$

и

$$\|u\|_{C^j(\bar{G})} \leqslant C \|u\|_{W^{k,p}(G)} \quad \forall u \in W^{k,p}(G). \tag{1.8}$$

Лемма 1.28 (Реллих, Кондрашов). Пусть G — ограниченная область с регулярной границей, $1 \leqslant p < \infty$, $k \geqslant 1$. Тогда шар

$$K_1 = \left\{u \in W^{k,p}(G) \,|\, \|u\|_{W^{k,p}(G)} \leqslant 1\right\}$$

компактен в $W^{k-1,p}(G)$.

Замечание 1.12. Если рассматривать вместо $W^{k,p}(G)$, $W^{k-1,p}(G)$ пространства $W_0^{k,p}(G)$, $W_0^{k-1,p}(G)$, то в лемме 1.28 регулярность границы области G можно не требовать.

Лемма 1.29 (Кальдерон). Пусть G — ограниченная область с регулярной границей и G_0 — открытое множество, такое, что $\bar{G} \subset G_0$. Тогда существует линейный ограниченный оператор F

(*оператор продолжения*[1])), удовлетворяющий условиям

a) $$F \in \left(W^{k,p}(G) \to W_0^{k,p}(G_0)\right);$$

b) $$(Fu)(x) = u(x) \quad \forall x \in G.$$

Лемма 1.30. Пусть G — ограниченная область с регулярной границей и $R(G)$ — множество функций, являющихся сужениями на G функций из $C_0^\infty(R^n)$. Тогда при $k \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$ множество $R(G)$ плотно в $W^{k,p}(G)$.

При более сильных предположениях о границе Γ области G в некоторых случаях функциям из $W^{k,p}(G)$ можно поставить в соответствие их граничные значения на Γ.

Определение 1.18. Будем говорить, что ограниченная область $G \subset R^n$ *принадлежит классу* $C^{k,1}$ (где k — неотрицательное целое число), если существуют конечное число локальных систем координат $S_1, S_2, \ldots, S_M$ и функции $h_1, h_2, \ldots, h_M$, а также числа $a > 0$, $b > 0$, такие, что выполнены следующие условия:

a) функции h_i $(i = 1, \ldots, M)$ являются k раз непрерывно дифференцируемыми на замкнутом $(n-1)$-мерном кубе

$$\overline{Q}_{n-1} = \{y = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \mid |y_i| \leqslant a, \quad i = 1, \ldots, n-1\}$$

функциями с липшиц-непрерывными производными k-го порядка;

b) для каждой точки $P \in \Gamma$ найдется по крайней мере один индекс i, такой, что P имеет в координатной системе S_i вид

$$P = \{y, h_i(y)\}, \qquad y = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\} \in Q_{n-1};$$

c) в локальной системе координат S_i $(i = 1, \ldots, M)$

$$\{y, y_n\} \in G \quad \text{при} \quad y \in \overline{Q}_{n-1}, \quad h_i(y) < y_n < h_i(y) + b;$$

$$\{y, y_n\} \notin \overline{G} \quad \text{при} \quad y \in \overline{Q}_{n-1}, \quad h_i(y) - b < y_n < h_i(y).$$

Замечание 1.13. Всякая область класса $C^{k,1}$, $k \geqslant 0$, является ограниченной областью с регулярной границей. Для $k = 0$ верно и обратное утверждение.

Теперь мы в состоянии определить соболевские пространства функций v, определенных на границе Γ ограниченной области G.

Определение 1.19. Пусть $G \subset R^n$ — область класса $C^{k-1,1}$, $k \geqslant 1$. Для $1 \leqslant p < \infty$ мы обозначаем через $W^{k,p}(\Gamma)$ множество таких функций $v \in L^p(\Gamma)$, для которых функции v_i, зада-

[1]) Выбор для обозначения этого оператора буквы F связан с немецким словом Fortsetzung (продолжение). — *Прим. ред.*

ваемые (в обозначениях определения 1.18) формулой

$$y \to v_i(y) = v(y, h_i(y)), \qquad y \in Q_{n-1}, \qquad i = 1, \ldots, M,$$

принадлежат $W^{k,p}(Q_{n-1})$.

Лемма 1.31. Для области класса $C^{k-1,1}$ множество $W^{k,p}(\Gamma)$ при $k \geqslant 1$, $1 \leqslant p < \infty$ является сепарабельным банаховым пространством относительно нормы

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^{M} \|v_i\|^p_{W^{k,p}(Q_{n-1})}\right)^{1/p}.$$

Замечание 1.14. Эта норма на $W^{k,p}(\Gamma)$, очевидно, зависит от координатного представления границы Г. Однако можно показать, что само пространство $W^{k,p}(\Gamma)$ от этого представления не зависит.

Замечание 1.15. Для функций u из множества $R(G)$ (см. лемму 1.30) естественным образом определяются сужения их производных $D^\beta u$ (где β — произвольный мультииндекс) на границу Г; мы обозначаем такое сужение через $D^\beta u|_\Gamma$. Поэтому для $u \in R(G)$ можно определить производную порядка l в направлении внешней нормали в точке $P \in \Gamma$ по формуле

$$\frac{\partial^l u}{\partial \nu^l}(P) = \sum_{|\beta|=l} \frac{l!}{\beta!} D^\beta u(P)\, \nu^\beta(P); \tag{1.9}$$

здесь, как обычно, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — мультииндекс, $\beta! = \beta_1!\,\beta_2! \ldots \beta_n!$ и $\nu^\beta = \nu_1^{\beta_1}\nu_2^{\beta_2} \ldots \nu_n^{\beta_n}$, где $\nu = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ — единичный вектор внешней нормали в точке $P \in \Gamma$.

Лемма 1.32. Пусть G — область класса $C^{k-1,1}$, $p > 1$, $k \geqslant 1$. Тогда для $u \in R(G)$ с нормальной производной $v = \partial^l u/\partial \nu^l$, определенной по формуле (1.9), при $0 \leqslant l \leqslant k-1$ справедлива оценка

$$\|v\|_{W^{k-1-l,p}(\Gamma)} \leqslant C\|u\|_{W^{k,p}(G)} \tag{1.10}$$

(C — некоторая постоянная, не зависящая от u).

Замечание 1.16. Соотношение (1.10) означает, что оператор $\partial^l/\partial\nu^l$ $(0 \leqslant l \leqslant k-1)$, рассматриваемый как отображение из $W^{k,p}(G)$ в $W^{k-1-l,p}(\Gamma)$, непрерывен на множестве $R(G)$, плотном в $W^{k,p}(G)$. Следовательно, этот оператор можно однозначно продолжить до некоторого линейного ограниченного оператора, определенного на всем пространстве $W^{k,p}(G)$. Соотношение (1.10) останется справедливым и для этого оператора, который мы будем обозначать тем же символом $\partial^l/\partial\nu^l$. При $l = 0$ мы получаем таким образом настоящее граничное значение, или «след», функции u на Г.

Следствие. Пусть $u \in W_0^{k,p}(G)$, где G — область класса $C^{k-1,1}$. Тогда

$$\left.\frac{\partial^l u}{\partial \nu^l}\right|_\Gamma = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant l \leqslant k-1.$$

В дальнейшем мы приведем два результата, являющиеся в некотором смысле обращениями леммы 1.32 и ее следствия.

Лемма 1.33. Пусть G — ограниченная область с регулярной границей, $u \in W^{1,p}(G)$ и $u|_\Gamma = 0$. Тогда

$$u \in W_0^{1,p}(G), \qquad 1 < p < \infty.$$

Лемма 1.34. Пусть G — область класса $C^{k,1}$, $u \in W^{k,p}(G)$ и

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \ldots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Тогда

$$u \in W_0^{k,p}(G).$$

Лемма 1.35. Пусть G — область класса $C^{k,1}$, $p > 1$ и $h_l \in W^{k-l,p}(\Gamma)$ $(l = 0, \ldots, k-1)$. Тогда существует $u \in W^{k,p}(G)$, такое, что

$$\left.\frac{\partial^l u}{\partial \nu^l}\right|_\Gamma = h_l \qquad (l = 0, 1, \ldots, k-1).$$

В этой связи отметим еще два важных неравенства. Они позволяют рассматривать на пространстве $W^{1,p}(G)$ нормы (эквивалентные норме (1.5)), которые иногда удобнее в приложениях.

Лемма 1.36. Пусть G — ограниченная область с регулярной границей Γ, G_1 — подмножество положительной меры в G и Γ_1 — подмножество положительной ($(n-1)$-мерной) поверхностной меры в Γ. Тогда для $u \in W^{1,p}(G)$ $(p \geqslant 1)$

$$\int_G |u|^p\,dx \leqslant C_1 \left\{ \int_G \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{p/2} dx + \left| \int_{G_1} u\,dx \right|^p \right\},$$

$$\int_G |u|^p\,dx \leqslant C_2 \left\{ \int_G \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{p/2} dx + \left| \int_{\Gamma_1} u\,d\sigma_{n-1} \right|^p \right\}$$

с постоянными $C_1 = C_1(n, p, G_1, G)$ и $C_2 = C_2(n, p, \Gamma_1, G)$.

Замечание 1.17. В случае $p = 2$ и $G = G_1$ первое из этих неравенств есть не что иное, как неравенство Пуанкаре. Вторую оценку (равно как и оценку из леммы 1.26) часто называют неравенством Фридрихса.

В дальнейшем изложении нам понадобятся сопряженные пространства к некоторым соболевским пространствам.

Определение 1.20. Для $k \geqslant 0$, $1 < p < \infty$ мы обозначаем через $W^{-k,q}(G)$ сопряженное к соболевскому пространству $W_0^{k,p}(G)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. Для $p=q=2$ полагаем

$$H^{-k}(G)=\left(H_0^k(G)\right)^*.$$

Пространства $W^{-k,q}(G)$ можно рассматривать как пространства специальных распределений:

Лемма 1.37. Пусть $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Множество $W^{-k,q}(G)$ можно отождествить с множеством

$$\left\{u \mid u \in \mathscr{D}^*(G),\ \sup_{\varphi \in \mathscr{D}(G)} \frac{u(\varphi)}{\|\varphi\|_{W^{k,p}(G)}} < +\infty\right\}.$$

При этом отождествлении норма в $W^{-k,q}(G)$ задается формулой

$$\|u\|_{W^{-k,q}(G)} = \sup_{\varphi \in \mathscr{D}(G)} \frac{u(\varphi)}{\|\varphi\|_{W^{k,p}(G)}}.$$

Лемма 1.38. Каждый элемент $u \in W^{-k,q}(G)$ можно представить в виде

$$u=\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha v_\alpha \quad \text{с} \quad v_\alpha \in L^q(G).$$

Обратно, каждый элемент u, допускающий такое представление, принадлежит $W^{-k,q}(G)$.

Замечание 1.18. Производные в лемме 1.38 следует понимать в смысле определения 1.14. Элементы v_j для $k>0$ определяются по u неоднозначно.

§ 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ КАК ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Главная цель этого параграфа — дать функционально-аналитическую формулировку различных краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений, а именно сформулировать их в виде операторных уравнений

$$Au=f, \quad u \in V, \quad f \in V^*,$$

с оператором A, действующим из рефлексивного банахова пространства V в сопряженное пространство V^*.

Параграф разделен на три пункта. В п. 1 описывается принципиальная связь между краевыми задачами для эллиптических дифференциальных уравнений и соответствующими операторными уравнениями. В пп. 2 и 3 мы входим в подробности этой связи для конкретных классов краевых задач. Мы начинаем с краевых задач для уравнения второго порядка (п. 2), а затем обсуждаем задачи более высоких порядков и задачи для систем эллиптических уравнений (п. 3).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ниже G обозначает ограниченную область в R^n, граница Γ которой регулярна в смысле определения 1.17 (см. замечание 1.11). Мы рассматриваем краевую задачу

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) = f(x) \qquad \forall x \in G, \ u|_\Gamma = 0 \tag{2.1}$$

или, более общим образом, задачу

$$Eu = f, \qquad u \in \mathrm{D}(E) \tag{2.2}$$

с дифференциальным оператором E, определяемым формулой

$$(Eu)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, w(x)) \qquad \forall x \in G,$$

где

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, т. е. вектор с неотрицательными целочисленными компонентами, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$;

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \qquad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

$w = \{D^\alpha u\}$ — это r-мерный вектор всех производных от u до l-го порядка включительно;

a_α — некоторая заданная функция на $\bar{G} \times R^r$;

f — некоторая заданная функция на G;

$\mathrm{D}(E)$ — область определения дифференциального оператора E, т. е. некоторое подмножество так называемой *естественной* области определения $\mathrm{M}(E) = C^{2l}(\bar{G})$ оператора E, определяемое, как правило, при помощи краевых условий. (В примере (2.1) $\mathrm{D}(E) = \{u \mid u \in C^2(\bar{G}), u|_\Gamma = 0\}$.)

Замечание 2.1. Чтобы обеспечить выполнимость всех встречающихся в (2.2) дифференцирований, потребуем, пока как это принято в классической теории, чтобы функции a_α были l раз непрерывно дифференцируемыми на $\bar{G} \times R^r$. Правую часть f соответственно предполагаем непрерывной на $\bar{G}$. Функционально-аналитическая формулировка краевой задачи (2.2), которую мы дадим ниже, позволит в значительной степени ослабить эти требования.

Разрешимость классической задачи (2.2) существенно зависит от гладкости границы Г и от свойств регулярности функций a_α и f, к которым, вообще говоря, предъявляются еще более высокие требования, чем указанные в замечании 2.1. Кроме того, функции a_α должны удовлетворять так называемому условию эллиптичности и некоторым условиям на рост. При доказательстве теорем существования классических решений используется довольно сложная и специальная техника, своя для разных частных случаев краевых задач.

Ниже мы подходящим образом расширим классические дифференциальные операторы и, таким образом, перейдем от классических постановок краевых задач вида (2.2) к соответствующим функционально-аналитическим постановкам. При этом оказывается, что в этой расширенной постановке при естественных предположениях относительно функций a_α и f краевые задачи допускают изучение при помощи простых средств. В частности, можно дать эффективный метод построения приближенных решений.

Подходящая функционально-аналитическая постановка для краевой задачи вида (2.2) — это, как показывает опыт, операторное уравнение

$$Au = f$$

с оператором A, действующим из рефлексивного банахова пространства V в сопряженное пространство V^*. Оператор A при этом можно рассматривать (в некотором в дальнейшем уточняемом смысле) как расширение дифференциального оператора E. Типичный оператор A представляется в виде

$$A = L^* A_0 L,$$

где L — непрерывный линейный оператор, действующий из V в какое-то другое банахово пространство Y; $A_0 \in (Y \to Y^*)$ — возможно) нелинейный оператор; $L^* \in (Y^* \to V^*)$ — сопряженный к L оператор.

В пп. 2 и 3 мы указываем для ряда конкретных дифференциальных операторов их расширения. Для лучшего понимания последующих определений и для того, чтобы сделать более наглядной тесную связь между дифференциальными операторами и их расширениями, мы уже сейчас, несколько предвосхищая события, приведем для оператора

$$E = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \qquad D(E) = \{u \mid u \in C^2(\overline{G}),\ u|_\Gamma = 0\},$$

однородной задачи Дирихле (2.1) реализации пространств V и Y, а также операторы L и A_0, о которых шла речь выше:

$$V = H_0^1(G), \qquad Y = L_n^2(G) = Y^*;$$

$$L = \mathrm{grad}, \qquad L^* = -\mathrm{div};$$

$$A_0\colon\ y \to \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} y_j \right\}, \qquad y = \{y_1, \ldots, y_n\} \in L_n^2(G).$$

(Операторы grad и div имеют здесь, в общем, обычный смысл, т. е. $\mathrm{grad}\, u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\}$ для $u \in H_0^1(G)$ и $\mathrm{div}\, z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_i}$ для дифференцируемых вектор-функций $z \in L_n^2(G)$.)

Этот пример, который позже будет должным образом уточнен, уже обнаруживает два решающих момента, которые, как мы увидим, характеризуют общую связь между дифференциальными операторами и их расширениями:

1. Свойства «коэффициентов» a_α дифференциального оператора E, представляющих, как правило, материальные характеристики описываемой при помощи (2.2) физической системы (упругость, вязкость, теплопроводность и т. п.), определяют банахово пространство Y и свойства оператора A_0 (линейность или, соответственно, вид нелинейности, непрерывность, симметричность, монотонность и пр.). Последние переносятся и на оператор A.

2. Пространство V в основном определяется областью определения $\mathrm{D}(E)$. (Для дифференциального оператора E порядка $2l$ пространством V, как правило, служит замыкание множества $\mathrm{D}(E)$ в некотором соболевском пространстве $W^{l,p}(G)$. Показатель p зависит от свойств роста функций a_α.) После выбора пространств V и Y оператор L получается естественным образом.

В приводимом далее определении упомянутого выше понятия расширения оператора используются следующие обозначения, которых мы будем придерживаться до конца параграфа:

$\|\cdot\|$ — норма в V,

$\|\cdot\|_*$ — норма в V^*,

$\|\cdot\|_0$ — норма в Y,

$\|\cdot\|_{0*}$ — норма в Y^*,

$\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ — скалярное произведение между пространствами Y^* и Y.

Индекс 0 подчеркивает тесную связь между оператором A_0 и пространством Y. Пространство V будет всегда непрерывно и плотно вложено в некоторое гильбертово пространство H. Это последнее мы рассматриваем как подпространство в V^* в смысле § 6 гл. I и поэтому обозначаем скалярное произведение между V^* и V так же, как скалярное произведение в H, т. е. через $(\cdot, \cdot)$.

Определение 2.1. Оператор A вида

$$A = L^* A_0 L$$

называется *энергетическим расширением* оператора E (с естественной областью определения $\mathrm{M}(E)$, с областью определения $\mathrm{D}(E)$ и с областью значений $\mathrm{R}(E)$), если выполнены следующие условия:

a) A_0 есть деминепрерывное отображение некоторого банахова пространства Y в его сопряженное Y^*;

b) L есть линейное отображение некоторого рефлексивного банахова пространства V в Y, такое, что

$$\| Lu \|_0 = \| u \| \qquad \forall u \in V;$$

c) V плотно и непрерывно вложено в некоторое гильбертово пространство H; далее, $\mathrm{D}(E) \subset V$, $\mathrm{R}(E) \subset H$ и имеет место равенство

$$Au = Eu \qquad \forall u \in \mathrm{D}(E)$$

(как равенство в V^*);

d) $\{u \mid u \in \mathrm{M}(E) \cap V, \ Au \in H\} = \mathrm{D}(E)$.

Следующие замечания служат пояснением и оправданием этого определения.

Замечание 2.2. Термин «энергетическое» расширение выбран по той причине, что выражение $\langle A_0 Lh, Lh \rangle_0$ часто можно интерпретировать как энергию.

Замечание 2.3. Можно было бы ввести несколько более общее понятие расширения оператора, скажем, называть деминепрерывный оператор $A \in (V \to V^*)$ расширением оператора E, если выполняются лишь условия c) и d) определения 2.1. Мы отказываемся от этого, поскольку, с одной стороны, представление $A = L^* A_0 L$ является типичным для расширений, а с другой стороны, в гл. III мы будем его существенно использовать.

Замечание 2.4. Если, в частности, Y — гильбертово пространство и $Y = Y^*$, то из условия b) следует, что $L^* L \in (V \to V^*)$ есть дуализующее отображение J для пространства V.

Лемма 2.1. Пусть оператор $A \in (V \to V^*)$ — энергетическое расширение оператора E и $f \in H$ — некоторый заданный элемент. Элемент $u \in \mathrm{M}(E)$ является решением краевой задачи

(2.2) точно в том случае, когда u представляет собой решение операторного уравнения $Au = f$.

Доказательство. Если u является решением задачи (2.2), то $u \in \mathrm{D}(E)$ и, в силу условия c), $Au = Eu = f$.

Обратно, если $Au = f$, то вследствие включения $f \in H$ также и $Au \in H$. Ввиду условия d) отсюда вытекает, что $u \in \mathrm{D}(E)$, а значит, в силу c), $Eu = Au = f$. Лемма доказана.

Уже многократно говорилось о «функционально-аналитической формулировке» классической краевой задачи. На основании леммы 2.1 мы можем теперь уточнить смысл этих слов. Операторное уравнение $Au = f$ мы называем *функционально-аналитической формулировкой* данной краевой задачи $Eu = f$, $u \in \mathrm{D}(E)$, если оператор A является энергетическим расширением оператора E.

Замечание 2.5. Мы выбрали в качестве исходного пункта наших рассуждений классическую краевую задачу по той причине, что она хорошо знакома читателю. При таком образе действий нам приходится, однако, мириться со следующим недостатком. Ради классической формулировки краевой задачи мы не только ограничиваем себя соответствующим понятием решения, а сверх того налагаем требования на правую часть, коэффициенты, границу области и граничные значения, которые нужны лишь для того, чтобы обеспечить эквивалентность наших двух формулировок задачи, а именно для проверки условий c) и d) (см. лемму 2.1). Короче говоря, имеются важные краевые задачи, которые можно непосредственно формулировать как операторное уравнение $Au = f$, но которые не допускают никакой осмысленной классической интерпретации. Типичным примером может служить краевая задача вида (2.2), если отказаться от указанных в замечании 2.1 предположений о гладкости функций a_α. В дальнейшем по ходу дела, приводя функционально-аналитическую формулировку для той или иной классической краевой задачи, мы будем указывать, как можно ослабить предположения, принятые с учетом классической формулировки и упомянутой эквивалентности, таким образом, чтобы условия a) и b) все еще выполнялись.

В рассматриваемых далее примерах в качестве банахова пространства Y, как правило, будет рассматриваться декартово произведение

$$L_r^p(G) = L^p(G) \times \ldots \times L^p(G)$$

с нормой

$$\|y\|_0 = \left(\int_G \left(\sum_{i=1}^r y_i^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}, \qquad y = \{y_1, \ldots, y_r\},$$

а в качестве оператора A_0 — *оператор Немыцкого*, т. е. оператор, действующий по правилу

$$(A_0y)(x) = \{a_1(x, y(x)), \ldots, a_r(x, y(x))\} \ \forall x \in G, \ \forall y \in Y = L_r^p(G). \tag{2.3}$$

Приводимая ниже лемма дает условия на вектор $\{a_1, \ldots, a_r\}$, достаточные для деминепрерывности оператора A_0 (условие а)).

Лемма 2.2. Пусть для функций a_i $(i = 1, \ldots, r)$, определенных на $G \times R^r$, выполняются следующие условия:

для почти всех $x \in G$ функции $\xi \to a_i(x, \xi)$ непрерывны на R^r;

для каждого $\xi \in R^r$ функции $x \to a_i(x, \xi)$ измеримы;

для всех $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_r\} \in R^r$ и для почти всех $x \in G$ имеет место неравенство

$$|a_i(x, \xi)| \leqslant c\left(g(x) + \sum_{j=1}^r |\xi_j|^{p-1}\right), \quad p > 1,$$

где $c = \mathrm{const}$, $g \in L^q(G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Тогда оператор Немыцкого A_0, заданный формулой (2.3), переводит ограниченные множества пространства $Y = L_r^p(G)$ в ограниченные множества пространства $Y^* = L_r^q(G)$ и как оператор из Y в Y^* деминепрерывен.

Доказательство. Прежде всего покажем, что $A_0y \in Y^*$ для любого $y \in Y$. Для этого достаточно показать, что $a_i(\cdot, y(\cdot)) \in L^q(G)$ для $i = 1, \ldots, r$. В силу наложенных на a_i требований измеримости и непрерывности, функции $a_i(\cdot, y(\cdot))$ являются измеримыми. Далее, согласно неравенству Гёльдера,

$$|a_i(x, y(x))|^q \leqslant$$
$$\leqslant c^q\left(|g(x)| + \sum_{j=1}^r |y_j(x)|^{p-1}\right)^q \leqslant c_1\left(|g(x)|^q + \sum_{j=1}^r |y_j(x)|^p\right),$$

где c_1 — константа, не зависящая от y. Следовательно, функция $|a_i(\cdot, y(\cdot))|^q$ имеет интегрируемую по Лебегу мажоранту. Отсюда вытекает, что $a_i(\cdot, y(\cdot)) \in L^q(G)$ и тем самым $A_0y \in Y^*$. Из только что доказанного неравенства получаем также

$$\|A_0y\|_{0*} \leqslant K = \mathrm{const} \qquad \text{для} \qquad \|y\|_0 \leqslant K_1 = \mathrm{const},$$

т. е. A_0 переводит ограниченные множества из Y в ограниченные множества из Y^*.

Докажем деминепрерывность оператора A_0. Пусть $\{y_n\} \subset Y$ — такая последовательность, что $\|y_n - y\|_0 \to 0$. По уже доказанному, множество $\{A_0y_n\}$ ограничено и, значит, слабо компактно. Поэтому, в силу леммы 5.4 гл. I, достаточно показать, что

$A_0 y_{n_k} \rightharpoonup A_0 y$ для каждой слабо сходящейся подпоследовательности последовательности $\{A_0 y_n\}$. Пусть z — слабый предел такой подпоследовательности $\{A_0 y_{n_k}\}$. По лемме 1.18 существует подпоследовательность $\{v_j\}$ последовательности $\{y_{n_k}\}$, сходящаяся к y почти всюду в G. Вследствие непрерывности функций $\{x, \xi\} \to a_i(x, \xi)$, $i = 1, \ldots, r$, по $\xi \in R^r$ имеем $A_0 v_j \to A_0 y$ почти всюду в G. С другой стороны, $\{A_0 v_j\}$ как подпоследовательность последовательности $\{A_0 y_{n_k}\}$ слабо сходится к z. В силу леммы 1.19 отсюда следует, что $A_0 y = z$, т. е. $A_0 y_{n_k} \rightharpoonup A_0 y$ в Y^*. Лемма доказана.

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Краевая задача (2.1). Осуществление своего замысла — дать функционально-аналитическую формулировку краевых задач — мы начнем с простейшего примера однородной краевой задачи Дирихле (2.1) с постоянными коэффициентами a_{ij}. Мы хотим построить энергетическое расширение для оператора

$$E = -\sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

с $M(E) = C^2(\bar{G})$, $D(E) = \{u \mid u \in M(E), u|_\Gamma = 0\}$. Формальное сходство структуры оператора E и структуры оператора $A = L^* A_0 L$ подсказывает нам естественный путь. Положим

$$V = \overset{\circ}{H}{}^1_0(G); \qquad H = L^2(G); \qquad Y = L^2_n(G); \tag{2.4}$$

$$L\colon\ u \to \operatorname{grad} u;$$
$$A_0\colon\ y \to \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} y_j \right\}, \quad y = \{y_1, \ldots, y_n\}. \tag{2.5}$$

Пространства V и Y наделяются соответственно нормами

$$\|u\| = \left(\int_G |\operatorname{grad} u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \text{где} \quad |\operatorname{grad} u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2,$$

и

$$\|y\|_0 = \left(\int_G \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Покажем, что при этом выполняются условия a) — d).

a) Согласно неравенству Шварца,

$$\|A_0y\|_{0*}^2=\int\limits_G\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\right)^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_G\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\sum_{j=1}^n y_j^2\right)dx=\sum_{i,\,j=1}^n a_{ij}^2\|y\|_0^2,$$

т. е. линейный оператор $A_0\in(Y\to Y^*)$ ограничен и, следовательно, непрерывен, а значит, и деминепрерывен.

b) Оператор $L\in(V\to Y)$, очевидно, линеен. Вследствие определения норм в V и Y

$$\|Lu\|_0=\|u\|\qquad\forall u\in V.$$

c) Ясно, что $D(E)\subset V\subset H$ и $R(E)\subset H$. Множество бесконечно дифференцируемых финитных функций плотно в $H=$ $=L^2(G)$ (лемма 1.20). Следовательно, V также плотно в H. На основании неравенства Фридрихса (лемма 1.26) оператор вложения V в H непрерывен. Остается показать, что $Au=Eu$ для каждого $u\in D(E)$. Согласно определению, сопряженный к L оператор $L^*\in(Y^*\to V^*)$ для $h\in V$ и $z\in Y^*$ удовлетворяет соотношению $(L^*z,h)=\langle z,Lh\rangle_0$. Используя формулу Стокса, находим, что для векторной функции $z\in Y^*$ с $\operatorname{div}z\in C(\bar G)$ и для функций $h\in C_0^\infty(G)$

$$(L^*z,\ h)=\langle z,\ Lh\rangle_0=\int\limits_G\sum_{i=1}^n z_i\frac{\partial h}{\partial x_i}\,dx=\int\limits_\Gamma\sum_{i=1}^n z_i\cos(\nu,\ x_i)\,h\,d\sigma-$$
$$-\int\limits_G(\operatorname{div}z)\,h\,dx=-\int\limits_G(\operatorname{div}z)\,h\,dx=(-\operatorname{div}z,\ h),$$

где ν — внешняя нормаль к Γ. Так как $C_0^\infty(G)$ плотно в V, то отсюда следует, что

$$L^*z=-\operatorname{div}z. \tag{2.6}$$

Из этого представления оператора L^*, справедливого для достаточно гладких векторных функций $z\in Y^*$, вытекает, что для $u\in D(E)$

$$Au=Eu.$$

d) В силу замечания 1.13 и следствия из замечания 1.16, $D(E)=M(E)\cap V$.

Замечание 2.6. Только что построенное энергетическое расширение A оператора E получается, если формально написать

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\operatorname{div} A_0 \operatorname{grad}$$

и при этом производные понимать в смысле пространства распределений $\mathcal{D}^*(G)$. Эта прямая связь между E и A имеет, правда, место только для случая краевых условий Дирихле.

Замечание 2.7. В гл. III мы будем исследовать операторные уравнения вида $Au = f$. При этом будет достаточно накладывать дополнительные сверх условий а) и b) ограничения лишь на оператор A_0. Ограничения такого рода можно выводить непосредственно из соответствующих свойств коэффициентов a_{ij} оператора E. Пусть, например, матрица коэффициентов (a_{ij}) дифференциального оператора из (2.1) симметрична и неотрицательна, т. е.

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{и} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} d_i d_j \geqslant 0, \qquad d_i \in R^1, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Тогда, очевидно, оператор A_0 также обладает этими свойствами, т. е.

$$\langle A_0 w, z\rangle_0 = \langle A_0 z, w\rangle_0 \quad \text{и} \quad \langle A_0 w, w\rangle_0 \geqslant 0, \quad w, z \in Y.$$

То же самое имеет место и для оператора A, поскольку

$$(Au, v) = (L^* A_0 Lu, v) = \langle A_0 Lu, Lv\rangle_0 = \langle A_0 Lv, Lu\rangle_0 = (L^* A_0 Lv, u) = (Av, u)$$

и

$$(Au, u) = (L^* A_0 Lu, u) = \langle A_0 Lu, Lu\rangle_0 \geqslant 0 \qquad \forall u, \ \forall v \in V.$$

На оператор A переносится с оператора A_0 и свойство линейности.

При условиях а) и b), а также дополнительных предположениях линейности, неотрицательности и симметричности оператора A_0 имеет место следующее утверждение (см. следствие 4.2 гл. III): задача решения уравнения $Au = f$ эквивалентна задаче минимизации

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v),$$

$$F(v) = (Av, v) - 2(f, v) \qquad \forall v \in V. \tag{2.7}$$

Этот факт позволяет дать «физическое» оправдание нашей функционально-аналитической формулировки краевой задачи. Именно, заметим, что задача (2.1) часто возникает при математическом описании различных задач физики. В качестве примеров назовем задачу отыскания положения равновесия натянутой упругой мембраны под действием нагрузки, представленной правой частью f, и задачу (стационарного) распределения тепла в теле со (стационарными) источниками тепла, представленными функцией f. Функционал F, заданный формулой (2.7), ставит в соответствие каждому возможному состоянию системы, описываемой посредством (2.1) (прогибу мембраны, распределению температуры), отвечающее ему значение энергии. Таким образом, решение уравнения $Au = f$ можно охарактеризовать как состояние с минимальной энергией (которое поэтому и реализуется в действительности). Вообще говоря, функционал F не принимает на $\mathrm{D}(E)$ своего минимального значения. Наконец, заметим, что для механических систем функционально-аналитическую формулировку $Au = f$ краевой задачи можно получить, используя принцип виртуальных перемещений.

Однородные краевые задачи Дирихле. Только что проведенные рассмотрения для задачи (2.1) мы распространим теперь на случай краевой задачи Дирихле вида

$$\begin{gathered} Eu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) + a_{n+1}(x, w) = f, \\ w = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u \right\}, \qquad u \in \mathrm{D}(E), \end{gathered} \tag{2.8}$$

с $\mathrm{M}(E) = C^2(\bar{G})$ и $\mathrm{D}(E) = \{u \mid u \in \mathrm{M}(E), u|_\Gamma = 0\}$. Будем предполагать, что функции a_i, $i = 1, \ldots, n+1$, удовлетворяют для некоторого $p \geqslant 2$ условиям леммы 2.2. Покажем, что если положить

$$V = W_0^{1,p}(G); \qquad H = L^2(G); \qquad Y = L_{n+1}^p(G);$$

$$L\colon u \to \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u \right\}; \qquad A_0\colon y \to \{a_1(x, y), \ldots, a_{n+1}(x, y)\};$$

$$\|u\| = \left(\int_G (|\operatorname{grad} u|^2 + u^2)^{p/2}\, dx \right)^{1/p}, \qquad \|y\|_0 = \left(\int_G \left(\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p},$$

то оператор $A = L^* A_0 L$ будет энергетическим расширением дифференциального оператора E из (2.8).

a) Это условие идентично последнему утверждению леммы 2.2.

b) Оператор $L \in (V \to Y)$, очевидно, линеен. В силу определения норм в V и Y, для каждого $u \in V$ имеем $\|Lu\|_0 = \|u\|$.

c) Ясно, что $\mathrm{D}(E) \subset V \subset H$ и $\mathrm{R}(E) \subset H$. Далее, V непрерывно и плотно вложено в H (см. лемму 1.20). Используя формулу

Стокса, находим, что для $u \in \mathrm{D}(E)$ и $h \in C_0^\infty(G)$

$$(Au, h) = (L^* A_0 Lu, h) = \langle A_0 Lu, Lh \rangle_0 =$$
$$= \int_G \left(\sum_{i=1}^n a_i(x, w) \frac{\partial h}{\partial x_i} + a_{n+1}(x, w) h \right) dx =$$
$$= \int_\Gamma \sum_{i=1}^n a_i(x, w) \cos(\nu, x_i) h \, d\sigma +$$
$$+ \int_G \left(- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) + a_{n+1}(x, w) \right) h \, dx =$$
$$= \int_G Eu \cdot h \, dx.$$

Отсюда, ввиду плотности $C_0^\infty(G)$ в V, следует, что

$$Au = Eu \qquad \forall u \in \mathrm{D}(E).$$

d) В силу замечания 1.13 и следствия из замечания 1.16 имеет место равенство $\mathrm{D}(E) = \mathrm{M}(E) \cap V$.

Замечание 2.8. Как и при доказательстве условия c), мы в соответствующих местах будем еще не раз молчаливо использовать сформулированные в замечании 2.1 общие предположения о гладкости функций a_α. Однако условия a) и b), играющие решающую роль при нашем дальнейшем изучении уравнения $Au = f$, остаются справедливыми, если от этих предположений отказаться, подчинив функции a_α лишь требованиям леммы 2.2.

Замечание 2.9. Легко убедиться в том, что для непрерывно дифференцируемых вектор-функций $z \in Y^*$ имеет место представление

$$L^* z = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial x_i} + z_{n+1}.$$

Замечание 2.10. В частном случае $a_i = a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{n+1} = 0$ при построении энергетического расширения оператора E оказывается более целесообразным положить

$$V = W_0^{1,p}(G), \qquad H = L^2(G), \qquad Y = L_n^p(G);$$
$$L\colon u \to \operatorname{grad} u, \qquad A_0\colon y \to \{a_1(x, y), \ldots, a_n(x, y)\};$$
$$\|u\| = \left(\int_G |\operatorname{grad} u|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad \|y\|_0 = \left(\int_G \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}.$$

(В силу неравенства Фридрихса две указанные нормы на $V = W_0^{1,p}(G)$ эквивалентны.)

Неоднородные краевые задачи Дирихле. До сих пор мы рассматривали только однородные краевые задачи Дирихле. Покажем теперь, как можно неоднородные задачи Дирихле вида

$$E\bar{u} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \bar{w}) + a_{n+1}(x, \bar{w}) = f,$$
$$\bar{w} = \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}, \bar{u} \right\}, \qquad \bar{u}|_\Gamma = \varphi, \tag{2.9}$$

сводить к соответствующим задачам (2.8). Для этого прежде всего предположим (см., однако, замечание 2.11), что у заданной на Γ функции φ существует продолжение $u_1 \in C^2(\bar{G})$. При помощи замены

$$\bar{u} = u_1 + u$$

неоднородная задача (2.9) сводится к следующей однородной задаче Дирихле относительно u:

$$E_1 u = E(u_1 + u) = f, \qquad u \in \mathrm{D}(E_1) = \{u \mid u \in C^2(\bar{G}),\ u|_\Gamma = 0\}.$$

Очевидно, что мы получим энергетическое расширение A оператора E_1, если зададим оператор A_0 правилом

$$y \to \{a_1(x, w_1 + y), \ldots, a_{n+1}(x, w_1 + y)\}, \quad w_1 = \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, u_1 \right\},$$

а V, H, Y, L выберем так же, как и в однородной задаче (2.8).

Замечание 2.11. Предположение о существовании функции $u_1 \in \mathrm{M}(E)$, удовлетворяющей условию $u_1|_\Gamma = \varphi$, понадобилось для того, чтобы обеспечить выполнимость классического дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w_1 + w)$ и тем самым выполнение условия с). С точки зрения функционально-аналитической формулировки (см. замечание 2.5) рассматриваемой краевой задачи достаточно, однако, потребовать существования функции $u_1 \in W^{1,p}(G)$, совпадающей на Γ с φ в смысле замечания 1.16. Для этого согласно лемме 1.35 достаточно потребовать, чтобы $\varphi \in W^{1,p}(\Gamma)$, поскольку G принадлежит классу $C^{1,1}$.

Предположение о том, что G есть область класса $C^{1,1}$, мы будем использовать и далее, не оговаривая этого специально, при проверке условия d) для последующих краевых задач второго порядка.

Однородные краевые задачи Неймана. Рассмотрим задачу Неймана

$$Eu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) = f, \qquad w = \operatorname{grad} u, \qquad u \in D(E), \tag{2.10}$$

с $\mathrm{M}(E) = C^2(\bar{G})$, $\quad \mathrm{D}(E) = \left\{ u \mid u \in \mathrm{M}(E),\ \int\limits_G u\,dx = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu_E} = 0 \right\}$,

где $\frac{\partial u}{\partial \nu_E} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x, w)\cos(\nu, x_i)\,|_{\Gamma}$. Мы снова предполагаем, что функции a_i для некоторого $p \geqslant 2$ удовлетворяют предположениям леммы 2.2. Чтобы получить энергетическое расширение оператора E, фигурирующего в (2.10), полагаем

$$V = \left\{ u \mid u \in W^{1,p}(G),\ \int\limits_G u\,dx = 0 \right\}, \qquad \|u\| = \left(\int\limits_G |\operatorname{grad} u|^p\,dx \right)^{1/p};$$

$$H = \left\{ u \mid u \in L^2(G),\ \int\limits_G u\,dx = 0 \right\}, \qquad Y = L_n^p(G);$$

$$L\colon u \to \operatorname{grad} u, \qquad A_0\colon y \to \{a_1(x, y), \ldots, a_n(x, y)\}.$$

(Введенная норма на V в силу неравенства Пуанкаре (см. замечание 1.17) эквивалентна $W^{1,p}(G)$-норме на V.) Проверим выполнение условий a)—d).

a) Это условие имеет место в силу леммы 2.2.

b) Оператор $L \in (V \to Y)$, очевидно, линеен. По определению норм в V и Y имеем $\|Lu\|_0 = \|u\|$ для каждого $u \in V$.

c) Ясно, что $\mathrm{D}(E) \subset V \subset H$, и так как

$$\int\limits_G Eu\,dx = \int\limits_G Eu \cdot 1\,dx = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_E}\,d\sigma = 0,$$

то $\mathrm{R}(E) \subset H$. Вложение V в H, ввиду отмеченной выше эквивалентности только что введенной нормы и $W^{1,p}(G)$-нормы на V, является непрерывным. Покажем, что V плотно в H. Мы докажем даже, что множество $V \cap C_0^2(G)$ плотно в H (это понадобится нам при проверке условия d)). Итак, пусть $h \in H$. Поскольку $C_0^2(G)$ плотно в $L^2(G)$, то существует последовательность $\{v_n\} \subset C_0^2(G)$, такая, что $\|v_n - h\|_{L^2} \to 0$. Выберем $\varphi \in C_0^2(G)$

таким образом, чтобы $\int\limits_G \varphi\, dx = 1$. Тогда для последовательности $\{h_n\} \subset V \cap C_0^2(G)$, где $h_n = v_n - \varphi \int\limits_G v_n\, dx$, имеем

$$\|h_n - h\|_H \leqslant \|v_n - h\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2} \left(\left| \int\limits_G (v_n - h)\, dx \right| + \left| \int\limits_G h\, dx \right| \right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \|\varphi\|_{L^2} \sqrt{\operatorname{mes}(G)}\right) \|v_n - h\|_{L^2} \to 0.$$

Следовательно, $V \cap C_0^2(G)$, а значит и V, плотно в H. Наконец, применяя формулу Стокса, находим, что для $u \in D(E)$ и $h \in V \cap C^1(\bar{G})$

$$(Au, h) = (L^* A_0 Lu, h) = \langle A_0 Lu, Lh \rangle_0 = \int\limits_G \sum_{i=1}^n a_i(x, w) \frac{\partial h}{\partial x_i}\, dx =$$
$$= \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_E} h\, d\sigma - \int\limits_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w)\, h\, dx =$$
$$= - \int\limits_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w)\, h\, dx = \int\limits_G Eu \cdot h\, dx.$$

Применяя лемму 1.30, получаем, что $Au = Eu$ для $u \in \mathrm{D}(E)$.

d) Пусть $u \in \mathrm{M}(E) \cap V$ и $Au \in H$. Как следует из только что доказанного, для всех $h \in V \cap C^1(\bar{G})$

$$\int\limits_G (Eu - Au)\, h\, dx + \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_E} h\, d\sigma = 0.$$

В частности, для $h \in V \cap C_0^2(G)$

$$\int\limits_G (Eu - Au)\, h\, dx = 0.$$

Как было доказано в c), множество $V \cap C_0^2(G)$ плотно в H. Поэтому

$$\int\limits_G (Eu - Au)\, h\, dx = 0 \qquad \forall h \in H,$$

откуда

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_E} h\, d\sigma = 0 \qquad \forall h \in V.$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial \nu_E} = 0$, т. е. $u \in \mathrm{D}(E)$. (Последнее заключение получается следующим образом. В силу леммы 1.35

существует продолжение $h_1 \in W^{1,p}(G)$ определенной на Γ функции $\frac{\partial u}{\partial \nu_E}$. Пусть $h_2 \in W^{1,p}(G)$ — любая финитная функция на G, такая, что $\int\limits_G h_2 dx = \int\limits_G h_1 dx$. Тогда $h = h_1 - h_2 \in V$ и $h|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu_E}$, а значит,

$$\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_E}\right)^2 d\sigma = \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_E} h\, d\sigma = 0.$$

Отсюда, как утверждалось, вытекает, что $\frac{\partial u}{\partial \nu_E} = 0.$)

Замечание 2.12. Предположение $f \in H$, наложенное в лемме 2.1 на правую часть f, является обобщением классического условия $\int\limits_G f\, dx = 0$ разрешимости задачи Неймана.

Замечание 2.13. На функции $u \in V$ заранее никаких краевых условий не накладывалось. Однако при проверке условия d) обнаружилось, что всякое решение уравнения $Au = f$, $f \in H$, принадлежащее $M(E)$, автоматически удовлетворяет так называемому *естественному* краевому условию $\frac{\partial u}{\partial \nu_E} = 0$.

Замечание 2.14. Используя метод, совершенно аналогичный примененному для задачи Дирихле, можно и для задачи Неймана (и для обсуждаемых далее смешанных задач) рассмотреть случай

$$Eu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) + a_{n+1}(x, w).$$

Неоднородные задачи Неймана. Рассмотрим соответствующую задаче (2.10) неоднородную задачу Неймана, которую запишем в виде

$$E_f u = 0, \qquad u \in D(E_f),$$

где

$$E_f u = Eu - f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) - f,$$

$$M(E_f) = C^2(\bar{G}), \qquad D(E_f) = \left\{ u \mid u \in M(E_f),\ \int\limits_G u\, dx = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu_E} = \varphi \right\}.$$

Будем предполагать, что функция φ принадлежит $W^{1,p}(\Gamma)$ и непрерывна на Γ (см. замечание 2.15). Для того чтобы наша задача имела решение, очевидно, необходимо, чтобы

$$\int_\Gamma \varphi\, d\sigma + \int_G f\, dx = 0,$$

и мы примем, что это условие выполнено. Для получения энергетического расширения оператора E_f возьмем V, H, Y и L такие же, как и в случае однородной задачи Неймана. Несколько по-другому нужно будет определить лишь оператор A_0.

Прежде всего определим на (линейном) множестве значений оператора $L \in (V \to Y)$ линейный функционал g_0 формулой

$$g_0(Lh) = \int_\Gamma \varphi h\, d\sigma + \int_G fh\, dx \qquad \forall h \in V.$$

Так как $\|h\| = \|Lh\|_0$ и $\varphi \in L^q(\Gamma)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, то согласно лемме 1.32 функционал g_0 непрерывен. Пусть $g \in Y^*$ — его продолжение на все пространство Y, существующее по теореме Хана — Банаха. Положим

$$A_0\colon\ y \to \{a_1(\cdot, y), \ldots, a_n(\cdot, y)\} - g.$$

a), b) Эти условия выполняются в силу принятых определений, что проверяется так же, как и в случае однородной задачи.

c) Нам нужно лишь показать, что $\mathrm{R}(E_f) \subset H$ и $Au = E_f u$ для $u \in \mathrm{D}(E_f)$. Имеем

$$\int_G E_f u\, dx = \int_G (Eu - f)\, dx = -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_E}\, d\sigma - \int_G f\, dx =$$
$$= -\left(\int_\Gamma \varphi\, d\sigma + \int_G f\, dx\right) = 0.$$

Применяя формулу Стокса, находим, что для $u \in \mathrm{D}(E)$ и $h \in V \cap C^1(\bar{G})$

$$(Au, h) = \langle A_0 Lu, Lh\rangle_0 = \int_G \left(\sum_{i=1}^n a_i(x, w)\frac{\partial h}{\partial x_i} - fh\right) dx - \int_\Gamma \varphi h\, d\sigma =$$
$$= \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_E} - \varphi\right) h\, d\sigma - \int_G \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) + f\right) h\, dx =$$
$$= \int_G Eu \cdot h\, dx,$$

т. е. $Au = E_f u$ для $u \in \mathrm{D}(E_f)$.

d) Пусть $u \in \mathrm{M}(E) \cap V$ и $Au \in H$. Из только что доказанного вытекает соотношение

$$(E_f u - Au, h) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_E} - \varphi \right) h \, d\sigma = 0 \qquad \forall h \in V \cap C^1(\bar{G}).$$

Как и в случае однородной задачи, используя тот факт, что $E_f u - Au \in H$, устанавливаем, что

$$\int_G (E_f u - Au) h \, dx = 0 \qquad \forall h \in H.$$

Отсюда следует, что $\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_E} - \varphi \right) h \, d\sigma = 0$ для каждого $h \in V$ и, значит, $\frac{\partial u}{\partial \nu_E} = \varphi$.

Замечание 2.15. Требование, чтобы функция φ принадлежала $W^{1,p}(\Gamma)$ и была непрерывной на Γ, нужно лишь в связи с классической формулировкой рассматриваемой неоднородной задачи Неймана, а именно для того, чтобы обеспечить выполнение условия d). При функционально-аналитической формулировке, очевидно, достаточно потребовать, чтобы $\varphi \in L^q(\Gamma) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$.

Однородные смешанные задачи. Пусть граница Γ области G допускает представление в виде

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \qquad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing, \qquad i \neq j, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

причем множества Γ_i измеримы относительно поверхностной меры σ_{n-1} на Γ. Далее, пусть $\sigma_{n-1}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) > 0$ и Γ_1 замкнуто в Γ.

Рассмотрим смешанную краевую задачу

$$Eu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) = f, \qquad w = \operatorname{grad} u, \qquad u \in D(E), \qquad (2.11)$$

с

$$\mathrm{M}(E) = C^2(\bar{G}),$$

$$\mathrm{D}(E) = \left\{ u \,|\, u \in M(E),\ u|_{\Gamma_1} = 0,\ \left(|u|^{p-2} u + \frac{\partial u}{\partial \nu_E} \right)\Big|_{\Gamma_2} = 0, \right.$$
$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu_E}\Big|_{\Gamma_3} = 0 \right\}.$$

Пусть задано $p \geqslant 2$. Будем считать, что функции a_i при этом p удовлетворяют предположениям леммы 2.2. Для получения энергетического расширения оператора E положим

$$V=\{u \mid u\in W^{1,p}(G),\ u|_{\Gamma_1}=0\},$$

$$\|u\|=\Big(\int_G |\operatorname{grad} u|^p\,dx+\int_{\Gamma_2}|u|^p\,d\sigma\Big)^{1/p};$$

$$H=L^2(G),\ Y=L_n^p(G)\times L^p(\Gamma_2),\ Y^*=L_n^q(G)\times L^q(\Gamma_2)\Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Big);$$

$$L\colon\ u\to\Big\{\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n},\ \gamma u\Big\};$$

$$A_0\colon\ \{y,\ \varphi\}\to\{a_1(x,\ y),\ \ldots,\ a_n(x,\ y),\ |\varphi|^{p-2}\varphi\},$$

где γu обозначает сужение функции $u\in V$ на Γ_2. Согласно лемме 1.32, $\gamma\in(V\to L^p(\Gamma_2))$. Проверим выполнение условий a)—d).

a) Это условие выполняется в силу леммы 2.2.

b) Очевидно, оператор $L\in(V\to Y)$ линеен и

$$\|Lu\|_0^p=\int_G|\operatorname{grad} u|^p\,dx+\int_{\Gamma_2}|\gamma u|^p\,d\sigma=\|u\|^p\qquad\forall u\in V.$$

c) Прежде всего $\mathrm{D}(E)\subset V\subset H$ и $\mathrm{R}(E)\subset H$. Далее, V плотно в H, и в силу неравенства Фридрихса (лемма 1.36) вложение V в H непрерывно. Остается доказать, что $Au=Eu$ для $u\in\mathrm{D}(E)$. Применяя формулу Стокса, находим, что для $u\in\mathrm{D}(E)$ и $h\in V\cap C^1(\bar G)$

$$(Au,\ h)=(L^*A_0Lu,\ h)=\langle A_0Lu,\ Lh\rangle_0=$$

$$=\int_G\sum_{i=1}^n a_i(x,\ w)\frac{\partial h}{\partial x_i}\,dx+\int_{\Gamma_2}|u|^{p-2}uh\,d\sigma=$$

$$=\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial \nu_E}h\,d\sigma-\int_G\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,\ w)\,h\,dx+\int_{\Gamma_2}|u|^{p-2}uh\,d\sigma=$$

$$=-\int_G\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,\ w)\,h\,dx=\int_G Eu\cdot h\,dx;$$

следовательно, $Au=Eu$ для $u\in\mathrm{D}(E)$.

d) Пусть $u\in\mathrm{M}(E)\cap V$ и $Au\in H$. Тогда $u|_{\Gamma_1}=0$. Воспользуемся доказанным в п. c) соотношением

$$\int_G(Eu-Au)\,h\,dx+\int_{\Gamma_2}\Big(|u|^{p-2}u+\frac{\partial u}{\partial\nu_E}\Big)h\,d\sigma+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu_E}h\,d\sigma=0$$

$$\forall h\in V\cap C^2(\bar G).$$

Как и в задаче Неймана, отсюда следует, что

$$\int_{\Gamma_2}\left(|u|^{p-2}u+\frac{\partial u}{\partial \nu_E}\right)h\,d\sigma+\int_{\Gamma_3}\frac{\partial u}{\partial \nu_E}h\,d\sigma=0 \qquad \forall h\in V.$$

Вследствие произвольности выбора h получаем

$$|u|^{p-2}u+\frac{\partial u}{\partial \nu_E}\Big|_{\Gamma_2}=\frac{\partial u}{\partial \nu_E}\Big|_{\Gamma_3}=0,$$

т. е. $u\in \mathrm{D}(E)$.

Неоднородные смешанные краевые задачи. Рассмотрим неоднородную смешанную краевую задачу, соответствующую задаче (2.11):

$$E\bar{u}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,\bar{w})=f, \qquad \bar{w}=\operatorname{grad}\bar{u},$$

$$\bar{u}|_{\Gamma_1}=\varphi_1, \qquad \left(|\bar{u}|^{p-2}\bar{u}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu_E}\right)\Big|_{\Gamma_2}=\varphi_2, \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu_E}\Big|_{\Gamma_3}=\varphi_3.$$

Снова будем считать, что функции a_i для некоторого заданного $p\geqslant 2$ удовлетворяют требованиям леммы 2.2. Предположим, что существует функция $u_1\in C^2(\bar{G})$, такая, что $u_1|_{\Gamma_1}=\varphi_1$, $u_1|_{\Gamma_2}=0$ (ср. с методом, примененным для неоднородной задачи Дирихле). Пусть, далее, для $i=2,3$ функции $\varphi_i\in W^{1,p}(\Gamma_i)$ и непрерывны на Γ_i. При помощи замены $\bar{u}=u_1+u$ наша задача сводится к задаче

$$E_1u=E(u_1+u)=f, \qquad u\in \mathrm{D}(E_1),$$

$$\mathrm{M}(E_1)=C^2(\bar{G}), \tag{2.12}$$

$$\mathrm{D}(E_1)=\Big\{u\,|\,u\in M(E_1),\ u|_{\Gamma_1}=0,\ \left(|u|^{p-2}u+\frac{\partial(u_1+u)}{\partial \nu_E}\right)\Big|_{\Gamma_2}=\varphi_2,\ \frac{\partial(u_1+u)}{\partial \nu_E}\Big|_{\Gamma_3}=\varphi_3\Big\}.$$

Для получения функционально-аналитической формулировки поступаем так же, как и в случае однородной смешанной задачи, с той лишь разницей, что теперь полагаем

$$A_0:\ \{y,\varphi\}\to\{a_1(\cdot,w_1+y),\ \ldots,\ a_n(\cdot,w_1+y),\ |\varphi|^{p-2}\varphi\}-g,\quad w_1=\operatorname{grad}u_1.$$

Здесь $g\in Y^*$ — продолжение на все пространство Y линейного непрерывного функционала, определенного на $\mathrm{R}(L)$ формулой

$$Lh\to\int_{\Gamma_2}\varphi_2 h\,d\sigma+\int_{\Gamma_3}\varphi_3 h\,d\sigma \qquad \forall h\in V.$$

a), b) Эти условия справедливы по-прежнему.

c) Очевидно, что $\mathrm{D}(E_1) \subset V \subset H$ и V непрерывно и плотно вложено в H. Далее, $\mathrm{R}(E_1) \subset H$. Применяя формулу Стокса, находим, что для $u \in \mathrm{D}(E_1)$ и $h \in V \cap C_1(\bar{G})$

$$(Au, h) = \langle A_0 Lu, Lh \rangle_0 =$$

$$= \int_G \sum_{i=1}^n a_i(x, \bar{w}) \frac{\partial h}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_2} |u|^{p-2} uh\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \varphi_2 h\, d\sigma - \int_{\Gamma_3} \varphi_3 h\, d\sigma =$$

$$= \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \frac{\partial(u_1 + u)}{\partial \nu_E} h\, d\sigma - \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \bar{w})\, dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_2} |u|^{p-2} uh\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \varphi_2 h\, d\sigma - \int_{\Gamma_3} \varphi_3 h\, d\sigma =$$

$$= \int_{\Gamma_2} \left(|u|^{p-2} u + \frac{\partial(u_1 + u)}{\partial \nu_E} - \varphi_2 \right) h\, d\sigma + \int_{\Gamma_3} \left(\frac{\partial(u_1 + u)}{\partial \nu_E} - \varphi_3 \right) h\, d\sigma +$$

$$+ \int_G E_1 u \cdot h\, dx = \int_G E_1 u \cdot h\, dx.$$

Следовательно, $Au = E_1 u$ для $u \in \mathrm{D}(E_1)$.

d) Пусть $u \in \mathrm{M}(E) \cap V$ и $Au \in H$. Так как $C_0^2(\bar{G})$ плотно в $H = L^2(G)$, то прежде всего, в силу c),

$$\int_G (Au - E_1 u) h\, dx = 0 \qquad \forall h \in H,$$

откуда при любом $h \in V$

$$\int_{\Gamma_2} \left(|u|^{p-2} u + \frac{\partial(u_1 + u)}{\partial \nu_E} - \varphi_2 \right) h\, d\sigma + \int_{\Gamma_3} \left(\frac{\partial(u_1 + u)}{\partial \nu_E} - \varphi_3 \right) h\, d\sigma = 0.$$

Вследствие произвольности выбора h отсюда вытекает, что $u \in \mathrm{D}(E_1)$.

Замечание 2.16. Данная выше функционально-аналитическая формулировка краевой задачи (2.12) сохраняет смысл, если требовать лишь выполнения условий: $\varphi_i \in L^q(\Gamma_i)$, $i = 2, 3$; $u_1 \in W^{1,p}(G)$, $u_1|_{\Gamma_1} = \varphi_1$, $u_1|_{\Gamma_2} = 0$.

3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Уравнения высших порядков. Теперь наша цель — сформулировать в виде операторных уравнений краевые задачи для уравнений высших порядков. Ради простоты ограничимся задачей

Дирихле для области G класса $C^{l,1}$. В обозначениях, введенных в начале параграфа, рассмотрим краевую задачу

$$Eu = \sum_{|\alpha| \leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, w) = f, \quad u \in \mathrm{D}(E), \quad w = \{D^\alpha u\}$$

с

$$\mathrm{M}(E) = C^{2l}(\bar{G}), \quad \mathrm{D}(E) = \{u \mid u \in M(E),\ D^\alpha u|_\Gamma = 0,\ |\alpha| \leqslant l - 1\}.$$

Будем считать, что функции a_α при некотором $p \geqslant 2$ удовлетворяют предположениям леммы 2.2, и положим

$$V = W_0^{l,p}(G), \qquad H = L^2(G), \qquad Y = L_r^p(G);$$
$$L\colon u \to \{D^\alpha u\}, \qquad A_0\colon y \to \{a_\alpha(x, y)\}.$$

Тогда, как мы сейчас покажем, выполняются условия a)—d)'.

a) Это условие следует из леммы 2.2.

b) Оператор L линеен. По определению норм в V и Y

$$\|Lu\|_0 = \left(\int_G \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} (D^\alpha u)^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p} = \|u\| \qquad \forall u \in W_0^{l,p}(G) = V.$$

c) Очевидно, что $\mathrm{D}(E) \subset V \subset H$ и $\mathrm{R}(E) \subset H$. Вложение V в H плотно и в силу неравенства Фридрихса непрерывно. Применяя формулу Стокса, находим, что для всех $u \in \mathrm{D}(E)$ и $h \in V \cap C^1(\bar{G})$

$$(Au, h) = (L^* A_0 Lu, h) = \langle A_0 Lu, Lh\rangle_0 =$$
$$= \int_G \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_\alpha(x, w) D^\alpha h\, dx = \int_G \sum_{|\alpha| \leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, w) \cdot h\, dx =$$
$$= \int_G Eu \cdot h\, dx.$$

Следовательно, $Au = Eu$ для $u \in \mathrm{D}(E)$.

d) В силу следствия из замечания 1.16 и леммы 1.34 имеем $\mathrm{D}(E) = \mathrm{M}(E) \cap V$.

Скажем несколько слов о том, как быть с неоднородными задачами Дирихле. Рассмотрим задачу

$$E\bar{u} = f, \quad \bar{u} \in \{u \mid u \in C^{2l}(\bar{G}),\ D^\alpha u|_\Gamma = \varphi_\alpha,\ |\alpha| \leqslant l - 1\}$$

и предположим, что существует функция $u_1 \in C^{2l}(\bar{G})$, такая, что $D^\alpha u_1|_\Gamma = \varphi_\alpha$, $|\alpha| \leqslant l - 1$. Тогда, так же как и в случае неоднородной задачи Дирихле второго порядка, наша неоднородная задача при помощи замены $\bar{u} = u + u_1$ сводится к однородной задаче

$$E_1 u = E(u + u_1) = f, \quad u \in \mathrm{D}(E_1) = \\ = \{u \mid u \in C^{2l}(\bar{G}),\ D^\alpha u|_\Gamma = 0,\ |\alpha| \leqslant l - 1\},$$

относительно u.

Краевые задачи для систем эллиптических уравнений. До сих пор мы формулировали в виде операторных уравнений различные классические краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений. Теперь на простых примерах мы покажем, что соответствующим образом можно дать функционально-аналитическую формулировку краевых задач и для систем эллиптических дифференциальных уравнений. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} Eu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) = f, \qquad u = \{u_1, \ldots, u_m\} \in \mathrm{D}(E), \\ w = \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{2.13}$$

с $\mathrm{M}(E) = (C^2(\bar{G}))^m$, $\mathrm{D}(E) = \{u \mid u \in \mathrm{M}(E),\ u|_\Gamma = 0\}$. Предположим, что $a_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{im}\}$, $i = 1, \ldots, n$, при любых $\xi = \{\xi_{rs}\} \in R^{mn}$ и $x \in G$ удовлетворяют оценке

$$|a_{ij}(x, \xi)| \leqslant c\left(g(x) + \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} |\xi_{rs}|^{p-1}\right), \quad p \geqslant 2, \quad c = \mathrm{const}, \tag{2.14}$$

и положим

$$V = \left(W_0^{1,p}(G)\right)^m, \qquad H = L_m^2(G), \qquad Y = L_{mn}^p(G),$$

$$\|y\|_0 = \left(\int_G \left(\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} y_{rs}^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p},$$

$$L\colon u \to \left\{ \frac{du_j}{\partial x_k} \right\}, \qquad A_0\colon y \to \{a_{ij}(x, y)\}.$$

Проверка условий a) — d) проводится аналогично тому, как она проводилась для однородной задачи Дирихле второго порядка.

Замечание 2.17. При $m = n = 3$, $p = 2$ в качестве простого частного случая задачи (2.13) получаем классическую задачу Ламэ линейной теории упругости

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f, \qquad u \in D(E),$$

которая описывает равновесное состояние поверхностно нагруженного упругого тела, находящегося под действием объемных сил f. Здесь λ и μ — так называемые постоянные Ламэ.

Замечание 2.18. Мы ограничились рассмотрением однородных краевых условий Дирихле. Не представляет труда рассмотреть по аналогии с предыдущим пунктом и другие краевые условия. В частности, для дифференциального оператора Ламэ ставятся краевые условия

$$k(u)\,|_{\Gamma} = \varphi,$$

соответствующие краевым условиям Неймана, и условия

$$u\,|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \qquad k(u)\,|_{\Gamma_2} = \varphi_2, \qquad u_\nu\,|_{\Gamma_3} = \varphi_3, \qquad k(u)_\tau\,|_{\Gamma_3} = \varphi_4,$$

соответствующие смешанным краевым условиям. Здесь φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 — заданные функции и $k(u) = \{k_1(u), k_2(u), k_3(u)\}$ — вектор поверхностного напряжения

$$k_i(u) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \cos(\nu, x_j), \qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \lambda \operatorname{div} u + 2\mu \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} & \text{при} \quad i = j, \\ \mu \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Индексы ν и τ обозначают проекции на внешнюю нормаль, соответственно на касательную плоскость в заданной точке поверхности Γ.

В заключение рассмотрим следующую краевую задачу, несколько отличающуюся от предыдущих:

$$\begin{aligned} &Eu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w) = f - \operatorname{grad} \varphi, \\ &u = \{u_1, \ldots, u_n\} \in \mathrm{D}(E), \qquad w = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right), \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\mathrm{M}(E) = (C^2(\bar{G}))^n, \qquad \mathrm{D}(E) = \{u \mid u \in M(E),\ u\,|_{\Gamma} = 0,\ \operatorname{div} u = 0\},$$

причем функция φ подлежит определению вместе с u. Чтобы получить функционально-аналитическую постановку задачи, нужны некоторые приготовления.

Пространство $L_n^2(G)$ допускает (см. Ладыженская [1]) ортогональное разложение

$$L_n^2(G) = H + H^{\perp},$$

где H — пополнение множества $\mathrm{D}(E)$ в $L_n^2(G)$-норме и $H^{\perp} = \{u \mid u = \operatorname{grad} \varphi,\ \varphi \in W^{1,2}(G)\}$. Обозначим через P ортогональный проектор $L_n^2(G)$ на H, т. е. оператор, который ставит в соответствие элементу $u \in L_n^2(G)$ однозначно определенный элемент $Pu = u_1$ разложения

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in H, \quad u_2 \in H^{\perp}.$$

Очевидно, каждое решение краевой задачи (2.15) является решением задачи

$$PEu = Pf, \quad u \in \mathrm{D}(PE), \tag{2.16}$$

с $\mathrm{D}(PE) = \mathrm{D}(E)$ и $\mathrm{M}(PE) = \mathrm{M}(E)$. Обратно, для каждого решения u задачи (2.16) существует единственная (с точностью до аддитивной постоянной) функция $\varphi \in W^{1,2}(G)$, удовлетворяющая уравнению (2.15).

Для построения энергетического расширения оператора PE положим

$$V = \{u \mid u \in (W_0^{1,p}(G))^n,\ \operatorname{div} u = 0\}, \qquad Y = L_{nn}^p(G);$$

$$\|u\| = \left(\int_G \left(\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p};$$

$$L\colon u \to \left\{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right\}, \qquad A_0\colon y \to \{a_{ij}(x, y)\}.$$

a) Это условие следует из леммы 2.2, поскольку для a_{ij} имеет место оценка (2.14).

b) Оператор $L \in (V \to Y)$, очевидно, линеен. Далее, на основании нашего определения нормы

$$\|Lu\|_0 = \|u\| \qquad \forall u \in V.$$

c) Ясно, что $\mathrm{D}(PE) \subset V$ и (по определению оператора P) $\mathrm{R}(PE) \subset H$. Покажем, что $V \subset H$. Пусть $u \in V$ и $h \in H^{\perp}$, скажем $h = \operatorname{grad} \psi$. Тогда

$$(u, h)_{L_n^2(G)} = \int_G u \operatorname{grad} \psi \, dx = \int_\Gamma \sum_{i=1}^n u_i \cos(\nu, x_i)\, \psi \, d\sigma - \int_G (\operatorname{div} u)\, \psi \, dx = 0$$

и, значит, $u \in H$.

Из определения H следует, что V плотно в H. В силу неравенства Фридрихса вложение V в H непрерывно. Наконец, для $u \in \mathrm{D}(PE)$ и $h \in V \cap (C^1(\bar{G}))^n$

$$(Au, h) = \langle A_0 Lu, Lh \rangle_0 = \int_G \sum_{i=1}^n a_i(x, w) \frac{\partial h}{\partial x_i} dx =$$

$$= -\int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, w)\, h \, dx = \int_G Eu \cdot h \, dx = (PEu, h),$$

т. е. $Au = PEu$ для $u \in \mathrm{D}(PE)$.

d) Справедливы равенства $M(PE) \cap V = M(E) \cap V = D(E) = D(PE)$.

Замечание 2.19. При $Eu = -\Delta u$ (2.15) есть не что иное, как стационарная задача Стокса теории вязких жидкостей.

Замечание 2.20. Рассмотрения, проведенные выше для однородных краевых условий Дирихле, можно распространить и на случай других краевых условий. Для упомянутой в замечании 2.19 задачи Стокса речь идет прежде всего о смешанных краевых условиях вида

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \qquad u_\nu|_{\Gamma_2} = 0, \qquad k(u)_\tau|_{\Gamma_2} = 0.$$

Эти условия означают, что рассматриваемая жидкость прилипает к части Γ_1 границы, а часть Γ_2 является так называемой свободной поверхностью. Второе из краевых условий, заданных на Γ_2, трактуется при функционально-аналитической формулировке как естественное краевое условие.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛ. II

Первый параграф данной главы — это просто подборка хорошо известных определений и теорем. Имеется многочисленная учебная литература, посвященная представленному здесь материалу; назовем (не претендуя на полноту перечня) книги Данфорда и Шварца [1], Смирнова [1], Трибеля [1], Канторовича и Акилова [1], Иосиды [1], Эдвардса [1].

Изложение теории меры, эскизно представленной в п. 2, можно найти, например, у Камке [1], Натансона [1], Халмоша [1] и Заанена [1]; другое изложение дает Бурбаки [12].

Что касается теории распределений, то здесь наряду с классическим сочинением Л. Шварца [2] упомянем еще книгу Трева [1] [1]). Описанный нами метод введения топологии в пространстве основных функций для распределений читатель найдет у Гординга и Лионса [1]; см. также Хёрмандер [1].

По поводу доказательства данных в п. 5 теорем о соболевских пространствах укажем работы Соболева [1], Морри [1], Данфорда и Шварца [1], Кальдерона [1], Браудера [1] и Нечаса [1]. При формулировке условий на границу области мы следовали Кальдерону [1], Морри [1] и Нечасу [1]; в соответствующих определениях регулярности границы фигурирует известное конусное условие Соболева. По вопросам, относящимся к поверхностной мере областей с регулярной границей и теореме Стокса, можно отослать читателя к книгам Хаупта, Ауманна и Паука [1] и Федерера [1]. Приведенные нами теоремы соболевского типа допускают глубокие обобщения с привлечением понятия гёльдер-непрерывности и производных любого вещественного порядка, а также теории интерполяции в банаховых и гильбертовых пространствах. По этим и связанным с ними вопросам см. помимо названных выше работ: Лионс и Мадженес [1], Никольский [1], Бесов, Ильин и Никольский [1], Адамс, Ароншайн и Смит [1], Мадженес [1], Петре [1], Стейн [1], а также указанную там, иногда в очень обширных списках, лите-

---

[1]) См. также первую книгу известной гельфандовской серии «Обобщенные функции» (И. М. Гельфанд и Г. Е Шилов [1]) и монографии С. Л. Соболева [1] и В. С. Владимирова [1]. — *Прим ред.*

ратуру. Заметим, в частности, что при использовании некоторого обобщенного условия Гёльдера элементы из $L^p(\Gamma)$ могут быть охарактеризованы как сужения функций из $W^{1,p}(G)$ на границу Γ; см. Гальярдо [1]. Относительно пространств $W^{-k,p}(G)$ для специального случая $p = 2$ см. также Лакс [1].

Изложенная в § 2 функционально-аналитическая формулировка эллиптических краевых задач восходит к Вишику [1, 3]. Переход от краевых задач вида (2.2) к операторным уравнениям $Au = f$ является в настоящее время общепринятым (см. Браудер [2, 8], Кубинский [1], Качуровский [2], Лионс [1]).

Использованная нами возможность представления оператора A для общего случая в форме $A = L^*A_0L$ в литературе не отмечалась. Это представление существенно использовал Биттнер [1, 2].

Термин «энергетическое расширение» оператора выбран нами для того, чтобы подчеркнуть связь, существующую между понятием такого расширения и так называемым энергетическим методом (см. Михлин [1, 2]). Оператор $A \in (V \to V^*)$, возникающий в результате энергетического расширения квазилинейного эллиптического дифференциального оператора, можно получить также исходя из принципа виртуальных перемещений (см. Лангенбах [4]). Лионс [1] называет эти операторы «операторами вариационного исчисления» (opérateurs de calcul des variations).

Каждое классическое решение краевой задачи (2.2) является решением соответствующего операторного уравнения $Au = f$. Обращение этого утверждения имеет место (см. лемму 2.1) лишь для достаточно гладких (регулярных) решений. Вопросами регулярности решений операторных уравнений мы не занимаемся. Читателя, интересующегося исследованием условий регулярности, мы отсылаем к книгам Ладыженской и Уральцевой [1] и Морри [1], а также к цитированной там литературе.

Операторы Немыцкого являются при предположениях леммы 2.2 непрерывными (см., например, Вайнберг [1], Красносельский [1]). В монографии Вайнберга [1] содержатся среди прочего некоторые исторические замечания об операторе Немыцкого.

В пп. 2 и 3 § 2 мы на ряде примеров, по возможности наиболее простых и важных для применений, показали, как переходят от классической постановки краевой задачи к соответствующей функционально-аналитической постановке. Функционально-аналитические формулировки других задач в изобилии можно найти у Лионса [1] (см. также приведенную там литературу).

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ (СТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

В гл. II мы переформулировали некоторые важные классы краевых задач для нелинейных эллиптических дифференциальных операторов в виде операторных уравнений $Au = f$. Настоящая глава посвящена главным образом изучению таких операторных уравнений, а точнее, изложению основ теории монотонных операторов в рефлексивных банаховых пространствах.

Глава содержит четыре параграфа. В § 1 вводятся основные понятия теории монотонных операторов, которые иллюстрируются на примерах конкретных операторов, рассмотренных в предыдущей главе. В § 2 речь идет о теоремах существования. Обоснование различных приближенных методов составляет содержание § 3. Наконец, в § 4 исследуются некоторые свойства монотонных потенциальных операторов и соответствующих потенциалов.

В основе рассмотрений этой главы всюду лежит вещественное рефлексивное сепарабельное[1]) банахово пространство, которое мы обозначаем через X (а не через V, как в предыдущей главе). Подчеркнем, что здесь в отличие от предыдущей главы и от последующих глав, посвященных операторным дифференциальным уравнениям, вложение рассматриваемого банахова пространства в подходящее гильбертово пространство не играет никакой роли.

Через $\langle f, u\rangle$ обозначается скалярное произведение элемента $f \in X^*$ на элемент $u \in X$, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ — нормы в X и X^* соответственно. В некоторых местах мы привлекаем, как и в гл. II, еще одно вещественное рефлексивное банахово пространство Y. Нормы в Y и Y^* мы обозначаем при этом соответственно через $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{0*}$, а $\langle z, w\rangle_0$ обозначает скалярное произведение элементов $z \in Y^*$ и $w \in Y$.

---

[1]) Требование сепарабельности для многих доказываемых в этой главе утверждений не является существенным; однако оно бывает выполненным в практически интересных случаях и облегчает проведение доказательств.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Этот параграф разбит на два пункта. В первом определяются и обсуждаются играющие основополагающую роль при исследовании нелинейных операторных уравнений понятия радиальной непрерывности, монотонности, коэрцитивности и устанавливаются некоторые важные свойства радиально непрерывных и монотонных операторов. Во втором пункте мы показываем, что при надлежащих предположениях рассмотренные в гл. II операторы являются радиально непрерывными, монотонными и коэрцитивными.

1. СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Определение 1.1. Оператор $A \in (X \to X^*)$ называется:

радиально непрерывным, если при любых фиксированных u, $v \in X$ вещественная функция $s \to \langle A(u+sv), v\rangle$ непрерывна на $[0, 1]$;

хеминепрерывным, если при любых фиксированных u, v, $h \in X$ вещественная функция $s \to \langle A(u+sv), h\rangle$ непрерывна на $[0, 1]$;

деминепрерывным, если из $u_n \to u$ в X следует $Au_n \rightharpoonup Au$ в X^*;

липшиц-непрерывным, если существует такая постоянная M, что

$$\| Au - Av \|_* \leqslant M \| u - v \|$$

для любых u, $v \in X$;

ограниченно липшиц-непрерывным, если существует возрастающая функция μ на $[0, \infty)$, такая, что для любых u, $v \in X$

$$\| Au - Av \|_* \leqslant \mu (R) \| u - v \|, \qquad \text{где} \quad R = \max \{\| u \|, \| v \|\}.$$

Определение 1.2. Пусть u, v — произвольные элементы из X. Оператор $A \in (X \to X^*)$ называется:

монотонным, если

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant 0;$$

строго монотонным, если

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \text{для} \quad u \neq v;$$

d-*монотонным*, если

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant (\alpha (\| u \|) - \alpha (\| v \|) (\| u \| - \| v \|)$$

для некоторой строго возрастающей функции α на $[0, \infty)$;

равномерно монотонным, если

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant \rho (\| u - v \|)$$

для некоторой строго возрастающей функции ρ на $[0, \infty)$ с $\rho(0)=0$;

сильно монотонным (с *постоянной монотонности* m), если

$$\langle Au - Av,\ u - v\rangle \geqslant m\|u-v\|^2, \qquad m>0.$$

Замечание 1.1. Введенное понятие монотонности служит обобщением обычного понятия монотонности. А именно, пусть $\varphi \in (R^1 \to R^1)$ — обычная возрастающая функция. Тогда для любых $s, t \in R^1$

$$(\varphi(t)-\varphi(s))(t-s) \geqslant 0.$$

Замечание 1.2. Очевидно, из сильной монотонности следуют равномерная монотонность (с $\rho(s)=ms^2$) и d-монотонность (с $\alpha(s)=ms$), а из равномерной монотонности следует строгая. В случае строго выпуклого пространства X из d-монотонности тоже вытекает строгая монотонность. Действительно,

$$\begin{aligned}0 &= \langle Au - Av,\ u-v\rangle = \\ &= 2\left\langle Au - A\left(\frac{u+v}{2}\right),\ \frac{u-v}{2}\right\rangle + 2\left\langle A\left(\frac{u+v}{2}\right) - Av,\ \frac{u-v}{2}\right\rangle \geqslant \\ &\geqslant 2\left(\alpha(\|u\|) - \alpha\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right)\right)\left(\|u\| - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right) + \\ &\qquad + 2\left(\alpha\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right) - \alpha(\|v\|)\right)\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\| - \|v\|\right)\end{aligned}$$

влечет $\|u\| = \|(u+v)/2\| = \|v\|$, откуда, в силу строгой выпуклости X, $u=v$.

Замечание 1.3. Определения 1.1 и 1.2 можно соответствующим образом обобщить на случай операторов $A \in (\mathrm{D}(A) \to X^*)$, область определения $\mathrm{D}(A)$ которых может быть любым подмножеством пространства X. Мы отказываемся от этого, так как в нашей книге будем очень редко рассматривать операторы, определенные не на всем пространстве X.

Определение 1.3. Оператор $A \in (X \to X^*)$ называется *коэрцитивным*, если существует определенная на $[0, \infty)$ вещественная функция γ с

$$\lim_{s\to\infty} \gamma(s) = +\infty,$$

такая, что

$$\langle Au,\ u\rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\|u\|.$$

В следующем замечании приведено несколько примеров коэрцитивных операторов.

Замечание 1.4. а) Каждый равномерно монотонный оператор коэрцитивен относительно функции

$$\gamma(s) = (s-1)\rho(1) - \|A0\|_*.$$

Действительно, пусть $u \in X$ — произвольный ненулевой элемент, $v = u/\|u\|$ и $n = [\|u\|]$ — целая часть (наибольшее целое число, меньшее или равное) $\|u\|$. Имеем

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \|u\|\langle Au, v\rangle = \\ &= \|u\|(\langle A(\|u\|v) - A(nv), v\rangle + \langle A(nv) - A0, v\rangle + \langle A0, v\rangle) \geqslant \\ &\geqslant \|u\|(\langle A(nv) - A0, v\rangle - \|A0\|_*) = \\ &= \|u\|\left(\sum_{i=1}^{n}\langle A(iv) - A((i-1)v), v\rangle - \|A0\|_*\right) \geqslant \\ &\geqslant \|u\|(n\rho(1) - \|A0\|_*) \geqslant \|u\|((\|u\| - 1)\rho(1) - \|A0\|_*).\end{aligned}$$

b) Пусть оператор A является d-монотонным относительно функции α с $\lim\limits_{s\to\infty}\alpha(s) = +\infty$. Тогда, очевидно, A коэрцитивен относительно функции $\gamma(s) = \alpha(s) - \alpha(0)$.

c) Пусть $J \in (X \to X^*)$ — дуализующее отображение для X (см. § 5 гл. I). Тогда

$$\begin{aligned}\langle Ju - Jv, u - v\rangle &= \langle Ju, u\rangle + \langle Jv, v\rangle - \langle Ju, v\rangle - \langle Jv, u\rangle \geqslant \\ &\geqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| = \\ &= (\|u\| - \|v\|)(\|u\| - \|v\|),\end{aligned}$$

т. е. J является d-монотонным относительно функции $\alpha(s) = s$, а значит, в силу b), коэрцитивным.

Понятия, введенные в определениях 1.1—1.3, в дальнейшем играют центральную роль. Введем теперь еще ряд понятий.

Со свойством монотонности тесно связано так называемое (S)-свойство (см. Браудер [11]).

Определение 1.4. Говорят, что оператор $A \in (X \to X^*)$ обладает *(S)-свойством*, если из $u_n \rightharpoonup u$ в X и $\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \to 0$ следует, что $u_n \to u$ в X.

Замечание 1.5. Очевидно, каждый равномерно монотонный оператор обладает (S)-свойством. В равномерно выпуклых банаховых пространствах (S)-свойством обладает также каждый d-монотонный оператор. Для доказательства этого факта заметим, что из d-монотонности и соотношения $\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \to 0$ вытекает соотношение $\|u_n\| \to \|u\|$. Но в равномерно выпуклых банаховых пространствах из $\|u_n\| \to \|u\|$ и $u_n \rightharpoonup u$ следует, что $u_n \to u$ (см. теорему 5.12, гл. I).

Определение 1.5. Оператор $A \in (X \to X^*)$ называется *дифференцируемым по Гато*, если существует такой оператор

$A' \in (X \to \mathscr{L}(X, X^*))$, что для любых u, v, $h \in X$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle A(u + th) - Au,\ v \rangle = \langle A'(u) h,\ v \rangle.$$

Определение 1.6. Оператор $A \in (X \to X^*)$ называется:

ограниченным, если образ каждого ограниченного подмножества пространства X ограничен в X^*;

локально ограниченным, если для любого фиксированного $u \in X$ существуют постоянные $\varepsilon > 0$ и M, такие, что $\|Av\|_* \leqslant M$ при $\|u - v\| \leqslant \varepsilon$.

Замечание 1.6. Очевидно, каждый ограниченно липшиц-непрерывный оператор ограничен и каждый деминепрерывный оператор локально ограничен.

Теперь мы приведем некоторые простые свойства монотонных операторов. Прежде всего справедливо

Замечание 1.7. Если $A_i \in (X \to X^*)$ — монотонные операторы и $a_i \in X$, $f_i \in X^*$ — произвольные элементы $(i = 1, \ldots, n)$, то оператор $A \in (X \to X^*)$, определяемый соотношением

$$u \to \sum_{i=1}^{n} (A_i(u + a_i) + f_i),$$

также монотонен. Если X_i $(i = 1, \ldots, n)$ — вещественные банаховы пространства и $A_i \in (X_i \to X_i^*)$ — монотонные операторы, то оператор $A \in (X \to X^*)$, определенный на декартовом произведение $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ согласно правилу

$$\{u_1, \ldots, u_n\} \to \{A_1 u_1, \ldots, A_n u_n\},$$

также монотонен.

Необходимые и достаточные условия монотонности дает

Лемма 1.1. a) Оператор $A \in (X \to X^*)$ монотонен точно тогда, когда при любых фиксированных u, $v \in X$ вещественная функция

$$t \to \varphi_{u, v}(t) = \langle A(u + tv),\ v \rangle$$

является возрастающей на $[0, 1]$.

b) Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ дифференцируем по Гато и при любых фиксированных $u, v \in X$ функция $t \to \langle A'(u + tv) v, v \rangle$ непрерывна на $[0, 1]$. При этих условиях A точно тогда монотонен, когда при любых $u, v \in X$

$$\langle A'(u) v,\ v \rangle \geqslant 0.$$

Доказательство. a) Необходимость. Для $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $t_1 < t_2$ имеем

$$\varphi_{u,v}(t_2) - \varphi_{u,v}(t_1) = \langle A(u + t_2 v), v\rangle - \langle A(u + t_1 v), v\rangle =$$
$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\langle A(u + t_2 v) - A(u + t_1 v), u + t_2 v - (u + t_1 v)\rangle \geqslant 0.$$

Достаточность. Для $v = w - u$

$$\langle Aw - Au, w - u\rangle = \varphi_{u,v}(1) - \varphi_{u,v}(0) \geqslant 0.$$

b) Необходимость. При $0 < s < 1$ в силу интегральной теоремы о среднем для подходящего $s_0 \in [0, s]$ имеет место соотношение

$$0 \leqslant \langle A(u + sv) - Au, sv\rangle = \int_0^s \langle A'(u + tv)v, sv\rangle dt =$$
$$= s^2\langle A'(u + s_0 v)v, v\rangle.$$

Деля на s^2 и переходя к пределу при $s \to 0$, получаем $\langle A'(u)v, v\rangle \geqslant 0$.

Достаточность следует из соотношения

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_0^1 \langle A'(v + t(u - v))(u - v), u - v\rangle dt \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.2. Каждый монотонный оператор $A \in (X \to X^*)$ локально ограничен.

Доказательство. Допустим, что A не является локально ограниченным. Тогда существует последовательность $\{u_n\}$, такая, что $u_n \to u$ в X и $\|Au_n\|_* \to \infty$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим

$$\alpha_n = 1 + \|Au_n\|_* \|u_n - u\|.$$

В силу монотонности A, для любого $v \in X$

$$\frac{1}{\alpha_n}\langle Au_n, v\rangle \leqslant \frac{1}{\alpha_n}(\langle Au_n, u_n - u\rangle + \langle A(u + v), v + u - u_n\rangle) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha_n}\|A(u + v)\|_* (\|v\| + \|u - u_n\|) \leqslant M_1, \quad (1.1)$$

где постоянная M_1 зависит от u, v, но не зависит от n. Соответствующая оценка верна и для $-v$. Таким образом,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{1}{\alpha_n}\langle Au_n, v\rangle\right| < \infty \qquad \forall v \in X,$$

откуда по теореме Банаха — Штейнгауза (теорема 5.3 гл. I)

$$\frac{1}{\alpha_n}\|Au_n\|_*\leqslant M=\text{const},$$

т. е.

$$\|Au_n\|_*\leqslant M\alpha_n=M(1+\|Au_n\|_*\|u-u_n\|).$$

Пусть n_0 выбрано так, чтобы для $n\geqslant n_0$ выполнялось условие $M\|u-u_n\|\leqslant 1/2$. Тогда из последнего неравенства следует, что при $n\geqslant n_0$

$$\|Au_n\|_*\leqslant 2M.$$

Но это противоречит тому факту, что $\|Au_n\|_*\to\infty$. Тем самым лемма доказана.

Следствие 1.1. Каждый линейный монотонный оператор $A\in(X\to X^*)$ непрерывен.

Доказательство. Пусть $u_n\to u$ в X. Положим

$$v_n=\frac{u_n-u}{\|u_n-u\|^{1/2}}$$

для $u_n\neq u$ и $v_n=0$ для $u_n=u$. Тогда $v_n\to 0$ в X и по лемме 1.2

$$\|Av_n\|_*\leqslant M=\text{const}.$$

Отсюда получаем

$$\|Au_n-Au\|_*=\|A(u_n-u)\|_*=\|u_n-u\|^{1/2}\|Av_n\|_*\leqslant$$
$$\leqslant M\|u_n-u\|^{1/2}\to 0.$$

Следствие 1.2. Пусть оператор $A\in(X\to X^*)$ монотонен и $K\subset X$ — такое множество, что

$$\|u\|\leqslant M_1 \quad \text{и} \quad \langle Au,\ u\rangle\leqslant M_2 \quad \forall u\in K.$$

Тогда существует постоянная M, такая, что

$$\|Au\|_*\leqslant M \qquad \forall u\in K.$$

Доказательство. В силу леммы 1.2 оператор A локально ограничен. В частности, условие локальной ограниченности выполняется в нуле, т. е. существуют такие постоянные ε и M_3, что $\|Ay\|_*\leqslant M_3$ при $\|y\|\leqslant\varepsilon$. Используя монотонность оператора A, для $u\in K$ получаем

$$\|Au\|_*=\sup_{\|y\|\leqslant\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\langle Au,\ y\rangle\leqslant\sup_{\|y\|\leqslant\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}(\langle Au,\ u\rangle+\langle Ay,\ y\rangle-\langle Ay,\ u\rangle)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}(M_2+M_3\varepsilon+M_3M_1)=M.$$

Лемма 1.3. Пусть $A\in(X\to X^*)$ — монотонный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

a) оператор A радиально непрерывен;

b) из $\langle f - Av, u - v\rangle \geqslant 0 \ \forall v \in X$, следует $Au = f$;

c) из соотношений $u_n \rightharpoonup u$ в X, $Au_n \rightharpoonup f$ в X^* и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle Au_n, u_n\rangle \leqslant \langle f, u\rangle$ следует, что $Au = f$;

d) оператор A деминепрерывен;

e) если K — плотное подмножество в X, то из $\langle f - Av, u - v\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K$ следует $Au = f$.

Доказательство. a) $\Rightarrow$ b). Пусть v — произвольный элемент из X и $v_t = u - tv$, $t > 0$. Имеем $0 \leqslant t\langle f - Av_t, v\rangle$ или, после деления на t, $0 \leqslant \langle f - Av_t, v\rangle$. Отсюда при $t \to 0$ получаем в силу радиальной непрерывности оператора A неравенство $0 \leqslant \langle f - Au, v\rangle$. Ввиду произвольности $v \in X$ из этого неравенства следует, что $Au = f$.

b) $\Rightarrow$ c). Пусть $u_n \rightharpoonup u$ в X, $Au_n \rightharpoonup f$ в X^* и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle Au_n, u_n\rangle \leqslant \langle f, u\rangle$. Тогда для произвольного $v \in X$ имеем

$$\begin{aligned}
\langle f - Av, u - v\rangle &= \langle f, u\rangle - \langle f, v\rangle - \langle Av, u - v\rangle \geqslant \\
&\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} (\langle Au_n, u_n\rangle - \langle f, v\rangle - \langle Av, u - v\rangle) = \\
&= \overline{\lim_{n\to\infty}} (\langle Au_n, u_n\rangle - \langle Au_n, v\rangle - \langle Av, u_n - v\rangle) = \\
&= \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Отсюда на основании b) вытекает, что $Au = f$.

c) $\Rightarrow$ d). Пусть $u_n \to u$ в X. Вследствие локальной ограниченности оператора A (лемма 1.2) последовательность $\{\|Au_n\|_*\}$ ограничена. Пусть $\{x_n\}$ — подпоследовательность последовательности $\{u_n\}$, такая, что $Ax_n \rightharpoonup f$ в X^*. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n\rangle = \langle f, u\rangle,$$

откуда, в силу c), $Au = f$ и $Ax_n \rightharpoonup Au$. Отсюда обычным образом (см. лемму 5.4 гл. I) выводится слабая сходимость последовательности $\{Au_n\}$ к Au.

d) $\Rightarrow$ e). Очевидно, что A как деминепрерывный оператор является радиально непрерывным. Поскольку a) $\Rightarrow$ b), то достаточно показать, что из $\langle f - Av, u - v\rangle \geqslant 0 \ \forall v \in K$ следует $\langle f - Av, u - v\rangle \geqslant 0 \ \forall v \in X$. Так как K плотно в X, то для каждого $v \in X$ существует последовательность $\{x_n\}$, такая, что $x_n \in K$ и $x_n \to v$ в X. Используя деминепрерывность, получаем

$$\langle f - Av, u - v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f - Ax_n, u - x_n\rangle \geqslant 0.$$

e) $\Rightarrow$ a). В частном случае $K = X$ утверждение e) совпадает с b). Но из b), как уже было доказано, следует деминепрерывность, а значит, и радиальная непрерывность оператора A.

Лемма полностью доказана.

Следствие 1.3. Пусть $A \in (X \to X^*)$ — радиально непрерывный монотонный оператор. Тогда при любом $f \in X^*$ множество K решений уравнения $Au = f$ выпукло и слабо замкнуто.

Доказательство. Пусть u_1, $u_2 \in K$ и $u_t = tu_1 + (1-t)u_2$, $t \in [0, 1]$. Тогда для любого $v \in X$

$$\langle f - Av, u_t - v\rangle = t\langle Au_1 - Av, u_1 - v\rangle + (1-t)\langle Au_2 - Av_1, u_2 - v\rangle \geqslant 0$$

откуда в силу леммы 1.3

$$Au_t = f,$$

т. е. K выпукло.

Пусть $\{u_n\}$ — последовательность элементов $u_n \in K$, такая, что $u_n \rightharpoonup u$ в X. Для любого $v \in X$ имеем

$$\langle f - Av, u - v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f - Av, u_n - v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geqslant 0,$$

так что в силу леммы 1.3

$$Au = f,$$

т. е. K слабо замкнуто.

Замечание 1.8. Определением 1.1 введены три понятия: радиальная непрерывность, хеминепрерывность и деминепрерывность, являющиеся ослаблением обычного понятия непрерывности. Из леммы 1.3 следует, что для монотонных операторов $A \in (X \to X^*)$ эти три понятия совпадают. В дальнейшем мы отказываемся от рассмотрения хеминепрерывных операторов и все утверждения, которые обычно формулируются для хеминепрерывных операторов, доказываем при формально более слабом предположении радиальной непрерывности.

2. ПРИМЕРЫ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В § 2 гл. II краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений были переформулированы в виде операторных уравнений $Au = f$. При этом для оператора A было характерно представление

$$A = L^* A_0 L. \tag{1.2}$$

Мы хотим теперь указать условия на «коэффициенты» эллиптического дифференциального оператора, которые обеспечивают наличие у оператора A различных свойств, определенных в предыдущем пункте. Будем при этом придерживаться обозначений, введенных в § 2 гл. II.

Свое намерение мы реализуем в два этапа. На первом этапе (лемма 1.4) будет показано, что интересующие нас свойства автоматически переносятся с $A_0 \in (Y \to Y^{**})$ на $A \in (X \to X^{**})$. На втором этапе (леммы 1.5 и 1.6) мы установим, при каких условиях конкретные операторы A_0 обладают этими свойствами.

Лемма 1.4. Пусть $L \in (X \to Y)$ — линейный оператор, такой, что

$$\| Lu \|_0 = \| u \| \qquad \forall u \in X,$$

и $L^* \in (Y^* \to X^*)$ — сопряженный к L оператор. Пусть, далее, $A_0 \in (Y \to Y^*)$ — некоторый (возможно, нелинейный) оператор. Если A_0 обладает каким-нибудь из свойств, указанных в определениях 1.1—1.6, то соответствующим свойством обладает и оператор $A = L^* A_0 L \in (X \to X^*)$.

Доказательство. Это непосредственно следует из того факта, что для всех $u, v \in X$

$$\| Lu \|_0 = \| u \|$$

и

$$\langle Au, \ v \rangle = \langle L^* A_0 Lu, \ v \rangle = \langle A_0 Lu, \ Lv \rangle_0,$$

а также из линейности L.

Перейдем ко второму из названных выше этапов.

В лемме 2.2 гл. II уже были сформулированы условия на коэффициенты a_i эллиптического дифференциального оператора, которые обеспечивают деминепрерывность оператора

$A_0 \in \left(L_r^p (G) \to L_r^q (G) \right)$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, определенного формулой

$$(A_0 y)(x) = \{ a_1 (x, \ y(x)), \ \ldots, \ a_r (x, \ y(x)) \} \tag{1.3}$$

(где G, как и прежде, — ограниченная область в R^n). Теперь мы дадим достаточные условия для того, чтобы оператор A_0 обладал остальными свойствами, определенными в предыдущем пункте. При этом мы ограничимся двумя наиболее важными возможностями для функций a_i (см., однако, замечание 1.12):

$$a_i (x, \ y) = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ \ldots, \ r, \quad b_{ij} \in L^\infty (G), \tag{1.4}$$

и

$$a_i(x, y) = \varphi(x, |y|^{p-1})|y|^{p-2} y_i, \quad i = 1, \ldots, r, \ p > 1,$$

$$\text{где } |y| = \left(\sum_{i=1}^{r} y_i^2\right)^{1/2}; \tag{1.5}$$

при каждом $s \in [0, \infty)$ функция $x \to \varphi(x, s)$ измерима;

при почти всех $x \in G$ функция $s \to \varphi(x, s)$ непрерывна;

$|\varphi(x, s)| \leqslant M = \text{const}$ для всех $s \in [0, \infty)$ и почти всех $x \in G$.

Замечание 1.9. Очевидно, что линейный оператор A_0, определенный формулами (1.3) и (1.4), липшиц-непрерывно отображает пространство $Y = L_r^2(G)$ в $Y^* = L_r^2(G)$. Непосредственно видно также, что функции a_i вида (1.5) удовлетворяют предположениям леммы 2.2 гл. II. Отсюда следует, что оператор, определенный формулами (1.3) и (1.5), деминепрерывно отображает пространство $Y = L_r^p(G)$ в $Y^* = L_r^q(G)$.

Замечание 1.10. В случае функций a_i вида (1.4) задача (2.1) (соотв. (2.2)) гл. II представляет собой общую однородную краевую задачу Дирихле для линейных эллиптических дифференциальных уравнений второго (соотв. l-го) порядка. Как известно, к таким краевым задачам сводятся многие задачи математической физики и механики. Укажем, например, задачи стационарной диффузии и стационарной теплопроводности, а также задачи механики сплошной среды (скажем, теории упругости и стационарной теории вязких жидкостей). В случае функций a_i вида (1.5) мы приходим к задачам, которые встречаются, например, в нелинейной теории упругости и в теории неньютоновских жидкостей. В этих теориях классические линейные законы, характеризующие свойства материалов (закон Гука, закон Ньютона для вязких жидкостей), заменяются нелинейными соотношениями. Функция φ зависит при этом от свойств материала и определяется экспериментально.

Лемма 1.5. Пусть $A_0 \in (L_r^2(G) \to L_r^2(G))$ — оператор, заданный формулами (1.3) и (1.4). Для его монотонности достаточно, чтобы при почти каждом $x \in G$ и при любом векторе $\{d_1, \ldots \ldots d_r\} \in R^r$ выполнялось условие

$$\sum_{i,j=1}^{r} b_{ij}(x) d_i d_j \geqslant m \sum_{i=1}^{r} d_i^2, \qquad m \geqslant 0.$$

Если $m > 0$, то A_0 является сильно монотонным.

Доказательство. Для $y,\ z \in Y = L_r^2(G)$ имеем

$$\langle A_0 y - A_0 z,\ y - z\rangle_0 =$$
$$= \int\limits_G \sum_{i,\,j=1}^{r} b_{ij}(x)(y_i - z_i)(y_j - z_j)\,dx \geqslant m \int\limits_G \sum_{i=1}^{r} (y_i - z_i)^2\,dx = m\,\|y - z\|_0^2,$$

что и доказывает лемму.

При доказательстве леммы 1.5 ради упрощения записи аргумент x у функций y и z опущен. Мы будем так делать и в дальнейшем.

Лемма 1.6. Пусть $A_0 \in \left(L_r^p(G) \to L_r^q(G)\right)$ — оператор, определенный формулами (1.3) и (1.5). Имеют место следующие утверждения (где $x \in G,\ t,\ s \in [0, \infty)$):

a) если функция $t \to \varphi(x, t)\,t$ возрастает, т. е.

$$\varphi(x,\ t)\,t - \varphi(x,\ s)\,s \geqslant 0 \quad \text{для} \quad t \geqslant s,$$

то A_0 монотонен;

b) если функция φ удовлетворяет оценке

$$\varphi(x,\ t)\,t - \varphi(x,\ s)\,s \geqslant m(t - s) \quad \text{для} \quad t \geqslant s,\ m > 0, \tag{1.6}$$

то A_0 является d-монотонным относительно функции $\alpha(s) = ms^{p-1}$;

c) если для функций φ справедлива оценка

$$\varphi(x,\ t) \geqslant m > 0,$$

то A_0 коэрцитивен относительно $\gamma(s) = ms^{p-1}$;

d) если $p = 2$ и выполняется оценка (1.6), то A_0 сильно монотонен;

e) если функция φ удовлетворяет оценке

$$|\varphi(x,\ t)\,t - \varphi(x,\ s)\,s| \leqslant M\,|t - s|,$$

то A_0 при $p = 2$ липшиц-непрерывен, причем

$$\|A_0 y - A_0 z\|_{0*} \leqslant 3M\,\|y - z\|_0,$$

а при $p \geqslant 2$ ограниченно липшиц-непрерывен относительно

$$\mu(R) = \left(2 + (p - 1)\,2^{p-2}\right) MR^{p-2};$$

f) если $p \geqslant 2$ и функция $t \to \varphi(x, t)$ непрерывно дифференцируема, причем

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,\ t)\,t\right| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad t \in [0,\ \infty) \quad \text{и почти всех } x \in G,$$

то A_0 дифференцируем по Гато.

Доказательство. Рассмотрим произвольные $y=\{y_1, \ldots, y_r\}$, $z=\{z_1, \ldots, z_r\}$, $v=\{v_1, \ldots, v_r\} \in L_r^p(G)$.
Для сокращения записи введем обозначения

$$|y|=\left(\sum_{i=1}^{r} y_i^2\right)^{1/2}, \qquad \tau=|y|^{p-1},$$

$$|z|=\left(\sum_{i=1}^{r} z_i^2\right)^{1/2}, \qquad \sigma=|z|^{p-1}, \qquad (y,\ z)=\sum_{i=1}^{r} y_i z_i.$$

a) Применяя несколько раз неравенство Шварца, находим:

$$\langle A_0 y - A_0 z,\ y-z\rangle_0 =$$

$$= \int_G \left(\varphi(x,\ \tau)|y|^{p-2}(y,\ y-z) - \varphi(x,\ \sigma)|z|^{p-2}(z,\ y-z)\right) dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_G \left(\varphi(x, \tau)|y|^{p-2}(|y|^2 - |y||z|) - \varphi(x, \sigma)|z|^{p-2}(|y||z| - |z|^2)\right) dx =$$

$$= \int_G \varphi(x,\ \tau)\tau - \varphi(x,\ \sigma)\sigma)(|y| - |z|)\, dx \geqslant 0.$$

b) Используя последний результат и неравенство Гёльдера, получаем

$$\langle A_0 y - A_0 z,\ y - z\rangle_0 \geqslant m \int_G \left(|y|^{p-1} - |z|^{p-1}\right)(|y| - |z|)\, dx =$$

$$= m\left(\|y\|_0^p + \|z\|_0^p - \int_G \left(|y|^{p-1}|z| + |y||z|^{p-1}\right) dx\right) \geqslant$$

$$\geqslant m\left(\|y\|_0^p + \|z\|_0^p - \|y\|_0^{p-1}\|z\|_0 - \|y\|_0\|z\|_0^{p-1}\right) =$$

$$= m\left(\|y\|_0^{p-1} - \|z\|_0^{p-1}\right)(\|y\|_0 - \|z\|_0).$$

c) При $\gamma(s)=ms^{p-1}$ имеем

$$\langle A_0 y,\ y\rangle_0 = \int_G \varphi(x,\ \tau)|y|^p\, dx \geqslant m \int_G |y|^p\, dx = \gamma(\|y\|_0)\|y\|_0.$$

Так как $p>1$, то $\lim\limits_{s\to\infty} \gamma(s) = +\infty$.

d) Представим функцию φ в виде $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ с $\varphi_1(s)=m$. Очевидно, оператор $A_{01}: y \to my$ сильно монотонен. Далее, для $t \geqslant s$

$$\varphi_2(x,\ t)t - \varphi_2(x,\ s)s = \varphi(x,\ t)t - \varphi(x,\ s)s - m(t-s) \geqslant 0.$$

В силу утверждения a), отвечающий функции φ_2 оператор $A_{02}: y \to \varphi_2(\cdot,\ |y|^{p-1})\,|y|^{p-2}y$ является монотонным. Из сильной монотонности A_{01} и монотонности A_{02} следует сильная монотонность $A_0 = A_{01} + A_{02}$.

e) Пусть $R = \max\{\|y\|_0, \|z\|_0\}$. Имеем

$$\langle A_0 y - A_0 z, v\rangle_0 = \int_G \left(\varphi(x, \tau)|y|^{p-2}(y, v) - \varphi(x, \sigma)|z|^{p-2}(z, v)\right) dx =$$

$$= \int_G \left(\varphi(x, \tau)|y|^{p-2}(y-z, v) + \left(\varphi(x, \tau)|y|^{p-2} - \right.\right.$$

$$\left.\left.- \varphi(x, \sigma)|z|^{p-2}\right)(z, v)\right) dx \leqslant \int_G \left(|\varphi(x, \tau)||y|^{p-2}|y-z| + \right.$$

$$\left. + \left|\varphi(x, \tau)|y|^{p-2}|z| - \varphi(x, \sigma)|z|^{p-2}|z|\right|\right)|v|\,dx =$$

$$= \int_G \left(|\varphi(x, \tau)||y|^{p-2}|y-z| + \left|\varphi(x, \tau)|y|^{p-2}(|z| - |y|) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi(x, \tau)\tau - \varphi(x, \sigma)\sigma\right|\right)|v|\,dx \leqslant \int_G \left(2|\varphi(x, \tau)||y|^{p-2}|y-z| + \right.$$

$$\left. + |\varphi(x, \tau)\tau - \varphi(x, \sigma)\sigma|\right)|v|\,dx \leqslant 2MR^{p-2}\|y-z\|_0\|v\|_0 +$$

$$+ M\int_G |\tau - \sigma||v|\,dx = 2MR^{p-2}\|y-z\|_0\|v\|_0 +$$

$$+ M(p-1)\int_G \left|\int_{|z|}^{|y|} t^{p-2}\,dt\right| |v|\,dx \leqslant 2MR^{p-2}\|y-z\|_0\|v\|_0 +$$

$$+ M(p-1)\int_G |y-z|(|y|+|z|)^{p-2}|v|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(2MR^{p-2} + M(p-1)\left(\int_G (|y|+|z|)^p\,dx\right)^{\frac{p-2}{p}}\right)\|y-z\|_0\|v\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \left(2MR^{p-2} + M(p-1)(\|y\|_0 + \|z\|_0)^{p-2}\right)\|y-z\|_0\|v\|_0 =$$

$$= \left(2MR^{p-2} + M(p-1)\,2^{p-2}R^{p-2}\right)\|y-z\|_0\|v\|_0 =$$

$$= \mu(R)\|y-z\|_0\|v\|_0.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение e).

f) При наших предположениях функция

$$s \to \Phi(s) = \int_G \varphi\left(x, |y+sz|^{p-1}\right)|y+sz|^{p-2}(y+sz, v)\,dx$$

дифференцируема, и нетрудно проверить, что

$$\langle A_0'(y)z,\ v\rangle_0 = \Phi'(s)|_{s=0} =$$
$$= \int_G \Big\{ \varphi(x,\ \tau)\big((p-2)|y|^{p-4}(y,\ z)(y,\ v) + |y|^{p-2}(z,\ v)\big) +$$
$$+ (p-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(x,\ \tau)|y|^{2(p-2)-1}(y,\ z)(y,\ v)\Big\}\,dx.$$

Лемма полностью доказана.

Замечание 1.11. В силу утверждения b) и замечания 1.2 (соотв. замечания 1.5) из (1.6) следует строгая монотонность (соотв. (S)-свойство) оператора A_0. (Пространства L_r^p равномерно выпуклы, см. § 1 гл. II.)

Замечание 1.12. Лемма 1.6 остается справедливой, если функции a_i имеют вид

$$a_i(x,\ y) = \varphi\big(x,\ |y|^{p-1}\big)|y|^{p-2}\sum_{j=1}^{r} b_{ij}(x)\,y_j, \qquad i = 1,\ \ldots,\ r, \quad p > 1,$$

где

$$|y| = \Big(\sum_{i,\ j=1}^{r} b_{ij}y_iy_j\Big)^{1/2}, \qquad b_{ij} \in L^\infty(G), \qquad b_{ij} = b_{ji},$$
$$\sum_{i,\ j=1}^{r} b_{ij}d_id_j \geqslant b\sum_{i=1}^{r} d_i^2, \qquad b = \text{const} > 0,$$

только в этом случае пространство $Y = L_r^p(G)$ следует рассматривать не с нормой

$$\|y\|_0 = \Big(\int_G \Big(\sum_{i=1}^{r} y_i^2\Big)^{p/2} dx\Big)^{1/p},$$

а с эквивалентной ей нормой

$$\|y\|_0 = \Big(\int_G \Big(\sum_{i,\ j=1}^{r} b_{ij}y_iy_j\Big)^{p/2} dx\Big)^{1/p}.$$

Замечание 1.13. В силу лемм 1.4 и 1.6 приведенное в § 2.2 гл. II энергетическое расширение $A \in (V \to V^*)$, $\quad V = \overset{\circ}{W}{}^{1,\,p}(G)$, для оператора

$$Eu = -\operatorname{div}\big(\varphi\big(u,\ |\operatorname{grad} u|^{p-1}\big)|\operatorname{grad} u|^{p-2}\operatorname{grad} u\big), \qquad u \in \mathrm{D}(E),$$

с

$$\mathrm{D}(E) = \{u \mid u \in C^2(\overline{G}),\ u|_\Gamma = 0\}$$

будет деминепрерывным и d-монотонным, если функция φ удовлетворяет условиям (1.4) и (1.6). Однако доказать, что соответствующее энергетическое расширение A оператора

$$Eu = -\operatorname{div}[\varphi(u)\operatorname{grad} u], \qquad u \in \mathrm{D}(E), \tag{1.7}$$

с

$$\mathrm{D}(E) = \{u \mid u \in C^2(\bar{G}),\ u|_\Gamma = 0\}$$

при подходящих условиях на φ также является монотонным, не удается[1]). Укажем поэтому другое расширение оператора E, задаваемого формулой (1.7).

Очевидно, что

$$Eu = -\Delta\psi(u) \qquad \forall u \in \mathrm{D}(E), \tag{1.8}$$

где

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

Функция $\psi \in (R^1 \to R^1)$ непрерывна. Предположим, что она при любых $s, t \in R^1$ удовлетворяет условиям

$$|\psi(t)| \leqslant c\left(|t|^{p-1} + 1\right), \qquad c = \mathrm{const}, \qquad p \geqslant 2, \tag{1.9}$$

$$(\psi(t) - \psi(s))(t - s) \geqslant m\left(|t|^{p-1} - |s|^{p-1}\right)(|t| - |s|). \tag{1.10}$$

Тогда в силу леммы 2.2 гл. II оператор

$$A_0 \in (L^p(G) \to L^q(G)) \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \tag{1.11}$$

определяемый по правилу $u \to \psi(u)$, будет деминепрерывным и, очевидно, d-монотонным. Рассмотрим гильбертово пространство $H = H^{-1}(G)$ со скалярным произведением

$$(u,\ v) = \int_G w \cdot v\, dx, \qquad -\Delta w = u, \qquad w \in H_0^1(G). \tag{1.12}$$

(Оператор $-\Delta$, будучи дуализующим отображением для $H_0^1(G)$, устанавливает изометрию между $H_0^1(G)$ и $H^{-1}(G)$.) Отождествим H с H^*. Тогда для пространства $V = L^p(G)$ имеет место цепочка включений $V \subset H \subset V^*$ (см. § 6 гл. I), и мы можем значение линейного функционала $f \in V^*$ на элементе $u \in V$ записывать, как и скалярное произведение в H, в виде (f, u). В силу (1.11) формула

$$(Au,\ v) = \int_G A_0 u \cdot v\, dx = \int_G \psi(u)\, v\, dx \qquad \forall v \in V \tag{1.13}$$

определяет оператор $A \in (V \to V^*)$, который ввиду соответствующих свойств оператора A_0 является деминепрерывным и

[1]) Можно все-таки показать (см. Лионс [1]), что A удовлетворяет условию c) из леммы 1.3 (в связи с этим см. также следствие 2.1 ниже).

d-монотонным. В частности, для $u \in \mathrm{D}(E)$ имеем, согласно (1.12) и (1.13),

$$(Au, v) = \int_G \psi(u)\, v\, dx = (-\Delta\psi(u), v) \qquad \forall v \in V.$$

Итак, справедливо как равенство в V^* соотношение

$$Au = -\Delta\psi(u) = Eu,$$

т. е. A — расширение для E.

§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Основное содержание данного параграфа составляют две теоремы существования. В первом пункте будет доказана так называемая основная теорема теории монотонных операторов (теорема 2.1). Второй пункт посвящен теореме существования для уравнений, в которых наряду с монотонным оператором, определенном на всем пространстве X, фигурирует — в некотором смысле как возмущение — другой (максимальный монотонный) оператор, область определения которого может не совпадать со всем X.

1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для доказательства основной теоремы существования для операторных уравнений с монотонными операторами нам понадобится одно простое следствие из теоремы о неподвижной точке Брауэра.

Лемма 2.1. Пусть $B \in (R^n \to R^n)$ — непрерывное отображение, для некоторого $R > 0$ удовлетворяющее условию

$$(Ba, a) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |a| = R.$$

Тогда существует такое $a \in R^n$, что $|a| \leqslant R$ и $Ba = 0$.

Доказательство. Допустим, что

$$Ba \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in K_R = \{a \mid a \in R^n, \ |a| \leqslant R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \to -R \frac{Ba}{|Ba|},$$

является непрерывным отображением из K_R в K_R. В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R \frac{Ba}{|Ba|}.$$

Очевидно, $|a| = R$ и $(Ba, a) = -R|Ba| < 0$, в противоречие с нашим предположением, что $(Ba, a) \geqslant 0$ для $|a| = R$. Лемма доказана.

Теорема 2.1 (Браудер, Минти). *Пусть $A \in (X \to X^*)$ — радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор. Тогда множество решений уравнения*

$$Au = f \tag{2.1}$$

при любом $f \in X^*$ непусто, слабо замкнуто и выпукло.

Доказательство. Ввиду следствия 1.3 нам надо лишь показать, что (2.1) имеет по крайней мере одно решение. Пусть $\{h_n\} \subset X$ — какая-нибудь полная система линейно независимых элементов в X, и пусть X_n — замкнутая линейная оболочка векторов $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Тогда соответствие

$$\{a_1, \ldots, a_n\} \to \sum_{i=1}^{n} a_i h_i = u_n$$

определяет взаимно однозначное непрерывное отображение C пространства R^n на X_n. Очевидно,

$$|a|_1 = \|Ca\| \qquad \forall a \in R^n$$

является нормой на R^n. В силу замечания 5.3 гл. I

$$|a| \leqslant c|a|_1 = c\|Ca\|.$$

Определим оператор $B \in (R^n \to R^n)$ по правилу

$$Ba = \{b_1, \ldots, b_n\}, \qquad b_i = \langle ACa - f, h_i\rangle.$$

Поскольку A как радиально непрерывный монотонный оператор деминепрерывен (лемма 1.3), оператор B непрерывен. Из коэрцитивности A следует, что для достаточно больших $R_1 > 0$

$$\left(\frac{\langle Au_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} - \|f\|_*\right)\|u_n\| \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \|u_n\| \geqslant R_1.$$

Поэтому для $|a| = R = R_1 \cdot c$

$$(Ba, a) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle f, u_n\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{\langle Au_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} - \|f\|_*\right)\|u_n\| \geqslant 0.$$

Следовательно, согласно лемме 2.1, существует такое $a \in R^n$, что $Ba = 0$; значит, для $u_n = Ca$

$$\langle Au_n, h_i\rangle = \langle f, h_i\rangle, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Из оценки

$$\frac{\langle Au_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} \leqslant \|f\|_*$$

и коэрцитивности A вытекает, что $\|u_n\| \leqslant M_1$ и потому $\langle Au_n, u_n\rangle \leqslant M_2$ для $n = 1,2, \ldots$. На основании следствия 1.2 заключаем, что $\| Au_n \|_* \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$. Далее, в силу (2.2)

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, h\rangle = \langle f, h\rangle \quad \forall h \in \bigcup_n X_n.$$

По теореме 5.5 гл. I отсюда следует, что $Au_n \rightharpoonup f$ в X^*. Пусть $\{u_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{u_n\}$, такая, что $u_{n_k} \rightharpoonup u$ в X. Покажем, что u является решением уравнения (2.1). Из (2.2) получаем

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle Au_{n_k}, u_{n_k}\right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle f, u_{n_k}\right\rangle = \langle f, u\rangle.$$

Но тогда, согласно лемме 1.3 с), $Au = f$. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 2.1 легко вытекает

Следствие 2.1. Пусть $A \in (X \to X^*)$ — деминепрерывный ограниченный коэрцитивный оператор, удовлетворяющий условию с) леммы 1.3. Тогда множество решений уравнения $Au = f$ при любом $f \in X^*$ непусто и слабо замкнуто.

Конкретные примеры операторов, которые удовлетворяют предположениям следствия 2.1, но не являются монотонными, можно найти у Лионса [1] (см. также подстрочное примечание на стр. 93). Мы ограничимся в этой связи следующим замечанием.

Замечание 2.1. Пусть $A \in (X \to X^*)$ — коэрцитивный оператор вида

$$A = B + T$$

с радиально непрерывным монотонным оператором $B \in (X \to X^*)$ и слабо непрерывным оператором $T \in (X \to X^*)$. Тогда множество решений уравнения $Au = f$ при любом $f \in X^*$ непусто и слабо замкнуто. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что при указанных предположениях оператор A удовлетворяет условию с) леммы 1.3.

Теорема 2.2. *Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ радиально непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Тогда существует $A^{-1} \in (X^* \to X)$, и этот обратный оператор строго монотонен, ограничен и деминепрерывен. Если оператор A обладает, кроме того,* (S)*-свойством, то оператор A^{-1} непрерывен.*

Доказательство. Доказательство проведем в пять шагов.

1. Оператор $A^{-1} \in (X^* \to X)$ существует. Очевидно, достаточно показать, что уравнение $Au = f$ при любом $f \in X^*$ имеет точно одно решение. Теорема 2.1 гарантирует существование хотя бы одного решения u Пусть v — другое решение. Тогда

$\langle Au - Av,\ u - v\rangle = 0$. Вследствие строгой монотонности A отсюда следует, что $u = v$.

2. Оператор A^{-1} строго монотонен. Пусть $f, g \in X^*$, $f \neq g$. Полагая $u = A^{-1}f$, $v = A^{-1}g$, в силу монотонности A имеем

$$\langle f - g,\ A^{-1}f - A^{-1}g\rangle = \langle Au - Av,\ u - v\rangle > 0.$$

3. Оператор A^{-1} ограничен. Пусть $Au = f$ и $\|f\|_* \leqslant M$. Тогда $\langle Au, u\rangle \geqslant \|u\|\gamma(\|u\|)$ и, следовательно, $\gamma(\|u\|) \leqslant \|f\|_*$. Так как $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to \infty$, то отсюда вытекает, что

$$\|u\| = \|A^{-1}f\| \leqslant K$$

с постоянной K, зависящей только от M.

4. Оператор A^{-1} деминепрерывен. В силу леммы 1.3 достаточно показать, что из соотношения

$$\langle f - g,\ u - A^{-1}g\rangle \geqslant 0 \quad \forall g \in X^* \tag{2.3}$$

следует равенство $u = A^{-1}f$. Пусть (2.3) выполнено. Тогда для любого $v \in X$ и для $g = Av$ имеем

$$\langle f - Av,\ u - v\rangle = \langle f - g,\ u - A^{-1}g\rangle \geqslant 0.$$

Ввиду радиальной непрерывности A отсюда следует по лемме 1.3, что $f = Au$, т. е. $u = A^{-1}f$.

5. Допустим, что A обладает еще и (S)-свойством. Пусть $f_n \to f$ в X^*. В силу деминепрерывности A^{-1}, для $u_n = A^{-1}f_n$ и $u = A^{-1}f$ имеем

$$\langle Au_n - Au,\ u_n - u\rangle = \langle f_n - f,\ u_n - u\rangle \to 0.$$

В силу (S)-свойства оператора A получаем $\|A^{-1}f_n - A^{-1}f\| = \|u_n - u\| \to 0$. Теорема доказана.

Следствие 2.2. Пусть X равномерно выпукло, а X^*, строго выпукло. Тогда дуализующее отображение J^* для пространства X^* непрерывно.

Доказательство. Дуализующее отображение $J \in (X \to X^*)$ деминепрерывно (лемма 5.6 гл. I), d-монотонно, коэрцитивно (замечание 1.4) и строго монотонно (замечание 1.2). Наконец, согласно замечанию 1.5, оно обладает (S)-свойством. Следовательно, по теореме 2.2 существует и непрерывно обратное отображение $J^{-1} \in (X^* \to X)$. Но очевидно, $J^{-1} = J^*$; значит, J^* непрерывно.

Замечание 2.2. Если X и X^* равномерно выпуклы, то J есть гомоморфизм X на X^*.

Следствие 2.3. Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ радиально непрерывен и сильно монотонен. Тогда у него существует обратный оператор $A^{-1} \in (X^* \to X)$, который является липшиц-непрерывным. Если A вдобавок липшиц-непрерывен, то A^{-1} сильно монотонен.

Доказательство. Оператор $A^{-1} \in (X^* \to X)$ существует по теореме 2.2. Для любых $f, g \in X^*$ и для $u = A^{-1}f$, $v = A^{-1}g$ имеем

$$\|f - g\|_* \|u - v\| \geqslant \langle Au - Av,\ u - v\rangle \geqslant m\|u - v\|^2 =$$
$$= m\|A^{-1}f - A^{-1}g\|\|u - v\|,$$

откуда

$$\|A^{-1}f - A^{-1}g\| \leqslant \frac{1}{m}\|f - g\|_*.$$

Если A липшиц-непрерывен,

$$\langle f - g,\ A^{-1}f - A^{-1}g\rangle = \langle Au - Av,\ u - v\rangle \geqslant m\|u - v\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{m}{M^2}\|Au - Av\|_*^2 = \frac{m}{M^2}\|f - g\|_*^2.$$

2. МАКСИМАЛЬНЫЕ МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этом пункте мы докажем теорему, которая нам потребуется в гл. VI и VII для доказательства существования периодических решений операторных дифференциальных уравнений.

Пусть Λ — некоторый оператор, действующий из X в X^*, с линейной областью определения $D(\Lambda) \subset X$. По аналогии с определением 1.1 назовем $\Lambda \in (D(\Lambda) \to X^*)$ радиально непрерывным, если функция $s \to \langle \Lambda(u + sv), v\rangle$ для любых $u, v \in D(\Lambda)$ непрерывна на $[0, 1]$. Соответственно Λ называется монотонным, если для любых $u, v \in D(\Lambda)$

$$\langle \Lambda u - \Lambda v,\ u - v\rangle \geqslant 0.$$

Определение 2.1. Оператор $\Lambda \in (D(\Lambda) \to X^*)$ называется *максимальным монотонным*, если он монотонен и если из

$$\langle f - \Lambda u,\ u - v\rangle \geqslant 0 \qquad \forall v \in D(\Lambda)$$

следует

$$u \in D(\Lambda) \quad \text{и} \quad \Lambda u = f.$$

Замечание 2.3. Очевидно, что максимальный монотонный оператор не допускает никакого (собственного) монотонного расширения. Этим оправдывается термин «максимальный монотонный».

Замечание 2.4. Согласно лемме 1.3 каждый радиально непрерывный монотонный оператор $A \in (X \to X^*)$ является максимальным монотонным.

Теорема 2.3. *Пусть* $\Lambda \in (D(\Lambda) \to X^*)$ — *радиально непрерывный максимальный монотонный оператор с линейной областью* *определения* $D(\Lambda) \subset X$ *и* $A \in (X \to X^*)$ — *радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор. Тогда при любом* $f \in X^*$ *уравнение*

$$\Lambda u + Au = f \tag{2.4}$$

имеет решение $u \in D(\Lambda)$. *Если, кроме того,* A *является строго монотонным, то уравнение* (2.4) *имеет точно одно решение.*

Доказательству теоремы 2.3 предпошлем одну лемму.

Лемма 2.2. В условиях теоремы 2.3 пусть F — произвольное линейное конечномерное подпространство в $D(\Lambda)$. Тогда уравнение

$$\langle \Lambda u_F + Au_F - f,\ h \rangle = 0 \qquad \forall h \in F \tag{2.5}$$

имеет решение $u_F \in F$, причем $\|u_F\| \leqslant M$ и $\|Au_F\|_* \leqslant M$ с не зависящей от F постоянной M.

Доказательство. Пусть $I_F \in (F \to X)$ — оператор вложения F в X и $I_F^* \in (X^* \to F^*)$ — сопряженный к I_F оператор. Оператор $I_F^*(\Lambda + A) I_F \in (F \to F^*)$ является (см. лемму 1.4) радиально непрерывным, монотонным и, в силу неравенства

$$\begin{aligned}\langle I_F^*(\Lambda + A) I_F x,\ x \rangle &= \langle \Lambda x + Ax,\ x \rangle = \\ &= \langle \Lambda x - \Lambda 0,\ x \rangle + \langle Ax,\ x \rangle + \langle \Lambda 0,\ x \rangle \geqslant \\ &\geqslant \langle Ax,\ x \rangle - \|\Lambda 0\|_* \|x\| \geqslant \|x\| (\gamma(\|x\|) - \|\Lambda 0\|_*),\end{aligned} \tag{2.6}$$

коэрцитивным. Поэтому согласно теореме 2.1 существует решение $u_F \in F$ уравнения

$$I_F^*(\Lambda + A) I_F u_F = I_F^* f.$$

Очевидно, u_F удовлетворяет уравнению (2.5). Из (2.5) с учетом (2.6) получаем

$$\gamma(\|u_F\|) \leqslant \|f\|_* + \|\Lambda 0\|_* \quad \text{и} \quad \langle Au_F,\ u_F \rangle \leqslant (\|f\|_* + \|\Lambda 0\|_*) \|u_F\|.$$

По следствию 1.2 отсюда вытекает ограниченность $\|u_F\|$ и $\|Au_F\|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Обозначим через Φ множество всех конечномерных подпространств F в $D(\Lambda)$ и для каждого $F_0 \in \Phi$ положим

$$U_{F_0} = \bigcup_{F \supset F_0} \{\{u_F, Au_F\} \in F \times X^* \mid u_F \text{ удовлетворяет уравнению (2.5)}\}.$$

По лемме 2.2 множество U_{F_0} непусто и $U_{F_0} \subset K$ для некоторого не зависящего от выбора F_0 шара K пространства $X \times X^*$. Если $F_1, \ldots, F_n \in \Phi$ — произвольные конечномерные подпространства в $D(\Lambda)$, то для каждого подпространства $F \in \Phi$, такого, что $F \supset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, выполняется включение

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_{F_i} \supset U_F \neq \varnothing.$$

По следствию из теоремы 5.10 гл. I существует точка $\{u, w\} \in X \times X^*$, которая для любого $F \in \Phi$ лежит в слабом замыкании множества U_F. Покажем, что u является решением уравнения (2.4). Пусть $y \in D(\Lambda)$ и $x \in X$ — произвольные элементы. Выберем $F \in \Phi$ так, чтобы $y \in F$. Тогда для $\{u_F, Au_F\} \in U_F$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Lambda u_F + Au_F - f,\ y - u_F\rangle = \\ &= \langle \Lambda y + Au_F - f,\ y - u_F\rangle + \langle \Lambda u_F - \Lambda y,\ y - u_F\rangle \leqslant \\ &\leqslant \langle \Lambda y + Au_F - f,\ y - u_F\rangle \leqslant \\ &\leqslant \langle \Lambda y + Au_F - f,\ y - u_F\rangle + \langle Ax - Au_F,\ x - u_F\rangle. \end{aligned}$$

Поскольку $\{u, w\}$ лежит в слабом замыкании множества U_F, то мы можем выбрать последовательность $\{u_i, Au_i\} \in U_F$ таким образом, чтобы $u_i \rightharpoonup u$ в X и $Au_i \rightharpoonup w$ в X^*. Заменяя в последнем неравенстве $\{u_F, Au_F\}$ на $\{u_i, Au_i\}$, получаем, что для произвольных $x \in X$ и $y \in D(\Lambda)$

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \lim_{i\to\infty} (\langle \Lambda y + Au_i - f,\ y - u_i\rangle + \langle Ax - Au_i,\ x - u_i\rangle) = \\ &= \lim_{i\to\infty} (\langle \Lambda y - f,\ y - u_i\rangle + \langle Ax,\ x - u_i\rangle + \langle Au_i,\ y - x\rangle) = \\ &= \langle \Lambda y - f,\ y - u\rangle + \langle Ax,\ x - u\rangle + \langle w,\ y - x\rangle = \\ &= \langle \Lambda y - f + w,\ y - u\rangle + \langle Ax - w,\ x - u\rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Полагая в этом неравенстве $x = u$, находим, что

$$0 \leqslant \langle \Lambda y - f + w,\ y - u\rangle \qquad \forall y \in D(\Lambda).$$

В силу максимальности монотонного оператора Λ отсюда следует, что $u \in D(\Lambda)$ и $\Lambda u = f - w$. При $y = u$ из (2.7) получаем

$$0 \leqslant \langle Ax - w,\ x - u\rangle \qquad \forall x \in X.$$

Поэтому, на основании леммы 1.3, $Au = w$. Следовательно,

$$\Lambda u + Au = f.$$

Пусть оператор A является вдобавок строго монотонным. Если $v \in D(\Lambda)$ — другое решение уравнения (2.4), то

$$0 = \langle \Lambda u - \Lambda v + Au - Av,\ u - v\rangle \geqslant \langle Au - Av,\ u - v\rangle,$$

откуда $u = v$. Теорема доказана.

Замечание 2.5. От предположений линейности множества $D(\Lambda)$ и радиальной непрерывности оператора $\Lambda \in (D(\Lambda) \to X^*)$, налагаемых в теореме 2.3, можно освободиться (см. Браудер [10]). Однако в тех ситуациях, где нам понадобится применять теорему, эти упрощающие доказательство предположения выполняются.

§ 3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

В данном параграфе мы обосновываем различные приближенные методы решения уравнений с монотонными операторами. Параграф разбит на четыре пункта. В п. 1 доказывается сильная сходимость метода Галёркина. Пункт 2 посвящен итерационным методам. В п. 3 обсуждается так называемый проекционно-итерационный метод, представляющий собой комбинацию метода Галёркина и итерационного метода. В этих трех пунктах мы рассматриваем операторы с (S)-свойством или сильно монотонные операторы. В п. 4 вводится один регуляризационный метод, позволяющий некоторые (вообще говоря) многозначно разрешимые задачи с (просто) монотонными операторами аппроксимировать однозначно разрешимыми задачами, в которых операторы обладают (S)-свойством.

1. МЕТОД ГАЛЁРКИНА

Пусть, как и при доказательстве теоремы 2.1, $\{h_n\} \subset X$ — какая-нибудь полная система линейно независимых элементов в X.

Определение 3.1. Элемент $u_n \in X$ вида

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^n h_i$$

назовем *n-м решением Галёркина* (или *галёркинским решением*) уравнения

$$Au = f \tag{3.1}$$

(относительно системы $\{h_n\}$), если вектор $\{a_1^n, \ldots, a_n^n\} \in R^n$ является решением, вообще говоря, нелинейной системы уравнений

$$\langle Au_n, h_j\rangle = \langle f, h_j\rangle, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. В § 2 гл. II мы провели переход от краевых задач для нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений к операторным уравнениям вида (3.1), где оператор A обладает специальным представлением $A = L^*A_0L$. Явные конструктивные описания давались при этом по ходу дела для операторов L и A_0, но не для сопряженного к L оператора L^*.

Однако для реализации метода Галёркина это не является помехой, поскольку уравнения Галёркина (3.2), очевидно, можно переписать в виде

$$\langle A_0Lu_n,\ Lh_j\rangle_0=\langle f,\ h_j\rangle, \qquad j=1,\ \ldots,\ n.$$

Пусть X_n — линейное подпространство в X, натянутое на $h_1, \ldots, h_n$, с нормой, индуцированной из X. Обозначим через $I_n \in (X_n \to X)$ оператор вложения X_n в X и через $I_n^* \in (X^* \to X_n^*)$ сопряженный к I_n оператор. Уравнения Галёркина (3.2), ввиду равенства $I_nu_n = u_n$, можно также записать как операторное уравнение в X_n, а именно в форме

$$A_nu_n=f_n, \qquad A_n=I_n^*AI_n \in (X_n \to X_n^*), \qquad f_n=I_n^*f \in X_n^*. \tag{3.3}$$

Так как $\|I_nu_n\| = \|u_n\|$, то согласно лемме 1.4 свойства оператора A переносятся на оператор A_n. Этот факт будет использован, в частности, в следующем пункте при итеративном решении уравнения (3.3).

Теорема 3.1. *Пусть $A \in (X \to X^*)$ — радиально непрерывный строго монотонный коэрцитивный оператор. Тогда при любом n существует точно одно решение Галёркина u_n и $u_n \rightharpoonup u$ в X. Это и является (единственным) решением уравнения $Au=f$.*

Доказательство. Существование единственного решения u_n системы (3.2) следует в силу теоремы 2.2 из отмеченной выше эквивалентности системы (3.2) и уравнения (3.3). (Оператор A_n радиально непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен.) На основании теоремы 2.2 уравнение (3.1) также обладает точно одним решением. При доказательстве теоремы 2.1 уже был применен метод Галёркина и было показано, что каждая слабо сходящаяся подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ слабо компактной последовательности $\{u_n\}$ слабо сходится к решению уравнения (3.1). Из единственности u обычным образом (ср. с леммой 5.4 гл. I) следует, что $u_n \rightharpoonup u$ в X. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $A \in (X \to X^*)$ — радиально непрерывный строго монотонный коэрцитивный оператор, обладающий (S)-свойством. Тогда при каждом n существует точно одно решение Галёркина u_n и $u_n \to u$ в X. Это и является (единственным) решением уравнения $Au=f$.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1, $u_n \rightharpoonup u$ в X, поэтому $\|u_n\| \leqslant M_1$. В силу (3.2),

$$\langle Au_n,\ u_n\rangle=\langle f,\ u_n\rangle \leqslant \|f\|_* \|u_n\| \leqslant \|f\|_* M_1=M_2,$$

откуда (по следствию 1.2) $\|Au_n\|_* \leqslant M$. Ввиду полноты системы $\{h_n\}$ в X существует такая последовательность $\{v_n\}$, $v_n \in X_n$, что

$\|v_n - u\| \to 0$ Из (3.1) и (3.2) получаем

$$0 = \langle Au_n - Au,\ u_n - v_n\rangle = \langle Au_n - Au,\ u_n - u\rangle + \langle Au_n - Au,\ u - v_n\rangle,$$

так что

$$\begin{aligned}\langle Au_n - Au,\ u_n - u\rangle &\leqslant |\langle Au_n - Au,\ u - v_n\rangle| \leqslant \\ &\leqslant (\|Au_n\|_* + \|Au\|_*)\|u - v_n\| \leqslant \\ &\leqslant (M + \|Au\|_*)\|u - v_n\| \to 0.\end{aligned}$$

На основании (S)-свойства заключаем, что $\|u_n - u\| \to 0$. Теорема доказана.

Приведем еще теорему об оценке погрешности метода Галёркина.

Теорема 3.3. *Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ сильно монотонен и липшиц-непрерывен. Тогда, в обозначениях теоремы 3.2, имеет место оценка*

$$\|u_n - u\| \leqslant \frac{M}{m} d(X_n,\ u), \qquad d(X_n,\ u) = \inf_{v \in X_n} \|v - u\|,$$

где M — постоянная Липшица, а m — постоянная монотонности для A.

Доказательство. Для любого $v \in X_n$

$$0 = \langle Au_n - Au,\ u_n - v\rangle = \langle Au_n - Au,\ u_n - u\rangle + \langle Au_n - Au,\ u - v\rangle$$

и, значит,

$$m\|u_n - u\|^2 \leqslant M\|u_n - u\|\|u - v\|,$$

т. е. $\|u_n - u\| \leqslant (M/m)\|u - v\|$. Отсюда следует, что

$$\|u_n - u\| \leqslant \frac{M}{m} d(X_n,\ u).$$

Теорема доказана.

2. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

В этом пункте X — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$ и $J \in (X \to X^*)$ — (линейное) дуализующее отображение для X.

Замечание 3.2. Если Y — какое-нибудь другое гильбертово пространство и $L \in (X \to Y)$ — такой линейный оператор, что $\|Lx\|_0 = \|x\|$ для каждого $x \in X$, то J допускает представление $J = L^*L$ (см. замечание 2 4 гл. II). Например, для пространства $X = H_0^1(G)$ с нормой $\|u\| = \left(\int\limits_G |\operatorname{grad} u|^2\, dx\right)^{1/2}$ имеем $J = -\operatorname{div}\operatorname{grad} = -\Delta$.

Основную роль при доказательстве сходимости рассматриваемых далее итерационных методов играет

Лемма 3.1. Пусть X — гильбертово пространство и $B \in (X \to X)$ — такой оператор, что

$$(Bx - By,\ x - y) \geqslant m\|x - y\|^2, \quad m > 0, \quad \|Bx - By\| \leqslant M\|x - y\| \quad \forall x,\ \forall y \in X.$$

Тогда оператор $U_t \in (X \to X)$, определенный формулой

$$U_t x = x - tBx \qquad \forall x \in X,$$

является сжимающим при $t \in (0, 2m/M^2)$ и

$$\|U_t x - U_t y\| \leqslant k(t)\|x - y\|, \quad \text{где} \quad k(t) = (1 - 2mt + M^2t^2)^{1/2} < 1.$$

Доказательство. Для любых $x, y \in X$ имеем

$$\begin{aligned}\|U_t x - U_t y\|^2 &= \|x - tBx - (y - tBy)\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2t(Bx - By,\ x - y) + t^2\|Bx - By\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|x - y\|^2 - 2tm\|x - y\|^2 + t^2M^2\|x - y\|^2 = \\ &= (k(t)\|x - y\|)^2.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 3.4. *Пусть X — гильбертово пространство, $f \in X^*$ и $A \in (X \to X^*)$ — такой оператор, что*

$$\langle Ax - Ay,\ x - y\rangle \geqslant m\|x - y\|^2,\ m > 0,\ \|Ax - Ay\|_* \leqslant M\|x - y\| \quad \forall x,\ \forall y \in X. \tag{3.4}$$

Тогда уравнение $Au = f$ имеет точно одно решение $u \in X$. При любых $t \in (0, 2m/M^2)$ и $v_0 \in X$ элемент u является сильным пределом последовательности итераций, задаваемых правилом

$$Jv_i = Jv_{i-1} - t(Av_{i-1} - f), \qquad i = 1, 2, \ldots . \tag{3.5}$$

Имеет место следующая оценка погрешности:

$$\|v_i - u\| \leqslant \frac{k^i t}{1 - k}\|Av_0 - f\|_*,$$

где

$$k = k(t) = (1 - 2mt + M^2t^2)^{1/2} < 1.$$

Доказательство. Очевидно, задача решения уравнения $Au = f$ эквивалентна задаче нахождения неподвижной точки

$$u = U_t u, \qquad \text{где} \quad U_t x = x - tBx, \qquad Bx = J^{-1}(Ax - f) \quad \forall x \in X.$$

В силу свойств дуализующего отображения для гильбертова пространства, свойства (3.4) оператора A переносятся на оператор B. Следовательно, ввиду леммы 3.1, отображение U_t сжимающе. Поэтому доказываемые утверждения непосредственно вытекают из принципа неподвижной точки Банаха (теорема 2.1 гл. I). Теорема доказана.

Замечание 3.3. Функция k принимает минимальное значение $k_0 = k(t_0) = (1 - (m/M)^2)^{1/2}$ в точке $t = t_0 = m/M^2$.

Замечание 3.4. В следующем параграфе (в п. 4) мы еще вернемся к итерационному методу (3.5). Для так называемых потенциальных операторов мы проинтерпретируем (3.5) как градиентный метод. В этом случае удается доказать корректность метода (3.5) для рефлексивных банаховых пространств и улучшить данную выше оценку погрешности.

Замечание 3.5. Полагая $t = t_0$ и $v_0 = 0$, получаем, что для $i = 1, 2, \ldots$

$$\|v_i\| \leqslant \|v_i - u\| + \|u\| \leqslant \frac{t_0}{1-k_0}\|A0 - f\|_* + \|u\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{m}\|A0 - f\|_* + \|u\|.$$

В силу оценки $\|u\| \leqslant \frac{1}{m}\|f - A0\|_*$, вытекающей из неравенства

$$m\|u\|^2 \leqslant \langle Au - A0,\ u\rangle = \langle f - A0,\ u\rangle \leqslant \|f - A0\|_* \|u\|,$$

находим:

$$\|v_i\| \leqslant \frac{3}{m}\|A0 - f\|_*.$$

Это означает, что итерационный метод (3.5) не выводит из шара $K = \left\{ v \mid v \in X,\ \|v\| \leqslant \frac{3}{m}\|A0 - f\|_* \right\}$. Следовательно, достаточно требовать выполнения условия (3.4) лишь для $u, v \in K$.

При итерационном методе (3.5) нахождение решения нелинейной эллиптической краевой задачи сводится к нахождению решений последовательности подобных линейных задач. Покажем теперь, что аналогично задачу определения галёркинских приближений из нелинейных уравнений (3.2) (соотв. из уравнения (3.3)) можно свести к последовательному решению линейных алгебраических систем уравнений.

Теорема 3.5. *В условиях теоремы 3.4 уравнение Галёркина (3.3) при каждом n имеет точно одно решение $u_n \in X_n$. При любых $t \in (0, 2m/M^2)$ и $v_{n,0} \in X_n$ это u_n является сильным пределом в X_n последовательности $\{v_{n,i}\}$, определяемой правилом*

$$\begin{gathered} J_n v_{n,i} = J_n v_{n,i-1} - t(A_n v_{n,i-1} - f_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, \\ J_n = I_n^* J I_n, \quad A_n = I_n^* A I_n, \quad f_n = I_n^* f, \end{gathered} \tag{3.6}$$

и справедлива оценка погрешности

$$\| v_{n,i} - u_n \| \leqslant \frac{k^i t}{1-k} \| A_n v_{n,0} - f_n \|_{X_n^*} \leqslant \frac{k^i t}{1-k} \| A v_{n,0} - f \|_*.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что оператор $A_n \in (X_n \to X_n^*)$ удовлетворяет следующим условиям, соответствующим в нашей теперешней ситуации условиям (3.4):

$$\langle A_n x - A_n y,\ x - y \rangle \geqslant m \| x - y \|^2,\quad \| A_n x - A_n y \|_{X_n^*} \leqslant$$
$$\leqslant M \| x - y \| \qquad \forall x,\quad \forall y \in X_n.$$

Так как $J_n \in (X_n \to X_n^*)$ является дуализующим отображением для пространства X_n, то доказываемые утверждения следуют из теоремы 3.4, примененной к случаю оператора $A_n \in (X_n \to X_n^*)$. Теорема доказана.

Замечание 3.6. Поскольку $I_n u_n = u_n$, то (3.6) можно записать также в виде

$$\langle J v_{n,i},\ h_j \rangle = \langle J v_{n,i-1},\ h_j \rangle - t \langle A v_{n,i-1} - f,\ h_j \rangle, \qquad (3.7)$$
$$j = 1, \ldots, n, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Если J и A обладают представлениями

$$J = L^* L, \qquad A = L^* A_0 L, \qquad L \in (X \to Y), \quad A_0 \in (Y \to Y^* = Y),$$

то система (3.7) переходит в линейную алгебраическую систему уравнений

$$C_n a_n^i = b_n^{i-1}$$

относительно неизвестных векторов-коэффициентов $a_n^i = \{a_{n,1}^i, \ldots$ $\ldots, a_{n,n}^i\}$. Здесь для $j, k = 1, \ldots, n$

$$v_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}^i h_k, \qquad C_n = (c_{jk}),\ c_{jk} = \langle L h_j,\ L h_k \rangle_0,$$
$$b_n^{i-1} = \{ b_{n,1}^{i-1}, \ldots, b_{n,n}^{i-1} \},$$
$$b_{n,k}^{i-1} = \langle L v_{n,i-1} - t A_0 L v_{n,i-1} L h_k \rangle_0 - t \langle f,\ h_k \rangle.$$

3. ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Пусть, как и в предыдущем пункте, X — гильбертово пространство.

Выше мы привели два варианта аппроксимаций для операторных уравнений $Au = f$:

1) аппроксимация нелинейными уравнениями в конечномерном пространстве X_n по методу Галёркина;

2) аппроксимация линейными операторными уравнениями в X с помощью итерационного метода (3.5).

Скомбинируем теперь обе возможности. Это даст нам *проекционно-итерационный метод*, при котором уравнение $Au = f$ аппроксимируется линейными операторными уравнениями в конечномерных пространствах. Для обоснования метода нам понадобится одна лемма, которую, имея в виду дальнейшие применения, мы сформулируем для случая банаховых пространств.

Лемма 3.2. Пусть Z — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $\{Z_n\}$ — такая последовательность его замкнутых подпространств, что $Z_n \subset Z_{n+1} \subset \ldots \subset Z$. Пусть далее, $\{U_n\}$ — последовательность операторов $U_n \in (Z_n \to Z_n)$, такая, что

$$\|U_n u - U_n v\| \leqslant k\|u - v\|, \quad 0 < k < 1, \quad \forall u, \forall v \in Z_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

неподвижные точки u_n которых сильно сходятся в Z к некоторому элементу $u \in Z$. Тогда при любом $v_0 \in Z_1$ последовательность

$$v_n = U_n v_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

тоже сильно сходится к u.

Доказательство. Имеем

$$\|v_n - u_n\| \leqslant k\|v_{n-1} - u_n\| \leqslant k\|v_{n-1} - u_{n-1}\| + k\|u_{n-1} - u_n\| \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant k^n\|v_0 - u_1\| + \sum_{i=1}^{n-1} k^{n-i}\|u_{i+1} - u_i\|.$$

При подходящем выборе n_1 для $n \geqslant n_1$ выполняется неравенство $\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant \varepsilon(1-k)/3$. Кроме того, $\|u_{i+1} - u_i\| \leqslant C$ для $i = 1, 2, \ldots$, и при подходящих n_2, n_3

$$Cn_1 k^{n-n_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для} \quad n \geqslant n_2,$$

$$k^n\|v_0 - u_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для} \quad n \geqslant n_3.$$

Таким образом, для $n \geqslant n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$

$$\|v_n - u_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{n_1}\|u_{i+1} - u_i\| k^{n-i} + \sum_{i=n_1+1}^{n-1}\|u_{i+1} - u_i\| k^{n-i} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{n_1}\|u_{i+1} - u_i\| k^{n-i} + \frac{\varepsilon(1-k)}{3}\sum_{i=n_1+1}^{n-1} k^{n-i} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + n_1 C k^{n-n_1} \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\|v_n - u\| \leqslant \|v_n - u_n\| + \|u_n - u\| \to 0$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Теорема 3.6. *В предположениях теоремы* 3.4, *проекционно-итерационная последовательность* $\{w_n\}$, *определенная правилом*

$$J_n w_n = J_n w_{n-1} - t(A_n w_{n-1} - f_n), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.8}$$

при любых $w_0 \in X_1$ *и* $t \in (0, 2m/M^2)$ *сильно сходится к решению* u *уравнения* $Au = f$.

Доказательство. Правило (3.8) можно переписать в виде

$$w_n = U_n w_{n-1}, \qquad \text{где} \quad U_n w = w - tJ_n^{-1}(A_n w - f_n), \qquad \forall w \in X_n.$$

Как уже было отмечено при доказательстве теоремы 3.4, операторы $U_n \in (X_n \to X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, являются сжимающими с постоянной сжатия $k = k(t) = (1 - 2mt + t^2M^2)^{1/2}$. Неподвижные точки операторов U_n служат, очевидно, галёркинскими приближениями u_n для u. В силу теоремы 3.2, при заданных предположениях $u_n \to u$ в X. Поэтому применима лемма 3.2 (с $Z = X$ и $Z_n = X_n$). Теорема доказана.

4. ОДИН АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ НЕОДНОЗНАЧНО РАЗРЕШИМЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом пункте мы займемся аппроксимацией монотонных операторов операторами с (S)-свойством.

Теорема 3.7. *Пусть* $A \in (X \to X^*)$ — *радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор и* $B \in (X \to X^*)$ — *радиально непрерывный строго монотонный ограниченный оператор. Пусть, далее,* $g \in X^*$ — *произвольный элемент и* $\{\varepsilon_i\}$ — *сходящаяся к нулю последовательность положительных вещественных чисел. Тогда справедливы следующие утверждения. Множество* $K = \{u \mid u \in X, Au = f\}$ *непусто, слабо замкнуто и выпукло. Для каждого* $i = 1, 2, \ldots$ *уравнение*

$$A_i u_i = f_i, \qquad A_i = A + \varepsilon_i B, \qquad f_i = f + \varepsilon_i g \tag{3.9}$$

имеет точно одно решение u_i, *и* $u_i \rightharpoonup u_0$ *в* X. *Этот элемент* $u_0 \in K$ *однозначно определяется как решение неравенства*

$$\langle Bu_0 - g, v - u_0 \rangle \geqslant 0, \qquad \forall v \in K. \tag{3.10}$$

Если B *дополнительно обладает* (S)*-свойством, то* $u_i \to u_0$ *в* X.

Доказательство. Первое утверждение идентично утверждению теоремы 2.1. Для $i = 1, 2, \ldots$ при заданных предположениях оператор A_i радиально непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Поэтому, согласно теореме 2.2, существует точно одно решение уравнения (3.9). Остальные утверждения докажем в шесть этапов.

1. Последовательность $\{u_i\}$ ограничена. Действительно, из (3.9) получаем

$$0 = \langle A_i u_i - f_i, u_i\rangle = \langle Au_i + \varepsilon_i Bu_i - f - \varepsilon_i g, u_i\rangle =$$
$$= \langle Au_i - f, u_i\rangle + \varepsilon_i (\langle Bu_i - B0, u_i\rangle + \langle B0 - g, u_i\rangle) \geqslant$$
$$\geqslant \langle Au_i - f, u_i\rangle + \varepsilon_i \langle B0 - g, u_i\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \| u_i \| (\gamma(\| u_i \|) - \| f \|_* - \varepsilon_i \| B0 - g \|_*).$$

Так как $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to \infty$, отсюда следует, что $\|u_i\| \leqslant M$, $i = 1, 2, \ldots$.

Будучи ограничена, последовательность $\{u_i\}$ слабо компактна. Пусть $\{\bar{u}_i\}$ — такая ее подпоследовательность, что $\bar{u}_i \rightharpoonup u_0 \in X$, и $\{\bar{\varepsilon}_i\}$ — соответствующая подпоследовательность последовательности $\{\varepsilon_i\}$.

2. Покажем, что $u_0 \in K$. Используя монотонность оператора A и ограниченность оператора B, находим, что для любого $v \in X$

$$0 \leqslant \lim_{i\to\infty} \langle A\bar{u}_i - Av, \bar{u}_i - v\rangle =$$
$$= \lim_{i\to\infty} (\langle f - Av, \bar{u}_i - v\rangle + \bar{\varepsilon}_i \langle g - B\bar{u}_i, \bar{u}_i - v\rangle) =$$
$$= \langle f - Av, u_0 - v\rangle.$$

В силу леммы 1.3, из последнего неравенства вытекает, что $Au_0 = f$, т. е. $u_0 \in K$.

3. Покажем, что $\langle Bu_0 - g, v - u_0\rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in K$. Пусть $u_t = u_0 + t(v - u_0)$, $t \in [0, 1]$. Так как $u_t \in K$, то, ввиду (3.9),

$$0 = \langle A\bar{u}_i - Au_t, \bar{u}_i - u_t\rangle + \bar{\varepsilon}_i \langle B\bar{u}_i - g, \bar{u}_i - u_t\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \bar{\varepsilon}_i \langle B\bar{u}_i - g, \bar{u}_i - u_t\rangle,$$

откуда

$$0 \geqslant \langle B\bar{u}_i - g, \bar{u}_i - u_t\rangle =$$
$$= \langle B\bar{u}_i - Bu_t, \bar{u}_i - u_t\rangle + \langle Bu_t - g, \bar{u}_i - u_t\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \langle Bu_t - g, \bar{u}_i - u_t\rangle.$$

Переход к пределу при $i \to \infty$ дает

$$0 \leqslant \langle Bu_t - g, u_t - u_0\rangle = t\langle Bu_t - g, v - u_0\rangle.$$

Деля на t и переходя к пределу при $t \to 0$, получаем в силу радиальной непрерывности B соотношение $0 \leqslant \langle Bu_0 - g, v - u_0\rangle$.

4. Неравенство (3.10) имеет только одно решение u_0. Действительно, пусть $v_0 \in K$ — какое-нибудь другое его решение. Тогда

$$0 \geqslant \langle Bu_0 - g, u_0 - v_0\rangle \quad \text{и} \quad 0 \geqslant \langle g - Bv_0, u_0 - v_0\rangle.$$

Складывая эти соотношения, находим

$$0 \geqslant \langle Bu_0 - Bv_0,\ u_0 - v_0 \rangle.$$

Вследствие сильной монотонности B отсюда вытекает, что $u_0 = v_0$.

5. Покажем, что $u_i \rightharpoonup u_0$ в X. Последовательность $\{u_i\}$ слабо компактна. Для каждой ее слабо сходящейся подпоследовательности $\{\bar{u}_i\}$ имеем $\bar{u}_i \rightharpoonup u_0$, и стандартное рассуждение (ср. с леммой 5.4 гл. I) показывает, что $u_i \rightharpoonup u_0$.

6. Пусть оператор B обладает (S)-свойством. Покажем, что $u_i \to u_0$ в X. Имеем

$$0 = \langle Au_i - Au_0 + \varepsilon_i (Bu_i - g),\ u_i - u_0 \rangle \geqslant \varepsilon_i \langle Bu_i - g,\ u_i - u_0 \rangle;$$

поэтому

$$0 \geqslant \langle Bu_i - g,\ u_i - u_0 \rangle = \langle Bu_i - Bu_0,\ u_i - u_0 \rangle + \langle Bu_0 - g,\ u_i - u_0 \rangle,$$

откуда

$$\langle Bu_i - Bu_0,\ u_i - u_0 \rangle \leqslant \langle g - Bu_0,\ u_i - u_0 \rangle \to 0.$$

На основании (S)-свойства оператора B заключаем, что $u_i \to u_0$.

Теорема доказана.

Замечание 3.7. Если X равномерно выпукло, а X^* строго выпукло, то дуализующее отображение J для пространства X удовлетворяет условиям, наложенным на B (см. лемму 5.6 гл. I и замечания 1.4, 1.5). Таким образом, в этом частном случае можно регуляризировать с $B = J$.

§ 4. МОНОТОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Многие из результатов, изложенных в предыдущих параграфах, были сначала доказаны для потенциальных операторов (см. определение ниже) и лишь потом обобщены на случай непотенциальных операторов. Однако имеется ряд результатов для потенциальных операторов, которые не имеют соответствующих эквивалентов без предположения потенциальности. Именно такие результаты являются главной темой настоящего параграфа.

Параграф разбит на пять пунктов. В п. 1 мы даем необходимые и достаточные условия потенциальности. Примеры потенциальных операторов приводятся в п. 2. В п. 3 обсуждаются связи между выпуклыми функционалами и монотонными операторами, а также существенные для нас свойства выпуклых функционалов. Пункт 4 посвящен приближенным методам решения уравнений с потенциальными операторами. Наконец в п. 5 мы формулируем некоторые утверждения двойственности и на их основе получаем оценки погрешности.

В этом параграфе оказывается целесообразным модифицировать понятие функционала таким образом, чтобы в качестве его значений допускалось значение $+\infty$. Итак, до конца этого параграфа под функционалом F мы понимаем отображение из X в $(-\infty, +\infty]$.

1. КРИТЕРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

Определение 4.1. Функционал F называется
тривиальным, если $F(x) = +\infty \ \forall x \in X$;
конечным, если $F(x) \in (-\infty, +\infty) \ \forall x \in X$.

Конечный функционал называется *дифференцируемым по Гато*, если существует такой оператор $A \in (X \to X^*)$, что для любых $x, y \in X$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (F(x+ty) - F(x)) = \langle Ax, y \rangle.$$

При этом A называют *градиентом* функционала F. Оператор $A \in (X \to X^*)$ называется *потенциальным*, если существует такой конечный функционал F, что A является его градиентом. В этом случае F называют *потенциалом* оператора A.

Замечание 4.1. Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ радиально непрерывен и является градиентом функционала F. Тогда

$$F(x) = F(0) + \int_0^1 \langle Atx, x \rangle \, dt \qquad \forall x \in X. \tag{4.1}$$

Доказательство. Для произвольного $x \in X$ рассмотрим функцию

$$t \to \varphi(t) = F(tx), \qquad t \in [0, 1].$$

Имеем

$$\varphi'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{F(tx+sx) - F(tx)}{s} = \langle Atx, x \rangle.$$

Поэтому из радиальной непрерывности оператора A следует, что

$$F(x) - F(0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt = \int_0^1 \langle Atx, x \rangle \, dt.$$

В качестве следствия из замечания 4.1 получаем

Замечание 4.2. Потенциал F потенциального оператора A определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной, скажем значения в нуле.

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — потенциалы оператора A и $F_1(0) = F_2(0)$. Ясно, что градиентом функционала $F = F_1 - F_2$ является нулевой оператор. Поэтому, согласно замечанию 4.1, $F(x) = F(0) = 0$ и, следовательно, $F_1 = F_2$.

Лемма 4.1. Пусть $A \in (X \to X^*)$ — деминепрерывный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

a) оператор A потенциален;

b) при любых $x, y \in X$

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle\, dt - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle\, dt = \int_0^1 \langle A(y + t(x-y)), \quad x - y\rangle\, dt;$$

c) для любых x, $y \in X$ и любого непрерывно дифференцируемого отображения $u \in ([0, 1] \to X)$ с $u(0) = y$, $u(1) = x$ справедливо равенство

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle\, dt - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle\, dt = \int_0^1 \langle Au(t), u'(t)\rangle\, dt.$$

Доказательство. a)$\Rightarrow$b) Для произвольных x, $y \in X$ имеем (см. замечание 4.1)

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle\, dt - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle\, dt = F(x) - F(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(y + t(x-y))\, dt =$$
$$= \int_0^1 \langle A(y + t(x-y)), x - y\rangle\, dt.$$

b)$\Rightarrow$c). В силу деминепрерывности A существует такая постоянная M, что для любых τ, t, $s \in [0, 1]$

$$\| A(u(s) + \tau(u(t) - u(s)))\|_* \leqslant M.$$

Рассмотрим на $[0, 1]$ вещественную функцию

$$t \to \varphi(t) = \int_0^1 \langle A\tau u(t), u(t)\rangle\, d\tau.$$

Ввиду b) (см. также лемму 1.1 гл. IV)

$$|\varphi(t)-\varphi(s)|=\left|\int_0^1\langle A\tau u(t),\ u(t)\rangle\,d\tau-\int_0^1\langle A\tau u(s),\ u(s)\rangle\,d\tau\right|=$$

$$=\left|\int_0^1\langle A(u(s)+\tau(u(t)-u(s))),\ u(t)-u(s)\rangle\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\|u(t)-u(s)\|\leqslant M|t-s|\max_{\tau\in[0,1]}\|u'(\tau)\|,\tag{4.2}$$

т. е. функция φ липшиц-непрерывна и, значит, абсолютно непрерывна. Следовательно,

$$\int_0^1\langle Atx,\ x\rangle\,dt-\int_0^1\langle Aty,\ y\rangle\,dt=\varphi(1)-\varphi(0)=\int_0^1\varphi'(t)\,dt.$$

С другой стороны, из (4.2) следует на основании интегральной теоремы о среднем, что при подходящем $\tau_0=\tau_0(s,t)\in[0,1]$

$$\varphi'(t)=\lim_{s\to t}\frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t}=$$

$$=\lim_{s\to t}\left\langle A(u(t)+\tau_0(u(s)-u(t))),\ \frac{u(s)-u(t)}{s-t}\right\rangle=\langle Au(t),\ u'(t)\rangle.$$

Поэтому справедливо c).

c)$\Rightarrow$a). Покажем, что функционал $x\to F(x)=\int_0^1\langle Asx,\ x\rangle\,ds$ является потенциалом оператора A. Пусть $u_t(s)=x+sty$. Тогда при указанных предположениях имеем для любых $t\in R^1$, x, $y\in X$ и подходящего $s_0\in[0,1]$

$$\lim_{t\to0}\frac{F(x+ty)-F(x)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left(\int_0^1\langle As(x+ty),\ x+ty\rangle\,ds-\int_0^1\langle Asx,\ x\rangle\,ds\right)=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_0^1\left\langle Au_t(s),\ u_t'(s)\right\rangle ds=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_0^1\langle Au_t(s),\ ty\rangle\,ds=$$

$$=\lim_{t\to0}\langle A(x+s_0ty),\ y\rangle=\langle Ax,\ y\rangle.$$

Лемма доказана.

Замечание 4.3. Эквивалентность условий a) и b) можно без особого труда доказать для операторов, являющихся лишь радиально непрерывными.

Замечание 4.4. В добавление к лемме 4.1 отметим без доказательства, что деминепрерывный оператор $A \in (X \to X^*)$ является точно тогда потенциальным, когда для каждого непрерывно дифференцируемого отображения $u \in ([0, 1] \to X)$ с $u(0) = u(1)$ выполняется соотношение

$$\int_0^t \langle Au(t),\ u'(t)\rangle\, dt = 0.$$

Лемма 4.2. Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ дифференцируем по Гато и для любых элементов $x, y, h \in X$ функция

$$\{s,\ t\} \to \langle A'(h + sx + ty)\,x,\ y\rangle$$

непрерывна на $[0, 1] \times [0, 1]$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

a) оператор A потенциален;

b) $\langle A'(h)\,x,\ y\rangle = \langle A'(h)\,y,\ x\rangle$ для всех $x, y, h \in X$.

Доказательство. a)$\Rightarrow$b). При подходящих $\tau_i \in [0, t]$, $i = 1$, 2, 3, 4,

$$\varphi_{h,x,y}(t) = F(h + tx + ty) - F(h + tx) - (F(h + ty) - F(h)) =$$

$$= \int_0^t \langle A(h + tx + s_1y) - A(h + s_1y),\ y\rangle\, ds_1 =$$

$$= \int_0^t \int_0^t \langle A'(h + s_1y + s_2x)\,x,\ y\rangle\, ds_2\, ds_1 =$$

$$= t^2 \langle A'(h + \tau_1y + \tau_2x)\,x,\ y\rangle.$$

Очевидно, $\varphi_{h,x,y}(t) = \varphi_{h,y,x}(t)$. Поэтому

$$t^2 \langle A'(h + \tau_1y + \tau_2x)\,x,\ y\rangle = t^2 \langle A'(h + \tau_3x + \tau_4y)\,y,\ x\rangle.$$

Разделив на t^2 и перейдя к пределу при $t \to 0$, получим

$$\langle A'(h)\,x,\ y\rangle = \langle A'(h)\,y,\ x\rangle.$$

b) $\Rightarrow$ a). Имеем

$$\int_0^1 \langle Atx, x\rangle\,dt - \int_0^1 \langle Aty, y\rangle\,dt =$$

$$= \int_0^1 \langle Atx, x-y\rangle\,dt + \int_0^1 \langle Atx - Aty, y\rangle\,dt =$$

$$= \int_0^1 \langle Atx, x-y\rangle\,dt + \int_0^1 \int_0^t \langle A'(ty + s(x-y))(x-y), y\rangle\,ds\,dt =$$

$$= \int_0^1 \langle Atx, x-y\rangle\,dt + \int_0^1 \int_s^1 \langle A'(ty + s(x-y))\,y, x-y\rangle\,dt\,ds =$$

$$= \int_0^1 \langle Atx, x-y\rangle\,dt + \int_0^1 \langle A(y + s(x-y)) - Asx, x-y\rangle\,ds =$$

$$= \int_0^1 \langle A(y + s(x-y)), x-y\rangle\,ds,$$

откуда в силу леммы 4.1 и следует a). Лемма доказана.

2. ПРИМЕРЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Лемма 4.3. Пусть X^* строго выпукло. Тогда дуализующее отображение $J \in (X \to X^*)$ является потенциальным оператором с потенциалом $F(x) = \|x\|^2/2$.

Доказательство. При любых $x, y \in X$

$$\langle Jy, y-x\rangle \geqslant \|y\|^2 - \|x\|\|y\| \geqslant \|y\|^2 - \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geqslant \|x\|\|y\| - \|x\|^2 \geqslant \langle Jx, y-x\rangle.$$

Подставив сюда $y = x + th$, $h \in X$, получим

$$t\langle Jx, h\rangle \leqslant \frac{1}{2}\|x+th\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \leqslant t\langle J(x+th), h\rangle.$$

Используя это соотношение, радиальную непрерывность J и строгую выпуклость X^*, находим (см. лемму 5.6 гл. I), что

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\|x+th\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2}{t} = \langle Jx, h\rangle.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.4. В предположениях леммы 1.4, если оператор A_0 потенциален, то потенциален и оператор $A = L^* A_0 L$.

Доказательство. Пусть F_0 — потенциал для A_0. Положим

$$F(x) = F_0(Lx) \qquad \forall x \in X.$$

Тогда

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(F(x+th) - F(x)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(F_0(Lx + tLh) - F_0(Lx)) =$$
$$= \langle A_0 Lx,\ Lh\rangle_0 = \langle Ax,\ h\rangle,$$

т. е. F является потенциалом для A. Лемма доказана.

Лемма 4.5. Пусть $A_0 \in (L_r^2(G) \to L_r^2(G))$ — оператор, определенный формулами (1.3) и (1.4). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

a) A_0 потенциален $\left(\text{с потенциалом } F_0(y) = \frac{1}{2}\langle A_0 y,\ y\rangle_0\right)$;

b) $b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$ для почти всех $x \in G$, $i, j = 1, \ldots, r$.

Доказательство. В силу линейности A_0 имеем $A_0'(h) = A_0$ для каждого $h \in L_r^2(G)$. Согласно лемме 4.2, оператор A_0 точно тогда потенциален, когда для любых $y,\ z \in L_r^2(G)$

$$\langle A_0 z,\ y\rangle_0 = \langle A_0 y,\ z\rangle_0.$$

Очевидно, это будет точно в том случае, когда для почти всех $x \in G$

$$b_{ij}(x) = b_{ji}(x), \qquad i, j = 1, \ldots, r.$$

Лемма 4.5 доказана.

Лемма 4.6. Оператор $A_0 \in (L_r^p(G) \to L_r^q(G))$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, определенный формулами (1.3) и (1.5), является потенциальным с потенциалом

$$F_0(y) = \int_G \int_0^{|y(x)|} \varphi(x,\ s^{p-1})\, s^{p-1}\, ds\, dx.$$

Доказательство. Для $y,\ z \in L_r^p(G)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(F_0(y+tz) - F_0(y)) = \frac{d}{dt} \int_G \int_0^{|y+tz|} \varphi(x,\ s^{p-1})\, s^{p-1}\, ds\, dx \,\Big|_{t=0} =$$
$$= \int_G \varphi(x, |y|^{p-1})\, |y|^{p-2} \sum_{i=1}^{r} y_i z_i\, dx = \langle A_0 y,\ z\rangle_0.$$

Лемма доказана.

Замечание 4.5. Нетрудно убедиться, что указанная в замечании 1.12 модификация также приводит к потенциальному оператору.

3 МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Определение 4.2. Функционал F называется *выпуклым*, если выпукло множество [1])

$$\operatorname{epi} F = \{\{x, a\} \mid \{x, a\} \in X \times R^1,\ F(x) \leqslant a\},$$

и *слабо полунепрерывным снизу*, если это множество слабо замкнуто в $X \times R^1$.

Замечание 4.6. Для конечных функционалов можно дать следующие эквивалентные определения выпуклости и слабой полунепрерывности снизу: функционал F называется выпуклым, если для любых $x, y \in X$ и $t \in [0, 1]$

$$tF(x) + (1-t)F(y) \geqslant F(tx + (1-t)y),$$

и слабо полунепрерывным снизу, если из того, что $x_n \rightharpoonup x$ в X, следует, что $F(x) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} F(x_n)$.

Прежде чем приступить к установлению связи между монотонными операторами и выпуклыми функционалами, приведем некоторые основные свойства выпуклых, соответственно слабо полунепрерывных снизу функционалов.

Лемма 4.7. Пусть F — выпуклый слабо полунепрерывный снизу функционал и $F(x) < +\infty$ для некоторого заданного $x \in X$. Тогда для любого вещественного числа $d > 0$ можно указать такое $x^* \in X^*$, что

$$F(y) > F(x) + \langle x^*, y - x\rangle - d \qquad \forall y \in X.$$

Доказательство. Множество $\operatorname{epi} F$ выпукло и слабо замкнуто. Очевидно, $\{x, F(x) - d\} \notin \operatorname{epi} F$. По теореме 5.6 гл. I существует такая пара $\{x^*, a^*\} \in X^* \times R^1$, что

$$\langle x^*, x\rangle + a^*(F(x) - d) > \sup_{\{y, a\} \in \operatorname{epi} F} (\langle x^*, y\rangle + a^* a).$$

Отсюда и из включения $\{x, F(x)\} \in \operatorname{epi} F$ следует, что $a^*(-d) > 0$; значит, $a^* < 0$. Поэтому без ограничения общности мы можем взять $a^* = -1$. Тогда

$$\langle x^*, x\rangle - (F(x) - d) > \sup_{\{y, a\} \in \operatorname{epi} F} (\langle x^*, y\rangle - a) = \sup_{y \in X} (\langle x^*, y\rangle - F(y)),$$

[1]) Называемое *надграфиком* (epigraph) функционала F. У авторов для него используется менее распространенное и к тому же занятое обозначение $\det F$. — *Прим. ред.*

т. е.

$$F(y) > F(x) + \langle x^*, y - x\rangle - d \qquad \forall y \in X.$$

Лемма доказана.

Замечание 4.7. Если $x^* \in X^*$ удовлетворяет соотношению

$$F(y) \geqslant F(x) + \langle x^*, y - x\rangle \qquad \forall y \in X,$$

то x^* называют *опорным функционалом* для функционала F в в точке x. Всякий выпуклый дифференцируемый по Гато функционал с градиентом A имеет в каждой точке $x \in X$ точно один опорный функционал x^*, причем $x^* = Ax$.

Лемма 4.8. Слабо полунепрерывный снизу функционал F на каждом непустом ограниченном замкнутом выпуклом множестве K принимает минимальное значение.

Доказательство. Пусть $\{y_n\} \subset K$ — минимизирующая последовательность для функционала F на K, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \inf_{y \in K} F(y) = d.$$

В силу ограниченности K и рефлексивности X существует подпоследовательность $\{x_n\}$ последовательности $\{y_n\}$, такая, что $x_n \rightharpoonup x$ в X. Так как K замкнуто и выпукло, то $x \in K$ (см. теорему 5.7 гл. I). Из слабой полунепрерывности снизу F и того, что $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = d$, вытекает, что $F(x) \leqslant d$, откуда $F(x) = \inf\limits_{y \in K} F(y)$. Лемма доказана.

Лемма 4.9. Слабо полунепрерывный снизу функционал F, обладающий свойством

$$\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = +\infty,$$

принимает на каждом непустом замкнутом выпуклом множестве K минимальное значение.

Доказательство. Пусть $y \in K$ — произвольный фиксированный элемент. Без ограничения общности можно считать, что $F(y) < +\infty$. Согласно предположению, существует $R > 0$, такое, что $F(x) \geqslant F(y)$ при $\|x\| \geqslant R$. В силу леммы 4.8, на выпуклом множестве $\{x \mid x \in K,\ \|x\| \leqslant R\}$ функционал F достигает своей нижней грани в некоторой точке x_0. Очевидно, в x_0 достигается нижняя грань F на всём K. Лемма доказана.

Между монотонными операторами и выпуклыми функционалами имеются очень тесные связи, аналогичные известным из вещественного анализа связям между монотонными и выпуклыми функциями. К описанию некоторых из них мы теперь и переходим.

Лемма 4.10. Пусть конечный функционал F обладает градиентом $A \in (X \to X^*)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

a) функционал F выпукл;

b) для любых $x, y \in X$ функция $s \to \psi(s) = F(x + sy)$ выпукла;

c) оператор A монотонен;

d) $F(y) \geqslant F(x) + \langle Ax, y - x\rangle \quad \forall x, \quad \forall y \in X$.

Доказательство. a) $\Rightarrow b$). Для $t \in [0, 1]$ и $s_1, s_2 \in R^1$ имеем

$$t\psi(s_1) + (1 - t)\psi(s_2) - \psi(ts_1 + (1 - t)s_2) =$$
$$= tF(x + s_1y) + (1 - t)F(x + s_2y) - F(x + (ts_1 + (1 - t)s_2)y) =$$
$$= tF(x + s_1y) + (1 - t)F(x + s_2y) - F(t(x + s_1y) + (1 - t)(x + s_2y)) \geqslant 0.$$

b) $\Rightarrow$ c). Функция ψ обладает производной $\psi'(t) = \langle A(x + ty), y\rangle$. В силу хорошо известных свойств дифференцируемых вещественных функций выпуклость ψ влечет возрастание ψ'. Согласно лемме 1.1, этим обеспечена монотонность A.

c) $\Rightarrow$ d). Функция $t \to \varphi(t) = F(x + t(y - x))$ дифференцируема на $[0, 1]$. Производная

$$t \to \varphi'(t) = \langle A(x + t(y - x)), y - x\rangle$$

конечна и монотонна на $[0, 1]$. Поэтому по известной теореме вещественного анализа (см. Натансон [1])

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда на основании монотонности A следует, что

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 \langle A(x + t(y - x)), y - x\rangle\,dt \geqslant \langle Ax, y - x\rangle.$$

d) $\Rightarrow$ a). Положим $x_t = tx + (1 - t)y$. Если выполнено d), то для любого $t \in [0, 1]$

$$F(x) \geqslant F(x_t) + \langle Ax_t, x - x_t\rangle,$$
$$F(y) \geqslant F(x_t) + \langle Ax_t, y - x_t\rangle.$$

Умножив первое из этих соотношений на t, второе — на $(1 - t)$ и сложив, получим

$$tF(x) + (1 - t)F(y) \geqslant F(x_t).$$

Лемма доказана.

Замечание 4.8. Эквивалентность условий a) и b) можно без труда доказать и без предположения о дифференцируемости по Гато функционала F.

Следствие 4.1. Каждый конечный выпуклый дифференцируемый по Гато функционал F слабо полунепрерывен снизу.

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset X$ — такая последовательность, что $x_n \rightharpoonup x$ в X. Тогда в силу d)

$$F(x) \leqslant F(x_n) + \langle Ax, x - x_n \rangle$$

и, следовательно,

$$F(x) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} (F(x_n) + \langle Ax, x - x_n \rangle) = \varliminf_{n \to \infty} F(x_n).$$

Замечание 4.9. В следствии 4.1 предположение дифференцируемости по Гато существенно, а именно существуют конечные выпуклые функционалы, не являющиеся слабо полунепрерывными снизу.

Лемма 4.11. Пусть $A \in (X \to X^*)$ — потенциальный оператор с потенциалом F. Для того чтобы элемент $u \in X$ удовлетворял уравнению

$$Au = f, \qquad f \in X^*, \tag{4.3}$$

достаточно выполнения условия

$$F(u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in X} (F(v) - \langle f, v \rangle).$$

Если оператор A вдобавок монотонен, то это условие также и необходимо.

Доказательство. Пусть

$$F(u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in X} (F(v) - \langle f, v \rangle).$$

Тогда при любом $h \in X$

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} - \langle f, h \rangle = \langle Au, h \rangle - \langle f, h \rangle = \langle Au - f, h \rangle.$$

В силу произвольности h отсюда следует, что $Au = f$.

Пусть оператор A вдобавок монотонен. Поскольку $Au = f$, то по лемме 4.10 для любого $v \in X$

$$F(v) - \langle f, v \rangle - (F(u) - \langle f, u \rangle) = F(v) - F(u) - \langle Au, \quad v - u \rangle \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.12. Каждый монотонный потенциальный оператор $A \in (X \to X^*)$ деминепрерывен.

Доказательство. Пусть F — потенциал для A. На основании леммы 1.3 достаточно показать, что из соотношения

$$\langle f - Av,\ u - v\rangle \geqslant 0 \qquad \forall v \in X \tag{4.4}$$

следует, что $Au = f$. Если в (4.4) подставить $v_t = u + t(v - u)$, $t > 0$, вместо v и воспользоваться леммой 4.10, то мы получим

$$\langle f,\ t(v-u)\rangle \leqslant t\langle Av_t,\ v-u\rangle \leqslant t\left(F(v_t + v - u) - F(v_t)\right) =$$
$$= t\left(F(v + t(v-u)) - F(v_t)\right).$$

Деля на t, находим, что

$$\langle f,\ v-u\rangle \leqslant \lim_{t\to 0}\left(F(v + t(v-u)) - F(v_t)\right) = F(v) - F(u).$$

Отсюда по лемме 4.11 следует, что $Au = f$. Лемма доказана.

Следствие 4.2. Пусть $A \in (X \to X^*)$ — монотонный потенциальный оператор. Элемент $u \in X$ точно тогда является решением уравнения $Au = f$, $f \in X^*$, когда он доставляет минимум на X функционалу

$$\int_0^1 \langle Atv,\ v\rangle\, dt - \langle f,\ v\rangle.$$

Доказательство. По лемме 4.12 оператор A радиально непрерывен. Согласно замечанию 4.1 он обладает потенциалом

$$F(v) = \int_0^1 \langle Atv,\ v\rangle\, dt.$$

Наше утверждение непосредственно вытекает поэтому из леммы 4.11.

Как мы покажем ниже, в случае уравнений с потенциальными операторами основную теорему теории монотонных операторов (теорему 2.1) можно доказать при помощи вариационного метода, т. е. путем сведе́ния рассматриваемого уравнения к задаче минимизации некоторого функционала.

Теорема 4.1. *Если $A \in (X \to X^*)$ — монотонный, коэрцитивный потенциальный оператор, то уравнение $Au = f$ при любом $f \in X^*$ имеет решение.*

Доказательство. По лемме 4.12 оператор A радиально непрерывен. Функционал $F(x) = \int_0^1 \langle Atx,\ x\rangle\, dt - \langle f,\ x\rangle$ согласно лемме 4.10 удовлетворяет предположениям следствия 4.1 и, значит, слабо полунепрерывен снизу. Далее, из монотонности и коэрцитивности A вытекает, что

$$F(x)=\int_0^1 \langle Atx,\ x\rangle\,dt-\langle f,\ x\rangle=\int_0^1 \langle Atx-A0,\ tx\rangle\frac{dt}{t}-\langle f-A0,\ x\rangle\geqslant$$

$$\geqslant\int_{1/2}^1 \langle Atx-A0,\ x\rangle\,dt-\langle f-A0,\ x\rangle\geqslant$$

$$\geqslant\left\langle A\frac{x}{2},\ \frac{x}{2}\right\rangle-\left\langle f-\frac{1}{2}A0,\ x\right\rangle\geqslant$$

$$\geqslant\|x\|\left(\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\|x\|}{2}\right)-\left\|f-\frac{1}{2}A0\right\|_*\right)\to+\infty\quad\text{при}\quad\|x\|\to\infty.$$

Поэтому из лемм 4.9 и 4.11 следует существование решения уравнения $Au=f$. Теорема доказана.

Следствие 4.3. Потенциал $F(x)=\int_0^1\langle Atx,\ x\rangle\,dt$ всякого монотонного коэрцитивного потенциального оператора ограничен снизу.

Доказательство. Пусть u — решение уравнения $Au=0$. В силу леммы 4.11

$$F(v)\geqslant F(u)\qquad\forall v\in X.$$

4. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД, МЕТОД РИТЦА, ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

В § 3 мы дали обоснование итерационного и проекционно-итерационного методов решения нелинейного операторного уравнения $Au=f$ для того случая, когда A есть отображение гильбертова пространства X в сопряженное пространство X^* (см. теоремы 3.4 и 3.6). В этом пункте мы покажем, что указанные методы в принципе годятся также и для решения уравнений вида $Au=f$ в банаховых пространствах, если оператор A является потенциальным. Более того, для потенциальных операторов мы улучшим оценки погрешностей, полученные в теоремах 3.4 и 3.5.

Теорема 4.2. *Пусть X и X^* строго выпуклы и $J\in(X\to X^*)$ — дуализующее отображение для X. Пусть, далее, $A\in(X\to X^*)$ — ограниченно липшиц-непрерывный строго монотонный коэрцитивный потенциальный оператор с* (S)*-свойством. Пусть, наконец, $v_0\in X$ — произвольный (начальный) элемент и $a>0$ —*

произвольное вещественное число. Тогда последовательность $\{v_i\}$, *определенная правилом*

$$v_{i+1} = v_i - t_i z_i, \quad Jz_i = Av_i - f, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{4.5}$$

$$t_i = \min\left\{1, \frac{2}{a + \mu(\|v_i\| + \|Av_i - f\|_*)}\right\}$$

сильно сходится в X *к решению* u *уравнения* $Au = f$ (*Относительно функции* μ *см. определение* 1.1.)

Доказательство. Существование и единственность u вытекают из теоремы 2.2. Оператор $A - f$ обладает потенциалом

$$F(x) = \int_0^1 \langle Atx, x\rangle\, dt - \langle f, x\rangle \quad \forall x \in X.$$

Используя правило (4.5) и лемму 4.1 и вводя сокращение $\mu_i = \mu(\|v_i\| + \|Av_i - f\|_*)$, находим

$$F(v_i) - F(v_{i+1}) = \int_0^1 \langle A(v_{i+1} + s(v_i - v_{i+1})) - f, v_i - v_{i+1}\rangle\, ds =$$

$$= \langle Av_i - f, v_i - v_{i+1}\rangle + \int_0^1 \langle A(v_{i+1} + s(v_i - v_{i+1})) - Av_i, v_i - v_{i+1}\rangle\, ds =$$

$$= t_i\|z_i\|^2 + \int_0^1 \langle A(v_{i+1} + s(v_i - v_{i+1})) - Av_i, v_i - v_{i+1}\rangle\, ds \geqslant$$

$$\geqslant t_i\|z_i\|^2 - \mu_i\|v_i - v_{i+1}\|^2 \int_0^1 (1 - s)\, ds =$$

$$= t_i\|z_i\|^2\left(1 - \frac{\mu_i t_i}{2}\right) \geqslant \frac{t_i a}{\mu_i + a}\|z_i\|^2 \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Таким образом, последовательность $\{F(v_i)\}$ убывает. В силу следствия 4.3 она ограничена снизу. Значит, существует число $d > -\infty$, такое, что $F(v_i) \to d$. Отсюда следует, что

$$F(v_i) - F(v_{i+1}) \to 0.$$

На основании (4.6) имеем

$$
\begin{aligned}
F(v_0) \geqslant F(v_i) &= \int_0^1 \langle Asv_i,\ v_i\rangle\, ds - \langle f,\ v_i\rangle = \\
&= \int_0^1 \langle Asv_i - A0,\ sv_i\rangle \frac{ds}{s} - \langle f - A0,\ v_i\rangle \geqslant \\
&\geqslant \int_{1/2}^1 \langle Asv_i - A0,\ sv_i\rangle \frac{ds}{s} - \langle f - A0,\ v_i\rangle \geqslant \\
&\geqslant \left\langle A\frac{v_i}{2},\ \frac{v_i}{2}\right\rangle - \left\langle f - \frac{1}{2}A0,\ v_i\right\rangle \geqslant \\
&\geqslant \|v_i\|\left(\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\|v_i\|}{2}\right) - \left\|f - \frac{1}{2}A0\right\|_*\right).
\end{aligned}
$$

Поскольку $\gamma(s) \to \infty$ при $s \to \infty$, то существует такая постоянная $R < +\infty$, что

$$\|u\|,\ \|v_i\| \leqslant R, \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots .$$

Итак, для $i = 0,\ 1,\ \ldots$

$$\mu_i = \mu(\|v_i\| + \|Av_i - f\|_*) \leqslant \mu(R + 2R\mu(R)) = c_0,$$

$$t_i = \min\left\{1,\ \frac{2}{a + \mu_i}\right\} \geqslant \min\left\{1,\ \frac{2}{a + c_0}\right\} = c > 0.$$

Поэтому из (4.6) вытекает, что

$$\frac{ca}{c_0 + a}\|z_i\|^2 \leqslant F(v_i) - F(v_{i+1}) \to 0, \quad \text{т. е.} \quad \|z_i\| \to 0.$$

Покажем, что $v_i \rightharpoonup u$. Пусть $\{v_{i_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{v_i\}$, такая, что $v_{i_k} \rightharpoonup v$ в X. Вследствие (4.5) для любого $x \in X$

$$
\begin{aligned}
\langle f - Ax,\ v - x\rangle = \langle Av_{i_k} - Ax,\ v_{i_k} - x\rangle - \langle Jz_{i_k},\ v_{i_k} - x\rangle + \\
+ \langle f - Ax,\ v - v_{i_k}\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle Av_{i_k} - Ax,\ v_{i_k} - x\rangle \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Согласно лемме 1.3, отсюда следует, что $Av = f$, а значит, $v = u$ и $v_{i_k} \rightharpoonup u$. Стандартное рассуждение (ср. с леммой 5.4 гл. I) показывает, что $v_i \rightharpoonup u$. Используя правило (4.5) и тот факт, что $\|z_i\| \to 0$, находим

$$
\begin{aligned}
\langle Av_i - Au,\ v_i - u\rangle = \langle Av_i - f,\ v_i - u\rangle = \langle Jz_i,\ v_i - u\rangle \leqslant \\
\leqslant 2R\|z_i\| \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty.
\end{aligned}
$$

На основании (S)-свойства оператора A заключаем, что $v_i \to u$. Теорема доказана.

Замечание 4.10. Очевидно, справедливо соотношение

$$Jz_i = Av_i - f = \operatorname{grad} F(v_i).$$

В соответствии с этим итерационный метод (4.5) часто называют *градиентным методом*, а также, поскольку $-z_i$ указывает направление наибольшего убывания функционала F в точке v_i, *методом наискорейшего спуска.*

Замечание 4.11. Легко видеть, что теорема 4.2 остается справедливой, если требование ограниченной липшиц-непрерывности A заменить формально более слабым требованием

$$\langle Ax - Ay,\ x - y\rangle \leqslant \mu(R)\|x - y\|^2, \qquad \|x\|,\ \|y\| \leqslant R.$$

Из доказательства теоремы 4.2 видно; что «динамическую» длины шага t_i можно заменить постоянной длиной шага c. Если оператор A липшиц-непрерывен с постоянной Липшица M, то можно выбрать $t_i = 2/(a + M)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Замечание 4.12. Согласно замечаниям 1.2, и 1.4 и 1.5, каждый равномерно монотонный (а в равномерно выпуклых банаховых пространствах также каждый d-монотонный) ограниченно липшиц-непрерывный потенциальный оператор удовлетворяет предположениям теоремы 4.2.

Замечание 4.13. Итерационный процесс (4.5), очевидно, можно записать также в виде

$$v_{i+1} = v_i - t_i J^{-1}(Av_i - f), \quad t_i = \min\left\{1,\ \frac{2}{a + \mu(\|v_i\| + \|Av_i - f\|_*)}\right\},$$

где $J^{-1} = J^* \in (X^* \to X)$ — дуализующее отображение для X^*. Этот способ записи уместно применять, когда известно явное представление оператора J^{-1}. Например, в частном случае $X = L^p(G)$, $p > 1$,

$$J^{-1}w(\cdot) = \|w\|^{2-q}|w(\cdot)|^{q-2}w(\cdot) \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Замечание 4.14. Поскольку обычно явное выражение для J^{-1} (см. замечание 4.13) неизвестно, то при реализации процесса (4.5) на каждом шаге приходится решать, вообще говоря, нелинейное уравнение

$$Jz_i = Av_i - f$$

(где искомой величиной является z_i). В важном для наших применений частном случае

$$X = W_0^{1,\,p}(G), \qquad \|u\| = \left(\int_G |\operatorname{grad} u|^p\,dx\right)^{1/p}$$

это означает, что нужно определять решение z_i нелинейной краевой задачи

$$-\|z_i\|^{2-p}\operatorname{div}\left(|\operatorname{grad} z_i|^{p-2}\operatorname{grad} z_i\right) = Av_i - f, \qquad z_i \in W_0^{1,\,p}(G).$$

[Очевидно, с помощью замены $z_i = \|\bar z_i\|^{p-2}\bar z_i$ эту задачу можно свести к задаче

$$-\operatorname{div}\left(|\operatorname{grad}\bar z_i|^{p-2}\operatorname{grad}\bar z_i\right) = Av_i - f, \qquad \bar z_i \in W_0^{1,\,p}(G).]$$

Покажем теперь, что для потенциальных операторов метод Галёркина совпадает с так называемым *методом Ритца*. Пусть $\{h_1, h_2, \ldots\}$ — какая-нибудь полная система линейно независимых элементов в X и X_n — подпространство в X, натянутое на $h_1, \ldots, h_n$.

Определение 4.3. Пусть $A \in (X \to X^*)$ — потенциальный оператор с потенциалом F. Элемент $u_n \in X_n$ называется n-м *приближенным решением Ритца* для уравнения $Au = f$, если

$$F(u_n) - \langle f, u_n\rangle = \min_{v \in X_n}\left(F(v) - \langle f, v\rangle\right). \tag{4.7}$$

Лемма 4.13. Пусть $A \in (X \to X^*)$ — монотонный оператор с потенциалом F. Элемент $u_n \in X_n$ точно тогда служит n-м приближенным решением Ритца уравнения $Au = f$, когда он является n-м галёркинским решением этого уравнения.

Доказательство. Если $u_n \in X_n$ — приближенное решение Ритца, то для любого $h \in X_n$

$$0 = \lim_{t \to 0}\frac{1}{t}\left(F(u_n + th) - F(u_n)\right) - \langle f, h\rangle = \langle Au_n - f, h\rangle,$$

так что u_n представляет собой галёркинское решение.

Если $u_n \in X_n$ — галёркинское решение, то, в силу леммы 4.10, для любого $v \in X_n$

$$F(v) - \langle f, v\rangle - \left(F(u_n) - \langle f, u_n\rangle\right) \geqslant \langle Au_n - f, v - u_n\rangle = 0,$$

т. е. u_n является приближенным решением Ритца. Лемма доказана.

Теорема 4.3. *Пусть $A \in (X \to X^*)$ — строго монотонный коэрцитивный потенциальный оператор с (S)-свойством. Тогда при каждом n существует единственное n-е приближенное решение*

Ритца и $u_n \to u$ в X, где через u обозначено решение уравнения $Au = f$.

Доказательство. Ввиду лемм 4.12 и 4.13 эта теорема непосредственно следует из теоремы 3.2.

Теперь мы скомбинируем метод Ритца (4.7) с итерационным методом (4.5) и таким образом получим проекционно-итерационный метод.

Теорема 4.4. *Пусть выполняются предположения теоремы 4.2, и пусть $w_0 \in X_1$ — произвольный (начальный) элемент и $a > 0$ — произвольное вещественное число. Тогда последовательность $\{w_n\}$, определенная по правилу*

$$\left.\begin{aligned} &w_{n+1} = w_n - t_n z_n, \qquad J_{n+1} z_n = A_{n+1} w_n - f_{n+1}, \\ &t_n = \min\left\{1, \frac{2}{a + \mu(\|w_n\| + \|Aw_n - f\|_*)}\right\}, \\ &J_{n+1} = I_{n+1}^* J I_{n+1}, \quad A_{n+1} = I_{n+1}^* A I_{n+1}, \quad f_{n+1} = I_{n+1}^* f, \\ &I_n \text{ — вложение } X_n \text{ в } X, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

сильно сходится в X к решению u уравнения $Au = f$.

Доказательство. Вводя сокращение $\mu_n = \mu(\| w_n \| + \| Aw_n - f \|_*)$, аналогично (4.6) находим

$$F(w_n) - F(w_{n+1}) \geqslant \frac{t_n a}{\mu_n + a} \| z_n \|^2 \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Значит, последовательность $\{F(w_n)\}$ убывает, а на основании следствия 4.3 она ограничена снизу. Следовательно, существует такое число $d > -\infty$, что $F(w_n) \to d$. Отсюда вытекает, что

$$F(w_n) - F(w_{n+1}) \to 0. \tag{4.10}$$

Как и при доказательстве теоремы 4.2, получаем

$$F(w_0) \geqslant \| w_n \| \left(\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\| w_n \|}{2} \right) - \left\| f - \frac{1}{2} A0 \right\|_* \right),$$

откуда

$$\| u \|, \quad \| w_n \| \leqslant R < +\infty, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

а также

$$\mu_n = \mu(\| w_n \| + \| Aw_n - f \|_*) \leqslant \mu(R + 2R\mu(R)) = c_0,$$

$$t_n = \min\left\{1, \frac{2}{a + \mu_n}\right\} \geqslant \min\left\{1, \frac{2}{a + c_0}\right\} = c.$$

Поэтому, из (4.9) и (4.10) следует, что $\| z_n \| \to 0$.

Покажем, что $w_n \rightharpoonup u$. Пусть $\{w_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{w_n\}$, такая, что $w_{n_k} \rightharpoonup w$ в X. Пусть, далее, $x \in X$ — произвольный элемент и $\{x_i\}$ — такая последовательность элементов $x_i \in X_i$, что $x_i \to x$ в X. Имеем

$$\begin{aligned}
\langle f - Ax, w - x\rangle &= \lim_{i\to\infty} \langle f - Ax_i, w - x_i\rangle = \\
&= \lim_{i\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left\langle f - Ax_i, w_{n_k} - x_i\right\rangle = \\
&= \lim_{i\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left(\left\langle Aw_{n_k} - Ax_i, w_{n_k} - x_i\right\rangle - \right.\\
&\quad \left. - \left\langle Jz_{n_k}, w_{n_k} - x_i\right\rangle\right) = \\
&= \lim_{i\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left\langle Aw_{n_k} - Ax_i, w_{n_k} - x_i\right\rangle \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы 1.3 вытекает, что $w = u$, и, проводя обычное рассуждение, получаем $w_n \rightharpoonup u$.

Покажем, наконец, что $w_n \to u$. Прежде всего

$$\langle Aw_n, w_n\rangle = \langle Jz_n + f, w_n\rangle \leqslant R(\|z_n\| + \|f\|_*) \leqslant R_1 < +\infty, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и, согласно следствию 1.2,

$$\|Aw_n\|_* \leqslant R_2 < \infty, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть u_n является n-м приближением Ритца для u. На основании теоремы 4.3

$$\begin{aligned}
\langle Aw_n - Au, w_n - u\rangle &= \langle Aw_n - Au, w_n - u_n\rangle + \langle Aw_n - Au, u_n - u\rangle = \\
&= \langle Aw_n - f, w_n - u_n\rangle + \langle Aw_n - f, u_n - u\rangle = \\
&= \langle Jz_n, w_n - u_n\rangle + \langle Aw_n - f, u_n - u\rangle \leqslant \\
&\leqslant \|z_n\| \cdot 2R + (R_2 + \|f\|_*)\|u_n - u\| \to 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу (S)-свойства оператора A, следует, что $w_n \to u$. Теорема доказана.

Следствие 4.4. Пусть в дополнение к предположениям теоремы 3.4 оператор A потенциален. Тогда проекционно-итерационная последовательность $\{w_n\}$, определенная правилом (3.8), при любых $t \in (0, 2/M)$ и $w_0 \in X_1$ сильно сходится в X к решению u уравнения $Au = f$.

Доказательство. Сильная монотонность A влечет за собой строгую монотонность, коэрцитивность и (S)-свойство. В силу липшиц-непрерывности A можно в (4.8) взять $t_n = 2/(a + M)$. Ввиду линейности дуализующего отображения J для гильбертова пространства, последовательности $\{w_n\}$, определенные формулами (3.8) и (4.8), совпадают между собой.

Замечание 4.15. «Динамическая» длина шага t_n проекционно-итерационного метода может быть заменена постоянной длиной шага c (ср. с замечанием 4.11).

В качестве подготовки к доказательству уже упомянутых уточнений теорем 3.4 и 3.5 для случая потенциальных операторов приведем следующую лемму, которую можно рассматривать как дополнение к лемме 3.1.

Лемма 4.14. Пусть X — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и $B \in (X \to X)$ — потенциальный оператор, удовлетворяющий условиям:

a) $\| Bx - By \| \leqslant M \| x - y \|$;

b) $(Bx - By,\ x - y) \geqslant m \| x - y \|^2, \qquad m \geqslant 0, \qquad \forall x, \quad \forall y \in X.$

Тогда оператор $U_t \in (X \to X)$, определенный по правилу

$$U_t x = x - tBx \qquad \forall x \in X,$$

при $t > 0$ удовлетворяет оценке

$$\| U_t x - U_t y \| \leqslant q(t) \| x - y \|, \qquad q(t) = \max \{1 - tm,\ tM - 1\}.$$

Доказательство. Очевидно, вместе с B потенциален и оператор U_t. Пусть F_t — потенциал для U_t. Этот потенциал при любых x, u, $v \in X$ удовлетворяет соотношению

$$F_t(x + u + v) - F_t(x + u) - F_t(x + v) + F_t(x) =$$

$$= F_t(x+u+v) - F_t\left(x + \frac{u+v}{2}\right) + F_t\left(x + u + \frac{v-u}{2}\right) - F_t(x+u) -$$

$$- F_t(x+u+(v-u)) + F_t\left(x + u + \frac{v-u}{2}\right) - F_t\left(x + \frac{u+v}{2}\right) + F_t(x) =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \left(U_t\left(x + \frac{u+v}{2} + s\frac{u+v}{2}\right) - U_t\left(x + s\frac{u+v}{2}\right),\ \frac{u+v}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(U_t\left(x + u + \frac{v-u}{2} + s\frac{v-u}{2}\right) - U_t\left(x + u + s\frac{v-u}{2}\right),\ \frac{v-u}{2}\right)\right\} ds =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 - t\left(B\left(x + \frac{u+v}{2} + s\frac{u+v}{2}\right) - B\left(x + s\frac{u+v}{2}\right),\ \frac{u+v}{2}\right) - \right.$$

$$- \left\| \frac{v-u}{2} \right\|^2 + t\left(B\left(x + u + \frac{v-u}{2} + s\frac{v-u}{2}\right) - \right.$$

$$\left. \left. - B\left(x + u + s\frac{v-u}{2}\right),\ \frac{v-u}{2}\right)\right\} ds \leqslant$$

$$\leqslant (1 - tm) \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + (tM - 1) \left\| \frac{v-u}{2} \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant q(t) \left(\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v-u}{2} \right\|^2 \right) = \frac{q(t)}{2} (\| u \|^2 + \| v \|^2).$$

Возьмем теперь два натуральных числа k и l и положим

$$x_{i,j} = x + i\frac{u}{k} + j\frac{v}{l}, \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \qquad j = 0, 1, \ldots, l.$$

Тогда, очевидно,

$$F_t(x+u+v) - F_t(x+u) - F_t(x+v) + F_t(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\{F_t(x_{i,j}) - F_t(x_{i-1,j}) - F_t(x_{i,j-1}) + F_t(x_{i-1,j-1})\}.$$

Используя для каждого слагаемого этой двойной суммы выведенную выше оценку, получаем

$$F_t(x+u+v) - F_t(x+u) - F_t(x+v) + F_t(x) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{q(t)}{2}\left(\left\|\frac{u}{k}\right\|^2 + \left\|\frac{v}{l}\right\|^2\right) = \frac{q(t)}{2}\left(\frac{l}{k}\|u\|^2 + \frac{k}{l}\|v\|^2\right).$$

При $v \neq 0$ можно подобрать k/l, как угодно близкое к $\|u\|/\|v\|$, откуда мы заключаем, что

$$F_t(x+u+v) - F_t(x+u) - F_t(x+v) + F_t(x) \leqslant q(t)\|u\|\|v\|;$$

при $v = 0$ эта оценка тривиальна. Применим эту оценку для $u = y - x$ и $v = sz$. Так как F_t является потенциалом для U_t, то получаем

$$(U_t y - U_t x, z) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(F_t(y+sz) - F_t(y) - F_t(x+sz) + F_t(x)) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}q(t)\|y-x\|\|sz\| = q(t)\|y-x\|\|z\|,$$

чем лемма и доказана.

Следствие 4.5. В предположениях леммы 4.14 если $m > 0$ и $t \in (0, 2/M)$, то оператор U_t сжимающ. При $m \geqslant 0$ и $t \in (0, 2/M]$ оператор U_t является *нерастягивающим*, т. е.

$$\|U_t x - U_t y\| \leqslant \|x - y\| \qquad \forall x, \ \forall y \in X.$$

Доказательство. Из определения функции $q(t)$ вытекает, что

$$q(t) = \begin{cases} 1 - tm & \text{для } 0 < t \leqslant \dfrac{2}{M+m}, \\ tM - 1 & \text{для } \dfrac{2}{M+m} \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{M}. \end{cases}$$

Следовательно, $0 < q(t) \leqslant 1$ при $m \geqslant 0$ и $t \in (0, 2/M]$. Случай $q(t) = 1$ возможен лишь при $m = 0$ или $t = 2/M$.

Точно так же, как с помощью леммы 3.1 были получены теоремы 3.4 и 3.5, при использовании леммы 4.14 получаются следующие две теоремы.

Теорема 4.5. *Пусть в дополнение к предположениям теоремы* 3.4 *оператор* A *потенциален. Тогда при любых* $t \in (0, 2/M)$ *и* $v_0 \in X$ *последовательность* $\{v_i\}$, *определенная правилом* (3.5), *сильно сходится в* X *к решению* u *уравнения* $Au = f$ *и имеет место оценка погрешности*

$$\| v_i - u \| \leqslant \frac{q^i t}{1-q} \| Av_0 - f \|_*, \qquad q = q(t) = \max\{1 - tm, \ tM - 1\}.$$

Теорема 4.6. *Пусть выполняются предположения теоремы* 4.5. *Тогда при любых* $t \in (0, 2/M)$ *и* $v_{n,0} \in X_n$ *последовательность* $\{v_{n,i}\}$, *определенная правилом* (3.6), *сильно сходится в* X *к решению* u_n *уравнения Галёркина* (3.3) *и справедлива оценка погрешности*

$$\| v_{n,i} - u_n \| \leqslant \frac{q^i t}{1-q} \| Av_{n,0} - f \|_*, \qquad q = q(t) = \max\{1 - tm, \ tM - 1\}.$$

Замечание 4.16. Функция q принимает минимальное значение при $t = t_1 = 2/(M+m)$, а именно значение $q_1 = q(t_1) = (M-m)/(M+m)$. В предыдущем параграфе (см. замечание 3.3) мы обнаружили, что без предположения потенциальности A наименьшая постоянная сжатия k_0, получаемая при $t = t_0 = m/M^2$, равна $k_0 = k(t_0) = (1 - (m/M)^2)^{1/2}$. Очевидно, $q_1 < k_0$, а точнее, $q_1 = k_0 \dfrac{M}{M+m} \left(\dfrac{M-m}{M+m} \right)^{1/2}$. Вообще, как легко подсчитать, при $t > 0$ и $M > m > 0$ справедливо соотношение $k(t) > q(t)$.

Замечание 4.17. Аналогично тому, как это было сделано в 3.5, мы убеждаемся в том, что выполнения предположений теоремы 4.5 достаточно требовать внутри шара K, который выбирается таким образом, чтобы итерационный процесс (3.5) (соотв. (3.6)) не выводил из K. В частности, при $t = t_1 = 2/(M+m)$ и $v_0 = 0$ можно взять, например,

$$K = \left\{ x \mid x \in X, \quad \| x \| \leqslant \frac{2}{m} \| A0 - f \|_* \right\}.$$

В теоремах 4.2—4.5 мы доказали сильную сходимость различных последовательных приближений к решению уравнения $Au = f$. Имея в виду применения в следующем пункте, покажем в заключение этого пункта, что все эти последовательные приближения являются также минимизирующими последовательностями для функционала

$$F(x) = \int_0^1 \langle Atx, x \rangle \, dt - \langle f, x \rangle.$$

Лемма 4.15. Пусть A — монотонный потенциальный оператор. Если u — решение уравнения $Au = f$ и $u_n \to u$ в X, то

$$F(u_n) = \int_0^1 \langle Atu_n, u_n \rangle dt - \langle f, u_n \rangle \to F(u) = \min_{x \in X} F(x).$$

Доказательство. В силу следствия 4.2, u доставляет минимум функционалу F на X. На основании леммы 4.10, используя локальную ограниченность оператора A (лемма 1.2), находим

$$F(u) \leqslant F(u_n) \leqslant F(u) + \langle Au_n - f, \quad u_n - u \rangle \leqslant$$
$$\leqslant F(u) + (\| Au_n \|_* + \| f \|_*) \| u_n - u \| \to F(u).$$

Лемма доказана.

5. НЕКОТОРЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ

Для того чтобы доказать сходимость приближенного метода к решению заданного операторного уравнения (с потенциальным оператором), мы существенно использовали в предыдущем пункте существование эквивалентной задачи минимизации. Привлечение этой эквивалентной задачи минимизации позволяет также получить эффективные оценки погрешности приближенных решений в предположении, что можно указать нижнюю границу для минимального значения минимизируемого функционала. В данном пункте мы получим такие границы с помощью так называемой взаимной, или двойственной, вариационной задачи. Прежде всего докажем некоторые нужные нам утверждения из теории двойственности выпуклых функционалов, восходящей к Фенхелю.

Всюду ниже F — функционал, определенный на рефлексивном банаховом пространстве X и принимающий значения, согласно принятой нами договоренности, в интервале $(-\infty, +\infty]$.

Определение 4.4. Множество $\operatorname{dom} F = \{x \mid x \in X, F(x) < +\infty\}$ называется *эффективной областью определения* (или просто *эффективной областью*) функционала F

Если функционал F нетривиален, то функционал F^*, определенный на X^* по правилу

$$F^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\langle x^*, x \rangle - F(x)), \tag{4.11}$$

называется *сопряженным* к F.

Мы покажем (см. теорему 4.7), что правило (4.11) устанавливает взаимно однозначное соответствие между слабо полунепрерывными выпуклыми функционалами, определенными на X

и X^*. В качестве подготовки к этому докажем следующие леммы.

Лемма 4.16. Справедливо неравенство

$$F(x)+F^*(x^*)\geqslant\langle x^*, x\rangle \quad \forall x\in X, \quad \forall x^*\in X^*.$$

Доказательство. В силу (4.11),

$$F(x)+F^*(x^*)=F(x)+\sup_{y\in X}(\langle x^*, y\rangle-F(y))\geqslant$$
$$\geqslant F(x)+\langle x^*, x\rangle-F(x)=\langle x^*, x\rangle,$$

чем лемма и доказана.

Лемма 4.17. Для любого функционала F сопряженный к нему функционал F^* выпукл и слабо полунепрерывен снизу.

Доказательство. 1. Выпуклость. Пусть $F^*(x^*)\leqslant a$, $F^*(y^*)\leqslant b$. Тогда для $t\in[0, 1]$ и $x_t^*=tx^*+(1-t)y^*$ имеем

$$F^*(x_t^*)=\sup_{x\in X}(\langle x_t^*, x\rangle-F(x))\leqslant$$
$$\leqslant t\sup_{x\in X}(\langle x^*, x\rangle-F(x))+(1-t)\sup_{x\in X}(\langle y^*, x\rangle-F(x))=$$
$$=tF^*(x^*)+(1-t)F^*(y^*)\leqslant ta+(1-t)b.$$

2. Слабая полунепрерывность снизу. Пусть $\{\{x_n^*, d_n\}\}\subset X^*\times R^1$ — такая последовательность, что

$$F^*(x_n^*)\leqslant d_n, \quad x_n^*\rightharpoonup x^* \text{ в } X^*, \quad d_n\to d.$$

Нам надо показать, что $F^*(x^*)\leqslant d$. Допустим, что $F^*(x^*)=d+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Тогда существует такое $x\in X$, что $\langle x^*, x\rangle-F(x)\geqslant d+\varepsilon/2$. Поэтому

$$F^*(x_n^*)=\sup_{y\in X}(\langle x_n^*, y\rangle-F(y))\geqslant\langle x_n^*, x\rangle-F(x)=$$
$$=\langle x^*, x\rangle-F(x)+\langle x_n^*-x^*, x\rangle\geqslant d+\frac{\varepsilon}{2}+\langle x_n^*-x^*, x\rangle$$

и

$$d=\lim_{n\to\infty}d_n\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}F^*(x_n^*)\geqslant\lim_{n\to\infty}\Big(d+\frac{\varepsilon}{2}+\langle x_n^*-x^*, x\rangle\Big)=d+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.18. Пусть F — слабо полунепрерывный снизу выпуклый нетривиальный функционал. Тогда и функционал F^* нетривиален.

Доказательство. Согласно предположениям леммы существует такое $x \in X$, что $F(x) < +\infty$. Отсюда вытекает, что

$$F^*(x^*) = \sup_{y \in X} (\langle x^*, y\rangle - F(y)) \geqslant \langle x^*, x\rangle - F(x) > -\infty \qquad \forall x^* \in X^*.$$

В силу леммы 4.7, для любого $d > 0$ существует такое $x^* \in X^*$, что

$$F(y) \geqslant F(x) + \langle x^*, y - x\rangle - d \qquad \forall y \in X.$$

Для этого x^* имеем

$$F^*(x^*) = \sup_{y \in X} (\langle x^*, y\rangle - F(y)) \leqslant \langle x^*, x\rangle - F(x) + d < +\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.19. Если F — слабо полунепрерывный снизу выпуклый нетривиальный функционал, то

$$\operatorname{dom} F^{**} \subset \overline{\operatorname{dom} F}.$$

Доказательство. Пусть $x \notin \overline{\operatorname{dom} F}$. Множество $\overline{\operatorname{dom} F}$ выпукло и замкнуто. Поэтому, согласно теореме 5.6 гл. I, существует такое $x_0^* \in X^*$, что

$$\langle x_0^*, x\rangle > \sup_{y \in \overline{\operatorname{dom} F}} \langle x_0^*, y\rangle.$$

Так как по лемме 4.18 функционал F^* нетривиален, то существует x_1^*, такое, что $F^*(x_1^*) < \infty$. Следовательно, для любого $t > 0$

$$F^*(x_1^* + tx_0^*) = \sup_{y \in X} (\langle x_1^* + tx_0^*, y\rangle - F(y)) \leqslant F^*(x_1^*) + t \sup_{y \in \overline{\operatorname{dom} F}} \langle x_0^*, y\rangle$$

и потому

$$F^{**}(x) \geqslant \langle x_1^* + tx_0^*, x\rangle - F^*(x_1^* + tx_0^*) \geqslant$$
$$\geqslant \langle x_1^*, x\rangle - F^*(x_1^*) + t\Big(\langle x_0^*, x\rangle - \sup_{y \in \overline{\operatorname{dom} F}} \langle x_0^*, y\rangle\Big) \to +\infty$$
$$\text{при} \quad t \to +\infty.$$

Отсюда вытекает, что $x \notin \operatorname{dom} F^{**}$. Итак, $\operatorname{dom} F^{**} \subset \overline{\operatorname{dom} F}$. Лемма доказана.

Теорема 4.7 (Фенхель, Моро). *Если F — нетривиальный функционал, то следующие утверждения эквивалентны:*

a) *F слабо полунепрерывен снизу и выпукл;*

b) $F = F^{**}$.

Доказательство. a)$\Rightarrow$b). Прежде всего, на основании леммы 4.16,

$$F^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*} (\langle x^*, x\rangle - F^*(x^*)) \leqslant \sup_{x^* \in X^*} F(x) = F(x).$$

Остается показать, что $F^{**}(x) \geqslant F(x)$ для каждого $x \in X$. Для $x \notin \operatorname{dom} F^{**}$ это соотношение, очевидно, выполняется. Итак, пусть $x \in \operatorname{dom} F^{**}$. Допустим, что $F(x) > F^{**}(x)$. Тогда $\{x, F^{**}(x)\} \notin \operatorname{epi} F$. Следовательно, по теореме 5.6 гл. I, существует пара $\{x^*, a^*\} \in X^* \times R^1$, такая, что

$$\langle x^*, x\rangle + a^* F^{**}(x) > \sup_{\{y, a\} \in \operatorname{epi} F} (\langle x^*, y\rangle + a^* a)$$

(множество $\operatorname{epi} F$ в силу a) выпукло и замкнуто). Мы утверждаем, что при этом обязательно $a^* < 0$. Действительно, если $a^* = 0$, то $\langle x^*, x\rangle > \sup\limits_{y \in \operatorname{dom} F} \langle x^*, y\rangle$, что ввиду включения $x \in \overline{\operatorname{dom} F}$ (лемма 4.19) приводит к противоречию. Если же предположить, что $a^* > 0$, то

$$\langle x^*, x\rangle + a^* F^{**}(x) > +\infty,$$

и ввиду включения $x \in \operatorname{dom} F^{**}$ мы снова приходим к противоречию. Без ограничения общности мы можем считать, что $a^* = -1$. Тогда

$$\langle x^*, x\rangle - F^{**}(x) > \sup_{\{y, a\} \in \operatorname{epi} F} (\langle x^*, y\rangle - a) = \sup_{y \in \operatorname{dom} F} (\langle x^*, y\rangle - F(y)) =$$
$$= \sup_{y \in X} (\langle x^*, y\rangle - F(y)) = F^*(x^*).$$

Но согласно лемме 4.16 этого быть не может. Следовательно, должно выполняться неравенство $F^{**}(x) \geqslant F(x)$, и, значит, $F^{**}(x) = F(x)$. b) $\Rightarrow$ a). Функционал F^{**} как сопряженный к F^* является на основании леммы 4.17 слабо полунепрерывным снизу и выпуклым. Теорема доказана.

Теорема 4.8. *Пусть F — слабо полунепрерывный снизу выпуклый конечный функционал. Если оператор $A \in (X \to X^*)$ обладает обратным оператором $A^{-1} \in (X^* \to X)$, то следующие утверждения эквивалентны:*

a) *A — градиент для F;*

b) *A радиально непрерывен и для любых $x, y \in X$*

$$F(x) + F^*(Ax) = \langle Ax, x\rangle, \qquad F(y) \geqslant F(x) + \langle Ax, y - x\rangle;$$

c) *A^{-1} радиально непрерывен и для любых $x^*, y^* \in X^*$*

$$F(A^{-1}x^*) + F^*(x^*) = \langle x^*, A^{-1}x^*\rangle, \quad F^*(y^*) \geqslant F^*(x^*) + \langle y^* - x^*, A^{-1}x^*\rangle;$$

d) *A^{-1} — градиент для F^*.*

Доказательство. a) $\Rightarrow$ b). Радиальная непрерывность оператора A следует из леммы 4.12. Второе соотношение в b) справедливо как идентичное соотношению d) леммы 4.10. Используя его, получаем, что для каждого $x \in X$

$$F(x) + F^*(Ax) = F(x) + \sup_{y \in X} (\langle Ax, y\rangle - F(y)) \leqslant$$
$$\leqslant F(x) + \sup_{y \in X} (\langle Ax, x\rangle - F(x)) = \langle Ax, x\rangle,$$

а с другой стороны, по лемме 4.16

$$F(x) + F^*(Ax) \geqslant \langle Ax, x\rangle.$$

b) $\Rightarrow$ c). Для любых $x, y \in X$

$$F(y) - F(x) \geqslant \langle Ax, y - x\rangle$$

и соответственно

$$F(x) - F(y) \geqslant \langle Ay, x - y\rangle.$$

Складывая эти неравенства, убеждаемся в монотонности A и одновременно в монотонности A^{-1}. Докажем радиальную непрерывность A^{-1}. Согласно лемме 1.3 для этого достаточно показать, что из соотношения

$$\langle x^* - y^*, x - A^{-1}y^*\rangle \geqslant 0 \quad \forall y^* \in X^*$$

вытекает, что $A^{-1}x^* = x$. Подставив в это соотношение $y^* = Ay$, найдем, что

$$\langle x^* - Ay, x - y\rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in X.$$

Так как A радиально непрерывен и монотонен, то отсюда по лемме 1.3 следует равенство $Ax = x^*$, а тем самым и равенство $A^{-1}x^* = x$.

Первое соотношение п. c) получается, если подставить $x = A^{-1}x^*$ в первое соотношение п. b). Для доказательства второго из соотношений п. c) положим $x = A^{-1}x^*$, $y = A^{-1}y^*$ при произвольных $x^*, y^* \in X^*$. Имеем

$$F^*(y^*) - F^*(x^*) = -F(y) + F(x) - \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle =$$
$$= -F(y) + F(x) - \langle Ay, x - y\rangle + \langle Ay - Ax, x\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \langle Ay - Ax, x\rangle = \langle y^* - x^*, A^{-1}x^*\rangle.$$

c) $\Rightarrow$ d). Меняя местами x^* и y^* во втором соотношении п. c), приходим к неравенству

$$F^*(x^*) \geqslant F^*(y^*) + \langle x^* - y^*, A^{-1}y^*\rangle.$$

Поэтому

$$\langle y^* - x^*, A^{-1}x^*\rangle \leqslant F^*(y^*) - F^*(x^*) \leqslant \langle y^* - x^*, A^{-1}y^*\rangle.$$

Положим $y^* = x^* + tz^*$, $t > 0$, $z^* \in X^*$. Тогда

$$\langle z^*, A^{-1}x^*\rangle \leqslant \frac{F^*(x^*+tz^*) - F^*(x^*)}{t} \leqslant \langle z^*, A^{-1}(x^*+tz^*)\rangle.$$

При $t \to 0$ получаем отсюда на основании радиальной непрерывности A^{-1}, что A^{-1} — градиент функционала F^*.

d)$\Rightarrow$a). Функционал F^* как потенциал для A^{-1} конечен и по лемме 4.17 слабо полунепрерывен снизу и выпукл. Поэтому, ввиду импликации a)$\Rightarrow$d), оператор $A = (A^{-1})^{-1}$ является градиентом для F^{**}. Но в силу теоремы 4.7, $F = F^{**}$. Следовательно, A — градиент для F. Теорема доказана.

Следствие 4.6. Если оператор $A \in (X \to X^*)$ обладает обратным оператором $A^{-1} \in (X^* \to X)$, то следующие утверждения эквивалентны:

a) A — монотонный потенциальный оператор;

b) A^{-1} — монотонный потенциальный оператор.

Доказательство. Ввиду симметричности утверждений относительно A и A^{-1} достаточно показать, что a)$\Rightarrow$b). Очевидно, оператор A^{-1} монотонен вместе с A. Потенциал F оператора A конечен и по лемме 4.10 выпукл и слабо полунепрерывен снизу. Поэтому в силу утверждения d) теоремы 4.8 оператор A^{-1} является градиентом для F^*.

Теорема 4.9. *Пусть $A \in (X \to X^*)$ — строго монотонный коэрцитивный потенциальный оператор. Тогда существует обратный к A оператор $A^{-1} \in (X^* \to X)$. Он строго монотонен и потенциален. Далее, функционал*

$$F(x) = \int_0^1 \langle Atx, x\rangle\, dt$$

является потенциалом для A и при любых $x \in X$, $x^* \in X^*$ выполняются соотношения

$$F^*(x^*) = F^*(0) + \int_0^1 \langle x^*, A^{-1}tx^*\rangle\, dt, \qquad F^*(0) = -F(A^{-1}0), \tag{4.12}$$

$$F(x) + F^*(x^*) - \langle x^*, x\rangle \geqslant 0, \tag{4.13}$$

$$F(x) + F^*(Ax) - \langle Ax, x\rangle = 0. \tag{4.14}$$

Доказательство. В силу леммы 4.12 и теоремы 2.2, оператор $A^{-1} \in (X^* \to X)$ существует, радиально непрерывен и строго монотонен. Оператор A является градиентом слабо полунепрерывного снизу выпуклого и конечного функционала $F(x) =$

$= \int_0^1 \langle Atx, x\rangle dt$ (см. лемму 4.12, замечание 4.1, лемму 4.10 и следствие 4.1). Поэтому, ввиду теоремы 4.8, A^{-1} представляет собой градиент сопряженного к F функционала F^*. Согласно замечанию 4.1,

$$F^*(x^*) = F^*(0) + \int_0^1 \langle x^*, A^{-1}tx^*\rangle dt.$$

Соотношение (4.13) было установлено в лемме 4.16. Равенство (4.14) имеет место по теореме 4.8 (утверждение b)). Наконец, из (4.14) следует, что $F^*(0) = -F(A^{-1}0)$. Теорема доказана.

Обратимся теперь к нашей главной цели — доказательству одного утверждения двойственности (теорема 4.10) и основанному на нем выводу оценок погрешности (теорема 4.11). Рассмотрим опять уравнение

$$Ax = f, \qquad A = L^*A_0L, \qquad f \in X^*. \tag{4.15}$$

Пусть снова (ср. с леммой 1.4) $L \in (X \to Y)$ — линейный оператор, такой, что $\|Lx\|_0 = \|x\|$ для $x \in X$, $L^* \in (Y^* \to X^*)$ — сопряженный к L оператор и $A_0 \in (Y \to Y^*)$ — (вообще говоря) нелинейный оператор.

Лемма 4.20. Для каждого $f \in X^*$ существует такое $g \in Y^*$, что

$$L^*g = f. \tag{4.16}$$

Доказательство. Рассмотрим линейное подпространство $Y_1 = \{y \mid y = Lx, x \in X\}$ пространства Y. Определим на Y_1 линейный функционал g_0 с помощью соотношения

$$\langle g_0, Lx\rangle_{Y_1} = \langle f, x\rangle.$$

(В силу условия $\|Lx\|_0 = \|x\|$, это определение корректно.)

Согласно теореме Хана — Банаха, для g_0 существует продолжение g на Y. Имеем

$$\langle L^*g, x\rangle = \langle g, Lx\rangle_0 = \langle g_0, Lx\rangle_{Y_1} = \langle f, x\rangle \qquad \forall x \in X,$$

следовательно, $L^*g = f$. Лемма доказана.

Замечание 4.18. Во многих случаях эффективное построение $g \in Y^*$ по заданному $f \in X^*$ достаточно просто. Пусть, например (см. § 2 гл. II),

$$X = \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(G), \qquad p \geqslant 2, \qquad Y = L_n^p(G), \qquad Y^* = L_n^q(G), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L = \operatorname{grad}, \qquad L^* = -\operatorname{div}.$$

Для $f \in L^2(G) \subset X^*$ при соответствующих предположениях относительно области G можно положить

$$g = \left\{ -\int_0^{x_1} f(t, x_2, \ldots, x_n)\, dt,\ 0, \ldots, 0 \right\}.$$

Теорема 4.10. *Пусть A_0 — строго монотонный коэрцитивный потенциальный оператор. Пусть, далее, $g \in Y^*$ — некоторый элемент, удовлетворяющий условию* (4.16), *и $x_0 \in X$ — (на основании лемм* 4.12 *и* 1.4 *и теоремы* 2.2 *однозначно определенное) решение уравнения* (4.15). *Тогда в обозначениях*

$$K = \{y \mid y = Lx,\ x \in X\}, \qquad K^* = \{y^* \mid L^* y^* = 0\};$$

$$y_0 = Lx_0, \qquad y_0^* = A_0 y_0 - g;$$

$$\Phi(y) = \int_0^1 \langle A_0 t y, y \rangle_0\, dt - \langle g, y \rangle_0,$$

$$\Psi(y^*) = -\int_0^1 \langle g + y^*, A_0^{-1} t (g + y^*) \rangle_0\, dt + \int_0^1 \langle A_0 t A_0^{-1} 0, A_0^{-1} 0 \rangle_0\, dt$$

имеет место следующее соотношение двойственности:

$$\Phi(y_0) = \min_{y \in K} \Phi(y) = \max_{y^* \in K^*} \Psi(y^*) = \Psi(y_0^*). \tag{4.17}$$

Доказательство. Применим теорему 4.9 к A_0, воспользовавшись при этом соотношением

$$\langle y^*, y \rangle_0 = \langle y^*, Lx \rangle_0 = \langle L^* y^*, x \rangle = 0 \qquad \forall y \in K, \quad \forall y^* \in K^*.$$

Пусть $F_0(y) = \int_0^1 \langle A_0 t y, y \rangle_0\, dt$ и F_0^* — сопряженный функционал. На основании (4.12)

$$F_0^*(y^*) = \int_0^1 \langle y^*, A_0^{-1} t y^* \rangle_0\, dt - \int_0^1 \langle A_0 t A_0^{-1} 0, A_0^{-1} 0 \rangle_0\, dt = -\Psi(y^* - g).$$

Поэтому, используя (4.13), получаем

$$\Phi(y) - \Psi(y^*) = F_0(y) - \langle g, y \rangle_0 + F_0^*(g + y^*) =$$
$$= F_0(y) + F_0^*(g + y^*) - \langle g + y^*, y \rangle_0 \geqslant 0 \qquad \forall y \in K, \quad \forall y^* \in K^*.$$

С другой стороны, из (4.14) вытекает, что

$$\begin{aligned}\Phi(y_0)-\Psi(y_0^*) &= F_0(y_0)-\langle g, y_0\rangle_0+F_0^*(g+y_0^*)=\\ &= F_0(y_0)+F_0^*(g+y_0^*)-\langle g+y_0^*, y_0\rangle_0=\\ &= F_0(y_0)+F_0^*(A_0y_0)-\langle A_0y_0, y_0\rangle_0=0.\end{aligned}$$

Из этих двух соотношений и следует наше утверждение. Теорема доказана.

Теорема 4.11. *Пусть в дополнение к предположениям теоремы* 1.10 *оператор* A_0 *сильно монотонен с постоянной монотонности* m. *Тогда, в обозначениях теоремы* 4.10, *имеет место оценка погрешности*

$$\|x-x_0\|=\|y-y_0\|_0\leqslant\sqrt{\frac{2}{m}(\Phi(y)-\Psi(y^*))}. \tag{4.18}$$

Здесь $x\in X$, $y=Lx\in K$, $y^*\in K^*$ — *произвольные приближения для* x_0, y_0, y_0^* *соответственно.*

Если сверх того оператор A_0^{-1} *сильно монотонен с постоянной монотонности* m^*, *то справедлива также двойственная оценка погрешности*

$$\|y^*-y_0^*\|_{0*}\leqslant\sqrt{\frac{2}{m^*}(\Phi(y)-\Psi(y^*))}. \tag{4.19}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi(y)-\Phi(y_0) &= \int_0^1\langle A_0(y_0+t(y-y_0)), y-y_0\rangle_0\,dt-\langle f, x-x_0\rangle=\\ &= \int_0^1\langle A_0(y_0+t(y-y_0)), y-y_0\rangle_0\,dt-\langle A_0y_0, y-y_0\rangle_0=\\ &= \int_0^1\langle A_0(y_0+t(y-y_0))-A_0y_0, t(y-y_0)\rangle_0\frac{dt}{t}\geqslant\\ &\geqslant m\|y-y_0\|_0^2\int_0^1 t\,dt=\frac{m}{2}\|y-y_0\|_0^2,\end{aligned}$$

так что вследствие (4.17)

$$\|x-x_0\|=\|y-y_0\|_0\leqslant\sqrt{\frac{2}{m}(\Phi(y)-\Phi(y_0))}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{2}{m}(\Phi(y)-\Psi(y^*))}.$$

Далее,

$$\Psi(y_0^*) - \Psi(y^*) = F_0^*(g + y^*) - F_0^*(g + y_0^*) =$$

$$= \int_0^1 \langle y^* - y_0^*, A_0^{-1}(g + y_0^* + t(y^* - y_0^*))\rangle_0 \, dt -$$

$$- \int_0^1 \langle y^* - y_0^*, A_0^{-1}(g + y_0^*)\rangle_0 \, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle t(y^* - y_0^*), A_0^{-1}(g + y_0^* + t(y^* - y_0^*)) - A_0^{-1}(g + y_0^*)\rangle_0 \frac{dt}{t} \geqslant$$

$$\geqslant m^* \| y^* - y_0^* \|_{0*}^2 \int_0^1 t \, dt = \frac{m^*}{2} \| y^* - y_0^* \|_{0*}^2,$$

откуда в силу того же соотношения двойственности (4.17) следует оценка (4.19). Теорема доказана.

Замечание 4.19. В оценки (4.18) и (4.19) входит обратный к A_0 оператор A_0^{-1}. В отличие от A^{-1} он в важных приложениях либо бывает известен, либо сравнительно просто может быть найден. Так, оператор A_0^{-1}, обратный к потенциальному оператору A_0, определенному формулами (1.3) и (1.4) (соотв. (1.3) и (1.5)), получается обращением матрицы коэффициентов (b_{ij}) (соотв. характеризующей материал функции φ).

Замечание 4.20. На практике во многих конкретных краевых задачах самостоятельный интерес представляют не только решение x_0 уравнения (4.15), соответственно элемент $y_0 = Lx_0$, но также и элемент $y_0^* = A_0 y_0 - g$, а зачастую допускают физическую интерпретацию и функционалы Φ, Ψ, равно как и множества K, K^*. Поэтому имеет смысл одновременно вычислять приближения y_n для y_0 и y_n^* для y_0^* и оценивать их при помощи (4.18) и (4.19). Для численного нахождения таких приближений годятся методы, обсуждавшиеся в предыдущем пункте. На основании леммы 4.15, из сильной сходимости этих методов следует, что $\Phi(y_n) - \Psi(y_n^*) \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание 4.21. Из сильной монотонности оператора A можно для любого приближения x_n к x_0 сразу вывести оценку погрешности

$$\| x_n - x_0 \| \leqslant \frac{1}{m} \| Ax_n - f \|_*, \tag{4.20}$$

но вычисление выражения $\|Ax_n - f\|_*$ практически приводит к решению уравнения $Ju = Ax_n - f$. (При этом $\|Ax_n - f\|_* = \|u\|$.)

Правда, в часто встречающемся случае тройки пространств $X \subset H \subset X^*$ (см. § 6 гл. I и § 2 гл. II) можно, если $Ax_n - f$ принадлежит H, огрубить оценку (4.20) следующим образом:

$$\| x_n - x_0 \| \leqslant \frac{c}{m} \| Ax_n - f \|_H,$$

и тем самым прийти к оценке погрешности, получаемой в конкретных случаях при помощи квадратур; однако из того, что $x_n \to x_0$ в X, не следует, вообще говоря, что $\|Ax_n - f\|_H \to 0$.

Замечание 4.22. Пусть, в частности, Y — гильбертово пространство, $Y^* = Y$ и A_0 — тождественный оператор в Y. Очевидно, в этом случае y_0 можно охарактеризовать как решение задачи минимизации

$$\| g - y_0 \|_0 = \min_{y \in K} \| g - y_0 \|_0,$$

а y_0^* — как решение задачи минимизации

$$\| g + y_0^* \|_0 = \min_{y^* \in K^*} \| g + y^* \|_0.$$

Это означает, что y_0 является проекцией элемента g на K, а $-y_0^*$ — проекцией g на K^*. При подстановке вместо y (соотв. вместо y^*) приближений Ритца y_n (соотв. y_n^*) для y_0 (соотв. для y_0^*) оценка (4.18) сводится к известной оценке погрешности для *метода ортогональных проекций* (см. Михлин [2]).

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛ. III

Используемое нами понятие монотонности было введено в работах Вайнберга и Качуровского [1], Качуровского [1], Минти [1, 2], Сарантонелло [1] и других авторов (см. обзорные статьи Качуровского [2] и Минти [3]). Существенное обобщение понятия монотонности дал Брезис [1]. А именно, Брезис называет оператор $A \in (X \to X^*)$ *псевдомонотонным*, если выполняются следующие условия.

a) оператор A ограничен;

b) из соотношений $u_n \rightharpoonup u$ в X и $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leqslant 0$ следует, что $\underline{\lim_{n\to\infty}} \langle Au_n, u_n - v\rangle \geqslant \langle Au, u - v\rangle$ $\forall v \in X$.

В качестве примера псевдомонотонного оператора укажем сумму $B + T$ радиально непрерывного монотонного ограниченного оператора $B \in (X \to X^*)$ и усиленно непрерывного оператора $T \in (X \to X^*)$. Конкретные примеры псевдомонотонных операторов получаются путем энергетического расширения эллиптических дифференциальных операторов, у которых условиям монотонности удовлетворяют лишь функции a_α, соответствующие высшим производным (см. Лерэ и Лионс [1], Лионс [1]). В то время как теоремы существования для уравнений с псевдомонотонными операторами доказываются тем же методом, что и теорема 2.1, теоремы единственности для таких уравнений в общем случае установить не удается.

Интересующихся дальнейшими обобщениями понятия монотонности отсылаем к работе Браудера и Хесса [1]. В указанных до сих пор работах уравнения с монотонными операторами рассматриваются в рефлексивных пространствах. Однако имеются результаты и по теории монотонных операторов в нерефлексивных пространствах (см., например, Брезис и Браудер [1]).

В этой главе существенную роль играло дуализующее отображение $J \in (X \to X^*)$ для банахова пространства X. Дуализующие отображения были введены Бёрлингом и Ливингстоном [1] и впервые явно использованы при исследовании нелинейных операторных уравнений Браудером [7] [1]). В гл. I мы определили отображение двойственности J для банаховых пространств X, которые обладают строго выпуклым сопряженным X^*. Его можно определить и для произвольных банаховых пространств, правда как, вообще говоря, многозначное отображение. Впрочем, ограничение банаховыми пространствами X со строго выпуклыми сопряженными X^* не является существенным, поскольку, как показал Асплунд [1], в каждом рефлексивном банаховом пространстве X можно ввести эквивалентную исходной норму таким образом, чтобы X стало строго выпуклым относительно новой нормы, а X^* — строго выпуклым относительно сопряженной с ней нормы.

Лемма 1.1 установлена Качуровским [1]. Лемма 1.2 представляет собой частный случай одного результата, полученного Рокафелларом [1]. Эквивалентность понятий хеминепрерывности и деминепрерывности для монотонных операторов была доказана Като [3]. Лемма 1.3 является обобщением этого результата. Операторы, удовлетворяющие условию c) леммы 1.3, Лионс [1] называет *операторами типа M*. Каждый псевдомонотонный оператор есть оператор типа M (см. Лионс [1]).

Мы ограничились немногими, однако типичными примерами монотонных операторов (см. леммы 1.4—1.6). Глубокие применения теории монотонных операторов к нелинейным эллиптическим краевым задачам можно найти у Браудера [2, 8] и Лионса [1]. Читателям, интересующимся применениями теории монотонных операторов к нелинейным интегральным уравнениям, порекомендуем работы Браудера [12], Вайнберга [3], Брезиса и Браудера [1] и указанную там литературу.

Теорема 2.1 была доказана Браудером [2] и Минти [2] (У этих авторов вместо радиальной непрерывности используется формально более сильное предположение хеминепрерывности.) Результаты, подобные теореме 2.2, можно найти, например, у Качуровского [2]. Максимальные монотонные операторы были введены Минти [1], правда лишь для случая, когда X — гильбертово пространство. Максимальные монотонные операторы в рефлексивных банаховых пространствах впервые рассмотрел Браудер [10], а позднее ими занимались Брезис [2], Брезис, Крэндалл и Пэйзи [1], а также Рокафеллар [1, 2]. Теорема 2.3 была сформулирована Браудером [10] без предположений радиальной непрерывности Λ и линейности $D(\Lambda)$. Систематическое изложение теории максимальных монотонных операторов имеется у Брезиса [5], Барбу [1] и Паскали [1].

Утверждения о сходимости метода Галёркина, содержащиеся в теоремах 3.1—3.3, доказывались различными авторами. Сошлемся в этой связи на обзорную статью Качуровского [2] и работы Петришина [1] и Варги [1]. Итерационным методам решения нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве были посвящены многочисленные исследования; интересующихся отсылаем к обзорной статье Браудера и Петришина [1]. Там можно найти и лемму 3.1, лежащую в основе теорем 3.4 и 3.5. Лемма 3.2 принадлежит Гаевскому [1]. Литература по проекционно-итерационному методу приведена в обзорной статье Гаевского и Клуге [1]. Теорема 3.7 представляет собой частный результат о регуляризации. Обстоятельное изложение различных регуляризационных методов и их применений имеется у Лионса [1, 2].

---

[1]) См также Вайнберг [2]. — *Прим ред.*

Исследование нелинейных операторных уравнений вариационными методами восходит к Вайнбергу [1]. Отметим в этой связи также работы Лангенбаха [1, 2] и Качуровского [1]. В книге Вайнберга [2] читатель найдет многие из результатов, содержащихся в первых четырех пунктах § 4. Исключение составляют леммы 4.3, 4.4, 4.12 и 4.14, а также теоремы 4.4—4.6, которые в приведенной их форме являются новыми.

Теория двойственности выпуклых функционалов восходит к Фенхелю [1] и Моро [1] (см. также книгу Эклана и Темама [1], обзорную статью Иоффе и Тихомирова [1] и указанную там литературу). Теорема 4.7 была доказана для конечномерного случая Фенхелем [1] и перенесена на бесконечномерный случай Моро [1]. Теорема 4.8 — это частный случай одного общего результата Моро [2] о субградиентах выпуклых функционалов. Теоремы 4.10 и 4.11 являются обобщениями соответствующих результатов Бигтнера [1, 2]. Доказанные в теореме 4.11 оценки называют *апостериорными* оценками погрешности. Дальнейшие утверждения об апостериорных оценках имеются у Обэна [1] и Гаевского и Грёгера [3].

В последние годы возникла теория, которая охватывает как теорию выпуклых функционалов, так и теорию монотонных операторов. В этой *теории вариационных неравенств* изучаются задачи следующего вида (вариационные неравенства): найти такое $u \in K$, для которого бы выполнялось условие

$$\langle Au - f,\ v - u\rangle + F(v) - F(u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in K.$$

Здесь $K \subset X$ — произвольное, как правило замкнутое выпуклое, подмножество банахова пространства X, $f \in X^*$ — заданный элемент, $A \in (X \to X^*)$ — монотонный или, более общим образом, псевдомонотонный оператор и F — некоторый, как правило выпуклый, функционал. Так как применение результатов этой теории для рассматриваемых в настоящей книге операторных уравнений никаких упрощений не приносит, мы вариационные неравенства не рассматриваем. Читателей, которые ими заинтересуются, отошлем к работам Лионса [1, 2], Дюво и Лионса [1], Клуге [1] и указанной там литературе.

ГЛАВА IV

ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ С КРАЕВЫМИ И НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Эта глава играет ту же роль для операторных дифференциальных уравнений, что гл. II — для операторных уравнений. И состоит она тоже из двух параграфов.

В § 1 мы вводим функциональные пространства, которые используются в следующей главе при исследовании нестационарных задач. Кроме того, в § 1 указываются важные для дальнейшего свойства этих пространств, причем в отличие от § 1 гл. II изложение ведется с подробными доказательствами, так как обсуждаемые пространства в учебниках по функциональному анализу в большинстве случаев не рассматриваются.

В § 2 мы показываем, как можно формулировать задачи с краевыми и начальными условиями для параболических дифференциальных уравнений в виде задач с начальными условиями для операторных дифференциальных уравнений в выбранных подходящим образом банаховых пространствах. Помимо этого, в § 2 дается обзор типов операторных дифференциальных уравнений, которые будут рассмотрены в гл. V—VII.

§ 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

Если нужно описать некоторый нестационарный процесс, протекающий в пространственной области G в течение интервала времени S, то можно работать с функциями времени и положения, т. е. с функциями u, которые ставят в соответствие каждой паре $\{t, x\} \in S \times G$ вещественное число или вектор $u(t, x)$. При таком подходе время и пространство выступают совершенно равноправно. Оказывается, однако, что значительно удобнее другой подход к математическому описанию нестационарных процессов. При этом другом подходе работают с функциями времени, которые каждому моменту времени t ставят в соответствие функцию $u(t, \cdot)$ положения. (Например, каждому моменту времени ставится в соответствие распределение температуры или распределение скорости в области G.) Таким образом, рассматриваются функции, определенные на временно́м интервале S, со значениями в некотором пространстве функций положения (например, в пространстве $H_0^1(G)$ или каком-нибудь другом из введенных в § 1 гл. II пространств).

До конца этого параграфа S обозначает (ограниченный или неограниченный) интервал вещественной прямой R^1. Через $\{X, \|\cdot\|\}$ в первых четырех пунктах этого параграфа обозначается произвольное банахово пространство, а через $\{X^*, \|\cdot\|_*\}$ — сопряженное к нему пространство. Ниже мы используем эти обозначения без дополнительных пояснений.

Предыдущие замечания показывают, что при исследовании зависящих от времени задач целесообразно ввести в рассмотрение некоторые пространства функций из $(S \to X)$, в частности пространства дифференцируемых и интегрируемых функций.

1. ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 1.1. Функция $u \in (S \to X)$ называется *дифференцируемой в точке* $t \in S$, если существует такой элемент $x \in X$, для которого выполняется условие

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ t+h \in S}} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - x \right\| = 0.$$

Этот элемент x называют *производной* от u *в точке* t и обычно обозначают через $u'(t)$.

Функция $u \in (S \to X)$ называется *дифференцируемой*, если она дифференцируема в каждой точке интервала S. Функцию $u' \in (S \to X)$, которая каждому $t \in S$ ставит в соответствие производную от u в точке t, называют *производной* от u.

Определение 1.2. Говорят, что функция $u \in (S \to X)$ *слабо дифференцируема в точке* $t \in S$, если существует элемент $x \in X$, для которого выполняется условие

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ t+h \in S}} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - x \right\rangle = 0 \qquad \forall f \in X^*.$$

Этот элемент x называется *слабой производной от* u *в точке* t и также обычно обозначается через $u'(t)$.

Функцию $u \in (S \to X)$ называют *слабо дифференцируемой*, если она слабо дифференцируема в каждой точке интервала S. Функция $u' \in (S \to X)$, которая каждому $t \in S$ ставит в соответствие слабую производную от u в точке t, называется *слабой производной* от u.

Замечание 1.1. Из определений 1.1 и 1.2 следует, что производная функции $u \in (S \to X)$, если она существует, одновременно является и слабой производной от u. Поэтому то, что мы обозначаем одним и тем же символом u' как производную, так и слабую производную функции $u \in (S \to X)$, не должно приводить к недоразумениям. Из контекста всегда будет ясно, о какой производной идет речь.

Замечание 1.2. Исходя из определений 1.1 и 1.2, можно обычным образом по индукции ввести понятия m-кратной дифференцируемости и m-кратной слабой дифференцируемости, m-*производной* и m-й слабой производной функции $u \in (S \to X)$.

Определение 1.3. Мы обозначаем через $C^m(S; X)$ множество всех функций из $(S \to X)$, обладающих непрерывными производными до порядка m включительно, и через $C^m_w(S; X)$ — множество всех функций из $(S \to X)$, обладающих деминепрерывными слабыми производными до порядка m включительно.

Замечание 1.3. Согласно определению 5.2 гл. I функция $u \in (S \to X)$ деминепрерывна тогда и только тогда, когда для каждого $f \in X^*$ непрерывна функция $\langle f, u(\cdot)\rangle \in (S \to R^1)$.

Замечание 1.4. Множество $C^0(S, X)$ — это множество всех непрерывных функций из $(S \to X)$, а $C^0_w(S; X)$ — множество всех деминепрерывных функций из $(S \to X)$. Эти множества мы записываем также как $C(S; X)$, соответственно $C_w(S; X)$.

Замечание 1.5. Если $u \in C^m_w(S, X)$, то

$$\langle f, u(\cdot)\rangle \in C^m(S) \qquad \forall f \in X^*.$$

Если X слабо полно, то верно и обратное. При этом

$$\langle f, u^{(j)}(\cdot)\rangle = \frac{d^j}{dt^j}\langle f, u(\cdot)\rangle, \qquad j = 0, \ldots, m.$$

Теперь докажем лемму, которую позднее будем неоднократно использовать.

Лемма 1.1. Для $u \in C^1_w(S, X)$ при любых $s, t \in S$, $s < t$, имеем $\sup\limits_{s \leqslant \tau \leqslant t} \|u'(\tau)\| < \infty$ и

$$\|u(t) - u(s)\| \leqslant (t - s) \sup_{s \leqslant \tau \leqslant t} \|u'(\tau)\|. \tag{1.1}$$

Доказательство. Если бы верхняя грань $\sup\limits_{s \leqslant \tau \leqslant t} \|u'(\tau)\|$ не была конечной, то существовала бы последовательность $\{\tau_i\}$ точек из $[s, t]$, такая, что $\|u'(\tau_i)\| \to \infty$. Ввиду компактности интервала $[s, t]$ последовательность $\{\tau_i\}$ без ограничения общности можно было бы считать сходящейся. Тогда в силу деминепрерывности u' последовательность $\{u'(\tau_i)\}$ слабо сходилась бы в X. Но согласно теореме 5.5 гл. I, всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена. Итак, допущение, что верхняя грань $\sup\limits_{s\leqslant\tau\leqslant t}\|u'(\tau)\|$ не является конечной, приводит к противоречию. Для $u\in C^1_w(S;X)$ и $f\in X^*$ вещественная функция $\langle f, u(\cdot)\rangle$ непрерывно дифференцируема. Поэтому

$$
\begin{aligned}
|\langle f, u(t)-u(s)\rangle| &= |\langle f, u(t)\rangle - \langle f, u(s)\rangle| \leqslant \\
&\leqslant (t-s)\sup_{s\leqslant\tau\leqslant t}\left|\frac{d}{d\sigma}\langle f, u(\sigma)\rangle\Big|_{\sigma=\tau}\right| = (t-s)\sup_{s\leqslant\tau\leqslant t}|\langle f, u'(\tau)\rangle| \leqslant \\
&\leqslant (t-s)\sup_{s\leqslant\tau\leqslant t}\|f\|_*\|u'(\tau)\|,
\end{aligned}
$$

откуда и следует оценка (1.1). Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Если интервал S компактен, то множество $C^m(S;X)$, образующее линейное пространство с естественными линейными операциями, становится банаховым пространством при наделении его нормой*

$$\|u\|_{C^m(S;X)} = \sum_{j=0}^{m}\sup_{t\in S}\|u^{(j)}(t)\|. \tag{1.2}$$

Доказательство. По существу эта теорема доказывается точно так же, как и соответствующая теорема для пространства вещественнозначных функций То что для компактного S формула (1.2) определяет норму на $C^m(S;X)$, проверяется непосредственно. Остается доказать полноту. Пусть $\{u_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в $C^m(S;X)$. Из полноты X и определения нормы (1.2) следует, что при любых фиксированных j и t последовательность $\{u_n^{(j)}(t)\}$ имеет предел $v_j(t)\in X$. Для всякого $\varepsilon>0$ существует $N(\varepsilon)$, такое, что для $n>N(\varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
\|u_n^{(j)}(t)-v_j(t)\| &= \lim_{k\to\infty}\|u_n^{(j)}(t)-u_k^{(j)}(t)\| \leqslant \\
&\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\sup_{t\in S}\|u_n^{(j)}(t)-u_k^{(j)}(t)\| < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Следовательно, последовательность $\{u_n^{(j)}\}$ равномерно сходится к v_j. Функции $v_j\in(S\to X)$ непрерывны, что вытекает из оценки

$$\|v_j(t)-v_j(s)\| \leqslant \|v_j(t)-u_n^{(j)}(t)\| + \|u_n^{(j)}(t)-u_n^{(j)}(s)\| + \|u_n^{(j)}-v_j(s)\|,$$

непрерывности $u_n^{(j)}$ и только что установленной равномерной сходимости $u_n^{(j)}$ к v_j.

Покажем теперь, что $v_j = v_0^{(j)}$. Согласно (1.1), имеем

$$\|u_n(t)-u_k(t)-(u_n(s)-u_k(s))\| \leqslant |t-s|\sup_{\tau\in S}\|u_n'(\tau)-u_k'(\tau)\|.$$

Отсюда при $n \to \infty$ получаем

$$\| v_0(t) - v_0(s) - (u_k(t) - u_k(s)) \| \leqslant |t-s| \sup_{\tau \in S} \| v_1(\tau) - u_k'(\tau) \|.$$

Поэтому при любом $s \in S$

$$\varlimsup_{t \to s} \left\| \frac{v_0(t) - v_0(s)}{t-s} - v_1(s) \right\| \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} \varlimsup_{t \to s} \left\{ \left\| \frac{v_0(t) - v_0(s) - (u_k(t) - u_k(s))}{t-s} \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{u_k(t) - u_k(s)}{t-s} - v_1(s) \right\| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{k \to \infty} 2 \sup_{\tau \in S} \| v_1(\tau) - u_k'(\tau) \| = 0.$$

Таким образом, функция v_0 дифференцируема и $v_0' = v_1$. Аналогично доказывается, что и $v_{j-1}' = v_j$, $j = 2, \ldots, m$. Итак, фундаментальная последовательность $\{u_n\}$ имеет предел $v_0 \in C^m(S; X)$. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть интервал S компактен. Если в множестве $C_w^m(S; X)$, рассматриваемом как линейное пространство с естественными линейными операциями, задать топологию при помощи полунорм*

$$p_{f,j}(u) = \sup_{t \in S} |\langle f, u^{(j)}(t) \rangle|, \qquad f \in X^*, \qquad j = 0, \ldots, m, \tag{1.3}$$

то оно превращается в локально выпуклое пространство. Если X слабо полно, то это локально выпуклое пространство полно. (См. определения 4.1 и 4.2 гл. I, а также замечания 4.2 и 4.8 гл. I).

Доказательство. То что в случае компактного S формула (1.3) определяет полунормы на $C_w^m(S; X)$, проверяется непосредственно. Если $p_{f,0}(u) = 0$ для каждого $f \in X^*$, то $u = 0$, поэтому семейство полунорм (1.3) годится для задания топологии в $C_w^m(S; X)$. При этом последовательность $\{u_n\}$ в $C_w^m(S; X)$ сходится в этой топологии к функции u тогда и только тогда, когда при любом $f \in X^*$ последовательность функций $\langle f, u_n(\cdot) \rangle$ сходится в $C^m(S)$ к $\langle f, u(\cdot) \rangle$.

Пусть теперь X слабо полно и $\{u_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в $C_w^m(S; X)$, т. е. такая последовательность, что

$$\lim_{n, k \to \infty} \sup_{t \in S} \left| \langle f, u_n^{(j)}(t) - u_k^{(j)}(t) \rangle \right| = 0$$
$$\text{для каждого } f \in X^* \text{ и } j = 0, \ldots, m. \tag{1.4}$$

Тогда последовательность $\{w_{f_n}\}$ функций $w_{f_n} = \langle f, u_n(\cdot) \rangle$

сходится в $C^m(S)$ к некоторой функции $w_f \in C^m(S)$. С другой стороны, из слабой полноты X и соотношения (1.4) вытекает, что последовательность $\{u_n(t)\}$ при каждом $t \in S$ слабо сходится к некоторому элементу $u(t) \in X$. Таким образом,

$$w_f(t) = \lim_{n \to \infty} w_{f_n}(t) = \lim_{n \to \infty} \langle f, u_n(t) \rangle = \langle f, u(t) \rangle.$$

Отсюда следует, что $u \in C_w^m(S; X)$ и

$$\langle f, u^{(j)}(\cdot) \rangle = w_f^{(j)} = \lim_{n \to \infty} \langle f, u_n^{(j)}(\cdot) \rangle, \qquad j = 1, \ldots, m$$

(см. замечание 1.5). Теорема доказана.

Теорема 1.3 (аппроксимационная теорема Вейерштрасса). *Если интервал S компактен, то множество многочленов из $(S \to X)$, т. е. множество* $\left\{ p \mid p \in (S \to X),\ p(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j,\ a_j \in X, \right.$ $j = 0, \ldots, m\}$ *плотно в* $C(S; X)$.

Доказательству этой теоремы предпошлем одну лемму.

Лемма 1.2. Для любого $t \in R^1$ и любого натурального n имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nt)^2 \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k} = nt(1 - t). \tag{1.5}$$

Доказательство. Дифференцирование тождества

$$(t + s)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k s^{n-k} \tag{1.6}$$

по t с последующим умножением на t дает

$$nt(t + s)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k t^k s^{n-k}. \tag{1.7}$$

Дифференцируя то же тождество (1.6) по t дважды и умножая на t^2, находим, что

$$n(n - 1) t^2 (t + s)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k - 1) t^k s^{n-k}. \tag{1.8}$$

Для сокращения записи положим $r_k(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$. Используя соотношения (1.6)—(1.8) при $s = 1 - t$, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nt)^2 r_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \{k(k-1) + (1 - 2nt)k + n^2t^2\} r_k(t) =$$
$$= n(n-1)t^2 + (1-2nt)nt + n^2t^2 = nt(1-t).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.3. Достаточно провести доказательство для $S = [0, 1]$, так как случай любого другого компактного интервала S при помощи замены переменной можно свести к этому частному случаю.

Пусть по $u \in C([0, 1]; X)$ и $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ выбрано таким образом, чтобы при $|s - t| < \delta$ выполнялось условие $\|u(s) - u(t)\| < \varepsilon$. Положим

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}. \tag{1.9}$$

Тогда, в силу (1.5),

$$\|p_n(t) - u(t)\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(u\left(\frac{k}{n}\right) - u(t)\right) t^k (1-t)^{n-k} \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n} - t\right| < \delta} \left\|u\left(\frac{k}{n}\right) - u(t)\right\| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} +$$
$$+ \sum_{\left|\frac{k}{n} - t\right| \geqslant \delta} \left\|u\left(\frac{k}{n}\right) - u(t)\right\| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \frac{2\|u\|_{C([0, 1]; X)}}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k - nt)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \frac{2\|u\|_{C([0, 1]; X)}}{n\delta^2} t(1-t).$$

Поэтому при достаточно больших n для многочлена p_n, определенного формулой (1.9), имеем

$$\|p_n - u\|_{C([0, 1]; X)} < 2\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

2. ИНТЕГРАЛ БОХНЕРА

В этом пункте мы введем понятия измеримости и интегрируемости функций из $(S \to X)$. Эти понятия восходят к Бохнеру [1]. Мы приведем без доказательств те свойства интеграла Бохнера, которые понадобятся нам в дальнейшем. Читатель, интересующийся доказательствами, может посмотреть их, например, в книге Иосиды [1].

Определение 1.4. Функция $u \in (S \to X)$ называется *простой*, если в S имеется конечное число попарно непересекающихся измеримых по Лебегу подмножеств B_i $(i = 1, \ldots, n)$ с $\operatorname{mes}(B_i) < \infty$, таких, что функция u на каждом множестве B_i принимает постоянное значение x_i и $u(s) = 0$ для $s \in S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Интеграл Бохнера от простой функции определяется по формуле

$$\int_S u(s)\, ds = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes}(B_i)\, x_i.$$

В случае когда для простой функции $u \in (S \to X)$ в качестве множеств B_i можно выбрать интервалы, она называется *ступенчатой*.

Определение 1.5. Говорят, что функция $u \in (S \to X)$ *измерима по Бохнеру*, если существует такая последовательность $\{u_n\}$ простых функций, что

$$u_n(s) \to u(s) \quad \text{для почти всех} \quad s \in S. \tag{1.10}$$

Если вдобавок такая последовательность удовлетворяет условию

$$\lim_{n \to \infty} \int_S \| u(s) - u_n(s) \|\, ds = 0, \tag{1.11}$$

то функция u называется *интегрируемой по Бохнеру. Интеграл Бохнера* от такой функции u по измеримому по Лебегу множеству $B \subset S$ определяется формулой

$$\int_B u(s)\, ds = \lim_{n \to \infty} \int_S u_n(s)\, C_B(s)\, ds, \tag{1.12}$$

где C_B — индикаторная функция множества B:

$$C_B(s) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s \in B, \\ 0 & \text{при} \quad s \notin B. \end{cases}$$

В случае $B=[a, b]$ вместо $\int\limits_B u(s)\,ds$ мы, как обычно, пишем $\int\limits_a^b u(s)\,ds$. При $b<a$ полагаем

$$\int\limits_a^b u(s)\,ds = -\int\limits_b^a u(s)\,ds.$$

Замечание 1.6. Из измеримости по Бохнеру функции u следует, что вещественнозначная функция $\|u(\cdot)-u_n(\cdot)\|$ измерима по Лебегу на S. Поэтому условие (1.11) имеет смысл. Если оно выполнено, то предел в (1.12) существует и не зависит от выбора последовательности простых функций, обладающей свойствами (1.10) и (1.11), так что определение 1.5 корректно.

Теорема 1.4. *Если пространство X сепарабельно, то функция $u\in(S\to X)$ точно тогда измерима по Бохнеру, когда для каждого $f\in X^*$ функция $\langle f, u(\cdot)\rangle\in(S\to R^1)$ измерима по Лебегу.*

Теорема 1.5. *Если для функции $u\in(S\to X)$ существует последовательность $\{u_n\}$ измеримых по Бохнеру функций, такая, что*

$$u_n(t)\rightharpoonup u(t) \text{ в } X \qquad \text{для почти всех } t\in S,$$

то она также измерима по Бохнеру.

Теорема 1.6. *Измеримая по Бохнеру функция $u\in(S\to X)$ точно тогда интегрируема по Бохнеру, когда функция $\|u(\cdot)\|\in\in(S\to R^1)$ интегрируема по Лебегу, и в этом случае для любого измеримого (по Лебегу) множества $B\subset S$ имеет место оценка*

$$\left\|\int\limits_B u(s)\,ds\right\| \leqslant \int\limits_B \|u(s)\|\,ds. \tag{1.13}$$

Теорема 1.7. *Если функция $u\in(S\to X)$ интегрируема по Бохнеру, то функция $v\in(S\to X)$, определенная по правилу*

$$v(t)=\int\limits_{t_0}^t u(s)\,ds, \qquad t_0\in S,$$

почти всюду на S дифференцируема, причем

$$v'(t)=u(t) \qquad \text{для почти всех } t\in S.$$

Теорема 1.8. *Если функция $u\in(S\to X)$ интегрируема по Бохнеру и множество $B\subset S$ измеримо, то для любого $f\in X^*$*

$$\int\limits_B \langle f, u(s)\rangle\,ds = \left\langle f, \int\limits_B u(s)\,ds\right\rangle. \tag{1.14}$$

Теорема 1.9. *Пусть интервал S компактен. Тогда каждая функция $u \in C_w(S; X)$ интегрируема по Бохнеру. Если $u \in C_w(S; X)$* и функция $v \in (S \to X)$ *определена формулой*

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} u(s)\,ds, \qquad t_0 \in S,$$

то $v \in C_w^1(S; X)$ и $v' = u$. Если $u \in C(S; X)$, то $v \in C^1(S; X)$.

Теорема 1.10. *Каждая функция $u \in C_w^1(S; X)$ дифференцируема почти всюду на S.*

Замечание 1.7. Теорем 1.9 и 1.10 в такой форме у Иосиды [1] нет. Теорема 1.9 получается при помощи несложных рассуждений из теорем 1.4 и 1.8, с учетом определения пространств $C_w^m(S; X)$. При этом используется тот факт, что множество значений всякой функции $u \in C_w(S; X)$ лежит в некотором сепарабельном подпространстве пространства X. Теорема 1.10 следует из теоремы 1.7, так как функцию $u \in C_w^1(S; X)$ можно представить ввиде интеграла от своей производной.

3. ПРОСТРАНСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Изложение в этом пункте идет в большой мере параллельно изложению в соответствующем пункте § 1 гл. II.

Определение 1.6. Две функции $u, v \in (S \to X)$ называются *эквивалентными*, если $u(s) = v(s)$ для почти всех $s \in S$.

Замечание 1.8. Как и в случае пространств вещественных функций, мы часто не будем различать между собой эквивалентные функции, не оговаривая этого специально.

Определение 1.7. Через $L^p(S; X)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначается множество всех измеримых по Бохнеру функций $u \in (S \to X)$, для которых

$$\int_S \|u(s)\|^p\,ds < \infty.$$

Теорема 1.11. *Множество $L^p(S; X)$, $1 \leqslant p < \infty$, образующее линейное пространство с естественными линейными операциями, превращается в банахово пространство при наделении его нормой*

$$\|u\|_{L^p(S;\,X)} = \left(\int_S \|u(s)\|^p\,ds\right)^{1/p}. \tag{1.15}$$

Доказательство. То что формула (1.15) действительно определяет норму на $L^p(S; X)$, проверяется без труда (надо воспользоваться неравенством треугольника в X и неравенством Минковского). Остается лишь доказать полноту $L^p(S; X)$.

Пусть $\{u_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в $L^p(S; X)$, т. е.

$$\lim_{n,\,k\to\infty} \int_S \|u_n(s)-u_k(s)\|^p\,ds=0.$$

Выберем возрастающую последовательность $\{k_j\}$, $j=1, 2, \ldots$, натуральных чисел, таких, что

$$\int_S \|u_n(s)-u_{k_j}(s)\|^p\,ds<4^{-j} \quad \text{при} \quad n\geqslant k_j. \tag{1.16}$$

В силу (1.16) для последовательности $\{v_j\}=\{u_{k_j}\}$, $j=1, 2, \ldots$, имеем

$$\int_S \|v_{j+1}(s)-v_j(s)\|^p\,ds<4^{-j}. \tag{1.17}$$

Пусть $M_j=\{s \mid s\in S,\ \|v_{j+1}(s)-v_j(s)\|^p\geqslant 2^{-j}\}$ и $N_i=\bigcup\limits_{j\geqslant i} M_j$. Из (1.17) следует, что

$$2^{-j}\,\mathrm{mes}\,(M_j)\leqslant \int_S \|v_{j+1}(s)-v_j(s)\|^p\,ds<4^{-j},$$

т. е. $\mathrm{mes}(M_j)<2^{-j}$, а значит, $\mathrm{mes}\,(N_i)<\sum\limits_{j\geqslant i} 2^{-j}=2^{1-i}$. Поскольку $N_1\supset N_2\supset\ldots$, отсюда вытекает, что множество $N=\bigcap\limits_{1}^{\infty} N_i$ имеет меру нуль: $\mathrm{mes}\,(N)=0$.

Пусть теперь $s\notin N$. Тогда найдется i, такое, что $s\notin N_i$, т. е. $s\in M_j$ для всех $j\geqslant i$, и, следовательно,

$$\|v_{j+1}(s)-v_j(s)\|^p<2^{-j} \quad \text{для} \quad j\geqslant i.$$

Итак, для $s\in S\setminus N$

$$\lim_{i,\,j\to\infty}\|v_j(s)-v_i(s)\|\leqslant \lim_{i\to\infty}\sum_{l=i}^{\infty} 2^{-l/p}=0.$$

В силу полноты X, для каждого $s\in S\setminus N$ существует элемент $u(s)\in X$, удовлетворяющий условию

$$\lim_{j\to\infty}\|v_j(s)-u(s)\|=0.$$

Если мы еще положим $u(s)=0$ для $s\in N$, то получившаяся функция u будет как предел измеримых функций v_j (в смысле сходимости почти всюду) и сама измерима (см. теорему 1.5). По лемме Фату

$$\int_S \| v_j(s) - u(s) \|^p \, ds \leqslant \varliminf_{i \to \infty} \int_S \| v_j(s) - v_i(s) \|^p \, ds.$$

Так как $\{v_j\}$ — подпоследовательность фундаментальной последовательности $\{u_n\}$, то правая часть последнего неравенства при достаточно больших j может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому $u \in L^p(S; X)$ и

$$\lim_{j \to \infty} \int_S \| v_j(s) - u(s) \|^p \, ds = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \varlimsup_{n \to \infty} \int_S \| u_n(s) - u(s) \|^p \, ds &\leqslant \\ \leqslant \varlimsup_{n,\, j \to \infty} \int_S (\| u_n(s) - v_j(s) \| + \| v_j(s) - u(s) \|)^p \, ds &\leqslant \\ \leqslant \varlimsup_{n,\, j \to \infty} \int_S 2^p \left(\| u_n(s) - u_{k_j}(s) \|^p + \| v_j(s) - u(s) \|^p \right) ds &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $\{u_n\}$ сходится в $L^p(S; X)$ к $u \in L^p(S; X)$, что и доказывает теорему.

Лемма 1.3. Множество ступенчатых функций из $(S \to X)$ (см. определение 1.4) плотно в $L^p(S; X)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Пусть задана функция $u \in L^p(S; X)$. В силу ее измеримости найдется последовательность $\{u_n\}$ простых функций из $(S \to X)$, такая, что

$$u_n(s) \to u(s) \quad \text{для почти всех } s \in S. \tag{1.18}$$

Определим функции $v_n \in (S \to X)$ формулой

$$v_n(s) = \begin{cases} u_n(s), & \text{если } \| u_n(s) \| \leqslant 2 \| u(s) \|, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.19}$$

Как легко видеть, функции v_n также просты. Из (1.18) и (1.19) следует, что

$$v_n(s) \to u(s) \quad \text{для почти всех } s \in S.$$

Кроме того, из (1.19) вытекает, что

$$\| v_n(s) - u(s) \|^p \leqslant (3 \| u(s) \|)^p.$$

Поэтому, на основании теоремы Лебега,

$$\lim_{n \to \infty} \int_S \| v_n(s) - u(s) \|^p \, ds = 0,$$

т. е. последовательность $\{v_n\}$ сходится в $L^p(S; X)$ к заданной функции u. Итак, для доказательства леммы достаточно показать, что простые функции можно с любой точностью аппроксимировать в $L^p(S; X)$ ступенчатыми. Покажем это. Любое ограниченное измеримое множество $B \subset S$ можно с точностью до множества сколь угодно малой меры аппроксимировать конечным числом попарно непересекающихся интервалов, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ существуют попарно непересекающиеся интервалы S_i, $i = 1, \ldots, m$, такие, что $\operatorname{mes}\left\{\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^{m} S_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i \setminus B\right)\right\} < \varepsilon$. Если

$$u(s) = \begin{cases} x & \text{для} \quad s \in B, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{1.20}$$

и

$$u_\varepsilon(s) = \begin{cases} x & \text{для} \quad s \in \bigcup_{i=1}^{m} S_i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то

$$\| u - u_\varepsilon \|_{L^p(S;\ X)} \leqslant \| x \| \varepsilon^{1/p}.$$

Следовательно, простые функции, будучи конечными суммами функций вида (1.20), могут быть аппроксимированы в $L^p(S; X)$ с любой точностью ступенчатыми функциями. Лемма доказана.

Определение 1.8. Функция $u \in (S \to X)$ называется *существенно ограниченной*, если она эквивалентна некоторой ограниченной функции, т. е. если существует такое число $M < \infty$, что $\| u(s) \| \leqslant M$ для почти всех $s \in S$. Нижняя грань всех таких чисел M обозначается через $\operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} \| u(s) \|$. Множество всех измеримых по Бохнеру существенно ограниченных функций из $(S \to X)$ мы обозначаем через $L^\infty(S; X)$.

Теорема 1.12. *Множество $L^\infty(S; X)$ является банаховым пространством относительно нормы*

$$\| u \|_{L^\infty(S;\ X)} = \operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} \| u(s) \|. \tag{1.21}$$

Доказательство. То что формула (1.21) определяет норму на $L^\infty(S; X)$, видно непосредственно. Нужно лишь доказать полноту.

Пусть $\{u_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в $L^\infty(S; X)$, т. е.

$$\lim_{n,\ k \to \infty} \operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} \| u_n(s) - u_k(s) \| = 0.$$

Тогда для каждого натурального числа i найдется такое $n(i)$, что при $n,\ k \geqslant n(i)$

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} \|u_n(s) - u_k(s)\| < \frac{1}{i},$$

т. е.

$$\| u_n(s) - u_k(s) \| < \frac{1}{i} \quad \text{для} \quad s \in S \setminus N_{nki},$$

где N_{nki} — некоторое, вообще говоря, зависящее от n, k и i множество меры нуль. Пусть $N = \bigcup\limits_{\substack{i=1 \\ n,\ k \geqslant n(i)}}^{\infty} N_{nki}$. Тогда $\operatorname{mes}(N) = 0$ и

$$\| u_n(s) - u_k(s) \| < \frac{1}{i} \quad \text{для} \quad s \in S \setminus N \text{ и } n,\ k \geqslant n(i).$$

В силу полноты X последовательность $\{u_n(s)\}$ для $s \in S \setminus N$ имеет предел $u(s) \in X$. Для $s \in N$ положим $u(s) = 0$. Определенная таким образом функция $u \in (S \to X)$ измерима как предел измеримых функций и, очевидно, также существенно ограничена. Далее, для $s \in S \setminus N$ и $n \geqslant n(i)$

$$\| u_n(s) - u(s) \| \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} (\| u_n(s) - u_k(s) \| + \| u_k(s) - u(s) \|) < \frac{1}{i}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} \| u_n(s) - u(s) \| = 0.$$

Итак, последовательность $\{u_n\}$ сходится в $L^\infty(S;X)$ к функции $u \in L^\infty(S;X)$, чем теорема и доказана.

Лемма 1.4 (неравенство Гёльдера). Если $u \in L^p(S;\ X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $v \in L^q(S;\ X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\langle v(\cdot),\ u(\cdot)\rangle \in L^1(S)$ и

$$\int_S \langle v(s),\ u(s)\rangle\, ds \leqslant \| v \|_{L^q(S;\ X^*)} \| u \|_{L^p(S;\ X)}.$$

Доказательство. Для функций $u \in L^p(S;X)$ и $v \in L^q(S;X^*)$ найдутся последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ простых функций со значениями в X, соответственно в X^*, которые сходятся почти всюду на S к u, соответственно к v. Тогда простые функции $\langle v_n(\cdot), u_n(\cdot)\rangle$ из $(S \to R^1)$ почти всюду будут сходиться к $\langle v(\cdot), u(\cdot)\rangle$. Поэтому функция $\langle v(\cdot),\ u(\cdot)\rangle$ измерима по Лебегу. Так как $\langle v(s), u(s)\rangle \leqslant \|v(s)\|_* \|u(s)\|$ и $\|u(\cdot)\| \in L^p(S)$, $\|v(\cdot)\|_* \in L^q(S)$, то утверждение леммы следует теперь из обычного неравенства Гёльдера (лемма 1.12 гл. II).

Теорема 1.13. *Если $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ — гильбертово пространство, то пространство $L^2(S; H)$ со скалярным произведением*

$$(u, v)_S = \int_S (u(s), v(s))\, ds \quad \text{для} \quad u, v \in L^2(S; H) \tag{1.22}$$

тоже является гильбертовым.

Доказательство. Определение (1.22) имеет смысл в силу леммы 1.4 и теоремы Рисса (теорема 6.1 гл. I). То что функция $(\cdot, \cdot)_S$ обладает всеми свойствами скалярного произведения, требуемыми в определении 6.1 гл. I, очевидно. Полнота пространства $L^2(S; H)$ уже доказана в теореме 1.11, поскольку норма, отвечающая скалярному произведению $(\cdot, \cdot)_S$, совпадает с нормой, фигурирующей в этой теореме. Доказательство закончено.

Следующая теорема показывает, что в случае рефлексивных сепарабельных пространств X сопряженное к $L^p(S; X)$, $1 < p < \infty$, пространство $(L^p(S; X))^*$ можно отождествить с $L^q(S, X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Теорема 1.14. *Если пространство X рефлексивно и сепарабельно и $1 < p < \infty$, то каждый элемент $f \in (L^p(S; X))^*$ допускает точно одно представление в виде*

$$f(u) = \int_S \langle v(s), u(s)\rangle\, ds \quad \text{для каждого } u \in L^p(S; X)$$

с функцией $v \in L^q(S; X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Соответствие $f \to v$, $f \in (L^p(S; X))^*$, линейно и

$$\| f \|_{(L^p(S; X))^*} = \| v \|_{L^q(G; X^*)}.$$

Доказательство проведем в четыре шага.

1. Пусть t_0 — произвольная точка интервала S. Положим для $t \in S$ и $x \in X$

$$u_{t,x}(s) = \begin{cases} x, & \text{если } t_0 \leqslant t \text{ и } t_0 \leqslant s \leqslant t, \\ -x, & \text{если } t_0 > t \text{ и } t \leqslant s \leqslant t_0 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.23}$$

Для $f \in (L^p(S; X))^*$ значение $f(u_{t,x})$ линейно зависит от $x \in X$ и

$$f(u_{t,x}) \leqslant \| f \|_{(L^p(S; X))^*} \| u_{t,x} \|_{L^p(S; X)} = \| f \|_{(L^p(S; X))^*} \| x \| \, | t - t_0 |^{1/p},$$

т. е. $f(u_{t,x})$ (при фиксированных f и t) является непрерывным линейным функционалом от x на X. Следовательно, существует

представление
$$f(u_{t,\,x}) = \langle g(t),\ x\rangle, \qquad g(t) \in X^*. \tag{1.24}$$
Очевидно, что $g(t_0) = 0$.

2. Пусть $\{S_1, \ldots, S_m\}$ — конечная система непустых попарно пересекающихся подынтервалов интервала S вида $S_i = [t_i, t_i + h_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда для $x \in X$ имеем
$$\left|\sum_{i=1}^{m} \langle g(t_i + h_i) - g(t_i),\ x\rangle\right| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{m} (u_{t_i+h_i,\,x} - u_{t_i,\,x})\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{(L^p(S;\,X))^*} \left\|\sum_{i=1}^{m} (u_{t_i+h_i,\,x} - u_{t_i,\,x})\right\|_{L^p(S;\,X)} =$$
$$= \|f\|_{(L^p(S;\,X))^*} \|x\| \left(\sum_{i=1}^{m} h_i\right)^{1/p}. \tag{1.25}$$

Положим $z_i = (g(t_i + h_i) - g(t_i))/h_i$. Для этих z_i при любом $\varepsilon > 0$ найдутся в силу определения нормы линейного функционала такие элементы $y_i \in X$, что $\|y_i\| = 1$ и $\langle z_i, y_i\rangle \geqslant \|z_i\|_* - \varepsilon$. Возьмем $x_i = \|z_i\|_*^{q-1} y_i$. Тогда
$$\langle z_i,\ x_i\rangle \geqslant \|z_i\|_*^q - \varepsilon \|z_i\|_*^{q-1}. \tag{1.26}$$

Определим функцию u формулой
$$u(t) = \begin{cases} x_i & \text{при} \quad t \in S_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ 0 & \text{при} \quad t \in R \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i. \end{cases}$$

Очевидно, $u = \sum\limits_{i=1}^{m} (u_{t_i+h_i,\,x_i} - u_{t_i,\,x_i})$. Для этой функции имеем
$$\|u\|_{L^p(S;\,X)}^p = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^p h_i = \sum_{i=1}^{m} \|z_i\|_*^q h_i \tag{1.27}$$
и (см. (1.24), (1.26))
$$\|f\|_{(L^p(S;\,X))^*} \|u\|_{L^p(S;\,X)} \geqslant f(u) = \sum_{i=1}^{m} \langle g(t_i + h_i) - g(t_i),\ x_i\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \langle z_i,\ x_i\rangle h_i \geqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\|z_i\|_*^q - \varepsilon \|z_i\|_*^{q-1}\right) h_i.$$

Из последнего неравенства при $\varepsilon \to 0$ получаем, с учетом соотношения (1.27),
$$\|f\|_{(L^p(S,\,X))^*} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \|z_i\|_*^q h_i\right)^{1/q}.$$

Поскольку это верно для произвольной системы интервалов

$\{S_1, \ldots, S_m\}$, мы заключаем, что

$$\| f \|_{(L^p(S;\, X))^*} \geqslant \sup \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{1}{h_i} (g(t_i + h_i) - g(t_i)) \right\|_*^q h_i \right)^{1/q}, \quad (1.28)$$

где верхняя грань берется по всем конечным системам непустых попарно непересекающихся интервалов $[t_i, t_i + h_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

3. Теперь покажем, что существует функция $v \in \mathrm{L}^q(S; X^*)$, для которой справедливы соотношения

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds \quad \text{и} \quad \| v \|_{L^q(S;\, X^*)} \leqslant \| f \|_{(L^p(S;\, X))^*}.$$

Очевидно, достаточно показать это утверждение для случая компактного интервала S. Пусть $S = [t_0, t_1]$ и $T = t_1 - t_0$. Для $n = 1, 2, \ldots$ положим $g_{n,i} = g(t_0 + 2^{-n}Ti)$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n$, и

$$v_n(t) = \frac{1}{2^{-n}T} (g_{n,\,i+1} - g_{n,\,i}) \quad \text{при} \quad 2^{-n}Ti \leqslant t - t_0 < 2^{-n}T(i+1).$$

Прежде всего заметим, что в силу (1.28)

$$\| v_n \|_{L^q(S;\, X^*)} = \left(\sum_{i=0}^{2^n - 1} \left\| \frac{1}{2^{-n}T} (g_{n,\,i+1} - g_{n,\,i}) \right\|_*^q 2^{-n}T \right)^{1/q} \leqslant \| f \|_{(L^p(S;\, X))^*}. \quad (1.29)$$

Далее покажем, что почти для каждого $t \in S$ последовательность $\{\| v_n(t) \|_*\}$ ограничена. Пусть

$$N_0 = \{t \mid t \in S,\ \sup_n \| v_n(t) \|_* = \infty\} \quad (1.30)$$

и

$$S_{r,K} = \{t \mid t \in S,\ \sup_{n \leqslant r} \| v_n(t) \|_* \geqslant K\}, \quad r = 1, 2, \ldots; \quad K = 1, 2 \ldots .$$

Ясно, что $S_{r,K}$ при фиксированном K не убывает по r и $N_0 = \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{r=1}^{\infty} S_{r,K}$. Так как функция v_n кусочно постоянна, то $S_{r,K}$ состоит из интервалов вида $[2^{-n}Ti,\ 2^{-n}T(i+1))$, $n \leqslant r$, в которых $\| v_n(t) \|_* \geqslant K$. Если два таких интервала имеют непустое пересечение, то один из них содержится в другом. Поэтому $S_{r,K}$ может быть представлено как объединение попарно непересекающихся интервалов указанного вида. Пусть для фиксированных r и K это будут интервалы $[t_i, t_i + h_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Используя (1.28), получаем

$$K^q \operatorname{mes}(S_{r,K}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{g(t_i + h_i) - g(t_i)}{h_i} \right\|_*^q h_i \leqslant \| f \|_{(L^p(S;\, X))^*}^q.$$

Так как $S_{r,K}$ не убывает по r, то отсюда следует, что

$$K^q \operatorname{mes}\Big(\bigcup_r S_{r,K}\Big) \leqslant \| f \|^q_{(L^p(S;\, X))^*}$$

и потому

$$\operatorname{mes}(N_0) = \operatorname{mes}\Big(\bigcap_K \bigcup_r S_{r,K}\Big) \leqslant \inf_K \operatorname{mes}\big(\bigcup S_{r,K}\big) = 0.$$

Пусть $\{z_1, z_2, \ldots\}$ — какая-нибудь счетная полная система в X. Ввиду (1.25), функции a_j, $j = 1, 2, \ldots$, определенные формулой

$$a_j(t) = \langle g(t), z_j \rangle, \qquad t \in S,$$

абсолютно непрерывны. Поэтому для $t \in S \setminus N_j$, где N_j — некоторое подмножество нулевой меры в S, существует производная $a'_j(t)$. Пусть i_n, $n = 1, 2, \ldots$, выбраны для $t \in S \setminus N_j$ так, чтобы $2^{-n} T i_n \leqslant t - t_0 < 2^{-n} T (i_n + 1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n(t), z_j \rangle = \lim_{n\to\infty} \Big\langle \frac{1}{2^{-n}T} \big(g_{n,\, i_n+1} - g_{n,\, i_n}\big), z_j \Big\rangle = a'_j(t). \tag{1.31}$$

Из (1.30) и (1.31) вытекает, что последовательность $\{v_n(t)\}$ для каждого $t \in S \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$ слабо сходится в X^* к $v(t) \in X^*$. Для $t \in \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j$ положим $v(t) = 0$. Согласно теореме 1.5, определенная таким образом функция $v \in (S \to X^*)$ измерима по Бохнеру и $\| v(t) \|_* \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \| v_n(t) \|_*$ для $t \in S$ (см. лемму 5.3 гл. I). С учетом неравенства (1.29), получаем отсюда по лемме Фату

$$\int_S \| v(t) \|^q_* \, dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_S \| v_n(t) \|^q_* \, dt \leqslant \| f \|^q_{(L^p(S;\, X))^*}, \tag{1.32}$$

т. е. $v \in L^q(S;\, X^*)$. Далее, для $j = 1, 2, \ldots$ имеем (см. (1.31))

$$\langle g(t), z_j \rangle = a_j(t) = \int_{t_0}^{t} a'_j(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} \langle v_n(s), z_j \rangle \, ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \langle v(s), z_j \rangle \, ds = \Big\langle \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds, z_j \Big\rangle.$$

Следовательно,

$$g(t) = \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds.$$

4. Пусть u — произвольная ступенчатая функция (см. определение 1.4) из $L^p(S;\ X)$, скажем

$$u(t)=\begin{cases} x_i & \text{при } s_i<t\leqslant t_i,\quad i=1,\ \ldots,\ m,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда (см. (1.23) и (1.24))

$$f(u)=f\left(\sum_{i=1}^{m}(u_{t_i,\ x_i}-u_{s_i,\ x_i})\right)=\sum_{i=1}^{m}\langle g(t_i)-g(s_i),\ x_i\rangle=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\langle\int_{s_i}^{t_i}v(t)\,dt,\ x_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\int_{s_i}^{t_i}\langle v(t),\ u(t)\rangle\,dt=\int_S\langle v(t),\ u(t)\rangle\,dt.$$

Так как множество ступенчатых функций плотно в $L^p(S;X)$ (лемма 1.3) и так как в силу неравенства Гёльдера интеграл $\int_S\langle v(t),\ u(t)\rangle\,dt$ непрерывно зависит от $u\in L^p(S;\ X)$, то

$$f(u)=\int_S\langle u(t),\ u(t)\rangle\,dt \tag{1.33}$$

для всех $u\in L^p(S;\ X)$. Следовательно, линейный функционал f обладает нужным представлением. Ввиду неравенства Гёльдера

$$\|f\|_{(L^p(S;\ X))^*}\leqslant\|v\|_{L^q(S;\ X^*)}. \tag{1.34}$$

Из (1.32) и (1.34) вытекает утверждаемое равенство норм. Единственность представления f в виде (1.33) с $v\in L^q(S;\ X^*)$ следует из того, что, ввиду равенства норм f и v, нулевой функционал представим только при помощи $v=0$. Линейность соответствия $f\to v$ очевидна. Теорема доказана.

Замечание 1.9. Утверждение теоремы 1.14 справедливо также и при $p=1$; доказательство в этом случае даже проще, чем в случае $p>1$. Мы не стали доказывать этот результат, поскольку он нам в дальнейшем не потребуется.

Замечание 1.10. Можно показать (см., например, Эдвардс [1]), что теорема 1.14 сохраняет силу даже тогда, когда относительно пространства X предполагается лишь, что оно рефлексивно или сепарабельно.

Замечание 1.11. Из теоремы 1.14 вытекает, что если пространство X рефлексивно и сепарабельно, то пространства $L^p(S;X)$, $1<p<\infty$, рефлексивны.

Позднее нам понадобится

Лемма 1.5. Для любой функции $u \in L^p(S; X)$, $1 \leqslant p < \infty$, функция u_h, определенная формулой

$$u_h(t) = \begin{cases} u(t+h) & \text{при} \quad t+h \in S, \\ 0 & \text{при} \quad t+h \notin S, \end{cases} \qquad (h \in R^1)$$

также принадлежит $L^p(S: X)$, и

$$\lim_{h \to 0} \| u_h - u \|_{L^p(S;\, X)} = 0. \tag{1.35}$$

Доказательство. Принадлежность u_h к $L^p(S; X)$ очевидна, и ясно, что

$$\| u_h \|_{L^p(S;\, X)} \leqslant \| u \|_{L^p(S;\, X)}. \tag{1.36}$$

Пусть $\{u_n\}$ — последовательность ступенчатых функций, сходящаяся в $L^p(S; X)$ к u (см. лемму 1.3). Тогда, в силу (1.36), последовательность $\{u_{nh}\}$ равномерно по h сходится в $L^p(S; X)$ к u_h, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \| u_h - y \|_{L^p(S;\, X)} \leqslant \| u_h - u_{nh} \|_{L^p(S;\, X)} &+ \\ + \| u_{nh} - u_n \|_{L^p(S;\, X)} + \| u_n - u \|_{L^p(S;\, X)} &\leqslant \\ \leqslant \| u_{nh} - u_n \|_{L^p(S;\, X)} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому лемму достаточно доказать для ступенчатых функций. Так как $(u+v)_h = u_h + v_h$, то справедливость соотношения (1.35) для ступенчатых функций следует из справедливости его для функций вида

$$u = C_B x, \qquad x \in X,$$

где C_B — индикаторная функция ограниченного интервала $B \subset S$ (см. определения 1.4 и 1.5). Но в этом случае

$$\lim_{h \to 0} \int_S \| u_h(s) - u(s) \|^p \, ds \leqslant 2 \| x \|^p \lim_{h \to 0} | h | = 0,$$

чем наша лемма и доказана.

Следующая теорема сыграет важную роль в гл. VI при доказательстве сильной сходимости метода Галёркина для эволюционных уравнений.

Теорема 1.15. *Если пространство X равномерно выпукло, то при $1 < p < \infty$ пространство $Y = L^p(S; X)$ также равномерно выпукло.*

Доказательству этой теоремы предпошлем одну лемму.

Лемма 1.6. Если X равномерно выпукло и $1 < p < \infty$, то существует такая неубывающая функция δ_p, что $\delta_p(\xi) > 0$ при $\xi > 0$ и для любых $x, y \in X$ с $\|x\| + \|y\| > 0$ выполняется неравенство

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^p \leqslant \left(1 - \delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{\sup(\|x\|, \|y\|)}\right)\right)\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}. \quad (1.37)$$

Доказательство. Достаточно показать, что для $\|x\| = 1$, $\|y\| \leqslant 1$ и $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^p \leqslant (1 - \delta_p(\varepsilon))\frac{1+\|y\|^p}{2}. \quad (1.38)$$

Случай произвольных x, y сводится с помощью деления на $\sup(\|x\|, \|y\|)$ и, при необходимости, перестановки x и y к названному случаю.

Элементарно проверяется, что при $c \geqslant 0$

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{2}(1+c)\right)^p \leqslant \frac{1}{2}(1+c^p),\\ \left(\frac{1}{2}(1+c)\right)^p = \frac{1}{2}(1+c^p) \text{ только для } c = 1.\end{gathered} \quad (1.39)$$

Допустим, что (1.38) неверно. Тогда найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, что $\|x_n\| = 1$, $\|y_n\| \leqslant 1$, $\|x_n - y_n\| \geqslant \varepsilon$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\|^p}{\frac{1}{2}(1 - \|y_n\|^p)} = 1.$$

В силу (1.39) это возможно лишь при $\|y_n\| \to 1$. Положим $z_n = y_n/\|y_n\|$. Тогда $\|z_n - y_n\| \to 0$ и, значит, $\|x_n - z_n\| > \varepsilon/2$ для достаточно больших n. Далее,

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n + z_n)\right\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_n + y_n\| - \frac{1}{2}\|y_n - z_n\| \to 1.$$

Но эти свойства последовательностей $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ противоречат равномерной выпуклости X (см. определение 5.9 гл. I). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.15. Пусть u, $v \in Y = L^p(S; X)$, $\|u\|_Y \leqslant 1$, $\|v\|_Y \leqslant 1$ и $\|u - v\|_Y > \varepsilon$. Положим

$$M = \Big\{t \mid t \in S,\ \|u(t) - v(t)\|^p > \frac{\varepsilon^p}{4}(\|u(t)\|^p + \\ + \|v(t)\|^p) \geqslant \frac{\varepsilon^p}{4}\sup(\|u(t)\|^p, \|v(t)\|^p)\Big\}.$$

Множество M измеримо, и

$$\int_{S\setminus M} \|u(t)-v(t)\|^p\,dt \leqslant \frac{\varepsilon^p}{4}\int_S (\|u(t)\|^p+\|v(t)\|^p)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Поскольку $\|u-v\|_Y^p > \varepsilon^p$, отсюда следует, что

$$\int_M \|u(t)-v(t)\|^p\,dt \geqslant \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Поэтому $\|u-v\|_{L^p(M;\,X)} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2^{1/p}}$ и, значит,

$$\sup\left(\|u\|_{L^p(M;\,X)},\quad \|v\|_{L^p(M;\,X)}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^{(1/p)+1}},$$

т. е.

$$\sup\left(\int_M \|u(t)\|^p\,dt,\ \int_M \|v(t)\|^p\,dt\right) \geqslant \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}}.$$

Отсюда, используя неравенство (1.37) и определение M, получаем

$$\int_S \left\{\frac{1}{2}(\|u(t)\|^p+\|v(t)\|^p)-\left(\frac{1}{2}\|u(t)+v(t)\|\right)^p\right\}dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_M \left\{\frac{1}{2}(\|u(t)\|^p+\|v(t)\|^p)-\left(\frac{1}{2}\|u(t)+v(t)\|\right)^p\right\}dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_M \delta_p\left(\frac{\varepsilon}{4^{1/p}}\right)\frac{\|u(t)\|^p+\|v(t)\|^p}{2}\,dt \geqslant \delta_p\left(\frac{\varepsilon}{4^{1/p}}\right)\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_Y \leqslant \left(1-\delta_p\left(\frac{\varepsilon}{4^{1/p}}\right)\frac{\varepsilon^p}{2^{p+2}}\right)^{1/p} = 1-\eta(\varepsilon),$$

$$\eta(\varepsilon) > 0 \quad \text{для} \quad \varepsilon > 0.$$

Это показывает, что Y равномерно выпукло. Теорема доказана.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом пункте вводятся распределения со значениями в банаховом пространстве X. Ниже через X_w мы обозначаем линейное пространство X, рассматриваемое со слабой топологией; X_w является локально выпуклым пространством (см. замечание 4.8 гл. I). Пусть $\operatorname{int} S$ обозначает внутренность интервала S. При определении распределений мы исходим из пространства $\mathscr{D}(\operatorname{int} S)$, которое получается при наделении соответствующей топологией множества $C_0^\infty(\operatorname{int} S)$ (см. лемму 1.21 гл. II). Для упрощения записи здесь и всюду далее это пространство обозначается через $\mathscr{D}(S)$. При этом мы считаем, что функции из $\mathscr{D}(\operatorname{int} S)$ продолжены (как нуль) с $\operatorname{int} S$ на весь интервал S, так что $\mathscr{D}(S)$ состоит из всех определенных на S бесконечно дифференцируемых вещественных функций, носители которых компактны и лежат в $\operatorname{int} S$. Отметим, что некоторые авторы используют это обозначение, понимая под $\mathscr{D}(S)$ множество всех определенных на S бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в S.

Определение 1.9. Обозначим пространство $\mathscr{L}(\mathscr{D}(S), X_w)$ всех непрерывных линейных отображений пространства $\mathscr{D}(S)$ в локально выпуклое пространство X_w через $\mathscr{D}^*(S; X)$ и элементы этого пространства назовем *распределениями на S со значениями в X*. Пространство $\mathscr{D}^*(S; X)$ мы рассматриваем как локально выпуклое пространство, а именно в качестве топологии в нем берем простую топологию пространства $\mathscr{L}(\mathscr{D}(S), X_w)$ (см. замечание 4.4 гл. I).

Замечание 1.12. Топология пространства $\mathscr{D}^*(S; X)$ может быть задана с помощью полунорм

$$p_{\varphi, y}(u) = |\langle y, u(\varphi)\rangle|, \quad \varphi \in \mathscr{D}(S), \quad y \in X^*, \quad u \in \mathscr{D}^*(S; X).$$

Последовательность $\{u_n\}$ точно тогда сходится в $\mathscr{D}^*(S; X)$, когда для любых $\varphi \in \mathscr{D}(S)$ и $y \in X^*$ сходится последовательность $\{\langle y, u_n(\varphi)\rangle\}$.

Замечание 1.13. $\mathscr{D}^*(S; R^1) = \mathscr{D}^*(\operatorname{int} S)$, т. е. при $X = R^1$ введенное здесь пространство распределений совпадает с введенным в § 1 гл. II пространством (вещественнозначных) распределений на $\operatorname{int} S$.

Лемма 1.7. Пусть функция $u \in (S \to X)$ локально интегрируема по Бохнеру, т. е. на любом компактном подынтервале K в S эта функция принадлежит $L^1(K; X)$. Тогда ей можно поставить в соответствие некоторое распределение на S со значениями в X по правилу

$$f_u(\varphi) = \int_S \varphi(s) u(s)\, ds, \quad \varphi \in \mathscr{D}(S). \tag{1.40}$$

Интеграл в (1.40) понимается как интеграл Бохнера. Соответствие

$$u \to f_u \tag{1.41}$$

является взаимно однозначным, если, как обычно, эквивалентные интегрируемые по Бохнеру функции считать равными.

Доказательство. Интеграл Бохнера в (1.40) существует, поскольку функция u локально интегрируема, а функция φ имеет компактный носитель. Из леммы 1.22 гл. II следует, что f_u является непрерывным линейным отображением $\mathscr{D}(S)$ в X, а тем самым и в X_w.

Для доказательства взаимной однозначности соответствия (1.41) покажем, что из $f_u = 0$ следует, что $u = 0$. Итак, пусть

$$f_u(\varphi) = \int_S \varphi(s)\, y(s)\, ds = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(S). \tag{1.42}$$

Для заданных $\varepsilon > 0$ и t_0, $t \in S$, таких, что $(t - t_0)/2 > \varepsilon$, найдется функция $\varphi \in \mathscr{D}(S)$ со следующими свойствами:

a) $0 \leqslant \varphi(s) \leqslant 1 \quad \forall s \in S$;

b) $\varphi(s) = 1$ для $t_0 + \varepsilon \leqslant s \leqslant t - \varepsilon$;

c) $\varphi(s) = 0$ для $s \leqslant t_0$ и $s \geqslant t$.

Для этой функции φ ввиду (1.42) имеем

$$\left\| \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds - \int_S \varphi(s)\, u(s)\, ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} (1 - \varphi(s))\, u(s)\, ds + \int_{t-\varepsilon}^{t} (1 - \varphi(s))\, u(s)\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \| u(s) \|\, ds + \int_{t-\varepsilon}^{t} \| u(s) \|\, ds.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} \| u(s) \|\, ds = 0.$$

Дифференцируя по t и используя теорему 1.7, находим

$$u(t) = v'(t) = 0 \qquad \text{для почти всех } t \in S.$$

Лемма доказана.

Замечание 1.14. В силу леммы 1.7 каждую локально интегрируемую по Бохнеру функцию u можно отождествить с отвечающим ей распределением $f_u \in \mathscr{D}^*(S; X)$, а множество всех локально интегрируемых по Бохнеру функций из $(S \to X)$ трактовать как подпространство в $\mathscr{D}^*(S; X)$. По этой причине о распределениях, которые допускают представление вида (1.40), мы будем говорить как о функциях из $(S \to X)$.

Определение 1.10. Для каждого распределения $f \in \mathscr{D}^*(S; X)$ определим *производную* $f' \in \mathscr{D}^*(S; X)$ по правилу

$$f'(\varphi) = -f(\varphi') \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(S). \tag{1.43}$$

Замечание 1.15. Нетрудно видеть, что отображение f' из $\mathscr{D}(S)$ в X_w линейно и непрерывно, т. е. оно действительно принадлежит $\mathscr{D}^*(S; X)$, как это неявно утверждается в определении.

Если $f_n \to f$ в $\mathscr{D}^*(S; X)$, то для $y \in X^*$ и $\varphi \in \mathscr{D}(S)$

$$\lim_{n\to\infty} \langle y, f_n'(\varphi) - f'(\varphi)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y, f(\varphi') - f_n(\varphi')\rangle = 0,$$

следовательно, $f_n' \to f'$ в $\mathscr{D}^*(S; X)$. Таким образом, соответствие $f \to f'$ является непрерывным отображением $\mathscr{D}^*(S; X)$ в себя.

Лемма 1.8. Пусть фиксировано $t_0 \in S$, и пусть u — локально интегрируемая по Бохнеру функция из $(S \to X)$. Тогда определенная формулой

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds$$

функция $v \in C(S; X)$, рассматриваемая как элемент из $\mathscr{D}^*(S; X)$, имеет производную $v' = u$.

Доказательство. Для $y \in X^*$ функция $\langle y, v(\cdot)\rangle$ абсолютно непрерывна. Используя формулу интегрирования по частям (справедливую для абсолютно непрерывных функций), получаем, что для любых $y \in X^*$ и $\varphi = \mathscr{D}(S)$

$$\langle y, v'(\varphi)\rangle = \langle y, -v(\varphi')\rangle = \left\langle y, -\int_S v(t)\varphi'(t)\, dt \right\rangle =$$

$$= -\int_S \int_{t_0}^{t} \langle y, u(s)\rangle\, ds \varphi'(t)\, dt = \int_S \langle y, u(t)\rangle \varphi(t)\, dt =$$

$$= \left\langle y, \int_S u(t)\varphi(t)\, dt \right\rangle = \langle y, u(\varphi)\rangle;$$

здесь через $u(\varphi)$, $v(\varphi)$, $v'(\varphi)$ обозначены значения u, v, v', рассматриваемых как элементы из $\mathscr{D}^*(S; X)$, на элементе $\varphi \in \mathscr{D}(S)$. Отсюда следует, что $v' = u$. Лемма доказана.

Замечание 1.16. Из леммы 1.8 и теоремы 1.9 видно, в частности, что для каждой функции $u \in C_w^1(S; X)$ слабая производная совпадает с производной этой функции, рассматриваемой как элемент из $\mathscr{D}^*(S; X)$.

Следующая лемма показывает, что распределение $u \in \mathscr{D}^*(S; X)$ определяется своей производной однозначно с точностью до аддитивной постоянной.

Лемма 1.9. Если $u' = 0$ для $u \in \mathscr{D}^*(S; X)$, то u — постоянная функция из $(S \to X)$, т. е. для некоторого $x \in X$

$$u(t) = x \quad \text{при почти всех } t \in S.$$

Доказательство. Пусть $u' = 0$, т. е.

$$0 = u'(\varphi) = -u(\varphi') \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(S). \tag{1.44}$$

Как легко видеть, элемент $\psi \in \mathscr{D}(S)$ точно тогда является производной некоторой функции $\varphi \in \mathscr{D}(S)$, когда $\int\limits_S \psi(s)\,ds = 0$. Если ψ_1 — какая-нибудь фиксированная функция из $\mathscr{D}(S)$ с $\int\limits_S \psi_1(s)\,ds = 1$, а $\chi \in \mathscr{D}(S)$ — произвольная функция, то функция

$$\psi = \chi - \int\limits_S \chi(s)\,ds \cdot \psi_1$$

удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_S \psi(s)\,ds = 0.$$

Следовательно, каждый элемент $\chi \in \mathscr{D}(S)$ можно представить в виде

$$\chi = \int\limits_S \chi(s)\,ds \cdot \psi_1 + \varphi', \quad \varphi \in \mathscr{D}(S). \tag{1.45}$$

Из (1.44) и (1.45) вытекает, что

$$u(\chi) = \int\limits_S \chi(s)\,ds \cdot u(\psi_1).$$

Если v — постоянная функция, заданная формулой

$$v(t) = u(\psi_1) \quad \forall t \in S,$$

то

$$v(\chi) = \int\limits_S \chi(s)\,v(s)\,ds = \int\limits_S \chi(s)\,ds \cdot u(\psi_1),$$

т. е. $v(\chi) = u(\chi)$ для каждого $\chi \in \mathscr{D}(S)$ и, значит, $u = v$. Лемма доказана.

5. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этом пункте мы предполагаем, что заданы рефлексивное сепарабельное[1]) банахово пространство $\{V, \|\cdot\|\}$ и гильбертово

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 78.

пространство $\{H, (\cdot, \cdot)\}$ с нормой $|\cdot|$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} V \subset H, \quad V \text{ плотно в } H, \\ |x| \leqslant \gamma \|x\| \quad \forall x \in V, \quad \gamma = \text{const}. \end{gathered} \tag{1.46}$$

Из (1.46) следует, что V непрерывно вложено в H. Как мы показали в § 6 гл. I, при предположениях (1.46) пространство H можно отождествить с его сопряженным H^*, а H^* — с некоторым подпространством сопряженного к V пространства V^*. Таким образом, приходим к соотношению

$$V \subset H \subset V^*; \tag{1.47}$$

при этом пространство H непрерывно вложено в V^* и плотно в нем. Далее, скалярное произведение между V^* и V можно обозначать точно так же, как и скалярное произведение в H, через $(\cdot, \cdot)$. Мы будем использовать такую возможность. Целесообразность этого выяснится позднее, когда нужно будет одновременно работать с несколькими скалярными произведениями.

До конца этого пункта будем считать, что заданы два вещественных числа p и p_0, удовлетворяющие условию $1 < p \leqslant \leqslant p_0 < \infty$. Пусть числа q и q_0 определены условиями $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$. Теперь мы введем пространства, которые будут играть важную роль при изучении эволюционных уравнений в гл. VI. Положим

$$X = L^p(S; V) \cap L^{p_0}(S: H). \tag{1.48}$$

Как пересечение двух банаховых пространств X само является банаховым пространством. В соответствии с соглашением, принятым нами в замечании 5.12 гл. I, норма в X имеет вид

$$\|u\|_X = \|u\|_{L^p(S;\, V)} + \|u\|_{L^{p_0}(S;\, H)}. \tag{1.49}$$

В силу теоремы 5.13 гл. I и теоремы 1.14, сопряженным к X будет пространство

$$X^* = L^q(S; V^*) + L^{q_0}(S; H) \tag{1.50}$$

с нормой (см. замечание 5.13 гл. I)

$$\|f\|_{X^*} = \inf_{\substack{f_1 \in L^q(S;\, V^*) \\ f_2 \in L^{q_0}(S;\, H) \\ f_1 + f_2 = f}} \max\left(\|f_1\|_{L^q(S;\, V^*)}, \|f_2\|_{L^{q_0}(S;\, H)}\right).$$

При этом нужно помнить, что пространства H и H^* отождествлены.

Если $f \in X^*$ допускает представление $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in L^q(S; V^*)$ и $f_2 \in L^{q_0}(S; H)$, то скалярное произведение элементов f и $u \in X$, которое мы ниже обозначаем через $\langle f, u\rangle$, задается соотношением

$$\langle f, u\rangle = \int_S (f_1(t), u(t))\,dt + \int_S (f_2(t), u(t))\,dt = \int_S (f(t), u(t))\,dt \tag{1.52}$$

(см. теорему 1.14 о представлении линейного непрерывного функционала на $L^p(S; V)$).

Замечание 1.17. Согласно теореме 5.13 гл. I и теореме 1.14, сопряженное к X^* пространство можно отождествить с $X = L^p(S; V) \cap L^{p_0}(S; H)$. Следовательно, при заданных предположениях пространство X рефлексивно.

Замечание 1.18. Если $p = p_0$, то $X = L^p(S; V)$; при этом норма (1.49) эквивалентна обычной норме в $L^p(S; V)$.

Замечание 1.19. Как функции из X, так и функции из X^* можно, в силу (1.48), (1.50) и (1.47), трактовать как локально интегрируемые функции из $(S \to V^*)$ и тем самым как элементы из $\mathscr{D}^*(S; V^*)$ (см. замечание 1.14). Ниже через u' мы обозначаем производную от $u \in X$ в смысле распределений.

Лемма 1.10. Если последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к элементу u в X, соответственно в X^*, то она сходится к u и в $\mathscr{D}^*(S; V^*)$.

Доказательство. Нам надо показать, что для любых $x \in V$ и $\varphi \in \mathscr{D}(S)$ последовательность $\left\{\left(\int_S u_n(s)\varphi(s)\,ds, x\right)\right\}$ сходится к $\left(\int_S u(s)\varphi(s)\,ds, x\right)$ (см. замечание 1.12). Но действительно, если, скажем, $\{u_n\}$ — слабо сходящаяся последовательность в X, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_S u_n(s)\varphi(s)\,ds, x\right) = \lim_{n\to\infty}\int_S (x\varphi(s), u_n(s))\,ds =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\langle x\varphi, u_n\rangle = \langle x\varphi, u\rangle = \left(\int_S u(s)\varphi(s)\,ds, x\right).$$

Аналогично можно доказать требуемую сходимость и в случае, когда $\{u_n\}$ — слабо сходящаяся последовательность в X^*. Лемма доказана.

При изучении операторных дифференциальных уравнений наряду с пространствами X и X^* играет роль еще одно пространство, которое мы теперь определим и которое для краткости будем обозначать просто через W. Положим

$$W = \{u \mid u \in X,\ u' \in X^*\}.$$

Теорема 1.16. *Множество W с естественными линейными операциями и нормой*

$$\|u\|_W = \|u\|_X + \|u'\|_{X^*}, \qquad u \in W,$$

является банаховым пространством.

Доказательство. Выполнение свойств нормы для $\|\cdot\|_W$ очевидно. Нужно лишь доказать полноту W относительно этой нормы. Пусть $\{u_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в W. В силу полноты X последовательность $\{u_n\}$ обладает пределом $u \in X$. Соответственно последовательность $\{u_n'\}$ имеет в X^* предел $v \in X^*$. По лемме 1.10 последовательность $\{u_n\}$ сходится к u и в $\mathscr{D}^*(S;\ V^*)$. Так как в $\mathscr{D}^*(S;\ V^*)$ производная непрерывно зависит от распределения, то последовательность $\{u_n'\}$ сходится в $\mathscr{D}^*(S;\ V^*)$ к производной u' от u. Следовательно, $u' = v \in X^*$ и $u \in W$. Теорема доказана.

Замечание 1.20. В обозначении W не отражена зависимость введенного пространства от S, V, H, p и p_0. Это оправдано тем, что указанная зависимость, вообще говоря, не играет существенной роли. Лишь в одном случае (лемма 1.12) мы будем использовать одновременно пространства W для различных интервалов S. В этом случае мы выразим зависимость от S при помощи обозначения $W(S)$.

Лемма 1.11. $W \subset C(S;\ V^*)$. В случае компактного интервала S вложение W в $C(S;\ V^*)$ непрерывно.

Доказательство. Пусть $u \in W$. Тогда производная $u' \in (S \to V^*)$ локально интегрируема. Определим функцию $v \in (S \to V^*)$ формулой

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds, \qquad t_0 \in S. \tag{1.53}$$

Обозначим норму в V^* через $\|\cdot\|_*$. Так как

$$\|v(t) - v(s)\|_* \leqslant \int_s^t \|u'(\tau)\|_*\,d\tau \quad \text{при} \quad s \leqslant t,$$

то $v \in C(S;\ V^*)$. С другой стороны, по лемме 1.8, $v' = u'$, а потому, согласно лемме 1.9,

$$u(t) = v(t) + z,\ z \in V^*, \quad \text{для почти всех} \quad t \in S. \tag{1.54}$$

Следовательно, u также принадлежит $C(S, V^*)$. Используя неравенство Гёльдера и определение нормы в X^* (см. (1.51)), получаем из (1.53), с учетом компактности S,

$$\| v(t) \|_* \leqslant \int_S \| u'(s) \|_* \, ds \leqslant K_1 \| u' \|_{X^*}, \qquad K_1 = \text{const}. \tag{1.55}$$

В силу непрерывности вложения V в V^* из (1.54) и (1.55) вытекает, что

$$(\operatorname{mes}(S))^{1/p} \| z \|_* = \left(\int_S \| z \|_*^p \, ds \right)^{1/p} = \| u - v \|_{L^p(S;\, V^*)} \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \left(\| u \|_{L^p(S;\, V^*)} + \| v \|_{C(S;\, V^*)} \right) \leqslant K_3 \left(\| u \|_X + \| u' \|_{X^*} \right), \tag{1.56}$$

где K_2 и K_3 — не зависящие от u постоянные. Наконец из (1.54) — (1.56) следует, что

$$\sup_{t \in S} \| u(t) \|_* \leqslant \sup_{t \in S} \| v(t) \|_* + \| z \|_* \leqslant K \| u \|_W, \quad K = \text{const}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.12. Множество $C^1(S; V) \cap W$ плотно в W.

Доказательство. Рассмотрим отдельно три случая.

Случай 1. $S = R^1$. Положим

$$\rho(t) = \begin{cases} Ce^{-\frac{t^2}{t^2-1}} & \text{при} \quad |t| < 1, \\ 0 & \text{при} \quad |t| \geqslant 1 \end{cases}$$

и $\rho_n(t) = n\rho(nt)$. Постоянную c выберем из условия $\int_{R^1} \rho(t)\, dt = 1$.

По заданной функции $u \in W$ определим функции u_n, $n = 1, 2, \ldots$, формулой

$$u_n(t) = \int_{R^1} \rho_n(t - s)\, u(s)\, ds. \tag{1.57}$$

Непосредственно проверяется, что функции u_n принадлежат $C^1(R^1; V)$ и

$$u_n'(t) = \int_{R^1} \rho_n'(t - s)\, u(s)\, ds = \int_{R^1} \rho_n(t - s)\, u'(s)\, ds. \tag{1.58}$$

Последнее равенство справедливо по определению производной от распределения.

Построенные функции u_n принадлежат $L^p(R^1; V)$ и сходятся в этом пространстве к u. Это вытекает из следующих оценок:

$$\int\limits_{R^1} \| u_n(t) - u(t) \|^p \, dt = \int\limits_{R^1} \left\| \int\limits_{t-(1/n)}^{t+(1/n)} \rho_n(t-s)(u(s) - u(t)) \, ds \right\|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R^1} \left(\int\limits_{-1/n}^{1/n} | \rho_n(h) | \| u(t+h) - u(t) \| \, dh \right)^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R^1} \left\{ \left(\int\limits_{-1/n}^{1/n} | \rho_n(h) |^q \, dh \right)^{p/q} \int\limits_{-1/n}^{1/n} \| u(t+h) - u(t) \|^p \, dh \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{2} (2c)^p \int\limits_{-1/n}^{1/n} \int\limits_{R^1} \| u(t+h) - u(t) \|^p \, dt \, dh.$$

Если теперь воспользоваться леммой 1.5 и введенными там функциями u_h, то получим

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{R^1} \| u_n(t) - u(t) \|^p \, dt \leqslant \lim_{n \to \infty} (2c)^p \sup_{|h| \leqslant 1/n} \| u_h - u \|^p_{L^p(R^1;\, V)} = 0.$$

Соответственно можно показать, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в $L^{p_0}(S;\, H)$ к u. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \| u_n - u \|_X = 0. \tag{1.59}$$

Перейдем теперь к доказательству сходимости производных. Так как $u' \in X^*$, то существует разложение

$$u' = v + w, \quad v \in L^q(S;\, V^*), \quad w \in L^{q_0}(S;\, H).$$

Аналогично (1.57), положим

$$v_n(t) = \int\limits_{R^1} \rho_n(t-s) \, v(s) \, ds,$$

$$w_n(t) = \int\limits_{R^1} \rho_n(t-s) \, w(s) \, ds.$$

В силу (1.58), $v_n + w_n = u_n'$. Так же как и выше при доказательстве сходимости u_n к u в $L^p(R^1; V)$, можно показать, что

$$v_n \to v \quad \text{в} \quad L^q(S;\, V^*), \qquad w_n \to w \quad \text{в} \quad L^{q_0}(S;\, H).$$

Ввиду определения нормы в X^* (см. (1.51)), отсюда следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \| u_n' - u' \|_{X^*} \leqslant \lim_{n \to \infty} \max \left(\| v_n - v \|_{L^q(S;\, V^*)}, \| w_n - w \|_{L^{q_0}(S;\, H)} \right) = 0. \tag{1.60}$$

Соотношения (1.59) и (1.60) показывают, что последовательность $\{u_n\}$ принадлежит $C^1(R^1; V) \cap W$ и сходится в W к u. Тем самым для случая $S = R^1$ лемма доказана.

Случай 2. Интервал S полуограничен. Без потери общности можно считать, что $S = [0, \infty)$. Для заданной функции $u \in W$ положим

$$u_h(t) = u(t+h), \quad h > 0.$$

Тогда на основании леммы 1.5

$$u_h \to u \quad \text{в} \quad L^p(S; V) \quad \text{и} \quad u_h \to u \quad \text{в} \quad L^{p_0}(S; H),$$

а значит,

$$\lim_{h \downarrow 0} \| u_h - u \|_X = 0.$$

Если

$$u' = v + w, \quad v \in L^q(S; V^*), \quad w \in L^{q_0}(S; H),$$

то, очевидно,

$$u_h' = v_h + w_h,$$

где v_h и w_h определяются аналогично u_h. Согласно лемме 1.5,

$$v_h \to v \quad \text{в} \quad L^q(S; V^*) \quad \text{и} \quad w_h \to w \quad \text{в} \quad L^{q_0}(S; H).$$

Отсюда получаем (см. 1.51))

$$\lim_{h \downarrow 0} \| u_h' - u' \|_{X^*} \leqslant \lim_{h \downarrow 0} \max \left(\| v_h - v \|_{L^q(S;\, V^*)}, \| w_h - w \|_{L^{q_0}(S;\, H)} \right) = 0.$$

Проведенные рассуждения показывают, что для завершения доказательства достаточно при фиксированном $h > 0$ аппроксимировать в W функции вида u_h (для $u \in W$) функциями из $C^1(S; V) \cap W$.

Пусть задано $h > 0$, и пусть φ — функция из $C^1(R^1)$ со следующими свойствами:

a) $\varphi(t) = 1$ при $t \geqslant -h/2$;
b) $\varphi(t) = 0$ при $t < -h$.

Положим

$$v(t) = \begin{cases} \varphi(t)\, u(t+h) & \text{при} \quad t \geqslant -h, \\ 0 & \text{при} \quad t < -h. \end{cases}$$

Тогда $v(t) = u_h(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Из определения производной от распределения легко вытекает, что

$$v'(t) = \begin{cases} \varphi'(t)\, u(t+h) + \varphi(t)\, u'(t+h) & \text{при} \quad t \geqslant -h, \\ 0 & \text{при} \quad t < -h. \end{cases}$$

Так как $u \in W = W(S)$, то, согласно лемме 1.11, v принадлежит $W(R^1)$ (по поводу этого обозначения см. замечание 1.20). На основании результата для случая 1 существует последовательность $\{v_n\}$ функций из $C^1(R^1; V) \cap W(R^1)$, которая сходится в $W(R^1)$ к v. Если обозначить через w_n сужение v_n на $S = [0, \infty)$, то $w_n \in C^1(S; V) \cap W(S)$ и

$$w_n \to u_h \quad \text{в} \quad W(S),$$

поскольку сужение v на S равно u_h. Тем самым доказательство для случая 2 завершено.

Случай 3. Интервал S ограничен. Без потери общности можно считать, что $S = [a, b]$, $a < b$. Выберем функцию $\varphi \in C^1(S)$ со следующими свойствами:

a) $\varphi(t) = 0$ в некоторой окрестности точки b;

b) $\varphi(t) = 1$ в некоторой окрестности точки a.

Для произвольной функции $u \in W = W(S)$ положим

$$v(t) = \begin{cases} \varphi(t)\,u(t) & \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad t > b, \end{cases}$$

$$w(t) = \begin{cases} (1 - \varphi(t))\,u(t) & \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad t < a. \end{cases}$$

Тогда

$$v \in W([a, \infty)), \qquad w \in W((-\infty, b]).$$

Это доказывается точно так же, как в случае 2 устанавливается, что $v \in W(R^1)$. Согласно случаю 2, функции v и w можно аппроксимировать последовательностями $\{v_n\} \subset C^1([a, \infty); V) \cap W([a, \infty))$ и $\{w_n\} \subset C^1((-\infty, b]; V) \cap \mathrm{W}((-\infty, b])$ в пространствах $W([a, \infty))$ и $W((-\infty, b])$ соответственно. Следовательно, сужения функций $v_n + w_n$ на интервал $S = [a, b]$, принадлежащие $C^1(S; V)$, сходятся в $W = W(S)$ к функции $v + w$, суженной на S, т. е. к u. Лемма доказана.

Замечание 1.21. Можно усилить результат леммы 1.12 и доказать, что функции из W могут быть аппроксимированы даже бесконечно дифференцируемыми функциями из $(S \to V)$ с компактными носителями. Однако мы этим не будем пользоваться.

Теорема 1.17. $W \subset C(S; H)$. *В случае компактного интервала S это вложение W в $C(S; H)$ непрерывно. При любых $u, v \in W$ справедлива формула интегрирования по частям:*

$$(u(t), v(t)) - (u(s), v(s)) = \int_s^t \{(u'(\tau), v(\tau)) + (u(\tau), v'(\tau))\}\, d\tau, \; s, t \in S. \tag{1.61}$$

Доказательство. Так как принадлежность функции из $(S \to H)$ к $C(S; H)$ является локальным свойством, то доказательство достаточно провести для случая компактного интервала $S = [a, b]$.

Прежде всего легко проверяется справедливость формулы (1.61) для $u, v \in C^1(S; V)$; для этого надо просто вычислить производную функции $(u(\cdot), v(\cdot)) \in (S \to R^1)$.

Зафиксируем какую-нибудь функцию $\varphi \in C^1(S)$ с $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$. Для $u \in C^1(S; V)$ положим

$$v = \varphi u, \qquad w = u - \varphi u.$$

Тогда

$$v' = \varphi' u + \varphi u',$$
$$w' = u' - \varphi' u - \varphi u'.$$

Применим формулу (1.61) к v и u, а также к w и u:

$$(v(t), u(t)) = \int_a^t \{\varphi'(s)(u(s), u(s)) + 2\varphi(s)(u'(s), u(s))\}\, ds,$$

$$-(w(t), u(t)) = \int_t^b \{-\varphi'(s)(u(s), u(s)) + 2(1 - \varphi(s))(u'(s), u(s))\}\, ds.$$

Вычитая из первого соотношения второе, получаем

$$|u(t)|^2 = \int_a^b \{\varphi'(s)(u(s), u(s)) + {} + 2\varphi(s)(u'(s), u(s))\}\, ds - 2\int_t^b (u'(s), u(s))\, ds.$$

Следовательно, при подходящих (не зависящих от u и t) постоянных K_1 и K_2

$$|u(t)|^2 \leqslant K_1 (\|u\|_{C(S;\, V^*)} \|u\|_{L^p(S;\, V)} + \|u'\|_{X^*} \|u\|_X) \leqslant K_2 \|u\|_W^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что W непрерывно вложено в $C(S; V^*)$ (см. лемму 1.11). Итак, для $u \in C^1(S; V)$ имеем

$$\|u\|_{C(S;\, H)} \leqslant K \|u\|_W, \qquad K = \text{const}. \tag{1.62}$$

Пусть теперь функция $u \in W$ произвольна и $\{u_n\}$ — последовательность функций из $C^1(S; V)$, сходящаяся в W к u. (Согласно лемме 1.12 такая последовательность существует.) Применяя оценку (1.62) к $u_n - u_k$, получим

$$\|u_n - u_k\|_{C(S,\, H)} \leqslant K \|u_n - u_k\|_W,$$

т. е. последовательность $\{u_n\}$ сходится в $C(S; H)$. Поскольку ее пределом может быть только u, то u (с точностью до эквивалентности) принадлежит $C(S; H)$. Далее, предельный переход $u_n \to u$ показывает, что оценка (1.62) справедлива для любой функции $u \in W$. Тем самым доказана непрерывность вложения W в $C(S; H)$.

Справедливость формулы (1.61) для любых $u, v \in W$ устанавливаем, аппроксимируя u и v в W функциями из $C^1(S; V)$ и производя предельный переход. Доказательство допустимости предельного перехода не представляет никаких затруднений, ввиду непрерывности вложения W в $C(S; H)$. Теорема доказана.

Замечание 1.22. Из (1.61) при $v = u$ получается соотношение

$$\frac{1}{2}(|u(t)|^2 - |u(s)|^2) = \int_s^t (u'(\tau), u(\tau))\, d\tau$$

$$\text{для } t, s \in S \quad \text{и} \quad u \in W.$$

Этим соотношением мы позже будем часто пользоваться.

§ 2. ЗАДАЧИ С КРАЕВЫМИ И НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ КАК ОПЕРАТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Этот параграф посвящен функционально-аналитической формулировке классических задач с краевыми и начальными условиями, а говоря точнее, приведению классических задач с краевыми и начальными условиями к виду задач с начальными условиями для операторных дифференциальных уравнений. В п. 1 на примере параболического дифференциального уравнения устанавливается принципиальная связь между классическими задачами с краевыми и начальными условиями и задачами с начальными условиями для операторных дифференциальных уравнений. В п. 2 дан обзор задач с начальными условиями для различных типов операторных дифференциальных уравнений, которые встречаются при функционально-аналитическом формулировании задач с краевыми и начальными условиями для конкретных классов уравнений с частными производными.

Этот параграф тесно примыкает к § 2 гл. II. Мы будем пользоваться введенными там понятиями и обозначениями без дополнительных пояснений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть G — ограниченная область в R^n с регулярной в смысле определения 1.17 гл. II границей Γ. Пусть, далее, $S = [0, T]$, $T > 0$, — какой-то интервал времени. Рассмотрим задачу с краевыми и начальными условиями

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j}(t, x)\right) = g(t, x) \quad \forall t \in s, \quad \forall x \in G,$$
$$v(0, \cdot) = a, \quad v(t, x)|_\Gamma = 0 \quad \forall t \in S \tag{2.1}$$

или, более общим образом, задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + (Ev)(t, x) = g(t, x) \quad \forall t \in S, \quad \forall x \in G,$$
$$u(0, \cdot) = a, \; v(t, \cdot) \in \mathrm{D}(E) \quad \forall t \in S. \tag{2.2}$$

Здесь E — некоторый дифференциальный оператор с областью определения $\mathrm{D}(E)$ (см. § 2.1 гл. II). Через Ev для определенных на $S \times \bar{G}$ функций v с $v(t, \cdot) \in \mathrm{D}(E)$, $t \in S$, обозначена функция, также определенная на $S \times \bar{G}$, которая получается в результате обычного применения оператора E (т. е. когда t считается фиксированным) к $v(t, \cdot)$. Наконец, g и a — заданные функции, определенные соответственно на $S \times G$ и G.

Под классическим решением задачи (2.2) обычно понимают непрерывную на $S \times \bar{G}$ непрерывно дифференцируемую по t функцию, удовлетворяющую условиям (2.2). Разрешимость классической задачи (2.2) зависит от указанных в § 2.1 гл. II свойств функций a_α, фигурирующих в определении оператора E, а также от свойств правой части g и границы Γ области G. Кроме того, начальное значение a должно, очевидно, удовлетворять условию $a \in \mathrm{D}(E)$. Доказательство теорем существования классического решения задачи (2.2), как правило, требует применения сложной техники.

Ниже мы перейдем от классических задач вида (2.2) к соответствующим их функционально-аналитическим постановкам, при которых упомянутые предположения относительно a_α, g, Γ и a будут излишни. Для задач в функционально-аналитической постановке в гл. VI мы сравнительно просто докажем утверждения о существовании и аппроксимации решений.

Проведенный в § 2 гл. II переход от классических краевых задач к соответствующим их функционально-аналитическим постановкам, т. е. к операторным уравнениям, — который ввиду простоты теории операторных уравнений, представленной в гл. III, оказался весьма целесообразным,— был основан на понятии энергетического расширения оператора. Это понятие играет решающую роль и при функционально-аналитическом формулировании задач с краевыми и начальными условиями.

Примем следующее соглашение. Задачу Коши

$$u'(t)+Au(t)=f(t) \qquad \forall t\in S,$$
$$u(0)=a, \quad u\in(S\to V), \quad u'\in(S\to V^*) \tag{2.3}$$

с $f(t)=g(t,\cdot)$, $t\in S$, будем называть *функционально-аналитической формулировкой задачи с краевым и начальным условиями* (2.2), если оператор $A\in(V\to V^*)$ является энергетическим расширением оператора E.

Замечание 2.1. Требование $u'\in(S\to V^*)$ нужно понимать в том смысле, что производная от u в смысле пространства распределений $\mathscr{D}^*(S;V^*)$ представима с помощью функции из $(S\to V^*)$. В дальнейшем это требование реализуется различными способами, например в виде условия принадлежности u к $C^1_w(S;\ V^*)$.

Ниже мы оправдаем принятое только что соглашение (лемма 2.3) и покажем, что классическая задача (2.2) с краевым и начальным условиями и отвечающая ей начальная задача (2.3) в некотором смысле эквивалентны. А сначала приведем две леммы, которые будут использованы при доказательстве этой эквивалентности.

Первая из этих лемм уточняет данное в начале § 1 указание на связь между функциями v, определенными на $S\times\bar{G}$, и «абстрактными» функциями $u\in(S\to C(\bar{G}))$.

Лемма 2.1. Формула

$$u(t)=v(t,\ \cdot) \qquad \forall t\in S \tag{2.4}$$

устанавливает взаимно однозначное обратимое соответствие $v\to u$ между функциями $v\in C(S\times\bar{G})$ и функциями $u\in C(S;C(\bar{G}))$. Функция $v\in C(S\times\bar{G})$ точно тогда обладает частной производной $\frac{\partial v}{\partial t}\in C(S\times\bar{G})$, когда отвечающая ей по формуле (2.4) функция u принадлежит $C^1(S;C(\bar{G}))$, и в этом случае $\frac{\partial v}{\partial t}(t,\ \cdot)=u'(t)$ для каждого $t\in S$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Пусть существует $\frac{\partial v}{\partial t}\in C(S\times\bar{G})$. Тогда на основании теоремы о среднем имеем

$$\lim_{h\to0}\left\|\frac{1}{h}(u(t+h)-u(t))-\frac{\partial v}{\partial t}(t,\ \cdot)\right\|_{C(\bar{G})}=$$
$$=\lim_{h\to0}\sup_{x\in\bar{G}}\left|\frac{1}{h}(v(t+h,\ x)-v(t,\ x))-\frac{\partial v}{\partial t}(t,\ x)\right|=$$
$$=\lim_{h\to0}\sup_{x\in\bar{G}}\left|\frac{\partial v}{\partial t}(t+sh,\ x)-\frac{\partial v}{\partial t}(t,\ x)\right|=0.$$

(Здесь $s = s(x) \in [0, 1]$.) Обратно, пусть $u \in C^1(S; C(\bar{G}))$. Тогда

$$\lim_{h\to 0} \sup_{x\in\bar{G}} \left| \frac{1}{h}(v(t+h, x) - v(t, x)) - u'(t)(x) \right| =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) - u'(t) \right\|_{C(\bar{G})} = 0.$$

Тем самым лемма доказана.

При определении энергетического расширения оператора мы требовали, чтобы пространство V было непрерывно и плотно вложено в некоторое гильбертово пространство H (определение 2.1, с) гл. II). Во всех примерах, приведенных в § 2.2 гл. II, $H \subset L^2(G)$.

Лемма 2.2 Если $H \subset L^2(G)$ и $\|u\|_H = \|u\|_{L^2(G)}$ для всех $u \in H$, то

$$(S \to H) \cap C^1(S; L^2(G)) \subset C^1(S; H).$$

Доказательство. Пусть $u \in (S \to H) \cap C^1(S; L^2(G))$. Тогда, очевидно, u принадлежит $C(S; H)$. Покажем, что $u' \in C(S; H)$. Положим

$$u_h(t) = \frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) \in H, \quad t, t+h \in S.$$

Так как $u \in C^1(S; L^2(G))$, то

$$\lim_{h\to 0} \| u_h(t) - u'(t) \|_{L^2(G)} = 0.$$

В силу полноты H отсюда вытекает, что $u'(t) \in H$. Следовательно, $u' \in C(S; H)$. Лемма доказана.

Следующая лемма указывает, в каком смысле можно считать эквивалентными классическую и функционально-аналитическую формулировки задачи с краевым и начальным условиями.

Лемма 2.3. Пусть A — энергетическое расширение оператора E. Пусть, далее, $H \subset L^2(G)$, $\|u\|_H = \|u\|_{L^2(G)}$, $u \in H$, и $g(t, \cdot) = f(t) \in H$ при всех $t \in S$. Функция $v \in C(S \times \bar{G})$ точно тогда представляет собой классическое решение задачи (2.2) с краевым и начальным условиями, когда функция u, отвечающая v при взаимно однозначном обратимом соответствии, описанном в лемме 2.1, удовлетворяет соотношениям $u \in C^1(S; C(\bar{G}))$ и $u(t) \in M(E)$, $t \in S$, и является решением задачи Коши (2.3).

Доказательство. Пусть v служит решением задачи (2.2) и

$$u(t) = v(t, \cdot) \quad \forall t \in S.$$

Тогда $u(0) = a$ и $u(t) \in \mathrm{D}(E) \subset V$, $t \in S$, а следовательно, $u \in (S \to V)$. Согласно леммам 2.1 и 2.2 и свойству с) энергетического расширения A для E (см. § 2.1 гл. II), $u' \in C(S; H) \subset \subset (S \to V^*)$ и

$$u'(t) + Au(t) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, \cdot) + Eu(t) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, \cdot) + (Ev)(t, \cdot) = \\ = g(t, \cdot) = f(t) \quad \forall t \in S.$$

Обратно, пусть функция $u \in C^1(S; C(\bar{G}))$ с $u(t) \in \mathrm{M}(E)$, $t \in S$, есть решение задачи (2.3). Ввиду леммы 2.2, $u' \in C(S; H)$ и потому

$$Au(t) = f(t) - u'(t) \in H \qquad \forall t \in S.$$

В силу свойства d) энергетического расширения отсюда следует, что $u(t) \in \mathrm{D}(E)$, $t \in S$. Наконец, на основании свойства с) и леммы 2.1

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, \cdot) + (Ev)(t, \cdot) = u'(t) + Eu(t) = \\ = u'(t) + Au(t) = f(t) = g(t, \cdot)\, \forall t \in S.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем рассматривать задачу с краевым и начальным условиями вида

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + (E(t)v)(t, x) = g(t, x) \qquad \forall t \in S; \quad \forall x \in G, \\ v(0, \cdot) = a, \qquad v(t, \cdot) \in \mathrm{D}(E(t)) \qquad \forall t \in S. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Пусть $\{E(t)\}$ — семейство эллиптических дифференциальных операторов $E(t)$ с областью определения $\mathrm{D}(E(t))$, $t \in S$. Предположим что:

a) у всех операторов $E(t)$ одна и та же естественная область определения;

b) все операторы $E(t)$ обладают энергетическими расширениями $A(t)$ с одними и теми же (не зависящими от t) пространствами V и H.

Тогда при помощи нашего утверждения об эквивалентности (лемма 2.3) мы можем преобразовать задачу (2.5) к следующей задаче Коши:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \qquad \forall t \in S,$$

$$u(0) = a, \qquad u \in (S \to V), \quad u' \in (S \to V^*),$$

где $f(t) = g(t, \cdot)$, $t \in S$.

Следующие два примера показывают, что приведенные выше предположения в важных случаях выполняются или же их выполнения можно добиться без больших затруднений.

1. Пусть оператор $E(t)$ из (2.5) определен для $z \in \in \mathrm{M}(E(t)) = C^2(\bar{G})$, $t \in S$, по правилу

$$(E(t)z)(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(t, x, w(x)) \quad \forall x \in G, \quad w = \operatorname{grad} z, \quad (2.6)$$

с $\mathrm{D}(E(t)) = \{z \mid z \in C^2(\bar{G}), z|_\Gamma = \varphi_t\}$, $t \in S$. Предположим, что заданные на Γ функции φ_t, $t \in S$, обладают такими продолжениями $u_{1t} \in C^2(\bar{G})$), для которых функция v_1 на $S \times \bar{G}$, определенная формулой $v_1(t, x) = u_{1t}(x)$, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t. С помощью подстановки

$$v = \bar{v} + v_1$$

рассматриваемая задача с краевыми и начальными условиями преобразуется в следующую задачу:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(t, x) + (E_1(t)\bar{v})(t, x) = g(t, x) - \frac{\partial v_1}{\partial t}(t, x) \quad \forall t \in S, \quad \forall x \in G,$$

$$\bar{v}(0, \cdot) = a - v_1(0, \cdot),$$

$$\bar{v}(t, \cdot) \in D(E_1(t)) = D(E_1(0)) = \{z \mid z \in C^2(\bar{G}),\ z|_\Gamma = 0\}, \qquad t \in S.$$

При этом оператор $E_1(t)$ определяется правилом

$$(E_1(t)z)(x) = (E(t)(z + u_{1t}))(x) \quad \forall x \in G, \quad \forall t \in S.$$

Если для каждого фиксированного $t \in S$ функции $a_{it} = a_i(t, \cdot, \cdot)$ при некотором $p \geqslant 2$ удовлетворяют предположениям леммы 2.2 гл. II, то операторы $E_1(t)$, $t \in S$, обладают энергетическими расширениями $A(t)$ с $V = W_0^{1,p}(G)$ и $H = L^2(G)$ (см. § 2.2 гл. II).

2. Для области G класса $C^{1,1}$ рассмотрим семейство операторов, определенных той же формулой (2.6), но теперь с

$$\mathrm{D}(E(t)) = \left\{ z \mid z \in C^2(\bar{G}),\ |z|^{p-2}z + \frac{\partial z}{\partial \nu_{E(t)}}\Big|_\Gamma = \varphi_t \right\}.$$

Снова предположим, что функции $a_i(t, \cdot, \cdot)$, $t \in S$, при некотором $p \geqslant 2$ удовлетворяют условиям леммы 2.2 гл. II, и пусть, кроме того, функции φ_t, $t \in S$, принадлежат $L^q(G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда согласно результатам § 2.2 гл. II операторы $E(t)$ обладают энергетическими расширениями $A(t)$ с $V = W^{1,p}(G)$ и $H = L^2(G)$.

2. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ниже дается обзор различных типов задач с начальными условиями для операторных дифференциальных уравнений, которые будут обсуждаться в гл. V—VII. При этом лишь очень кратко указывается на связь этих задач с соответствующими классическими задачами с краевыми начальными условиями. Для оправдания этого можно привести две причины: 1) Основные моменты этой связи были достаточно подробно рассмотрены в предыдущем пункте на примере параболических дифференциальных уравнений. 2) Путь от конкретной задачи, скажем задачи механики сплошной среды, через классическую задачу с краевыми и начальными условиями к задаче с начальным условием для операторного дифференциального уравнения нам кажется исторически сложившимся окольным путем; располагая функционально-аналитическим аппаратом, изложенным в гл. II и IV, искомую «абстрактную» задачу с начальным условием можно вывести непосредственно из постановки задачи в механике. На этом прямом пути вдобавок удается избежать ненужных и неестественных требований на «коэффициенты» дифференциальных операторов, область, а также граничные и начальные значения.

При обзоре типов задач мы ограничиваемся указанием тех предположений о пространствах, операторах, функциях и элементах, которые необходимы для самой постановки задачи. Условия, обеспечивающие существование и единственность решений, равно как условия, обеспечивающие сходимость приближенных методов, будут приведены в соответствующих теоремах гл. V—VII.

Все перечисляемые ниже задачи с начальными условиями относятся к интервалу времени $S = [0, T]$, $T > 0$.

Тип I. Заданы гильбертово пространство H, два семейства $A = \{A(t)\}$, $t \in S$, и $B = \{B(t)\}$, $t \in S$, операторов из $(H \to H^*)$ и функция $f \in (S \to H^*)$. Нужно найти функцию $u \in (S \to H)$ с $u' \in (S \to H)$, которая удовлетворяет уравнению

$$A(t)\, u'(t) + B(t)\, u(t) = f(t) \qquad \forall t \in S$$

и начальному условию

$$u(0) = a,$$

где a — заданный элемент из H.

Тип II. При тех же предположениях относительно H, A, B и f, что и в задачах типа I, требуется найти функцию $u \in (S \to H)$, которая удовлетворяет уравнению

$$(A(t)\, u(t))' + B(t)\, u(t) = f(t) \qquad \forall t \in S$$

и начальному условию

$$A(0)\, u(0) = b$$

при заданном элементе $b \in H^*$.

Задачи типов I и II возникают при функционально-аналитическом формулировании задач с краевыми и начальными условиями для *псевдопараболических дифференциальных уравнений*, называемых также *уравнениями Соболева — Гальперна*. К такого рода задачам сводятся, в частности, различные задачи механики сплошной среды. Семейства операторов A и B возникают здесь при энергетическом расширении соответствующих семейств эллиптических операторов.

Тип III. Заданы гильбертово пространство H и непрерывно и плотно вложенное в H рефлексивное банахово пространство V, а также семейство $A = \{A(t)\}$, $t \in S$, операторов из $(V \to V^*)$ и функция $f \in (S \to V^*)$. Требуется найти функцию $u \in (S \to V)$ с $u' \in (S \to V^*)$, удовлетворяющую уравнению

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \qquad \forall t \in S$$

и начальному условию

$$u(0) = a,$$

где $a \in V$ — заданный элемент.

К задачам типа III мы пришли в предыдущем пункте, когда давали функционально-аналитическую формулировку задач с краевыми и начальными условиями для параболических дифференциальных уравнений.

Тип IV. Заданы пространства V и H, как в задачах типа III, а также для семейства $A = \{A(t)\}$, $t \in S$, и $B = \{B(t)\}$, $t \in S$, операторов из $(V \to V^*)$ и функция $f \in (S \to V^*)$. Требуется найти функцию $u \in (S \to V)$ с $u' \in (S \to V)$ и $u'' \in (S \to V^*)$, удовлетворяющую уравнению

$$u''(t) + A(t)u'(t) + B(t)u(t) = f(t) \qquad \forall t \in S$$

и начальным условиям

$$u(0) = a_0, \qquad u'(0) = a_1$$

при заданных элементах a_0, $a_1 \in V$.

Задачи типа IV возникают при функционально-аналитическом формулировании задач с краевыми и начальными условиями для нелинейных волновых уравнений.

Следует заметить, что здесь речь идет лишь об основных типах задач, которые в последующих главах будут модифицироваться в различных отношениях. Так, прежде всего, вместо семейств $\{A(t)\}$, $\{B(t)\}$ операторов из $(V \to V^*)$ будут рассматриваться также операторы A, B из $(S \to V) \to (S \to V^*))$ и, в частности, из $(L^p(S; V) \to L^q(S; V^*))$, $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$. Таким путем мы получаем более общую постановку задачи, ибо каждому семейству $\{A(t)\}$ операторов из $(V \to V^*)$ можно поставить в соответствие оператор $A \in ((S \to V) \to (S \to V^*))$ по правилу

$$(Au)(t) = A(t)u(t) \qquad \forall t \in S,$$

однако не каждый оператор $A \in ((S \to V) \to (S \to V^*))$ допускает такое представление. К операторам, его не допускающим, относятся, в частности, так называемые операторы Вольтерры $A \in ((S \to V) \to (S \to V^*))$, которые в дальнейшем играют важную роль. Операторы Вольтерры характеризуются тем, что значение $(Au)(t)$ может зависеть от значений функции u в интервале $[0, t]$, т. е. от «предыстории».

Приведем типичный пример модифицированной указанным выше образом постановки задачи, скажем типа III. Пусть снова V — рефлексивное банахово пространство, непрерывно и плотно вложенное в гильбертово пространство H, и $a \in H$ — заданный элемент. Пусть, далее, A — оператор Вольтерры,

$$A \in (L^p(S; V) \to L^q(S; V^*)), \ p > 1, \ 1/p + 1/q = 1, \text{ и } f \in L^q(S; V^*).$$

Тогда постановка задачи

$$u' + Au = f, \qquad u(0) = a, \qquad u \in L^p(S;\ V)$$

имеет смысл. Действительно, ввиду вложения $V \subset H \subset V^*$ (см. § 6 гл. I), из включения $u \in L^p(S; V^*)$ следует включение $u \in L^p(S; V^*)$, а значит, и $u \in \mathscr{D}^*(S; V^*)$. Поэтому уравнение $u' + Au = f$ можно понимать как уравнение в $\mathscr{D}^*(S; V^*)$. Если $u \in L^p(S; V)$ удовлетворяет этому уравнению, то $u' \in L^q(S; V^*)$ и потому (см. теорему 1.17) $u \in C(S; H)$, т. е. начальное условие $u(0) = a \in H$ имеет смысл.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛ. IV

Содержание п. 1 § 1 совершенно элементарно. Теорему о среднем значении (лемма 1.1) можно найти в более общей форме, например, у Дьёдонне [1].

По поводу теории интеграла Бохнера мы уже указывали в тексте на книгу Иосиды [1]; несколько другой подход к понятию интеграла дает Бурбаки [2]. Результаты о введенных в п. 3 § 1 пространствах интегрируемых функций приводятся (иногда в существенно более общем виде), например, в книгах Бурбаки [2], Эдвардса [1] и Динкуляну [1]. Это относится, в частности, к теореме 1.14 о двойственности между $L^p(S; X)$ и $L^q(S; X^*)$. Доказательство теоремы 1.15 о равномерной выпуклости пространств $L^p(S; X)$ по сути дела совпадает с доказательством равномерной выпуклости пространств $L^p(S)$, данным Кёте [1].

При определении в п. 4 § 1 распределений над S со значениями в X мы в основном следуем Л. Шварцу [1].

Пространства, введенные в п. 5 § 1, представляют собой простые частные случаи «абстрактных» пространств Соболева. Подобные пространства использовали, например, Лионс и Мадженес [1]. Доказательство леммы 1.12, важной для теоремы вложения 1.17, следует доказательству аналогичного утверждения у Лионса и Мадженеса [1, гл. 1, теор. 2.1].

Данная в § 2 функционально-аналитическая формулировка (2.3) задачи (2.2) с краевым и начальным условиями в настоящее время является общепринятой (см., например, Браудер [8], Дубинский [1], Лионс [1]).

Согласно лемме 2.3, каждому классическому решению v задачи (2.2) с краевым и начальным условиями отвечает решение u соответствующей функционально-аналитической задачи. Однако функция v, отвечающая решению u задачи (2.3) по правилу

$$v(t, x) = u(t)(x) \qquad \forall t \in S, \quad \forall x \in G,$$

только тогда будет классическим решением задачи (2.2), когда она достаточно регулярна по t и x. Мы в настоящей книге на этом вопросе не останавливаемся. Читателя, которого он заинтересует, отошлем к монографии Ладыженской, Солонникова и Уральцевой [1] и указанной там литературе.

Дальнейшие пояснения и замечания, касающиеся типов задач, введенных в п. 2 § 2, приведены в заключительных замечаниях к главам, в которых обсуждаются соответствующие задачи.

ГЛАВА V

ОБЫКНОВЕННЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы обстоятельно займемся первыми двумя типами зависящих от времени уравнений согласно классификации, принятой в § 2 гл. IV. Эти уравнения тесно связаны с обыкновенными дифференциальными уравнениями для функций, принимающих значения в банаховом пространстве, которые мы далее будем называть обыкновенными операторными дифференциальными уравнениями. Теоремы существования и единственности для таких уравнений могут быть доказаны вполне аналогично хорошо известным теоремам для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых принимают значения в R^1 или R^n.

В § 1 из обширной теории обыкновенных операторных дифференциальных уравнений представлены лишь некоторые нужные нам результаты, причем мы обобщаем их на случай так называемых операторов Вольтерры. Эти рассмотрения проводятся как в рамках пространств непрерывных функций, так и в рамках пространств квадратично интегрируемых функций; для краткости мы говорим соответственно о «C-теории» и «L^2-теории».

В § 2 обсуждаются псевдопараболические уравнения типов I и II (см. § 2.2 гл. IV). Входящие в них функции принимают значения в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве, а фигурирующие в них операторы отображают рассматриваемое гильбертово пространство в сопряженное к нему пространство. В этом случае можно несложным образом свести псевдопараболические уравнения к обыкновенным операторным дифференциальным уравнениям.

В § 3 мы привлекаем для приближенного решения псевдопараболических уравнений метод Галёркина. При этом приближения выражаются через решения систем обыкновенных, вообще говоря нелинейных, дифференциальных уравнений.

В § 4 полученные утверждения о сходимости метода Галёркина используются в качестве основы для применения проекционно-итерационного метода. Этот метод позволяет находить приближенные решения «линейным» путем, а именно, в существенном, посредством квадратур и решения систем линейных уравнений.

§ 1. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЛИПШИЦ-НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть X — вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $S=[0,T]$, $T>0$ — компактный интервал (времени).

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СЕМЕЙСТВОМ ОПЕРАТОРОВ $G=\{G(t)\}$

Рассмотрим уравнение относительно функции $u\in(S\to X)$

$$u'(t)+G(t)u(t)=f(t), \qquad t\in S, \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$u(0)=a\in X.$$

Здесь $G=\{G(t)\}$, $t\in S$ — некоторое семейство, вообще говоря нелинейных, операторов $G(t)\in(X\to X)$; правая часть f — заданная функция из $(S\to X)$. Уравнения вида (1.1) при условиях, которые будут указаны ниже в этом параграфе, мы называем *обыкновенными операторными дифференциальными уравнениями.*

В этой главе используются без специальных оговорок введенные в гл. IV пространства (пространства непрерывных и интегрируемых функций, а также пространства распределений) и соответствующие теоремы.

Наложим на семейство операторов $G=\{G(t)\}$, $t\in S$, следующие условия:

При каждом $x\in X$ функция $t\to G(t)x$, определенная для $t\in S$, принадлежит $C(S;X)$. (1.2)

Операторы $G(t)\in(X\to X)$ из семейства G (равномерно относительно $t\in S$) липщиц-непрерывны, т. е. существует такая не зависящая от t постоянная Липшица L, что для любых $x, y\in X$ выполняется условие Липшица (1.3)

$$\|G(t)x-G(t)y\|\leqslant L\|x-y\|.$$

Для сокращения записи функцию $t\to G(t)u(t)$, определенную на S, в дальнейшем будем обозначать через Gu.

Прежде всего приведем некоторые многократно используемые ниже вспомогательные утверждения.

Лемма 1.1. Пусть семейство операторов $G=\{G(t)\}$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3) и $u\in C(S;X)$. Тогда

$$Gu\in C(S;X).$$

Доказательство. Пусть $\{t_n\} \subset S$ — произвольная сходящаяся последовательность, $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$. В силу условия Липшица (1.3),

$$\|G(t_n)u(t_n) - G(t_0)u(t_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant L\|u(t_n) - u(t_0)\| + \|G(t_n)u(t_0) - G(t_0)u(t_0)\|.$$

При $t_n \to t_0$ первое слагаемое в правой части стремится к нулю ввиду непрерывности u, а второе стремится к нулю согласно условию (1.2). Лемма доказана.

Лемма 1.2. (C, k)-нормы, определенные для $u \in C(S; X)$ формулой

$$\|u\|_{C,k} = \sup_{t \in S}\{e^{-kt}\|u(t)\|\}, \qquad k \geqslant 0, \tag{1.4}$$

эквивалентны норме

$$\|u\|_{C(S;\, X)} = \sup_{t \in S}\|u(t)\|.$$

Доказательство. Очевидно, что для (1.4) при любом $k \geqslant 0$ выполняются все свойства нормы и

$$\|u\|_{C,\,k} \leqslant \|u\|_{C(S;\, X)} \leqslant e^{kT}\|u\|_{C,\,k}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3 (Гронуолл). Пусть f — вещественная непрерывная функция и g — вещественная неубывающая функция на S. Если

$$f(t) \leqslant g(t) + c\int_0^t f(s)\,ds \qquad \forall t \in S \tag{1.5}$$

с неотрицательной постоянной c, то

$$f(t) \leqslant e^{ct}g(t) \qquad \forall t \in S.$$

В частности, если $g = 0$ и $f \geqslant 0$, то $f = 0$.

Доказательство. Из неравенства (1.5) вытекает по индукции, что

$$f(t) \leqslant g(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{(ct)^k}{k!} + R_{n+1}(t),$$

где

$$R_{n+1}(t) = c^{n+1}\int_0^t\int_0^{s_1}\ldots\int_0^{s_n} f(s_{n+1})\,ds_{n+1}\ldots ds_1.$$

Положим $M = \sup_{t \in s}|f(t)|$. Тогда

$$|R_{n+1}(t)| \leqslant \frac{M(cT)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall t \in S.$$

Так как $R_{n+1}(t) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на S, то утверждение леммы получается предельным переходом при $n \to \infty$.

Теорема 1.1. *При выполнении предположений* (1.2), (1.3) *относительно семейства операторов G задача Коши*

$$u'(t) + G(t)\,u(t) = f(t), \qquad t \in S,$$
$$u(0) = a, \qquad u \in C^1(S;\ X),$$

для любых $f \in C(S; X)$ и $a \in X$ обладает точно одним решением. Устанавливаемое тем самым соответствие $\{a, f\} \to u$ непрерывно как отображение из $X \times C(S; X)$ в $C^1(S; X)$.

Доказательство. Мы построим решение u, используя принцип неподвижной точки Банаха (теорема 2.1 гл. I). Для $u \in C(S; X)$ определим интегральный оператор U формулой

$$(Uu)(t) = a - \int_0^t (G(s)\,u(s) - f(s))\,ds, \qquad t \in S. \tag{1.6}$$

Интеграл понимается как интеграл Бохнера. В силу леммы 1.1 и дифференцируемости неопределенного интеграла Бохнера (теорема 1.9 гл. IV),

$$U \in (C(S;\ X) \to C^1(S;\ X)).$$

Покажем, что U как отображение пространства $C(S; X)$ в себя при подходящем $k \geqslant 0$ является сжимающим в (C, k)-норме, определенной в лемме 1.2. Согласно (1.3), из (1.6) следует, что для $u,\ v \in C(S; X)$

$$\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\| \leqslant \int_0^t \|G(s)\,u(s) - G(s)\,v(s)\|\,e^{-ks}e^{ks}\,ds \leqslant$$
$$\leqslant L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|\,e^{-ks}e^{ks}\,ds \leqslant$$
$$\leqslant L\,\|u - v\|_{C,\,k}\,\frac{e^{kt} - 1}{k},$$

откуда

$$\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\|\,e^{-kt} \leqslant \frac{L}{k}(1 - e^{-kt})\,\|u - v\|_{C,\,k} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L}{k}(1 - e^{-kT})\,\|u - v\|_{C,\,k}.$$

Беря в левой части верхнюю грань по $t \in S$, получаем

$$\|Uu - Uv\|_{C,\,k} \leqslant \frac{L}{k}(1 - e^{-kT})\,\|u - v\|_{C,\,k}.$$

Если выбрать теперь $k \geqslant L$, то отображение U в соответствующей (C, k)-норме будет сжатием. Следовательно, существует элемент $u \in C(S; X)$, являющийся неподвижной точкой для этого отображения: $u = Uu$. В силу (1.6) это означает, что

$$u(t) = a - \int_0^t (G(s)u(s) - f(s))\,ds \qquad \forall t \in S.$$

Так как правая часть этого выражения имеет непрерывную производную по t, то $u \in C^1(S; X)$ и

$$u'(t) + G(t)u(t) = f(t) \qquad \forall t \in S.$$

Начальное условие $u(0) = a$, очевидно, тоже выполняется.

Пусть теперь u_1, u_2 — решения задач Коши

$$\left.\begin{aligned} u_i'(t) + G(t)u_i(t) = f_i(t), \quad & t \in S, \\ u_i(0) = a_i \in X, \quad & u_i \in C^1(S;\ X) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,\ 2) \tag{1.7}$$

с правыми частями $f_i \in C(S;\ X)$. Из соответствующих интегральных уравнений

$$u_1(t) = a_1 - \int_0^t (G(s)u_1(s) - f_1(s))\,ds,$$

$$u_2(t) = a_2 - \int_0^t (G(s)u_2(s) - f_2(s))\,ds$$

в силу условия Липшица (1.3) следует, что

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leqslant \|a_1 - a_2\| + T\|f_1 - f_2\|_{C(S;\ X)} + L\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|\,ds.$$

Поэтому, согласно лемме Гронуолла,

$$\|u_1 - u_2\|_{C(S;\ X)} \leqslant K_1(\|a_1 - a_2\| + \|f_1 - f_2\|_{C(S;\ X)}).$$

С помощью этой оценки из дифференциальных уравнений (1.7) получаем, снова используя липшиц-непрерывность,

$$\|u_1' - u_2'\|_{C(S;\ X)} \leqslant K_2(\|a_1 - a_2\| + \|f_1 - f_2\|_{C(S;\ X)}).$$

Найденные две оценки можно объединить в одну:

$$\|u_1 - u_2\|_{C^1(S;\ X)} \leqslant K(\|a_1 - a_2\| + \|f_1 - f_2\|_{C(S;\ X)}).$$

Здесь K (как и K_1, K_2) — постоянная, зависящая от T и постоянной Липшица L. Из этой оценки видно, что решение u непрерывно зависит от начального значения и от правой части дифференциального уравнения. При $f_1 = f_2$ и $a_1 = a_2$, в частности, получаем единственность решения. Теорема доказана.

Замечание 1.1. Утверждения теоремы 1.1 означают, что задача Коши для рассматриваемых операторных дифференциальных уравнений поставлена корректно.

Ослабляя требования, предъявляемые к области определения решения, теорему 1.1 можно доказать при несколько более слабых предположениях, например при условии липшиц-непрерывности семейства G лишь в некоторой окрестности начального элемента.

Замечание 1.2. Для обыкновенных дифференциальных уравнений, значения решений которых лежат в конечномерном банаховом пространстве X, можно доказать локальную теорему существования (теорему Пеано) всего лишь при таком предположении об операторах семейства G:

Отображение $\{t, y\} \to G(t)y$ непрерывно и ограничено на произведении $[0, t_0] \times Y$ (где $Y \subset X$ — некоторый открытый шар, содержащий начальный элемент a).

Однако в бесконечномерном банаховом пространстве теорема Пеано в общем случае неверна [1]).

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ; C-ТЕОРИЯ

Результаты предыдущего пункта можно обобщить на тот случай, когда вместо операторов из семейства $\{G(t)\}$, $t \in S$, стоят операторы Вольтерры. Эти операторы в некотором смысле учитывают «предысторию», а именно для каждого $u \in (S \to X)$ значение $(Gu)(t)$ в момент времени $t \in S$ зависит от поведения u в предшествовавший период времени $[0, t]$. Имея в виду последующие применения, мы определим сейчас понятие вольтеррова оператора возможно более широко.

Определение 1.1. Пусть X_1, X_2 — линейные пространства и $S = [0, T]$, $T > 0$. Отображение

$$G \in (D(G) \to (S \to X_2)), \qquad D(G) \subset (S \to X_1)$$

называется *оператором Вольтерры*, если из равенства $u(s) = v(s)$ для почти всех $s \in [0, t]$, $t \in S$, следует, что $(Gu)(s) = (Gv)(s)$ для почти всех $s \in [0, t]$.

Прежде всего рассмотрим операторы Вольтерры, отображающие пространство $C(S; X)$ в себя. В этом случае в определе-

---

[1]) Как показал А. Годунов [1], теорема Пеано неверна *ни в каком* бесконечномерном банаховом пространстве. — *Прим. ред.*

нии 1.1 следует положить $X_1 = X_2 = X$ и $D(G) = C(S; X)$, а выражение «для почти всех» можно заменить на «для всех».

Рассмотрим для оператора Вольтерры G следующее условие (являющееся обобщением условий (1.2) и (1.3)):

$$\begin{aligned}&\text{оператор } G \in (C(S;\, X) \to C(S;\, X)) \text{ липшиц-непрерывен,}\\ &\text{т. е. } \|Gu - Gv\|_{C(S;\, X)} \leqslant L\|u - v\|_{C(S;\, X)}, \quad L = \text{const}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Лемма 1.4. Если оператор Вольтерры G удовлетворяет предположению (1.8), то для любых $u,\ v \in C(S; X)$ и любого $t \in S$

$$\|Gu - Gv\|_{C([0,\, t];\, X)} \leqslant L\|u - v\|_{C([0,\, t];\, X)}.$$

Доказательство. Пусть $t \in S$. Положим

$$u_t(s) = \begin{cases} u(s) & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \\ u(t) & \text{при} \quad t < s \leqslant T \end{cases}$$

и соответственно

$$v_t(s) = \begin{cases} v(s) & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \\ v(t) & \text{при} \quad t < s \leqslant T. \end{cases}$$

Очевидно, $u_t,\ v_t \in C(S;\, X)$. Так как G — оператор Вольтерры, то

$$\|Gu - Gv\|_{C([0,\, t];\, X)} \leqslant \|Gu_t - Gv_t\|_{C(S;\, X)} \leqslant$$
$$\leqslant L\|u_t - v_t\|_{C(S;\, X)} = L\|u - v\|_{C([0,\, t];\, X)},$$

чем лемма и доказана.

Приведем несколько примеров операторов Вольтерры, удовлетворяющих предположению (1.8).

1. Пусть $h \in C(S)$, $0 \leqslant h(t) \leqslant t$, для всех $t \in S$ и $\{G(t)\}$ — семейство операторов из $(X \to X)$, удовлетворяющее условиям (1.2) и (1.3). Если положить

$$(Gu)(t) = G(t)\, u(h(t)),$$

то G будет липшиц-непрерывным вольтерровым оператором из $(C(S; X) \to C(S; X))$.

2. Пусть оператор Вольтерры H удовлетворяет предположению (1.8). Тогда определенный для $u \in C(S; X)$ формулой

$$(Gu)(t) = \int_0^t g(t,\, s)(Hu)(s)\, ds, \qquad g \in C^1(S \times S), \quad t \in S,$$

оператор G также является оператором Вольтерры, удовлетворяющим (1.8).

3. Пусть G и H — операторы Вольтерры, удовлетворяющие условию (1.8). Тогда их линейные комбинации (понимаемые в естественном смысле) и их композиция $G \circ H$ (результат их последовательного применения) обладают теми же свойствами. Следовательно, такие операторы образуют алгебру, в которой роль умножения играет взятие композиции.

Теорема 1.2. *Если оператор Вольтерры G удовлетворяет предположению* (1.8), *то задача Коши*

$$u'(t) + (Gu)(t) = f(t) \qquad \forall t \in S$$

$$u(0) = a, \qquad u \in C^1(S;\ X),$$

при любых $f \in C(S; X)$ и $a \in X$ обладает точно одним решением. Определяемое тем самым соответствие $\{a, f\} \to u$ непрерывно как отображение из $X \times C(S; X)$ в $C^1(S; X)$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1.1, рассмотрим отображение U, задаваемое формулой

$$(Uu)(t) = a - \int_0^t ((Gu)(s) - f(s))\, ds, \qquad t \in S, \quad u \in C(S;\ X). \quad (1.9)$$

Поскольку $f \in C(S;\ X)$ и $G \in (C(S;\ X) \to C(S;\ X))$, то очевидно,

$$U \in (C(S;\ X) \to C^1(S;\ X)).$$

Согласно предположению (1.8) и лемме 1.4, из (1.9) вытекает, что для $u,\ v \in C(S;\ X)$

$$\begin{aligned}
\|(Uu)(t) - (Uv)(t)\| &\leqslant \int_0^t \|(Gu)(s) - (Gv)(s)\|\, ds \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t \|Gu - Gv\|_{C([0,\ s];\ X)}\, ds \leqslant \\
&\leqslant L \int_0^t \|u - v\|_{C(0,\ s];\ X)}\, ds = \\
&= L \int_0^t \sup_{0 \leqslant r \leqslant s} \{\|u(r) - v(r)\| e^{-ks}\} e^{ks}\, ds \leqslant \\
&\leqslant L \int_0^t \sup_{0 \leqslant r \leqslant s} \{e^{-kr} \|u(r) - v(r)\|\} e^{ks}\, ds.
\end{aligned}$$

Все входящие сюда интегралы существуют, потому что для $w \in C(S; X)$ функция $t \to \|w\|_{C([0, t]; X}$ непрерывна на S. Если воспользоваться (C, k)-нормой, введенной в лемме 1.2, то, как и в доказательстве теоремы 1.1. получим

$$\|Uu - Uv\|_{C, k} \leqslant \frac{L}{k}(1 - e^{-kT})\|u - v\|_{C, k}.$$

Следовательно, при $k \geqslant L$ отображение U является сжимающим на пространстве $C(S; X)$, рассматриваемом с (C, k)-нормой. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и в случае теоремы 1.1. Доказательство закончено.

Замечание 1.3. Очевидно, теорема 1.1 — частный случай теоремы 1.2, — надо лишь для $u \in C(S; X)$ определить оператор G равенством

$$(Gu)(t) = G(t)u(t), \qquad t \in S.$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ; L^2-ТЕОРИЯ

Теорему существования, доказанную в п. 2, естественным образом можно перенести на случай, когда операторы Вольтерры действуют в пространствах интегрируемых (по Бохнеру) функций.

Примем следующее предположение:

$$\begin{aligned}&\text{Оператор } G \in (L^2(S;\ X) \to L^2(S;\ X)) \text{ липшиц-непрерывен,}\\ &\text{т. е. } \|Gu - Gv\|_{L^2(S;\ X)} \leqslant L\|u - v\|_{L^2(S;\ X)}; \qquad L = \text{const}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Лемма 1.5. Если оператор Вольтерры G удовлетворяет условию (1.10), то для любых u, $v \in L^2(S; X)$ и любого $t \in S$

$$\|Gu - Gv\|_{L^2([0, t];\ X)} \leqslant L\|u - v\|_{L^2([0, t];\ X)}.$$

Доказательство. Пусть $t \in S$. Положим

$$u_t(s) = \begin{cases} u(s) & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \\ 0 & \text{при} \quad t < s \leqslant T \end{cases}$$

и соответственно

$$v_t(s) = \begin{cases} v(s) & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \\ 0 & \text{при} \quad t < s \leqslant T. \end{cases}$$

Очевидно, u_t, $v_t \in L^2(S;\ X)$. Так как G — вольтерров оператор, то

$$\| Gu - Gv \|_{L^2([0,\ t];\ X)} \leqslant \| Gu_t - Gv_t \|_{L^2(S;\ X)} \leqslant$$
$$\leqslant L \| u_t - v_t \|_{L^2(S;\ X)} = L \| u - v \|_{L^2([0,\ t];\ X)},$$

чем лемма и доказана.

Рассмотрим теперь задачу

$$u' + Gu = f, \quad u(0) = a, \quad u \in L^2(S;\ X), \tag{1.11}$$

где $f \in L^2(S; X)$ и $a \in X$. При этом производная u' понимается в смысле распределений (см. § 1 гл. IV).

Замечание 1.4. Если $u \in L^2(S; X)$ удовлетворяет уравнению $u' + Gu = f$ для $G \in (L^2(S; X) \to L^2(S; X))$ и $f \in L^2(S; X)$, то $u' = f - Gu \in L^2(S; X)$. Отсюда согласно теоремам 1.6 и 1.7 гл. IV следует, что

1) функция $u \in (S \to X)$ непрерывна и почти всюду (сильно) дифференцируема;

2) задача (1.11) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = a - \int_0^t ((Gu)(s) - f(s))\, ds \quad \forall t \in S;$$

3) для почти всех $t \in S$

$$u'(t) + (Gu)(t) = f(t).$$

Эти свойства решений задачи вида (1.11) будут в дальнейшем использоваться без особых пояснений.

Теорема 1.3. *Пусть оператор Вольтерры G удовлетворяет предположению* (1.10). *Тогда при любых $a \in X$ и $f \in L^2(S; X)$ существует точно одно решение и задачи Коши* (1.11). *Определяемое тем самым соответствие $\{a, f\} \to \{u, u'\}$ непрерывно как отображение $X \times L^2(S; X)$ в $C(S; X) \times L^2(S; X)$.*

Доказательство. Для $u \in C(S; X)$ зададим отображение U формулой

$$(Uu)(t) = a - \int_0^t ((Gu)(s) - f(s))\, ds, \quad t \in S.$$

В силу непрерывности неопределенного интеграла Бохнера от интегрируемой функции (см. теорему 1.9 гл. IV),

$$U \in (C(S;\ X) \to C(S;\ X)).$$

Согласно лемме 1.5, для $u, v \in C(S; X)$

$$\|(Uu)(t)-(Uv)(t)\| \leqslant \int_0^t \|(Gu)(s)-(Gv)(s)\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{T}\left(\int_0^t \|(Gu)(s)-(Cv)(s)\|^2\,ds\right)^{1/2} = \sqrt{T}\,\|Gu-Gv\|_{L^2([0,\,t];\;X)} \leqslant$$

$$\leqslant L\sqrt{T}\left(\int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2\,ds\right)^{1/2} =$$

$$= L\sqrt{T}\left(\int_0^t \|u(s)-v(s)\|^2 e^{-2ks}e^{2ks}\,ds\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant L\sqrt{T}\,\|u-v\|_{C,\,k}\left(\int_0^t e^{2ks}\,ds\right)^{1/2} = L\sqrt{T}\,\|u-v\|_{C,\,k}\left(\frac{e^{2kt}-1}{2k}\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что для всех $t \in S$

$$\|(Uu)(t)-(Uv)(t)\|\,e^{-kt} \leqslant L\sqrt{\frac{T}{2k}}\,(1-e^{-2kT})^{1/2}\,\|u-v\|_{C,\,k}.$$

Взяв в левой части верхнюю грань по $t \in S$ и подобрав k из условия

$$k \geqslant \frac{L^2T}{2},$$

получим

$$\|Uu-Uv\|_{C,\,k} \leqslant \lambda\,\|u-v\|_{C,\,k},$$

где $0<\lambda<1$. Согласно принципу неподвижной точки Банаха, существует точно один элемент $u \in C(S;\; X)$, для которого $u=Uu$, т. е.

$$u(t) = a - \int_0^t ((Gu)(s) - f(s)\,ds \qquad \forall t \in S;$$

следовательно, u является решением задачи (1.11).

Пусть функции $u_i \in C(S;\; X)$ $(i=1,\,2)$ удовлетворяют при всех $t \in S$ соотношениям

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_1 - \int_0^t ((Gu_1)(s) - f_1(s))\,ds, \\ u_2(t) &= a_2 - \int_0^t ((Gu_2)(s) - f_2(s))\,ds \end{aligned} \tag{1.12}$$

с $f_1, f_2 \in L^2(S; X)$. С учетом леммы 1.5, в результате несложных оценок получаем из (1.10)

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|^2 \leqslant K_1(\|a_1-a_2\|+\|f_1-f_2\|_{L^2(S;\,X)})^2+ \\ +2L^2T\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|^2\,ds,$$

где K_1 — постоянная, зависящая от T. Применение леммы Гронуолла дает

$$\|u_1-u_2\|_{C(S;\,X)} \leqslant K_2(\|a_1-a_2\|+\|f_1-f_2\|_{L^2(S;\,X)}). \qquad (1.13)$$

Из (1.12) вытекает, что почти всюду на S

$$\|u_1'(t)-u_2'(t)\| \leqslant \|f_1(t)-f_2(t)\|+\|(Gu_1)(t)-(Gu_2)(t)\|.$$

Отсюда с помощью несложных оценок получаем

$$\|u_1'-u_2'\|_{L^2(S;\,X)} \leqslant K_3(\|f_1-f_2\|_{L^2(S;\,X)}+\|u_1-u_2\|_{C(S;\,X)}).$$

Принимая во внимание (1.13), приходим к неравенству

$$\|u_1-u_2\|_{C(S;\,X)}+\|u_1'-u_2'\|_{L^2(S;\,X)} \leqslant \\ \leqslant K(\|a_1-a_2\|+\|f_1-f_2\|_{L^2(S;\,X)}).$$

Из этого неравенства следует последнее утверждение теоремы, которая тем самым полностью доказана.

§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Псевдопараболическими уравнениями мы называем эволюционные уравнения первых двух типов, указанных в § 2 гл. IV, в случае когда фигурирующие в них операторы удовлетворяют некоторым предположениям, которые будут ниже уточнены.

Начиная с этого параграфа до конца главы в роли нашего банахова пространства X будет выступать вещественное сепарабельное гильбертово пространство H. Как всегда, H^* обозначает сопряженное к H пространство. Норма и скалярное произведение в H обозначаются, как обычно, через $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$. Значение линейного функционала $l \in H^*$ на элементе $h \in H$ записывается как $\langle l, h\rangle$, норма в H^* — как $\|\cdot\|_*$.

Для получения интересующих нас теорем существования и единственности мы сведем псевдопараболические уравнения к обыкновенным операторным дифференциальным уравнениям, рассмотренным в § 1.

1. ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ; C-ТЕОРИЯ

Рассмотрим для компактного интервала времени $S=[0, T]$ дифференциальные уравнения

$$A(t)\, u'(t)+(Bu)(t)=f(t) \tag{2.1}$$

и

$$(A(t)\, u(t))'+(Bu)(t)=f(t) \tag{2.2}$$

с начальными условиями

$$u(0)=a \in H \quad \text{и} \quad A(0)\, u(\dot{0})=b \in H^* \tag{2.3}$$

соответственно. Уравнения (2.1) и (2.2) мы называем *псевдопараболическими уравнениями* типов I и II соответственно.

Пусть (вообще говоря нелинейные) операторы из семейства $A=\{A(t)\}$, действующие из H в H^*, удовлетворяют следующим условиям:

Операторы $A(t) \in (H \rightarrow H^*)$, $t \in S$, радиально непрерывны. (2.4)

При каждом $x \in H$ определенная на S функция $t \rightarrow A(t)\, x$ принадлежит $C(S;\ H^*)$. (2.5)

Операторы $A(t) \in (H \rightarrow H^*)$ (равномерно по $t \in S$) сильно монотонны, т. е. существует такая не зависящая от t постоянная $m>0$, что (2.6)

$$\langle A(t)\, x-A(t)\, y,\ x-y\rangle \geqslant m\|x-y\|^2$$

для любых $x,\ y \in H$.

Пусть, далее, (вообще говоря нелинейный) оператор Вольтерры B удовлетворяет следующему условию:

Оператор $B \in (C(S;\ H) \rightarrow C(S;\ H^*))$ липшиц-непрерывен,

т. е. $\|Bu-Bv\|_{C(S;\ H^*)} \leqslant L\|u-v\|_{C(S;\ H)}$. (2.7)

Лемма 2.1. При предположениях (2.4) — (2.6) для каждого $t \in S$ существует оператор $A^{-1}(t) \in (H^* \rightarrow H)$, причем

a) $\left\|A^{-1}(t)\, x-A^{-1}(t)\, y\right\| \leqslant \frac{1}{m}\|x-y\|_*$ для всех $x,\ y \in H^*$;

b) при любом $x \in H^*$ функция $t \rightarrow A^{-1}(t)\, x$ непрерывна на S.

Доказательство. Существование обратного отображения $A^{-1}(t) \in (H^* \rightarrow H)$ и утверждение a) вытекают из следствия 2.3

гл. III. Для доказательства утверждения b) заметим, что, в силу a) и свойства (2.5) операторов $A(t)$,

$$\|A^{-1}(t)x - A^{-1}(s)(x)\| = \|A^{-1}(s)A(s)A^{-1}(t)x - A^{-1}(s)x\| \leqslant \leqslant \frac{1}{m}\|A(s)A^{-1}(t)x - x\|_* = \frac{1}{m}\|A(s)A^{-1}(t)x - A(t)A^{-1}(t)x\|_* \to 0$$

при $s \to t$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения* (2.4)—(2.7). *Тогда при любых* $f \in C(S; H^*)$ *и* $a \in H$ *задача Коши*

$$\begin{aligned} &A(t)u'(t) + (Bu)(t) = f(t) \quad \forall t \in S,\\ &u(0) = a, \quad u \in C^1(S; H) \end{aligned} \tag{2.8}$$

имеет точно одно решение.

Доказательство. Рассмотрим эквивалентную задаче (2.8) задачу

$$u'(t) + (Gu)(t) = 0 \quad \forall t \in S,$$

$$u(0) = a, \quad u \in C^1(S; H),$$

где оператор G определен правилом

$$(Gu)(t) = -A^{-1}(t)(-(Bu)(t) + f(t)), \quad t \in S, \quad u \in C(S; H).$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что G удовлетворяет предположениям теоремы 1.2. Очевидно, G вместе с B является оператором Вольтерры. Положим $v_0 = f(t_0) - (Bu)(t_0)$. Тогда, согласно лемме 2.1, при t, $t_0 \in S$

$$\lim_{t\to t_0}\|(Gu)(t) - (Gu)(t_0)\| \leqslant \frac{1}{m}\lim_{t\to t_0}(\|(Bu)(t) - (Bu)(t_0)\|_* + + \|f(t) - f(t_0)\|_*) + \lim_{t\to t_0}\|A^{-1}(t)v_0 - A^{-1}(t_0)v_0\| = 0.$$

Следовательно, $G \in (C(S; H) \to C(S; H))$.

Применяя лемму 2.1, получаем, что для u, $v \in C(S; H)$

$$\|(Gu)(t) - (Gv)(t)\| \leqslant \frac{1}{m}\|(Bu)(t) - (Bv)(t)\|_* \leqslant \leqslant \frac{1}{m}\|Bu - Bv\|_{C(S;\, H^*)} \leqslant \frac{L}{m}\|u - v\|_{C(S;\, H)},$$

откуда

$$\|Gu - Gv\|_{C(S;\, H)} \leqslant \frac{L}{m}\|u - v\|_{C(S;\, H)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения* (2.4)—(2.7). *Тогда при любых* $f \in C(S; H^*)$ *и* $b \in H^*$ *задача Коши*

$$(A(t)\,u(t))' + (Bu)(t) = f(t) \qquad \forall t \in S,$$
$$A(0)\,u(0) = b, \qquad u \in C(S;\ H), \quad Au \in C^1(S;\ H^*) \tag{2.9}$$

имеет точно одно решение. (*Здесь через* Au, *как обычно, обозначена определенная на* S *функция* $t \to A(t)\,u(t)$.)

Доказательство. Наряду с задачей (2.9) рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &v'(t) + (Gv)(t) = f(t) \qquad \forall t \in S,\\ &v(0) = b \in H^*, \qquad v \in C^1(S;\ H^*), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где оператор G определен для $v \in C(S;\ H^*)$ правилом

$$Gv = BA^{-1}v.$$

Очевидно, v представляет собой решение задачи (2.10) точно тогда, когда $u = A^{-1}v$ служит решением задачи (2.9). Поэтому для доказательства теоремы 2.2 достаточно показать, что G удовлетворяет предположениям теоремы 1.2. Ясно, что оператор G вместе с B является оператором Вольтерры. Согласно лемме 2.1, $A^{-1}v \in C(S; H)$ для $v \in C(S; H^*)$ (см. лемму 1.1). Отсюда и из (2.7) следует, что

$$G \in (C(S;\ H^*) \to C(S;\ H^*)).$$

Применяя лемму 2.1, получаем, что для $v,\ w \in C(S; H^*)$

$$\|Gv - Gw\|_{C(S;\ H^*)} \leqslant L\,\|A^{-1}v - A^{-1}w\|_{C(S;\ H)} \leqslant \frac{L}{m}\,\|v - w\|_{C(S;\ H^*)},$$

чем теорема и доказана.

Замечание 2.1. Рассуждая аналогично тому, как это делалось в § 1, можно доказать для псевдопараболических уравнений обоих типов соответствующие утверждения о непрерывной зависимости решений от правый частей и начальных значений. Мы не будем на этом останавливаться.

2. ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ; L^2-ТЕОРИЯ

Как и для обыкновенных операторных дифференциальных уравнений, для псевдопараболических уравнений также можно перенести все рассмотрения на случай, когда входящие в уравнение функции принадлежат пространству квадратично интегрируемых (по Бохнеру) функций. А именно, рассмотрим уравнения

$$Au' + Bu = f \ (\text{тип I}),$$
$$(Au)' + Bu = f \ (\text{тип II})$$

с операторами A и B, удовлетворяющими следующим условиям:

Оператор $A \in (L^2(S;\ H) \to L^2(S;\ H^*))$ обладает представлением (2.11)

$(Au)(t) = A(t)\,u(t) \quad \forall u \in L^2(S;\ H), \quad \forall t \in S,$

где $A(t) \in (H \to H^*)$.

Операторы $A(t) \in (H \to H^*)$, $t \in S$, радиально непрерывны. Для некоторой постоянной C и некоторой функции $g \in L^2(S)$ (2.12)

$\| A(t)\,x \|_* \leqslant C \| x \| + g(t) \quad \forall t \in S, \quad \forall x \in H.$

Операторы $A(t) \in (H \to H^*)$ (равномерно по $t \in S$) сильно монотонны, т. е. существует такая постоянная $m > 0$, не зависящая от t, что (2.13)

$$\langle A(t)\,x - A(t)\,y,\ x - y \rangle \geqslant m \| x - y \|^2$$

для любых $x,\ y \in H$.

Оператор $B \in (L^2(S;\ H) \to L^2(S;\ H^*))$ вольтерров и удовлетворяет условию Липшица (2.14)

$$\| Bu - Bv \|_{L^2(S;\ H^*)} \leqslant L \| u - v \|_{L^2(S;\ H)},$$

$$L = \text{const}.$$

Замечание 2.2. Требование $A \in (L^2(S; H) \to L^2(S; H^*))$ выполняется, если семейство операторов $\{A(t)\}$, при помощи которого представляется оператор A, удовлетворяет условиям (2.12), (2.13) (см. лемму 1.3 гл. III) и для любых $x,\ y \in H$ функция $t \to \langle A(t)\,x, y \rangle$ измерима на S.

Лемма 2.2. Пусть оператор A удовлетворяет предположениям (2.11)—(2.13). Тогда он радиально непрерывен и строго монотонен и у него существует обратный оператор $A^{-1} \in (L^2(S; H^*) \to L^2(S; H))$, который липшиц-непрерывен. Для A^{-1} имеет место представление

$$(A^{-1}f)(t) = A^{-1}(t)\,f(t) \quad \forall t \in S, \quad \forall f \in L^2(S;\ H^*),$$

где $A^{-1}(t) \in (H^* \to H)$ — оператор, обратный к $A(t)$, $t \in S$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что пространство $L^2(S; H^*)$ является сопряженным к $L^2(S; H)$, причем скалярное произведение элементов $f \in L^2(S; H^*)$ и $u \in L^2(S; H)$ задается в виде (см. теорему 1.14 гл. IV)

$$\int\limits_S \langle f(t),\ u(t) \rangle\, dt.$$

В силу (2.12), для $t \in S$, $h \in [0, 1]$ имеем

$$|\langle A(t)(u(t)+hv(t)),\ v(t)\rangle| = \|A(t)(u(t)+hv(t))\|_* \|v(t)\| \leqslant \leqslant (C\|u(t)+hv(t)\| + g(t))\|v(t)\| \leqslant \leqslant K(\|u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2 + |g(t)|^2)$$

и

$$\lim_{h\to 0} \langle A(t)(u(t)+hv(t)),\ v(t)\rangle = \langle A(t)u(t),\ v(t)\rangle.$$

Применяя теорему Лебега, получаем

$$\lim_{h\to 0} \int_S \langle A(t)(u(t)+hv(t)),\ v(t)\rangle\,dt = \int_S \langle A(t)u(t),\ v(t)\rangle\,dt.$$

Тем самым доказана радиальная непрерывность A. Сильная монотонность A непосредственно следует из (2.13). Существование и липшиц-непрерывность оператора A^{-1} вытекают из следствия 2.3 гл. III. То что A^{-1} имеет утверждаемое в лемме представление, очевидно; существование операторов $A^{-1}(t)$, $t \in S$, гарантируется только что упомянутым следствием. Лемма доказана.

Теперь сформулируем главные результаты этого пункта.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены предположения* (2.11)—(2.14). *Тогда при любых* $f \in L^2(S; H^*)$ *и* $a \in H$ *задача Коши*

$$\begin{gathered} Au' + Bu = f, \\ u(0) = a, \quad u \in C(S;\ H), \quad u' \in L^2(S;\ H) \end{gathered} \tag{2.15}$$

имеет точно одно решение.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены предположения* (2.11)—(2.14). *Тогда при любых* $f \in L^2(S; H^*)$ *и* $b \in H^*$ *задача Коши*

$$\begin{gathered} (Au)' + Bu = f, \\ (Au)(0) = b, \quad u \in L^2(S;\ H), \\ Au \in C(S;\ H^*), \quad (Au)' \in L^2(S;\ H^*) \end{gathered} \tag{2.16}$$

имеет точно одно решение.

Доказательство теоремы 2.3. Рассмотрим эквивалентную задаче (2.15) задачу

$$u' + Gu = 0, \quad u(0) = a, \quad u \in L^2(S;\ H),$$

где отображение G определено для $u \in L^2(S; H)$ правилом

$$Gu = -A^{-1}(-Bu + f).$$

Для доказательства нашей теоремы достаточно показать, что G удовлетворяет предположениям теоремы 1.3. Согласно лемме 2.2, оператор $A^{-1} \in (L^2(S; H^*) \to L^2(S; H))$ липшиц-непрерывен и, ввиду указанного там представления, тривиальным образом вольтерров. Следовательно, $G \in (L^2(S; H) \to L^2(S; H))$ как композиция двух липшиц-непрерывных операторов Вольтерры является липшиц-непрерывным оператором Вольтерры. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Наряду с задачей (2.16) рассмотрим задачу

$$v' + Gv = f, \quad v(0) = b, \quad v \in L^2(S; H^*), \tag{2.17}$$

где $G = BA^{-1} \in (L^2(S; H^*) \to L^2(S; H^*))$. Очевидно, что v точно тогда служит решением задачи (2.17), когда $u = A^{-1}v$ есть решение задачи (2.16). Поскольку G как композиция липшиц-непрерывных операторов Вольтерры удовлетворяет условиям теоремы 1.3, наше утверждение доказано.

§ 3. МЕТОД ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЛИПШИЦ-НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Используя метод Галёркина, мы получим здесь приближенные решения для псевдопараболических уравнений посредством решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений; таким образом, мы аппроксимируем функции со значениями в бесконечномерных пространствах функциями со значениями в конечномерных пространствах. Выбор аппроксимирующих функций производится в соответствии с классическим предписанием метода Галёркина (см. гл. III) — чтобы «невязка» была ортогональна к рассматриваемому конечномерному пространству.

Пусть $\{h_1, h_2, \ldots\}$ — какая-нибудь полная система линейно независимых элементов в гильбертовом пространстве H. Обозначим через H_n, $n = 1, 2, \ldots$ линейную оболочку множества $\{h_1, \ldots, h_n\}$; H_n является (конечномерным) гильбертовым пространством относительно скалярного произведения, индуцированного из H. Пусть P_n — оператор (ортогонального) проектирования H на H_n; $I_n \in (H_n \to H)$ — оператор вложения H_n в H; $P_n^* \in (H_n^* \to H^*)$ и $I_n^* \in (H^* \to H_n^*)$ — сопряженные к ним операторы. Согласно определению,

$$\langle P_n^* h, g \rangle = \langle h, P_n g \rangle \quad \text{для} \quad h \in H_n^*, \quad g \in H$$

$$\langle I_n^* h, g \rangle = \langle h, I_n g \rangle = \langle h, g \rangle \quad \text{для} \quad h \in H^*, \quad g \in H_n.$$

Здесь мы использовали один и тот же символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ для обозначения как скалярного произведения между H^* и H, так и скалярного произведения между H_n^* и H_n. Отметим еще, что

$$\|I_n^* h\|_{H_n^*} \leqslant \|h\|_* \quad \text{для} \quad h \in H^*.$$

1. МЕТОД ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ; C-ТЕОРИЯ

Для того чтобы применить метод Галёркина к псевдопараболическим уравнениям типов I и II

$$A(t)\,u'(t) + (Bu)(t) = f(t),$$
$$(A(t)\,u(t))' + (Bu)(t) = f(t),$$

наложим на операторы из семейства $\{A(t)\}$ несколько более сильные ограничения. А именно, мы заменим требование радиальной непрерывности (предположение (2.4)) следующим требованием:

Операторы $A(t) \in (H \to H^*)$, $t \in S$, (равномерно по $t \in S$) липшиц-непрерывны, т. е.
$$\|A(t)\,x - A(t)\,y\|_* \leqslant M\|x - y\|, \quad M = \mathrm{const}, \tag{3.1}$$
для любых $x,\ y \in H$.

Остальные предположения ((2.5) и (2.6)) об операторах $A(t)$ и предположение (2.7) об операторе Вольтерры B остаются неизменными.

По операторам $A(t) \in (H \to H^*)$, $t \in S$, построим для $n = 1$, $2, \ldots$ операторы $A_n(t) \in (H \to H_n^*)$ по формуле

$$A_n(t) = I_n^* A(t), \qquad t \in S. \tag{3.2}$$

Соответственно определим для $v \in C(S; H)$ операторы Вольтерры B_n $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$(B_n v)(t) = I_n^*(Bv)(t), \qquad t \in S, \tag{3.3}$$

и наконец для $f \in C(S; H^*)$ — функции $f_n \in (S \to H_n^*)$:

$$f_n(t) = I_n^* f(t), \qquad t \in S. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. Из приведенных определений сразу же следует, что операторы $A_n(t)$, $t \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют тем же самым условиям по отношению к H_n и H_n^*, что и операторы $A(t)$ по отношению к H и H^*. Равным образом мы видим, что $B_n \in (C(S;\ H_n) \to C(S;\ H_n^*))$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ является липшиц-непрерывным оператором Вольтерры с постоянной Липшица L из предположения (2.7). В свою очередь из условия $f \in C(S; H^*)$ следует, что $f_n \in C(S; H_n^*)$. Все эти утверждения вытекают из свойств введенных выше операторов I_n^*.

Уравнениями Галёркина для псевдопараболических уравнений типов I и II будем называть уравнения, фигурирующие в следующих задачах Коши ($n = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{gathered} A_n(t)\, u_n'(t) + (B_n u_n)(t) = f_n(t), \\ u_n(0) = a_n \in H_n, \qquad u_n \in C^1(S;\ H_n) \end{gathered} \tag{3.5}$$

и

$$\begin{gathered} (A_n(t)\, u_n(t))' + (B_n u_n)(t) = f_n(t), \\ A_n(0)\, u_n(0) = b_n, \qquad u_n \in C(S;\ H_n), \quad A_n u_n \in C^1(S;\ H_n^*). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Решения u_n, $n = 1, 2, \ldots$, этих задач мы называем *галёркинскими приближениями* для решений псевдопараболических уравнений. Пусть при этом начальные элементы $a_n \in H_n$, $b_n \in H_n^*$ выбраны так, что

$$\|a_n - a\| \to 0 \quad \text{и} \quad \|b_n - I_n^* b\|_{H_n^*} \to 0 \tag{3.7}$$

при $n \to \infty$; здесь $a = u(0) \in H$ и $b = A(0)\, u(0) \in H^*$ — начальные данные исходных уравнений. Ради простоты доказательств мы всюду дальше принимаем

$$a_n = P_n a \quad \text{и} \quad b_n = I_n^* b \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В силу полноты системы $\{h_1, h_2, \ldots\}$ в H, требование (3.7) при таком выборе выполняется.

Прежде всего докажем одну лемму.

Лемма 3.1. Пусть $v \in (S \to H)$ и v_n, $n = 1, 2, \ldots$, — функции на S со значениями в $H_n \subset H$, определенные по правилу $t \to v_n(t) = P_n v(t)$. Тогда последовательность $\{v_n\}$ обладает следующими свойствами:

a) если $v \in C(S;\ H)$, то $v_n \in C(S;\ H_n)$ и

$$\|v_n - v\|_{C(S;\ H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

b) если $v \in C^1(S;\ H)$, то $v_n \in C^1(S;\ H_n)$ и

$$\|v_n - v\|_{C^1(S;\ H)} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Очевидно, $v_n \in C(S; H_n)$. Так как система $\{h_1, h_2, \ldots\}$ полна в H, то для каждого $t \in S$

$$\|v_n(t) - v(t)\| = \|P_n v(t) - v(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку $H_n \subset H_{n+1}$, из известных свойств операторов проектирования в гильбертовом пространстве следует, что

$$\| v_{n+1}(t) - v(t) \| \leqslant \| v_n(t) - v(t) \| \quad \forall t \in S.$$

Применяя к вещественным функциям $\| v_n(\cdot) - v(\cdot) \|$ теорему Дини, получаем утверждение a).

Что касается утверждения b), то заметим, что для $v \in C^1(S; H)$

$$P_n v'(t) = (P_n v(t))' = v_n'(t), \quad t \in S.$$

Действительно, ввиду симметричности оператора проектирования P_n и непрерывности скалярного произведения в гильбертовом пространстве, для каждого $t \in S$ и каждого $h \in H$

$$(P_n v'(t), h) = (v'(t), P_n h) = \frac{d}{dt}(v(t), P_n h) = \\ = \frac{d}{dt}(P_n v(t), h) = \left(\frac{d}{dt} P_n v(t), h\right) = (v_n'(t), h).$$

Утверждение b) следует теперь из a), если там v_n и v заменить соответственно на v_n' и v'. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $w \in C(S; H^*)$. Тогда функции w_n, $n = 1, 2, \ldots$, определенные правилом

$$t \to w_n(t) = P_n^* I_n^* w(t), \quad t \in S,$$

также принадлежат $C(S; H^*)$ и

$$\| w_n - w \|_{C(S;\, H^*)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Для $x \in H^*$ и $y \in H$ имеем

$$\langle P_n^* I_n^* x - x, y \rangle = \langle I_n^* x, P_n y \rangle - \langle x, y \rangle = \langle x, P_n y \rangle - \langle x, y \rangle = \\ = (Rx, P_n y) - (Rx, y) = (P_n Rx - Rx, y) \leqslant \| P_n Rx - Rx \| \| y \|;$$

здесь через $R \in (H^* \to H)$ обозначен оператор Рисса для H (см. замечание 6.3 гл. I) и через $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H. Поэтому

$$\| P_n^* I_n^* x - x \|_* \leqslant \| P_n Rx - Rx \| \quad \forall x \in H^*.$$

Используя эту оценку и применяя утверждение a) леммы 3.1 к функции $v \in C(S; H)$, задаваемой правилом $t \to v(t) = Rw(t)$, получаем наше утверждение. Лемма доказана.

Теперь приведем основные результаты этого пункта.

Теорема 3.1. *В предположениях* (3.1), (2.5)—(2.7) *уравнения Галёркина* (3.5) *для уравнения* (2.8) *при каждом* $n = 1, 2, \ldots$

имеют точно одно решение u_n, *и для этой последовательности* $\{u_n\}$ *галёркинских приближений*

$$\|u_n - u\|_{C^1(S;\,H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где u *обозначает решение задачи* (2.8).

Теорема 3.2. *В предположениях* (3.1), (2.5)—(2.7) *уравнения Галёркина* (3.6) *для уравнения* (2.9) *при каждом* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют точно одно решение* u_n, *и для этой последовательности* $\{u_n\}$ *галёркинских приближений*

$$\|u_n - u\|_{C(S;\,H)} \to 0, \qquad\qquad (3.8)$$

$$\|\bar{A}_n u_n - Au\|_{C^1(S;\,H^*)} \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (3.9)$$

Здесь $\bar{A}_n v$ *для* $v \in C(S;\,H)$ *определяется по правилу*

$$t \to \bar{A}_n(t)\,v(t) = P_n^* A_n(t)\,v(t), \qquad t \in S.$$

Доказательство теоремы 3.1. В силу замечания 3.1, существование приближений Галёркина $u_n \in C^1(S; H_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ устанавливается применением теоремы 2.1 к уравнениям Галёркина (3.5).

Пусть $\{v_n\}$ — какая-нибудь последовательность функций $v_n \in C^1(S; H)$, для которой

$$\|v_n - u\|_{C^1(S;\,H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \qquad v_n(0) = a_n.$$

Согласно лемме 3.1, b), такая последовательность существует. Применение к уравнению

$$A(t)\,u'(t) + (Bu)(t) = f(t)$$

оператора $I_n^* \in (H^* \to H_n^*)$ дает, ввиду (3.2) — (3.4),

$$A_n(t)\,u'(t) + (B_n u)(t) = f_n(t).$$

Если вычесть это уравнение из уравнения Галёркина

$$A_n(t)\,u_n'(t) + (B_n u_n)(t) = f_n(t)$$

и взять скалярное произведение с $u_n'(t) - v_n'(t) \in H_n$ (в смысле двойственности между пространствами H_n и H_n^*), то после некоторых преобразований с учетом свойств операторов I_n и I_n^* получим

$$\langle Au_n' - Av_n',\, u_n' - v_n'\rangle + \langle Av_n' - Au',\, u_n' - v_n'\rangle +$$
$$+ \langle Bu_n - Bv_n,\, u_n' - v_n'\rangle + \langle Bv_n - Bu,\, u_n' - v_n'\rangle = 0$$

(аргумент t временно опущен). Поэтому из предположений (2.6) и (2.7) следует, что

$$m\|u_n'(t)-v_n'(t)\|\leqslant\|A(t)v_n'(t)-A(t)u'(t)\|_*+$$
$$+L\|u_n-v_n\|_{C([0,t];H)}+L\|v_n-u\|_{C(S;H)}$$

и, в силу условия Липшица (3.1),

$$m\|u_n'(t)-v_n'(t)\|\leqslant K_1\|v_n-u\|_{C^1(S;H)}+L\|u_n-v_n\|_{C([0,t];H)}. \tag{3.10}$$

Таким образом, для функции $w_n=u_n-v_n$ имеем (поскольку $u_n(0)=v_n(0)=a_n$)

$$\|w_n\|_{C([0,t];H)}=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left\|\int_0^s w_n'(\tau)\,d\tau\right\|\leqslant\int_0^t\|w_n'(\tau)\|\,d\tau=$$
$$=\int_0^t\|w_n'(\tau)\|e^{-k\tau}e^{k\tau}\,d\tau\leqslant\frac{e^{kt}}{k}\sup_{t\in S}\{\|w_n'(t)\|e^{-kt}\}.$$

Если ввести сокращение

$$\rho_k(v,w)=\sup_{t\in S}\{e^{-kt}\|v'(t)-w'(t)\|\} \tag{3.11}$$

для $v, w\in C^1(S;H)$, то из приведенной выше цепочки оценок вытекает, что

$$\|u_n-v_n\|_{C([0,t];H)}\leqslant\frac{e^{kt}}{k}\rho_k(u_n,v_n). \tag{3.12}$$

С учетом этой оценки получаем из (3.10)

$$m\|u_n'(t)-v_n'(t)\|e^{-kt}\leqslant K_1\|v_n-u\|_{C^1(S;H)}+\frac{L}{k}\rho_k(u_n,v_n),\qquad t\in S.$$

Беря в левой части верхнюю грань по $t\in S$, находим, что для $km>L$

$$\rho_k(u_n,v_n)\leqslant K_2\|v_n-u\|_{C^1(S;H)}.$$

Далее, очень просто доказать оценку

$$\|u_n-v_n\|_{C^1(S;H)}\leqslant K_3\rho_k(u_n,v_n).$$

Следовательно,

$$\|u_n-v_n\|_{C^1(S;H)}\leqslant K_4\|v_n-u\|_{C^1(S;H)},$$

и в силу неравенства треугольника получаем окончательно

$$\|u_n-u\|_{C^1(S;H)}\leqslant K\|v_n-u\|_{C^1(S;H)}. \tag{3.13}$$

Постоянные K_1, K_2, K_3, K_4, K не зависят от n и u. Из оценки (3.13) ввиду нашего выбора последовательности $\{v_n\}$ (см. самое начало доказательства) следует сходимость последовательности $\{u_n\}$ к решению u. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.2. В силу замечания 3.1, существование галёркинских приближений u_n со свойствами $u_n \in C(S; H_n)$, $A_n u_n \in C^1(S; H_n^*)$ для $n = 1, 2, \ldots$ вытекает из теоремы 2.2.

Пусть $\{v_n\}$ — какая-нибудь последовательность функций $v_n \in C(S; H_n)$, для которой

$$\| v_n - u \|_{C(S;\, H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Согласно лемме 3.1, а), такая последовательность существует. Очевидно, что решение $u \in C(S; H)$ задачи (2.9) удовлетворяет интегральному уравнению

$$b - A(t)\, u(t) - \int_0^t ((Bu)(s) - f(s))\, ds = 0 \qquad \forall t \in S.$$

Применив к нему оператор $I_n^* \in (H^* \to H_n^*)$, получим, ввиду (3.2) — (3.4),

$$b_n - A_n(t)\, u(t) - \int_0^t ((B_n u)(s) - f_n(s))\, ds = 0 \qquad \forall t \in S.$$

Приближения Галёркина удовлетворяют соответствующим интегральным уравнениям

$$b_n - A_n(t)\, u_n(t) - \int_0^t ((B_n u_n)(s) - f_n(s))\, ds = 0 \qquad \forall t \in S.$$

Вычитание этих интегральных уравнений и скалярное умножение на $u_n(t) - v_n(t)$ (в смысле двойственности между H_n и H_n^*) дает с учетом свойств операторов I_n и I_n^*

$$\langle Au_n - Av_n,\, u_n - v_n \rangle + \langle Av_n - Au,\, u_n - v_n \rangle =$$
$$= - \left\langle \int_0^t (Bu_n - Bv_n)\, ds,\; u_n - v_n \right\rangle - \left\langle \int_0^t (Bv_n - Bu)\, ds,\quad u_n - v_n \right\rangle$$

(аргумент t временно опущен). Из монотонности и липшиц-непрерывности фигурирующих здесь операторов вытекает оценка

$$m \| u_n(t) - v_n(t) \| \leqslant (M + LT) \| v_n - u \|_{C(S;\, H)} +$$
$$+ L \int_0^t \| v_n - u_n \|_{C([0,\, s];\, H)}\, ds.$$

Так как правая часть является возрастающей функцией от $t \in S$, отсюда следует, что

$$m \| u_n - v_n \|_{C([0,t];H)} \leqslant K_1 \| v_n - u \|_{C(S;H)} + L \int_0^t \| v_n - u_n \|_{C([0,s];H)} ds.$$

На основании леммы Гроноулла

$$\| u_n - v_n \|_{C(S;H)} \leqslant K_2 \| v_n - u \|_{C(S;H)}.$$

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\| u_n - u \|_{C(S;H)} \leqslant K \| v_n - u \|_{C(S;H)}.$$

(Выше K_1, K_2, K — постоянные, не зависящие от n и u.) В силу нашего специального выбора последовательности $\{v_n\}$, утверждение (3.8) тем самым установлено.

Непрерывный линейный оператор $P_n^* \in (H_n^* \to H^*)$, очевидно, перестановочен с оператором дифференцирования. Поэтому, применяя к уравнению Галёркина

$$(A_n(t)\, u_n(t))' + (B_n u_n)(t) = f_n(t)$$

оператор P_n^*, мы приходим к уравнению

$$(\bar{A}_n(t)\, u_n(t))' + P_n^*(B_n u_n)(t) = P_n^* f_n(t), \qquad t \in S.$$

Если вычесть из него уравнение

$$(A(t)\, u(t))' + (Bu)(t) = f(t),$$

то после несложных оценок получим

$$\begin{aligned}
&\| (\bar{A}_n(t)\, u_n(t))' - (A(t)\, u(t))' \|_* \leqslant \\
&\qquad \leqslant \| P_n^*(B_n u_n)(t) - (Bu)(t) - P_n^* f_n(t) + f(t) \|_* \leqslant \\
&\qquad \leqslant \| P_n^*(B_n u_n)(t) - P_n^*(B_n u)(t) \|_* + \\
&\qquad + \| P_n^* I_n^*((Bu)(t) - f(t)) - ((Bu)(t) - f(t)) \|_* \leqslant \\
&\qquad\qquad\qquad \leqslant L \| u_n - u \|_{C(S;H)} + \varepsilon_n,
\end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_n = \sup_{t \in S} \| P_n^* I_n^*((Bu)(t) - f(t)) - ((Bu)(t) - f(t)) \|_*.$$

Интегрируя это соотношение и учитывая, что $A(0)\, u(0) = b$ и $A_n(0)\, u_n(0) = I_n^* b$, находим

$$\| \bar{A}_n u_n - Au \|_{C(S;H^*)} \leqslant \| P_n^* I_n^* b - b \|_* + LT \| u_n - u \|_{C(S;H)} + T\varepsilon_n.$$

В силу соотношения (3.8) и леммы (3.2) отсюда следует утверждение (3.9). Теорема доказана.

2. МЕТОД ГАЛЁРКИНА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ; L^2-ТЕОРИЯ

При рассмотрении L^2-теории мы тоже, как и в предыдущем пункте, наложим более сильные ограничения на семейство операторов $\{A(t)\}$, представляющих оператор A. Мы будем требовать, чтобы операторы $A(t)$ удовлетворяли условию Липшица (3.1). Предположения (2.11), (2.13), (2.14) остаются в силе. Легко видеть, что при этом выполнено и условие (2.12).

Для $n = 1, 2, \ldots$ определим операторы A_n, $B_n \in (L^2(S; H) \to L^2(S; H_n^*))$ формулами

$$\begin{aligned} (A_n u)(t) &= A_n(t)\, u(t), \text{ где } A_n(t) = I_n^* A(t), \\ (B_n u)(t) &= I_n^* (Bu)(t), \quad t \in S, \end{aligned} \tag{3.14}$$

и для $f \in L^2(S; H^*)$ введем функции $f_n \in (S \to H_n^*)$, положив

$$f_n(t) = I_n^* f(t). \tag{3.15}$$

Замечание 3.2. Операторы A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, рассматриваемые как отображения из $(L^2(S; H_n) \to L^2(S; H_n^*))$, очевидно, удовлетворяют тем же самым предположениям, что и оператор $A \in (L^2(S; H) \to L^2(S; H^*))$. Операторы Вольтерры $B_n \in (L^2(S; H) \to L^2(S; H_n^*))$ $(n = 1, 2, \ldots)$ липшиц-непрерывны с той же постоянной Липшица L, что и для B. Из условия $f \in L^2(S; H^*)$ следует, что $f_n \in L^2(S; H_n^*)$. Все эти утверждения вытекают из отмеченных в начале параграфа свойств отображения $I_n^* \in (H^* \to H_n^*)$.

Уравнениями Галёркина для псевдопараболических уравнений типа I мы называем уравнения, фигурирующие в следующих задачах Коши $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{gathered} A_n u_n' + B_n u_n = f_n, \\ u_n(0) = a_n \in H_n, \quad u_n \in C(S; H_n), \quad u_n' \in L^2(S; H_n); \end{gathered} \tag{3.16}$$

для уравнений типа II — соответственно уравнения, фигурирующие в задачах

$$\begin{gathered} (A_n u_n)' + B_n u_n = f_n, \\ (A_n u_n)(0) = b_n \in H_n^*, \quad u_n \in L^2(S; H_n), \\ A_n u_n \in C(S; H_n^*), \quad (A_n u_n)' \in L^2(S; H_n^*). \end{gathered} \tag{3.17}$$

Как и в п. 1, в качестве начальных элементов выберем

$$a_n = P_n a \in H_n, \quad b_n = I_n^* b \in H_n^* \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.18}$$

Прежде чем приводить главные результаты этого пункта, докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3.3. Пусть $v \in (S \to H)$, и пусть v_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — функции, определенные на S по правилу $t \to v_n(t) = P_n v(t)$.

a) Если $v \in L^2(S;\ H)$, то $v_n \in L^2(S;\ H_n)$ и

$$\|v_n - v\|_{L^2(S;\ H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

b) Если $v \in C(S;\ H)$, $v' \in L^2(S;\ H)$, то $v_n \in C(S;\ H_n)$, $v'_n \in L^2(S;\ H_n)$ и

$$\|v_n - v\|_{C(S;\ H)} \to 0, \quad \|v'_n - v'\|_{L^2(S;\ H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. a) То что $v_n \in L^2(S;\ H_n)$, следует из линейности и непрерывности операторов проектирования P_n $(n=1, 2, \ldots)$. В силу полноты системы $\{h_1, h_2, \ldots\}$ в H, для почти всех $t \in S$

$$\|v_n(t) - v(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и

$$\|v_n(t)\| = \|P_n v(t)\| \leqslant \|v(t)\|,$$

поэтому утверждение о сходимости следует из теоремы Лебега.

b) Часть этого утверждения совпадает с утверждением a) леммы 3.1. Так как $v' \in L^2(S; H)$, то функция v почти всюду дифференцируема на S. Согласно рассуждениям из доказательства части b) леммы 3.1, в тех точках, где существует производная от v, т. е. почти всюду на S,

$$v'_n(t) = P_n v'(t).$$

Остальные утверждения получаются отсюда применением уже доказанного утверждения a). Лемма доказана.

Лемма 3.4. Пусть $w \in L^2(S; H^*)$. Тогда функции w_n $(n = 1, 2, \ldots)$, определенные по правилу $t \to w_n(t) = P_n^* I_n^* w(t)$, $t \in S$, также принадлежат $L^2(S;\ H^*)$ и

$$\|w_n - w\|_{L^2(S;\ H^*)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Согласно проведенным при доказательстве леммы 3.2 вычислениям,

$$\|P_n^* I_n^* x - x\|_* \leqslant \|P_n R x - R x\| \qquad \forall x \in H^*$$

(где $R \in (H^* \to H)$ — оператор Рисса). Если теперь применить утверждение a) леммы 3.3 к функции $v \in L^2(S; H)$, определенной по правилу $t \to v(t) = Rw(t)$, то и получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

Теперь приведем главные результаты этого пункта.

Теорема 3.3. *В предположениях* (2.11), (2.13), (2.14) *и* (3.1) *уравнения Галёркина* (3.16) *при каждом* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют точно одно решение* u_n. *Если* u — *решение задачи* (2.15), *то для этой последовательности галёркинских приближений* $\{u_n\}$

$$\|u_n - u\|_{C(S;\,H)} + \|u'_n - u'\|_{L^2(S;\,H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 3.4. *В предположениях* (2.11), (2.13), (2.14) *и* (3.1) *уравнения Галёркина* (3.17) *при каждом* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют точно одно решение* u_n. *Если* u — *решение задачи* (2.16), *то для этой последовательности галёркинских приближений* $\{u_n\}$

$$\|u_n - u\|_{L^2(S;\,H)} \to 0,$$

$$\|\bar{A}_n u_n - Au\|_{C(S;\,H^*)} + \|(\bar{A}_n u_n)' - (Au)'\|_{L^2(S;\,H^*)} \to 0$$

при $n \to \infty$. *Здесь* $\bar{A}_n v$ *для* $v \in L^2(S; H)$ *определяется правилом* $t \to \bar{A}_n(t)\, v(t) = P_n^* A_n(t)\, v(t)$, $t \in S$.

Доказательство теоремы 3.3. В силу замечания 3.2, существование галёркинских приближений u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ следует из теоремы 2.3. Для последовательности $\{v_n\}$ функций v_n, определенных для $t \in S$ формулой

$$v_n(t) = P_n u(t), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

имеем, согласно лемме 3.3, b),

$$\|v_n - u\|_{C(S;\,H)} + \|v'_n - u'\|_{L^2(S;\,H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Применяя к справедливому при почти всех $t \in S$ уравнению

$$(Au')(t) + (Bu)(t) = f(t)$$

оператор $I_n^* \in (H^* \to H_n^*)$, приходим, ввиду (3.14), (3.15), к уравнению

$$(A_n u')(t) + (B_n u)(t) = f_n(t).$$

Если вычесть его из уравнения Галёркина

$$(A_n u'_n)(t) + (B_n u_n)(t) = f_n(t),$$

то после скалярного умножения на

$$r_n(t) = u'_n(t) - v'_n(t) \in H_n$$

(в смысле двойственности пространств H_n и H_n^*) и несложных преобразований с учетом представления оператора A_n получим, что для $s \in S$

$$\int_0^s \langle A_n(t) u_n'(t) - A_n(t) v_n'(t),\ u_n'(t) - v_n'(t)\rangle\, dt + \\ + \int_0^s \langle A_n(t) v_n'(t) - A_n(t) u'(t),\ r_n(t)\rangle\, dt + \\ + \int_0^s \langle (B_n u_n)(t) - (B_n v_n)(t),\ r_n(t)\rangle\, dt + \\ + \int_0^s \langle (B_n v_n)(t) - (B_n u)(t),\ r_n(t)\rangle\, dt = 0.$$

Отсюда на основании свойств оператора I_n^* следует, что

$$\int_0^s \langle A(t) u_n'(t) - A(t) v_n'(t),\ u_n'(t) - v_n'(t)\rangle\, dt \leqslant \\ \leqslant \int_0^s \| A(t) v_n'(t) - A(t) u'(t)\|_* \| r_n(t)\|\, dt + \\ + \int_0^s \| (Bu_n)(t) - (Bv_n)(t)\|_* \| r_n(t)\|\, dt + \\ + \int_0^s \| (Bv_n)(t) - (Bu)(t)\|_* \| r_n(t)\|\, dt.$$

В силу монотонности операторов $A(t)$ и липшиц-непрерывности $A = \{A(t)\}$ и B, при помощи неравенства Шварца получаем

$$m \int_0^s \| r_n(t)\|^2\, dt \leqslant \\ \leqslant \left(M \| v_n' - u'\|_{L^2(S;\,H)} + L \| v_n - u\|_{L^2(S;\,H)}\right) \left(\int_0^s \| r_n(t)\|^2\, dt\right)^{1/2} + \\ + L \left(\int_0^s \| u_n(t) - v_n(t)\|^2\, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^s \| r_n(t)\|^2\, dt\right)^{1/2},$$

откуда

$$\int_0^s \|r_n(t)\|^2 dt \leqslant K_1 \left(\|v_n' - u'\|_{L^2(S;\,H)} + \|v_n - u\|_{L^2(S;\,H)}\right)^2 + \\ + K_2 \int_0^s \|u_n(t) - v_n(t)\|^2 dt. \quad (3.19)$$

Поскольку v_n, $u \in C(S;\,H)$, то

$$\|v_n - u\|_{L^2(S;\,H)} \leqslant \sqrt{T}\, \|v_n - u\|_{C(S;\,H)}. \quad (3.20)$$

В силу теоремы 1.7 гл. IV и равенств $v_n(0) = u_n(0) = a_n$ (см. (3.18)),

$$u_n(t) - v_n(t) = \int_0^t r_n(\tau)\, d\tau,$$

так что

$$\|u_n(t) - v_n(t)\|^2 \leqslant T \int_0^t \|r_n(\tau)\|^2 d\tau. \quad (3.21)$$

Подставляя в (3.19) оценки (3.20) и (3.21) и вводя сокращение

$$F(s) = \int_0^s \|r_n(t)\|^2 dt,$$

получаем окончательно

$$F(s) \leqslant K_3 \left(\|v_n - u\|_{C(S;\,H)} + \|v_n' - u'\|_{L^2(S;\,H)}\right)^2 + K_4 \int_0^s F(t)\, dt.$$

Применение леммы Гронуолла дает теперь

$$\|r_n\|_{L^2(S;\,H)} \leqslant K_5 \left(\|v_n - u\|_{C(S;\,H)} + \|v_n' - u'\|_{L^2(S;\,H)}\right).$$

Наконец, используя оценку (3.21) и неравенство треугольника, получаем отсюда

$$\|u_n - u\|_{C(S;\,H)} + \|u_n' - u'\|_{L^2(S;\,H)} \leqslant K \left(\|v_n - u\|_{C(S;\,H)} + \\ + \|v_n' - u'\|_{L^2(S;\,H)}\right).$$

(Выше $K_1, \ldots, K_5$, K — не зависящие от n и u постоянные.) Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.4. В силу замечания 3.2, существование галёркинских приближений u_n для $n = 1, 2, \ldots$ следует из теоремы 2.4.

Для последовательности $\{v_n\}$ функций v_n, определенных по правилу $t \to v_n(t) = P_n u(t)$, $t \in S$, имеем, в силу леммы 3.3, а),

$$\| v_n - u \|_{L^2(S;\, H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Решение u задачи (2.16) и галёркинские приближения u_n удовлетворяют соответственно соотношениям

$$A(t)\, u(t) = b - \int_0^t ((Bu)(\tau) - f(\tau))\, d\tau, \tag{3.22}$$

$$A_n(t)\, u_n(t) = b_n - \int_0^t ((B_n u_n)(\tau) - f_n(\tau))\, d\tau. \tag{3.23}$$

Применяя к (3.22) оператор I_n^*, приходим к уравнению

$$A_n(t)\, u(t) = b_n - \int_0^t ((B_n u)(\tau) - f_n(\tau))\, d\tau. \tag{3.24}$$

Вычитая его из уравнения (3.23) и затем скалярно умножая на $r_n(t) = u_n(t) - v_n(t) \in H_n$, после некоторых преобразований находим

$$\langle A_n(t)\, u_n(t) - A_n(t)\, v_n(t),\, u_n(t) - v_n(t)\rangle + \langle A_n(t)\, v_n(t) - A_n(t)\, u(t),\, r_n(t)\rangle =$$
$$= -\left\langle \int_0^t ((B_n u_n)(\tau) - (B_n v_n)(\tau))\, d\tau,\ r_n(t) \right\rangle -$$
$$- \left\langle \int_0^t ((B_n v_n)(\tau) - (B_n u)(\tau))\, d\tau,\ r_n(t) \right\rangle.$$

Если проинтегрировать это соотношение по отрезку $[0, s]$, $s \in S$, то с учетом вытекающей из свойств оператора I_n^* монотонности и липшиц-непрерывности встречающихся здесь операторов получим

$$m \int_0^s \| r_n(t) \|^2\, dt \leqslant K_1 \| v_n - u \|_{L^2(S;\, H)} \left(\int_0^s \| r_n(t) \|^2\, dt \right)^{1/2} +$$
$$+ K_2 \left[\int_0^s \left(\int_0^t \| r_n(\tau) \|^2\, d\tau \right] \left(\int_0^s \| r_n(t) \|^2\, dt \right)^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Вводя сокращение

$$F(s) = \int_0^s \| r_n(t) \|^2\, dt,$$

заключаем отсюда, что

$$F(s) \leqslant K_3 \| v_n - u \|^2_{L^2(S;\, H)} + K_4 \int_0^s F(t)\, dt.$$

Применение леммы Гронуолла дает

$$\| u_n - v_n \|_{L^2(S;\, H)} \leqslant K_5 \| v_n - u \|_{L^2(S;\, H)},$$

и неравенство треугольника приводит к оценке

$$\| u_n - u \|_{L^2(S;\, H)} \leqslant K \| v_n - u \|_{L^2(S;\, H)}. \tag{3.25}$$

(Выше $K_1, \ldots, K_5$, K — постоянные, не зависящие от n и u.) Применяя к соотношению (3.23) оператор $P_n^* \in (H_n^* \to H^*)$, приходим к уравнению

$$\bar{A}_n(t)\, u_n(t) = P_n^* b_n - \int_0^t \left(P_n^* \left(B_n u_n\right)(s) - P_n^* f_n(s)\right) ds, \quad t \in S.$$

Если вычесть из него уравнение (3.22) и ввести для краткости обозначения

$$w_n(s) = P_n^* I_n^* ((Bu)(s) - f(s)) \quad \text{и} \quad w(s) = (Bu)(s) - f(s),$$

то получим

$$\begin{aligned}
&\| \bar{A}_n(t)\, u_n(t) - A(t)\, u(t) \|_* \leqslant \\
&\qquad \leqslant \| P_n^* I_n^* b - b \|_* + \int_S \| P_n^* \left(B_n u_n\right)(s) - P_n^* \left(B_n u\right)(s) \|_* \, ds + \\
&\qquad + \int_S \| w_n(s) - w(s) \|_* \, ds \leqslant \\
&\qquad \leqslant \| P_n^* I_n^* b - b \| + \sqrt{T} \left(L \| u_n - u \|_{L^2(S;\, H)} + \| w_n - w \|_{L^2(S;\, H^*)} \right).
\end{aligned}$$

В силу оценки (3.25) и леммы 3.4, отсюда следует, что

$$\| \bar{A}_n u_n - Au \|_{C(S;\, H^*)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.26}$$

Проводя аналогичные рассуждения, из уравнений

$$(Au)' + Bu = f,$$
$$(A_n u_n)' + B_n u_n = f_n$$

после применения оператора P_n^* с учетом его перестановочности с оператором дифференцирования и с использованием введенных выше сокращенных обозначений получим

$$\| (\bar{A}_n u_n)' - (Au)' \|_{L^2(S;\, H^*)} \leqslant L \| u_n - u \|_{L^2(S;\, H)} + \| w_n - w \|_{L^2(S;\, H^*)}. \tag{3.27}$$

В соотношениях (3.25)—(3.27) содержатся все утверждаемые свойства сходимости галёркинской последовательности. Теорема доказана.

§ 4. ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущем параграфе мы доказали сходимость галёркинских приближений к решениям псевдопараболических уравнений. Если, используя базис $\{h_1, \ldots, h_n\}$ конечномерного подпространства $H_n \subset H$, представить галёркинские приближения в виде

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(t)\, h_k, \qquad t \in S,$$

то уравнения Галёркина оказываются системой вообще говоря нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов c_{nk} $(k = 1, 2, \ldots, n)$. В настоящем параграфе мы покажем, как можно получить приближенные решения для псевдопараболических уравнений при помощи одних только линейных операций, а именно посредством квадратур, решения линейных систем уравнений и вычисления скалярных произведений. Для этой цели мы применим изложенный в § 3 гл. III проекционно-итерационный метод.

Пусть $R_n \in (H_n^* \to H_n)$ — оператор Рисса для пространства H_n (см. замечание 6.3 гл. I), т. е. $R_n = J_n^{-1}$, где $J_n \in (H_n \to H_n^*)$ — (линейное) дуализующее отображение для пространства H_n; R_n является линейным (изометрическим) изоморфизмом; для $g \in H_n^*$

$$\| R_n g \| = \| g \|_{H_n^*} \tag{4.1}$$

и для $g \in H_n^*$, $h \in H_n$

$$(R_n g,\ h) = \langle g,\ h \rangle. \tag{4.2}$$

Докажем прежде всего многократно используемую ниже лемму.

Лемма 4.1. Пусть операторы $A(t) \in (H \to H^*)$ сильно монотонны и липшиц-непрерывны в смысле предположений (2.13) и (3.1). Тогда для $n = 1, 2, \ldots$ отображения $K_n(t) \in (H_n \to H_n)$, $t \in S$, определенные формулой

$$K_n(t)\, x = x - \lambda R_n A_n(t)\, x, \qquad x \in H_n,$$

являются при $0 < \lambda < 2m/M^2$ сжимающими с не зависящими от n постоянными сжатия

$$r(\lambda) = \sqrt{1 - 2\lambda m + \lambda^2 M^2}.$$

Доказательство. Так как $A_n(t) = I_n^* A(t)$, то из равенства (4.1) и липшиц-непрерывности операторов $A(t)$ следует, что для каждого $t \in S$ и любых $x, y \in H_n$

$$\| R_n A_n(t) x - R_n A_n(t) y \| = \| A_n(t) x - A_n(t) y \|_{H_n^*} \leqslant$$
$$\leqslant \| A(t) x - A(t) y \|_* \leqslant M \| x - y \|.$$

В силу равенства (4.2) и монотонности операторов $A(t)$,

$$(R_n A_n(t) x - R_n A_n(t) y,\ x - y) = \langle A_n(t) x - A_n(t) y,\ x - y \rangle =$$
$$= \langle A(t) x - A(t) y,\ x - y \rangle \geqslant m \| x - y \|^2.$$

Наше утверждение следует теперь из леммы 3.1 гл. III.

1. ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД; C-ТЕОРИЯ

Сначала рассмотрим псевдопараболические уравнения типа I.

Положим (как и в § 3, см. (3.11)) для $v, w \in C^1(S; H)$

$$\rho_k(v, w) = \sup_{t \in S} \{ e^{-kt} \| v'(t) - w'(t) \| \}.$$

Далее, введем множество

$$X_n = \{ v \mid v \in C^1(S;\ H_n),\ v(0) = a_n \},$$

где $a_n = P_n a$. Нетрудно видеть, что это множество замкнуто в $C^1(S; H_n)$ и что оно является полным метрическим пространством с только что определенной функцией ρ_k в качестве метрики. Вещественным параметром k, входящим в определение ρ_k, мы распорядимся позднее.

Лемма 4.2. Пусть $v \in X_n$, $w \in X_l$. Тогда

$$\| v - w \|_{C([0, t];\ H)} \leqslant \| a_n - a_l \| + \frac{e^{kt}}{k} \rho_k(v, w), \qquad t \in S.$$

Доказательство. Из представления

$$v(s) - w(s) = a_n - a_l + \int_0^s (v'(\tau) - w'(\tau))\, d\tau$$

следует, что

$$\| v - w \|_{C([0,t];H)} \leqslant \| a_n - a_l \| + \sup_{s \in [0,t]} \left\| \int_0^s (v'(\tau) - w'(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \| a_n - a_l \| + \int_0^t \| v'(\tau) - w'(\tau) \| e^{-k\tau} e^{k\tau}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \| a_n - a_l \| + \rho_k(v, w) \int_0^t e^{k\tau}\, d\tau.$$

Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются предположения теоремы* 3.1, *и пусть* $u \in C^1(S; H)$ — *решение псевдопараболического уравнения*

$$A(t)\, u'(t) + (Bu)(t) = f(t), \qquad u(0) = a.$$

Определим последовательность $\{v_n\}$ *функций* $v_n \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *при помощи формулы*

$$v_n(t) = (U_n v_{n-1})(t), \qquad t \in S, \tag{4.3}$$

где $v_0 \in X_1$ — *произвольный начальный элемент и для* $v \in X_l$, $l \leqslant n$,

$$(U_n v)(t) = a_n + \int_0^t (v'(s) - \lambda R_n A_n(t)\, v'(s))\, ds -$$

$$- \int_0^t (\lambda R_n (B_n v)(s) - \lambda R_n f_n(s))\, ds, \tag{4.4}$$

причем $0 < \lambda < 2m/M^2$. *Тогда*

$$\| v_n - u \|_{C^1(S;H)} \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Из определениия (4.4) и свойств оператора Рисса R_n сразу следует, что галёркинское приближение $w_n \in C^1(S; H_n)$ является неподвижной точкой отображения U_n на X_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $v, w \in X_l$, $l \leqslant n$. Поскольку, очевидно, $U_n v$, $U_n w \in X_n$, то (в обозначениях леммы 4.1)

$$(U_n v)'(t) - (U_n w)'(t) = K_n(t)\, v'(t) - K_n(t)\, w'(t) - \lambda (R_n (B_n v)(t) - $$

$$- R_n (B_n w)(t)$$

По лемме 4.1 отсюда следует, если еще принять во внимание свойство (4.1) оператора Рисса R_n и определение (3.3) оператора Вольтерры B_n, что

$$\|(U_n v)'(t)-(U_n w)'(t)\| \leqslant r(\lambda)\|v'(t)-w'(t)\|+\lambda\,\|(Bv)(t)-(Bw)(t)\|_*.$$

В силу липшиц-непрерывности вольтеррова оператора B получаем далее

$$\|(U_n v)'(t)-(U_n w)'(t)\| \leqslant r(\lambda)\|v'(t)-w'(t)\|+ \\ +\lambda L\|v-w\|_{C([0,t];H)} \tag{4.5}$$

и, согласно лемме 4.2,

$$\|(U_n v)'(t)-(U_n w)'(t)\|e^{-kt} \leqslant r(\lambda)\|v'(t)-w'(t)\|e^{-kt}+\frac{\lambda L}{k}\rho_k(v, w).$$

Переходя к метрике ρ_k, находим

$$\rho_k(U_n v,\ U_n w) \leqslant \left(r(\lambda)+\frac{\lambda L}{k}\right)\rho_k(v,\ w).$$

Ввиду предположения $0<\lambda<2m/M^2$ имеем (см. лемму 4.1) $0<r(\lambda)<1$. Если теперь выбрать

$$k>\frac{L\lambda}{1-r(\lambda)},$$

то $\mu=r(\lambda)+\frac{\lambda L}{k}$ будет удовлетворять условию

$$0<\mu<1.$$

Полученная нами оценка

$$\rho_k(U_n v,\ U_n w) \leqslant \mu\rho_k(v,\ w), \qquad v,\ w \in X_l, \qquad l \leqslant n, \tag{4.6}$$

служит исходным пунктом дальнейших рассуждений. Из нее, в частности, следует, что U_n в X_n является сжимающим отображением.

В теореме 3.1 мы показали, что для последовательности галёркинских приближений $\{u_n\}$

$$\|u_n-u\|_{C^1(S;\,H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Так как

$$\|v_n-u\|_{C^1(S;\,H)} \leqslant \|v_n-u_n\|_{C^1(S;\,H)}+\|u_n-u\|_{C^1(S;\,H)},$$

то для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\|v_n-u_n\|_{C^1(S;\,H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Очевидно, $v_n(0)=u_n(0)=a_n$, поэтому при некоторой не зависящей от n постоянной K

$$\|v_n-u_n\|_{C^1(S;\,H)} \leqslant K\rho_k(v_n,\ u_n).$$

Следовательно, можно ограничиться доказательством того факта, что

$$\rho_k(u_n,\ v_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{4.7}$$

Прежде всего докажем по индукции, что

$$\rho_k(v_n, u_n) \leqslant \mu^n \rho_k(v_0, u_1) + \\ + \sum_{\nu=1}^{n-1} \mu^{n-\nu-1} (\mu\rho_k(u_{\nu+1}, u_\nu) + \lambda L \| a_{\nu+1} - a_\nu \|). \quad (4.8)$$

Поскольку $u_1, v_0 \in X_1$, то

$$\rho_k(v_1, u_1) = \rho_k(U_1 v_0, U_1 u_1) \leqslant \mu\rho_k(v_0, u_1),$$

т. е. (4.8) справедливо при $n = 1$. Далее,

$$\rho_k(v_{n+1}, u_{n+1}) = \rho_k(U_{n+1} v_n, U_{n+1} u_{n+1}) \leqslant \\ \leqslant \rho_k(U_{n+1} v_n, U_{n+1} u_n) + \rho_k(U_{n+1} u_n, U_{n+1} u_{n+1}) \leqslant \\ \leqslant \mu\rho_k(v_n, u_n) + \rho_k(U_{n+1} u_n, U_{n+1} u_{n+1}).$$

Оценим $\rho_k(U_{n+1} u_n, U_{n+1} u_{n+1})$. Для этого заметим, что в силу (4.5)

$$\| (U_{n+1} u_n)'(t) - (U_{n+1} u_{n+1})'(t) \| \leqslant \\ \leqslant r(\lambda) \| u_n'(t) - u_{n+1}'(t) \| + \lambda L \| u_n - u_{n+1} \|_{C([0, t]; H)}.$$

По лемме 4.2 после перехода к метрике ρ_k получаем

$$\rho_k(U_{n+1} u_n, U_{n+1} u_{n+1}) \leqslant \mu\rho_k(u_{n+1}, u_n) + \lambda L \| a_{n+1} - a_n \|.$$

Следовательно,

$$\rho_k(v_{n+1}, u_{n+1}) \leqslant \mu\rho_k(u_{n+1}, u_n) + \lambda L \| a_{n+1} - a_n \| + \mu\rho_k(v_n, u_n).$$

Используя теперь предположение индукции (4.8), приходим к оценке

$$\rho_k(v_{n+1}, u_{n+1}) \leqslant \mu^{n+1} \rho_k(v_0, u_1) + \\ + \sum_{\nu=1}^{n} \mu^{n-\nu} (\mu\rho_k(u_{\nu+1}, u_\nu) + \lambda L \| a_{\nu+1} - a_\nu \|).$$

Тем самым индукция завершена.

После этих приготовлений мы можем доказать (4.7). Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $0 < \mu < 1$, то существует $n_1 = n_1(\varepsilon)$, такое, что

$$\mu^n \rho_k(v_0, u_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_1.$$

Поскольку $\| a_n - a \| \to 0$ и $\rho_k(u_n, u) \to 0$ при $n \to \infty$, то найдется такое $n_2 = n_2(\varepsilon)$, что

$$\mu\rho_k(u_{\nu+1}, u_\nu) + \lambda L \| a_{\nu+1} - a_\nu \| \leqslant (1 - \mu) \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad \nu \geqslant n_2;$$

поэтому

$$\sup_\nu \{\mu\rho_k(u_{\nu+1}, u_\nu) + \lambda L \| a_{\nu+1} - a_\nu \|\} = K < +\infty.$$

Из (4.8) следует теперь, что при $n \geqslant \max(n_1, n_2)$

$$\rho_k(v_n, u_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + K \sum_{\nu=1}^{n_2-1} \mu^{n-\nu-1} + (1-\mu)\frac{\varepsilon}{4} \sum_{\nu=n_2}^{n-1} \mu^{n-\nu-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + K(n_2-1)\mu^{n-n_2}.$$

Если выбрать $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $n_0 > \max(n_1, n_2)$, такое, что

$$K(n_2-1)\mu^{n_0-n_2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

то, очевидно, при $n > n_0$

$$\rho_k(v_n, u_n) \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание 4.1. Доказательство теоремы 4.1 доставляет незначительную модификацию леммы 3.2 гл. III: рассматриваемая там последовательность банаховых пространств заменяется последовательностью метрических пространств.

Замечание 4.2. Приближение v_n $(n = 1, 2, \ldots)$ обладает представлением

$$v_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t) h_j$$

с коэффициентами $a_{nj} \in C^1(S)$, $j = 1, \ldots, n$. Они определяются из правила (4.3) или эквивалентных ему соотношений

$$(v_n(t), h_k) = ((U_n v_{n-1})(t), h_k), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Если расписать эти соотношения подробнее, воспользовавшись свойствами отображений R_n и I_n^*, то получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)(h_j, h_k) = (a_n - a_{n-1}, h_k) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1\,j}(t)(h_j, h_k) -$$
$$- \lambda \int_0^t \left\langle A(s) v'_{n-1}(s) + (Bv_{n-1})(s) - f(s), h_k \right\rangle ds \qquad (4.9)$$
$$(k = 1, \ldots, n, \ t \in S).$$

Это линейная система относительно функций a_{nj}, $j = 1, \ldots, n$. Матрица из ее (не зависящих от t) коэффициентов есть не что иное, как отвечающая базису $\{h_1, \ldots, h_n\}$ матрица Грама

$$G = (g_{jk}), \quad j, \quad k = 1, \ldots, n,$$

с элементами $g_{jk} = (h_j, h_k)$. В силу линейной независимости базисных элементов $h_1, \ldots, h_n$ матрица G положительно определена и симметрична. Как видно из (4.9), нахождение приближения v_n по предыдущему приближению v_{n-1} осуществляется при помощи вычисления скалярных произведений, квадратур и решения линейных уравнений. Особенно простые соотношения получаются в случае, когда базис $\{h_1, \ldots, h_n\}$ состоит из ортонормированных элементов. Тогда матрица Грама G превращается в единичную матрицу и формулы (4.9) выглядят в этом случае так:

$$a_{nj}(t) = a_{n-1j}(t) + R_j(t), \qquad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$a_{nn}(t) = (a_n, h_n) + R_n(t);$$

здесь

$$R_j(t) = -\lambda \int_0^t \langle A(s) v'_{n-1}(s) + (Bv_{n-1})(s) - f(s), h_j \rangle \, ds$$

$$(j = 1, \ldots, n).$$

Иногда целесообразно (см. § 3 гл. III), применив к (4.3) дуализующее отображение $J_n = I_n^* J I_n \in (H_n \to H_n^*)$, перейти к уравнениям вида

$$\langle J v_n(t), h_k \rangle = \langle J(U_n v_{n-1})(t), h_k \rangle, \qquad k = 1, \ldots, n, \quad t \in S.$$

Система, соответствующая системе (4.9), в этом случае имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t) \langle Jh_j, h_k \rangle = \langle Ja_n - Ja_{n-1}, h_k \rangle + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1j}(t) \langle Jh_j, h_k \rangle -$$

$$-\lambda \int_0^t \langle A(s) v'_{n-1}(s) + (Bv_{n-1})(s) - f(s), h_k \rangle \, ds \quad (k = 1, \ldots, n; t \in S).$$

Теперь займемся псевдопараболическими уравнениями типа II.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены предположения теоремы 3.2, и пусть $u \in C(S; H)$ — решение псевдопараболического уравнения*

$$(A(t) u(t))' + (Bu)(t) = f(t), \qquad A(0) u(0) = b \in H^*.$$

Определим последовательность $\{v_n\}$ функций $v_n \in C(S; H_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, формулой

$$v_n(t) = (U_n v_{n-1})(t), \qquad t \in S, \tag{4.10}$$

где $v_0 \in C(S; H_1)$ — *произвольный начальный элемент. Здесь для* $v \in C(S; H_n)$

$$(U_n v)(t) = \lambda R_n b_n + v(t) - \lambda R_n A_n(t)\, v(t) - \\ - \lambda \int_0^t (R_n (B_n v)(s) - R_n f_n(s))\, ds, \quad (4.11)$$

причем $0 < \lambda < 2m/M^2$. *Тогда*

$$\| v_n - u \|_{C(S;\, H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Очевидно, $U_n \in (C(S; H_n) \to C(S; H_n))$ и

$$u_n = U_n u_n,$$

т. е. галёркинские приближения u_n для решения u являются неподвижными точками отображений U_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Из (4.11) в силу леммы 4.1 следует, что для v, $w \in C(S; H_n)$

$$\begin{aligned} &\| (U_n v)(t) - (U_n w)(t) \| \leqslant \\ &\leqslant \| K_n(t)\, v(t) - K_n(t)\, w(t) \| + \lambda \int_0^t \| (B_n v)(s) - (B_n w)(s) \|_{H_n^*} ds \leqslant \\ &\leqslant r(\lambda) \| v(t) - w(t) \| + \lambda \int_0^t \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant s} \| (Bv)(\tau) - (Bw)(\tau) \|_* ds \leqslant \\ &\leqslant r(\lambda) \| v(t) - w(t) \| + \lambda L \int_0^t \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant s} \{ \| v(\tau) - w(\tau) \| e^{-k\tau} \} e^{ks} ds \leqslant \\ &\leqslant r(\lambda) \| v(t) - w(t) \| + \frac{\lambda L}{k} \| v - w \|_{C,\, k}\, e^{kt}; \end{aligned}$$

в последнем члене использована (C, k)-норма

$$\| v \|_{C,\, k} = \sup_{t \in S} \{ e^{-kt} \| v(t) \| \}$$

в $C(S, H)$. Переходя к (C, k)-норме, получаем

$$\| U_n v - U_n w \|_{C,\, k} \leqslant \left(r(\lambda) + \frac{\lambda L}{k} \right) \| v - w \|_{C,\, k}.$$

Если выбрать

$$k > \frac{\lambda L}{1 - r(\lambda)},$$

то отображения U_n на $C(S; H_n)$ будет сжатиями относительно (C, k)-нормы с постоянной сжатия, не зависящей от n. Так как неподвижные точки этих сжатий U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — галёркинские приближения u_n — согласно теореме 3.2 сходятся в $C(S; H)$

к решению u и так как, очевидно, $C(S; H_n) \subset C(S; H_{n+1}) \subset \ldots \subset C(S; H)$, то по лемме 3.2 гл. III

$$\| v_n - u \|_{C(S;\, H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Замечание 4.3. Рассуждения, подобные проведенным в замечании 4.2, показывают, что и для псевдопараболических уравнений типа II нахождение приближенных решений v_n по правилу (4.10), (4.11) возможно провести «линейным» путем.

2. ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД; L^2-ТЕОРИЯ

Для псевдопараболических уравнений типа I заменим предположение (2.14) об операторе Вольтерры B следующим более сильным предположением:

Отображение $B \in (L^2(S;\ H) \to L^2(S;\ H^*))$ обладает представлением

$$(Bv)(t) = B(t)\, v(t) \quad \text{для} \quad v \in L^2(S;\ H),\ t \in S, \tag{4.12}$$

причем операторы $B(t) \in (H \to H^*)$ (равномерно по $t \in S$) липшиц-непрерывны, т. е.

$$\| B(t)\, x - B(t)\, y \|_* \leqslant L \| x - y \| \quad \text{для любых} \quad x, y \in H.$$

Для $v,\ w \in C(S;\ H)$ с $v',\ w' \in L^2(S;\ H)$ положим

$$d_k(v,\ w) = \left(\int_S \| v'(t) - w'(t) \|^2 e^{-2kt}\, dt \right)^{1/2}.$$

Далее, положим

$$Y_n = \{ v \mid v \in C(S;\ H_n), \quad v' \in L^2(S;\ H_n), \quad v(0) = a_n \},$$

где $a_n = P_n a$. Легко видеть, что Y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ с указанной выше метрикой d_k является полным метрическим пространством. Параметром k мы распорядимся позже (аналогично тому, как в предыдущем пункте это было сделано при доказательстве теоремы 4.1).

Лемма 4.3. Пусть $v \in Y_n$, $w \in Y_l$. Тогда

$$\left(\int_S \| v(t) - w(t) \|^2 e^{-2kt}\, dt \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2k}} \| a_n - a_l \| + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2k}}\, d_k(v,\ w).$$

Доказательство. Так как $v,\ w \in C(S; H)$ и $v',\ w' \in L^2(S; H)$, то имеет место представление

$$v(t) - w(t) = a_n - a_l + \int_0^t (v'(\tau) - w'(\tau))\, d\tau,$$

Отсюда следует, что

$$\left(\int_S \| v(t) - w(t) \|^2 e^{-2kt}\, dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \| a_n - a_l \| \left(\int_S e^{-2kt}\, dt\right)^{1/2} + \left(\int_S e^{-2kt} \left\| \int_0^t (v'(\tau) - w'(\tau))\, d\tau \right\|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2k}} \| a_n - a_l \| + \sqrt{T} \left(\int_S e^{-2kt} \left(\int_0^t \| v'(\tau) - w'(\tau) \|^2 d\tau\right) dt\right)^{1/2}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_S e^{-2kt} \left(\int_0^t \| v'(\tau) - w'(\tau) \|^2 d\tau\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2k} e^{-2kT} \int_0^T \| v'(\tau) - w'(\tau) \|^2 d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2k} \int_S e^{-2kt} \| v'(t) - w'(t) \|^2 dt \leqslant \frac{1}{2k} d_k^2 (v, w).$$

Лемма доказана.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены предположения* (2.11), (2.13), (3.1) *и* (4.12), *и пусть* $u \in (S \to H)$ — *решение псевдопараболического уравнения*

$$Au' + Bu = f, \qquad u(0) = a$$

с $u \in C(S;\ H)$, $u' \in L^2(S;\ H)$. *Определим последовательность* $\{v_n\}$ *функций* $v_n \in Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *по правилу*

$$v_n(t) = (U_n v_{n-1})(t), \qquad t \in S,$$

где $v_0 \in Y_1$ — *произвольный начальный элемент. Здесь для* $v \in Y_l$, $l \leqslant n$,

$$(U_n v)(t) = a_n + \int_0^t (v'(s) - \lambda R_n A_n(s) v'(s))\, ds -$$

$$- \lambda \int_0^t (R_n B_n(s) v(s) - R_n f_n(s))\, ds, \tag{4.13}$$

причем $0 < \lambda < 2m/M^2$. *Тогда*

$$\| v_n - u \|_{C(S;\ H)} + \| v_n' - u' \|_{L^2(S;\ H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Из определения (4.13) сразу видно, что галёркинские приближения u_n (см. теорему 3.3) для $n = 1, 2, \ldots$

являются неподвижными точками отображений U_n в пространствах Y_n. Очевидно, при $v, w \in Y_l$, $l \leqslant n$, имеем $U_n v$, $U_n w \in Y_n$ и

$$((U_n v)'(t) - (U_n w)'(t))\, e^{-kt} = (K_n(t)\, v'(t) - K_n(t)\, w'(t))\, e^{-kt} - \\ - \lambda (R_n B_n(t)\, v(t) - R_n B_n(t)\, w(t))\, e^{-kt}$$

для почти всех $t \in S$. Отсюда в силу неравенства треугольника, леммы 4.1 и предположения (4.12) следует, что

$$d_k(U_n v,\ U_n w) \leqslant r(\lambda)\, d_k(v,\ w) + \\ + \lambda \left(\int_S \| B(t)\, v(t) - B(t)\, w(t) \|_*^2 e^{-2kt}\, dt \right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant r(\lambda)\, d_k(v,\ w) + \lambda L \left(\int_S \| v(t) - w(t) \|^2 e^{-2kt}\, dt \right)^{1/2}$$

и далее, согласно лемме 4.3,

$$d_k(U_n v,\ U_n w) \leqslant \left(r(\lambda) + \frac{\lambda L \sqrt{T}}{\sqrt{2k}} \right) d_k(v,\ w). \qquad (4.14)$$

Поскольку $0 < r(\lambda) < 1$, то при достаточно больших k можно добиться того, чтобы величина

$$\mu = r(\lambda) + \frac{\lambda L \sqrt{T}}{\sqrt{2k}}$$

удовлетворяла условию $0 < \mu < 1$. Тогда U_n будет сжатием на Y_n.

Рассуждения, подобные проведенным при доказательстве теоремы 4.1, показывают, что достаточно проверить выполнение условия

$$d_k(v_n,\ u_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Покажем по индукции, что справедлива оценка

$$d_k(v_n,\ u_n) \leqslant \mu^n d_k(v_0,\ u_1) + \\ + \sum_{\nu=1}^{n-1} \mu^{n-\nu-1} \left(\mu d_k(u_{\nu+1},\ u_\nu) + \frac{\lambda L}{\sqrt{2k}} \| a_{\nu+1} - a_\nu \| \right). \qquad (4.15)$$

Очевидно, это верно для $n = 1$, так как ввиду включений $v_0 \in Y_1$, $u_1 \in Y_1$ имеем, в соответствии с (4.14),

$$d_k(v_1,\ u_1) = d_k(U_1 v_0,\ U_1 u_1) \leqslant \mu d_k(v_0,\ u_1).$$

Аналогично находим

$$d_k(v_{n+1},\ u_{n+1}) = d_k(U_{n+1} v_n,\ U_{n+1} u_{n+1}) \leqslant \\ \leqslant d_k(U_{n+1} v_n,\ U_{n+1} u_n) + d_k(U_{n+1} u_n,\ U_{n+1} u_{n+1}) \leqslant \\ \leqslant \mu d_k(v_n,\ u_n) + d_k(U_{n+1} u_n,\ U_{n+1} u_{n+1}).$$

Для оценки $d_k(U_{n+1}u_n, U_{n+1}u_{n+1})$ заметим, что из справедливого при почти всех $t \in S$ соотношения

$$(U_{n+1}u_n)'(t) - (U_{n+1}u_{n+1})'(t) = K_{n+1}(t)u_n'(t) - K_{n+1}(t)u_{n+1}'(t) - \\ - \lambda(R_{n+1}B_{n+1}(t)u_n(t) - R_{n+1}B_{n+1}(t)u_{n+1}(t))$$

вытекает, в силу неравенства треугольника и лемм 4.1, 4.3, следующая цепочка оценок:

$$d_k(U_{n+1}u_n, U_{n+1}u_{n+1}) \leqslant \\ \leqslant r(\lambda)\, d_k(u_{n+1}, u_n) + \lambda L\left(\int_S \|u_n(t) - u_{n+1}(t)\|^2 e^{-2kt}\,dt\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant r(\lambda)\, d_k(u_{n+1}, u_n) + \frac{\lambda L}{\sqrt{2k}}\|a_{n+1} - a_n\| + \frac{\lambda L\sqrt{T}}{\sqrt{2k}} d_k(u_{n+1}, u_n) = \\ = \mu d_k(u_{n+1}, u_n) + \frac{\lambda L}{\sqrt{2k}}\|a_{n+1} - a_n\|.$$

Поэтому

$$d_k(v_{n+1}, u_{n+1}) \leqslant \mu d_k(u_{n+1}, u_n) + \frac{\lambda L}{\sqrt{2k}}\|a_{n+1} - a_n\| + \mu d_k(v_n, u_n).$$

Используя индуктивное предположение (4.15), теперь без труда завершаем проведение индукции.

Из (4.15) с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 4.1, получаем

$$d_k(v_n, u_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим псевдопараболические уравнения типа II.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.4, *и пусть* $u \in L^2(S; H)$ — *решение псевдопараболического уравнения*

$$(Au)' + Bu = f, \qquad A(0)\,u(0) = b \in H^*.$$

Определим последовательность $\{v_n\}$ *функций* $v_n \in L^2(S; H_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *по правилу*

$$v_n(t) = (U_n v_{n-1}(t), \qquad t \in S,$$

где $v_0 \in L^2(S; H_1)$ — *произвольный начальный элемент. Здесь для* $v \in L^2(S; H_n)$

$$(U_n v)(t) = \lambda R_n b_n + v(t) - \lambda R_n A_n(t)\, v(t) - \\ - \lambda \int_0^t (R_n(B_n v)(s) - R_n f_n(s))\,ds, \qquad (4.16)$$

причем $0<\lambda<2m/M^2$. *Тогда*

$$\|v_n-u\|_{L^2(S;\,H)}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Доказательство. Очевидно, галёркинские приближения удовлетворяют условию

$$u_n=U_nu_n, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots;$$

при этом $U_n\in(L^2(S;\,H_n)\to L^2(S;\,H_n))$. Положим для $v\in\in L^2(S;\,H)$

$$\|v\|_{L^2,\,k}=\left(\int\limits_S\|v(t)\|^2e^{-2kt}\,dt\right)^{1/2}$$

и назовем так определенную норму (L^2,k)-нормой в $L^2(S;\,H)$. Очевидно, нормы $\|\cdot\|_{L^2(S;\,H)}$ и $\|\cdot\|_{L^2,\,k}$ эквивалентны. Покажем, что оператор U_n при подходящей (L^2,k)-норме на $L^2(S;\,H_n)$ является сжимающим. Пусть $v,w\in L^2(S,\,H_n)$. Из равенства

$$(U_nv)(t)-(U_nw)(t)=K_n(t)\,v(t)-K_n(t)\,w(t)-\\ -\lambda\int\limits_0^t(R_n(B_nv)(s)-R_n(B_nw)(s))\,ds$$

в силу леммы 4.1 и липшиц-непрерывности оператора B вытекает оценка

$$\|U_nv-U_nw\|_{L^2,\,k}\leqslant r(\lambda)\,\|v-w\|_{L^2,\,k}+\\ +\lambda L\sqrt{T}\left(\int\limits_S e^{-2kt}\left(\int\limits_0^t\|v(s)-w(s)\|^2\,ds\right)dt\right)^{1/2}.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_S e^{-2kt}\left(\int\limits_0^t\|v(s)-w(s)\|^2\,ds\right)dt=-\frac{1}{2k}e^{-2kT}\int\limits_S\|v(s)-w(s)\|^2\,ds+\\ +\frac{1}{2k}\|v-w\|^2_{L^2,\,k}\leqslant\frac{1}{2k}\|v-w\|^2_{L^2,\,k},$$

так что

$$\|U_nv-U_nw\|_{L^2,\,k}\leqslant\left(r(\lambda)+\frac{\lambda L\sqrt{T}}{\sqrt{2k}}\right)\|v-w\|_{L^2,\,k}.$$

Следовательно, при достаточно больших k отображения U_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ являются сжимающими на $L^2(S;\,H_n)$ с постоянной сжатия, не зависящей от n. Так как их неподвижные точки u_n согласно теореме 3.4 сходятся в $L^2(S;\,H)$ к решению u и $L^2(S;\,H_n)\subset L^2(S;\,H_{n+1})\subset\ldots\subset L^2(S,\,H)$, то утверждение теоремы следует из леммы 3.2 гл. III. Доказательство закончено.

В гл. VI и VII нам понадобится еще один результат о проекционно-итерационном методе для уравнений с операторами из $(L^2(S; H) \to L^2(S; H))$. Предположим, что

$D \in (L^2(S; H) \to L^2(S; H))$ — липшиц-непрерывный оператор Вольтерры:

$$\| Du - Dv \|_{L^2(S; H)} \leqslant L \| u - v \|_{L^2(S; H)} \tag{4.17}$$

и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} u' + Du = f, \\ u(0) = a, \quad u \in C(S; H), \quad u' \in L^2(S; H), \end{gathered} \tag{4.18}$$

а также соответствующие уравнения Галёркина

$$\begin{gathered} u_n' + D_n u_n = f_n, \\ u_n(0) = a_n = P_n a, \quad u_n \in C(S; H_n), \quad u_n' \in L^2(S; H_n), \end{gathered} \tag{4.19}$$

где операторы $D_n \in (L^2(S; H) \to L^2(S; H_n))$ определены формулой

$$(D_n v)(t) = P_n (Dv)(t), \qquad v \in L^2(S; H), \quad t \in S,$$

а функции $f_n \in (S \to H_n)$ для $f \in L^2(S; H)$ — формулой

$$f_n(t) = P_n f(t), \qquad t \in S.$$

Теорема 4.5. *В предположении* (4.17) *уравнение* (4.18) *при любых* $f \in L^2(S; H)$ *и* $a \in H$ *обладает точно одним решением* u. *Соответствующие уравнения Галёркина* (4.19) *при каждом* $n = 1, 2, \ldots$ *обладают точно одним решением* u_n, *и*

$$\| u_n - u \|_{C(S; H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Построим последовательность $\{v_n\}$ *функций* $v_n \in C(S; H_n)$ *с* $v_n' \in L^2(S; H_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *по правилу*

$$v_n(t) = (U_n v_{n-1})(t), \qquad t \in S,$$

где $v_0 \in C(S; H_1)$ — *произвольный начальный элемент. Здесь для* $v \in C(S; H_n)$

$$(U_n v)(t) = a_n - \int_0^t ((D_n v)(s) - f_n(s))\, ds. \tag{4.20}$$

Тогда

$$\| v_n - u \|_{C(S; H)} + \| v_n' - u' \|_{L^2(S, H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Существование решения u и галёркинских приближений u_n следует из теоремы 1.3. Пусть $\{w_n\}$ — какая-либо последовательность функций $w_n \in C(S;\, H_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\|w_n - u\|_{C(S;\, H)} \to 0$ при $n \to \infty$. Согласно лемме 3.1,a), такая последовательность существует. Из соотношений

$$u(t) = a - \int_0^t ((Du)(s) - f(s))\, ds,$$

$$u_n(t) = a_n - \int_0^t ((D_n u_n)(s) - f_n(s))\, ds$$

после вычитания и скалярного умножения на $u_n(t) - w_n(t) \in H_n$ получаем, ввиду симметричности проектора P_n,

$$(u_n(t) - w_n(t),\ u_n(t) - w_n(t)) + (w_n(t) - u(t),\ u_n(t) - w_n(t)) =$$
$$= -\left(\int_0^t ((Du_n)(s) - (Dw_n)(s))\, ds,\ u_n(t) - w_n(t)\right) -$$
$$-\left(\int_0^t ((Dw_n)(s) - (Du)(s))\, ds,\ u_n(t) - w_n(t)\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\|u_n(t) - w_n(t)\| \leqslant K_1 \|w_n - u\|_{C(S;\, H)} + K_2 \left(\int_0^t \|u_n(s) - w_n(s)\|^2\, ds\right)^{1/2},$$

и после несложных преобразований с использованием леммы Гронуолла и неравенства треугольника мы приходим к оценке

$$\|u_n - u\|_{C(S;\, H)} \leqslant K \|w_n - u\|_{C(S;\, H)}.$$

(Выше K_1, K_2, K — не зависящие от n и u постоянные.). В силу сходимости последовательности $\{w_n\}$ отсюда следует сходимость приближений Галёркина u_n к u. Очевидно, u_n — неподвижная точка отображения U_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Из вычислений, проведенных в доказательстве теоремы 1.3, непосредственно видно, что U_n при подходящем выборе k является сжимающим отображением банахова пространства $C(S;\, H_n)$, рассматриваемого с (C, k)-нормой, причем постоянная сжатия не зависит от n. Так как $C(S;\, H_n) \subset C(S;\, H_{n+1}) \subset \ldots \subset C(S;\, H)$, то по лемме 3.2 гл. III

$$\|v_n - u\|_{C(S;\, H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.21}$$

Из (4.20) вытекает, что $v'_n \in L^2(S; H_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ и

$$v'_n = -D_n v_{n-1} + f_n.$$

Из дифференциального уравнения

$$u' = -Du + f$$

получаем

$$\| u' - v'_n \|_{L^2(S;\, H)} \leqslant \| Du - D_n v_{n-1} \|_{L^2(S;\, H)} + \| f_n - f \|_{L^2(S;\, H)}.$$

В силу липшиц-непрерывности D имеем

$$\begin{aligned} \| Du - D_n v_{n-1} \|_{L^2(S;\, H)} &\leqslant \| Du - D_n u \|_{L^2(S;\, H)} + \| D_n u - D_n v_{n-1} \|_{L^2(S;\, H)} \leqslant \\ &\leqslant \| Du - D_n u \|_{L^2(S;\, H)} + L \| u - v_{n-1} \|_{L^2(S;\, H)} \leqslant \\ &\leqslant \| Du - D_n u \|_{L^2(S;\, H)} + L \sqrt{T} \, \| u - v_{n-1} \|_{C(S;\, H)} \end{aligned}$$

и потому

$$\begin{aligned} \| v'_n - u' \|_{L^2(S;\, H)} \leqslant \| f_n - f \|_{L^2(S;\, H)} + \| Du - D_n u \|_{L^2(S;\, H)} + \\ + L \sqrt{T} \, \| u - v_{n-1} \|_{C(S;\, H)}. \end{aligned}$$

Наконец, из леммы 3.3,a) и уже доказанного соотношения (4.21) следует, что

$$\| v'_n - u' \|_{L^2(S;\, H)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛ. V

Теория обыкновенных операторных дифференциальных уравнений, лишь намеченная в § 1, может быть далеко развита по аналогии с теорией дифференциальных уравнений для вещественных функций. Изложения учебного характера можно найти, например, у Бурбаки [1], Дьёдонне [1] (там же приведены примеры, показывающие, что теорема Пеано в бесконечномерном случае, вообще говоря, неверна [1])) и у Картана [1]. Относительно ослабления условий, касающихся зависимости операторов $G(t)$ от t, см Като [1] При использовании (C, k)-нормы в доказательстве теоремы 1.1 (и в ряде других мест этой главы) мы следуем Белецкому [1] Введенные в п 2 операторы Вольтерры можно трактовать как обобщение обычных интегральных операторов Вольтерры Такого типа операторами занимались Красносельский и Покровский [1], Артоля [1] и Грёгер [1]; Артоля именует их операторами локального типа. Грёгер [1] рассмотрел нелинейные операторы Вольтерры.

Для исследуемых в § 2 типов уравнений мы выбрали название «псевдопараболических», руководствуясь терминологией для соответствующих классов уравнений в частных производных. Линейные псевдопараболические уравнения изучали Шовальтер [1], Тинг [1], Шовальтер и Тинг [1]. Эти уравнения принадлежат к так называемым уравнениям Соболева — Гальперна, см., например, Гальперн [1], Костюченко и Эскин [1] и указанную там литера-

[1]) См подстрочное примечание на стр. 194. — *Прим ред.*

туру. Уравнениями Соболева — Гальперна с некоторыми нелинейностями занимался Шовальтер [2]. На нелинейные уравнения типа рассмотренных в этой главе обратил внимание Лионс [1]. Такие уравнения играют роль при описании реологических процессов; см. Тинг [1], Трусделл [1] и Лангенбах [3]. По поводу линейных параболических и псевдопараболических уравнений см Тинг [2]; что касается нелинейного случая, см. Гаевский [5].

Утверждения § 3 о сходимости метода Галёркина являются обобщением результатов Гаевского и Захариаса [1, 3, 4] на случай операторов Вольтерры, а также на случай L^2-теории. Важным приемом доказательства является здесь введение аппроксимирующей решение «последовательности сравнения» $\{v_n\}$ Мы всюду выбирали в качестве v_n проекцию $P_n u$ точного решения. Другие возможности для построения последовательностей сравнения, обладающих желательными свойствами, доставляет обобщенная аппроксимационная теорема Вейерштрасса для пространства $C(S; H)$ (см. гл. IV).

Проекционно-итерационный метод (§ 4) для уравнений типа I допускает модификацию, при которой сначала превращают рассматриваемые уравнения в однородные. В этом случае сходимость проекционно-итерационной последовательности можно установить непосредственно при помощи леммы 3.2 гл. III.

ГЛАВА VI

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть V — сепарабельное[1]) рефлексивное банахово пространство, непрерывно вложенное в гильбертово пространство H и плотное в нем. Если отождествить пространство H с его сопряженным H^*, а H^* — с подпространством сопряженного к V пространства V^* (см. § 6 гл. I), то справедливы включения

$$V \subset H \subset V^*.$$

Нормы в V, H и V^* мы обозначаем соответственно через $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ и $\|\cdot\|_*$. Скалярное произведение элементов $f \in V^*$ и $x \in V$ мы записываем как (f, x). Если, в частности, $f \in H$, то (f, x) при принятом отождествлении совпадает со скалярным произведением этих элементов в H. Поэтому скалярное произведение в H мы обозначаем также через $(\cdot, \cdot)$. Всюду в этой главе $S = [0, T]$ — конечный интервал (времени). Указанные свойства пространств V и H, а также введенные выше обозначения используются далее без специальных оговорок.

Мы будем рассматривать уравнения вида

$$u' + Au = f$$

с вольтерровыми операторами A, которые отображают функциональное пространство $X = L^p(S; V) \cap L^{p_0}(S; H)$, $1 < p \leqslant p_0 < \infty$, в сопряженное к нему пространство X^*. При этом u' обозначает производную от $u \in X$ в смысле пространства распределений $\mathscr{D}^*(S; V^*)$. Уравнения указанного вида мы называем *эволюционными уравнениями*. Связь между эволюционными уравнениями и параболическими дифференциальными уравнениями уже пояснялась в § 2 гл. IV. Мы главным образом будем заниматься задачей Коши для эволюционных уравнений, но коснемся и вопроса о периодических решениях таких уравнений.

В § 1 при сравнительно слабых предположениях монотонности и непрерывности оператора A устанавливаются теоремы существования и единственности решений исследуемых задач, а также сходимость метода Галёркина. В заключение параграфа

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 78.

мы указываем некоторые возможные случаи, когда реализуются используемые в теоремах предположения.

В § 2 показано, как можно уточнить результаты § 1, если наложить на оператор A более сильные ограничения, касающиеся его зависимости от времени.

В § 3, в предположении, что V — гильбертово пространство, мы даем один метод для аппроксимации эволюционных уравнений и их решений, который может служить основой для численного определения решений.

§ 1. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ; МЕТОД ГАЛЁРКИНА

Пусть заданы числа p и p_0, такие, что $1 < p \leqslant p_0 < \infty$. Положим $X = L^p(S; V) \cap L^{p_0}(S; H)$ и $\|u\|_X = \|u\|_{L^p(S;\, V)} + \|u\|_{L^{p_0}(S;\, H)}$ для $u \in X$. Тогда сопряженным к X пространством X^* будет $L^q(S; V^*) + L^{q_0}(S; H)$, $1/p + 1/q = 1$, $1/p_0 + 1/q_0 = 1$, с обычной нормой для суммы банаховых пространств (см. замечание 5.13 гл. I). Далее, положим $W = \{u \mid u \in X,\ u' \in X^*\}$ и $\|u\|_W = \|u\|_X + \|u'\|_{X^*}$ для $u \in W$. Напомним, что пространства X, X^* и W уже были введены в § 1.5 гл. IV. Там было показано, что скалярное произведение $\langle f, u\rangle$ элементов $f \in X^*$ и $u \in X$ задается формулой

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_S (f(s), u(s))\, ds$$

и что пространство W непрерывно вложено в $C(S; H)$.

1. ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Теорема 1.1. *Пусть $A \in (X \to X^*)$ — радиально непрерывный монотонный коэрцитивный вольтерров оператор. Тогда задача*

$$u' + Au = f, \qquad u(0) = a, \qquad u \in X, \tag{1.1}$$

при любых $f \in X^*$ и $a \in H$ имеет точно одно решение u. При этом $u \in W \subset C(S; H)$ и соответствие $a \to u$ как отображение из H в $C(S; H)$ непрерывно.

Замечание 1.1. Так как u' понимается как производная от u в смысле пространства $\mathcal{D}^*(S; V^*)$, то уравнение $u' + Au = f$ имеет смысл в $\mathcal{D}^*(S; V^*)$. Если $u \in X$ удовлетворяет этому уравнению, то $u' = f - Au \in X^*$ и потому $u \in W \subset C(S; H)$. Этим оправдывается постановка начального условия $u(0) = a \in H$.

Определение 1.1. Будем обозначать через X_t пространство, которое получается, если в определении пространства X интервал S заменить интервалом $[0, t]$; другими словами, $X_t = L^p([0, t]; V) \cap L^{p_0}([0, t]; H)$ с соответствующей нормой.

Для доказательства теоремы 1.1 нам нужна следующая простая

Лемма 1.1. Если $A \in (X \to X^*)$ — монотонный коэрцитивный вольтерров оператор, то для каждого $t \in S$

$$\lim_{\|u\|_{X_t} \to \infty} \frac{1}{\|u\|_{X_t}} \int_0^t ((Au)(s), u(s))\, ds = +\infty, \tag{1.2}$$

$$\int_0^t ((Au)(s) - (Av)(s), u(s) - v(s))\, ds \geqslant 0 \quad \text{при} \quad u, v \in X. \tag{1.3}$$

Доказательство. Пусть

$$u_t(s) = \begin{cases} u(s) & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \\ 0 & \text{при} \quad t < s \leqslant T. \end{cases}$$

Так как A — оператор Вольтерры, то $(Au)(s) = (Au_t)(s)$ для почти всех $s \in [0, t]$. Кроме того, $\|u_t\|_X = \|u\|_{X_t}$. Поэтому утверждение (1.2) непосредственно следует из коэрцитивности A. Аналогично утверждение (1.3) следует из монотонности A. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1 мы проведем ниже с помощью метода Галёркина. Прежде чем приступить собственно к доказательству теоремы, определим сначала метод Галёркина применительно к задаче (1.1) и докажем некоторые леммы о решениях галёркинских уравнений.

Пусть $\{h_1, h_2, \ldots\}$ — какая-либо полная в V, а тем самым и в H система линейно независимых элементов, и пусть H_n — линейная оболочка множества $\{h_1, \ldots, h_n\}$, наделенная скалярным произведением, индуцированным из H. Будем считать H_n и H_n^* отождествленными. Пусть, далее, $X_n = L^{p_0}(S; H_n)$ и $X_n^* = L^{q_0}(S; H_n)$. Скалярное произведение элементов $f \in X_n^*$ и $u \in X_n$ задается формулой $\int_S (f(s), u(s))\, ds$. Поэтому его можно обозначать также и как $\langle f, u \rangle$. Каждому оператору $A \in (X \to X^*)$ мы можем поставить в соответствие оператор $A_n \in (X_n \to X_n^*)$ по правилу

$$\langle A_n u, v \rangle = \langle Au, v \rangle \quad \forall v \in X_n. \tag{1.4}$$

Пусть $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — какая-нибудь последовательность элементов $a_n \in H_n$, сходящийся в H к a Наконец, определим

$f_n \in X_n^*$ соотношением

$$\langle f_n, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in X_n. \tag{1.5}$$

Задаче (1.1) соответствуют следующие *уравнения Галёркина* ($n = 1, 2, \ldots$):

$$u_n' + A_n u_n = f_n, \quad u_n(0) = a_n, \quad u_n \in X_n. \tag{1.6}$$

Лемма 1.2. В условиях теоремы 1.1 задача (1.6) при каждом n имеет точно одно решение $u_n \in W$. Последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $C(S, H)$ и в X, и последовательность $\{Au_n\}$ ограничена в X^*.

Замечание 1.2. Если оператор $A \in (X \to X^*)$ задан при помощи семейства операторов $A(t) \in (V \to V^*)$, т. е. $(Au)(t) = A(t)u(t)$, то задача (1.6) представляет собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Существование решения следует в этом случае из известной теоремы существования Каратеодори.

Для доказательства теоремы существования в общем случае нам понадобится

Лемма 1.3. Пусть $b \in H_n$, $S_0 = [t_0, T]$ и C_b — замкнутое подмножество в $C(S_0; H_n)$, состоящее из тех $v \in C(S_0; H_n)$, для которых $v(t_0) = b$. Пусть, далее, B — деминепрерывный оператор Вольтерры из $(C_b \to L^{q_0}(S_0; H_n))$, удовлетворяющий условию

$$\| Bv \|_{L^{q_0}(S_0;\, H_n)} \leqslant M \quad \forall v \in C_b, \quad M = \text{const}. \tag{1.7}$$

Тогда задача

$$v(t) = b - \int_{t_0}^{t} (Bv)(s)\, ds \quad \forall t \in S_0$$

имеет решение $v \in C_b$.

Замечание 1.3. Лемма 1.3 является обобщением теоремы Каратеодори на случай дифференциальных уравнений с операторами Вольтерры.

Доказательство леммы 1.3. Для каждого натурального числа m положим

$$\delta_m = \frac{T - t_0}{m} \quad \text{и} \quad t_{i,m} = t_0 + i\delta_m, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Определим функцию $v_m \in C_b$ последовательно в интервалах $[t_{i,m}, t_{i+1,m}]$ следующими рекурсивными формулами:

$$v_m(t) = b \quad \text{для} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_{1,m},$$

$$v_m(t) = v_m(t_{i,m}) - \int\limits_{t_{i-1,m}}^{t-\delta_m} (Bv_{i,m})(s)\,ds$$

$$\text{для} \quad t_{i,m} < t \leqslant t_{i+1,m}, \quad i = 1, \ldots, m-1;$$

здесь

$$v_{i,m}(s) = \begin{cases} v_m(s) & \text{для} \quad t_0 \leqslant s \leqslant t_{i,m}, \\ v_m(t_{i,m}) & \text{для} \quad t_{i,m} < s \leqslant T. \end{cases}$$

Так как B — оператор Вольтерры, из этого определения вытекает, что

$$v_m(t) = \begin{cases} b & \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_{1,m}, \\ b - \int\limits_{t_0}^{t-\delta_m} (Bv_m)(s)\,ds & \text{при} \quad t_{1,m} < t \leqslant T. \end{cases} \tag{1.8}$$

Покажем, что последовательность $\{v_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, компактна в C_b. Для $t_1, t_2 \in S_0$ и заданного m положим

$$s_i = \max(t_0, t_i - \delta_m), \quad i = 1, 2.$$

Из (1.8) и (1.7) следует, что для $t_2 \geqslant t_1$

$$|v_m(t_2) - v_m(t_1)| = \left|\int\limits_{s_1}^{s_2} (Bv_m)(s)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{s_1}^{s_2} ds\right)^{1/p_0} \left(\int\limits_{s_1}^{s_2} |(Bv_m)(s)|^{q_0}\,ds\right)^{1/q_0} \leqslant$$

$$\leqslant (s_2 - s_1)^{1/p_0} M \leqslant (t_2 - t_1)^{1/p_0} M.$$

Но $v_m(t_0) = b$ при всех m. Поэтому из последней оценки вытекают как равностепенная непрерывность, так и равномерная ограниченность функций v_m и тем самым компактность последовательности $\{v_m\}$ в C_b.

Пусть $\{v_{m_j}\}$, $j = 1, 2, \ldots$, — некоторая сходящаяся в C_b подпоследовательность последовательности $\{v_m\}$ и v — ее предел. Согласно (1.8),

$$v_{m_j}(t) = b - \int\limits_{t_0}^{t} (Bv_{m_j})(s)\,ds + \int\limits_{t-\delta_{m_j}}^{t} (Bv_{m_j})(s)\,ds, \tag{1.9}$$

если $t > t_{1, m_j}$, а при заданном t для достаточно больших j это условие будет выполнено. В силу (1.7)

$$\left| \int_{t-\delta_{m_j}}^{t} (Bv_{m_j})(s)\, ds \right| \leqslant \delta_{m_j}^{1/p_0} M,$$

так что второй интеграл в (1.9) при $j \to \infty$ стремится к нулю. Для $t \in S_0$ и $x \in H_n$

$$l(w) = \left(\int_{t_0}^{t} w(s)\, ds,\ x \right), \quad w \in L^{q_0}(S_0;\ H_n),$$

является линейным непрерывным функционалом на $L^{q_0}(S_0;\ H_n)$. Поэтому, на основании деминепрерывности B, для каждого $x \in H_n$

$$\lim_{j \to \infty} \left(\int_{t_0}^{t} (Bv_{m_j})(s)\, ds,\ x \right) = \left(\int_{t_0}^{t} (Bv)(s)\, ds,\ x \right),$$

т. е.

$$\lim_{j \to \infty} \int_{t_0}^{t} (Bv_{m_j})(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} (Bv)(s)\, ds.$$

Следовательно, из (1.9) в пределе при $j \to \infty$ получаем

$$v(t) = b - \int_{t_0}^{t} (Bv)(s)\, ds.$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 1.2. Предположим сначала, что для $t_1 \in S$ и для каждого n задана функция $u_n \in L^{p_0}([0, t_1];\ H_n)$ с $u_n' \in L^{q_0}([0, t_1];\ H_n)$, такая, что

$$\begin{gathered} u_n'(t) + (A_n u_n)(t) = f_n(t) \quad \text{при почти всех } t \in [0, t_1], \\ u_n(0) = a_n. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, что для $t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(|u_n(t)|^2 - |a_n|^2\right) &= \int_0^t (u_n'(s),\ u_n(s))\, ds = \\ &= \int_0^t (f(s) - (Au_n)(s),\ u_n(s))\, ds. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}|u_n(t)|^2+\int_0^t((Au_n)(s)-(A0)(s),\,u_n(s))\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}|a_n|^2+\|f-A0\|_{X^*}\|u_n\|_{X_t}. \qquad (1.11)$$

Отсюда, в силу коэрцитивности A (см. (1.2)), получаем

$$\|u_n\|_{X_{t_1}}\leqslant K_1 \qquad (1.12)$$

и

$$\|u_n\|_{C([0,\,t_1];\,H)}\leqslant K_2, \qquad (1.13)$$

где K_1 и K_2 — не зависящие от n и t_1 постоянные. Согласно следствию 1.2 гл. III, из (1.11) и (1.12) вытекает оценка

$$\|Au_n\|_{X^*_{t_1}}\leqslant K_3, \qquad (1.14)$$

где K_3 также не зависит от n и t_1.

Теперь докажем, что решение $u_n\in L^{p_0}([0,t_1];H_n)$ задачи (1.10) определяется однозначно. Если уравнению (1.10) удовлетворяет также и $v_n\in L^{p_0}([0,t_1];H_n)$, то для $t\in[0,t_1]$

$$\frac{1}{2}|u_n(t)-v_n(t)|^2=\int_0^t\left(u'_n(s)-v'_n(s),\,u_n(s)-v_n(s)\right)ds=$$
$$=-\int_0^t((Au_n)(s)-(Av_n)(s),\,u_n(s)-v_n(s))\,ds\leqslant 0,$$

откуда следует, что $u_n=v_n$.

Перейдем к доказательству существования решения задачи (1.6) при заданном n. Пусть S_1 — множество всех $t_1\in S$, для которых задача (1.10) имеет решение, принадлежащее $L^{p_0}([0,t_1];H_n)$. При этом мы не исключаем тот случай, когда S_1 состоит из одной точки $t=0$. Очевидно, S_1 может иметь вид $[0,t_0)$ или $[0,t_0]$. Покажем, что первый случай невозможен, т. е. что t_0 всегда принадлежит S_1. Так как для любого $t_1\in[0,t_0)$ существует точно одно решение задачи (1.10), мы можем считать, что в интервале $[0,t_0]$ задана функция u_n, удовлетворяющая соотношениям (1.10), где вместо t_1 стоит t_0, и при каждом $t_1\in[0,t_0)$ принадлежащая $L^{p_0}([0,t_1];H_n)$. Из (1.12) вытекает, что $\|u_n\|_{X_{t_0}}\leqslant K_1$, поэтому $u_n\in L^{p_0}([0,t_0];H_n)$. Следовательно, как и утверждалось, $t_0\in S_1$. Покажем, что предположение $t_0<T$ ведет к противоречию. Пусть $b=u_n(t_0)$ и

$$w(t)=\begin{cases}u_n(t) & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ b & \text{при} \quad t_0<t\leqslant T.\end{cases}$$

Согласно лемме 1.2 гл. III, оператор $A \in (X \to X^*)$ локально ограничен. Следовательно, оператор A_n, рассматриваемый как отображение из $C(S; H_n)$ в $X_n^* = L^{q_0}(S; H_n)$, также локально ограничен. Поэтому существуют такие числа $r > 0$ и M, что

$$\|A_n u - f_n\|_{X_n^*} \leqslant M \quad \text{при} \quad \|u - w\|_{C(S;\, H_n)} \leqslant r. \tag{1.15}$$

Для любой функции $v \in C_b$ (см. лемму 1.3) определим функцию $u \in C(S; H_n)$ формулой

$$u(t) = \begin{cases} u_n(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ v(t) & \text{при } t_0 < t \leqslant T, \ |v(t) - b| \leqslant r, \\ b + r\dfrac{v(t) - b}{|v(t) - b|} & \text{при } t_0 < t \leqslant T, \ |v(t) - b| > r. \end{cases} \tag{1.16}$$

Далее, определим оператор $B \in \left(C_b \to L^{q_0}(S_0; H_n)\right)$, $S_0 = [t_0, T]$, формулой

$$(Bv)(t) = (A_n u - f_n)(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.17}$$

Соответствие $v \to u$ как отображение из C_b в $C(S; H_n)$ непрерывно. Кроме того, оператор A_n, рассматриваемый как отображение из $C(S; H_n)$ в $L^{q_0}(S; H_n)$, деминепрерывен. Поэтому B является деминепрерывным оператором Вольтерры. Из (1.15)—(1.17) следует, что

$$\|Bv\|_{L^{q_0}(S_0;\, H_n)} \leqslant \|A_n u - f_n\|_{L^{q_0}(S;\, H_n)} \leqslant M \qquad \forall v \in C_b.$$

Таким образом, оператор B удовлетворяет предположениям леммы 1.3. Следовательно, задача

$$v(t) = b - \int_{t_0}^{t} (Bv)(s)\, ds$$

имеет решение $v \in C_b$. Поскольку $v(t_0) = b$, то в достаточно малом интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$, $\delta > 0$, выполняется неравенство

$$|v(t) - b| \leqslant r.$$

Определенную в интервале $[0, t_0]$ функцию u_n мы продолжим теперь следующим образом:

$$u_n(t) = v(t) \quad \text{при} \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \delta.$$

Тогда для $t \in [t_0, t_0 + \delta]$

$$(Bv)(t) = (A_n u_n - f_n)(t)$$

и

$$u_n(t) = b - \int_{t_0}^{t} (Bv)(s)\,ds =$$

$$= u_n(t_0) - \int_{t_0}^{t} (A_n u_n - f_n)(s)\,ds =$$

$$= a_n - \int_{0}^{t} (A_n u_n - f_n)(s)\,ds.$$

Итак, существует принадлежащее $L^{p_0}([0, t_0+\delta]; H_n)$ решение задачи (1.10) с $t_1 = t_0 + \delta$. Это противоречит определению t_0, и, значит, предположение $t_0 < T$ было неверным, т. е. задача (1.10) при $t_1 = T$ имеет решение $u_n \in L^{p_0}(S; H_n)$. Эта функция u_n и является решением задачи (1.6).

Ограниченность последовательности $\{u_n\}$ в $C(S; H)$ и в X следует из (1.13) и (1.12), а ограниченность последовательности $\{Au_n\}$ в X^* — из (1.14). Лемма доказана.

Лемма 1.4. Последовательность $\{u_n\}$ галёркинских приближений, существующая согласно лемме 1.2, обладает подпоследовательностью $\{u_{n_j}\}$, $j = 1, 2, \ldots$, со следующими свойствами:

a) $\{u_{n_j}\}$ слабо сходится в X к некоторому $u \in X$;

b) $\{u_{n_j}(T)\}$ слабо сходится в H к некоторому $z \in H$;

c) $\{Au_{n_j}\}$ слабо сходится в X^* к некоторому $v \in X^*$;

d) указанные выше пределы удовлетворяют условиям $u \in W$, $u(0) = a$, $u(T) = z$ и

$$u' + v = f. \tag{1.18}$$

Доказательство. Существование подпоследовательности $\{u_{n_j}\}$ со свойствами a)—c) следует, в силу теоремы 5.9 гл. I, из утверждений леммы 1.2. На основании (1.6), для $\varphi \in \mathscr{D}(S)$ и $x \in H_n$

$$\left(\int_S \varphi(t)\left(u'_{n_j}(t) + (A_{n_j}u)(t)\right)dt,\ x\right) = \langle u'_{n_j} + Au_{n_j}, \varphi x\rangle =$$

$$= \langle f, \varphi x\rangle = \left(\int_S \varphi(t) f(t)\,dt,\ x\right) \quad \text{при} \quad n_j \geqslant n. \tag{1.19}$$

Здесь мы воспользовались теоремой 1.8 гл. IV. Так как последовательность $\{u'_{n_j}\}$, согласно замечанию 1.15 гл. IV, сходится в

$\mathscr{D}^*(S; V^*)$ к u', то из (1.19) при $j \to \infty$ получаем (ниже $u'(\varphi)$ обозначает значение распределения u' на элементе $\varphi \in \mathscr{D}(S)$)

$$(u'(\varphi), x) = \left(\int_S \varphi(t)(f(t) - v(t))\, dt, x\right) \quad \forall x \in \bigcup_n H_n. \tag{1.20}$$

Поскольку $\bigcup_n H_n$ плотно в V, то из (1.20) следует, что

$$u'(\varphi) = \int_S \varphi(t)(f(t) - v(t))\, dt.$$

Это значит, что u' можно рассматривать как элемент пространства X^* и что имеет место соотношение (1.18). Следовательно, $u \in W$. Для любого $x \in \bigcup_n H_n$ имеем в силу (1.18) и (1.6)

$$\begin{aligned}
\int_S (u'(t), (T-t)x)\, dt &= \int_S (f(t) - v(t), (T-t)x)\, dt = \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_S \left(f(t) - \left(Au_{n_j}\right)(t), (T-t)x\right) dt = \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_S \left(u'_{n_j}(t), (T-t)x\right) dt = \\
&= \lim_{j\to\infty} \left\{ \int_S \left(u_{n_j}(t), x\right) dt - \left(a_{n_j}, Tx\right)\right\} = \\
&= \int_S (u(t), x)\, dt - (a, Tx) = \\
&= \int_S (u'(t), (T-t)x)\, dt + (u(0) - a, Tx).
\end{aligned}$$

Так как $\bigcup_n H_n$ плотно в H, отсюда следует, что $u(0) = a$. Соответственно для $x \in \bigcup_n H_n$ имеем

$$\begin{aligned}
(u(T) - a, x) = \int_S (u'(t), x)\, dt &= \lim_{j\to\infty} \int_S \left(u'_{n_j}(t), x\right) dt = \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(u_{n_j}(T) - a_{n_j}, x\right) = (z - a, x).
\end{aligned}$$

Таким образом, $u(T) = z$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Ввиду леммы 5.3 гл. I, из (1.6) и (1.18) вытекает, что

$$\begin{aligned}\varlimsup_{j\to\infty} \langle Au_{n_j}, u_{n_j}\rangle = \varlimsup_{j\to\infty} \langle f - u'_{n_j}, u_{n_j}\rangle = \\ = \varlimsup_{j\to\infty} \left\{ \langle f, u_{n_j}\rangle + \frac{1}{2}\left(|a_{n_j}|^2 - |u_{n_j}(T)|^2\right)\right\} \leqslant \\ \leqslant \langle f, u\rangle + \frac{1}{2}(|a|^2 - |u(T)|^2) = \\ = \langle f, u\rangle - \langle u', u\rangle = \langle v, u\rangle.\end{aligned}$$

Эта оценка и утверждения a) и c) леммы 1.4 показывают, что здесь применима лемма 1.3 гл. III. Согласно этой лемме, $Au = v$. Подставляя этот результат в (1.18), получим

$$u' + Au = f.$$

Так как, кроме того, $u \in W$ и $u(0) = a$ (см. лемму 1.4), то тем самым показано, что u является решением задачи (1.1).

Если $u_1, u_2 \in X$ — два решения уравнения $u' + Au = f$, то

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(|u_1(t) - u_2(t)|^2 - |u_1(0) - u_2(0)|^2) = \\ = \int_0^t (u_1'(s) - u_2'(s), u_1(s) - u_2(s))\,ds = \\ = -\int_0^t ((Au_1)(s) - (Au_2)(s), u_1(s) - u_2(s))\,ds \leqslant 0.\end{aligned}$$

Отсюда следуют единственность решения задачи (1.1) и утверждаемая непрерывная зависимость решения от начальных данных. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.1. *Если обозначить через* u_n *решения уравнений Галёркина* (1.6) *и через* u — *решение задачи* (1.1), *то*

a) $u_n \to u$ *в* $C(S; H)$;

b) $u_n \rightharpoonup u$ *в* X;

c) $Au_n \rightharpoonup Au$ *в* X^*;

d) $\int_0^t ((Au_n)(s) - (Au)(s), u_n(s) - u(s))\,ds \to 0 \quad \forall t \in S$.

Замечание 1.4. Существуют классы операторов $A \in (X \to X^*)$, для которых из свойств a)—d) следует сильная сходимость в X последовательности $\{u_n\}$ к u. В частности, к таким операторам относятся операторы, обладающие (S)-свойством (см. определение 1.4 гл. III). В п. 3 мы еще вернемся к этому.

Доказательству теоремы 1.2 предпошлем одну лемму.

Лемма 1.5. Множество $\bigcup_n C^1(S;\, H_n)$ плотно в пространстве W.

Доказательство. На основании леммы 1.12 гл. IV достаточно показать, что $\bigcup_n C^1(S;\, H_n)$ плотно в $C^1(S;\, V)$. Пусть задана функция $u \in C^1(S;\, V)$. По теореме Вейерштрасса (теорема 1.3 гл. IV) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен

$$p(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j, \qquad a_j \in V,$$

что

$$\| u' - p \|_{C(S;\, V)} < \varepsilon.$$

Так как $\bigcup_n H_n$ плотно в V, то можно указать такое n и такие коэффициенты $a_{jn} \in H_n$, для которых

$$\| a_j - a_{jn} \| \leqslant \varepsilon \left(\sum_{j=0}^{m} T^j \right)^{-1}.$$

При этом мы выберем n настолько большим, чтобы нашелся элемент $b_n \in H_n$ с $\| u(0) - b_n \| < \varepsilon$. Пусть

$$p_n(t) = \sum_{j=0}^{m} a_{jn} t^j.$$

Тогда $p_n \in C(S;\, H_n)$ и

$$\| u' - p_n \|_{C(S;\, V)} \leqslant \| u' - p \|_{C(S;\, V)} + \| p - p_n \|_{C(S;\, V)} <$$
$$< \varepsilon + \sum_{j=0}^{m} \| a_j - a_{jn} \| T^j < 2\varepsilon.$$

Положим

$$v_n(t) = b_n + \int_0^t p_n(s)\, ds.$$

Тогда $v_n \in C^1(S;\, H_n)$ и

$$\| u(t) - v_n(t) \| \leqslant \| u(0) - b_n \| + \left\| \int_0^t (u'(s) - p_n(s))\, ds \right\|.$$

Следовательно,

$$\| u - v_n \|_{C^1(S;\, V)} = \| u - v_n \|_{C(S;\, V)} + \| u' - p_n \|_{C(S;\, V)} < \varepsilon (2T + 3).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Согласно лемме 1.2, последовательность $\{u_n\}$ ограничена в X. Из доказательства теоремы 1.1 и леммы 1.4 вытекает, что пределом слабо сходящейся в X подпоследовательности этой последовательности может быть только однозначно определенное решение задачи (1.1). Поэтому и вся последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится в X к u (см. лемму 5.4 гл. I). Аналогично показывается, что последовательность $\{Au_n\}$ слабо сходится в X^* к Au.

Для доказательства того, что $u_n \to u$ в $C(S; H)$, выберем какую-нибудь последовательность $\{v_n\}$ с $v_n \in C^1(S; H_n)$, сходящуюся в W к решению u. Согласно лемме 1.5, такая последовательность существует. Тогда для $t \in S$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(|u_n(t) - v_n(t)|^2 - |u_n(0) - v_n(0)|^2) = \\
&\quad = \int_0^t \big(u_n'(s) - v_n'(s),\ u_n(s) - v_n(s)\big)\, ds = \\
&\quad = \int_0^t \big(-(Au_n)(s) + (Au)(s) + u'(s) - v_n'(s),\ u_n(s) - v_n(s)\big)\, ds = \\
&\quad = \int_0^t \{(-(Au_n)(s) + (Au)(s),\ u_n(s) - u(s)) + \\
&\qquad + (-(Au_n)(s) + (Au)(s),\ u(s) - v_n(s)) + \\
&\qquad + \big(u'(s) - v_n'(s),\ u_n(s) - v_n(s)\big)\}\, ds \leqslant \\
&\quad \leqslant -\int_0^t ((Au_n)(s) - (Au)(s),\ u_n(s) - u(s))\, ds + \\
&\qquad + \|Au_n - Au\|_{X^*}\|u - v_n\|_X + \|u' - v_n'\|_{X^*}\|u_n - v_n\|_X \leqslant \\
&\quad \leqslant -\int_0^t ((Au_n)(s) - (Au)(s),\ u_n(s) - u(s))\, ds + K\|u - v_n\|_W,
\end{aligned}$$

$$K = \mathrm{const}.$$

Здесь мы опять воспользовались ограниченностью последовательностей $\{u_n\}$ и $\{Au_n\}$ соответственно в X и X^*. В силу непрерывности вложения W в $C(S; H)$,

$$\lim_{n\to\infty} |u_n(0) - v_n(0)| \leqslant \lim_{n\to\infty} (|a_n - a| + |u(0) - v_n(0)|) = 0.$$

Поэтому из указанной выше оценки следует, в силу выбора последовательности $\{v_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{C(S;\,H)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \big(\|u - v_n\|_{C(S;\,H)} + \|v_n - u_n\|_{C(S;\,H)}\big) = 0.$$

Кроме того, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t ((Au_n)(s)-(Au)(s),\ u_n(s)-u(s))\,ds=0.$$

Теорема доказана.

Замечание 1.5. Теоремы 1.1 и 1.2 остаются справедливыми, если требование коэрцитивности оператора $A\in(X\to X^*)$ заменить более слабым требованием

$$\lim_{\substack{\|u\|_{L^p(S;\,V)}\to\infty\\ u\in X}}\frac{1}{\|u\|_{L^p(S;\,V)}}\langle Au,\ u\rangle=+\infty.$$

Это можно доказать, немного видоизменив первую часть доказательства леммы 1.2.

Замечание 1.6. Если $p_0\geqslant 2$, то

$$X=L^p(S;\ V)\cap L^{p_0}(S;\ H)\subset L^2(S;\ H)\subset L^q(S;\ V^*)+L^{q_0}(S;\ H)=X^*,$$

причем вложения X в $L^2(S;\ H)$ и $L^2(S;\ H)$ в X^* непрерывны. Будем в этом случае обозначать через I (непрерывное) вложение X в X^*.

Теорема 1.3. *Пусть $p_0\geqslant 2$ и $A\in(X\to X^*)$ — радиально непрерывный оператор Вольтерры. Пусть для некоторого $\lambda\geqslant 0$ и всех $u,v\in X$*

$$\int_S e^{-2\lambda t}((Au)(t)-(Av)(t)+\lambda(u(t)-v(t)),\ u(t)-v(t))\,dt\geqslant 0 \qquad (1.21)$$

и

$$\lim_{\|u\|_X\to\infty}\frac{1}{\|u\|_X}\int_S e^{-2\lambda t}((Au)(t)+\lambda u(t),\ u(t))\,dt=+\infty. \qquad (1.22)$$

Тогда при любых $f\in X^*$ и $a\in H$ задача

$$u'+Au=f,\qquad u(0)=a,\qquad u\in X, \qquad (1.23)$$

имеет точно одно решение u. При этом $u\in W\subset C(S;\ H)$ и соответствие $a\to u$ непрерывно как отображение из H в $C(S;\ H)$.

Если последовательность $\{a_n\}$, $a_n\in H_n$, сходится в H к a, то уравнения Галёркина (1.6) при каждом n имеют точно одно решение u_n и для этой последовательности $\{u_n\}$ галёркинских приближений верны следующие утверждения:

a) *$u_n\to u$ в $C(S;\ H)$;*

b) *$u_n\rightharpoonup u$ в X;*

c) $Au_n \rightharpoonup Au$ в X^*;

d) $\int\limits_0^t ((Au_n)(s) - (Au)(s), u_n(s) - u(s))\, ds \to 0 \quad \forall t \in S.$

Следствие. Если $p_0 \geqslant 2$ и $A + \lambda I$, $\lambda \geqslant 0$, — радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор Вольтерры из $(X \to X^*)$, то справедливы все утверждения теоремы 1.3.

Для доказательства этого следствия достаточно показать, что при указанных предположениях выполняются соотношения (1.21) и (1.22). Эти соотношения получаются, ввиду монотонности и коэрцитивности оператора $A + \lambda I$, применением приводимой ниже леммы 1.6 к функциям

$$g(s) = ((Au)(s) - (Av)(s) + \lambda(u(s) - v(s)),\ u(s) - v(s))$$

и

$$g(s) = ((Au)(s) - (A0)(s) + \lambda u(s),\ u(s))$$

соответственно

Лемма 1.6. Если $g \in L^1(S)$ и

$$\int\limits_0^t g(s)\, ds \geqslant 0 \qquad \forall t \in S,$$

то для $\lambda \geqslant 0$

$$\int\limits_0^t e^{-2\lambda s} g(s)\, ds \geqslant e^{-2\lambda T} \int\limits_0^t g(s)\, ds \geqslant 0 \qquad \forall t \in S.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_0^t e^{-2\lambda s} g(s)\, ds = \int\limits_0^t 2\lambda e^{-2\lambda s} \int\limits_0^s g(\sigma)\, d\sigma\, ds + e^{-2\lambda t} \int\limits_0^t g(s)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant e^{-2\lambda T} \int\limits_0^t g(s)\, ds \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.3. При помощи замены переменных мы сведем наш случай к случаю, рассмотренному в теоремах 1.1 и 1.2. Положим

$$u_\lambda(t) = e^{-\lambda t} u(t), \qquad f_\lambda(t) = e^{-\lambda t} f(t)$$

и

$$(A_\lambda u_\lambda)(t) = e^{-\lambda t}(Au)(t) + \lambda u_\lambda(t). \tag{1.24}$$

Определенный таким образом оператор Вольтерры A_λ, очевидно, принадлежит $(X \to X^*)$. Ясно, кроме того, что u является решением задачи (1.23) точно в том случае, когда u_λ служит решением задачи

$$u'_\lambda + A_\lambda u_\lambda = f_\lambda, \quad u_\lambda(0) = a, \quad u_\lambda \in X. \tag{1.25}$$

Докажем теперь, что оператор $A_\lambda \in (X \to X^*)$ радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен. Радиальная непрерывность A_λ вытекает, ввиду (1.24), из радиальной непрерывности A. Далее, в силу (1.21),

$$\langle A_\lambda u_\lambda - A_\lambda v_\lambda, u_\lambda - v_\lambda\rangle =$$
$$= \int_S (e^{-\lambda t}(Au)(t) + \lambda u_\lambda(t) - e^{-\lambda t}(Av)(t) - \lambda v_\lambda(t), u_\lambda(t) - v_\lambda(t))\,dt =$$
$$= \int_S e^{-2\lambda t}((Au)(t) - (Av)(t) + \lambda(u(t) - v(t)), u(t) - v(t))\,dt \geqslant 0,$$

т. е. A_λ монотонен. Так как $\|u_\lambda\|_X \leqslant \|u\|_X$, то из (1.22) вытекает, что

$$\lim_{\|u_\lambda\|_X \to \infty} \frac{1}{\|u_\lambda\|_X}\langle A_\lambda u_\lambda, u_\lambda\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{1}{\|u\|_X}\int_S e^{-2\lambda t}((Au)(t) + \lambda u(t), u(t))\,dt = +\infty,$$

т. е. A_λ коэрцитивен. Поэтому первая часть теоремы 1.3 следует из теоремы 1.1.

Уравнения Галёркина для (1.25) имеют вид

$$u'_{\lambda n} + A_{\lambda n} u_{\lambda n} = f_{\lambda n}, \quad u_{\lambda n}(0) = a_n, \quad u_{\lambda n} \in X_n, \tag{1.26}$$

где $A_{\lambda n} \in (X_n \to X_n^*)$ и $f_{\lambda n} \in X_n^*$ определяются, аналогично (1.4) и (1.5), формулами

$$\langle A_{\lambda n} u, v\rangle = \langle A_\lambda u, v\rangle, \quad \langle f_{\lambda n}, v\rangle = \langle f_\lambda, v\rangle \quad \forall v \in X_n.$$

Прямым вычислением можно показать, что функция $u_n \in X_n$ является решением задачи (1.6) точно тогда, когда $u_{\lambda n}(t) = e^{-\lambda t}u_n(t)$ служит решением задачи (1.26). Поэтому из леммы 1.2 и теоремы 1.2 вытекает, что уравнения Галёркина (1.6) однозначно разрешимы и что для функций $u_{\lambda n}$ справедливы утверждения:

$$u_{\lambda n} \to u_\lambda \quad \text{в} \quad C(S; H);$$
$$u_{\lambda n} \rightharpoonup u_\lambda \quad \text{в} \quad X;$$
$$A_\lambda u_{\lambda n} \rightharpoonup A_\lambda u_\lambda \quad \text{в} \quad X^*;$$
$$\int_0^t ((A_\lambda u_{\lambda n})(s) + (A_\lambda u_\lambda)(s), u_{\lambda n}(s) - u_\lambda(s))\,ds \to 0 \quad \forall t \in S;$$

здесь через u_λ обозначено решение задачи (1.25). Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \| u - u_n \|_{C(S;\,H)} \leqslant e^{\lambda T} \lim_{n\to\infty} \| u_\lambda - u_{\lambda n} \|_{C(S;\,H)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle w,\, u - u_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_S (e^{\lambda t} w(t),\, u_\lambda(t) - u_{\lambda n}(t))\, dt = 0$$

для каждого $w \in X^*$ и

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au - Au_n,\, v\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_S ((A_\lambda u_\lambda)(t) - (A_\lambda u_{\lambda n})(t) - \lambda(u_\lambda(t) - u_{\lambda n}(t)),\qquad e^{\lambda t} v(t))\, dt = 0$$

для каждого $v \in X$. Далее,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t ((Au_n)(s) - (Au)(s),\, u_n(s) - u(s))\, ds =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^t e^{2\lambda s}((A_\lambda u_{\lambda n})(s) - (A_\lambda u_\lambda)(s) - \lambda(u_{\lambda n}(s) - u_\lambda(s)),\, u_{\lambda n}(s) - u_\lambda(s))\, ds =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^t e^{2\lambda s}((A_\lambda u_{\lambda n})(s) - (A_\lambda u_\lambda)(s),\, u_{\lambda n}(s) - u_\lambda(s))\, ds =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ -2\lambda \int_0^t e^{2\lambda s} \int_0^s ((A_\lambda u_{\lambda n})(\sigma) - (A_\lambda u_\lambda(\sigma),\, u_{\lambda n}(\sigma) - u_\lambda(\sigma))\, d\sigma\, ds + \right.$$

$$\left. + e^{2\lambda t} \int_0^t ((A_\lambda u_{\lambda n})(s) - (A_\lambda u_\lambda)(s),\, u_{\lambda n}(s) - u_\lambda(s))\, ds \right\} = 0,$$

что и доказывает теорему.

Замечание 1.7. Простой пример, когда реализуются предположения теоремы 1.3, уже был указан в следствии к этой теореме. Эти предположения окажутся очень полезными в следующей главе при изучении операторных дифференциальных уравнений второго порядка.

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

В данном пункте мы также используем сокращенные обозначения для пространств X, X^* и W, введенные в начале § 1.

Теорема 1.4. *Если $A \in (X \to X^*)$ — радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор, то при любой функции $f \in X^*$ задача*

$$u' + Au = f, \qquad u(0) = u(T), \qquad u \in X, \tag{1.27}$$

имеет решение. Если A вдобавок строго монотонен, то задача (1.27) *имеет точно одно решение.*

Замечание 1.8. Для каждой функции $v \in (R^1 \to V)$, для которой функции v_k, определенные формулой

$$v_k(t) = v(t + kT), \quad t \in S, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

принадлежат X, положим [1])

$$(A_\text{p} v)(t + kT) = (Av_k)(t), \quad t \in S, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Пусть, далее,

$$\left.\begin{aligned} f_\text{p}(t + kT) &= f(t), \\ u_\text{p}(t + kT) &= u(t), \end{aligned}\right. \quad \text{для} \quad t \in S \quad \text{и} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Если u — решение задачи (1.27), то u_p будет периодическим решением уравнения

$$u'_\text{p} + A_\text{p} u_\text{p} = f_\text{p}.$$

Здесь u'_p нужно понимать как производную от u_p в смысле $\mathscr{D}^*(R^1; V^*)$.

Доказательству теоремы 1.4. предпошлем одну лемму.

Лемма 1.7. Положим $W_\text{p} = \{u \mid u \in W, \ u(0) = u(T)\}$. Оператор $\Lambda \in (W_\text{p} \to X^*)$, определенный по правилу

$$\Lambda u = u', \quad u \in W_\text{p},$$

является радиально непрерывным и максимальным монотонным как отображение из X в X^*.

Доказательство. 1. Для $u, v \in W_\text{p}$ и $h \in R^1$ имеем

$$\Lambda(u + hv) = \Lambda u + h\Lambda v.$$

Отсюда следует радиальная непрерывность Λ.

2. Для $u \in W_\text{p}$

$$\langle \Lambda u, u \rangle = \int_S (u'(s), u(s))\, ds = \frac{1}{2}(|u(T)|^2 - |u(0)|^2) = 0,$$

т. е. линейный оператор Λ монотонен.

3. Пусть для заданных $v \in X$ и $w \in X^*$

$$\langle w - \Lambda u, v - u \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in W_\text{p}. \tag{1.28}$$

[1]) Ниже индекс p — от periodisch (периодический). — *Прим. ред.*

Нужно показать, что $v \in W_p$ и $w = v'$. Прежде всего выберем u вида $u = \varphi x$, где $\varphi \in \mathscr{D}(S)$ и $x \in V$. Тогда $u \in W_p$ и

$$0 \leqslant \langle w - \varphi' x,\ v - \varphi x\rangle =$$
$$= \langle w,\ v\rangle - \left(\int_S (\varphi'(s)\, v(s) + \varphi(s)\, w(s))\, ds,\ x\right) + \langle \varphi' x,\ \varphi x\rangle =$$
$$= \langle w,\ v\rangle + (v'(\varphi) - w(\varphi),\ x),$$

где через $v'(\varphi)$ и $w(\varphi)$ обозначены соответственно значения распределений v' и w на элементе $\varphi \in \mathscr{D}(S)$. Эта последняя оценка показывает, что $(v'(\varphi) - w(\varphi), x)$ обладает не зависящей от x нижней границей. Это возможно только в случае $v'(\varphi) = w(\varphi)$. Следовательно, $v' = w \in X^*$. Поэтому из (1.28) вытекает, что для $u \in W_p$

$$0 \leqslant \langle v' - u',\ v - u\rangle = \frac{1}{2}\left(|v(T) - u(T)|^2 - |v(0) - u(0)|^2\right) =$$
$$= (u(0),\ v(0) - v(T)) + \frac{1}{2}\left(|v(T)|^2 - |v(0)|^2\right).$$

Так как $u(0)$ может быть любым элементом из V и V плотно в H, то это неравенство может быть справедливым только в случае, когда $v(0) = v(T)$, т. е. $v \in W_p$. Тем самым показано, что Λ — максимальный монотонный оператор. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Используя оператор Λ, определенный в лемме 1.7, задачу (1.27) можно записать в виде

$$\Lambda u + Au = f, \qquad u \in W_p. \tag{1.29}$$

Предположения теоремы 1.4 об операторе A и лемма 1.7 показывают, что к задаче (1.29) применима теорема 2.3 гл. III. Из этой теоремы и следуют доказываемые утверждения.

Замечание 1.9. Можно показать, что если в теореме 1.4 оператор A вольтерров и

$$\langle Au - Av,\ u - v\rangle \geqslant \lambda \int_S |u(s) - v(s)|^2\, ds, \quad \lambda > 0, \quad \text{для} \quad u,\ v \in X,$$

то для двух решений u_1, u_2 уравнения

$$u' + Au = f, \qquad u \in X, \tag{1.30}$$

справедлива оценка

$$|u_1(T) - u_2(T)| \leqslant e^{-\lambda T}\, |u_1(0) - u_2(0)|,$$

т. е. соответствие $u(0) \to u(T)$, которое ставит начальному значению $u(0)$ значение соответствующего решения уравнения (1.30) при $t = T$, является сжимающим в H. В случае когда a — неподвижная точка этого сжатия, отвечающее начальному значению a решение u уравнения (1.30) будет однозначно определенным решением задачи (1.27). Этот факт делает возможным вычисление решения задачи (1.27) при помощи последовательного решения задач Коши.

3. ПРИМЕРЫ

1. Пусть $\{A(t)\}$, $t \in S$, — семейство радиально непрерывных монотонных операторов из $(V \to V^*)$, таких, что:

$$\begin{gathered} (A(t)x,\ y) \text{ при фиксированных } x,\ y \in V \text{ есть} \\ \text{измеримая функция от } t; \\ (A(t)x,\ x) \geqslant c\|x\|^p - d, \quad c > 0, \quad 1 < p < \infty; \\ \|A(t)x\|_* \leqslant C\left(\|x\|^{p-1} + 1\right), \end{gathered} \tag{1.31}$$

причем постоянные c, d и C не зависят от t. Можно показать, что функция Au, т. е. функция со значениями $A(t)u(t)$, для $u \in L^p(S;\ V)$ измерима по Бохнеру и принадлежит $L^q(S;\ V^*)$. Выберем $p_0 = p$. Тогда $X = L^p(S;\ V) \cap L^{p_0}(S;\ H) = L^p(S;\ V)$ и $X^* = L^q(S;\ V^*)$. Оператор A, рассматриваемый как отображение из X в X^*, удовлетворяет предположениям теорем 1.1 и 1.2.

2. Конкретные примеры семейств операторов со свойствами (1.31) получаются, если взять $V = \overset{\circ}{W}{}^{1,\,p}_0(G)$ и $H = L^2(G)$, а $A(t)$ определить с помощью соотношения

$$(A(t)u,\ v) = \\ = \int_G \varphi\left(t,\ |\operatorname{grad} u|^{p-1}\right)|\operatorname{grad} u|^{p-2} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v\, dx, \qquad v \in W_0^{1,\,p}(G),$$

где φ — какая-либо непрерывная функция на $S \times [0, \infty)$, для которой

a) $\varphi(t, \xi)\xi$ возрастает по ξ;

b) $0 < c \leqslant \varphi(t, \xi) \leqslant C$ для всех $\{t, \xi\} \in S \times [0, \infty)$.

3. Если семейство операторов $A = \{A(t)\}$, $t \in S$, наряду с условиями (1.31) удовлетворяет условию

$$\begin{gathered} (A(t)x - A(t)y,\ x - y) \geqslant c\left(\|x\|^{p-1} - \|y\|^{p-1}\right)(\|x\| - \|y\|) \\ \text{для любых } x,\ y \in V \text{ и } t \in S, \end{gathered} \tag{1.32}$$

то, как можно показать, используя неравенство Гёльдера,

$$\langle Au - Av,\ u - v\rangle \geqslant c\left(\|u\|^{p-1}_{L^p(S;\ V)} - \|v\|^{p-1}_{L^p(S;\ V)}\right)\left(\|u\|_{L^p(S;\ V)} - \|v\|_{L^p(S;\ V)}\right),$$

т. е. оператор A, рассматриваемый как элемент из $(L^p(S; V) \to L^q(S;\ V^*))$, является d-монотонным (см. определение 1.2 гл. III). Если вдобавок V, а значит, согласно теореме 1.15 гл. IV, и $L^p(S; V)$ равномерно выпуклы, то A обладает (S)-свойством. Это влечет за собой сильную сходимость в $X = L^p(S; V)$ метода Галёркина для соответствующей оператору A задачи Коши вида (1.1) (см. замечание 1.4).

Отметим, что операторы $A(t)$, определенные в примере 2, удовлетворяют условию (1.32), если функция φ такова, что

$$\varphi(t, \xi)\xi - \varphi(t, \eta)\eta \geqslant c(\xi - \eta) \quad \text{для} \quad \xi \geqslant \eta$$

(см. лемму 1.6, d), гл. III).

4. Пусть

a) $p_0 \geqslant 2$ и $X = L^p(S; V) \cap L^{p_0}(S; H)$;

b) $B \in (X \to X^*)$ — радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор Вольтерры;

c) $C \in (L^2(S; H) \to L^2(S; H))$ — липшиц-непрерывный оператор Вольтерры.

Тогда оператор $A = B + C \in (X \to X^*)$ удовлетворяет предположениям следствия из теоремы 1.3. Доказательство этого утверждения тривиально.

Укажем в этой связи на примеры операторов Вольтерры, приведенные в § 1 гл. V.

§ 2. ТЕОРЕМЫ РЕГУЛЯРНОСТИ

Мы сохраняем введенные в предыдущем параграфе сокращенные обозначения $X = L^p(S; V) \cap L^{p_0}(S; H)$ и $X^* = L^q(S; V^*) + L^{q_0}(S; H)$, $1 < p \leqslant p_0 < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $1/p_0 + 1/q_0 = 1$, и снова полагаем $W = \{u \mid u \in X,\ u' \in X^*\}$.

В этом параграфе рассматриваются эволюционные уравнения вида

$$u' + Au = 0,$$

в которых оператор $A \in (X \to X^*)$ обладает представлением

$$(Au)(t) = A(t)u(t) \qquad \forall u \in X, \quad \forall t \in S, \tag{2.1}$$

где $\{A(t)\}$, $t \in S$, — некоторое семейство операторов из $(V \to V^*)$. При соответствующих предположениях о зависимости операторов $A(t)$ от t мы докажем некоторые теоремы регулярности, касающиеся зависимости решений от t, которые усиливают результаты, полученные в § 1.

1. РЕГУЛЯРНОСТЬ ПРИ СПЕЦИАЛЬНОМ ВЫБОРЕ НАЧАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

Теорема 2.1. *Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ обладает представлением* (2.1), *и пусть либо сам он радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен, либо $p_0 \geqslant 2$ и оператор $A + \lambda I \in (X \to X^*)$ радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен при некотором $\lambda \geqslant 0$. Пусть, далее, для некоторой определенной на $[0, \infty)$ непрерывной неубывающей функции ρ*

$$|(A(t)x - A(s)x, y)| \leqslant |t-s|\,\rho(|x|)(|y| + |(A(s)x, y)|) \quad \text{при любых } s, t \in S \text{ и } x, y \in V. \tag{2.2}$$

Тогда для любого $a \in V$, такого, что $A(0)a \in H$, существует точно одно решение u задачи

$$\begin{gathered} u'(t) + A(t)u(t) = 0 \quad \forall t \in S, \\ u(0) = a, \quad u \in C^1_w(S;\ H) \cap C_w(S;\ V). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Это решение и принадлежит $C(S; V)$, если каждый из операторов $A(t) \in (V \to V^*)$, $t \in S$, обладает (S)*-свойством* (*см. определение* 1.4 *гл.* III).

Теорему 2.1 мы докажем с помощью метода Галёркина. В силу предположений теоремы мы сможем при этом воспользоваться результатами § 1.

Пусть, как и раньше, $\{h_1, h_2, \ldots\}$ — какая-нибудь полная в V, а следовательно, и в H система линейно независимых элементов и H_n — линейная оболочка множества $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Нам удобно будет считать, что $a \in H_1$. В предположениях теоремы 2.1 уравнения Галёркина (для $a_n = a$) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} (u_n'(t) + A(t)u_n(t), h_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ u_n(0) = a. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Доказательству теоремы 2.1 предпошлем несколько лемм. Прежде всего исследуем связь между свойствами оператора $A \in (X \to X^*)$ и свойствами соответствующих операторов $A(t) \in (V \to V^*)$. Имея в виду дальнейшие применения, мы здесь предположим лишь, что A — оператор с представлением (2.1), для которого операторы $A(t)$ при некоторой вещественной функции η удовлетворяют условию

$$\|A(t)x - A(s)x\|_* \leqslant |t-s|\,\eta(\|x\|, \|A(s)x\|_*) \quad \text{для любых } s, t \in S \text{ и } x \in V. \tag{2.5}$$

Предположение (2.5) слабее предположения (2.2), фигурирующего в теореме 2.1.

Лемма 2.1. Если $A \in (X \to X^*)$ — монотонный оператор, удовлетворяющий предположениям (2.1) и (2.5), то операторы $A(t) \in (V \to V^*)$, $t \in S$, монотонны.

Доказательство. Пусть $t \in [0, T)$, $t+h \in S$, $h > 0$. Положим

$$u(s) = \begin{cases} x & \text{при} \quad t \leqslant s \leqslant t+h, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$v(s) = \begin{cases} y & \text{при} \quad t \leqslant s \leqslant t+h, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где x и y — заданные элементы из V. Тогда

$$0 \leqslant \langle Au - Av, u - v\rangle = \int_t^{t+h} (A(s)x - A(s)y, x-y)\,ds =$$
$$= \int_t^{t+h} (A(s)x - A(t)x - A(s)y + A(t)y, x-y)\,ds +$$
$$+ h(A(t)x - A(t)y, x-y) \leqslant h^2\{\eta(\|x\|, \|A(t)x\|_*) +$$
$$+ \eta(\|y\|, \|A(t)y\|_*)\}\|x-y\| + h(A(t)x - A(t)y, x-y).$$

Из этого неравенства получаем

$$0 \leqslant (A(t)x - A(t)y, x-y)$$

(деля на h и производя предельный переход при $h \to 0$). Для $t = T$ рассуждение аналогично, только надо взять $h < 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть оператор $A \in (L^2(S; V) \to L^2(S; V^*))$ обладает представлением (2.1) с операторами $A(t) \in (V \to V^*)$, которые удовлетворяют предположению (2.5), и пусть

$$\langle Au - Av, u-v\rangle \geqslant m\|u-v\|^2_{L^2(S;\,V)} \quad \text{при} \quad u, v \in L^2(S; V).$$

Тогда для каждого $t \in S$ и для любых $x, y \in V$

$$(A(t)x - A(t)y, x-y) \geqslant m\|x-y\|^2.$$

Доказательство. Если определить u и v, как и при доказательстве леммы 2.1, то, как и выше, получим

$$mh\|x-y\|^2 = m\|u-v\|^2_{L^2(S;\,V)} \leqslant \langle Au - Av, u-v\rangle \leqslant$$
$$\leqslant h^2\{\eta(\|x\|, \|A(t)x\|_*) + \eta(\|y\|, \|A(t)y\|_*\}\|x-y\| +$$
$$+ h(A(t)x - A(t)y, x-y),$$

откуда после деления на h и предельного перехода при $h \to 0$ и следует наше утверждение.

Лемма 2.3. Если $A \in (X \to X^*)$ — деминепрерывный оператор, удовлетворяющий предположениям (2.1) и (2.2), то операторы $A(t) \in (V \to V^*)$, $t \in S$, также деминепрерывны.

Доказательство. Пусть $x \in V$ и $\{x_i\}$ — какая-нибудь последовательность, сходящаяся в V к x. Положим

$$v(s) = x, \qquad v_i(s) = x_i \qquad \forall s \in S.$$

Тогда

$$\lim_{i \to \infty} \| v_i - v \|_X = 0.$$

Далее, для заданных $y \in V$ и t, $t + h \in S$, $h > 0$, положим

$$w_h(s) = \begin{cases} y & \text{при } t \leqslant s \leqslant t + h, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$|(A(t)x_i - A(t)x, y)| =$$
$$= \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (A(t)x_i - A(s)x_i + A(s)x_i - A(s)x + A(s)x - A(t)x, y)\,ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_S \{\rho(|x_i|)(|w_h(s)| + |(A(s)v_i(s), w_h(s))|) + \rho(|x|)(|w_h(s)| +$$
$$+ |(A(s)v(s), w_h(s))|)\}\,ds + \frac{1}{h}|\langle Av_i - Av, w_h\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant K(1 + \|Av_i\|_{X^*} + \|Av\|_{X^*})\|w_h\|_X + \frac{1}{h}|\langle Av_i - Av, w_h\rangle|$$

при некоторой не зависящей от i и h постоянной K. Так как оператор A деминепрерывен и имеет место соотношение

$$\|w_h\|_X = \|y\| h^{1/p} + |y| h^{1/p_0},$$

то при подходящем выборе h правая часть последнего неравенства будет для достаточно больших i как угодно мала.

Для $t = T$ рассуждаем аналогично, используя $h < 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. В предположениях теоремы 2.1 решение u_n галёркинского уравнения (2.4) принадлежит $C^1(S; H_n)$ и последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $C^1(S; H)$ и в $C(S; V)$.

Доказательство. Из § 1 мы уже знаем, что уравнение Галёркина (2.4) имеет точно одно решение $u_n \in W \subset C(S; H)$. Согласно лемме 2.3, при заданных предположениях операторы $A(t) \in (V \to V^*)$ деминепрерывны. Отсюда и из предположения (2.2) вытекает, как нетрудно видеть, что $(A(t)x, y)$ при фиксированном $y \in V$ непрерывно по $\{t, x\} \in S \times V$. Таким образом, система дифференциальных уравнений (2.4) удовлетворяет предпосылкам теоремы Пеано. Следовательно, решение u_n принадлежит $C^1(S; H_n)$. Ограниченность последовательности $\{u_n\}$ в $C(S; H)$ уже была установлена (см. теоремы 1.2 и 1.3). Для доказательства ограниченности последовательности $\{u'_n\}$ в $C(S; H)$ рассмотрим функцию w_n, определяемую формулой

$$w_n(t) = u_n(t+h) - u_n(t), \qquad h > 0.$$

В силу наших предположений, имеем

$$\frac{1}{2}\left(|w_n(t)|^2 - |w_n(0)|^2\right) = \int_0^t (w'_n(s),\ w_n(s))\,ds =$$

$$= -\int_0^t (A(s+h)\,u_n(s+h) - A(s)\,u_n(s),\ u_n(s+h) - u_n(s))\,ds \leqslant$$

$$\leqslant -\int_0^t (A(s+h)\,u_n(s) - A(s)\,u_n(s) - \lambda w_n(s),\ w_n(s))\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \{h\rho(|u_n(s)|)(|w_n(s)| + |(A(s)\,u_n(s),\ w_n(s))|) + \lambda |w_n(s)|^2\}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant K\int_0^t h\left(1 + |u'_n(s)| + \frac{1}{h}|w_n(s)|\right)|w_n(s)|\,ds,$$

где K — некоторая не зависящая от n и t постоянная. При этом мы воспользовались леммой 2.1 для $A + \lambda I \in (X \to X^*)$. Если сам оператор A монотонен, то здесь и в дальнейшем следует положить $\lambda = 0$. Разделим полученное неравенство на h^2 и перейдем к пределу при $h \to 0$. Получим

$$\frac{1}{2}\left(|u'_n(t)|^2 - |u'_n(0)|^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant K\int_0^t (1 + 2|u'_n(s)|)\,|u'_n(s)|\,ds \leqslant K\int_0^t (1 + 3|u'_n(s)|^2)\,ds.$$

Применяя лемму Гронуолла, находим

$$|u'_n(t)| \leqslant K_0(|u'_0(0)| + 1), \qquad K_0 = \text{const}. \tag{2.6}$$

Для $x \in H_n$

$$|(u'_n(0),\ x)| = |(A(0)\,a,\ x)| \leqslant |A(0)\,a| \cdot |x|.$$

Поэтому из (2.6) следует ограниченность последовательности $\{u'_n\}$ в $C(S; H)$.

Выберем теперь произвольно $t \in S$ и натуральное число n и положим

$$v(s) = u_n(t) \qquad \forall s \in S.$$

Тогда на основании уже доказанного

$$\langle Av + \lambda v, v\rangle = \int_S \left(A(s)u_n(t) - A(t)u_n(t) - u_n'(t) + \lambda u_n(t), u_n(t)\right) ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_S \{T\rho(|u_n(t)|)(|u_n(t)| + |(u_n'(t), u_n(t))|) -$$
$$- (u_n'(t), u_n(t)) + \lambda |u_n(t)|^2\} ds \leqslant K_1$$

с не зависящей от n и t постоянной K_1. Отсюда в силу коэрцитивности $A + \lambda I$ вытекает, что

$$\|v\|_X = \|u_n(t)\| T^{1/p} + |u_n(t)| T^{1/p_0} \leqslant K_2, \qquad K_2 = \text{const}.$$

Следовательно, последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $C(S; V)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. 1. Пусть $z \in V^*$ и $\{z_i\}$ — какая-нибудь последовательность элементов из H, сходящаяся в V^* к z. В силу ограниченности последовательности $\{u_n\}$ в $C(S; V)$ имеем

$$(z, u_n(t) - u_m(t))| \leqslant |(z - z_i, u_n(t) - u_m(t))| + |(z_i, u_n(t) - u_m(t))| \leqslant$$
$$\leqslant K\|z - z_i\|_* + |(z_i, u_n(t) - u_m(t))|.$$

Из сходимости последовательности $\{u_n\}$ в $C(S; H)$ следует, что при подходящем выборе i правая часть этого неравенства для всех достаточно больших n и m будет как угодно мала независимо от t. Тем самым доказана сходимость последовательности $\{u_n\}$ в $C_w(S; V)$. Ее пределом может быть только (существующее по теореме 1.1, соответственно по теореме 1.3) решение u задачи

$$u' + Au = 0, \qquad u(0) = a, \qquad u \in X.$$

Следовательно, $u \in C_w(S; V)$.

2. Для заданного $t \in S$ мы можем из последовательности $\{u_n'(t)\}$ в силу ее ограниченности в H выбрать подпоследовательность $\{u_{n_j}'(t)\}$, $j = 1, 2, \ldots$, слабо сходящуюся в H к некоторому $y \in H$. Используя монотонность оператора $A(t) + \lambda I \in (V \to V^*)$ (см. лемму 2.1), находим, что для любого $x \in \bigcup\limits_n H_n$

$$0 \leqslant \lim_{j\to\infty} \left(A(t)x - A(t)u_{n_j}(t) + \lambda(x - u_{n_j}(t)), x - u_{n_j}(t)\right) =$$
$$= \lim_{j\to\infty} \left(A(t)x + u_{n_j}'(t) + \lambda(x - u_{n_j}(t)), x - u_{n_j}(t)\right) =$$
$$= (A(t)x + y + \lambda(x - u(t)), x - u(t)).$$

Отсюда согласно лемме 1.3 гл. III следует, что

$$-y+\lambda u(t)=A(t)u(t)+\lambda u(t),$$

т. е.

$$y=-A(t)u(t).$$

Итак, все слабо сходящиеся в H подпоследовательности последовательности $\{u_n'(t)\}$ сходятся к одному и тому же пределу $-A(t)u(t)$. Отсюда мы заключаем, что и последовательность $\{u_n'(t)\}$ слабо сходится в H к $-A(t)u(t)$.

3. Из только что доказанного и ограниченности последовательности $\{u_n'\}$ в $C(S;\ H)$ вытекает, что

$$\sup_{t\in S}|A(t)u(t)|<\infty. \tag{2.7}$$

Пусть теперь $t\in S$ произвольно и $\{t_i\}$ — какая-нибудь последовательность точек из S, сходящаяся к t. Согласно (2.2), для любого $x\in V$

$$|(A(t)u(t_i)-A(t_i)u(t_i),\ x)|\leqslant$$
$$\leqslant|t-t_i|\rho(|u(t_i)|)(|x|+|(A(t_i)u(t_i),\ x)|).$$

Отсюда и из (2.7) следует, что $A(t)u(t_i)\in H$ и

$$|A(t)u(t_i)|\leqslant K_1, \tag{2.8}$$

где постоянная K_1 не зависит от i и t, а также что

$$\lim_{i\to\infty}|A(t)u(t_i)-A(t_i)u(t_i)|=0. \tag{2.9}$$

Ввиду (2.8) найдется подпоследовательность $\{A(t)u(t_{i_j})\}$, $j=1, 2, \ldots$, последовательности $\{A(t)u(t_i)\}$, слабо сходящаяся в H к некоторому $y\in H$. Для этой подпоследовательности и для произвольного $x\in V$ имеем

$$0\leqslant\lim_{j\to\infty}\left(A(t)x-A(t)u(t_{i_j})+\lambda\left(x-u(t_{i_j})\right),\ x-u(t_{i_j})\right)=$$
$$=(A(t)x-y+\lambda(x-u(t)),\ x-u(t)).$$

Так же, как и выше, отсюда следует, что $y=A(t)u(t)$ и

$$A(t)u(t_i)\rightharpoonup A(t)u(t)\quad\text{в}\quad H. \tag{2.10}$$

Наконец, из (2.9) и (2.10) получаем

$$Au\in C_w(S;\ H). \tag{2.11}$$

4. На основании предыдущих результатов, для любого $x \in H$

$$(u(t) - a,\ x) = \lim_{n\to\infty} (u_n(t) - a,\ x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^t (u_n'(s),\ x)\,ds = -\int_0^t (A(s)u(s),\ x)\,ds.$$

В силу непрерывности подынтегрального выражения (см. (2.11)), из этого соотношения вытекают принадлежность u к $C^1_w(S;\ H)$ и справедливость соотношения

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0 \qquad \forall t \in S.$$

5. Теперь предположим, что операторы $A(t) \in (V \to V^*)$, $t \in S$, обладают (S)-свойством.

Для заданного $t \in S$ и какой-либо последовательности $\{t_i\}$ точек из S, сходящейся к t, имеем

$$|A(t)u(t_i)| \leqslant K_1$$

с некоторой не зависящей от i и t постоянной K_1 (см. (2.8)). Поэтому

$$2K_1|u(t) - u(t_i)| \geqslant (A(t)u(t) - A(t)u(t_i),\ u(t) - u(t_i)) \geqslant$$
$$\geqslant -\lambda |u(t) - u(t_i)|^2.$$

Поскольку $u \in C(S;\ H)$, отсюда следует, что

$$\lim_{i\to\infty} (A(t)u(t) - A(t)u(t_i),\ u(t) - u(t_i)) = 0. \tag{2.12}$$

Кроме того, $u \in C_w(S;\ V)$. Следовательно,

$$u(t_i) \rightharpoonup u(t) \quad \text{в} \quad V. \tag{2.13}$$

Из (2.12) и (2.13) на основании (S)-свойства оператора $A(t)$ получаем

$$\lim_{i\to\infty} \|u(t_i) - u(t)\| = 0,$$

т. е. $u \in C(S;\ V)$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. В силу теоремы 1.10 гл. IV, решение u задачи (2.3) как функция из $C^1_w(S;\ H)$ почти всюду в S дифференцируемо (в смысле сильной топологии в H).

Замечание 2.2. При предположениях теоремы 2.1 утверждения о сходимости метода Галёркина, перечисленные в теореме 1.2, можно еще дополнить, например, утверждением

$$u_n \to u \quad \text{в} \quad C_w(S;\ V).$$

При этом начальные значения a_n галёркинских приближений нужно, конечно, выбирать так, чтобы $\sup\limits_n |A(0)a_n| < \infty$.

2. РЕГУЛЯРНОСТЬ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВЫБОРЕ НАЧАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

В теореме 2.1 существенно предположение $A(0)a \in H$. В этом пункте мы докажем аналогичную теорему для случая произвольных начальных элементов $a \in H$, но при более сильных, чем в теореме 2.1, предположениях относительно оператора A.

Теорема 2.2. *Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ обладает представлением (2.1), $p_0 \geqslant 2$ и оператор $A + \lambda I$ радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен при некотором $\lambda \geqslant 0$. Пусть далее,*

$$A = B + C;$$

$$(Bu)(t) = B_0 u(t) \quad \text{для} \quad u \in X,\ t \in S,$$

где $B_0 \in (V \to V^*)$ — некоторый монотонный, коэрцитивный, потенциальный оператор;

оператор $C \in (X \to L^2(S;\ H)$ переводит ограниченные множества из X в ограниченные множества из $L^2(S;\ H)$; (2.14)

$$(Cu)(t) = C(t)u(t), \qquad C(t) \in (V \to H)$$

$$\text{для} \quad u \in X, \quad t \in S;$$

$$|C(t)x - C(s)x| \leqslant |t - s|\rho(|x|)$$

$$\text{для} \quad s,\ t \in S, \quad x \in V,$$

где ρ — некоторая неубывающая функция.

Тогда задача

$$\begin{gathered} u'(t) + A(t)u(t) = 0 \quad \text{для} \quad 0 < t \leqslant T, \quad u(0) = a, \\ u \in C^1_w([\delta,\ T];\ H) \cap C_w([\delta,\ T];\ V) \cap W \quad \forall \delta \in (0,\ T] \end{gathered} \tag{2.15}$$

при каждом $a \in H$ имеет точно одно решение.

Доказательство. Мы сведем случай $a \in H$ к случаю $A(0)a \in H$. Это сведéние оказывается возможным в силу одной априорной оценки галёркинских приближений u_n, которая основывается на предположении (2.14).

Пусть в дальнейшем $\{a_n\}$, $a_n \in H_n$, — какая-то последовательность, сходящаяся в H к a. При сделанных предположениях решение u_n задачи

$$\begin{gathered} (u_n'(t) + A(t)u_n(t),\ h_i) = 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ n, \\ u_n(0) = a_n \end{gathered} \tag{2.16}$$

принадлежит $C^1(S;\ H_n)$. Это можно доказать так же, как и соответствующее утверждение леммы 2.4.

Пусть F — потенциал для оператора B_0. Тогда (см. леммы 4.1 и 4.10 гл. III)

$$F(u_n(t)) - F(a_n) = \int_0^t (B_0 u_n(s),\ u_n'(s))\, ds$$

и

$$F(u_n(t)) - F(0) \leqslant (B_0 u_n(t),\ u_n(t)).$$

Кроме того, потенциал F ограничен снизу (см. следствие **4.3** гл. III).

Подставим в уравнение (2.16) вместо h_i значение $tu_n'(t)$, принадлежащее H_n, и проинтегрируем по интервалу S. Принимая во внимание (2.14) и лемму 1.2, имеем

$$0 = \int_S (u_n'(t) + B_0 u_n(t) + C(t) u_n(t),\ tu_n'(t))\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_S \left\{ t\,|u_n'(t)|^2 - \int_0^t (B_0 u_n(s),\ u_n'(s))\, ds + T(B_0 u_n(t),\ u_n'(t)) - \right.$$

$$\left. - \frac{t}{2}\,|C(t) u_n(t)|^2 - \frac{t}{2}\,|u_n'(t)|^2 \right\} dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_S \left\{ \frac{t}{2}\,|u_n'(t)|^2 - F(u_n(t)) + F(a_n) \right\} dt + T(F(u_n(T)) - F(a_n)) - K_1 \geqslant$$

$$\geqslant \int_S \left\{ \frac{t}{2}\,|u_n'(t)|^2 - F(0) - (B_0 u_n(t),\ u(t)) \right\} dt - K_2 \geqslant$$

$$\geqslant \int_S \left\{ \frac{t}{2}\,|u_n'(t)|^2 - (A(t) u_n(t), u_n(t)) + (C(t) u_n(t), u_n(t)) \right\} dt - K_3 \geqslant$$

$$\geqslant \int_S \frac{t}{2}\,|u_n'(t)|^2\, dt - K_4;$$

здесь K_1, K_2, K_3 и K_4 — не зависящие от n постоянные. Из этого неравенства при помощи леммы Фату получаем

$$\int_S \varliminf_{n\to\infty} t\,|u_n'(t)|^2\, dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_S t\,|u_n'(t)|^2\, dt \leqslant 2K_4.$$

Отсюда вытекает, что

$$\varliminf_{n\to\infty} t\,|u_n'(t)|^2 < \infty \qquad \text{для почти всех } t \in S.$$

Следовательно, при почти каждом $t \in (0, T]$ последовательность $\{|u_n'(t)|\}$ обладает ограниченной подпоследовательностью.

Пусть $\delta \in (0, T]$. Согласно только что доказанному, найдутся $t_0 \in (0, \delta]$ и последовательность натуральных чисел $\{n_j\}$, такие, что последовательность $\{|u'_{n_j}(t_0)|\}$ ограничена. Предположение $A(0)a \in H$ при доказательстве теоремы 2.1 использовалось только в одном месте — при установлении ограниченности последовательности $\{|u'_n(0)|\}$. Если вместо S рассмотреть интервал $[t_0, T]$, то можно, исходя из ограниченности последовательности $\{|u'_{n_j}(t_0)|\}$, все дальнейшие рассуждения вести так же, как и при доказательстве теоремы 2.1, только всюду вместо последовательности $\{u_n\}$ работать с последовательностью $\{u_{n_j}\}$. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Замечание 2.3. При предположениях теоремы 2.2, $A(\delta)u(\delta) \in H$ для каждого $\delta \in (0, T]$, поэтому согласно теореме 2.1, $u \in C([\delta, T]; V)$, $\delta \in (0, T]$, если операторы $A(t)$, $t \in S$, обладают (S)-свойством.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.2 и, кроме того, $C(0) = C(T)$. Тогда решение задачи*

$$u' + Au = 0, \qquad u(0) = u(T), \qquad u \in X, \tag{2.17}$$

принадлежит $C^1_w(S; H) \cap C_w(S; V)$. Если дополнительно операторы $A(t)$, $t \in S$, обладают (S)-свойством, то $u \in C^1_w(S; H) \cap C(S; V)$.

Доказательство. Положим $X_1 = L^p([0, 2T]; V) \cap L^{p_0}([0, 2T]; H)$ и определим оператор $A_1 \in (X_1 \to X_1^*)$ формулой

$$(A_1 v)(t) = \begin{cases} A(t)\,v(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ A(t-T)\,v(t) & \text{при} \quad T < t \leqslant 2T. \end{cases}$$

Пусть u — решение задачи (2.17). Положим

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(t-T) & \text{при} \quad T < t \leqslant 2T. \end{cases}$$

Очевидно, функция u_1 является решением задачи

$$u_1' + A_1 u_1 = 0, \qquad u_1(0) = u(0), \qquad u_1 \in X_1 \tag{2.18}$$

(см. замечание 1.8). Легко видеть, что оператор $A_1 \in (X_1 \to X_1^*)$ удовлетворяет (с точностью до обозначений) предположения теоремы 2.2. Поэтому, в частности,

$$u_1 \in C^1_w([T, 2T]; H) \cap C_w([T, 2T]; V)$$

и соответственно, если операторы $A(t)$ обладают (S)-свойством,

$$u_1 \in C^1_w([T, 2T]; H) \cap C([T, 2T]; V).$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Замечание 2.4. Напомним, что достаточные условия разрешимости задачи (2.17) уже были даны в теореме 1.4.

§ 3. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ АППРОКСИМАЦИИ

Для численного решения задач вида

$$u' + Au = 0, \quad u(0) = a, \quad u \in X,$$

представляет интерес тот факт, что в случае, когда V — гильбертово пространство, решения таких задач можно аппроксимировать не только при помощи метода Галёркина, но и другими способами. В данном параграфе мы рассмотрим аппроксимацию при помощи решений соответствующих задач, как это было описано в § 1 гл. V.

Предварительно введем некоторые обозначения. Пусть J — дуализующее отображение V на V^* и I — вложение V в V^*; так как по предположению V — гильбертово пространство, то отображение J линейно. Скалярное произведение в V будет обозначать через $(\cdot, \cdot)$. Имеем

$$(x, y) = (Jx, y) \quad \text{для} \quad x, y \in V$$

(см. лемму 6.2 гл. I). При любом $\varepsilon > 0$ отображение $J_\varepsilon = J + \varepsilon^2 J \in (V \to V^*)$ сильно монотонно и непрерывно и, следовательно, является взаимно однозначным отображением V на V^*. Оказывается целесообразным для каждого $\varepsilon > 0$ ввести на V скалярное произведение

$$(x, y)_\varepsilon = (x, y) + \varepsilon^2 (x, y) = (J_\varepsilon x, y). \tag{3.1}$$

Гильбертово пространство $\{V, (\cdot, \cdot)_\varepsilon\}$, т. е. линейное пространство V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_\varepsilon$, будет обозначаться через V_ε, а соответствующая норма — через $|\cdot|_\varepsilon$. В силу непрерывности вложения V в H существует постоянная γ, такая, что

$$|x| \leqslant \gamma \|x\| \qquad \forall x \in V. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что для $x \in V$

$$|x| \leqslant |x|_\varepsilon \leqslant \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2}\, \|x\| \quad \text{и} \quad \varepsilon \|x\| \leqslant |x|_\varepsilon. \tag{3.3}$$

Таким образом, норма $|\cdot|_\varepsilon$ эквивалентна норме $\|\cdot\|$.

Пусть в этом параграфе $X = L^2(S; V)$, $X^* = L^2(S; V^*)$, $W = \{u \mid u \in X, u' \in X^*\}$ и $X_\varepsilon = L^2(S; V_\varepsilon)$.

По оператору Вольтерры $A \in (X \to X^*)$ и $\varepsilon > 0$ определим оператор Вольтерры $A_\varepsilon \in (X_\varepsilon \to X_\varepsilon)$ формулой

$$(A_\varepsilon u)(t) = J_\varepsilon^{-1}(Au)(t). \tag{3.4}$$

В силу (3.1) это определение равносильно такому:

$$((A_\varepsilon u)(t),\ x)_\varepsilon = ((Au)(t),\ x) \qquad \forall x \in V. \tag{3.5}$$

Согласно (3.5) и (3.3),

$$|(A_\varepsilon u)(t)|_\varepsilon \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|(Au)(t)\|_*,$$

поэтому A_ε действительно отображает $L^2(S;\ V_\varepsilon)$ в себя. (Ввиду непрерывности J_ε^{-1} измеримость по Бохнеру функции $A_\varepsilon u$ следует из измеримости по Бохнеру функции Au.) Наряду с задачей

$$u' + Au = 0, \qquad u(0) = a \in H, \quad u \in X, \tag{3.6}$$

рассмотрим «аппроксимирующую» задачу

$$u'_\varepsilon + A_\varepsilon u_\varepsilon = 0, \qquad u_\varepsilon(0) = a_\varepsilon \in V_\varepsilon, \quad u_\varepsilon \in X_\varepsilon. \tag{3.7}$$

В настоящем параграфе будут приведены условия на A и a_ε, при которых справедливо следующее:

1) задача (3.7) однозначно разрешима;

2) при $\varepsilon \to 0$ решения u_ε сходятся в X и в $C(S;\ H)$ к решению u задачи (3.6);

3) можно дать оценку погрешности для $u_\varepsilon - u$.

Кроме того, будет указано, как можно практически определять приближенные решения u_ε. Мы будем предполагать в этом параграфе, что оператор $A + \lambda I \in (X \to X^*)$ при некотором заданном $\lambda \geqslant 0$ сильно монотонен и что оператор $A \in (X \to X^*)$ липшиц-непрерывен. Эти сильные ограничения на A нужны главным образом в связи с оценкой погрешности для $u_\varepsilon - u$ и с заданием удобных приближенных методов. Доказательство однозначной разрешимости задачи (3.7) и сходимости u_ε к u можно провести и при более слабых предположениях.

1. АППРОКСИМАЦИЯ БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

Лемма 3.1. Если $A \in (X \to X^*)$ — липшиц-непрерывный оператор Вольтерры, то задача (3.7) при любом $a_\varepsilon \in V_\varepsilon$ имеет точно одно решение $u_\varepsilon \in C(S;\ V_\varepsilon)$ со свойством $u'_\varepsilon \in X_\varepsilon$.

Доказательство. Используя (3.5) и (3.3), находим, что для $u, v, w \in X_\varepsilon$

$$\int\limits_S ((A_\varepsilon u)(t) - (A_\varepsilon v)(t),\ w(t))_\varepsilon\, dt = \int\limits_S ((Au)(t) - (Av)(t),\ w(t))\, dt \leqslant$$
$$\leqslant M \| u - v \|_X \| w \|_X \leqslant \frac{M}{\varepsilon^2} \| u - v \|_{X_\varepsilon} \| w \|_{X_\varepsilon},$$

где M — постоянная Липшица для A. Следовательно,

$$\| A_\varepsilon u - A_\varepsilon v \|_{X_\varepsilon} \leqslant \frac{M}{\varepsilon^2} \| u - v \|_{X_\varepsilon},$$

т. е. A_ε — липшиц-непрерывный оператор из $(X_\varepsilon \to X_\varepsilon)$. Поэтому утверждение леммы следует из теоремы 1.3 гл. V.

Замечание 3.1. Если $A \in (X \to X^*)$ — липшиц-непрерывный оператор Вольтерры и оператор $A + \lambda I$ при заданном $\lambda \geqslant 0$ сильно монотонен, то для $p = p_0 = 2$ выполняются предположения следствия из теоремы 1.3. Поэтому в следующей теореме можно исходить из того, что задача (3.6) при любом $a \in H$ имеет точно одно решение $u \in W$.

Теорема 3.1. *Пусть $A \in (X \to X^*)$ — липшиц-непрерывный оператор Вольтерры и оператор $A + \lambda I$ при заданном $\lambda \geqslant 0$ сильно монотонен. Далее, пусть по $\varepsilon > 0$ выбран такой элемент $a_\varepsilon \in V_\varepsilon$, что*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} | a_\varepsilon - a | = 0, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \| a_\varepsilon \| = 0. \tag{3.8}$$

Тогда решения u_ε задач (3.7) *при $\varepsilon \to 0$ аппроксимируют решение u задачи* (3.6) *в $C(S; H)$ и в X, т. е.*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\| u_\varepsilon - u \|_{C(S;\, H)} + \| u_\varepsilon - u \|_X \right) = 0.$$

Замечание 3.2. Можно показать, что условие (3.8) выполняется, если положить $a_\varepsilon = J_\varepsilon^{-1} a$, т. е. если определить a_ε при помощи соотношения

$$(a_\varepsilon, x)_\varepsilon = (a, x) \qquad \forall x \in V.$$

В случае когда $a \in V$, можно для каждого $\varepsilon > 0$ брать $a_\varepsilon = a$. При реализации описанной в теореме 3.1 аппроксимации можно для произвольной последовательности $\{a_i\}$ из V, сходящейся в H к a, определить последовательность $\{\varepsilon_i\}$ таким образом, чтобы $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i \| a_i \| = 0$. Тогда утверждение теоремы следует использовать именно для последовательности $\{\varepsilon_i\}$.

Доказательству теоремы 3.1 предпошлем одну лемму.

Лемма 3.2. При предположениях теоремы 3.1 существует такое $\delta > 0$, что

$$\sup_{0<\varepsilon<\delta} \left(\| u_\varepsilon \|_{C(S;\, V_\varepsilon)} + \| u_\varepsilon \|_X \right) < \infty. \tag{3.9}$$

Доказательство. Обозначим через m постоянную монотонности для $A + \lambda I$. При заданных предположениях имеем

$$\frac{1}{2} \left(| u_\varepsilon(t) |_\varepsilon^2 - | a_\varepsilon |_\varepsilon^2 \right) = \int_0^t \left(u'_\varepsilon(s),\, u_\varepsilon(s) \right)_\varepsilon ds =$$

$$= -\int_0^t ((A_\varepsilon u_\varepsilon)(s),\, u_\varepsilon(s))_\varepsilon\, ds = -\int_0^t ((A u_\varepsilon)(s),\, u_\varepsilon(s))\, ds =$$

$$= -\int_0^t ((A u_\varepsilon)(s) - (A0)(s) + (A0)(s),\, u_\varepsilon(s))\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \left\{ -m \| u_\varepsilon(s) \|^2 + \lambda | u_\varepsilon(s) |^2 + \frac{1}{2m} \| A(0)(s) \|_*^2 + \frac{m}{2} \| u_\varepsilon(s) \|^2 \right\} ds.$$

Следовательно,

$$| u_\varepsilon(t) |_\varepsilon^2 + m \int_0^t \| u_\varepsilon(s) \|^2 ds \leqslant | a_\varepsilon |_\varepsilon^2 + \frac{1}{m} \| A0 \|_{X^*}^2 + 2\lambda \int_0^t | u_\varepsilon(s) |_\varepsilon^2 ds.$$

Из этого неравенства с помощью леммы Гронуолла получаем

$$| u_\varepsilon(t) |_\varepsilon^2 + m \int_0^t \| u_\varepsilon(s) \|^2 ds \leqslant K \left(| a_\varepsilon |_\varepsilon^2 + 1 \right), \tag{3.10}$$

где K — постоянная, не зависящая от ε и t. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\sup_{0<\varepsilon<\delta} | a_\varepsilon |_\varepsilon^2 = \sup_{0<\varepsilon<\delta} \left(| a_\varepsilon |^2 + \varepsilon^2 \| a_\varepsilon \|^2 \right) < \infty. \tag{3.11}$$

В силу предположения (3.8) это возможно. Из (3.10) и (3.11) и вытекает соотношение (3.9). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. При заданных предположениях для любого $v \in C^1(S; V)$ имеем

$$\frac{1}{4}|u_\varepsilon(t)-u(t)|^2 \leqslant \frac{1}{4}(|u_\varepsilon(t)-v(t)|+|v(t)-u(t)|)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|u_\varepsilon(t)-v(t)|_\varepsilon^2+\frac{1}{2}|v(t)-u(t)|^2=$$

$$=\int_0^t \left(u_\varepsilon'(s)-v'(s), u_\varepsilon(s)-v(s)\right)_\varepsilon ds+\frac{1}{2}|a_\varepsilon-v(0)|_\varepsilon^2+\frac{1}{2}|v(t)-u(t)|^2=$$

$$=\int_0^t \{(-(A_\varepsilon u_\varepsilon)(s)-v'(s), u_\varepsilon(s)-v(s))_\varepsilon+((Au)(s)+u'(s), u_\varepsilon(s)-v(s))\}ds+$$

$$+\frac{1}{2}|a_\varepsilon-v(0)|_\varepsilon^2+\frac{1}{2}|v(t)-u(t)|^2=$$

$$=\int_0^t \{(-(Au_\varepsilon)(s)+(Au)(s), u_\varepsilon(s)-u(s))+$$

$$+((Au_\varepsilon)(s)-(Au)(s),\ v(s)-u(s))+$$

$$+(u'(s)-v'(s),\ u_\varepsilon(s)-v(s))-\varepsilon^2(v'(s),\ u_\varepsilon(s)-v(s))\}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}|a_\varepsilon-v(0)|_\varepsilon^2+\frac{1}{2}|v(t)-u(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \{-m\|u_\varepsilon(s)-u(s)\|^2+\lambda|u_\varepsilon(s)-u(s)|^2\}\,ds+$$

$$+\|Au_\varepsilon-Au\|_{X^*}\|v-u\|_X+\left(\|u'-v'\|_{X^*}+\varepsilon^2\|v'\|_X\right)\|u_\varepsilon-v\|_X+$$

$$+\frac{1}{2}|a_\varepsilon-v(0)|_\varepsilon^2+\frac{1}{2}\|v-u\|_{C(S;\,H)}^2.$$

Используя лемму Гронуолла, липшиц-непрерывность A и формулу (3.9), выводим отсюда, что для $0<\varepsilon<\delta$

$$\|u_\varepsilon-u\|_{C(S;\,H)}^2+\|u_\varepsilon-u\|_X^2 \leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\|v-u\|_X+\left(\|u'-v'\|_{X^*}+\varepsilon^2\|v'\|_X\right)\left(\|v\|_X+1\right)+\right.$$

$$\left.+|a_\varepsilon-v(0)|^2+\varepsilon^2\|a_\varepsilon-v(0)\|^2+\|v-u\|_{C(S;\,H)}^2\right\},$$

где K — не зависящая от ε и v постоянная. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left(\|u_\varepsilon-u\|_{C(S;\,H)}^2+\|u_\varepsilon-u\|_X^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\|v-u\|_X+\|u'-v'\|_{X^*}\left(\|v\|_X+1\right)+|a-v(0)|^2+\|v-u\|_{C(S;\,H)}^2\right\}.$$

Согласно лемме 1.12 гл. IV, функцию $u \in W$ можно с любой точностью аппроксимировать функциями $v \in C^1(S; V)$ в W, а значит, и в $C(S; H)$. Следовательно, надлежащим образом выбирая v, правую часть последнего неравенства можно сделать как угодно малой. Так как левая часть этого неравенства не зависит от v, отсюда вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\|u_\varepsilon - u\|^2_{C(S;\,H)} + \|u_\varepsilon - u\|^2_X\right) = 0.$$

Теорема доказана.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ РЕГУЛЯРНОСТИ

Теорема 3.2. *Пусть $A \in (X \to X^*)$ — липшиц-непрерывный оператор Вольтерры и оператор $A + \lambda I$ при некотором $\lambda \geqslant 0$ сильно монотонен. Пусть A обладает представлением*

$$(Au)(t) = A(t)\,u(t), \qquad A(t) \in (V \to V^*), \qquad \forall t \in S. \tag{3.12}$$

Далее, пусть для некоторой непрерывной неубывающей функции ρ

$$\|A(t)\,x - A(s)\,x\|_* \leqslant |t-s|\,\rho(|x|)(1+\|x\|) \quad \text{при любых } s,\ t \in S \ \text{ и } \ x \in V. \tag{3.13}$$

Тогда при каждом $a \in V$, таком, что $A(0)\,a \in H$, задача

$$\begin{gathered} u'(t) + A(t)\,u(t) = 0 \qquad \forall t \in S, \\ u(0) = a, \qquad u \in C(S;\ V) \cap C^1_w(S;\ H) \cap C^1(S;\ V^*), \end{gathered} \tag{3.14}$$

имеет точно одно решение. Для этого решения u и для решения u_ε задачи (3.7) с $a_\varepsilon = a$ справедливы следующие утверждения (в предположении, что $0 < \varepsilon \leqslant 1$):

a) $\|u_\varepsilon - u\|_{C(S;\,H)} + \|u_\varepsilon - u\|_X \leqslant M_1\varepsilon$;

b) $\|u_\varepsilon - u\|_{C(S;\,V)} \leqslant M_2\sqrt{\varepsilon}$;

c) $\|u'_\varepsilon - u'\|_{C(S;\,V^*)} \leqslant M_3\sqrt{\varepsilon}$;

d) $\lim_{\varepsilon\to 0} u'_\varepsilon = u'$ *в* $C_w(S;\ H)$.

При этом значения постоянных M_1, M_2 и M_3 могут быть явно указаны.

Замечание 3.3. Предположение (3.13) слабее, чем предположение (2.2), использованное в § 2. Это ослабление оказывается возможным благодаря сделанному здесь предположению о сильной монотонности оператора A. Существование решения задачи (3.14) мы докажем при помощи рассматриваемого в этом параграфе аппроксимационного метода. Однако доказательство существования можно было бы провести при тех же предположениях и с помощью метода Галёркина.

Доказательству теоремы 3.2 предпошлем две леммы.

Лемма 3.3. Если $A \in (X \to X^*)$ — липшиц-непрерывный оператор Вольтерры, удовлетворяющий предположениям (3.12) и (2.5), то для любых $x, y \in V$ и $t \in S$

$$\| A(t) x - A(t) y \|_* \leqslant M \| x - y \|,$$

где M — постоянная Липшица для A.

Доказательство. Для $t, t+h \in S$, $h > 0$, положим

$$v(s) = \begin{cases} x & \text{при } t \leqslant s \leqslant t+h, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$w(s) = \begin{cases} y & \text{при } t \leqslant s \leqslant t+h, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\| A(t) x - A(t) y \|_*^2 =$$

$$= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| A(t) x - A(s) x + A(s) x - A(s) y + A(s) y - A(t) y \|_*^2 \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Big\{ \| A(t) x - A(s) x + A(s) y - A(t) y \|_*^2 \left(1 + \frac{1}{h}\right) +$$

$$+ \| A(s) v(s) - A(s) w(s) \|_*^2 (1 + h) \Big\} \, ds \leqslant$$

$$\leqslant h^2 (\eta (\| x \|, \| A(t) x \|_*) + \eta (\| y \|, \| A(t) y \|_*))^2 \left(1 + \frac{1}{h}\right) +$$

$$+ \frac{1+h}{h} M^2 \| v - w \|_X^2 = h (\eta (\| x \|, \| A(t) x \|_*) +$$

$$+ \eta (\| y \|, \| A(t) y \|_*))^2 (h + 1) + (1 + h) M^2 \| x - y \|^2;$$

при $h \to 0$ получаем утверждение леммы.

Лемма 3.4. При предположениях теоремы 3.2 решение u_ε задачи (3.7) принадлежит $C^1(S; V_\varepsilon)$ и для некоторой не зависящей от ε постоянной K_0 справедлива оценка

$$\| u_\varepsilon' \|_{C(S;\, V_\varepsilon)} \leqslant K_0. \tag{3.15}$$

Доказательство. Обозначим через M постоянную Липшица и через m — постоянную монотонности для A. Как мы уже знаем из леммы 3.1, решение u_ε задачи (3.7) принадлежит $C(S; V_\varepsilon)$.

Включение $u'_\varepsilon \in C(S;\ V_\varepsilon)$ следует из равенства $u'_\varepsilon = -A_\varepsilon u_\varepsilon$ и справедливой при всех $x \in V_\varepsilon$ оценки

$$(A_\varepsilon(t)\,u_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\,u_\varepsilon(s),\ x)_\varepsilon =$$
$$= (A(t)\,u_\varepsilon(t) - A(t)\,u_\varepsilon(s) + A(t)\,u_\varepsilon(s) - A(s)\,u_\varepsilon(s),\ x) \leqslant$$
$$\leqslant \{M\,\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\| + |t-s|\,\rho(|u_\varepsilon(s)|)(1 + \|u_\varepsilon(s)\|)\}\,|x|_\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

(см. также лемму 3.3).

Перейдем к доказательству оценки (3.15). Для

$$w_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t), \qquad h > 0,$$

получаем, принимая во внимание (3.13) и (3.9) (с $\delta = \infty$, ввиду того что $a_\varepsilon = a$),

$$\frac{1}{2}\Big(|w_\varepsilon(t)|^2_\varepsilon - |w_\varepsilon(0)|^2_\varepsilon\Big) = \int_0^t \big(w'_\varepsilon(s),\ w_\varepsilon(s)\big)_\varepsilon\,ds =$$
$$= \int_0^t (-A(s+h)\,u_\varepsilon(s+h) + A(s+h)\,u_\varepsilon(s) - A(s+h)\,u_\varepsilon(s) +$$
$$+ A(s)\,u_\varepsilon(s),\ w_\varepsilon(s))\,ds \leqslant \int_0^t \{-m\,\|w_\varepsilon(s)\|^2 + \lambda\,|w_\varepsilon(s)|^2 +$$
$$+ h\rho(|u_\varepsilon(s)|)(1 + \|u_\varepsilon(s)\|)\,\|w_\varepsilon(s)\|\}\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t \Big\{\lambda\,|w_\varepsilon(s)|^2 + \frac{1}{4m}(h\rho(|u_\varepsilon(s)|)(1 + \|u_\varepsilon(s)\|))^2\Big\}\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t \lambda\,|w_\varepsilon(s)|^2_\varepsilon\,ds + h^2K,$$

где K — не зависящая от ε и t постоянная. При выводе этого неравенства мы воспользовались леммой 2.2. Применение леммы Гронуолла дает

$$|w_\varepsilon(t)|^2_\varepsilon \leqslant K_1\,(|w_\varepsilon(0)|^2_\varepsilon + h^2), \tag{3.16}$$

где постоянная K_1 не зависит от ε и t. Переходя в (3.16) к пределу при $h \to 0$, получим

$$|u'_\varepsilon(t)|^2_\varepsilon \leqslant K_1\Big(|u'_\varepsilon(0)|^2_\varepsilon + 1\Big).$$

Для $x \in V$ имеем

$$(A_\varepsilon(0)\,a,\ x)_\varepsilon = (A(0)\,a,\ x) \leqslant |A(0)\,a| \cdot |x| \leqslant |A(0)\,a| \cdot |x|_\varepsilon$$

и потому

$$|u'_\varepsilon(0)|_\varepsilon = |A_\varepsilon(0)a|_\varepsilon \leqslant |A(0)a|.$$

Следовательно,

$$\|u'_\varepsilon\|^2_{C(S;\,V_\varepsilon)} \leqslant K_1(|A(0)a|^2 + 1).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.2. При заданных предположениях мы можем воспользоваться теоремой 3.1. Поэтому мы знаем, что задача (3.6) имеет некоторое решение $u \in W$. Нижеследующие доказательства утверждений a)—d) показывают, что это u является решением задачи (3.14).

Доказательство утверждения a). Используя (3.15) и лемму 2.2, находим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|u_\varepsilon(t) - u(t)|^2 &= \int_0^t (u'_\varepsilon(s) - u'(s),\ u_\varepsilon(s) - u(s))\,ds = \\
&= -\int_0^t (A_\varepsilon(s)u_\varepsilon(s) - A(s)u(s),\ u_\varepsilon(s) - u(s))\,ds = \\
&= -\int_0^t \{(A(s)u_\varepsilon(s) - A(s)u(s),\ u_\varepsilon(s) - u(s)) - \\
&\qquad - \varepsilon^2(A_\varepsilon(s)u_\varepsilon(s),\ u_\varepsilon(s) - u(s))\}\,ds \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t \{-m\|u_\varepsilon(s) - u(s)\|^2 + \lambda|u_\varepsilon(s) - u(s)|^2 + \\
&\qquad + \varepsilon|A_\varepsilon(s)u_\varepsilon(s)|_\varepsilon\|u_\varepsilon(s) - u(s)\|\}\,ds \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t \left\{-\frac{m}{2}\|u_\varepsilon(s) - u(s)\|^2 + \lambda|u_\varepsilon(s) - u(s)|^2\right\}ds + \varepsilon^2\frac{TK_0^2}{2m}.
\end{aligned}$$

Применяя лемму Гронуолла, из этой оценки получаем

$$|u_\varepsilon(t) - u(t)|^2 \leqslant \varepsilon^2 K_1, \qquad K_1 = \mathrm{const}.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства при $t = T$ следует, что

$$\|u_\varepsilon - u\|_X^2 \leqslant \varepsilon^2 K_2, \qquad K_2 = \mathrm{const}.$$

Поэтому, как и утверждалось,

$$\|u_\varepsilon - u\|_{C(S;\,H)} + \|u_\varepsilon - u\|_X \leqslant M_1\varepsilon, \qquad M_1 = \mathrm{const}.$$

Из доказательства леммы 3.2 и 3.4, а также из только что проведенной оценки вытекает, что постоянная M_1 может быть явно задана без предварительного знания решения u.

Доказательство утверждения b). Для $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и любого $t \in S$ имеем (см. лемму 2.2)

$$
\begin{aligned}
0 &= (u'_\varepsilon(t) - u'_\delta(t) + A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) - A_\delta(t)u_\delta(t),\ u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)) = \\
&= (u'_\varepsilon(t) - u'_\delta(t) + A(t)u_\varepsilon(t) - A(t)u_\delta(t),\ u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)) + \\
&\qquad + (-\varepsilon^2 A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) + \delta^2 A_\delta(t)u_\delta(t),\ u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)) \geqslant \\
&\geqslant -2K_0\|u_\varepsilon - u_\delta\|_{C(S;\,H)} + m\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|^2 - \\
&\qquad - \lambda\|u_\varepsilon - u_\delta\|^2_{C(S;\,H)} - (\varepsilon + \delta)K_0\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\| \geqslant \\
&\geqslant -2K_0\|u_\varepsilon - u_\delta\|_{C(S;\,H)} + \frac{m}{2}\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|^2 - \\
&\qquad - \lambda\|u_\varepsilon - u_\delta\|^2_{C(S;\,H)} - \frac{K_0^2}{2m}(\varepsilon + \delta)^2.
\end{aligned}
$$

Из этой оценки следует, что норма $\|u_\varepsilon - u_\delta\|_{C(S;\,V)}$ при достаточно малых ε и δ становится как угодно малой. Тем самым прежде всего показано, что решение u задачи (3.6) принадлежит $C(S;\,V)$. Если в последнем неравенстве перейти к пределу при $\delta \to 0$, то, используя утверждение a), получим (при $0 < \varepsilon \leqslant 1$)

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{2}\|u_\varepsilon - u\|^2_{C(S;\,V)} &\leqslant 2K_0\|u_\varepsilon - u\|_{C(S;\,H)} + \lambda\|u_\varepsilon - u\|^2_{C(S;\,H)} + \frac{K_0^2}{2m}\varepsilon^2 \leqslant \\
&\leqslant \left(2K_0M_1 + \lambda M_1^2 + \frac{K_0^2}{2m}\right)\varepsilon,
\end{aligned}
$$

чем b) и доказано.

Доказательство утверждения c). Из оценки

$$
\begin{aligned}
\|u'(t) - u'(s)\|_* &= \|A(s)u(s) - A(t)u(t)\|_* \leqslant \\
&\leqslant \|A(s)u(s) - A(s)u(t)\|_* + \|A(s)u(t) - A(t)u(t)\|_* \leqslant \\
&\leqslant M\|u(s) - u(t)\| + |s - t|\,\rho(|u(t)|)(1 + \|u(t)\|)
\end{aligned}
$$

вытекает, что $u' \in C(S;\,V^*)$. Для $x \in V$ и $t \in S$ имеем

$$
\begin{aligned}
|(u'_\varepsilon(t) - u'(t),\ x)| &= |(A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) - A(t)u(t),\ x)| = \\
&= |(A(t)u_\varepsilon(t) - A(t)u(t),\ x) - \varepsilon^2(A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t),\ x)| \leqslant \\
&\leqslant (M\|u_\varepsilon(t) - u(t)\| + \varepsilon|A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t)|_\varepsilon)\|x\|.
\end{aligned}
$$

Следовательно (при $0 < \varepsilon \leqslant 1$),

$$\| u'_\varepsilon - u' \|_{C(S;\, V^*)} \leqslant (MM_2 + K_0)\sqrt{\varepsilon}.$$

Тем самым c) доказано.

Доказательство утверждения d). Пусть $x \in H$ и $\{x_i\}$ — какая-нибудь последовательность из V, сходящаяся в H к x. Тогда при $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $t \in S$ имеем

$$|(u'_\varepsilon(t) - u'_\delta(t),\ x)| \leqslant |(u'_\varepsilon(t) - u'_\delta(t),\ x - x_i)| + \\ + |(u'_\varepsilon(t) - u'(t) + u'(t) - u'_\delta(t),\ x_i)| \leqslant \\ \leqslant 2K_0 |x - x_i| + M_3(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\delta}) \| x_i \|.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от t. Она становится при подходящем i и достаточно малых ε и δ как угодно малой. Следовательно, в $C_w(S; H)$ существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u'_\varepsilon$, и этот предел, в силу c), должен равняться u'. Тем самым доказано утверждение d), а с ним и вся теорема.

Замечание 3.4. Теоремы § 3 показывают, как задачи с начальными условиями для эволюционных уравнений с операторами $A \in (X \to X^*)$ можно сводить к задачам с начальными условиями для уравнений с операторами $A_\varepsilon \in (X_\varepsilon \to X_\varepsilon)$. Если A — липшиц-непрерывный оператор с постоянной Липшица M, то оператор A_ε, как мы установили при доказательстве леммы 3.1, является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица M/ε^2. Поэтому задачу (3.7) можно решать численно при помощи проекционно-итерационного метода, описанного в теореме 4.5 гл. V. Рассмотренный в этом параграфе аппроксимационный метод можно, таким образом, использовать в качестве основы для численного решения задач с начальными условиями для эволюционных уравнений.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛ. VI

Нелинейные эволюционные уравнения с монотонными операторами впервые были рассмотрены в работах Браудера [3, 4] и Лионса и Штраусса [1]. Результаты указанных работ Браудера приведены также в обзорной статье Качуровского [1] (см. еще Дубинский [1] и Вайнберг [2]). Упрощенное изложение работы Лионса и Штраусса, равно как некоторые обобщения и другие возможные подходы к изучению эволюционных уравнений, можно найти у Лионса [1] (см. также в этой книге соответствующие комментарии и литературные указания). Для ряда конкретных нелинейных параболических дифференциальных уравнений подобные результаты были уже получены Вишиком [2] без явного использования монотонности.

Данное здесь изложение теории нелинейных эволюционных уравнений отличается от изложений других авторов тремя моментами.

1. Доказываются теоремы сходимости для метода Галёркина, которые позволяют рассматривать этот метод не только как вспомогательное средство при доказательстве теорем существования, но и как возможную основу для численного нахождения приближенных решений.

2. Широко обсуждаются эволюционные уравнения с операторами Вольтерры (о понятии оператора Вольтерры см. также замечания к гл. V).

3. Помимо метода Галёркина указывается еще один метод, который во многих случаях пригоден для приближенного решения эволюционных уравнений.

Теоремы 1.1—1.3 и 2.1 в приведенной здесь форме содержатся в работе Грёгера [2]. Доказывая теорему существования 1.1, мы в основном следуем Лионсу и Штрауссу [1]; лишь при доказательстве существования галёркинских приближений необходимы в связи с использованием операторов Вольтерры некоторые видоизменения (лемма 1.3 как обобщение теоремы существования Каратеодори для систем обыкновенных дифференциальных уравнений). Теорему существования 1.1 можно было бы доказать и без использования метода Галёркина, с помощью теории максимальных монотонных операторов. У Лионса [1, гл. III, 2.1] это сделано для случая, когда начальный элемент a является нулем; в случае произвольного начального элемента можно воспользоваться, например, одной теоремой Рокафеллара [1], которая обобщает приведенную нами теорему 2.3 гл. III. В теореме 1.2 собраны различные утверждения о сходимости метода Галёркина. Метод Галёркина для линейных уравнений был исследован Деклу [1]. Утверждения о сходимости метода Галёркина для нелинейных параболических уравнений можно найти у Дугласа и Дюпона [1], правда при сильных предположениях регулярности решения. Существование периодических решений эволюционных уравнений впервые доказал Браудер [5, 6] с помощью одной теоремы о неподвижной точке для нерастягивающих отображений. При доказательстве теоремы 1.4 мы в основном следуем Лионсу [1, гл. III, 2.2].

В доказательстве утверждений регулярности из теоремы 2.1 при получении оценки для галёркинских приближений использована одна идея, которую предложил Като [2] для оценки так называемых аппроксимаций Иосиды. Одно аналогичное утверждение регулярности уже было сформулировано Браудером [9]. При предположениях теоремы 2.1 утверждения о сходимости метода Галёркина, даваемые теоремами 1.2 и 1.3, могут быть уточнены. Соответствующие результаты можно найти у Грёгера [2]. Теоремы о сильной сходимости метода Галёркина при некоторых специальных предположениях были ранее установлены Гаевским [3]. В доказательстве теоремы 2.2 использована техника оценок, разработанная Брезисом [3] для аппроксимаций Иосиды; она перенесена на случай галёркинских приближений.

Рассмотренная в § 3 аппроксимация эволюционных уравнений обыкновенными дифференциальными уравнениями восходит к Гаевскому [2]. Теорема 3.1 в приведенной здесь форме является новой. Оценки погрешности, содержащиеся в теореме 3.2, можно найти в несколько более подробном изложении у Гаевского [5]. Кроме того, в этой работе изложен проекционно-итерационный метод для нахождения решений аппроксимирующих уравнений. Он основан на сильной монотонности входящего в уравнение оператора и этим отличается от проекционно-итерационного метода, даваемого теоремой 4.5 гл. V. Один итерационный метод для эволюционных уравнений, не связанный со сведением последних к обыкновенным дифференциальным уравнениям и поэтому лучше подходящий для численных целей, был предложен Гаевским и Грёгером [2].

При избранном нами способе изложения теории эволюционных уравнений остался незатронутым следующий круг проблем:

1. Эволюционные уравнения с псевдомонотонными операторами. Теоремы существования для таких уравнений можно найти, например, у Лионса [1, гл. III] и Брезиса [4].

2. Эволюционные неравенства. Изложение проблем, относящихся к эволюционным неравенствам, и методов решения таких неравенств имеется в обзорной статье Лионса [2] и в его уже много раз упоминавшейся книге [1]. Кроме того, сошлемся на работы Брезиса [4], Дюво и Лионса [1] и указанную там литературу.

3. Теория полугрупп. Изложение этой теории можно найти у Брезиса [5], Барбу [1] и Иосиды [1] (см. также Крэндалл и Лиггетт [1] и Брезис и Пэйзи [1]).

ГЛАВА VII

ОПЕРАТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть V — сепарабельное [1]) гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное в некоторое другое гильбертово пространство H. Отождествляя H с сопряженным к нему пространством H^*, а H^* — с соответствующим подпространством сопряженного к V пространства V^* (см. § 6 гл. I), имеем

$$V \subset H \subset V^*.$$

Как и раньше, будем обозначать через $\|\cdot\|$, $|\cdot|$, $\|\cdot\|_*$ нормы соответственно в V, H и V^* и через $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H, а также скалярное произведение между V^* и V. В этой главе $S = [0, T]$ — конечный интервал (времени). Указанные факты о пространствах V, H и введенные здесь обозначения будут использоваться ниже без специальных пояснений.

Мы будем заниматься операторными дифференциальными уравнениями вида

$$u'' + Au' + Bu = f \tag{0.1}$$

с вольтерровыми операторами A и B, которые отображают функциональное пространство $X = L^p(S; V)$, $2 \leqslant p < \infty$, в сопряженное к нему пространство X^*. При этом u' и u'' обозначают первую и вторую производные от $u \in L^p(S; V)$ в смысле пространства распределений $\mathscr{D}^*(S; V^*)$. Что касается точных предположений об операторах A и B, то мы различаем два случая — см. предположения теорем 1.1 и 1.2 соответственно.

Мы будем иметь дело главным образом с задачами с начальными условиями для уравнений вида (0.1). Подчеркнем еще раз, что в таких задачах с начальными условиями речь идет об обобщениях или расширениях классических задач с краевыми и начальными условиями (см. § 2 гл. IV). Для одного из наших двух случаев мы обсудим также вопрос о периодических решениях уравнений вида (0.1).

В § 1 показывается, как утверждения о существовании и единственности решений исследуемых задач можно свести к соответствующим утверждениям для эволюционных уравнений.

---

[1]) См подстрочное примечание на стр. 78.

В § 2 доказываются теоремы о сходимости метода Галёркина для задач с начальными условиями для уравнений вида (0.1).

В § 3 указывается, как можно уточнить утверждения § 1, если на операторы A и B наложить более сильные ограничения, касающиеся зависимости их от времени.

В § 4 дается один метод аппроксимации операторных дифференциальных уравнений второго порядка и их решений, который может служить основой для численного нахождения решений.

Как в результатах, так и в методах доказательства, между операторными дифференциальными уравнениями второго порядка и рассмотренными в предыдущей главе эволюционными уравнениями прослеживается далеко идущая аналогия. Отметим, однако, что в этой главе в отличие от предыдущей с самого начала предполагается, что пространство V является гильбертовым. Это предположение связано с требованиями, предъявляемыми к операторам A и B.

§ 1. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

В данном параграфе мы будем использовать следующие сокращенные обозначения:

$$X=L^p(S;\ V),\ \ X^*=L^q(S;\ V^*),\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;\ \ W=\{w\mid w\in X,\ \ w'\in X^*\},$$

причем всегда предполагается, что $2\leqslant p<\infty$. При этих значениях p имеет место вложение $X\subset X^*$. Это (непрерывное) вложение X в X^* будем обозначать через I. Скалярное произведение между X и X^* обозначается, как и в гл. VI, через $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1. ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Теорема 1.1. *Пусть при некотором $\lambda\geqslant 0$ оператор $A+\lambda I\in(X\to X^*)$ является радиально непрерывным монотонным коэрцитивным оператором Вольтерры. Пусть, далее, $B\in(X\to X^*)$ — оператор с таким свойством:*

$$(Bu)(t)=B_0u(t)\qquad \forall u\in X,\quad \forall t\in S,$$

где $B_0\in(V\to V^*)$ — линейный ограниченный самосопряженный положительно определенный оператор. (1.1)

Тогда при любых $a_0\in V$, $a_1\in H$ и $f\in X^*$ задача

$$u''+Au'+Bu=f, \tag{1.2}$$

$$u(0)=a_0,\qquad u'(0)=a_1,\qquad u\in C(S;\ V),\quad u'\in X$$

имеет точно одно решение u. Для этого решения $u'\in W$.

Замечание 1.1. Уравнение $u'' + Au' + Bu = f$ понимается как уравнение в $\mathscr{D}^*(S; V^*)$. Если $u \in C(S; V)$ с $u' \in X$ удовлетворяет этому уравнению, то $u'' = f - Au' - Bu \in X^*$, и, значит, $u' \in W \subset C(S; H)$. Этим оправдывается постановка начального условия $u'(0) = a_1 \in H$.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть R — оператор Вольтерры, определенный соотношением

$$(Rv)(t) = a_0 + \int_0^t v(s)\,ds, \qquad v \in X. \tag{1.3}$$

Нетрудно проверить, что R является липшиц-непрерывным отображением из $(X \to X)$. Если u — решение задачи (1.2), то, очевидно, $v = u'$ будет решением задачи

$$v' + (A + BR)\,v = f, \qquad v(0) = a_1, \qquad v \in X. \tag{1.4}$$

Обратно, если v — решение задачи (1.4), то $u = Rv$ — решение задачи (1.2).

Согласно следствию из теоремы 1.3 гл. VI, задача (1.4) однозначно разрешима, в случае когда оператор Вольтерры $A + BR + \lambda I \in (X \to X^*)$ радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен. Так как оператор $A + \lambda I \in (X \to X^*)$ по предположению радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен, то достаточно установить, что оператор $BR \in (X \to X^*)$ радиально непрерывен и монотонен и что

$$\varliminf_{\|v\|_X \to \infty} \frac{1}{\|v\|_X} \langle BRv,\ v\rangle > -\infty.$$

1. Для $v \in X$ ввиду того, что $p \geqslant 2 \geqslant q$, и ограниченности B_0 имеем

$$\| Bv \|_{X^*} = \left(\int_S \| B_0 v(t) \|_*^q\, dt\right)^{1/q} \leqslant K_1 \left(\int_S \| v(t) \|^q\, dt\right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant K_2 \left(\int_S \| v(t) \|^p\, dt\right)^{1/p} = K_2 \| v \|_X,$$

где K_1 и K_2 — не зависящие от v постоянные. Отсюда и из липшиц-непрерывности $R \in (X \to X)$ следует непрерывность оператора $BR \in (X \to X^*)$.

2. На основании свойств операторов B и B_0, для $v, w \in X$

$$\langle BRv - BRw,\ v - w\rangle = \int_S (B_0(Rv - Rw)(t),\ (Rv - Rw)'(t))\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\,(B_0(Rv - Rw)(T),\ (Rv - Rw)(T)) \geqslant 0,$$

т. е. оператор $BR \in (X \to X^*)$ монотонен.

3. Из (1.3) и свойств оператора B_0 вытекает, что

$$\langle BRv,\ v\rangle = \int_S (B_0(Rv)(t),\ (Rv)'(t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}((B_0(Rv)(T),\ (Rv)(T)) - (B_0a_0,\ a_0)) \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}(B_0a_0,\ a_0).$$

Поэтому

$$\lim_{\|v\|_X\to\infty} \frac{1}{\|v\|_X}\langle BRv,\ v\rangle \geqslant 0.$$

Итак, оператор BR действительно обладает нужными свойствами.

Тот факт, что для решения u задачи (1.2) имеет место соотношение $u' \in W$, мы уже установили в замечании 1.1. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть* $p = 2$, *т. е.* $X = L^2(S;\ V)$, *и при некотором* $\mu \geqslant 0$ *пусть* $A + \mu I \in (X \to X^*)$ — *радиально непрерывный сильно монотонный оператор Вольтерры. Пусть, далее,* B — *липшиц-непрерывный оператор Вольтерры из* $(X \to X^*)$. *Тогда при любых* $a_0 \in V$, $a_1 \in H$ *и* $f \in X^*$ *задача*

$$\begin{gathered} u'' + Au' + Bu = f, \\ u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1, \quad u \in C(S;\ V), \quad u' \in X \end{gathered} \tag{1.5}$$

имеет точно одно решение u. *Для этого решения* $u' \in W$.

Замечание 1.2. Постановка начального условия $u'(0) = a_1 \in H$ может быть оправдана так же, как и в случае задачи (1.2) (см. замечание 1.1).

Доказательство теоремы 1.2. Как и при доказательстве теоремы 1.1, используем оператор $R \in (X \to X)$, определенный формулой (1.3). Задача (1.5) эквивалентна задаче (1.4). Нижеследующие оценки служат подготовительным этапом для проверки того, что при заданных предположениях к решению задачи (1.4) может быть применена теорема 1.3 гл. VI.

Пусть $u, v \in X$ и $\lambda \geqslant 0$. Используя лемму 1.6 гл. VI с

$$g(s) = ((Au)(s) - (Av)(s) + \mu(u(s) - v(s)),\ u(s) - v(s)) - m\|u(s) - v(s)\|^2,$$

получаем

$$\int_0^t e^{-2\lambda s}((Au)(s)-(Av)(s),\ u(s)-v(s))\,ds \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^t e^{-2\lambda s}(m\|u(s)-v(s)\|^2-\mu\,|u(s)-v(s)|^2)\,ds,$$

где m обозначает постоянную монотонности для $A+\mu I$. Из (1.3) вытекает, что при $u,\ v\in X$ и $\lambda\geqslant 0$

$$\int_0^t e^{-2\lambda s}\|(Ru)(s)-(Rv)(s)\|^2\,ds=\int_0^t e^{-2\lambda s}\left\|\int_0^s (u(\sigma)-v(\sigma))\,d\sigma\right\|^2 ds\leqslant$$
$$\leqslant T\int_0^t e^{-2\lambda s}\int_0^s\|u(\sigma)-v(\sigma)\|^2\,d\sigma\,ds=$$
$$=\frac{T}{2\lambda}\int_0^t e^{-2\lambda s}\|u(s)-v(s)\|^2\,ds-\frac{T}{2\lambda}e^{-2\lambda t}\int_0^t\|u(s)-v(s)\|^2\,ds\leqslant$$
$$\leqslant\frac{T}{2\lambda}\int_0^t e^{-2\lambda s}\|u(s)-v(s)\|^2\,ds.$$

Обозначим через M постоянную Липшица для B. Если скомбинировать последнюю оценку с результатом леммы 1.6 гл. VI для

$$g(s)=M^2\|(Ru)(s)-(Rv)(s)\|^2-\|(BRu)(s)-(BRv)(s)\|_*^2,$$

то получим, что при $u,\ v\in X$ и $\lambda\geqslant 0$

$$\int_0^t e^{-2\lambda s}((BRu)(s)-(BRv)(s),\ u(s)-v(s))\,ds\geqslant$$
$$\geqslant-\frac{m}{2}\int_0^t e^{-2\lambda s}\|u(s)-v(s)\|^2\,ds-\frac{1}{2m}\int_0^t e^{-2\lambda s}\|(BRu)(s)-(BRv)(s)\|_*^2\,ds\geqslant$$
$$\geqslant-\frac{m}{2}\int_0^t e^{-2\lambda s}\|u(s)-v(s)\|^2\,ds-\frac{M^2}{2m}\int_0^t e^{-2\lambda s}\|(Ru)\,s-(Rv)(s)\|^2\,ds\geqslant$$
$$\geqslant-\left(\frac{m}{2}+\frac{M^2T}{4m\lambda}\right)\int_0^t e^{-2\lambda s}\|u(s)-v(s)\|^2\,ds.$$

Отсюда мы заключаем, что для $u, v \in X$ и $\lambda \geqslant 0$

$$\int_0^t e^{-2\lambda s}(((A+BR)u)(s)-((A+BR)v)(s),\ u(s)-v(s))\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^t e^{-2\lambda s}\left\{\left(\frac{m}{2}-\frac{M^2T}{4m\lambda}\right)\|u(s)-v(s)\|^2-\mu\,|u(s)-v(s)|^2\right\}ds. \quad (1.6)$$

Из (1.6) видно, что оператор $A+BR$, например при $\lambda=\max(\mu, M^2T/m^2)$, удовлетворяет условиям (1.21), (1.22) гл. VI. Так как этот оператор $A+BR \in (X \to X^*)$ является также радиально непрерывным, то утверждение нашей теоремы получается применением теоремы 1.3 гл. VI к задаче (1.4).

Замечание 1.3. Можно показать, что решение u задач Коши, рассмотренных в теоремах 1.1 и 1.2, непрерывно зависит от начальных значений a_0 и a_1 в следующем смысле: соответствие $\{a_0, a_1\} \to \{u, u'\}$ непрерывно как отображение из $V \times H$ в $C(S; V) \times C(S; H)$.

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Теорема 1.3. *Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен, а оператор $B \in (X \to X^*)$ удовлетворяет предположению* (1.1). *Тогда при любом $f \in X^*$ задача*

$$\begin{gathered} u''+Au'+Bu=f, \\ u(0)=u(T), \quad u'(0)=u'(T), \quad u \in C(S;\ V), \quad u' \in X \end{gathered} \quad (1.7)$$

имеет решение. Если вдобавок A строго монотонен, то это решение определяется однозначно.

Замечание 1.4. В этой теореме, как было оговорено в начале параграфа, $X = L^p(S; V)$, $2 \leqslant p < \infty$.

Замечание 1.5. Если функция $u \in C(S; V)$ с $u' \in X$ удовлетворяет уравнению $u''+Au'+Bu=f$ (в $\mathscr{D}^*(S; V^*)$), то $u'' \in X^*$ и поэтому $u' \in W \subset C(S; H)$. Следовательно, условие $u'(0) = u'(T)$ имеет смысл.

Доказательство теоремы 1.3. При рассмотрении задачи (1.7) целесообразно ввести пространство

$$X_0=\left\{u \mid u \in X, \quad \int_S u(s)\,ds=0\right\}.$$

Оно является замкнутым подпространством в X. Используя теорему Хана — Банаха, нетрудно убедиться, что сопряженное к X_0

пространство X_0^* можно трактовать как факторпространство пространства X^* по подпространству элементов, обращающихся на X_0 в нуль. Если $w \in X^*$ обращается в нуль на X_0, то для $\varphi \in \in \mathscr{D}(S)$ и $x \in V$ ввиду включения $\varphi' x \in X_0$ имеем

$$(w'(\varphi),\ x) = -(w(\varphi'),\ x) = -\int_S (w(s),\ \varphi'(s)\, x)\, ds = 0,$$

т. е. w есть постоянная. (Здесь через $w'(\varphi)$ обозначено значение распределения $w' \in \mathscr{D}^*(S;\ V^*)$ на элементе $\varphi \in \mathscr{D}(S)$ и через $w(\varphi')$ — значение $w \in \mathscr{D}^*(S;\ V^*)$ на $\varphi' \in \mathscr{D}(S)$.) Очевидно, что и обратно, каждая постоянная функция $w \in X^*$ обращается в нуль на X_0. Итак, пространство X_0^* состоит из классов функций из X^*, которые отличаются друг от друга лишь на постоянную функцию. В каждом таком классе существует точно один элемент $w \in X^*$, обладающий свойством $\int_S w(s)\, ds = 0$. Следовательно, сопряженное к X_0 пространство X_0^* можно отождествить с пространством

$$(X^*)_0 = \left\{ w \mid w \in X^*,\quad \int_S w(s)\, ds = 0 \right\}.$$

При этом скалярное произведение между элементами $w \in X_0^*$ и $u \in X_0$ задается формулой

$$\langle w,\ u \rangle = \int_S (w(s), u(s))\, ds.$$

Пусть I_0 — (непрерывное) вложение X_0 в X и $I_0^* \in (X^* \to X_0^*)$ — сопряженный к I_0 оператор. Для $w \in X^*$ и $u \in X_0$ имеем

$$\langle I_0^* w,\ u \rangle = \langle w,\ I_0 u \rangle = \langle w,\ u \rangle, \tag{1.8}$$

и ясно, что $I_0^* w = w$ для $w \in X_0^*$.

После этих предварительных замечаний дадим новую формулировку задачи (1.7). Пусть $R_0 \in (X_0 \to X)$ — оператор, определенный соотношением

$$(R_0 v)(t) = \int_0^t v(s)\, ds, \qquad v \in X_0. \tag{1.9}$$

Если $u \in C(S;\ V)$ и $u' \in X_0$, то $R_0 u' = u + u_0$, где u_0 — некоторая постоянная в интервале S функция. Пусть, далее, $C = I_0^* \times \times (AI_0 + BR_0) \in (X_0 \to X_0^*)$ и $g = I_0^* f \in X_0^*$. Покажем, что задача (1.7) эквивалентна задаче

$$v' + Cv = g,\ \ v \in X_0. \tag{1.10}$$

1. Пусть u — решение задачи (1.7). Тогда $u' \in X_0$ и $u'' \in X_0^*$. Имеем

$$u'' + Cu' = u'' + I_0^*(AI_0 + BR_0)u' = I_0^*(u'' + Au' + Bu + Bu_0) = \\ = I_0^*(u'' + Au' + Bu) = I_0^* f = g,$$

т. е. $v = u'$ является решением задачи (1.10).

2. Пусть v — решение задачи (1.10). Положим $u_1 = R_0 v$. Тогда $u_1' = v$ и $u_1(0) = u_1(T)$, а также $u_1'' = v' = g - Cv \in X_0^*$ и $u_1'(0) = u_1'(T)$. Далее,

$$u_1'' + Cu_1' = u_1'' + I_0^*(AI_0 + BR_0)u_1' = I_0^*(u_1'' + Au_1' + Bu_1) = I_0^* f,$$

поэтому

$$u_1'' + Au_1' + Bu_1 = f + f_1$$

при некоторой подходящей постоянной функции $f_1 \in X^*$. Следовательно, для $u = u_1 - B^{-1} f_1$ имеем $u(0) = u(T)$, $u'(0) = u'(T)$ и

$$u'' + Au' + Bu = u_1'' + Au_1' + Bu_1 - f_1 = f,$$

т. е. u служит решением задачи (1.7). (Оператор $B^{-1} \in (X^* \to \to X)$ существует в силу предположения (1.1).)

Только что проведенные рассуждения показывают, что существует взаимно однозначное обратимое соответствие между решениями задачи (1.7) и решениями задачи (1.10). Теперь решим задачу (1.10) при помощи теоремы 2.3 гл. III.

Для любого $v \in X_0$

$$\langle BR_0 v,\ v\rangle = \int_S (B_0(R_0 v)(t),\ (R_0 v)'(t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\{(B_0(R_0 v)(T),\ (R_0 v)(T)) - (B_0(R_0 v)(0),\ (R_0 v)(0))\} = 0, \quad (1.11)$$

ибо, согласно (1.9), $(R_0 v)(T) = (R_0 v)(0) = 0$. Из (1.8), (1.11) и определения оператора C следует, что для $u, v \in X_0$

$$\langle Cv,\ v\rangle = \langle Av,\ v\rangle$$

и

$$\langle Cu - Cv,\ u - v\rangle = \langle Au - Av,\ u - v\rangle.$$

Поэтому из коэрцитивности и (строгой) монотонности A следуют коэрцитивность и (строгая) монотонность C. Очевидно, что оператор C также радиально непрерывен. Ниже (лемма 1.1) мы докажем, что определенный на $W_0 = \{v \mid v \in X_0,\ \ v' \in X_0^*\}$ соотношением

$$\Lambda v = v', \qquad v \in W_0, \qquad (1.12)$$

оператор Λ является как отображение из X_0 в X_0^* радиально непрерывным и максимальным монотонным. Тем самым для задачи (1.10) выполнены все предположения теоремы 2.3 гл. III. Из этой теоремы вытекают разрешимость задачи (1.10) и ее однозначная разрешимость в случае строгой монотонности C, а отсюда следует справедливость утверждений теоремы 1.3.

Итак, для завершения доказательства этой теоремы нам осталось установить следующий результат.

Лемма 1.1. Оператор $\Lambda \in (W_0 \to X_0^*)$, определенный формулой (1.12), как отображение из X_0 в X_0^* радиально непрерывен и максимально монотонен.

Доказательство. 1. Для $v, w \in W_0$ и $h \in R^1$

$$\Lambda(v + hw) = \Lambda v + h\Lambda w,$$

откуда следует радиальная непрерывность Λ.

2. Для $u \in W_0$ имеем

$$u(T) - u(0) = \int_S u'(s)\,ds = 0$$

и потому

$$\langle \Lambda u,\ u\rangle = \int_S (u'(s),\ u(s))\,ds = \frac{1}{2}(|u(T)|^2 - |u(0)|^2) = 0,$$

т. е. линейный оператор Λ монотонен.

3. Пусть для заданных $v \in X_0$ и $w \in X_0^*$

$$\langle w - \Lambda u,\ v - u\rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in W_0. \tag{1.13}$$

Нужно показать, что $v' = w$ и, значит, $v \in W_0$. Прежде всего выберем $u = \varphi' x$, где $\varphi \in \mathscr{D}(S)$ и $x \in V$. Тогда $u \in W_0$ и

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle w - \varphi'' x,\ v - \varphi' x\rangle = \\ &= \langle w,\ v\rangle - \left(\int_S (\varphi''(s)\,v(s) + \varphi'(s)\,w(s))\,ds,\ x\right) + \langle \varphi'' x,\ \varphi' x\rangle = \\ &= \langle w,\ v\rangle + (w'(\varphi) - v''(\varphi),\ x); \end{aligned}$$

здесь через $w'(\varphi)$ и $v''(\varphi)$ обозначены соответственно значения распределений w' и v'' на элементе $\varphi \in \mathscr{D}(S)$. Последняя оценка показывает, что $(w'(\varphi) - v''(\varphi), x)$ допускает не зависящую от x нижнюю границу. Это возможно только в случае $w'(\varphi) = v''(\varphi)$. Следовательно, $v' - w = u_0$ является постоянной функцией на интервале S. Отсюда и из (1.13) вытекает, что для каждого $u \in W_0$

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle v' - u_0 - u',\ v - u\rangle = \frac{1}{2}(|v(T) - u(T)|^2 - |v(0) - u(0)|^2) = \\ &= (u(0),\ v(0) - v(T)) + \frac{1}{2}(|v(T)|^2 - |v(0)|^2). \end{aligned}$$

Так как при всяком $x \in V$ функция

$$u(t) = \left(t^2 - Tt + \frac{T^2}{6}\right)x$$

принадлежит W_0, то в последнем неравенстве $u(0)$ может быть любым элементом из V. Поэтому это неравенство возможно лишь при $v(0) = v(T)$, и мы получаем для нашей постоянной функции

$$\int_S u_0(t)\,dt = \int_S (v'(t) - w(t))\,dt = v(T) - v(0) = 0;$$

это означает, что $u_0 = 0$ и $v' = w$. Тем самым установлено, что Λ — максимальный монотонный оператор. Лемма доказана.

Замечание 1.6. Принятым в теоремах 1.1—1.3 предположением, что оператор $A + \lambda I$ коэрцитивен либо сильно монотонен, исключается случай $A = 0$. Теоремы о разрешимости задачи Коши и о существовании периодических решений могут быть доказаны и при более общих предположениях относительно A (см. замечания к этой главе). Мы ограничились рассмотренными здесь случаями по двум причинам. Во-первых, доказательства оказываются при этом сравнительно простыми. Во-вторых, именно эти случаи позволяют получить глубокие утверждения о сходимости метода Галёркина.

§ 2. МЕТОД ГАЛЁРКИНА

Как и в § 1, будем использовать сокращенные обозначения

$$X = L^p(S;\ V);\ X^* = L^q(S;\ V^*),$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \qquad W = \{w \mid w \in X,\ w' \in X^*\}.$$

В данном параграфе мы снова предполагаем, что $2 \leqslant p < \infty$.

Перейдем к определению метода Галёркина для задач вида (1.2), соответственно (1.5). Пусть, как и в гл. VI, $\{h_1, h_2, \ldots\}$ обозначает какую-нибудь полную в V, а следовательно, и в H систему линейно независимых элементов, и пусть H_n — линейная оболочка множества $\{h_1, \ldots, h_n\}$, наделенная скалярным произведением, индуцированным из H. Пространство H_n и его сопряженное H_n^* будем считать отождественными между собой. Пусть, далее, $X_n = L^p(S; H_n)$ и $X_n^* = L^q(S;\ H_n)$. Скалярное произведение между X_n^* и X_n мы можем обозначать так же, как и скалярное произведение между X^* и X, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Каждому оператору $D \in (X \to X^*)$ можно поставить в соответствие оператор $D_n \in (X_n \to X_n^*)$ по правилу

$$\langle D_n u, v\rangle = \langle Du, v\rangle \quad \forall v \in X_n. \tag{2.1}$$

Этой возможностью мы воспользуемся, в частности, для операторов A и B, фигурирующих в задачах (1.2) и (1.5).

Пусть $\{a_{0n}\}$ — какая-нибудь сходящаяся в V к a_0 последовательность элементов $a_{0n} \in H_n$. Пусть, далее, $\{a_{1n}\}$ — какая-нибудь сходящаяся в H к a_1 последовательность элементов $a_{1n} \in \in H_n$. Пусть, наконец, $f_n \in X_n^*$ определяется соотношением

$$\langle f_n, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in X_n.$$

Задачам (1.2) и (1.5) отвечают следующие *уравнения Галёркина* ($n = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{gathered} u_n'' + A_n u_n' + B_n u_n = f_n, \\ u_n(0) = a_{0n}, \quad u_n'(0) = a_{1n}, \\ u_n \in C(S;\ H_n), \quad u_n' \in X_n. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. В предположениях теоремы 1.1 задача (2.2) при каждом n имеет точно одно решение $u_n \in C^1(S; H_n)$, обладающее тем свойством, что $u_n'' \in X_n^*$. Последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $C(S; V)$, последовательность $\{u_n'\}$ ограничена в X и в $C(S; H)$ и последовательность $\{Au_n'\}$ ограничена в X^*.

Доказательство. Оператор A_n удовлетворяет по отношению к X_n тем же предположениям, которым удовлетворяет A по отношению к X. Это следует из того, что

$$\langle A_n u, v\rangle = \langle Au, v\rangle \quad \text{для} \quad u, v \in X_n.$$

Если через I_n обозначить (непрерывное) вложение H_n в V и через I_n^* — сопряженный к I_n оператор, то, как нетрудно убедиться,

$$(B_n v)(t) = I_n^* B_0 I_n v(t).$$

Оператор $I_n^* B_0 I_n \in (H_n \to H_n)$ линеен, ограничен, симметричен и положительно определен. Следовательно, B_n удовлетворяет по отношению к X_n тем же предположениям, что и B по отношению к X. Поэтому существование и единственность решения u_n уравнений (2.2) вытекают из теоремы 1.1. Для этого решения имеем $u_n \in C(S; H_n)$, $u_n' \in X_n$ и $u_n'' \in X_n^*$, а значит, $u_n' \in C(S;\ H_n)$.

Из уравнения Галёркина (2.2), беря соответствующее скалярное произведение, получаем

$$\int_0^t \left(u_n''(s) + (Au_n')(s) + (Bu_n)(s),\ u_n'(s)\right) ds = \int_0^t \left(f(s),\ u_n'(s)\right) ds.$$

Следовательно,

$$\int_0^t ((Au'_n)(s) - (A0)(s) + \lambda u'_n(s),\ u'_n(s))\,ds +$$
$$+ \frac{1}{2}|u'_n(t)|^2 + \frac{1}{2}(B_0 u_n(t),\ u_n(t)) = \int_0^t (f(s) - (A0)(s) +$$
$$+ \lambda u'_n(s),\ u'_n(s))\,ds + \frac{1}{2}|a_{1n}|^2 + \frac{1}{2}(B_0 a_{0n},\ a_{0n}).$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла, заключаем прежде всего, что ограничена последовательность $\{u'_n\}$ в $C(S;\ H)$, а раз эта ограниченность уже установлена, то из коэрцитивности $A + \lambda I$ и положительной определенности B_0 получаем ограниченность последовательностей $\{u'_n\}$ в X и $\{u_n\}$ в $C(S;\ V)$. Ограниченность последовательности $\{Au'_n\}$ в X^* вытекает из последнего соотношения и ограниченности в X последовательности $\{u'_n\}$, ввиду следствия 1.2 гл. III. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются предположения теоремы* 1.1. *Обозначим через* u_n *решения уравнений Галёркина* (2.2) *и через* u — *решение задачи* (1.2). *Тогда*

a) $u_n \to u$ *в* $C(S;\ V)$;

b) $u'_n \to u'$ *в* $C(S;\ H)$;

c) $u'_n \rightharpoonup u'$ *в* X;

d) $Au'_n \rightharpoonup Au'$ *в* X^*;

e) $\int_0^t ((Au'_n(s) - (Au')(s),\ u'_n(s) - u'(s))\,ds \to 0 \quad \forall t \in S.$

Замечание 2.1. Существуют классы операторов $A \in (X \to X^*)$, для которых из свойств b)—e) следует сильная сходимость последовательности $\{u'_n\}$ к u' в X (см. замечание 1.4 гл. VI).

Доказательство теоремы 2.1. Согласно лемме 1.5 гл. VI, существует последовательность $\{v'_n\}$, $v'_n \in C^1(S;\ H_n)$, которая сходится в W, а потому и в $C(S;\ H)$ к $u' \in W$. Положим

$$v_n(t) = a_{0n} + \int_0^t v'_n(s)\,ds$$

(в оправдание обозначения v'_n). Тогда

$$\|v_n(t)-u(t)\| = \left\| a_{0n} - a_0 + \int_0^t (v'_n(s)-u'(s))\,ds \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|a_{0n}-a_0\| + K\|v'_n - u'\|_X, \qquad K = \mathrm{const},$$

т. е. последовательность $\{v_n\}$ сходится в $C(S;\ V)$ к u. Далее,

$$\frac{1}{2}\left(|u'_n(t)-v'_n(t)|^2 - |u'_n(0)-v'_n(0)|^2\right) =$$
$$= \int_0^t (u''_n(s)-v''_n(s),\ u'_n(s)-v'_n(s))\,ds =$$
$$= \int_0^t \big(-(Au'_n)(s) - (Bu_n)(s) + (Au')(s) +$$
$$+ (Bu)(s) + u''(s) - v''_n(s),\ u'_n(s)-v'_n(s)\big)\,ds =$$
$$= -\int_0^t \big((Au'_n)(s) - (Au')(s) + \lambda(u'_n(s)-u'(s)),\ u'_n(s)-u'(s)\big)\,ds -$$
$$- \frac{1}{2}(B_0(u_n(t)-u(t)),\ u_n(t)-u(t)) + \frac{1}{2}(B_0(a_{0n}-a_0),\ a_{0n}-a_0) -$$
$$- \int_0^t \big((Au'_n)(s) - (Au')(s) + (Bu_n)(s) - (Bu)(s),\ u'(s)-v'_n(s)\big)\,ds +$$
$$+ \int_0^t (u''(s)-v''_n(s),\ u'_n(s)-v'_n(s))\,ds + \lambda\int_0^t |u'_n(s)-u'(s)|^2\,ds.$$

Отсюда на основании выбора последовательности $\{v_n\}$ и утверждений леммы 2.1 вытекает, что

$$\frac{1}{2}|u'_n(t)-v'_n(t)|^2 + \frac{1}{2}\left(B_0(u_n(t)-u(t)),\ u_n(t)-u(t)\right) +$$
$$+ \int_0^t \big((Au'_n)(s) - (Au')(s) + \lambda(u'_n(s)-u'(s)),\ u'_n(s)-u'(s)\big)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant |a_{1n}-a_1|^2 + |u'(0)-v'_n(0)|^2 + \frac{1}{2}(B_0(a_{0n}-a_0),\ a_{0n}-a_0) +$$
$$+ K\cdot\left(\|u'-v'_n\|_X + \|u''-v''_n\|_{X^*}\right) +$$
$$+ 2\lambda\int_0^t \left(|u'_n(s)-v'_n(s)|^2 + |v'_n(s)-u'(s)|^2\right)ds$$

при некоторой не зависящей от n и t постоянной K. Из этой оценки, используя лемму Гроноулла, прежде всего получаем, что

$$u'_n - v'_n \to 0 \quad \text{в} \quad C(S;\ H),$$

а значит,

$$u'_n \to u' \quad \text{в} \quad C(S;\ H). \tag{2.3}$$

Раз это свойство последовательности $\{u'_n\}$ уже установлено, то из последнего неравенства вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{в} \quad C(S;\ V)$$

и

$$\int_0^t ((Au'_n)(s) - (Au')(s), u'_n(s) - u'(s))\, ds \to 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что оператор B_0 положительно определен.

В силу (2.3) пределом слабо сходящихся в X подпоследовательностей ограниченной в X последовательности $\{u'_n\}$ может быть только u'. Поэтому и последовательность $\{u'_n\}$ слабо сходится в X к u' (см. лемму 5.4 гл. I). На основании уже доказанных свойств сходимости последовательности $\{u_n\}$, для любых $\varphi \in \mathscr{D}(S)$ и $x \in \bigcup\limits_n H_n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_S (Au'_n)(t)\varphi(t)\, dt,\ x\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_S (-u''_n(t) - (Bu_n)(t) + f(t))\varphi(t)\, dt,\ x\right) =$$

$$= \left(\int_S (-u''(t) - (Bu)(t) + f(t))\varphi(t)\, dt,\ x\right) =$$

$$= \left(\int_S (Au')(t)\varphi(t)\, dt,\ x\right).$$

Поскольку последовательность $\{Au'_n\}$ ограничена в X^*, при помощи соответствующего предельного перехода можно показать, что при каждом $x \in V$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_S (Au'_n)(t)\varphi(t)\, dt,\ x\right) = \left(\int_S (Au')(t)\varphi(t)\, dt,\ x\right).$$

Оно означает, что Au' является пределом последовательности $\{Au'_n\}$ в $\mathscr{D}^*(S;\ V^*)$. Следовательно, пределом слабо сходящихся в X^* подпоследовательностей последовательности $\{Au'_n\}$ может быть только Au'. Поэтому и вся последовательность $\{Au'_n\}$ слабо сходится в X^* к Au'. Теорема доказана.

Следующая лемма является подготовительной для теоремы о сходимости метода Галёркина при предположениях теоремы 1.2.

Лемма 2.2. В предположениях теоремы 1.2 задача (2.2) при каждом n имеет точно одно решение $u_n \in C^1(S; H_n)$, обладающее тем свойством, что $u_n'' \in X_n^*$. Последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $C(S; V)$, последовательность $\{u_n'\}$ ограничена в $C(S; H)$ и X, и последовательность $\{Au_n'\}$ ограничена в X^*.

Доказательство. Существование и единственность решения u_n задачи (2.2) следуют из теоремы 1.2, поскольку A_n и B_n удовлетворяют по отношению к X_n тем же предположениям, что и A и B по отношению к X. При этом $u_n \in C(S; H_n)$, $u_n' \in X_n$ и $u_n'' \in X_n^*$, а значит, $u_n' \in C(S; H_n)$.

Интегрированием по частям получаем, что для каждой функции $w \in W$ и каждого $\lambda \geqslant 0$

$$\int_0^t e^{-2\lambda s}(w'(s), w(s))\, ds =$$

$$= \int_0^t 2\lambda e^{-2\lambda s} \cdot \frac{1}{2} |w(s)|^2 ds + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} |w(t)|^2 - \frac{1}{2} |w(0)|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(e^{-2\lambda t} |w(t)|^2 - |w(0)|^2). \tag{2.4}$$

Ниже m будет обозначать постоянную монотонность для $A + \mu I$, а M — постоянную Липшица для B. Пусть опять $R \in (X \to X)$ — оператор, определенный формулой (1.3). Используя оценку (2.4), уравнения Галёркина (2.2), а также формулу (1.6), находим, что для $\lambda \geqslant M^2T/m^2$

$$\frac{1}{2}(e^{-2\lambda t} |u_n'(t)|^2 - |a_{1n}|^2) \leqslant \int_0^t e^{-2\lambda s}(u_n''(s), u_n'(s))\, ds =$$

$$= \int_0^t e^{-2\lambda s}(f(s) - (Au_n')(s) - (Bu_n)(s), u_n'(s))\, ds =$$

$$= \int_0^t e^{-2\lambda s}(-(Au_n')(s) + (A0)(s) - (BRu_n')(s) + (BR0)(s) +$$

$$+ f(s) - (A0)(s) - (BR0)(s) - (Bu_n)(s) + (BRu_n')(s), u_n'(s))\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-2\lambda s}\left\{-\frac{m}{8}\|u_n'(s)\|^2 + \mu |u_n'(s)|^2\right\} ds +$$

$$+ K(\|f - A0 - BR0\|_{X^*}^2 + \|a_0 - a_{0n}\|^2),$$

где K — некоторая не зависящая от n и t постоянная. В силу леммы Гронуолла, из этого неравенства вытекает ограниченность последовательности $\{u'_n\}$ в $C(S; H)$. Раз эта ограниченность уже известна, из той же оценки получаем ограниченность $\{u'_n\}$ в X. Ограниченность последовательности $\{u_n\}$ в $C(S; X)$ следует из оценки

$$\|u_n(t)\| = \left\| a_{0n} + \int_0^t u'_n(s)\,ds \right\| \leqslant \|a_{0n}\| + \int_S \|u'_n(s)\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \|a_{0n}\| + \sqrt{T}\,\|u'_n\|_X.$$

Докажем, наконец, ограниченность последовательности $\{Au'_n\}$ в X^*. В силу уравнения Галёркина (2.2),

$$0 = \langle u''_0 + Au'_n + Bu_n - f,\ u'_n \rangle =$$

$$= \frac{1}{2}(|u'_n(T)|^2 - |a_{1n}|^2) + \langle Au'_n,\ u'_n \rangle + \langle Bu_n - B0,\ u'_n \rangle + \langle B0 - f,\ u'_n \rangle \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}|a_{1n}|^2 + \langle Au'_n,\ u'_n \rangle - M\|u_n\|_X\|u'_n\|_X - \|B0 - f\|_{X^*}\|u'_n\|_X.$$

Отсюда на основании ограниченности последовательностей $\{u'_n\}$ и $\{u_n\}$ в X вытекает, что ограничена последовательность $\{\langle Au'_n + \mu u'_n,\ u'_n \rangle\}$. Согласно следствию 1.2 гл. III, из этого факта и из ограниченности последовательности $\{u'_n\}$ в X следует ограниченность последовательности $\{Au'_n\}$ в X^*. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.2. *Обозначим через* u_n *решения галёркинских уравнений* (2.2) *и через* u — *решение задачи* (1.5). *Тогда*

a) $u_n \to u$ *в* $C(S; V)$;

b) $u'_n \to u'$ *в* $C(S; H)$ *и* X;

c) $Au'_n \rightharpoonup Au'$ *в* X^*.

Доказательство. Как мы уже знаем, для решения u задачи (1.5) выполняются включения $u \in C(S; V)$ и $u' \in W$. Как и при доказательстве теоремы 2.1, выберем для этого решения последовательность $\{v_n\}$, $v_n \in C^2(S; H_n)$, такую, что $v_n \to u$ в $C(S; V)$ и $v'_n \to u'$ в W. Ниже мы используем те же обозначения, что и в доказательстве леммы 2.2. С помощью (2.4), (2.2), (1.6) и утверждений леммы 2.2 получаем, что для $\lambda \geqslant M^2T/m^2$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(e^{-2\lambda t}\,|u_n'(t)-v_n'(t)|^2-|a_{1n}-v_n'(0)|^2\right)\leqslant\\
&\leqslant\int_0^t e^{-2\lambda s}\left(u_n''(s)-v_n''(s),\,u_n'(s)-v_n'(s)\right)ds=\\
&=\int_0^t e^{-2\lambda s}\left(-(Au_n')(s)-(Bu_n)(s)+(Au')(s)+(Bu)(s)+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+u''(s)-v_n''(s),\,u_n'(s)-v_n'(s)\right)ds=\\
&=\int_0^t e^{-2\lambda s}\left(-(Au_n')(s)+(Au')(s)-(BRu_n')(s)+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+(BRu')(s),\,u_n'(s)-u'(s)\right)ds+\\
&\quad+\int_0^t e^{-2\lambda s}\left(-(Au_n')(s)+(Au')(s)-(BRu_n')(s)+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+(BRu')(s),\,u'(s)-v_n'(s)\right)ds+\\
&\quad+\int_0^t e^{-2\lambda s}\left((BRu_n')(s)-(Bu_n)(s)+u''(s)-v_n''(s),\,u_n'(s)-v_n'(s)\right)ds\leqslant\\
&\leqslant\int_0^t e^{-2\lambda s}\Big\{-\frac{m}{4}\|u_n'(s)-u'(s)\|^2+2\mu\left(|u_n'(s)-v_n'(s)|^2+\right.\\
&\left.+|v_n'(s)-u'(s)|^2\right)\Big\}ds+K\left(\|u'-v_n'\|_X+\|a_0-a_{0n}\|+\|u''(s)-v_n''(s)\|_{X^*}\right),
\end{aligned}
$$

где K — некоторая не зависящая от n и t постоянная. Из этой оценки, применяя лемму Гронуолла, прежде всего находим, что

$$u_n'-v_n'\to 0 \quad \text{в} \quad C(S;\,H),$$

а значит,

$$u_n'\to u' \quad \text{в} \quad C(S;\,H).$$

Раз это свойство последовательности $\{u_n'\}$ уже установлено, из последней оценки выводим, что

$$u_n'\to u' \quad \text{в} \quad X.$$

Далее, путем интегрирования получаем

$$
\begin{aligned}
\|u_n(t)-u(t)\|&=\left\|a_{0n}-a_0+\int_0^t (u_n'(s)-u'(s))\,ds\right\|\leqslant\\
&\leqslant\|a_{0n}-a_0\|+\sqrt{T}\,\|u_n'-u'\|_X,
\end{aligned}
$$

т. е.

$$u_n\to u \quad \text{в} \quad C(S;\,V).$$

При принятых предположениях оператор $A + \mu I$, а с ним и оператор A являются деминепрерывными (см. лемму 1.3 гл. III). Поэтому из того, что $u'_n \to u$ в X, следует, что

$$Au'_n \rightharpoonup Au' \quad \text{в} \quad X^*.$$

Теорема доказана.

§ 3. ТЕОРЕМЫ РЕГУЛЯРНОСТИ

Мы сохраняем использовавшиеся в предыдущих параграфах сокращенные обозначения $X = L^p(S; V)$, $X^* = L^q(S; V^*)$ и $W = \{w \mid w \in X,\ w' \in X^*\}$. Как и прежде, предполагается, что $2 \leqslant p < \infty$.

В этом параграфе рассматриваются операторные дифференциальные уравнения вида

$$u'' + Au' + Bu = 0,$$

где операторы $A \in (X \to X^*)$ и $B \in (X \to X^*)$ обладают следующими представлениями:

$$(Av)(t) = A(t)\, v(t) \quad \forall v \in X, \quad \forall t \in S, \tag{3.1}$$

$$(Bv)(t) = B(t)\, v(t) \quad \forall v \in X, \quad \forall t \in S. \tag{3.2}$$

Здесь $\{A(t)\}$, $t \in S$, и $\{B(t)\}$, $t \in S$, — семейства операторов из $(V \to V^*)$. При соответствующих предположениях о зависимости $A(t)$ и $B(t)$ от t будут доказаны некоторые теоремы регулярности, касающиеся зависимости решений u от t, уточняющие результаты § 1.

1. РЕГУЛЯРНОСТЬ ПРИ СПЕЦИАЛЬНОМ ВЫБОРЕ НАЧАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

Теорема 3.1. *Пусть оператор $A \in (X \to X^*)$ обладает представлением* (3.1), *оператор $A + \lambda I \in (X \to X^*)$ при некотором $\lambda \geqslant 0$ радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен и для некоторой определенной на* $[0, \infty)$ *непрерывной неубывающей функции* ρ

$$\begin{gathered} |(A(t)x - A(s)x,\ y)| \leqslant |t - s|\, \rho(|x|)\, |y| \\ \text{при любых } s,\ t \in S \text{ и } x,\ y \in V. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Пусть, далее, $B_0 \in (V \to V^*)$ — линейный ограниченный самосопряженный положительно определенный оператор. Тогда при лю-

бых $a_0, a_1 \in V$ *с* $A(0)a_1 + B_0 a_0 \in H$ *задача*

$$\begin{gathered} u''(t) + A(t)u'(t) + B_0 u(t) = 0 \quad \forall t \in S, \\ u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1, \quad u \in C^1_w(S; V) \cap C^2_w(S; H) \end{gathered} \tag{3.4}$$

имеет точно одно решение.

Доказательство этой теоремы проведем с помощью метода Галёркина. Пусть, как и в § 2, $\{h_1, h_2, \ldots\}$ — какая-нибудь полная в V, а значит и в H, система линейно независимых элементов и H_n — линейная оболочка множества $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Без ограничения общности можно считать, что a_0 и a_1 принадлежат H_2. Положим $a_{0n} = a_0$ и $a_{1n} = a_1$ для $n \geqslant 2$ и ниже будем рассматривать уравнения Галёркина (2.2) только при $n \geqslant 2$. Их можно теперь записать следующим образом:

$$\begin{gathered} (u_n''(t) + A(t)u_n'(t) + B_0 u_n(t), h_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ u_n(0) = a_0, \quad u_n'(0) = a_1. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. Предположения теоремы 3.1 сильнее предположений теоремы 1.1. Поэтому для решений u_n галёркинских уравнений (3.5) справедливы все утверждения теоремы 2.1.

Доказательству теоремы 3.1 предпошлем одну лемму.

Лемма 3.1. При предположениях теоремы 3.1 решение u_n системы галёркинских уравнений (3.5) принадлежит $C^2(S; H_n)$ и последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $C^2(S; H)$ и в $C^1(S; V)$.

Доказательство. Из леммы 2.1 мы уже знаем, что система галёркинских уравнений (3.5) имеет точно одно решение $u_n \in C^1(S; H_n)$ с $u_n'' \in X_n^*$ и что последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $C^1(S; H)$ и в $C(S; V)$. Согласно лемме 2.3 гл. VI, при заданных предположениях операторы $A(t) \in (V \to V^*)$ деминепрерывны. Отсюда и из (3.3) вытекает, как нетрудно видеть, что $(A(t)x, y)$ при фиксированном $y \in V$ непрерывно по $\{t, x\} \in S \times V$. Кроме того, $(B_0 x, y)$ при фиксированном $y \in V$ непрерывно по x. Следовательно, система дифференциальных уравнений (3.5) удовлетворяет предположениям теоремы существования Пеано. Поэтому решение u_n принадлежит $C^2(S; H_n)$. Для доказательства ограниченности последовательности $\{u_n''\}$ в $C(S; H)$ рассмотрим функцию w_n, определенную формулой

$$w_n(t) = u_n'(t+h) - u_n'(t), \quad h > 0.$$

При принятых нами предположениях имеем

$$\frac{1}{2}(|w_n(t)|^2 - |w_n(0)|^2) = \int_0^t (w_n'(s),\ w_n(s))\,ds =$$
$$= \int_0^t (-A(s+h)\,u_n'(s+h) - B_0 u_n(s+h) +$$
$$+ A(s)\,u_n'(s) + B_0 u_n(s),\ w_n(s))\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t (-A(s+h)\,u_n'(s) + A(s)\,u_n'(s) - B_0(u_n(s+h) - u_n(s)) +$$
$$+ \lambda w_n(s),\ w_n(s))\,ds \leqslant \int_0^t \{h\rho(|u_n'(s)|)\,|w_n(s)| + \lambda |w_n(s)|^2\}\,ds -$$
$$- \frac{1}{2}(B_0(u_n(t+h) - u_n(t)),\ u_n(t+h) - u_n(t)) +$$
$$+ \frac{1}{2}(B_0(u_n(h) - a_0),\ u_n(h) - a_0) \leqslant$$
$$\leqslant K \int_0^t (h^2 + |w_n(s)|^2)\,ds - \frac{1}{2}(B_0(u_n(t+h) - u_n(t),\ u_n(t+h) - u_n(t)) +$$
$$+ \frac{1}{2}(B_0(u_n(h) - a_0),\ u_n(h) - a_0)$$

с не зависящей от n и t постоянной K. Разделим это неравенство на h^2 и перейдем к пределу при $h \to 0$. Получим

$$\frac{1}{2}|u_n''(t)|^2 + \frac{1}{2}(B_0 u_n'(t),\ u_n'(t)) \leqslant K \int_0^t (1 + |u_n''(s)|^2)\,ds +$$
$$+ \frac{1}{2}|u_n''(0)|^2 + \frac{1}{2}(B_0 a_1,\ a_1). \qquad (3.6)$$

Применяя лемму Гронуолла, находим

$$|u_n''(t)|^2 \leqslant K_0(|u_n''(0)|^2 + 1), \qquad K_0 = \text{const}. \qquad (3.7)$$

В силу оценки $|u_n''(0) \leqslant |A(0)\,a_1 + B_0 a_0|$, из (3.7) следует ограниченность последовательности $\{u_n''\}$ в $C(S;\ H)$. Так как оператор B_0 положительно определен, из (3,6) вытекает ограниченность последовательности $\{u_n'\}$ в $C(S;\ V)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. 1. Пусть $z \in V^*$ и $\{z_i\}$ — некоторая последовательность из H, сходящаяся в V^* к z. Ввиду ограниченности последовательности $\{u'_n\}$ в $C(S; V)$,

$$|(z, u'_n(t)-u'_m(t))| \leqslant |(z-z_i, u'_n(t)-u'_m(t))| + |(z_i, u'_n(t)-u'_m(t))| \leqslant$$
$$\leqslant K\|z-z_i\|_* + |(z_i, u'_n(t)-u'_m(t))|.$$

Из сходимости последовательности $\{u'_n\}$ в $C(S; H)$ следует, что при подходящем выборе i правая часть этого неравенства для достаточно больших n и m будет как угодно мала независимо от t. Тем самым доказана сходимость последовательности $\{u'_n\}$ в $C_w(S; V)$. Ее пределом может быть только производная u' решения задачи (1.2) (с $f=0$), существующего согласно теореме 1.1. Следовательно, $u' \in C_w(S; V)$.

2. При заданном $t \in S$ из последовательности $\{u''_n(t)\}$ в силу ее ограниченности в H можно выбрать подпоследовательность $\{u''_{n_j}(t)\}$, $j=1, 2, \ldots$, слабо сходящуюся в H к некоторому элементу $y \in H$. Используя монотонность оператора $A(t)+\lambda I \in (V \to V^*)$, находим (см. лемму 2.1 гл. VI), что для этой последовательности и для любого $x \in \bigcup\limits_n H_n$

$$0 \leqslant \lim_{j\to\infty} \left(A(t)x - A(t)u'_{n_j}(t) + \lambda\left(x-u'_{n_j}(t)\right),\ x-u'_{n_j}(t)\right) =$$
$$= \lim_{j\to\infty} \left(A(t)x + u''_{n_j}(t) + B_0u_{n_j}(t) + \lambda\left(x-u'_{n_j}(t)\right),\ x-u'_{n_j}(t)\right) =$$
$$= (A(t)x + y + B_0u(t) + \lambda(x-u'(t)),\ x-u'(t)).$$

По лемме 1.3 гл. III отсюда вытекает, что

$$y = -A(t)u'(t) - B_0u(t).$$

Следовательно, все слабо сходящиеся в H подпоследовательности последовательности $\{u''_{n_j}(t)\}$ сходятся к элементу $-A(t)u'(t)-B_0u(t)$. Отсюда мы заключаем, что и вся последовательность $\{u''_n(t)\}$ слабо сходится в H к $-A(t)u'(t)-B_0u(t)$.

3. Из только что доказанного и ограниченности последовательности $\{u''_n\}$ в $C(S; H)$ следует, что

$$\sup_{t\in S} |A(t)u'(t) + B_0u(t)| < \infty. \tag{3.8}$$

Пусть теперь $t \in S$ произвольно и $\{t_i\}$ — какая-нибудь сходящаяся к t последовательность точек из S. В силу $(3.3)_2$ при любом $x \in V$

$$|(A(t)u'(t_i) - A(t_i)u'(t_i),\ x)| \leqslant |t-t_i|\,\rho(|u'(t_i)|)\,|x|.$$

Поэтому

$$\lim_{i\to\infty} \|A(t)u'(t_i) - A(t_i)u'(t_i)\|_* = 0, \tag{3.9}$$

Ввиду ограниченности последовательности $\{A(t_i)u'(t_i)+B_0u(t_i)\}$ в H (см. (3.8)) существует подпоследовательность $\{A(t_{i_j})u'(t_{i_j})+ B_0u(t_{i_j})\}$, слабо сходящаяся в H к некоторому $y\in H$. Используя соотношение (3.9) и тот факт, что u принадлежит $C(S; V)$, а u' принадлежит $C_w(S; V)$, находим, что при любом $x\in V$

$$0\leqslant \lim_{j\to\infty}\left(A(t)x-A(t)u'(t_{i_j})+\lambda(x-u'(t_{i_j})),\ x-u'(t_{i_j})\right)=$$
$$=\lim_{j\to\infty}\left(A(t)x-A(t_{i_j})u'(t_{i_j})-B_0u(t_{i_j})+B_0u(t_{i_j})+\right.$$
$$\left.+\lambda(x-u'(t_{i_j})),\ x-u'(t_{i_j})\right)=$$
$$=(A(t)x-y+B_0u(t)+\lambda(x-u'(t)),\ x-u'(t)).$$

Отсюда, аналогично тому, как это делалось выше, получаем, что $y=A(t)u'(t)+B_0u(t)$ и

$$A(t_i)u'(t_i)+B_0u(t_i)\rightharpoonup A(t)u'(t)+B_0u(t)\quad \text{в}\quad H. \tag{3.10}$$

4. На основании предыдущих результатов для любого $x\in H$ имеем

$$(u'(t)-a_1,\ x)=\lim_{n\to\infty}(u_n'(t)-a_1,\ x)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^t(u_n''(s),\ x)\,ds=-\int_0^t(A(s)u'(s)+B_0u(s),\ x)\,ds.$$

В силу непрерывности последнего подынтегрального выражения (см. (3.10)), из этого соотношения следует, что u' принадлежит $C_w^1(S; H)$ и

$$u''(t)+A(t)u'(t)+B_0u(t)=0\qquad \forall t\in S.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $p=2$, т. е. $X=L^2(S; V)$. Предположим, что $A\in(X\to X^*)$ обладает представлением* (3.1), *а $B\in(X\to X^*)$ — представлением* (3.2). *Пусть, далее, оператор B липшиц-непрерывен, оператор $A+\mu I$ при некотором $\mu\geqslant 0$ радиально непрерывен и сильно монотонен и для некоторых непре-*

рывных неубывающих функций ρ_A *и* ρ_B

$$\|A(t)x - A(s)x\|_* \leqslant |t-s|\,\rho_A(|x|)(1+\|x\|),$$
$$\|B(t)x - B(s)x\|_* \leqslant |t-s|\,\rho_B(\|x\|) \tag{3.11}$$

при любых $s,\ t \in S$ *и* $x \in V$.

Тогда при любых $a_0 a_1 \in V$ *с* $A(0)a_1 + B(0)a_0 \in H$ *задача*

$$\begin{gathered} u''(t) + A(t)u'(t) + B(t)u(t) = 0 \quad \forall t \in S, \\ u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1, \quad u \in C^1(S;\ V) \cap C^2_w(S;\ H) \end{gathered} \tag{3.12}$$

имеет точно одно решение.

Доказательство теоремы 3.2 проведем, как и доказательство теоремы 3.1, с помощью метода Галёркина. Уравнения Галёркина (2.2) при $n \geqslant 2$ можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} (u_n''(t) + A(t)u_n'(t) + B(t)u_n(t),\ h_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ u_n(0) = a_0, \quad u_n'(0) = a_1 \end{gathered} \tag{3.13}$$

(см. рассуждения на стр. 300)

Замечание 3.2. Предположения теоремы 3.2 сильнее предположений теоремы 1.2. Поэтому для решений u_n галёркинских уравнений (3.13) справедливы все утверждения теоремы 2.2.

Доказательству теоремы 3.2 предпошлем одну лемму.

Лемма 3.2. При предположениях теоремы 3.2 решение u_n системы галёркинских уравнений (3.13) принадлежит $C^2(S; H_n)$ и последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $C^2(S; H)$ и в $C^1(S; V)$.

Доказательство. Из леммы 2.2 мы уже знаем, что система галёркинских уравнений (3.13) имеет точно одно решение $u_n \in$ $\in C^1(S; H_n)$ с $u_n'' \in X_n^*$ и что для последовательности $\{u_n\}$

$$\|u_n\|_{C(S;\ V)} + \|u_n'\|_{C(S;\ H)} + \|u_n'\|_X \leqslant \text{const}. \tag{3.14}$$

Включение $u_n \in C^2(S; H_n)$, как и в случае леммы 3.1, следует из теоремы существования Пеано.

По лемме 3.3 гл. VI, оператор $B(t) \in (V \to V^*)$ при каждом $t \in S$ липшиц-непрерывен с той же самой постоянной Липшица M, что и оператор $B \in (X \to X^*)$. Поэтому для функции w_n, определенной формулой

$$w_n(t) = u_n'(t+h) - u_n'(t), \quad h > 0,$$

имеем (см. лемму 2.2 гл. VI)

$$\frac{1}{2}(|w_n(t)|^2 - |w_n(0)|^2) = \int_0^t (w_n'(s),\ w_n(s))\,ds =$$

$$= \int_0^t (-A(s+h)u_n'(s+h) - B(s+h)u_n(s+h) + $$
$$+ A(s)u_n'(s) + B(s)u_n(s),\ w_n(s))\,ds =$$

$$= \int_0^t (-A(s+h)u_n'(s+h) + A(s+h)u_n'(s) - A(s+h)u_n'(s) + A(s)u_n'(s) -$$
$$- B(s+h)u_n(s+h) + B(s+h)u_n(s) - B(s+h)u_n(s) +$$
$$+ B(s)u_n(s),\ w_n(s))\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \{-m\|w_n(s)\|^2 + \mu|w_n(s)|^2 + h(\rho_A(|u_n'(s)|)(1 + \|u_n'(s)\|) +$$
$$+ \rho_B(\|u_n(s)\|))\|w_n(s)\| + M\|u_n(s+h) - u_n(s)\|\cdot\|w_n(s)\|\}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \{\mu|w_n(s)|^2 + K(h^2 + h^2\|u_n'(s)\|^2 + \|u_n(s+h) - u_n(s)\|^2)\}\,ds$$

с не зависящей от n и t постоянной K. Разделим это неравенство на h^2 и перейдем к пределу при $h \to 0$. Получим

$$\frac{1}{2}(|u_n''(t)|^2 - |u_n''(0)|^2) \leqslant \int_0^t \{\mu|u_n''(s)|^2 + K(1 + 2\|u_n'(s)\|^2)\}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \mu|u_n''(s)|^2\,ds + K\big(T + 2\|u_n'\|_X^2\big).$$

Используя (3.14) и лемму Гронуолла, находим

$$|u_n''(t)| \leqslant K_0(|u_n''(0)| + 1), \qquad K_0 = \mathrm{const}. \tag{3.15}$$

Так как $|u_n''(0)| \leqslant |A(0)a_1 + B(0)a_0|$, то из (3.14) и (3.15) следует ограниченность последовательности $\{u_n\}$ в $C^2(S;\ H)$.

При $t \in S$ оператор $A(t) + \mu I \in (V \to V^*)$ сильно монотонен (см. лемму 2.2 гл. VI). Поэтому

$$m\|u_n'(t)\|^2 \leqslant (A(t)u_n'(t) + \mu u_n'(t) - A(t)0,\ u_n'(t)) =$$

$$= (-u_n''(t) - B(t)u_n(t) + \mu u_n'(t) - A(t)0,\ u_n'(t)) =$$

$$= (-u_n''(t) - B(t)u_n(t) + B(t)0 - B(t)0 + B(0)0 - B(0)0 +$$
$$+ \mu u_n'(t) - A(t)0 + A(0)0 - A(0)0,\ u_n'(t)) \leqslant$$

$$\leqslant (\|u_n''(t)\|_* + M\|u_n(t)\| + T\rho_B(0) + \|B(0)0\|_* + T\rho_A(0) +$$
$$+ \|A(0)0\|_*)\|u_n'(t)\| + \mu|u_n'(t)|^2 \leqslant K(\|u_n'(t)\| + 1)$$

с некоторой независящей от n и t постоянной K. Из этой оценки вытекает ограниченность последовательности $\{u_n'\}$ в $C(S;\, V)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Основываясь на результатах леммы 3.2 и теорем 1.2 и 2.2, включение $u \in C_w^1(S;\, V) \cap C_w^2(S;\, H)$ и равенство

$$u''(t) + A(t)\, u'(t) + B(t)\, u(t) = 0 \qquad \forall t \in S$$

можно доказать так же, как и соответствующие утверждения теоремы 3.1 (требуется лишь незначительная модификация в связи с учетом зависимости оператора $B(t)$ от t). Таким образом, остается только показать, что $u' \in C(S;\, V)$.

На основании уже доказанного, для произвольных $s, t \in S$

$$\begin{aligned} 0 = (u''(t) - u''(s) + A(t)\, u'(t) - A(t)\, u'(s) + A(t)\, u'(s) - A(s)\, u'(s) + \\ + B(t)\, u(t) - B(t)\, u(s) + B(t)\, u(s) - B(s)\, u(s),\ u'(t) - u'(s)) \geqslant \\ \geqslant - K\, |u'(t) - u'(s)| + m\, \|u'(t) - u'(s)\|^2 - \mu\, |u'(t) - u'(s)|^2 - \\ - (|t - s|\, \rho_A(|u'(s)|)(1 + \|u'(s)\|) + M\, \|u(t) - u(s)\| + \\ + |t - s|\, \rho_B(\|u(s)\|))\, \|u'(t) - u'(s)\|. \end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что

$$\lim_{t \to s} \|u'(t) - u'(s)\| = 0,$$

т. е. $u' \in C(S;\, V)$, что и требовалось доказать.

2. РЕГУЛЯРНОСТЬ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВЫБОРЕ НАЧАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

В теоремах 3.1 и 3.2 решающую роль играет предположение, что

$$A(0)\, a_1 + B_0 a_0 \in H, \qquad \text{соответственно} \qquad A(0)\, a_1 + B(0)\, a_0 \in H.$$

В этом пункте мы покажем, что аналогичные теоремы справедливы и в случае произвольных начальных элементов $a_0 \in V$, $a_1 \in H$, если для оператора A, помимо условий теоремы 3.1, соответственно 3.2, выполнено следующее условие:

$$\left.\begin{array}{c} A = D + C; \\ (Du)(t) = D_0 u(t) \quad \text{для} \quad u \in X, \quad t \in S, \\ \text{где } D_0 \in (V \to V^*) \text{ — некоторый монотонный} \\ \text{коэрцитивный потенциальный оператор; опе-} \\ \text{ратор } C \in (X \to L^2(S;\ H)) \text{ переводит ограни-} \\ \text{ченные множества из } X \text{ в ограниченные} \\ \text{множества из } L^2(S;\ H); \\ (Cu)(t) = C(t)v(t), \quad C(t) \in (V \to H), \\ \text{при} \quad u \in X,\ t \in S. \end{array}\right. \tag{3.16}$$

Теорема 3.3. *Пусть операторы A и B удовлетворяют предположениям теоремы* 3.1 *и, кроме того, справедливо условие* (3.16). *Тогда при любых $a_0 \in V$, $a_1 \in H$ задача*

$$\begin{gathered} u''(t) + A(t)u'(t) + B_0 u(t) = 0, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(0) = a_0, \qquad u'(0) = a_1, \qquad u \in C(S;\ V), \\ u' \in C^1_w([\delta,\ T];\ H) \cap C_w([\delta,\ T];\ V) \cap W \qquad \forall \delta \in (0,\ T] \end{gathered} \tag{3.17}$$

имеет точно одно решение.

Теорему 3.3 мы докажем вместе со следующей теоремой.

Теорема 3.4. *Пусть операторы A и B удовлетворяют предположениям теоремы* 3.2 *и, кроме того, выполнено условие* (3.16). *Тогда при любых $a_0 \in V$, $a_1 \in H$, задача*

$$\begin{gathered} u''(t) + A(t)u'(t) + B(t)u(t) = 0, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(0) = a_0, \qquad u'(0) = a_1, \qquad u \in C(S;\ V), \\ u' \in C^1_w([\delta,\ T];\ H) \cap C([\delta,\ T];\ V) \cap W \qquad \forall \delta \in (0,\ T] \end{gathered} \tag{3.18}$$

имеет точно одно решение.

Доказательство теорем 3.3 и 3.4. Мы сведем теоремы 3.3 и 3.4 к теоремам 3.1 и 3.2. Это сведéние оказывается возможным в силу одной априорной оценки для галёркинских приближений u_n, которая основана на предположении (3.16).

Для единообразия обозначений положим в случае теоремы 3.3

$$B(t) = B_0 \quad \text{для} \quad t \in S \quad \text{и} \quad \rho_B(\xi) = 0 \quad \text{для} \quad \xi \geqslant 0.$$

При принятых предположениях галёркинские уравнения (2.2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} (u_n''(t) + A(t)u_n'(t) + B(t)u_n(t),\ h_i) = 0, \qquad i = 1,\ \ldots,\ n, \\ u_n(0) = a_{0n}, \qquad u_n'(0) = a_{1n}. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Решение u_n задачи (3.19) принадлежит $C^2(S; H_n)$. Это доказывается точно так же, как и соответствующее утверждение леммы 3.1.

В ходе дальнейших рассуждений нам понадобится следующая оценка:

$$\int_S \int_0^t (B(s)\, u_n(s),\ s u_n''(s))\, ds\, dt =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{T-h} \int_0^t s\,(B(s)\, u_n(s),\ u_n'(s+h) - u_n'(s))\, ds\, dt =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{T-h} \left(\int_h^{t+h} (s-h)(B(s-h)\, u_n(s-h),\ u_n'(s))\, ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^t s\,(B(s)\, u_n(s),\ u_n'(s))\, ds \right) dt =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{T-h} \int_h^t s\,(B(s-h)\, u_n(s-h) - B(s-h)\, u_n(s) +$$

$$+ B(s-h)\, u_n(s) - B(s)\, u_n(s),\ u_n'(s))\, ds\, dt -$$

$$- \int_S \int_0^t (B(s)\, u_n(s),\ u_n'(s))\, ds\, dt + \int_S t\,(B(t)\, u_n(t),\ u_n'(t))\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{h \downarrow 0} \int_0^{T-h} \int_h^t s \left(-\frac{1}{h} M \| u_n(s-h) - u_n(s) \| - \rho_B(\| u_n(s) \|) \right) \| u_n'(s) \|\, ds\, dt -$$

$$- \int_S \int_0^t (B(s)\, u_n(s),\ u_n'(s))\, ds\, dt + \int_S t\,(B(t)\, u_n(t),\ u_n'(t))\, dt \geqslant -K,$$

где K — некоторая постоянная. Здесь мы воспользовались ограниченностью последовательности $\{u_n\}$ в $C(S; V)$ и ограниченностью последовательности $\{u_n'\}$ в X.

Пусть F — потенциал для D_0. Тогда (см. леммы 4.1 и 4.10 гл. III)

$$F(u_n'(s)) - F(a_{1n}) = \int_0^s (D_0 u_n'(\sigma),\ u_n''(\sigma))\, d\sigma$$

и

$$F(u_n'(s)) - F(0) \leqslant (D_0 u_n'(s),\ u_n'(s)).$$

Кроме того, потенциал F ограничен снизу (см. следствие 4.3 гл. III).

Подставим теперь в галёркинские уравнения (3.19) вместо h_i значение $tu_n''(t)$, принадлежащее H_n. Интегрирование дает

$$0=\int_S\int_0^t (u_n''(s)+D_0u_n'(s)+C(s)u_n'(s)+B(s)u_n(s),\ su_n''(s))\,ds\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_S\int_0^t \Big\{ s\,|u_n''(s)|^2-\int_0^s (D_0u_n'(\sigma),\ u_n''(\sigma))\,d\sigma + t\,(D_0u_n'(s),\ u_n''(s)) -$$

$$-\frac{s}{2}\,|C(s)u_n'(s)|^2-\frac{s}{2}\,|u_n''(s)|^2+(B(s)u_n(s),\ su_n''(s))\Big\}\,ds\,dt.$$

В силу предыдущих рассуждений и предположения об ограниченности оператора C, отсюда вытекает, что

$$0\geqslant \int_S\Big\{\int_0^t \Big(\frac{s}{2}\,|u_n''(s)|^2-F(u_n'(s))+F(a_{1n})\Big)\,ds +$$

$$+t\,(F(u_n'(t))-F(a_{1n}))\Big\}\,dt-K_1\geqslant$$

$$\geqslant\int_S\int_0^t\Big\{\frac{s}{2}\,|u_n''(s)|^2-F(0)-(D_0u_n'(s),\ u_n'(s))\Big\}\,ds\,dt-K_2\geqslant$$

$$\geqslant\int_S\int_0^t\Big\{\frac{s}{2}\,|u_n''(s)|^2-(A(s)u_n'(s),\ u_n'(s))+$$

$$+(C(s)u_n'(s),\ u_n'(s))\Big\}\,ds\,dt-K_3\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_S\int_0^t s\,|u_n''(s)|^2\,ds\,dt-K_4,$$

где $K_1, \ldots, K_4$ — не зависящие от n постоянные. Кроме того,

$$\int_S\int_0^t \|u_n'(s)\|^2\,ds\,dt\leqslant K_5\,\|u_n'\|_X^2\leqslant K_6,$$

причем постоянные K_5 и K_6 также не зависят от n. Из двух последних неравенств при помощи леммы Фату получаем

$$\int_S\int_0^t \varliminf_{n\to\infty}(s\,|u_n''(s)|^2+\|u_n'(s)\|^2)\,ds\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_S\int_0^t(s\,|u_n''(s)|^2+\|u_n'(s)\|^2)\,ds\,dt\leqslant 2K_4+K_6.$$

Отсюда в силу монотонности интеграла $\int\limits_0^t \varliminf\limits_{n\to\infty} (s\,|u_n''(s)|^2 + \|u_n'(s)\|^2)\,ds$ по t следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty} (s\,|u_n''(s)|^2 + \|u_n'(s)\|^2) < \infty \quad \text{при почти всех} \quad s \in S.$$

Поэтому при почти каждом $t \in (0, T]$ последовательность $\{|u_n''(t)| + \|u_n'(t)\|\}$ обладает ограниченной подпоследовательностью.

Пусть $\delta \in (0, T]$. По только что доказанному, существуют такое $t_0 \in (0, \delta]$ и такая последовательность $\{n_j\}$ натуральных чисел, что последовательность $\{|u_{n_j}''(t_0)| + \|u_{n_j}'(t_0)\|\}$ ограничена. Отсюда, как и при доказательстве леммы 3.1, соответственно леммы 3.2 (см. (3.6), соответственно (3.15)), выводим, что последовательность $\{u_{n_j}''\}$ ограничена в $C([t_0, T]; H)$. Установление ограниченности последовательности $\{u_n''\}$ в $C(S; H)$ было единственным местом в доказательствах теорем 3.1 и 3.2, где использовалось предположение $A(0)a_1 + B(0)a_0 \in H$. Если вместо интервала S рассмотреть интервал $[t_0, T]$, то, исходя из ограниченности последовательности $\{u_{n_j}''\}$ в $C([t_0, T]; H)$, можно провести дальнейшие рассуждения так же, как и при доказательстве теорем 3.1 и 3.2, только вместо последовательности $\{u_n\}$ надо всюду работать с подпоследовательностью $\{u_{n_j}\}$. Таким образом получаем утверждения теорем 3.3 и 3.4.

§ 4. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ АППРОКСИМАЦИИ

С точки зрения численного решения операторных дифференциальных уравнений второго порядка представляет интерес тот факт, что их можно аппроксимировать не только при помощи метода Галёркина, но и другими способами. В настоящем параграфе будет указана аппроксимация операторных дифференциальных уравнений второго порядка, которая аналогична аппроксимации эволюционных уравнений, обсуждавшейся в § 3 гл. VI. Имея в виду получение оценок погрешности и практическую реализуемость различных приближенных методов, мы, как и в случае эволюционных уравнений, наложим на входящие в уравнения операторы более сильные ограничения, чем в предыдущих параграфах.

В этом параграфе $X = L^2(S; V)$, $X^* = L^2(S; V^*)$ и $W = \{u \mid u \in X,\ u' \in X^*\}$. Напомним некоторые введенные в § 3 гл. VI обозначения, которыми мы здесь снова воспользуемся:

$$J \text{ — дуализующее отображение } V \text{ в } V^*;$$
$$(\cdot, \ \cdot) \text{ — скалярное произведение в } V;$$
$$J_\varepsilon = I + \varepsilon^2 J \in (V \to V^*);$$
$$(x, y)_\varepsilon = (x, y) + \varepsilon^2 (x, y) = (J_\varepsilon x, y); \qquad |x|_\varepsilon = \sqrt{(x, x)_\varepsilon};$$
$$V_\varepsilon = \{V; (\cdot, \ \cdot)_\varepsilon\}; \qquad X_\varepsilon = L^2(S; V_\varepsilon).$$

Пусть A — оператор Вольтерры из $(X \to X^*)$. По A и $\varepsilon > 0$ определим оператор Вольтерры $A_\varepsilon \in (X_\varepsilon \to X_\varepsilon)$ формулой

$$(A_\varepsilon u)(t) = J_\varepsilon^{-1} (Au)(t). \tag{4.1}$$

Это определение эквивалентно такому:

$$((A_\varepsilon u)(t), x)_\varepsilon = ((Au)(t), x) \qquad \forall x \in V. \tag{4.2}$$

Из (4.2) видно, что оператор A_ε действительно отображает пространство X_ε в себя. Соответственно определяется оператор B_ε.

Наряду с задачей

$$\begin{gathered} u'' + Au' + Bu = 0, \\ u(0) = a_0 \in V, \quad u'(0) = a_1 \in H, \quad u \in C(S; V), \quad u' \in X \end{gathered} \tag{4.3}$$

рассмотрим «аппроксимирующую» задачу

$$\begin{gathered} u_\varepsilon'' + A_\varepsilon u_\varepsilon' + B_\varepsilon u_\varepsilon = 0, \\ u_\varepsilon(0) = a_0, \quad u_\varepsilon'(0) = a_{1\varepsilon}, \quad u_\varepsilon \in C(S; V_\varepsilon), \quad u_\varepsilon' \in X_\varepsilon, \end{gathered} \tag{4.4}$$

причем $a_{1\varepsilon} \in V_\varepsilon$ будет выбрано позднее.

1. АППРОКСИМАЦИЯ БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

Лемма 4.1. Если операторы Вольтерры A и B из $(X \to X^*)$ липшиц-непрерывны, то при любых $a_0, a_{1\varepsilon} \in V_\varepsilon$ задача (4.4) имеет точно одно решение $u_\varepsilon \in C^1(S; V_\varepsilon)$, для которого $u_\varepsilon'' \in X_\varepsilon$.

Доказательство. Операторы A_ε и B_ε представляют собой липшиц-непрерывные вольтерровы операторы из $(X_\varepsilon \to X_\varepsilon)$ (см. доказательство леммы 3.1 гл. VI). Пусть оператор R определен формулой

$$(Rv)(t) = a_0 + \int_0^t v(s)\, ds, \qquad v \in X.$$

Очевидно, R как отображение из X в X, а потому и как отображение из X_ε в X_ε является липшиц-непрерывным.

Если u_ε — решение задачи (4.4), то $v_\varepsilon = u'_\varepsilon$ будет решением задачи

$$v'_\varepsilon + (A_\varepsilon + B_\varepsilon R)\, v_\varepsilon = 0, \qquad v_\varepsilon(0) = a_{1\varepsilon}, \qquad v_\varepsilon \in X_\varepsilon. \tag{4.5}$$

Обратно, $u_\varepsilon = Rv_\varepsilon$ является решением задачи (4.4), если v_ε — решение задачи (4.5). Однозначная разрешимость задачи (4.5) следует из теоремы 1.3 гл. V. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть A и B — липшиц-непрерывные операторы Вольтерры из $(X \to X^*)$, причем оператор $A + \mu I \in (X \to X^*)$ сильно монотонен при некотором $\mu \geqslant 0$. Далее, пусть для каждого $\varepsilon > 0$ элемент $a_{1\varepsilon} \in V_\varepsilon$ выбран так, чтобы*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |a_{1\varepsilon} - a_1| = 0, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \| a_{1\varepsilon} \| = 0. \tag{4.6}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\| u_\varepsilon - u \|_{C(S;\, V)} + \| u'_\varepsilon - u' \|_{C(S;\, H)} + \| u'_\varepsilon - u' \|_X \right) = 0,$$

где через u_ε обозначено решение задачи (4.4) *и через u — однозначно определенное (согласно теореме* 1.2) *решение задачи* (4.3).

Замечание 4.1. По поводу ситуаций, когда реализуется предположение (4.6), см. замечание 3.2 гл. VI.

Доказательству теоремы 4.1 предпошлем одну лемму.

Лемма 4.2. В условиях теоремы 4.1 при подходящем $\delta > 0$

$$\sup_{0 < \varepsilon < \delta} \left(\| u_\varepsilon \|_{C(S;\, V)} + \| u'_\varepsilon \|_{C(S;\, V_\varepsilon)} + \| u'_\varepsilon \|_X \right) < \infty. \tag{4.7}$$

Доказательство. Обозначим через M постоянную Липшица для B и через m — постоянную монотонности для $A + \mu I$. При $\lambda \geqslant M^2T/m^2$ имеем (см. (1.6) и (2.4))

$$\frac{1}{2}\left(e^{-2\lambda t} \, | u'_\varepsilon(t) |_\varepsilon^2 - | a_{1\varepsilon} |_\varepsilon^2 \right) \leqslant \int_0^t e^{-2\lambda s} (u''_\varepsilon(s),\, u'_\varepsilon(s))_\varepsilon \, ds =$$

$$= \int_0^t e^{-2\lambda s} (-(A_\varepsilon u'_\varepsilon)(s) - (B_\varepsilon u_\varepsilon)(s),\, u'_\varepsilon(s))_\varepsilon \, ds =$$

$$= \int_0^t e^{-2\lambda s} (-(Au'_\varepsilon)(s) + (A0)(s) - (A0)(s) - (BRu'_\varepsilon)(s) +$$

$$+ (BR0)(s) - (BR0)(s),\, u'_\varepsilon(s))\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-2\lambda s} \left(-\frac{m}{8} \| u'_\varepsilon(s) \|^2 + \mu \, | u'_\varepsilon(s) |_\varepsilon^2 + \frac{2}{m} \| (A0)(s) + (BR0)(s) \|_*^2 \right) ds.$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\sup_{0<\varepsilon<\delta} |a_{1\varepsilon}|_\varepsilon^2 = \sup_{0<\varepsilon<\delta} (|a_{1\varepsilon}|^2 + \varepsilon^2 \| a_{1\varepsilon} \|^2) < \infty.$$

Это возможно в силу предположения (4.6). Из последней оценки, применяя лемму Гронуолла, выводим сначала, что

$$\sup_{0<\varepsilon<\delta} \| u'_\varepsilon \|_{C(S;\, V_\varepsilon)} < \infty.$$

Отсюда, далее, заключаем, что

$$\sup_{0<\varepsilon<\delta} \| u'_\varepsilon \|_X < \infty.$$

Наконец, путем интегрирования получаем

$$\| u_\varepsilon(t) \| = \left\| a_0 + \int_0^t u'_\varepsilon(s)\, ds \right\| \leqslant \| a_0 \| + \sqrt{T}\, \| u'_\varepsilon \|_X.$$

Следовательно, и

$$\sup_{0<\varepsilon<\delta} \| u_\varepsilon \|_{C(S;\, V)} < \infty.$$

Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. При заданных предположениях имеем для $\lambda \geqslant M^2T/m^2$ и произвольной функции $v \in \check{C}^1(S; V)$ (см. (1.6) и (2.4))

$$\frac{1}{4} e^{-2\lambda t} | u'_\varepsilon(t) - u'(t) |^2 \leqslant \frac{1}{4} e^{-2\lambda t} (| u'_\varepsilon(t) - v(t) | + | v(t) - u'(t) |)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} | u'_\varepsilon(t) - v(t) |_\varepsilon^2 + \frac{1}{2} | v(t) - u'(t) |^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-2\lambda s} (u''_\varepsilon(s) - v'(s),\ u'_\varepsilon(s) - v(s))_\varepsilon\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} | a_{1\varepsilon} - v(0) |_\varepsilon^2 + \frac{1}{2} | v(t) - u'(t) |^2 =$$

$$= - \int_0^t e^{-2\lambda s} ((A_\varepsilon u'_\varepsilon)(s) + (B_\varepsilon u_\varepsilon) s + v'(s),\ u'_\varepsilon(s) - v(s))_\varepsilon\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} | a_{1\varepsilon} - v(0) |_\varepsilon^2 + \frac{1}{2} | v(t) - u'(t) |^2 =$$

$$= - \int_0^t e^{-2\lambda s} \{(((A + BR) u'_\varepsilon)(s) - ((A + BR) u')(s),\ u'_\varepsilon(s) - u'(s)) +$$

$$+ (((A + BR) u'_\varepsilon)(s) - ((A + BR) u')(s),\ u'(s) - v(s)) +$$

$$+ (v'(s) - u''(s),\ u'_\varepsilon(s) - v(s)) + \varepsilon^2 (v'(s),\ u'_\varepsilon(s) - v(s))\}\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}|a_{1\varepsilon}-v(0)|_\varepsilon^2+\frac{1}{2}|v(t)-u'(t)|^2\leqslant$$

$$\leqslant-\int_0^t e^{-2\lambda s}\left(\frac{m}{4}\|u'_\varepsilon(s)-u'(s)\|^2-\mu|u'_\varepsilon(s)-u'(s)|^2\right)ds+$$

$$+\|(A+BR)u'_\varepsilon-(A+BR)u'\|_{X^*}\|u'-v\|_X+$$

$$+\|v'-u''\|_{X^*}\|u'_\varepsilon-v\|_X+\varepsilon^2\|v'\|_X\|u'_\varepsilon-v\|_X+$$

$$+\frac{1}{2}|a_{1\varepsilon}-v(0)|_\varepsilon^2+\frac{1}{2}\|v-u'\|^2_{C(S;\,H)}.$$

Используя лемму Гронуолла, липшиц-непрерывность оператора $A+BR\in(X\to X^*)$ и соотношение (4.7), получаем отсюда, что при $0<\varepsilon<\delta$

$$\|u'_\varepsilon-u'\|^2_{C(S;\,H)}+\|u'_\varepsilon-u'\|^2_X\leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\|u'-v\|_X+\left(\|v'-u''\|_{X^*}+\varepsilon^2\|v'\|_X\right)\left(1+\|v\|_X\right)+\right.$$

$$\left.+|a_{1\varepsilon}-v(0)|^2+\varepsilon^2\|a_{1\varepsilon}-v(0)\|^2+\|v-u'\|^2_{C(S;\,H)}\right\},$$

где K — не зависящая от ε и v постоянная. Переход к пределу при $\varepsilon\to 0$ дает

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left(\|u'_\varepsilon-u'\|^2_{C(S;\,H)}+\|u'_\varepsilon-u'\|^2_X\right)\leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\|u'-v\|_X+\|v'-u''\|_{X^*}(1+\|v\|_X)+|a_1-v(0)|^2+\|v-u'\|^2_{C(S;\,H)}\right\}$$

Но функцию $u'\in W$ можно с любой точностью аппроксимировать функциями $v\in C^1(S;\,V)$ в W, а тем самым и в $C(S;\,H)$ (см. лемму 1.12 гл. IV). Следовательно, при подходящем выборе v правую часть последней оценки можно сделать как угодно малой. Так как левая часть этой оценки не зависит от v, отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\|u'_\varepsilon-u'\|^2_{C(S;\,H)}+\|u'_\varepsilon-u'\|^2_X\right)=0. \tag{4.8}$$

Далее, в силу условия $u_\varepsilon(0)=u(0)=a_0$ из (4.8) вытекает, что

$$\|u_\varepsilon(t)-u(t)\|=\left\|\int_0^t(u'_\varepsilon(s)-u'(s))\,ds\right\|\leqslant\sqrt{T}\,\|u'_\varepsilon-u'\|_X; \tag{4.9}$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon-u\|_{C(S;\,V)}=0.$$

Теорема доказана.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ РЕГУЛЯРНОСТИ

Теорема 4.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.2 *и, кроме того, оператор* $A \in (X \to X^*)$ *является липшиц-непрерывным. Обозначим через* u *однозначно определенное (согласно теореме* 3.2) *решение задачи* (3.12) *при заданных начальных условиях* a_0, $a_1 \in V$, *таких, что* $A(0)a_1 + B(0)a_0 \in H$. *Пусть, далее,* u_ε — *решение задачи* (4.4) *при* $a_{1\varepsilon} = a_1$. *Тогда (в предположении, что* $0 < \varepsilon < 1$)

a) $\|u_\varepsilon - u\|_{C(S;\, V)} \leqslant M_1\varepsilon$;

b) $\|u'_\varepsilon - u'\|_{C(S;\, H)} + \|u'_\varepsilon - u'\|_X \leqslant M_2\varepsilon$;

c) $\|u'_\varepsilon - u'\|_{C(S;\, V)} \leqslant M_3\sqrt{\varepsilon}$;

d) $\|u''_\varepsilon - u''\|_{C(S;\, V^*)} \leqslant M_4\sqrt{\varepsilon}$;

e) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u''_\varepsilon = u''$ *в* $C_w(S;\, H)$,

причем постоянные $M_1, \ldots, M_4$ *можно явно указать.*

Доказательству теоремы 4.2 предпошлем одну лемму.

Лемма 4.3. В условиях теоремы 4.2, $u''_\varepsilon \in C(S;\, V_\varepsilon)$ и

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|u''_\varepsilon\|_{C(S;\, V_\varepsilon)} < \infty. \tag{4.10}$$

Доказательство. По лемме 4.1, $u_\varepsilon \in C^1(S;\, V_\varepsilon)$ и $u''_\varepsilon \in X_\varepsilon$. Включение $u''_\varepsilon \in C(S;\, V_\varepsilon)$ следует из равенства $u''_\varepsilon = -A_\varepsilon u'_\varepsilon - B_\varepsilon u_\varepsilon$ и справедливой при любом $x \in V_\varepsilon$ оценки

$$\begin{aligned}
&(A_\varepsilon(t)u'_\varepsilon(t) + B_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)u'_\varepsilon(s) - B_\varepsilon(s)u_\varepsilon(s),\, x)_\varepsilon = \\
&\quad = (A(t)u'_\varepsilon(t) - A(t)u'_\varepsilon(s) + A(t)u'_\varepsilon(s) - A(s)u'_\varepsilon(s) + \\
&\qquad + B(t)u_\varepsilon(t) - B(t)u_\varepsilon(s) + B(t)u_\varepsilon(s) - B(s)u_\varepsilon(s),\, x) \leqslant \\
&\quad \leqslant \{M_A\|u'_\varepsilon(t) - u'_\varepsilon(s)\| + |t - s|\,\rho_A(|u'_\varepsilon(s)|)(1 + \|u'_\varepsilon(s)\|) + \\
&\qquad + M_B\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\| + |t - s|\,\rho_B(\|u_\varepsilon(s)\|)\}\,|x|_\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

где через M_A и M_B обозначены постоянные Липшица для операторов A и B (см. также лемму 3.3 гл. VI).

Перейдем к доказательству соотношения (4.10). Положим

$$w_\varepsilon(t) = u'_\varepsilon(t + h) - u'_\varepsilon(t), \qquad h > 0.$$

Постоянную монотонности для $A + \mu I$ обозначим, как обычно, через m. Используя (4.7) (с $\delta = \infty$, ввиду того что $a_{1\varepsilon} = a_1$), получаем

$$\frac{1}{2}\left(|w_\varepsilon(t)|_\varepsilon^2 - |w_\varepsilon(0)|_\varepsilon^2\right) = \int_0^t (w'_\varepsilon(s),\ w_\varepsilon(s))_\varepsilon\, ds =$$

$$= \int_0^t (-A(s+h)\, u'_\varepsilon(s+h) + A(s+h) u'_\varepsilon(s) - A(s+h)\, u'_\varepsilon(s) + A(s) u'_\varepsilon(s) -$$

$$- B(s+h)\, u_\varepsilon(s+h) + B(s+h)\, u_\varepsilon(s) - B(s+h)\, u_\varepsilon(s) +$$

$$+ B(s)\, u_\varepsilon(s),\ w_\varepsilon(s))\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \{-m\|w_\varepsilon(s)\|^2 + \mu\,|w_\varepsilon(s)|^2 + h(\rho_A(|u'_\varepsilon(s)|)\,(1+\|u'_\varepsilon(s)\|) +$$

$$+ \rho_B(\|u_\varepsilon(s)\|))\,\|w_\varepsilon(s)\| + M_B\|u_\varepsilon(s+h) - u_\varepsilon(s)\|\cdot\|w_\varepsilon(s)\|\}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \{\mu\,|w_\varepsilon(s)|^2 + K\left(h^2 + h^2\|u'_\varepsilon(s)\|^2 + \|u_\varepsilon(s+h) - u_\varepsilon(s)\|^2\right)\}\, ds,$$

где постоянная K не зависит от ε и t. Деля это неравенство на h^2 и устремляя h к нулю, находим

$$\frac{1}{2}\left(|u''_\varepsilon(t)|_\varepsilon^2 - |u''_\varepsilon(0)|_\varepsilon^2\right) \leqslant \int_0^t \{\mu\,|u''_\varepsilon(s)|^2 + K\left(1 + 2\|u'_\varepsilon(s)\|^2\right)\}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \mu\,|u''_\varepsilon(s)|_\varepsilon^2\, ds + K_1, \quad K_1 = \mathrm{const}.$$

Применение леммы Гронуолла дает

$$|u''_\varepsilon(t)|_\varepsilon \leqslant K_0\left(|u''_\varepsilon(0)|_\varepsilon + 1\right), \qquad K_0 = \mathrm{const}. \tag{4.11}$$

При $x \in V$ имеем

$$(u''_\varepsilon(0),\ x)_\varepsilon = -\,(A_\varepsilon(0)\, a_1 + B_\varepsilon(0)\, a_0,\ x)_\varepsilon =$$

$$= -\,(A(0)\, a_1 + B(0)\, a_0,\ x) \leqslant |A(0)\, a_1 + B(0)\, a_0|\cdot|x|_\varepsilon,$$

поэтому $|u''_\varepsilon(0)|_\varepsilon \leqslant |A(0)\, a_1 + B(0)\, a_0|$. Отсюда и из (4.11) и следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 4.2. При заданных предположениях мы можем воспользоваться результатами теоремы 4.1.

Доказательство утверждения b). Используя (4.10), (1.6) и (2.4), получаем, что при $\lambda \geqslant M_B^2 T/m^2$

$$\frac{1}{2} e^{-2\lambda t} |u'_\varepsilon(t) - u'(t)|^2 \leqslant \int_0^t e^{-2\lambda s} (u''_\varepsilon(s) - u''(s), u'_\varepsilon(s) - u'(s))\, ds =$$

$$= \int_0^t e^{-2\lambda s} (-A_\varepsilon(s) u'_\varepsilon(s) - B_\varepsilon(s) u_\varepsilon(s) + A(s) u'(s) + $$
$$+ B(s) u(s), u'_\varepsilon(s) - u'(s))\, ds =$$

$$= \int_0^t e^{-2\lambda s} \{(-A(s) u'_\varepsilon(s) + A(s) u'(s) - B(s) u_\varepsilon(s) +$$
$$+ B(s) u(s), u'_\varepsilon(s) - u'(s)) +$$
$$+ \varepsilon^2 \left(A_\varepsilon(s) u'_\varepsilon(s) + B_\varepsilon(s) u_\varepsilon(s), u'_\varepsilon(s) - u'(s)\right)\}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-2\lambda s} \Big\{ -\frac{m}{4} \| u'_\varepsilon(s) - u'(s) \|^2 + \mu | u'_\varepsilon(s) - u'(s) |^2 +$$
$$+ \varepsilon \| A_\varepsilon(s) u'_\varepsilon(s) + B_\varepsilon(s) u_\varepsilon(s) \|_\varepsilon \| u'_\varepsilon(s) - u'(s) \| \Big\}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{-2\lambda s} \Big\{ -\frac{m}{8} \| u'_\varepsilon(s) - u'(s) \|^2 + \mu | u'_\varepsilon(s) - u'(s) |^2 + \varepsilon^2 K \Big\}\, ds,$$

где K — не зависящая от ε и t постоянная. Из этой оценки с помощью леммы Гронуолла находим

$$\| u'_\varepsilon - u' \|^2_{C(S;\, H)} + \| u'_\varepsilon - u' \|^2_X \leqslant K_1 \varepsilon^2,$$

чем и установлена справедливость утверждения b). Из доказательств лемм 4.2 и 4.3, а также из только что проведенной оценки вытекает, что постоянную M_2 можно явно указать без предварительного знания решения u.

Доказательство утверждения а). Это утверждение получается из (4.9) и b), если положить $M_1 = M_2 \sqrt{T}$.

Доказательство утверждения с). Вследствие сильной монотонности оператора $A(t) + \mu I \in (V \to V^*)$ (см. лемму 2.2. гл. VI) при $\varepsilon > 0$ имеем

$$0 = (u''_\varepsilon(t) - u''(t) + A_\varepsilon(t) u'_\varepsilon(t) - A(t) u'(t) +$$
$$+ B_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) - B(t) u(t), u'_\varepsilon(t) - u'(t)) =$$
$$= (u''_\varepsilon(t) - u''(t) + A(t) u'_\varepsilon(t) - A(t) u'(t) + B(t) u_\varepsilon(t) -$$
$$- B(t) u(t), u'_\varepsilon(t) - u'(t)) - \varepsilon^2 (A_\varepsilon(t) u'_\varepsilon(t) + B_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t) - u'(t)) \geqslant$$
$$\geqslant -2K \| u'_\varepsilon - u' \|_{C(S;\, H)} + m \| u'_\varepsilon(t) - u'(t) \|^2 - \mu \| u'_\varepsilon - u' \|^2_{C(S;\, H)} -$$
$$- M_B \| u_\varepsilon(t) - u(t) \| \cdot \| u'_\varepsilon(t) - u'(t) \| - \varepsilon K \| u'_\varepsilon(t) - u'(t) \| \cdot$$

Отсюда, используя a) и b), получаем (при $0 < \varepsilon < 1$)

$$\frac{m}{2}\|u_\varepsilon'(t)-u'(t)\|^2 \leqslant 2K\|u_\varepsilon'-u'\|_{C(S;\,H)} + \mu\|u_\varepsilon'-u'\|^2_{C(S;\,H)} + \\ + \frac{1}{2m}(M_B\|u_\varepsilon(t)-u(t)\| + \varepsilon K)^2 \leqslant \\ \leqslant \left(2KM_2 + \mu M_2^2 + \frac{1}{2m}(M_B M_1 + K)^2\right)\varepsilon,$$

чем c) и доказано.

Доказательство утверждения d). При любых $x \in V$ и $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ имеем

$$|(u_\varepsilon''(t)-u_\delta''(t),\ x)| = \\ = |(A_\varepsilon(t)u_\varepsilon'(t) + B_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) - A_\delta(t)u_\delta'(t) - B_\delta(t)u_\delta(t),\ x)| = \\ = |(A(t)u_\varepsilon'(t) - A(t)u_\delta'(t) + B(t)u_\varepsilon(t) - B(t)u_\delta(t),\ x) + \\ + (-\varepsilon^2(A_\varepsilon(t)u_\varepsilon'(t) + B_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t)) + \delta^2(A_\delta(t)u_\delta'(t) + B_\delta(t)u_\delta(t)),\ x)| \leqslant \\ \leqslant (M_A\|u_\varepsilon'-u_\delta'\|_{C(S;\,V)} + M_B\|u_\varepsilon - u_\delta\|_{C(S;\,V)} + (\varepsilon+\delta)K)\|x\|.$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{u_\varepsilon''\}$ сходится в $C(S;\ V^*)$. Так как ее пределом может быть только u'', то $u'' \in C(S;\ V^*)$. Из выведенной выше оценки предельным переходом при $\delta \to 0$ получаем, с учетом предыдущих результатов, что (при $0 < \varepsilon < 1$)

$$\|u_\varepsilon''(t) - u''(t)\|_* \leqslant (M_A M_3 + M_B M_1 + K)\sqrt{\varepsilon}.$$

Тем самым доказано d).

Доказательство утверждения e). Мы уже знаем, что u'' принадлежит $C_w(S;\ H)$ (см. теорему 3.2). Пусть $x \in H$ и $\{x_i\}$ — какая-нибудь последовательность из V, сходящаяся в H к x. Тогда для $\varepsilon > 0$ имеем

$$|(u_\varepsilon''(t)-u''(t),\ x)| \leqslant |(u_\varepsilon''(t)-u''(t),\ x-x_i)| + |(u_\varepsilon''(t)-u''(t),\ x_i)| \leqslant \\ \leqslant 2K|x-x_i| + M_4\sqrt{\varepsilon}\|x_i\|.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от t и при подходящем выборе i становится для достаточно малых ε как угодно малой, чем и установлена справедливость утверждения e). Теорема доказана.

Замечание 4.2. Теоремы § 4 показывают, как можно сводить задачи Коши для операторных дифференциальных уравнений второго порядка с операторами из $(X \to X^*)$ к соответствующим задачам с операторами из $(X_\varepsilon \to X_\varepsilon)$. Для решения этих приближенных задач может быть использован проекционно-итерационный метод, указанный в теореме 4.5 гл. V. Действительно, задача (4.4) эквивалентна, как мы видели, задаче (4.5) с липшиц-непрерывным оператором $A_\varepsilon + B_\varepsilon R \in (X_\varepsilon \to X_\varepsilon)$.

Задачу (4.4) можно записать также следующим образом:

$$w'_\varepsilon + C_\varepsilon w_\varepsilon = 0, \qquad w_\varepsilon(0) = \{a_0, a_{1\varepsilon}\}, \qquad w_\varepsilon \in X_\varepsilon \times X_\varepsilon, \tag{4.12}$$

где оператор C_ε определен правилом

$$C_\varepsilon w_\varepsilon = \{-v_\varepsilon, A_\varepsilon v_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon\} \quad \text{для} \quad w_\varepsilon = \{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}.$$

Оператор C_ε является липшиц-непрерывным отображением пространства $X_\varepsilon \times X_\varepsilon$ в себя. Формулировка (4.12) нашей приближенной задачи еще раз показывает, что эта задача может быть эффективно решена при помощи вышеупомянутого метода, заданного в теореме 4.5 гл. V.

ЗАМЕЧАНИЯ К ГЛ. VII

Первые основополагающие результаты, касающиеся одного определенного класса нелинейных уравнений второго порядка с монотонными операторами, принадлежат Лионсу и Штрауссу [1]. Сходные результаты были получены также Браудером [9]. Первые результаты для некоторого другого класса уравнений второго порядка имеются у Гаевского [4]. Утверждения о существовании периодических решений определенных уравнений второго порядка восходят к Проди [1]. В указанных работах Лионс и Штраусс, равно как и Проди, рассматривают уравнения вида $u''(t) + A(t)u'(t) + B(t)u(t) = f(t)$ с операторами $A(t) \in (W \to W^*)$ и $B(t) \in (V \to V^*)$; при этом $W \cap V$ должно быть плотно в H. Для упрощения доказательств, чтобы иметь возможность получить утверждения о сходимости метода Галёркина, мы ограничились здесь частным случаем $W = V$. Зато в другом отношении, тем что мы рассматриваем уравнения с операторами Вольтерры, мы достигаем обобщения как упомянутых выше результатов, так и результатов Грёгера [1]. Новым является и способ сведéния уравнений второго порядка к эволюционным уравнениям. Утверждения о сильной сходимости метода Галёркина, содержащиеся в теоремах 2.1 и 2.2, в приведенной их форме также являются новыми. Задачу, которой занимались Гринберг, Мак-Кэми и Мизел [1], можно рассматривать как простой пример ситуации, когда реализуются предположения теорем 1.2 и 2.2.

Результаты § 3 представляют собой перенесение на случай уравнений второго порядка соответствующих результатов для эволюционных уравнений. Теорема 3.1 «пересекается» с одним результатом Браудера [9]. Теорема 3.2 впервые доказана Гаевским [4] с помощью аппроксимационного метода, описанного в § 4. При предположениях теоремы 3.2 утверждения о сходимости метода Галёркина, приведенные в теореме 2.2, могут быть уточнены. Соответствующие формулировки имеются у Гаевского и Захариаса [2]. Некоторое обобщение теоремы 3.2 получено Гаевским и Грёгером [1]. Решающая для теорем 3.3 и 3.4 априорная оценка галёркинских приближений основана на одной идее Брезиса [3], примененной им для оценки аппроксимаций Иосиды для эволюционных уравнений.

Обсуждаемая в § 4 аппроксимация операторных дифференциальных уравнений второго порядка предложена Гаевским [4]. Она вполне аналогична указанной в § 3 гл. VI аппроксимации эволюционных уравнений. Теорема 4.1 в приведенной ее форме нова. Теорема 4.2 представляет собой перенос оценок погрешности, данных Гаевским [5] для эволюционных уравнений, на случай дифференциальных уравнений второго порядка.

Относительно дальнейших результатов об операторных дифференциальных уравнениях второго порядка и других методах их исследования см. Лионс [1] и Барбу [1], а по поводу линейных уравнений — Лионс и Мадженес [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ[1])

Адамс, Ароншайн и Смит (R. Adams, N. Aronszajn, K. T. Smith)
[1] Theory of Bessel potentias. II, Ann. Inst. Fourier, 17 (1967), 1—135.

Артоля (M. Artola)
[1] Sur les perturbations des équations d'évolution. Application à des problèmes de retard, Ann. E. N. S., 2 (1969), 137—253.

Асплунд (E. Asplund)
[1] Averaged norms, Israel J. Math., **5** (1967), 227—233.

Барбу (V. Barbu)
[1] Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Bukarest, Leyden, 1976.

Белецкий (A. Bielecki)
[1] Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov, Bull. Acad. Polon. Sci., **4** (1956), 261—268.

Бесов О. В., В. П. Ильин и С. М. Никольский
[1] Интегральные представления функций и теоремы вложения, «Наука», М., 1975.

Бёрлинг и Ливингстон (A. Beurling, A. E. Livingston)
[1] A theorem on duality mappings in Banach spaces, Ark. Mat., **4** (1961), 405—411.

Биттнер (L. Bittner)
[1] Abschätzungen bei Variationsmethoden mit Hilfe von Dualitätssätzen. I, Numer. Math., 11 (1968), 129—143.
[2] Abschätzungen ... II, Numer. Math., **16** (1971), 285—303.

Бохнер (S. Bochner)
[1] Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, Fund. Math., **20** (1933), 262—276.

Браудер (F. E. Browder)
[1] On the spectral theory of elliptic differential operators, Math. Ann., **142** (1961), 22—130.
[2] Nonlinear elliptic boundary value problems, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 862—874.
[3] Nonlinear equations of evolution, Ann. Math., **80** (1964), 485—523.
[4] Nonlinear initial value problems, Ann. Math., **82** (1965), 51—87.
[5] Fixed-point theorems for non-compact mappings in Hilbert space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **53** (1965), 1272—1276.
[6] Existence of periodic solutions for nonlinear equations of evolution, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **53** (1965), 1100—1103.
[7] On a theorem of Beurling and Livingston, Canad. J. Math., **17** (1965), 367—372.

---

[1]) Для переводных книг в круглых скобках указан год выхода оригинального издания. Звездочкой помечены работы, добавленные при переводе. — *Прим. ред.*

[8] Problèmes non linéaires, Presses de l'Univ. de Montreal, 1966
[9] Nonlinear functional analysis and nonlinear partial differential equations, Differ. equat. and their applic., J. Acta Fac. rerum natur. Univ. Comen., 1967, 45—64.
[10] Nonlinear maximal monotone operators in Banach space, Math. Ann., **175** (1968), 89—113.
[11] Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin approximations, Bull. Amer. Math. Soc., **74** (1968), 651—656.
[12] Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type, Contributions to nonlinear fuctional analysis (ed. E. Zarantonello), New York, 1971, 425—500.

Браудер и Хесс (F. E. Browder. P. Hess)
[1] Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces, J. Funct. Anal., **11** (1972), 251—294.

Браудер и Петришин (F. E. Browder, W. V. Petryshyn)
[1] Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space, J. Math. Anal. Appl., **20** (1967), 197—228.

Брезис (H. Brezis)
[1] Équations et inéquations non-linéaires dans les espaces véctoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 115—176.
[2] On some degenerate nonlinear parabolic equations, Proc. Sympos. Pure Math., **18**, AMS, Providence, 1970, 28—38.
[3] Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, «Contributions to nonlinear functional analysis», (ed. E. Zarantonello), New York, 1971, 101—156.
[4] Problèmes unilatéraux, J. Math. pures appl., **51** (1972), 1—168.
[5] Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Amsterdam-London-New York, 1973.

Брезис и Браудер (H. Brezis, F. E. Browder)
[1] Maximal monotone operators in nonreflexive Banach spaces and nonlinear integral equations of Hammerstein type, Bull. Amer. Math. Soc., **81** (1975), 82—88.

Брезис, Крендалл и Пэйзи (H. Brezis, M. G. Crandall, A. Pazy)
[1] Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach spaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 123—144.

Брезис и Пэйзи (H. Brezis, A. Pazy)
[1] Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **9** (1972), 63—74.

Бурбаки (N. Bourbaki)
[1] Функции действительного переменного, «Мир», М., 1965.
[2] Интегрирование, гл. 1—5, «Наука», М., 1967; гл. 6—8, «Наука», М., 1970.

Вайнберг М. М.
[1] Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, М., 1956.
*[2] О некоторых новых принципах в теории нелинейных уравнений, УМН, **15** (1960), № 1.
[3] Вариационный метод и метод монотонных операторов, «Наука», М., 1972.

Вайнберг М. М. и Р. И. Качуровский
[1] К вариационной теории нелинейных операторов и уравнений, ДАН, **129** (1959), № 6, 1199—1202.

Варга (R. Varga)
[1] Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, «Мир», М., 1974 (1971).

Вишик М. И.
[1] Краевые задачи для квазилинейных сильно эллиптических систем

уравнений, имеющих дивергентную форму, ДАН, 138 (1961), № 3, 518—521.
[2] О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков, Матем. сб., **59** (доп.) (1962), 289—325.
[3] Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму, Тр. Моск. матем. о-ва, **12** (1963), 125—184.

Владимиров В. С.
[1] Уравнения математической физики, «Наука», М., 1967.

Гаевский (H. Gajewski)
[1] Iterationsverfahren bei Folgen kontraktiver Operatoren, Mber. Dt. Ak. Wiss., **11** (1969), 818—826.
[2] Zur Approximation nichtlinearer Evolutionsgleichungen durch abstrakte Differentialgleichungen mit Lipschitzsteligen Operatoren, Math. Nachr., **48** (1970), 377—385.
[3] Zur Konvergenz des Galerkin-Verfahrens bei nichtlinearen Evolutionsgleichungen, Math. Nachr., **49** (1971), 261—266.
[4] Über eine Klasse nichtlinearer abstrakter Wellengleichungen im Hilbert-Raum, Math. Nachr., **52** (1972), 371—383.
[5] Über eine Approximationsmethode für nichtlineare Evolutionsgleichungen, Math. Nachr., **54** (1972), 297—307.

Гаевский и Грёгер (H. Gajewski, K. Gröger)
[1] Zur Lösbarkeit einer Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Hilbert-Raum, Math. Nachr., **56** (1973), 111—124.
[2] Ein Iterationsverfahren fur Gleichungen mit einem maximal monotonen Operator und einem stark monotonen Lipschitz-stetigen Operator, Math. Nachr., **69** (1975), 307—317.
[3] Konjugierte Operatoren und a-posteriori-Fehlerabschätzungen, Math. Nachr., **73** (1976), 315—333.

Гаевский и Захариас (H. Gajewski, K. Zacharias)
[1] Zur starken Konvergenz des Galerkin-Verfahrens bei einer Klasse pseudoparabolischer partieller Differentialgleichungen, Math. Nachr., **47** (1970), 365—376.
[2] Zur Konvergenz des Galerkin-Verfahrens bei einer Klasse nichtlinearer abstrakter Wellengleichungen, Math. Nachr., **53** (1972), 291—301.
[3] Über eine Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen im Hilbert-Raum, J. Math. Anal. Appl., **44** (1973), 71—87.
[4] Über eine weitere Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen im Hilbert-Raum, Math. Nachr., **57** (1973), 127—140.

Гаевский и Клуге (H. Gajewski, R. Kluge)
[1] Projektions-Iterationsverfahren und nichtlineare Probleme mit monotonen Operatoren, Mber. Dt. Ak. Wiss., **12** (1970), 98—115.

Гальперн С. А.
[1] Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными, Тр. Моск. матем. о-ва, **9** (1960), 401—423.

Гальярдо (E. Gagliardo)
[1] Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi die funzioni in n variabili, Rend. Sem. Mat. Padova, **27** (1957), 284—304.

Гельфанд И. М. и Г. Е. Шилов
*[1] Обобщенные функции и действия над ними, 2-е изд., Физматгиз, М., 1959.

Годунов А. Н.
*[1] Некоторые свойства дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах, канд. дисс., МГУ, 1973.

Гординг и Лионс (L. Gårding, J. L. Lions)
[1] Functional analysis, Nuovo Cimento, **14**, ser. X (1959), Supplemento, 19—66.

Грёгер (K. Gröger)
[1] Zur Teorie nichtlinearer Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit Gedächtnis in Banach-bzw. Hilbert-Räumen, Math. Nachr., **56** (1973), 161—167.
[2] Zum Galerkin-Verfanhren für Evolutionsgleichungen, Theory of Nonlinear operators, Proceedings of a summer-school, held in October 1972 at Neuendorf (Hiddensee), GDR, Akademie-Verlag, Berlin, 1974, 85—104.
Гринберг, Мак-Кэми и Мизел (J. M. Greenberg, R. C. MacCamy, V. J. Mizel)
[1] On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx}+\lambda u_{xtx}=\rho_0 u_{tt}$. J. Math. Mech., **17** (1968), 707—728.
Данфорд и Шварц (N. Dunford, J. T. Schwartz)
[1] Линейные операторы, т. 1, ИЛ, М., 1962 (1958); т. 2, «Мир», М., 1966 (1963).
Деклу (J. Descloux)
[1] On the heat equation, Math. Z., **113** (1970), 376—382.
Динкуляну (N. Dinculeanu)
[1] Vector measures, Berlin, 1966.
Дубинский Ю. А.
[1] Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка, УМН, **23** (1968), № 1, 45—90.
Дуглас и Дюпон (J. Douglas, T. Dupont)
[1] Galerkin methods for parabolic equations, SIAM J. Numer. Anal., **7** (1970), 575—626.
Дьёдонне (J. Dieudonné)
[1] Основы современного анализа, «Мир», М., 1964 (1960).
Дюво и Лионс (G. Duvaut, J. L. Lions)
[1] Les inéquations en mécanique et en physique, Paris, 1972.
Заанен (A. Zaanen)
[1] Linear analysis, Amsterdam, 1956.
Иосида (K. Yosida)
[1] Функциональный анализ, «Мир», М., 1967 (1965).
Иоффе А. Д. и В. М. Тихомиров
[1] Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, УМН, **23** (1968), № 6, 51—116.
Кальдерон (A. P. Calderon)
[1] Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions, Proc. Sympos. Pure Math., 4, Providence, 1961, 33—49.
Камке (E. Kamke)
[1] Das Lebesgue-Stieltjes-Integral, Leipzig, 1956.
Канторович Л. В. и Г. П. Акилов
[1] Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
Картан (H. Cartan)
[1] Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, «Мир», М., 1971 (1967).
Като (T. Kato)
[1] Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Appl. Math., **17**, AMS, New York, 1965, 50—67.
[2] Nonlinear semi-groups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 508—520.
[3] Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity. II, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 886—889.
Качуровский Р. И.
[1] О монотонных операторах и выпуклых функционалах, УМН, **15** (1960), № 4, 213—215.

[2] Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах, УМН, 23 (1968), № 2, 121—168.

Кёте (G. Köthe)

[1] Topologische lineare Räume. I, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

Клуге (R. Kluge)

[1] Nichtlineare Operatorungleichungen und Extremalaufgaben. Theorie und Näherungsverfahren, Berlin, 1976.

Костюченко А. Г. и Г. И. Эскин

[1] Задачи Коши для уравнений Соболева — Гальперна, Тр. Моск. матем. о-ва, **10** (1961), 273—285.

Красносельский М. А.

[1] Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, М., 1956.

Красносельский М. А. и А. В. Покровский

[1] Виброустойчивость решений дифференциальных уравнений, ДАН, **195** (1970), 544—547.

Крэндалл и Лиггетт (M. G. Crandall, T. M. Liggett)

[1] Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math., **93** (1971), 265—298.

Ладыженская О. А.

[1] Funktionalanalytische Untersuchungen der Navier-Stokesschen Gleichungen, Berlin, 1965.

Ладыженская О. А., В. А. Солонников и Н. Н. Уральцева

[1] Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», М., 1967.

Ладыженская О. А. и Н. Н. Уральцева

[1] Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», М., 1964.

Лакс (P. D. Lax)

[1] On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of the solutions of elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955), 615—653.

Лангенбах (A. Langenbach)

[1] О применении вариационного принципа к некоторым нелинейным вариационным уравнениям, ДАН, **121** (1958), 214—217.

[2] Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizitäts- und Plastizitätstheorie, Wiss. Z. Hymboldt-Univ. Berlin, Math.-Nat. R., **9** (1959/60), 145—164.

[3] Stetig differenzierbare Trajektorien rheologischer Platten, Math. Nachr., **49** (1971), 359—368.

[4] Monotone Potentialoperatoren in Theorie und Anwendung, Berlin, 1975.

Лерэ и Лионс (J. Leray, J. L. Lions)

[1] Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 97—107.

Лионс (J. L. Lions)

[1] Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, «Мир», М., 1972 (1969).

[2] О неравенствах в частных производных, УМН, **26** (1971), № 2, 205—263.

Лионс и Мадженес (J. L. Lions, E. Magenes)

[1] Неоднородные граничные задачи и их приложения, «Мир», М., 1971 (1968).

Лионс и Штраусс (J. L. Lions, W. Strauss)

[1] Some non linear evolution equations, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 43—96.

Люстерник Л. А. и В. И. Соболев
[1] Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1965.
Мадженес (E. Magenes)
[1] Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali, Atti VII Congresso U. M. I., Genova 1963, Ediz. Cremonese, Roma, 1964, 134—197.
Минти (G. J. Minty)
[1] Monotone (non linear) operators in Hilbert space, Duke Math. J., **29** (1962), 341—346.
[2] On a monotonicity method for the solution of non linear equations in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **50** (1963), 1038—1041.
[3] On some aspects of the theory of monotone operators, *в сб.* «Theory and applications of monotone operators», Proc. NATO Advanced Study Inst. (Venice 1968), Gubbio, 1969, 67—82.
Михлин С. Г.
[1] Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, М. — Л., 1952.
[2] Вариационные методы в математической физике, «Наука», М., 1970.
[3] Численная реализация вариационных методов, «Наука», М., 1966.
Моро (J. J. Moreau)
[1] Fonctions convexes en dualité, Multigraph, Séminaires de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Montpellier, 1962.
[2] Proximité et dualité dans un espace Hilbertien, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 273—299.
Морри (C. B. Morrey, Jr.)
[1] Multiple integrals in the calculus of variations, Berlin, 1966
Натансон И. П.
[1] Теория функций вещественной переменной, 3-е изд., «Наука», М., 1974.
Нечас (J. Nečas)
[1] Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Prag, 1967.
Никольский С. М.
[1] Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», М., 1969.
Обэн (J. P. Aubin)
[1] Approximation of elliptic boundary value problems, New York, London, 1972.
Паскали (D. Pascali)
[1] Operatori neliniari, Bukarest, 1974.
Петре (J. Peetre)
[1] Espaces d'interpolation et théorème de Sobolev, Ann. Inst. Fourier, **16** (1966), 279—317.
Петришин (W. V. Petryshyn)
[1] Projection methods in nonlinear numerical functional analysis, J. Math. Mech., **17** (1967), 353—372.
Проди (G. Prodi)
[1] Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde con termine dissipativo non-lineare, Rend. Sem. Mat. Padova, **35** (1965).
Рокафеллар (R. T. Rockafellar)
[1] Local boundedness of nonlinear monotone operators, Michigan Math. J., **16** (1969), 397—407.
[2] On the maximality of sums of nonlinear monotone operators, Trans. Amer. Math. Soc., **149** (1970), 75—88.
Сарантонелло (E. H. Zarantonello)
[1] Solving functional equations by contractive averaging, Tech. Report 160, US-Army Research Center, Madison, Wisconsin, 1960.
Смирнов В. И.
[1] Курс высшей математики, т. 5, Физматгиз, М., 1959.

Соболев С. Л.
[1] Применения функционального анализа к математической физике, Л., 1950.
Стейн (E. M. Stein)
[1] Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, «Мир», М., 1973 (1970).
Тинг (T. W. Ting)
[1] Certain non-steady flows of second-order fluids, Arch. Rat. Mech. Anal., **14** (1963), 1—26.
[2] Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations, J. Math. Soc. Japan, **21** (1969), 440—453.
Трев (F. Trèves)
[1] Topological vector spaces, distributions and kernels, New York-London, 1967.
Трибель (H. Triebel)
[1] Höhere Analysis, Berlin, 1972.
Трусделл (C. Truesdell)
[1] Second-order effects in the mechanics of materials, *в сб.* «Second-order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics" (Ed. M. Reiner, D. Abir), Proc. Inter. Symp. Haifa 1962, Pergamon Press, 1962.
Федерер (H. Federer)
[1] Geometric measure theory, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.
Фенхель (W. Fenchel)
[1] On conjugate convex functions, Canad. J. Math., **1** (1949), 73—77.
Халмош (P. R. Halmos)
[1] Теория меры, ИЛ, М., 1953 (1950).
Хаупт, Ауманн и Паук (O. Haupt, G. Aumann, C. Pauc)
[1] Differential- und Integralrechnung. III, Berlin, 1955.
Хёрмандер (L. Hörmander)
[1] Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965 (1963).
Шварц Л. (L. Schwartz)
[1] Distributions à valeur vectorielles. I, Ann. Inst. Fourier, **7** (1957), 1—141.
[2] Théorie des distributions. I. II, Paris, 1957, 1959.
Шовальтер (R. E. Showalter)
[1] Partial differential equations of Sobolev-Galpern type, Pacific J. Math., **31** (1969), 787—794.
[2] Weak solutions of nonlinear evolution equations of Sobolev-Galpern type, J. Diff. Eqs., **11** (1972), 252—265.
Шовальтер и Тинг (R. E. Schowalter, T. W. Ting)
[1] Pseudo-parabolic partial differential equations, SIAM J. Math. Anal., **1** (1970).
Эдвардс (R. E. Edwards)
[1] Функциональный анализ, «Мир», М., 1969 (1965).
Эклан и Темам (I. Ekeland, R. Temam)
[1] Analyse convexe et problèmes variationneles, Paris-Brüssel-Montreal, 1974.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 948

Х. ГАЕВСКИЙ, К. ГРЕГЕР, К ЗАХАРИАС

Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения

Редактор В. Авербух

Художник Н. П. Фролов Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор Н. Иовлева Корректор Т. Пашковская

Сдано в набор 10.06.77. Подписано к печати 17.03.78.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 1.
Латинская гарнитура. Высокая печать.
10,50 бум. л., 21 усл. печ. л., уч.-изд. л. 20,75.
Тираж 8000 экз. Зак. 674 Цена 1 р. 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.