Г. ГАРДИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

Д. А. РАЙКОВА

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИЙ
МОСКВА 1935 ЛЕНИНГРАД

THE INTEGRATION OF FUNCTIONS OF A SINGLE VARIABLE

by

G. H. HARDY

CAMBRIDG UNIVERSITY PRESS
C. F. CLAY, MANAGER
LONDON: FETTER LANE, E. C.
1916

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Введение

Настоящая книжка посвящена так называемому „неопределенному интегрированию“ или „нахождению функции по заданной производной“. Так как, однако, эти описательные определения чересчур расплывчаты, то, прежде чем итти дальше, нам придется более точно сформулировать сущность нашей проблемы.

Пусть $f(x)$ — вещественная непрерывная функция действительного переменного x. Мы хотим определить функцию y, производной которой является заданная функция $f(x)$, иными словами, решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{1}$$

Уже первый взгляд показывает, что эту проблему можно трактовать различным образом.

Мы можем, во-первых, задаться вопросом, необходимо ли существует такая функция y, т. е. обязательно ли уравнение (1) имеет решение; и если имеет решение, то единственное ли, и если не единственное, то как связаны между собой различные решения. Ответ на эти вопросы дает та часть теории функций действительного переменного, которая занимается „определенным интегралом“. Именно там доказывается, что определенный интеграл

$$y=\int_a^x f(t)\,dt, \tag{2}$$

определяемый как предел известной суммы, представляет собой решение уравнения (1). Решениями уравнения (1) являются также функции

$$y+C, \tag{3}$$

где C — произвольное постоянное, причем все решения этого уравнения могут быть представлены в этой форме.

Все это мы будем принимать за известное. Вопросы, которыми мы будем заниматься в этой книжке, совершенно другой природы. Нас будет интересовать, какова при заданной форме функции $f(x)$ будет форма функции y. Иногда говорят, что проблема неопределенного интегрирования есть проблема „нахождения актуального выражения для y, когда $f(x)$ задана“. Однако эта формулировка неточна. Теория определенных интегралов доставляет не только доказательство существования решения, но и выражение для этого решения, именно выражение в форме предела. Проблема неопределенного интегрирования может быть точно сформулирована лишь, если мы ограничим классы рассматриваемых функций, а также типы выражений, в которые эти функции могут комбинироваться.

Предположим, что $f(x)$ принадлежит к некоторому определенному классу функций $\mathfrak{F}$. Тогда мы можем поставить вопрос, входит ли и y в $\mathfrak{F}$; более обще, может ли функция y быть выражена посредством некоторых простых стандартных операций через функции класса $\mathfrak{F}$. Чтобы далеко не ходить за примером, предположим, что $\mathfrak{F}$ есть класс полиномов с рациональными коэфициентами. Ответ будет тогда, что и y во всех случаях принадлежит к тому же классу.

Степень трудности нашей проблемы будет зависеть от выбора 1) класса функций, 2) стандартного „типа выражений“, в какие могут комбинироваться функции этого класса. В настоящей книжке мы примем за класс $\mathfrak{F}$ класс *элементарных функций*, точно определяемый в следующем параграфе; допустимыми комбинациями их мы будем считать *явные выражения в конечном виде*, т. е. формулы, не содержащие перехода к пределу.

Несколько предварительных замечаний. Предмет настоящей книжки хотя и составляет главу „интегрального исчисления“[1], однако совершенно не зависит от какой бы то ни было теории интегрирования в собственном смысле.

Уравнение

$$y=\int f(x)\,dx \tag{4}$$

и ему подобные надлежит рассматривать лишь как другой способ написания уравнения (1); знак интеграла употребляется здесь исклю-

---

[1]) Эйлер, автор первого систематического изложения „интегрального исчисления“, в определении последнего фактически отождествляет его с теорией диференциальных уравнений: calculus integralis est methodus, ex data differentialium relatione inveniendi relationem ipsarum quantitatum (*Institutiones calculi integralis*, стр. 1). [„Интегральное исчисление есть метод определения из заданных соотношений между диференциалами соотношений между самими количествами“.] Наши замечания непосредственно относятся лишь к специальному уравнению (1). Однако все их можно обобщить так, чтобы они были применимы и к общей теории диференциальных уравнений.

чительно из соображений технического удобства и может быть совершенно элиминирован без существенного изменения в ходе рассуждений.

Переменная x, вообще говоря, предполагается принимающей комплексные значения. Однако все дальнейшее будет понятно и читателю, незнакомому с теорией аналитических функций и рассматривающему x как действительное переменное, а встречающиеся функции от x как действительные или комплексные функции от действительного переменного.

Мы будем иметь дело лишь с функциями, регулярными всюду за исключением некоторых частных значений x. Эти значения x мы просто не будем принимать в расчет. Так, справедливости уравнения

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

нисколько не помешает тот факт, что $\frac{1}{x}$ и $\ln x$ имеют $x=0$ точкой бесконечности.

II. Элементарные функции и их классификация

Класс *элементарных функций* содержит:

1) рациональные функции;
2) алгебраические функции, явные и неявные;
3) показательную функцию e^x;
4) логарифмическую функцию $\ln x$;
5) все функции, получающиеся комбинированием функциональных операций четырех перечисленных классов в конечном числе.

Приведем несколько примеров и замечаний в пояснение этого определения.

1. *Рациональная функция* получается применением к переменной x конечной комбинации элементарных действий сложения, умножения и деления.

В элементарной алгебре доказывается, что любая рациональная функция от x может быть представлена в форме:

$$f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n},$$

где m и n — целые положительные числа, все a и b — постоянные, и, кроме того, числитель и знаменатель не имеют общих множителей. Эту форму мы будем считать стандартной формой представления рациональной функции. Заметим еще, что коэфициенты a и b могут быть совершенно произвольными комплексными числами — не обязательно рациональными или алгебраическими [1]) или, скажем, только действительными. Так,

$$\frac{x^2+x+i\sqrt{2}}{x\sqrt{2}-e}$$

есть рациональная функция.

2. *Явной алгебраической функцией* называется всякая функция, полученная применением конечной комбинации перных четырех действий и операции извлечения корней. Так,

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1-x}},\quad \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},\quad \left(\frac{x^2+x+i\sqrt{2}}{x\sqrt{2}-e}\right)^{\frac{2}{3}}$$

суть явные алгебраические функции. То же спранедлино и для $x^{\frac{m}{n}}$ (т. е. $\sqrt[n]{x^m}$) при любых целых значениях m и n. Напротив,

$$x^{\sqrt{2}},\ x^{1+i}$$

вовсе не являются алгебраическими функциями, а суть функции трансцендентные, ибо иррациональные и комплексные степени определяются посредством показательных и логарифмических функций.

Всякая явная алгебраическая функция от x удовлетворяет уравнению вида:

$$P_0y^n+P_1y^{n-1}+\ldots+P_n=0,$$

где коэфициенты суть полиномы от x. Так, например, функция

$$y=\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

удовлетворяет уравнению

$$y^4-(4y^2+4y+1)x=0.$$

Обратное заключение, вообще говоря, не верно, так как доказано, что корни уравнений степени выше четвертой, вообще говоря,

---

[1]) Алгебраическим числом называется корень всякого алгебраического уравнения с целыми коэфициентами. Как известно, существуют числа, не являющиеся корнями никакого уравнения подобного типа (например e и π). См. *Ф. Клейн*, Элементарная математика с точки зрения высшей, стр. 352—373.

не могут быть представлены в виде явных алгебраических функций от коэфициентов этих уравнений. Простым примером может служить уравнение

$$y^5 - y - x = 0.$$

Таким образом мы приходим к рассмотрению более общего класса *неявных алгебраических функций*, включающего явные как частный случай.

3. *Алгебраической функцией* от x называется функция от x, удовлетворяющая уравнению

$$P_0 y^n + P_1 y^{n-1} + \ldots + P_n = 0, \tag{1}$$

где в качестве коэфициентов стоят полиномы от x.

Обозначим полином от x и y, стоящий в левой части уравнения (1), через $P(x, y)$. Возможны два случая: либо этот полином можно представить в виде произведения двух полиномов того же типа, не приводящихся к постоянной, либо этого сделать нельзя. В первом случае $P(x, y)$ называется *приводимым*, во втором — *неприводимым*. Так,

$$y^4 - x^2 = (y^2 + x)(y^2 - x)$$

есть приводимый полином, тогда как оба полинома $y^2 + x$ и $y^2 - x$ уже неприводимы.

Уравнение (1) называется приводимым или неприводимым в зависимости от того, приводима или неприводима его левая часть. Приводимое уравнение можно, очевидно, всегда заменить несколькими неприводимыми. Поэтому мы во всем дальнейшем будем предполагать, что уравнение (1) неприводимо.

Алгебраическая функция от x является регулярной за исключением конечного числа точек — ее *полюсов* и *точек ветвления*. Пусть D — некоторая замкнутая односвязная область в плоскости x, не содержащая точек ветвления. Тогда существует n и только n различных функций, однозначных в D и удовлетворяющих уравнению (1). Эти n функций называются *корнями* уравнения (1) в области D. Так, представляя x в форме

$$x = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

где $-\pi < \theta \leqslant \pi$, получаем, что корнями уравнения

$$y^2 - x = 0$$

в области

$$0<r_1\leqslant r\leqslant r_2,\quad -\pi<-\pi+\delta\leqslant\theta\leqslant\pi-\delta<\pi$$

будут $\sqrt{x}$ и $-\sqrt{x}$, где

$$\sqrt{x}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{1}{2}\theta+i\sin\frac{1}{2}\theta\right).$$

Соотношения между различными корнями уравнения (1) играют большую роль в теории функций[1]). Для наших настоящих целей потребуются лишь следующие два из них.

1) Симметрические полиномы от корней $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (1) являются рациональными функциями от x.

2) Каждый симметрический полином от $y_2, y_3, \ldots, y_n$ может быть представлен в виде полинома по степеням y_1, имеющего коэфициентами рациональные функции от x.

Первое предложение непосредственно вытекает из уравнений

$$\sum y_1y_2\ldots y_s=(-1)^s\left(\frac{P_{n-s}}{P_0}\right)\quad(s=1,\,2,\ldots,n).$$

Для доказательства второго заметим, что

$$\sum_{2,\,3,\,\ldots} y_2y_3\ldots y_s=\sum_{1,\,2,\,\ldots} y_1y_2\ldots y_{s-1}-y_1\sum_{2,\,3,\,\ldots} y_2y_3\ldots y_{s-1},$$

так что из справедливости теоремы для $\sum y_2y_3\ldots y_{s-1}$ вытекает ее справедливость для $\sum y_2y_3\ldots y_s$. Но она верна для $\sum y_2$, как показывает тождество

$$y_2+y_3+\ldots+y_n=(y_1+y_2+\ldots+y_n)-y_1.$$

Таким образом она верна для $\sum y_2y_3\ldots y_s$ и значит для любого симметрического полинома от $y_2, y_3,\ldots,y_n$.

4. Элементарные функции, не являющиеся рациональными или алгебраическими, называются *элементарными трансцендентными функциями* или элементарными трансцендентностями. В их число входят все остальные функции, обычно встречающиеся в элементарном анализе.

Тригонометрические и гиперболические функции, как прямые, так и обратные, могут быть выражены с помощью известных

---

[1]) См., например, *Appell et Goursat,* Théorie des fonctions algébriques.

формул элементарной тригонометрии через показательную функцию и логарифмы. Так, например:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right), \qquad \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Поэтому нет никакой необходимости выделять для них специальное место в нашем определении.

Элементарные трансцендентности могут быть в свою очередь подвергнуты дальнейшей классификации. Такая классификация впервые была введена Лиувиллем[1]). Согласно Лиувиллю, функция называется трансцендентной *первого порядка*, если под знаками потенцирования или логарифмирования, входящими в определяющую ее формулу, стоят лишь рациональные или алгебраические функции. Например, функции

$$xe^{-x^2}, \quad e^{x^2} + e^x \sqrt{\ln x}$$

будут первого порядка; первого же порядка будет и функция

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1+x^2}},$$

где y определяется из уравнения

$$y^5 - y - x = 0,$$

а также функция y, определяемая уравнением

$$y^5 - y - e^x \ln x = 0.$$

Далее элементарная трансцендентность будет *второго порядка*, если она определяется формулой, в которой операции потенцирования или логарифмирования подвергаются, наряду с рациональными и алгебраическими функциями, также и трансцендентности первого порядка. В этот класс входят многие чрезвычайно важные и интересные функции, простейшими из которых являются

$$e^{e^x}, \quad \ln \ln x.$$

1) „Mémoire sur la classification des transcendantes, et sur L'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie éxplicite des coefficients“. *Journal de mathématiques* sér. 1, t. 2, 1837, стр. 56—104; „Suite du mémoire...“, *там же*, t. 3, 1838, стр. 523—546.

Он включает также иррациональные и комплексные степени x, ибо, например,

$$x^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\ln x}, \quad x^{1+i}=e^{(1+i)\ln x};$$

к нему же принадлежат логарифмы тригонометрических функций, а также функция

$$x^x=e^{x\ln x}.$$

Конечно, в определении трансцендентностей второго порядка предполагается, что рассматриваемая функция не может быть представлена в виде трансцендентности первого порядка, а также рациональной или алгебраической функции. Функция

$$e^{\ln R(x)},$$

где $R(x)$ — рациональная функция, не является трансцендентностью второго порядка, ибо представляет собой просто $R(x)$.

Ясно, что этим путем мы можем определить трансцендентные функции всех целых порядков. Так,

$$\ln\ln\ln x, \quad \ln\ln\ln\ln x, \ldots$$

суть трансцендентные функции порядка третьего, четвертого и т. д.

Конечно, подобной же классификации могут быть и действительно были подвергнуты и алгебраические функции. Так, мы можем сказать, что

$$\sqrt{x}, \sqrt{x+\sqrt{x}} \quad \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \ldots$$

суть алгебраические функции первого, второго, третьего, ... порядков. Однако наличие общей теории алгебраических уравнений, а значит и неявных алгебраических функций, лишает эту классификацию большей части ее значения. Подобной общей теории элементарных трансцендентных уравнений не существует [1]), и поэтому мы не будем причислять к „элементарным“ функции, определенные трансцендентными уравнениями такими, как

$$y=x\ln y,$$

[1]) Естественным обобщением теории алгебраических уравнений служат некоторые отделы теории дифереицнальиых уравиений. См. *Königsberger*, Bemerkungen zu Liouville's Classificierung der Transcendenten, *Math. Annalen*, Bd. 28, стр. 483–492, 1886.

но не могущие (как доказано Лиувиллем для приведенного уравнения) быть представленными в виде явного выражения с конечным числом членов.

5. Изложенная выше классификация элементарных трансцендентных функций основывается на следующих теоремах:

a) e^x не является алгебраической функцией от x;

b) $\ln x$ не является алгебраической функцией от x;

c) $\ln x$ не может быть выражен с помощью конечной комбинации знаков потенцирования и явных или неявных алгебраических операций [1]);

d) трансцендентные функции первого, второго, третьего, ... порядков действительно существуют.

Доказательства первых двух теорем будут даны ниже; однако вследствие ограниченности места мы не можем воспроизвести во всех подробностях доказательства третьей и четвертой. Лиувилль дал интересные обобщения некоторых из этих теорем: он доказал, например, что никакое уравнение вида

$$Ae^{\alpha p} + Be^{\beta p} + \ldots + Re^{\rho p} = S,$$

где p, A, B, ..., R, S — алгебраические функции от x, а α, β, ..., ρ — отличные друг от друга постоянные числа, не может тождественно удовлетворяться.

III. Интегрирования элементарных функций. Перечень основных результатов

В последующем мы будем заниматься исключительно проблемой интегрирования элементарных функций. Мы попытаемся дать возможно более полное, насколько это допускает имеющееся в нашем распоряжении место, изложение результатов, достигнутых математиками в решении следующих двух проблем:

1) *если $f(x)$ — элементарная функция, то как определить, является ли и ее интеграл также элементарной функцией?*

2) *если интеграл является элементарной функцией, то как найти его?*

Было бы неосновательно требовать полного ответа на эти вопросы. Можно считать задачу выполненной, если удастся дать

---

[1]) Например $\ln x$ не может быть представлен в виде e^y, где y — алгебраическая функция от x.

читателю достаточно ясное представление о методах решения поставленных проблем и внушить ему уверенность в том, что во всех практически важных частных случаях решение может быть доведено до конца.

Предварительно будет нелишне дать сводку главнейших результатов.

1. Интеграл от рациональной функции (гл. IV) *всегда* является элементарной функцией. Он либо рационален, либо представляет собой сумму рациональной функции и конечного числа логарифмов от рациональных функций с постоянными коэфициентами перед знаком логарифма (гл. IV, § 1).

Если рассматривать корни алгебраических уравнений как известные, то такой интеграл всегда может быть представлен в законченном виде. Однако поскольку корни этих уравнений, вообще говоря, не допускают явного выражения в конечном виде, то и интеграл вообще невозможно представить в абсолютно явной форме (гл. IV, § 2, 3).

С помощью конечного числа элементарных операций сложения, умножения и деления всегда можно определить, является ли интеграл рациональным или нет. Если он рационален, то с помощью указанных операций он может быть вычислен, если же он не рационален, то может быть найдена его рациональная часть (гл. IV, § 4, 5).

Таким образом можно сказать, что в случае рациональных функций проблема неопределенного интегрирования допускает полное решение; действительно, остающаяся еще трудность, связанная с явным решением алгебраических уравнений, не может быть устранена не вследствие несовершенства наших знаний, а вследствие определенно доказанной невозможности такого явного решения в общем случае (гл. IV, § 6).

2. Интеграл от алгебраической функции (гл. V), явной или неявной, может быть как элементарным, так и неэлементарным.

Если y — алгебраическая функция от x, то интеграл $\int y\,dx$ или, более обще,

$$\int R(x, y)\,dx,$$

где R — рациональная функция, в случае если он элементарен, будет либо алгебраической функцией, либо суммой алгебраической функции и конечного числа логарифмов от алгебраических функций с постоянными коэфициентами перед знаком логарифма. При этом все входящие в это выражение алгебраические функции являются *рациональными функциями от x и y* (гл. V, § 11—14, 18).

Эти теоремы полностью подтверждают общий принцип, сформулированный Лапласом[1]: *„l'intégrale d'une fonction différentielle (algébrique) ne peut contenir d'autres quantités radicaux que celles qui entrent dan cette fonction"*. [„Интеграл от алгебраической функции не может содержать радикалов, не входящих в эту же самую функцию"], — и, можем мы прибавить, вовсе не может содержать показательных функций. Так, невозможно, чтобы интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

содержал e^x или $\sqrt{1-x}$; вхождение этих функций в интеграл было бы лишь кажущимся, и их можно было бы исключить еще до диференцирования. Принцип Лапласа основывается по существу на том факте, что *при диференцировании показательные функции и алгебраические иррациональности не уничтожаются*. В этом нетрудно убедиться на рассмотрении нескольких частных примеров, однако дать строгое доказательство, — конечно, совсем другое дело. Мы можем прибавить, что и логарифмы не уничтожаются при диференцировании, за исключением того случая, когда они входят в простой форме

$$A \ln \Phi(x),$$

где A — постоянная; именно поэтому логарифмы могут входить в интегралы от рациональных или алгебраических функций лишь в этой форме.

Таким образом мы имеем общие сведения о форме интеграла от алгебраической функции y в случае, если он представляет собой элементарную функцию. Имеет ли последнее место или нет, конечно, зависит от природы уравнения $f(x, y) = 0$, определяющего y. Если определяемая этим уравнением кривая в плоскости x, y является *уникурсальной*, т. е. обладает максимальным количеством двойных точек, какое может иметь кривая данной степени, и, значит, имеет *жанр* нуль, то x и y могут быть одновременно выражены в виде рациональных функций от третьего переменного t, и после подстановки мы получим интеграл от рациональной функции (гл. V, § 2, 7—9). Следовательно, в этом случае интеграл будет всегда элементарной функцией. Но это условие, хотя и достаточно, не является необходимым. Если кривая $f(x, y) = 0$ не уникурсальна, то, вообще говоря, интеграл уже будет не элементарной функцией, но некоторой новой трансцендентностью, и эти трансцендентности можно

[1]) Théorie analytique des probabilit'es, стр. 7.

классифицировать в соответствии с жанром кривой. Если, например, жанр равен единице, то мы будем, вообще говоря, иметь дело с новыми трансцендентными функциями, известными под именем *эллиптических интегралов*, отличающихся тем, что они могут быть преобразованы в интегралы, не содержащие никаких других иррациональностей, кроме квадратного корня из полинома третьей или четвертой степени (гл. V, § 20). Однако в бесчисленном множестве случаев интеграл может быть выражен через алгебраические функции и логарифмы. Аналогично, интегралы, соответствующие кривым жанра, превышающего единицу, в бесчисленном множестве случаев приводятся в действительности к эллиптическим интегралам. Эти особые случаи являлись предметом многих чрезвычайно интересных исследований, однако и до сих пор нет еще сколько-нибудь общего метода, с помощью которого можно было бы всегда, путем конечного числа операций, решить, является ли заданный интеграл в действительности элементарным, или эллиптическим, или принадлежит к трансцендентностям более высокого порядка.

Если кривая $f(x, y) = 0$ уникурсальна, то интегрирование может быть выполнено до конца точно в том же смысле, как и в случае интегрирования рациональных функций. В частности, если интеграл является *алгебраической* функцией, то он всегда может быть вычислен посредством легко выполнимых элементарных операций. Более обще можно показать, что посредством указанных операций всегда возможно определить, является ли интеграл от данной алгебраической функции сам алгебраическим и, если он алгебраический, вычислить его. Таким образом, хотя общая проблема определить, является ли данный интеграл элементарным, и, если он элементарен, вычислить его и не решена, однако в том частном случае, когда жанр кривой $f(x, y) = 0$ равен единице, мы обладаем столь же полным решением, как и в случае интегрирования рациональных функций.

3. Теория интегрирования трансцендентных функций (гл. VI), естественно, гораздо менее полна, и число классов этих функций, для которых существуют общие методы интегрирования, очень невелико. Однако эти несколько классов имеют чрезвычайно большое значение в приложениях (гл. VI, § 2, 3).

Существует общая теорема о форме, какую имеет интеграл от трансцендентной функции, в случае если он элементарен, совершенно аналогичная уже упомянутым теоремам для рациональных и алгебраических функций. Общая формулировка приведена в гл. VI, § 5. Согласно этой теореме, например, интеграл от рациональной функции от x, e^x и $\ln x$ является либо также рациональной функцией от x, e^x и $\ln x$, либо же суммой такой рациональной функции и конечного числа логарифмов от подобных функций, с постоянными коэфициентами перед знаком логарифма. Из этой общей теоремы можно вывести ряд более специальных результатов, касающихся интегралов более частной формы, таких, как

$$\int y e^x\,dx,\quad \int y \ln x\,dx,$$

где y — алгебраическая функция от x (гл. VI; § 4, 6).

IV. Интегрирование рациональных функций

1. В курсах алгебры[1]) доказывается, что всякий полином

$$Q(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$$

может быть представлен в форме:

$$b_0 (x - a_1)^{n_1} (x - a_2)^{n_2} \ldots (x - a_r)^{n_r},$$

где показатели $n_1, n_2, \ldots, n_r$ — целые положительные числа с суммой n и $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — некоторые постоянные, вещественные или комплексные числа. Далее, там доказывается, что всякая рациональная функция $R(x)$ с знаменателем $Q(x)$ может быть представлена в форме:

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p +$$
$$+ \sum_{s=1}^{r} \left\{ \frac{\beta_{s,1}}{x - a_s} + \frac{\beta_{s,2}}{(x - a_s)^2} + \ldots + \frac{\beta_{s,n_s}}{(x - a_s)^{n_s}} \right\},$$

где $A_0, A_1, \ldots, \beta_{s,1}, \ldots$ — все постоянные. Почленное интегрирование дает:

$$\int R(x)\,dx = A_0 \frac{x^{p+1}}{p+1} + A_1 \frac{x^p}{p} + \ldots + A_p x + C +$$
$$+ \sum_{s=1}^{r} \left\{ \beta_{s,1} \ln (x - a_s) - \frac{\beta_{s,2}}{x - a_s} - \ldots - \frac{\beta_{s,n_s}}{(n_s - 1)(x - a_s)^{n_s - 1}} \right\}.$$

---

[1]) См., например, *А. К. Сушкевич*, Основы высшей алгебры, стр. 100—114, а также 91—94, ГТТИ, 1932.

Отсюда заключаем, что *интеграл от рациональной функции представляет собой элементарную функцию, являющуюся либо рациональной, либо же суммой рациональной функции и конечного числа логарифмов от рациональных функций с постоянными коэфициентами перед знаком логарифма.* В частности, интеграл будет рациональным, если все $\beta_{s,1}$ равны нулю; условие это, очевидно, необходимо и достаточно. Необходимым, однако недостаточным, условием является отсутствие в $Q(x)$ простых корней.

Интеграл от рациональной функции общего вида можно представить в очень простой и элегантной форме с помощью символов диференцирования. Примем для простоты, что $P(x)$ меньшей степени, чем $Q(x)$; этого, конечно, можно всегда добиться, производя деление и вычитая из $R(x)$ неполное частное. Тогда

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} =$$

$$= \frac{1}{(n_1-1)!\,(n_2-1)!\ldots(n_r-1)!}\,\frac{\partial^{n-r}}{\partial\alpha_1^{n_1-1}\,\partial\alpha_2^{n_2-1}\ldots\partial\alpha_r^{n_r-1}}\left(\frac{P(x)}{Q_0(x)}\right),$$

где

$$Q_0(x) = b_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_r).$$

Но

$$\frac{P(x)}{Q_0(x)} = \omega_0(x) + \sum_{s=1}^{r}\frac{P(\alpha_s)}{(x-\alpha_s)\,Q_0'(\alpha_s)},$$

где $\omega_0(x)$ — полином. Таким образом

$$\int R(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{(n_1-1)!\ldots(n_r-1)!}\,\frac{\partial^{n-r}}{\partial\alpha_1^{n_1-1}\ldots\partial\alpha_r^{n_r-1}}\left[\Pi_0(x) + \sum_{s=1}^{r}\frac{P(\alpha_s)}{Q_0'(\alpha_s)}\ln(x-\alpha_s)\right],$$

где

$$\Pi_0(x) = \int \omega_0(x)\,dx.$$

Так как

$$\Pi(x) = \frac{\partial^{n-r}\Pi_0(x)}{\partial\alpha_1^{n_1-1}\ldots\partial\alpha_r^{n_r-1}}$$

также является полиномом, а интеграл не может содержать полинома вследствие того, что $P(x)$ меньшей степени, чем $Q(x)$, то $\Pi(x)$

должно быть тождественно равно нулю, и получаем окончательно:

$$\int R(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{(n_1-1)!\ldots(n_r-1)!}\frac{\partial^{n-r}}{\partial \alpha_1^{n_1-1}\ldots\partial\alpha_r^{n_r-1}}\left[\sum_{s=1}^{r}\frac{P(\alpha_s)}{Q_0'(\alpha_s)}\ln(x-\alpha_s)\right].$$

Например:

$$\int\frac{dx}{\{(x-a)(x-b)\}^2}=\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b}\left\{\frac{1}{a-b}\ln\left(\frac{x-a}{x-b}\right)\right\}.$$

В том, что $\Pi_0(x)$ равно нулю, можно убедиться и непосредственно следующим образом. $\Pi_0(x)$ можно получить, выделяя из разложения

$$\frac{P(x)}{x^r}\left(1+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_1^2}{x^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{\alpha_2^2}{x^2}+\ldots\right)\ldots$$

члены с положительной целой степенью x. Каждый такой член имеет вид:

$$Ax^{\nu-r-s_1-s_2-\ldots}\alpha_1^{s_1}\alpha_2^{s_2}\ldots,$$

где

$$s_1+s_2+\ldots\leqslant\nu-r\leqslant m-r$$

(m — степень P). Отсюда

$$s_1+s_2+\ldots<n-r=(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots,$$

так что по крайней мере одно из чисел $s_1, s_2, \ldots$ должно быть меньше соответствующего ему из чисел n_1-1, $n_2-1, \ldots$

Выше мы неявно предполагали, что из уравнения

$$F(x,\alpha)=\int f(x,\alpha)\,dx$$

вытекает, что

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=\int\frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx.$$

Первое из этих уравнений можно представить в виде $f=\dfrac{\partial F}{\partial x}$, а второе — в виде $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial\alpha}$. Так как из первого имеем $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=\dfrac{\partial^2F}{\partial\alpha\,\partial x}$, то наше предположение есть не что иное, как предположение справедливости формулы

$$\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\,\partial x}=\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial\alpha}.$$

Но, как известно, это равенство всегда выполняется для тех точек ($x=x_0$, $\alpha=\alpha_0$), около которых, как из центра, можно провести в плоскости (x, α) круг, в котором рассматриваемые производные непрерывны.

2. Из изложенного в § 1 явствует, что интеграл от рациональной функции, вообще говоря, состоит из двух частей, именно из рациональной функции, с одной стороны, и функции вида:

$$\sum A \ln (x-a) \tag{1}$$

с другой. Эти две функции мы будем называть соответственно *рациональной частью* и *трансцендентной частью* интеграла. Очевидно, было бы чрезвычайно важно показать, что „трансцендентная часть“ интеграла является действительно трансцендентной и не может быть представлена, целиком или частично, в виде рациональной или алгебраической функции.

Мы еще не имеем возможности дать этому полное доказательство [1]). Однако мы уже можем сделать первый шаг в этом направлении, показав, что ***никакая сумма вида* (1) *не может представлять собой рациональную функцию, если все A одновременно не равны нулю.***

Пусть, в самом деле,

$$\sum A \ln (x-a)=\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{2}$$

где P и Q — взаимно простые полиномы. Продифференцировав, получим

$$\sum \frac{A}{x-a}=\frac{P'Q-PQ'}{Q^2}. \tag{3}$$

Пусть теперь $(x-p)^r$ — один из множителей, на которые разлагается полином Q. Тогда $PQ-PQ'$ делится на $(x-p)^{r-1}$, но уже не делится на высшие степени $x-p$. Поэтому правая часть равенства (3) после сокращения будет содержать в знаменателе множитель $(x-p)^{r+1}$. Но левая часть равенства после сложения всех дробей не будет иметь в знаменателе кратных множителей. Следовательно, $r=0$, и Q приводится к постоянной. Таким образом равенство (2) приводится к виду:

$$\sum A \ln (x-a)=P(x),$$

а (3) — к виду:

$$\sum \frac{A}{x-a}=P'(x).$$

Умножая на $x-a$ и приближая x к a, видим, что $A=0$.

---

[1]) Доказательство будет завершено в гл. V, § 16.

3. Метод, изложенный в § 1, дает полное решение проблемы, если корни уравнения $Q(x)=0$ могут быть определены; и на практике так обычно и бывает. Однако этот случай, хотя он и наиболее часто встречается в практике, с теоретической точки зрения является чрезвычайно специальным. Корни уравнения $Q(x)=0$, вообще говоря, не являются явными алгебраическими функциями от коэфициентов и, как правило, не могут быть выражены в какой бы то ни было явной форме. Поэтому метод разложения на простейшие дроби подчинен серьезным ограничениям. Так, например, этим методом мы не можем вычислить такой интеграл, как

$$\int \frac{4x^9+21x^6+2x^3-3x^2-3}{(x^7-x+1)^2}\,dx,$$

или даже хотя бы определить, является ли этот интеграл рациональным или нет, тогда как он представляет собой на самом деле очень простую функцию. Поэтому особенно большое значение приобретает проблема определения интеграла от заданной рациональной функции, насколько возможно, в абсолютно явной форме и притом посредством всегда выполнимых операций. Нетрудно видеть, что нельзя ожидать полного решения этой проблемы.

Предположим, например, что $P(x)$ есть единица, а $Q(x)=0$ — уравнение пятой степени, корни которого $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ все различны и не могут быть представлены в виде явного алгебраического выражения.

Тогда

$$\int R(x)\,dx=\sum_1^5 \frac{\ln(x-\alpha_s)}{Q'(\alpha_s)}=\ln\prod_1^5\left\{(x-\alpha_s)^{\frac{1}{Q'(\alpha_s)}}\right\},$$

и лишь в том случае, когда по меньшей мере два из чисел $Q'(\alpha_s)$ соизмеримы, можно соединить какие-нибудь два или более множителя

$$(x-\alpha_s)^{\frac{1}{Q'(\alpha_s)}},$$

чтобы в результате получилось выражение вида $A\ln S(x)$, где $S(x)$ — рациональная функция. Вообще же говоря, это не имеет места, так что невозможно представить интеграл в конечной форме, которая бы не содержала явно корни. Более точный результат, относящийся к этому кругу вопросов, будет получен ниже (§ 6).

4. Первая, и наиболее важная, часть проблемы была разрешена Эрмитом, показавшим, что *рациональная часть* интеграла может быть всегда определена без знания корней полинома $Q(x)$, и притом с помощью элементарных алгебраических операций.

Метод Эрмита[1]) основывается на следующей алгебраической теореме, имеющей большое значение и для теорий разложения на простейшие дроби[2]).

Если X_1 и X_2 — два взаимно простых полинома от x, то для всякого третьего полинома X_3 можно определить такие два полинома A_1, A_2, чтобы выполнялось соотношение:

$$A_1X_1 + A_2X_2 = X_3.$$

Пусть

$$Q(x) = Q_1 Q_2^2 Q_3^3 \ldots Q_t^t,$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ — взаимно простые полиномы, имеющие лишь простые корни. Как доказывается в курсах высшей алгебры[3]), полиномы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ всегда можно определить с помощью элементарных операций.

Определим B и A_1 так, чтобы

$$BQ_1 + A_1 Q_2^2 Q_3^3 \ldots Q_t^t = P,$$

и, следовательно,

$$R(x) = \frac{P}{Q} = \frac{A_1}{Q_1} + \frac{B}{Q_2^2 Q_3^3 \ldots Q_t^t}.$$

Применяя повторно этот процесс, мы представим $R(x)$ в виде:

$$\frac{A_1}{Q_1} + \frac{A_2}{Q_2^2} + \ldots + \frac{A_t}{Q_t^t},$$

и задача сведется к интегрированию функции

$$\frac{A}{Q^\nu},$$

где Q — полином, у которого все корни различны. Но тогда Q и его производная Q' будут взаимно просты, и поэтому можно будет определить C и D так, чтобы

$$CQ + DQ' = A.$$

---

[1]) В приведенном изложении метода Эрмита мы придерживаемся, в основном, *Гурса*, Курс математического анализа, т. I, стр. 218—221, ГТТИ, 1933.

[2]) См. *А. К. Сушкевич*, Основы высшей алгебры, стр. 75—76 и 91, ГТТИ, 1932.

[3]) Там же, стр. 86—87.

Подставляя, будем иметь:

$$\int \frac{A}{Q^\nu} dx = \int \frac{CQ + DQ'}{Q^\nu} dx = \int \frac{C}{Q^{\nu-1}} dx - \frac{1}{\nu - 1} \int D \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Q^{\nu-1}}\right) dx =$$
$$= -\frac{D}{(\nu-1) Q^{\nu-1}} + \int \frac{E}{Q^{\nu-1}} dx,$$

где

$$E = C + \frac{D'}{\nu - 1}.$$

Продолжая этот процесс понижения на единицу степени $\frac{1}{Q}$ под знаком интеграла, мы придем, наконец, к равенству:

$$\int \frac{A}{Q^\nu} dx = R_\nu(x) + \int \frac{S}{Q} dx,$$

где R_ν — рациональная функция и S — полином.

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, не будет иметь рациональной части, так как все корни полинома Q простые (§ 2). Таким образом рациональной частью интеграла $\int R(x)\, dx$ будет служить сумма:

$$R_2(x) + R_3(x) + \ldots + R_t(x),$$

для вычисления которой понадобились лишь операции сложения, умножения и деления полиномов [1]).

5. 1) Рассмотрим, например, интеграл

$$\int \frac{4x^9 + 21x^6 + 2x^3 - 3x^2 - 3}{(x^7 - x + 1)^2} dx,$$

упомянутый в § 3. Нам нужно так определить полиномы A_1, A_2, чтобы

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 = X_3, \tag{1}$$

где

$$X_1 = x^7 - x + 1, \quad X_2 = 7x^6 - 1, \quad X_3 = 4x^9 + 21x^6 + 2x^3 - 3x^2 - 3.$$

Вообще, если степени полиномов X_1 и X_2 суть m_1 и m_2, а степень X_3 не превышает $m_1 + m_2 - 1$, то можно принять, что степени полиномов A_1

[1]) Операция образования производной от заданного полинома может быть, конечно, произведена посредством комбинирования указанных операций.

и A_2 не превышают соответственно m_2-1 и m_1-1. В самом деле, полиномы B_1 и B_2, удовлетворяющие соотношению:

$$B_1X_1+B_2X_2=X_3,$$

во всяком случае существуют. Если теперь степень B_1 не превышает m_2-1, то берем $A_1=B_1$, если же B_1 высшей степени, то полагаем

$$B_1=L_1X_2+A_1,$$

где степень A_1 уже не превосходит m_2-1. Аналогично, полагаем

$$B_2=L_2X_1+A_2.$$

Подставляя, мы получим тогда:

$$(L_1+L_2)\,X_1X_2+A_1X_1+A_2X_2=X_3.$$

В этом тождестве либо L_1, либо L_2, либо оба вместе могут быть тождественно равны нулю. Приравнивая нулю коэфициенты при степенях x, превышающих (m_1+m_2-1)-ю, мы видим, что во всяком случае L_1+L_2 тождественно равно нулю. Таким образом полином X_3 выражен в требуемой форме.

Фактическое определение коэфициентов полиномов A_1 и A_2 легче всего выполнить, применяя метод неопределенных коэфициентов. Мы получаем тогда m_1+m_2 линейных уравнений с таким же числом неизвестных. Эти уравнения должны быть совместны, ибо существование решения известно наперед [1]).

Если X_3 степени высшей, чем m_1+m_2-1, то нужно разделить на X_1X_2 и остаток выразить в требуемой форме.

В нашем случае мы можем принять, что A_1 — полином не выше пятой степени, а A_2 — не выше шестой. Вычисление дает:

$$A_1=-3x^2,\quad A_2=x^3+3.$$

Таким образом рациональной частью интеграла будет:

$$-\frac{x^3+3}{x^i-x+1},$$

и так как $-3x^2+(x^3+3)'=0$, то трансцендентной части вовсе не будет.

2) Хорошим примером на применение метода Эрмита может служить решение следующей проблемы: *найти условия, при которых интеграл*

$$\int\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(Ax^2+2Bx+C)^2}\,dx$$

будет рациональным, и в случае, если он рационален, вычислить его.

Можем принять, что $Ax^2+2Bx+C$ — неполный квадрат, ибо в противном случае рассматриваемый интеграл был бы определенно рациональным.

---

[1]) Легко показать, что решение также единственно.

Если мы определим коэфициенты p, q и r так, чтобы

$$p(Ax^2+2Bx+C)+2(qx+r)(Ax+B)=\alpha x^2+2\beta x+\gamma,$$

то интеграл преобразуется в

$$p\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}-\int(qx+r)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Ax^2+2Bx+C}\right)dx=$$

$$=-\frac{qx+r}{Ax^2+2Bx+C}+(p+q)\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}.$$

Поэтому условием рациональности будет $p+q=0$.

Приравнивая коэфициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$A(p+2q)=\alpha,\quad B(p+q)+Ar=\beta,\quad Cp+2Br=\gamma,$$

откуда, присовокупляя условие $p+q=0$, находим:

$$p=-\frac{\alpha}{A},\quad q=\frac{\alpha}{A},\quad r=\frac{\beta}{A},$$

причем вследствие указанного условия между коэфициентами числителя и знаменателя в интеграле устанавливается соотношение $A\gamma+C\alpha=2B\beta$. Таким образом требуемым условием является гармоническая сопряженность квадратных трехчленов $\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ и $Ax^2+2Bx+C$, причем в этом случае

$$\int\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(Ax^2+2Bx+C)^2}dx=-\frac{\alpha x+\beta}{A(Ax^2+2Bx+C)}.$$

3) Приведем другой метод решения этой проблемы. Пусть

$$Ax^2+2Bx+C=A(x-\lambda)(x-\mu).$$

После билинейной подстановки

$$x=\frac{\lambda y+\mu}{y+1}$$

интеграл приведется к виду:

$$\int\frac{ay^2+2by+c}{y^2}dy$$

и будет рациональным лишь, если $b=0$. Но это — условие гармонической сопряженности квадратного трехчлена $ay^2+2by+c$, соответствующего $\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, и вырожденного квадратного трехчлена y, соответствующего $Ax^2+2Bx+C$. Результат вытекает теперь из того соображения, что гармоническая сопряженность не нарушается при билинейных преобразованиях.

Нетрудно показать при соответствующем применении этого метода, что интеграл

$$\int\frac{(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)(\alpha_1x^2+2\beta_1x+\gamma_1)\ldots(\alpha_nx^2+2\beta_nx+\gamma_n)}{(Ax^2+2Bx+C)^{n+2}}dx$$

будет рациональным, если все квадратные трехчлены будут гармонически сопряжены с каким-нибудь одним из стоящих в числителе. Это условие не необходимо

4) В качестве упражнения на применение метода, изложенного в п. 2, читатель может показать, что *для рациональности интеграла*

$$\int \frac{f(x)}{\{F(x)\}^2}\,dx,$$

где f и F — взаимно простые полиномы, и F имеет лишь простые корни, необходимо и достаточно, чтобы $f'F' - fF''$ делилось на F.

6. Из предыдущих параграфов явствует, что мы всегда можем найти рациональную часть интеграла, а если известны корни уравнения $Q(x) = 0$, то определить и весь интеграл. Естественно встает вопрос, что можно сказать о логарифмической части интеграла в общем случае, когда корни знаменателя не могут быть явно определены? Ведь существуют полиномы, которые хотя и не могут быть полностью разложены на множители, однако допускают все же частичное разложение. Например:

$$x^{14} - 2x^8 - 2x^7 - x^4 - 2x^3 + 2x + 1 = (x^7 + x^2 - 1)(x^7 - x^2 - 2x - 1);$$

$$x^{14} - 2x^8 - 2x^7 - 2x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 1 =$$
$$= \{x^7 + x^2\sqrt{2} + x(\sqrt{2} - 1) - 1\}\{x^7 - x^2\sqrt{2} - x(\sqrt{2} + 1) - 1\}.$$

Множители первого полинома имеют рациональные коэфициенты; на языке теории алгебраических уравнений это выражается так: полином является *приводимым в рациональной области*. Второй полином приводим в области, полученной *присоединением* к рациональной области иррационального числа $\sqrt{2}$ [1]).

Пусть в результате всех возможных разложений $Q(x)$ указанными способами получается:

$$Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_l;$$

тогда $\int R(x)\,dx$ может быть разложен на сумму интегралов

$$\int \frac{P_\nu}{Q_\nu}\,dx,$$

так что остается рассмотреть интегралы вида:

$$\int \frac{P}{Q}\,dx,$$

где Q не допускает уже никакого дальнейшего разложения, или,

---

[1]) *А. К. Сушкевич*, Основы высшей алгебры, стр. 165—172 и 322—325, ГТТИ.

как говорят, *неприводимо при присоединении любой алгебраической иррациональности.*

Предположим, что коэфициенты, входящие в значение этого интеграла, могут быть все выражены в явной форме через коэфициенты, входящие в $\frac{P}{Q}$. Интеграл должен иметь вид:

$$A_1 \ln X_1 + A_2 \ln X_2 + \ldots + A_k \ln X_k, \tag{1}$$

где A — постоянные, а X — полиномы. Мы можем принять, что никакое X не имеет кратных множителей ξ^m (ξ — полином). Действительно, в противном случае такой кратный множитель можно было бы рационально выразить через коэфициенты соответствующего X, а затем просто вынести множитель ξ^m из X и ввести тем самым в сумму (1) новое слагаемое $mA \ln \xi$. По тем же основаниям мы можем принять, что все X попарно взаимно просты.

Диференцируя (1), мы получим:

$$\frac{P}{Q} = A_1 \frac{X_1'}{X_1} + A_2 \frac{X_2'}{X_2} + \ldots + A_k \frac{X_k'}{X_k},$$

откуда

$$PX_1X_2 \ldots X_k = Q \sum A_\nu X_1 \ldots X_{\nu-1} X_\nu' X_{\nu+1} \ldots X_k.$$

Но теперь все слагаемые суммы в правой части делятся на X_1, за исключением первого, являющегося взаимно простым с X_1. Поэтому Q должно делиться на X_1 и, следовательно, по тем же основаниям, и на $X_2, X_3, \ldots, X_k$. С другой стороны, так как P взаимно просто с Q, то произведение $X_1X_2 \ldots X_k$ должно в свою очередь делиться на Q. Значит, Q может отличаться от этого произведения лишь постоянным множителем. Но Q по предположению не разлагается на множители, содержащие лишь явные алгебраические иррациональности.

Следовательно, все X_3 за исключением одного приводятся к постоянным, значит, P, с точностью до постоянного множителя, равно Q', и

$$\int \frac{P}{Q} dx = A \ln Q,$$

где A — постоянный множитель. За исключением этого случая интеграл не может быть представлен в виде выражения, содержащего лишь такие коэфициенты, которые могут быть явно выражены через коэфициенты, входящие в P и Q.

Так, например, интеграл

$$\int \frac{dx}{x^5 + ax + b},$$

за исключением некоторых частных случаев [1], не может быть представлен в виде выражения, содержащего лишь коэфициеннты, явно выраженные через a и b. Точно так же и интеграл

$$\int \frac{5x^4 + c}{x^5 + ax + b}\, dx$$

не может быть вообще представлен требуемым образом, за исключением случая, когда $c = a$. Тем самым подтверждается заключение, выведенное нами выше (§ 3) менее строгим путем.

Прежде чем закончить эт т раздел, посвященный интегрированию рациональных функций, рассмотрим еще одну проблему: *при каких условиях*

$$\int R(x)\, dx = A \ln R_1(x),$$

где A — постоянный множитель, а R_1 — рациональная функция? Так как интеграл не имеет рациональной части, то, очевидно, $Q(x)$ должно иметь лишь простые корни, а $P(x)$ должно быть меньшей степени, чем $Q(x)$. Поэтому мы можем применить формулу

$$\int R(x)\, dx = \ln \prod_1^r \left\{ (x - a_s)^{\frac{P(a_s)}{Q'(a_s)}} \right\}.$$

Мы видим, что необходимым и достаточным условием будет соизмеримость всех чисел $\frac{P(a_s)}{Q'(a_s)}$. Если, например:

$$R(x) = \frac{x - \gamma}{(x - \alpha)(x - \beta)},$$

то числа $\frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta}$ и $\frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}$ должны быть соизмеримыми, т. е. $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}$ должно быть рациональным числом. Если знаменатель задан, то все значения γ, удовлетворяющие этому условию, будут доставляться формулой

$$\gamma = \frac{\alpha q - \beta p}{q - p},$$

где p и q — любые целые числа.

7. На этом мы кончаем обсуждение вопроса об интегрировании рациональных функций. Это обсуждение носило исключительно теоретический характер. Мы совершенно не касались вопроса о наиболее простых и быстрых методах эффективного вычисления различных

[1] Уравнение $x^5 + ax + b$ в некоторых случаях может быть решено в радикалах.

типов интегралов, наиболее часто встречающихся в практике. Этот вопрос выходит за рамки настоящей книжки; за справками читатель может обратиться к следующим учебникам:

Ш. Ж де-ла-Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. I, стр. 190—196, ГТТИ, 1933.

Р. Курант, Курс диференциального и интегрального исчисления, ч. I, 196—202, 3-е изд., ГТТИ, 1933.

Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, стр. 215, изд. ГТТИ, 1933.

V. Интегрирование алгебраических функций

1. Мы переходим к рассмотрению интегралов от алгебраических функций как явных, так и неявных. Теория интегрирования этих функций гораздо более обширна и вместе с тем более трудна, чем теория интегрирования рациональных функций, и мы сможем изложить здесь в самом сжатом виде лишь несколько наиболее важных результатов и их ближайших применений.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — алгебраические функции от x, то и любая функция z, алгебраическая относительно $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, будет алгебраической функцией от x. Для *явных* алгебраических функций это очевидно. В общем случае мы имеем ряд уравнений вида:

$$P_{\nu,0}(x)y_\nu^{m_\nu}+P_{\nu,1}(x)y_\nu^{m_\nu-1}+\ldots+P_{\nu,m_\nu}(x)=0\quad(\nu=1,\ 2,\ldots,n)$$

и, кроме того, уравнение

$$P_0(x,\ y_1,\ldots,y_n)z^m+\ldots+P_m(x,\ y_1,\ldots,y_n)=0,$$

где все P — полиномы относительно своих аргументов. Исключая $y_1, y_2, \ldots, y_n$ из этих уравнений, мы получим уравнение относительно z, где в качестве коэфициентов будут стоять полиномы от одного лишь x.

Важность этого с нашей теперешней точки зрения заключается в том, что мы можем рассматривать в качестве стандартной формы алгебраического интеграла любую из форм

$$\int y\,dx,$$

где $f(x,\ y)=0$;

$$\int R(x,\ y)\ dx,$$

где $f(x, y)=0$ и R — рациональная функция; или

$$\int R(x, y_1, \ldots, y_n)\,dx,$$

где $f_1(x, y)=0, \ldots, f_n(x, y_n)=0$. Например, иррациональност

$$\frac{x-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

гораздо удобнее рассматривать как рациональную функцию от x y_1, y_2, где

$$y_1=\sqrt{x+1}, \quad y_2=\sqrt{x-1}, \quad y_1^2=x+1, \quad y_2^2=x-1,$$

чем рациональную функцию от x и y, где

$$y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1},$$

$$y^4-4xy^2+4=0.$$

И очевидно, менее всего удобно рассматривать ее просто как иррациональность y, удовлетворяющую уравнению:

$$(x-y)^4-4x(x-y)^2(1+y)^2+4(1+y)^4=0.$$

Прежде чем перейти к исследованию общей формы интеграла от алгебраической функции, рассмотрим один наиболее важный случай, когда интеграл может быть сразу приведен к интегралу от рациональной функции и поэтому всегда является элементарным.

2. Мы имеем в виду класс интегралов, определяемый следующей теоремой:

Если x и y (или $y_1, y_2, \ldots, y_n$) можно выразить рационально через некоторую переменную t:

$$x=R_1(t), \quad y=R_2(t)$$

[*или* $y_1=R_2^{(1)}(t), \quad y_2=R_2^{(2)}(t), \ldots$], *то интеграл*

$$\int R(x, y)\,dx$$

$\left[\text{или} \int R(x, y_1, \ldots, y_n)\,dx\right]$ *является элементарной функцией.*

Истинность этого предложения непосредственно вытекает из равенств:

$$R(x, y) = R\{R_1(t), R_2(t)\} = S(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = R_1'(t) = T(t),$$

$$\int R(x, y)\,dx = \int S(t)\,T(t)\,dt = \int U(t)\,dt,$$

где все прописные буквы обозначают рациональные функции.

Наиболее важным является тот случай этой теоремы, когда x и y связаны общим соотношением второй степени

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

В этом случае подинтегральное выражение может быть преобразовано в рациональное бесчисленным множеством способов. В самом деле, пусть (ξ, η) — любая точка нашей кривой второго порядка и

$$y - \eta = t(x - \xi)$$

любая прямая, проходящая через эту точку. Исключая y из обоих уравнений, мы получим уравнение второй степени относительно x:

$$T_0x^2 + 2T_1x + T_2 = 0,$$

где T_0, T_1, T_2 — полиномы от t. Но одним из корней этого уравнения должно быть ξ, не зависящее от t; деля на $x - \xi$, мы получим уравнение *первой* степени относительно x, причем коэфициентами этого уравнения будут снова полиномы от t. Следовательно, абсцисса x есть рациональная функция от t. Ордината y будет также рациональной функцией от t, и при изменении t точка (x, y) будет пробегать всю кривую. Действительно, уравнение кривой может быть записано в форме:

$$au^2 + 2huv + bv^2 + 2(a\xi + h\eta + g)u + 2(h\xi + b\eta + f)v = 0,$$

где $u = x - \xi$, $v = y - \eta$, а другая точка пересечения прямой $v = tu$ с кривой дается формулами:

$$x = \xi - \frac{2\{a\xi + h\eta + g + t(h\xi + b\eta + f)\}}{a + 2ht + bt^2},$$

$$y = \eta - \frac{2t\{a\xi + h\eta + g + t(h\xi + b\eta + f)\}}{a + 2ht + bt^2}.$$

Другой метод: пусть

$$ax^2+2hxy+by^2=b(y-\mu x)(y-\mu' x),$$

так что прямые $y-\mu x=0$ и $y-\mu' x=0$ параллельны асимптотам конического сечения, и положим

$$y-\mu x=t.$$

Тогда

$$y-\mu' x=-\frac{2gx+2fy+c}{lt},$$

и из двух последних уравнений x и y выразятся в виде рациональных функций от t. В принципе это метод, конечно, тождественен с предыдущим, только (ξ, η) теперь в бесконечности, а пучок прямых, проходящих через (ξ, η), заменен пучком параллелей к асимптоте.

Наиболее важен случай, когда $b=-1$, $f=h=0$, т. е.

$$y^2=ax^2+2gx+c.$$

В этом случае подинтегральное выражение преобразуется в рациональное посредством подстановки

$$x=\xi-\frac{2(a\xi+g-t\eta)}{a-t^2},\quad y=\eta-\frac{2t(a\xi+g-t\eta)}{a-t^2},$$

где ξ, η — произвольные числа, связанные соотношением:

$$\eta^2=a\xi^2+2g\xi+c.$$

Мы можем, в частности, принять $\xi=0$, $\eta=\sqrt{c}$; либо же $\eta=0$, так что ξ будет корнем уравнения $a\xi^2+2g\xi+c=0$.

Для преобразования подинтегрального выражения в рациональное может служить также подстановка $y-x\sqrt{a}=t$, или

$$x=-\frac{t^2-c}{2(t\sqrt{a}-g)},\quad y=\frac{(t^2+c)\sqrt{a}-2gt}{2(t\sqrt{a}-g)}.$$

3. Рассмотрим подробнее вопрос о вычислении

$$\int R(x, y)\,dx,$$

где

$$y=\sqrt{X}=\sqrt{ax^2+2bx+c}\ ^{1)}.$$

---

1) Мы пишем здесь b вместо g в целях симметрии обозначений.

Наиболее интересен случай, когда a, b, c и коэфициенты, входящие в R вещественны. Мы ограничимся рассмотрением только этого случая.

Пусть

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P и Q — полиномы. Тогда, вследствие соотношения

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c,$$

$R(x, y)$ может быть представлено в форме:

$$\frac{A + B\sqrt{X}}{C + D\sqrt{X}} = \frac{(A + B\sqrt{X})(C - D\sqrt{X})}{C^2 - D^2X},$$

где A, B, C, D - полиномы от x, следовательно, в форме $M + N\sqrt{X}$, где M и N — рациональные функции от x, или (что то же) в форме

$$P + \frac{Q}{\sqrt{X}},$$

где P и Q рациональны. Рациональная часть интегрируется методами, изложенными в главе IV, а интеграл

$$\int \frac{Q}{\sqrt{X}}\,dx$$

может быть приведен к сумме нескольких интегралов вида:

$$\int \frac{x^r}{\sqrt{X}}\,dx, \quad \int \frac{dx}{(x-p)^r\sqrt{X}}, \quad \int \frac{\xi x + \eta}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^r\sqrt{X}}\,dx, \tag{1}$$

где p, ξ, η, α, β, γ — вещественные постоянные, а r — целое положительное число. Результат, вообще говоря, требуется получить в явной вещественной форме; так как дальнейшее продвижение связано с преобразованиями, затрагивающими p (или α, β, γ), то, вообще говоря, не рекомендуется разлагать квадратный трехчлен $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ на его линейные множители, если последние комплексны.

Все интегралы (1) могут быть выражены с помощью простых рекуррентных формул [1]) через три фундаментальные интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{X}}, \quad \int \frac{\xi x + \eta}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\sqrt{X}}\,dx. \tag{2}$$

---

[1]) См. например, *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, т. 2, стр. 70—72, ГТТИ, 1933.

4. Первый из этих интегралов может быть приведен с помощью подстановки вида $x = t + k$ к одному из трех стандартных типов:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{m^2 - t^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + m^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - m^2}}$$

($m > 0$). Подинтегральные выражения в этих интегралах могут быть преобразованы в рациональные выражения посредством подстановок, соответственно:

$$t = \frac{2mu}{1 + u^2}, \quad t = \frac{2mu}{1 - u^2}, \quad t = \frac{m(1 + u^2)}{2u};$$

однако проще применить трансцендентные подстановки:

$$t = m \sin \Phi, \quad t = m \operatorname{sh} \Phi, \quad t = m \operatorname{ch} \Phi.$$

Эти последние подстановки вообще наиболее удобны для приведения интеграла, содержащего ту или иную из иррациональностей

$$\sqrt{m^2 - t^2}, \quad \sqrt{t^2 + m^2}, \quad \sqrt{t^2 - m^2},$$

хотя часто применяются и подстановки

$$t = m \operatorname{th} \Phi, \quad t = m \operatorname{tg} \Phi, \quad t = m \sec \Phi.$$

Бромвич заметил, что приводимые обычно в учебниках значения этих трех стандартных интегралов, а именно:

$$\arcsin \frac{t}{m}, \quad \operatorname{Arsh} \frac{t}{m}, \quad \operatorname{Arch} \frac{t}{m},$$

не совсем точны. Например, первые два из них представляют собой, очевидно, нечетные функции от m, тогда как соответствующие интегралы являются четными функциями. Точные формулы суть

$$\arcsin \frac{t}{|m|}, \quad \operatorname{Arsh} \frac{t}{|m|} = \ln \frac{t + \sqrt{t^2 + m^2}}{|m|}$$

и

$$\pm \operatorname{Arch} \left| \frac{t}{m} \right| = \ln \left| \frac{t + \sqrt{t^2 - m^2}}{m} \right|,$$

где нужно взять знак $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли t положительно или отрицательно. Впрочем, пожалуй, удобнее пользоваться эквивалентными формулами:

$$\operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{m^2 - t^2}}, \quad \operatorname{Arth} \frac{t}{\sqrt{t^2 + m^2}}, \quad \operatorname{Arth} \frac{t}{\sqrt{t^2 - m^2}}.$$

5. Интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{X}}$$

может быть вычислен различными способами.

Если p есть корень уравнения $X=0$, то X может быть представлено в форме $a(x-p)(x-q)$, и значение интеграла даётся одной из формул:

$$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}} = \frac{2}{q-p}\sqrt{\frac{x-q}{x-p}},$$

$$\int \frac{dx}{(x-p)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{3(x-p)^{\frac{3}{2}}}.$$

Мы можем поэтому предположить, что p не является корнем уравнения $X=0$.

1) Будем следовать вышеизложенному общему методу. Положим:

$$\xi = p, \quad \eta = \sqrt{ap^2+2bp+c}\ [1].$$

Исключая y из уравнений

$$y^2 = ax^2+2bx+c, \quad y-\eta = t(x-\xi)$$

и деля на $x-\xi$, мы получим:

$$t^2(x-\xi)+2\eta t - a(x+\xi) - 2b = 0$$

откуда

$$-\frac{2t}{t^2-a} = \frac{dx}{t(x-\xi)+\eta} = \frac{dx}{y}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{(x-\xi)y} = -2\int \frac{dt}{(x-\xi)(t^2-a)}.$$

Но

$$(t^2-a)(x-\xi) = 2a\xi+2b-2\eta t;$$

следовательно:

$$\int \frac{dx}{(x-p)y} = -\int \frac{dt}{a\xi+b-\eta t} = \frac{1}{\eta}\ln(a\xi+b-\eta t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ap^2+2bp+c}} \ln\left\{t\sqrt{ap^2+2bp+c}-ap-b\right\}.$$

Если $ap^2+2bp+c<0$, то преобразование мнимое. Пусть, например:

$$\text{a)}\ y=\sqrt{x+1}, \quad p=0,$$

или

$$\text{b)}\ y=\sqrt{x-1}, \quad p=0.$$

---

[1]) См. *Jordan*, Cours d'analyse, Bd. 2, стр. 21.

Имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \ln\left(t - \frac{1}{2}\right), \tag{a}$$

где

$$t^2x + 2t - 1 = 0,$$

или

$$t = \frac{-1 + \sqrt{x+1}}{x},$$

и

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = -i\ln\left(it - \frac{1}{2}\right), \tag{b}$$

где

$$t^2x + 2it - 1 = 0.$$

Ни один из этих двух результатов не дает нам выражения для интеграла в простейшей форме, в частности второе выражение особенно неудобно.

2) Наиболее прямым методом является применение подстановки

$$x - p = \frac{1}{t}.$$

Мы получаем тогда:

$$\int \frac{dx}{(x-p)y} = \int \frac{dt}{\sqrt{a_1t^2 + 2b_1t + c_1}},$$

где a_1, b_1, c_1 — некоторые простые функции от a, b, c и p. О дальнейшем приведении этого интеграла говорилось уже выше.

3) Третий метод, принятый Г. Греениллом [1]), состоит в применении подстановки

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}{x - p}.$$

После выкладок получаем:

$$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{X}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(ap^2 + 2bp + c)\,t^2 + b^2 - ac}},$$

т. е. одну из трех стандартных форм, рассмотренных в § 4.

6. Остается рассмотреть интеграл

$$\int \frac{\xi x + \eta}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\sqrt{X}}\,dx = \int \frac{\xi x + \eta}{X_1\sqrt{X}}\,dx,$$

где $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ или X_1 есть квадратный трехчлен с комплексными корнями. И здесь в нашем распоряжении имеется несколько методов.

---

[1]) *A. G. Greenhill*, A chapter in the integralcalculus (Francis Hodgson, 1888), стр. 12; Differential and integral calculus, стр. 399.

Мы можем принять, что X_1 не является кратным от X, ибо в противном случае значение интеграла дается формулой:

$$\int \frac{\xi x + \eta}{(ax^2 + 2bx + c)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{\eta\,(ax + b) - \xi\,(bx + c)}{\sqrt{(ac - b^2)(ax^2 + 2bx + c)}}.$$

1) Стандартным методом является применение подстановки

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}, \tag{1}$$

где μ и ν подбираются так, чтобы

$$a\mu\nu + b\,(\mu + \nu) + c = 0, \quad \alpha\mu\nu + \beta\,(\mu + \nu) + \gamma = 0. \tag{2}$$

Значения μ и ν, удовлетворяющие этим условиям, являются корнями квадратного уравнения $(a\beta - b\alpha)\,\mu^2 - (c\alpha - a\gamma)\,\mu + (b\gamma - c\beta) = 0$.

Корни эти будут вещественны и различны, если

$$(c\alpha - a\gamma)^2 > 4\,(a\beta - b\alpha)\,(b\gamma - c\beta),$$

или, если

$$(a\gamma + c\alpha - 2b\beta)^2 > 4\,(ac - b^2)\,(\alpha\gamma - \beta^2). \tag{3}$$

Так как $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$, то условие (3) будет выполнено, если $ac - b^2 < 0$. Если же $ac - b^2$ и $\alpha\gamma - \beta^2$ оба положительны, то $a\gamma$ и $c\alpha$ имеют общий знак, и

$$(a\gamma + c\alpha - 2b\beta)^2 \geqslant (\,|\,a\gamma + c\alpha\,| - 2\,|\,b\beta\,|\,)^2 > 4\left\{\sqrt{ac\alpha\gamma} - |\,b\beta\,|\right\}^2 =$$

$$= 4\left[(ac - b^2)(\alpha\gamma - \beta^2) + \left\{|\,b\,|\sqrt{\alpha\gamma} - |\,\beta\,|\sqrt{ac}\right\}^2\right] \geqslant 4\,(ac - b^2)\,(\alpha\gamma - \beta^2).$$

Таким образом во всех случаях значения μ и ν вещественны и различны.

Производя подстановку (1), находим:

$$\int \frac{\xi x + \eta}{X_1\sqrt{X}}\, dx = H\int \frac{t\,dt}{(At^2 + B)\sqrt{\mathsf{A}t^2 + \mathsf{B}}} + K\int \frac{dt}{(At^2 + B)\sqrt{\mathsf{A}t^2 + \mathsf{B}}},$$

где A, B, A, B, H и K — постоянные. Первый из этих двух интегралов приводится к интегралу от рациональной функции посредством подстановки:

$$\frac{t}{\sqrt{\mathsf{A}t^2 + \mathsf{B}}} = u,$$

а второй — посредством подстановки:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathsf{A}t^2 + \mathsf{B}}} = v\ [1].$$

---

[1]) Изложенный нами в кратких чертах метод проведен в учебнике *Stolz*, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Bd. I. Метод Бромвича основывается на тех же принципах, но отличается в деталях.

Заметим, что этот метод теряет силу, если $a\beta - b\alpha = 0$. Однако в этом случае подстановка $ax + b = t$ преобразует интеграл к виду:

$$\int \frac{Ht + K}{(At^2 + B)\sqrt{At^2 + B}}\, dt,$$

после чего приведение может быть завершено тем же путем, что и прежде.

2) Другим методом является применение указанной Г. Гренгиллом подстановки:

$$t = \sqrt{\frac{X}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} = \sqrt{\frac{X}{X_1}}.$$

Положим

$$J = (a\beta - b\alpha)\, x^2 - (c\alpha - a\gamma)\, x + (b\gamma - c\beta),$$

тогда

$$\frac{1}{t}\frac{dt}{dx} = \frac{J}{XX_1}. \tag{1}$$

Максимальное и минимальное значения t принимает при $J = 0$. Имеем:

$$t^2 - \lambda = \frac{(a - \lambda\alpha)\, x^2 + 2\,(b - \lambda\beta)\, x + (c - \lambda\gamma)}{X_1},$$

и числитель будет полным квадратом, если

$$K = (\alpha\gamma - \beta^2)\, \lambda^2 - (a\gamma + c\alpha - 2b\beta)\, \lambda + (ac - b^2) = 0.$$

После небольшого вычисления находим, что дискриминант этого уравнения и дискриминант трехчлена J отличаются друг от друга и от

$$(\Phi - \Phi_1)\,(\Phi - \Phi_1')\,(\Phi' - \Phi_1)\,(\Phi' - \Phi_1'),$$

где Φ, Φ' — корни уравнения $X = 0$, а Φ_1, Φ_1' — уравнения $X_1 = 0$, лишь постоянным, всегда отрицательным множителем. Так как Φ_1 и Φ_1' — сопряженные комплексные числа, то произведение это положительно, и, следовательно, уравнения $J = 0$ и $K = 0$ имеют вещественные корни [1].

Обозначим корни последнего из этих уравнений через

$$\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 > \lambda_2).$$

Тогда

$$\lambda_1 - t^2 = \frac{\left\{x\sqrt{\lambda_1\alpha - a} + \sqrt{\lambda_1\gamma - c}\right\}^2}{X_1} = \frac{(mx + n)^2}{X_1}, \tag{2}$$

$$t^2 - \lambda_2 = \frac{\left\{x\sqrt{a - \lambda_2\alpha} + \sqrt{c - \lambda_2\gamma}\right\}^2}{X_1} = \frac{(m'x + n')^2}{X_1}. \tag{2'}$$

---

[1] Что корни уравнения $J = 0$ вещественны, было уже доказано (стр. 37) другим методом.

Далее, так как $t^2 - \lambda$ может обращаться в нуль для двух слившихся значений x, лишь если λ равно λ_1 или λ_2, т. е. t принимает максимум или минимум, то J может отличаться от

$$(mx+n)(m'x+n')$$

лишь постоянным множителем. Приравнивая коэфициенты и пользуясь тождеством

$$(\lambda_1\alpha - a)(a - \lambda_2\alpha) = \frac{(\beta - b\alpha)^2}{\alpha\gamma - \beta^2},$$

находим:

$$J = \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}\,(mx+n)(m'x+n'). \tag{3}$$

Наконец, мы можем записать $\xi x + \eta$ в форме:

$$A(mx+n) + B(m'x+n').$$

Применяя формулы (1), (2), (2') и (3), получаем:

$$\int \frac{\xi x + \eta}{X_1\sqrt{X}}\,dx = \int \frac{A(mx+n) + B(m'x+n')}{J}\sqrt{X_1}\,dt =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\lambda_1 - t^2}} + \frac{B}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \lambda_2}},$$

и интеграл приведен к сумме двух интегралов стандартной формы.

Этот метод очень элегантен и имеет то преимущество, что все преобразование производится в один прием. С другой стороны, он несколько искусственен, и против него можно выдвинуть то возражение, что он вводит корень $\sqrt{X_1}$, который, согласно принципу Лапласа (гл. III, § 2), не может на самом деле входить в окончательный результат [1].

7. Мы можем теперь приступить к рассмотрению общего случая, к которому относится теорема гл. IV, § 2. Напомним два известных определения из теории плоских алгебраических кривых.

[1]) Излишне привнесенный корень может быть исключен из окончательного результата с помощью тривиального преобразования таким же точно образом, как $\sqrt{1+x^2}$ может быть исключено из

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

если написать эту функцию в простой форме $\operatorname{arctg} x$.

Кривая степени n может иметь самое большее $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ двойных точек[1]). Число

$$p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\nu,$$

где ν — фактическое количество двойных точек, называется *жанром*[2]) кривой.

Если координаты x, y точки на кривой могут быть выражены *рационально* через некоторый параметр t уравнениями:

$$x=R_1(t), \quad y=R_2(t),$$

то кривая называется *уникурсальной.* Мы уже видели, что в этом случае всегда можно выразить интеграл

$$\int R(x, y)\, dx$$

через элементарные функции.

Фундаментальной теоремой в этой области является следующая: *Кривая жанра нуль уникурсальна, и наоборот.*

Предположим, что кривая обладает максимальным количеством двойных точек[3]). Так как

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n-3=\frac{1}{2}(n-2)(n+1)-1,$$

а для определения кривой степени $n-2$ достаточно ровно

---

[1]) *Salmon*, Higher line curves, стр. 29.

[2]) *Salmon*, там же, стр. 29. По-английски deficiency, по-немецки Geschlecht, по-французски genre.

[3]) Во всем дальнейшем предполагается, что все особые точки кривой являются обыкновенными узловыми точками. Изменения, необходимые при рассмотрении других случаев, не представляют труда. Обыкновенная кратная точка k-го порядка может быть рассматриваема как эквивалентная $\frac{1}{2}k(k-1)$ обыкновенным двойным точкам. Поэтому кривая степени n, имеющая обыкновенную кратную точку $(n-1)$-го порядка, эквивалентную $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ обыкновенным двойным точкам, является уникурсальной. Теория плоских алгебраических кривых высших порядков изобилует запутаннейшими частными случаями, которые втискиваются в рамки общей теории посредством более или менее очевидных соглашений. Дать удовлетворительный разбор какой-нибудь сложной особенности зачастую отнюдь не легко. В последующем исследовании мы ограничиваемся простейшим случаем.

$\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ точек [1]), то мы можем провести через $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ двойных точек и $n-3$ других произвольно выбранных точек кривой однопараметрическое семейство кривых степени $n-2$, имеющее уравнение

$$g(x, y)+th(x, y)=0,$$

где t — переменный параметр, а $g=0$ и $h=0$ — уравнения двух каких-нибудь частных кривых этого семейства. Любая из кривых семейства пересекает заданную кривую в $n(n-2)$ точках, из которых $(n-1)(n-2)$ засчитаны в $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ двойных точках, а $n-3$ суть произвольно выбранные нами выше точки. Эти

$$(n-1)(n-2)+n-3=n(n-2)-1$$

точек не зависят от t; таким образом остается лишь одна точка пересечения, зависящая от t. Координаты этой точки даются уравнениями:

$$g(x, y)+th(x, y)=0,$$
$$f(x, y)=0.$$

Исключение y дает для x уравнение степени $n(n-2)$, имеющее в качестве коэфициентов полиномы от t; при этом лишь один корень получившегося уравнения зависит от t. Отсюда следует, что левая часть этого уравнения делится на множитель степени $n(n-2)-1$, не зависящий от t. Остается линейное уравнение относительно x, имеющее коэфициентами полиномы от t. Таким образом абсцисса x точки кривой является рациональной функцией от t, и то же может быть показано и для ординаты y.

Мы можем поэтому написать:

$$x=R_1(t), \quad y=R_2(t).$$

Произведя приведение этих дробей к общему знаменателю, мы представим координаты x и y в форме:

$$x=\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_3(t)}, \quad y=\frac{\Phi_2(t)}{\Phi_3(t)}, \tag{1}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 — взаимно простые полиномы. Эти полиномы будут вообще степени n; ни один из них не может быть высшей

[1]) *Salmon*, 1. c., стр. 16.

степени, и по крайней мере один должен быть в точности степени n, ибо произвольная прямая

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

должна пересекать кривую в точности в n точках[1]).

Мы можем теперь доказать вторую часть теоремы. Если

$$x:y:1 = \Phi_1(t)\ \Phi_2(t):\Phi_3(t),$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 — полиномы степени n, то прямая

$$ux + vy + w = 0$$

будет встречать кривую в n точках, параметры которых определяются уравнением:

$$u\Phi_1(t) + v\Phi_2(t) + w\Phi_3(t) = 0.$$

Это уравнение имеет двойной корень t_0, если одновременно

$$u\Phi_1(t_0) + v\Phi_2(t_0) + w\Phi_3(t_0) = 0,$$
$$u\Phi_1'(t_0) + v\Phi_2'(t_0) + w\Phi_3'(t_0) = 0.$$

Следовательно, уравнение касательной в точке t_0 будет:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \Phi_1(t_0) & \Phi_2(t_0) & \Phi_3(t_0) \\ \Phi_1'(t_0) & \Phi_2'(t_0) & \Phi_3'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Если (x, y) — фиксированная точка, то уравнение (2) можно рассматривать как уравнение для определения параметра точки соприкосновения касательной, проведенной к кривой из точки (x, y). Но

$$\Phi_2(t_0)\Phi_3'(t_0) - \Phi_2'(t_0)\Phi_3(t_0)$$

есть полином степени $2n-2$ относительно t_0: коэфициенты при

---

[1]) См. *Niewenglowski*, Cours de géométrie analytique, t. 2, стр. 103. В качестве иллюстрации к замечанию относительно частных случаев, сделанному в сноске на стр. 39, читатель может рассмотреть приведенный Нивенгловским пример, где

$$x = \frac{t^2}{t^2-1}, \quad y = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

уравнения, получающиеся для представления прямой $2x = y + 1$ (только части этой прямой, если рассматривать лишь вещественные значения t).

t_0^{2n-1}, очевидно, взаимно уничтожаются. Поэтому вообще число касательных, которые можно провести к уникурсальной кривой из фиксированной точки (класс кривой), равно $2n-2$. Но, как известно, класс кривой, имеющей единственными особенностями δ узловых точек, равен $n(n-1)-2\delta$ [1]). Следовательно, число узловых точек равно:

$$\frac{1}{2}\{n(n-1)-(2n-2)\} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Быть может, будет нелишне указать, как нужно изменить доказательство, если лишь некоторые из особенностей являются узловыми точками, остальные же суть обыкновенные точки заострения. Первая часть доказательства остается без изменения. Уравнение (2) должно теперь рассматриваться как определяющее значения t, соответствующие: a) точкам, касательные в которых проходят через (x, y), и b) точкам заострения, ибо любая прямая, проходящая через точку заострения, „пересекает кривую в двух слившихся точках" [2]). Мы имеем поэтому:

$$2n-2 = m+\varkappa,$$

где m — класс кривой. Но

$$m = n(n-1)-2\delta-3\varkappa \text{ [3]};$$

таким образом

$$\delta+\varkappa = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ [4]}.$$

8. 1) Развитый в предыдущем параграфе метод теряет силу при $n<3$, однако мы уже видели, что все кривые второго порядка уникурсальны. Следующим по важности является случай кривой третьего порядка с двойной точкой. Если двойная точка находится на конечном расстоянии, то можно переносом начала координат привести уравнение кривой к виду:

$$(ax+by)(cx+dy) = px^3+3qx^2y+3rxy^2+sy^3.$$

---

[1]) *Salmon*, l. c., стр. 54.

[2]) Это, конечно, означает, что уравнение, полученное при подстановке в уравнение линии вместо x и y их параметрического выражения через t, имеет кратный корень. Этим свойством обладают касательные в обыкновенных точках и любые прямые, проходящие через точку заострения, но не любые прямые, проходящие через узловую точку, за исключением двух касательных.

[3]) *Salmon*, l. c., стр. 65.

[4]) Этим замечанием я обязан A. B. Mayne. Однако Бромвич указал мне, что существенно тем же аргументом пользовался *W. A. Houston*, Note on unicursal plane curves, Messenger of mathematics, V. 28, 1899, стр. 187—189.

Рассматривая пересечение кривой с прямой $y=tx$, мы получим тогда:

$$x=\frac{(a+bt)(c+dt)}{p+3qt+3rt^2+st^3},\quad y=\frac{t(a+bt)(c+dt)}{p+3qt+3rt^2+st^3}.$$

Если двойная точка лежит в бесконечности, то уравнение кривой имеет вид:

$$(\alpha x+\beta y)^2(\gamma x+\delta y)+\varepsilon x+\zeta y+\theta=0.$$

Кривая имеет пару параллельных асимптот. Рассматривая пересечения кривой с линией $\alpha x+\beta y=t$, мы получим:

$$x=-\frac{\delta t^3+\zeta t+\beta\theta}{(\beta\gamma-\alpha\delta)t^2+\varepsilon\beta-\alpha\zeta},\quad y=\frac{\gamma t^3+\varepsilon t+\alpha\theta}{(\beta\gamma-\alpha\delta)t^3+\varepsilon\beta-\alpha\zeta}.$$

2) Следующим по сложности является случай кривой четвертого порядка с тремя двойными точками.

a) Лемниската

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

имеет три двойных точки: начало координат и круговые точки в бесконечности. Окружность

$$x^2+y^2=t(x-y)$$

проходит через эти точки и еще одну, слившуюся с началом, ибо она соприкасается в нем с кривой. Разрешая эти уравнения относительно x и y, получаем:

$$x=\frac{a^2t(t^2+a^2)}{t^4+a^4},\quad y=\frac{a^2t(t^2-a^2)}{t^4+a^4}.$$

b) Кривая

$$2ay^3-3a^2y^2=x^4-2a^2x^2$$

имеет двойные точки $(0,0)$, (a,a), $(-a,a)$. Вводя вспомогательную кривую второго порядка

$$x^2-ay=tx(y-a),$$

находим:

$$x=\frac{a}{t^3}(2-3t^2),\quad y=\frac{a}{2t^4}(2-3t^2)(2-t^2).$$

3) a) Кривая

$$y^n=x^n+ax^{n-1}$$

имеет вначале кратную точку $(n-1)$-го порядка и потому уникурсальна В этом случае достаточно рассмотреть пересечение кривой с прямой $y=tx$.

Чтобы согласовать это с общей теорией, рассматриваем кривую

$$y^{n-3}(y-tx)=0,$$

как проходящую через $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ двойные точки, слившиеся вначале, и через $n-3$ остальные фиксированные точки, слившиеся в точке

$$x=-a,\quad y=0.$$

Кривые

$$y^n=x^n+ax^{n-1} \tag{1}$$

и

$$y^n=1+az \tag{2}$$

проективно эквивалентны, что можно обнаружить приведением этих уравнений к однородному виду посредством введения переменной z в (1) и переменной x во (2). Заключаем, что кривая (2), имеющая максимальное количество двойных точек в бесконечности, уникурсальна. И действительно, мы можем положить

$$y=t,\quad az=t^n-1.$$

В соответствии с этим интеграл

$$\int R\left\{z, \sqrt[n]{1+az}\right\}dz$$

является элементарной функцией.

b) Кривая

$$y^m=A(x-a)^\mu(x-b)^\nu$$

уникурсальна тогда и только тогда, когда 1) $\mu=0$, или 2) $\nu=0$, или 3) $\mu+\nu=m$. Поэтому интеграл

$$\int R\left\{x,(x-a)^{\frac{\mu}{m}}(x-l)^{\frac{\nu}{n}}\right\}dx$$

будет элементарной функцией для всех R лишь в этих случаях. Конечно, для некоторых частных типов R он и в других случаях может быть выражен в элементарных функциях [1]).

9. Имеется аналогичная теория уникурсальных кривых в пространстве любого числа измерений. Рассмотрим, например, интеграл

$$\int R\left\{x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d}\right\}dx.$$

---

[1]) См. *Ptaszycki*, Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, Bulletin des sciences mathématiques, sér 2, t. 12, 1888, стр. 262—270; *Appell* et *Goursat*, Théorie des fonctions algébriques, стр. 245.

Линейной подстановкой $x = ly + m$ можно его привести к виду

$$\int R_1\{y, \sqrt{y+2},\ \sqrt{y-2}\}\,dy.$$

Подинтегральное выражение в этом интеграле может быть преобразовано в рациональную функцию посредством подстановки:

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2},\quad \sqrt{y+2} = t + \frac{1}{t},\quad \sqrt{y-2} = t - \frac{1}{t}.$$

Кривая, декартовы координаты которой ξ, η, ζ связаны соотношением

$$\xi:\eta:\zeta:1 = t^4 + 1 : t\,(t^2+1) : t\,(t^2-1) : t^2,$$

есть уникурсальная кривая четвертого порядка — линия пересечения параболических цилиндров

$$\xi = \eta^2 - 2,\quad \xi = \zeta^2 + 2.$$

Легко показать, что и интеграл

$$\int R\left\{x, \sqrt{\frac{ax+b}{mx+n}},\ \sqrt{\frac{cx+d}{mx+n}}\right\}dx$$

всегда представляет собой элементарную функцию.

10. Если жанр кривой $f(x, y) = 0$ не равен нулю, то интеграл

$$\int R\,(x, y)\,dx,$$

вообще говоря, не является уже элементарной функцией. Именно рассмотрение этих интегралов привело к введению в анализ целого ряда новых классов трансцендентных функций. Простейшим является случай, когда жанр кривой равен единице; в этом случае, как будет показано ниже, интегралы выражаются через элементарные функции и некоторые новые трансцендентные, известные под названием эллиптических интегралов. При повышении жанра кривой мы вынуждены вводить все новые и новые классы трансцендентных функций возрастающей сложности.

Однако существует бесчисленное множество частных случаев, когда интегралы, соответствующие кривым жанра один или выше, могут быть выражены через элементарные функции или даже сами являются алгебраическими.

Например, жанр кривой

$$y^2 = 1 + x^3$$

равен единице, однако

$$\int \frac{x+1}{x-2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = 3 \ln \frac{(1+x)^2 - 3\sqrt{1+x^3}}{(1+x)^2 + 3\sqrt{1+x^3}},$$

$$\int \frac{2-x^3}{1+x^3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^3}}.$$

Прежде чем говорить о новых трансцендентных функциях, вообще говоря, порождаемых интегралами этого класса, мы рассмотрим некоторые правила для распознавания указанных особых случаев и определения формы интеграла, если он является элементарным. Заметим, что эта проблема полностью не разрешена.

11. Первая общая теорема этого типа относится к случаю, когда интеграл является алгебраической функцией. Она гласит: *Если интеграл*

$$u = \int y\, dx$$

является алгебраической функцией от x, то он представляет собой рациональную от x и y.

Доказательство основывается на следующих леммах.

1) *Если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — полиномы, причем коэфициенты при различных степенях y в $g(x, y)$ не имеют общего множителя, и*

$$f(x, y) = g(x, y)\, h(x),$$

где $h(x)$ — рациональная функция от x, то $h(x)$ является полиномом.

Пусть $h = \frac{P}{Q}$, где P и Q — взаимно простые полиномы. Тогда

$$fQ = gP.$$

Но если $x - a$ входит множителем в Q, то

$$g(a, y) = 0$$

для всех значений y, и, следовательно, все коэфициенты при степенях y в $g(x, y)$ делятся на $x - a$, что противоречит предположению. Следовательно, Q — постоянная и $h(x)$ — полином.

2) *Пусть $f(x, y)$ — неприводимый полином и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — корни уравнения*

$$f(x, y) = 0$$

в некоторой области D. Пусть, далее, $\Phi(x, y)$ — другой полином, для которого

$$\Phi(x, y_1) = 0.$$

Тогда

$$\Phi(x, y_s) = 0$$

для всех корней y_s, и

$$\Phi(x, y) = f(x, y)\,\psi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ также является полиномом относительно x и y.

Определим с помощью обычного алгорифма Эвклида общий наибольший делитель ω от f и Φ, рассматриваемых как полиномы относительно y. Так как алгорифм Эвклида состоит лишь из цепи алгебраических делений, то ω есть полином от y, имеющий в качестве коэфициентов рациональные функции от x. Мы имеем поэтому:

$$\omega(x, y) = \chi(x, y)\,\lambda(x), \tag{1}$$

$$f(x, y) = \chi(x, y)\,p(x, y)\,\mu(x) = g(x, y)\,\mu(x), \tag{2}$$

$$\Phi(x, y) = \chi(x, y)\,q(x, y)\,\nu(x) = h(x, y)\,\nu(x), \tag{3}$$

где χ, p, q, g и h — полиномы, а λ, μ и ν — рациональные функции. Очевидно, можно принять, что ни в g, ни в h коэфициенты при всех степенях y не имеют общего множителя. Поэтому, согласно первой лемме, μ и ν суть полиномы. Но f неприводима. Поэтому μ и либо χ либо p должны быть постоянными. Если бы χ была постоянной, то ω была бы функцией от одного лишь x. Но это невозможно. Действительно, мы можем определить полиномы L и M от y с коэфициентами, рациональными относительно x, таким образом, чтобы

$$Lf + M\Phi = \omega, \tag{4}$$

а тогда левая часть обращалась бы в нуль при замене y на y_1. Следовательно, постоянным является p, и значит χ совпадает с f с точностью до постоянного множителя. Справедливость утверждения леммы вытекает теперь из соотношения (3).

Из доказанной леммы вытекает, что *y не может удовлетворять никакому уравнению степени меньшей, чем n, имеющему коэфициентами полиномы от x.*

3) *Если y есть алгебраическая функция от x, определяемая уравнением*

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

степени n, то любая рациональная функция $R(x, y)$ от x и y может быть выражена в форме:

$$R(x, y) = R_0 + R_1 y + \ldots + R_{n-1} y^{n-1}, \tag{2}$$

где $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$ — рациональные функции от x.

Функция y является одним из n корней уравнения (1).

Обозначим через $y, y', y'', \ldots$ полную систему корней. Тогда

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{P(x, y)\, Q(x, y')\, Q(x, y'') \ldots}{Q(x, y)\, Q(x, y')\, Q(x, y'') \ldots}, \tag{3}$$

где P и Q — полиномы. Знаменатель представляет собой полином относительно x, коэфициенты которого суть симметрические полиномы от $y, y', y'', \ldots$, на основании теоремы гл. II, § 3, 1 он является поэтому рациональной функцией от x. С другой стороны,

$$Q(x, y')\, Q(x, y'') \ldots$$

есть полином относительно x, коэфициенты которого суть симметрические функции от $y', y'', \ldots$ и, следовательно, согласно теореме II, § 3, 2, представляющие собой полиномы относительно y, имеющие коэфициентами рациональные функции от x. Значит, и числитель дроби (3) является полиномом относительно y, имеющим коэфициентами рациональные функции от x.

Таким образом мы получаем, что $R(x, y)$ есть полином относительно y, имеющий коэфициентами рациональные функции от x. Исключая из него с помощью уравнения (1) все степени y, превышающие $n - 1$, мы приведем $R(x, y)$ к требуемому в лемме виду.

12. Мы приступаем теперь к доказательству нашей основной теоремы. Пусть, стало быть,

$$\int y\, dx = u$$

и u — алгебраическая функция. Пусть, далее,

$$f(x, y) = 0, \quad \phi(x, u) = 0 \tag{1}$$

неприводимые уравнения, степеней n и m соответственно, определяющие y и u. Первым нашим шагом будет доказательство того, что

$$m = n.$$

Для удобства будем писать y_1, u_1 вместо y, u и обозначим через

$$y_1,\ y_2, \ldots, y_n;\quad u_1,\ u_2, \ldots, u_m$$

полные системы корней уравнений (1).

Имеем:

$$\psi(x,\ u_1)=0,$$

и, значит,

$$\chi_1=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\psi}{\partial u_1}=0.$$

Пусть теперь

$$\Omega(x,\ u_1)=\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+y_r\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right).$$

Тогда Ω будет полиномом от u_1 с коэфициентами, симметричными относительно $y_1,\ y_2, \ldots, y_n$ и потому рациональными относительно x.

Уравнения $\psi=0$ и $\Omega=0$ имеют общий корень u_1, и первое из этих уравнений неприводимо. Отсюда, согласно лемме 2, § 11, вытекает, что

$$\Omega(x,\ u_s)=0$$

для всех $s=1,\ 2, \ldots, m$ [1]). А отсюда следует, что при фиксированном s

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+y_r\frac{\partial\psi}{\partial u_s}=0 \tag{2}$$

для некоторого индекса r.

Но также и

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u_s}\frac{du_s}{dx}=0. \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) вытекает [2]), что

$$\frac{du_s}{dx}=y_r, \tag{4}$$

т. е. *что каждое u является интегралом некоторого y.*

---

[1]) Пусть $p(x)$ — общий наименьший знаменатель коэфициентов при степенях u и Ω. Тогда

$$\Omega(x,\ u)\,p(x)=\chi(x,\ u),$$

где χ — полином. Применяя лемму 2, мы видим, что $\chi(x,\ u_s)=0$, и, следовательно,

$$\Omega(x,\ u_s)=0.$$

[2]) ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ не могут одновременно обращаться в нуль при $u=u_s$, ибо ψ — неприводимый полином.

Тем же путем можно показать, что *каждое y является производной от некоторого u*. Пусть

$$\omega(x, y_1)=\prod_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\phi}{\partial u_s}\right).$$

Тогда ω является полиномом от y с коэфициентами, симметричными относительно $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и потому рациональными относительно x. Уравнения $f=0$ и $\omega=0$ имеют общий корень y_1, и, следовательно,

$$\omega(x, y_r)=0$$

для всех $r=1, 2, \ldots, n$. Отсюда вытекает, что при фиксированном r уравнение (2) должно удовлетворяться для некоторого индекса s, и, значит, то же справедливо и для уравнения (4).

Но теперь в уравнении (4) одному значению r не могут соответствовать два разных значения s. Действительно, отсюда следовало бы, что

$$u_s-u_t=c,$$

где $s \neq t$ и c — постоянная, и, значит,

$$\phi(x, u_s)=0, \quad \phi(x, u_s-c)=0.$$

Вычитая одно из этих уравнений из другого, мы получили бы уравнение степени $m-1$ относительно u_s, имеющее коэфициентами рациональные функции от x, а вследствие неприводимости полинома $\phi(x, u)$ это невозможно. Тем же путем можно доказать, что и одному значению s не могут соответствовать два различных значения r.

Таким образом формула (4) устанавливает взаимно однозначное соответствие между значениями r и s. Следовательно,

$$m=n.$$

Ясно, что соответствующим расположением корней мы можем добиться, чтобы

$$\frac{du_r}{dx}=y_r. \tag{5}$$

13. Имеем:

$$y_r=\frac{du_r}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial u_r}}=R(x, u_r),$$

где R — рациональная функция, которую, согласно лемме 3, § 11, можно представить в виде полинома степени $n-1$ относительно $u^{\prime}$ с коэфициентами, являющимися рациональными функциями от x.

Произведение

$$\prod_{s \neq r} (z-y_s)$$

есть полином степени $n-1$ от z, имеющий коэфициентами симметрические полиномы относительно $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}, y_{r+1}, \ldots, y_n$, и, значит, согласно теореме 2 гл. II, § 3, полиномы относительно y_r с коэфициентами, рациональными относительно x. Заменяя y_r его выражением в виде полинома от u_r (см. выше) и исключая u_r^n и все высшие степени u_r, мы получим равенство:

$$\prod_{s \neq r} (z-y_s) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} S_{j,k}(x)\, z^j u_r^k,$$

где все S — рациональные функции от x, по самому методу своего образования не зависящие от выбора частного значения для r. Мы можем поэтому написать:

$$\prod_{s \neq r} (z-y_s) = P(x, z, u_r),$$

где P есть полином от z и u_r, имеющий коэфициентами рациональные функции от x. Очевидно, что

$$P(x, y_s, u_r) = 0$$

для всех s, отличных от r. В частности

$$P(x, y_1, u_r) = 0 \qquad (r=2, 3, \ldots).$$

Таким образом $u_2, u_3, \ldots, u_n$ служат $n-1$ корнями уравнения

$$P(x, y_1, u) = 0$$

относительно u. Мы имеем поэтому:

$$P(x, y_1, u) = T_0(x, y_1) \prod_2^n (u-u_r) =$$

$$= T_0(x, y_1)\{u^{n-1} - u^{n-2}(u_2+u_3+\ldots+u_n)+\ldots\} =$$

$$= T_0(x, y_1)\left[u^{n-1} + u^{n-2}\left\{u_1 + \frac{B_1(x)}{B_0(x)}\right\} + \ldots\right],$$

где $T_0(x, y_1)$ есть коэфициент при u^{n-1} в P, а $B_0(x)$ и $B_1(x)$ —

коэфициенты при u^n и u^{n-1} в ϕ. Приравнивая коэфициенты при u^{n-2} в обеих частях этого равенства, мы получаем:

$$u_1+\frac{B_1(x)}{B_0(x)}=\frac{T_1(x,\ y_1)}{T_0(x,\ y_1)},$$

где $T_1(x,\ y_1)$ — коэфициент при u^{n-2} в P. Но тем самым теорема доказана.

14. Мы можем теперь применить третью лемму § 11 и получаем окончательно, что *если интеграл*

$$\int y\,dx$$

является алгебраической функцией, то он может быть представлен в форме:

$$R_0+R_1y+R_2y^2+\ldots+R_{n-1}y^{n-1},$$

где $R_0,\ R_1,\ldots$ — *рациональные функции от* x.

Наиболее важным является случай, когда

$$y=\sqrt[n]{R(x)},$$

где $R(x)$ — рациональная функция. В этом случае

$$y^n=R(x), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{R'(x)}{ny^{n-1}}. \tag{2}$$

Но

$$\begin{gathered}y=R_0'+R_1'y+\ldots+R_{n-1}'y^{n-1}+\\+\{R_1+2R_2y+\ldots+(n-1)R_{n-1}y^{n-2}\}\frac{dy}{dx}.\end{gathered} \tag{3}$$

Исключая $\frac{dy}{dx}$ из этих уравнений, мы получим следующее уравнение:

$$\chi(x,\ y)=0, \tag{4}$$

где $\chi(x,\ y)$ — полином. Из второй леммы § 11 следует, что это уравнение должно удовлетворяться всеми корнями уравнения (1). Так как при замене y любым другим корнем y_1 уравнения (1) соотношение (2) сохраняет силу, то и (3) также сохраняет силу. Интегрируя, убеждаемся в том, что равенство

$$\int y\,dx = R_0 + R_1 y + \ldots + R_{n-1} y^{n-1}$$

не нарушается при замене y на y_1. Поэтому вместо y можно подставить ωy, где ω — любой корень n-й степени из единицы. Производя эту подстановку и умножая на ω^{n-1}, получаем:

$$\int y\,dx = \omega^{n-1} R_0 + R_1 y + \omega R_2 y^2 + \ldots + \omega^{n-2} R_{n-1} y^{n-1}.$$

Складывая n таких уравнений, соответствующих различным значениям ω, находим, что

$$\int y\,dx = R_1 y.$$

Таким образом в рассматриваемом случае функции $R_0, R_2, \ldots, R_{n-1}$ равны нулю.

Основываясь на полученных выше результатах, Лиувилль [1]) показал, что проблема: *определить, является ли интеграл* $\int y\,dx$ *алгебраической функцией, и если да, то вычислить его,* всегда может быть решена путем конечного числа элементарных алгебраических операций.

15. Недостаток места не позволяет нам проследить во всех деталях ход рассуждений в общем случае. Мы ограничимся решением указанной проблемы для одного частного случая; из этого решения читатель составит себе достаточное представление об общем характере применяемых методов.

Найдем, при каких условиях интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

будет алгебраической функцией. Эту задачу можно было бы, конечно, решить, прямо вычисляя интеграл для общего случая и затем определяя, когда полученная функция приводится к алгебраической. Мы этого делать не будем так как теперь мы в состоянии ответить на вопрос и без прямого интегрирования.

---

[1]) „Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique", *Journal de l'Ecole Polytechnique*, t. 14, cah. 22, 1833, стр. 124—148, второй мемуар; там же, стр. 149—193.

Пусть сначала $ax^2+2bx+c$ — неполный квадрат. Тогда

$$y=\frac{1}{\sqrt{X}},$$

где

$$X=(x-p)^2(ax^2+2bx+c),$$

и интеграл $\int y\,dx$, в случае, если он является алгебраической функцией, имеет вид:

$$\frac{R(x)}{\sqrt{X}}.$$

Отсюда

$$y=\frac{d}{dx}\left(\frac{R}{\sqrt{X}}\right),$$

или

$$2X=2XR'-RX'.$$

Можем теперь показать, что R является полиномом. Действительно, пусть $R=\frac{U}{V}$, где U и V — взаимно простые полиномы. Тогда V, если он не приводится к тождественной постоянной, должен содержать множитель вида

$$(x-a)^{\mu},\quad (\mu>0),$$

и мы можем положить

$$R=\frac{U}{W(x-a)^{\mu}},$$

где U и W не содержат множителя $(x-a)$. Подставляя это выражение вместо R, мы получим после приведения:

$$\frac{2\mu UWX}{x-a}=2U'WX-2UW'X-UWX'-2W^2X(x-a)^{\mu}.$$

Следовательно, X должно делиться на $x-a$. Пусть

$$X=(x-a)^kY,$$

где Y уже не делится на $x-a$. Подставляя в это уравнение, получим:

$$\frac{(2\mu+k)\,UWY}{x-a}=2U'WY-2UW'Y-UWY'-2W^2Y(x-a)^{\mu},$$

что, очевидно, невозможно, так как ни U, ни W, ни Y не делятся на $x-a$. Следовательно, V должно быть тождественной постоянной. Итак,

$$\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\frac{U(x)}{(x-p)\sqrt{ax^2+2bx+c}},$$

где $U(x)$ — полином.

Диференцируя и освобождаясь от радикалов, мы получим:

$$\left\{(x-p)(U'-1)-U\right\}(ax^2+2bx+c)=U(x-p)(ax+b).$$

Пусть Ax^m — высший член в полиноме U. Приравнивая коэфициенты при x^{m+2}, сразу находим, что $m=2$. Мы можем поэтому положить

$$U=Ax^2+2Bx+C,$$

Так что полученное выше уравнение в развернутом виде напишется так

$$\left\{(x-p)(2Ax+2B-1)-Ax^2-2Bx-C\right\}(ax^2+2bx+C)=$$
$$=(x-p)(ax+b)(Ax^2+2Bx+C). \qquad (1)$$

Из этого уравнения явствует, что

$$(x-p)(ax+b)(Ax^2+2Bx+C)$$

делится на $ax^2+2bx+c$. Но $ax+b$ не входит множителем в $ax^2+2bx+c$, ибо последнее выражение, по предположению, не является полным квадратом. Поэтому либо a) $ax^2+2bx+c$ и $Ax^2+2Bx+C$ отличаются друг от друга лишь постоянным множителем, либо b) эти два квадратные трехчлена имеют лишь один общий множитель и, следовательно, $ax^2+2bx+c$ делится на $x-p$. В этом последнем случае мы можем положить

$$ax^2+2bx+c=a(x-p)(x-q), \quad Ax^2+2Bx+C=A(x-q)(x-r),$$

где $p\neq q$, $p\neq r$. Подставляя это в уравнение (1), получаем:

$$a(x-p)(2Ax+2B-1)-aA(x-q)(x-r)=A(ax+b)(x-r),$$

откуда $2Ax+2B-1$ делится на $x-r$. Деление на $aA(x-r)$ дает

$$2(x-p)-(x-q)=x+\frac{b}{a}=x-\frac{1}{2}(p+q),$$

и, следовательно, $p=q$, что противоречит предположению.

Таким образом случай „b" не может иметь места, и мы должны принять, что $ax^2+2bx+c$ и $Ax^2+2Bx+C$ отличаются лишь на постоянный множитель. Мы получаем тогда окончательно, что

$$\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{ax^2+2bx+c}}=k\frac{\sqrt{ax^2+2bx+c}}{x-p},$$

где k — постоянная, причем из уравнения (1) видно, что $x-p$ должно входить множителем в $ax^2+2bx+c$. Нетрудно убедиться в том, что это равенство действительно имеет место, если $ap^2+2bp+c=0$, и что

$$k=\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}},$$

Полученная нами формула эквивалентна указанной в § 5 формуле

$$\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}}=\frac{2}{q-p}\sqrt{\frac{x-q}{x-p}}.$$

Остается рассмотреть случай, когда $ax^2+2bx+c$ является полным квадратом, скажем, равен $a(x-q)^2$. Тогда наш интеграл принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{(x-p)(x-q)},$$

и для его рациональности необходимо, чтобы $p=q$.

В качестве дальнейшего примера читатель может убедиться в том, что для функции y, определенной уравнением

$$y^3-3y+2x=0,$$

интеграл

$$\int y\,dx=\frac{3}{8}(2xy-y^2)\ [1].$$

16. Теорема, полученная в § 11, позволяет завершить доказательство двух фундаментальных теорем, выставленных без доказательства в гл. II, § 5, именно, что

a) e^x не является алгебраической функцией от x,

b) $\ln x$ не является алгебраической функцией от x.

Мы докажем теорему „b“ как частный случай более общей теоремы, именно: *сумма вида*:

$$A\ln(x-\alpha)+B\ln(x-\beta)+\ldots,$$

где коэфициенты $A, B, \ldots$ *не все равны нулю, не может быть алгебраической функцией*. Для доказательства нужно лишь заметить, что рассматриваемая сумма является интегралом от рациональной функции. Поэтому, если бы эта сумма была алгебраической функцией, то, по теореме § 11, она должна была бы быть рациональной, а мы показали уже (гл. IV, § 2), что это невозможно.

Что e^x не является алгебраической функцией, немедленно вытекает теперь из того, что она является обратной функцией по отношению к $\ln x$.

17. Общая теорема § 11 представляет собой первый шаг по пути к строгому доказательству „принципа Лапласа“, упомянутого в гл. III, § 2: „*Интеграл от алгебраической функции не может содержать радикалов, не входящих в самую функцию*“. Этот общий принцип, в соединении с рассуждениями, аналогичными приведенным выше (§ 15) для частного случая, дает нам возможность доказать без особого труда относительно очень многих интегралов,

---

[1] *Raffy*, Sur les quadratures algébriques et logarithmiques, Annales de l'École Normale, sér. 3, t. 2, 1885, стр. 185—206.

что они не могут быть алгебраическими функциями; важнейшим примером служат стандартные эллиптические интегралы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},$$

обращение которых приводит к эллиптическим функциям.

18. Мы переходим к рассмотрению, правда, лишь в самых общих чертах, наиболее трудного вопроса о характере тех интегралов от алгебраических функций, которые могут быть выражены в конечном виде через элементарные трансцендентности. Прежде всего, здесь нужно отметить, что *интеграл от алгебраической функции не может содержать никаких показательных функций.* Как мы выше заметили, в справедливости этой теоремы легко убедиться на рассмотрении уже небольшого числа частных примеров, и, без сомнения, этим путем и пришел к ней Лаплас, во всяком случае не обладавший строгим доказательством. Дело сводится к доказательству того факта, что показательные функции не могут быть исключены из элементарной функции посредством диференцирования. Мы настойчиво рекомендовали бы читателю ознакомиться с чрезвычайно элегантным и остроумным доказательством этого предложения, принадлежащим Лиувиллю [1]). К сожалению, ограниченность места не позволяет нам воспроизвести его здесь.

Для лучшего проникновения в существо дела полезно рассмотреть частные случаи этой теоремы. Предположим, например, что $\int y\,dx$, где y — алгебраическая функция, является полиномом относительно x и e^x:

$$\sum\sum a_{m,n} x^m e^{nx}. \tag{1}$$

Тогда при диференцировании этого выражения e^x должно исчезать: в противном случае мы имели бы алгебраическое соотношение между x и e^x. Приравнивая тождественно нулю коэфициенты при различных степенях e^x в производной от выражения (1), находим, что аналогичные коэфициенты и в самом этом выражении (1) должны быть тождественно равны нулю, так что на самом деле интеграл совсем не содержит e^x. Доказательство Лиувилля представляет собой, собственно, лишь развитие этой идеи.

Итак, если интеграл от алгебраической функции выражается через элементарные функции, то он может содержать лишь алгебраические функции и логарифмы. После этого надлежит доказать, что

---

1) „Mémoire sur les transcendentes elliptiques considérées comme fonctions de leur amplitude“, *Journal de l'École Polytechnique*, t. 14, cah. 23, 1834, стр. 37—83. См. также *Bertrand*, Calcul intégral, стр. 99.

содержащиеся в интеграле логарифмы являются простыми логарифмами от алгебраических функций и могут входить лишь линейно, так что интеграл имеет вид:

$$\int y\,dx = u + A\ln v + B\ln w + \ldots,$$

где $A, B, \ldots$ — постоянные, а $u, v, w, \ldots$ — алгебраические функции. Диференцирование может исключить логарифмы, лишь если они входят в такой простой комбинации.

Наконец, рассуждениями, аналогичными приведенным в § 11—14, можно показать, что $u, v, w, \ldots$ являются рациональными функциями от x и y. В итоге получаем, что *интеграл $\int y\,dx$, в случае, если он является элементарной функцией, представляет собой сумму рациональной функции от x и y и конечного числа логарифмов от таких функций с по тоянными коэ ициентами перед знаком логарифма*. При этом можем предполагать, что никакие два из коэфициентов $A, B, \ldots$ несоизмеримы, — более обще, что между $A, B, \ldots$ не существует никакого линейного соотношения

$$A\alpha + B\beta + \ldots = 0$$

с рациональными $\alpha, \beta, \ldots$ Действительно, если бы существовало такое соотношение, то мы могли бы просто исключить A из интеграла, написав последний в форме:

$$\int y\,dx = u + B\ln\left(wv^{-\frac{\beta}{\alpha}}\right) + \ldots$$

Проверим справедливость этой теоремы в том частном случае, когда кривая $f(x, y) = 0$ уникурсальна. В этом случае x и y являются рациональными функциями $R(t)$, $S(t)$, от параметра t, и интеграл от рациональной функции имеет значение вида

$$u + A\ln v + B\ln w + \ldots,$$

где $u, v, w, \ldots$ — рациональные функции от t. Но t может быть выражено с помощью элементарных алгебраических операций в виде рациональной функции от x и y. Следовательно, $u, v, w, \ldots$ являются рациональными функциями от x и y.

Наибольший интерес представляет случай, когда y есть рациональная функция от x и $\sqrt{X}$, где X — полином. Как мы уже видели, в этом случае y может быть представлен в форме:

$$P + \frac{Q}{\sqrt{X}},$$

где P и Q — рациональные функции от x. Отбросим рациональную часть и предположим, что $y = \frac{Q}{\sqrt{X}}$. Общая теорема в этом случ[ае] гласит, что

$$\int \frac{Q}{\sqrt{X}}\,dx = S + \frac{T}{\sqrt{X}} + A \ln(\alpha + \beta\sqrt{X}) + B \ln(\gamma + \delta\sqrt{X}) + \ldots$$

где S, T, α, β, γ, δ, ... суть рациональные функции от x. Дифер[ен]цируя это уравнение, мы получим алгебраическое тождество, в к[о]тором можно переменить знак при $\sqrt{X}$. Следовательно, можно [пе]ременить знак перед $\sqrt{X}$ и в первоначальном уравнении. Вычит[ая] из этого последнего уравнение, получаемое после перемены знак[а], и заменяя A, ... на $2A$, ... находим:

$$\int \frac{Q}{\sqrt{X}}\,dx = \frac{T}{\sqrt{X}} + A \ln \frac{\alpha + \beta\sqrt{X}}{\alpha - \beta\sqrt{X}} + B \ln \frac{\gamma + \delta\sqrt{X}}{\gamma - \delta\sqrt{X}} + \ldots,$$

что и является стандартной формой значения рассматриваемо[го] интеграла. Очевидно, что мы можем предполагать, что α, β, γ, ... — полиномы.

19. 1) Опираясь на эту теорему, можно доказать, что ряд важных инт[е]гралов, в частности интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

не могут быть выражены через элементарные функции и таким образ[ом] представляют собой существенно новые трансцендентности. Формальн[ое] доказательство этого положения было выполнено Лиувиллем [1]); оно о[с]новывается на рассмотрении всех возможных форм, какие может принимат[ь] производная от выражения вида

$$\frac{T}{\sqrt{X}} + A \ln \frac{\alpha + \beta\sqrt{X}}{\alpha - \beta\sqrt{X}} + \ldots,$$

причем применяемые рассуждения имеют чисто алгебраический характе[р] и не представляют больших теоретических трудностей. Однако доказател[ь]ство Лиувилля чересчур пространно, чтобы можно было его здесь прив[е]сти. Существуют и более короткие доказательства, но они не имеют тако[го] элементарного характера, будучи основаны на идеях, перенесенных из те[о]рии аналитических функций [2]).

[1]) См. упомянутую выше, в подстрочном примечании на стр. 54, ст[а]тью Лиувилля.

[2]) Доказательство, данное Лораном (Traité d'analyse, t. 4, стр. 153 и сл., на первый взгляд представляется соединяющим в себе преимущества об[о]их методов. Но, к сожалению, оно недостаточно строго.

Общие вопросы этого рода, возникающие по поводу интегралов вида

$$\int \frac{Q}{\sqrt{X}}\,dx,$$

или, более обще,

$$\int \frac{Q}{\sqrt[m]{X}}\,dx,$$

чрезвычайно интересны и вместе с тем трудны. Наибольшее внимание привлекал к себе случай, когда $m=2$ и X является полиномом третьей или четвертой степени; в этом случае интеграл вообще называется *эллиптическим*. Если же интеграл этого рода может быть выражен через алгебраические функции и логарифмы, то он называется *псевдоэллиптическим*. Выше были приведены два примера таких интегралов (§ 10). Для исследования этих интегралов были предложены общие методы, причем относительно ряда интересных эллиптических интегралов частного вида было доказано, что они являются псевдоэллиптическими. Так, например, в *Курсе математического анализа* Гурса[1]) доказывается, что если $f(x)$ есть рациональная функция, удовлетворяющая условию

$$f(x)+f\left(\frac{1}{k^2x}\right)=0,$$

то интеграл

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

является псевдоэллиптическим. Однако еще до сих пор не было предложено метода, следуя которому можно было бы всегда определить с помощью конечного числа операций, является ли *данный* эллиптический интеграл псевдоэллиптическим, и если да, то вычислить его. Есть основания предполагать, что такого метода вообще не может существовать. Далее, до настоящего времени, насколько нам известно, не имеется строгого и явного доказательства того, что, например, функция

$$u=\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

не является корнем элементарного трансцендентного уравнения; доказано лишь, что она не может быть *явно* выражена через элементарные трансцендентные функции. Поэтому примененные здесь, а также в мемуарах, на которые мы ссылались, способы рассуждения недостаточны для доказательства того, что обратная функция $x=\operatorname{sn} u$ не является элементарной функцией от u. Однако такое доказательство должно опираться на свойства функции $\operatorname{sn} u$ и потому выходит за пределы настоящей книжки.

Читателя, желающего дальше углубиться в этот предмет, мы отсылаем к оригинальным работам, перечисленным в приложении I.

---

[1]) Т. I, ч. 1, стр. 242, ГТТИ, 1933 г.

2) Особый интерес представляют также *биномиальные интегралы*

$$\int x^m (ax^n + b)^p \, dx,$$

где m, n и p — рациональные числа. Подстановкой $ax^n = bt$ интеграл приводится, с точностью до постоянного множителя, к виду

$$\int t^q (1 + t)^p \, dt,$$

где p и q — рациональны. Если p — целое, а $q = \frac{r}{s}$, то, полагая $t = u^s$, получаем под знаком интеграла рациональное выражение, и интеграл берется. Если q — целое и $p = \frac{r}{s}$, то полагаем $1 + t = u^s$. Если, наконец $p + q$ — целое и $p = \frac{r}{s}$, то полагаем $1 + t = tu^s$.

Чебышев показал (см. приложение I), что эти три случая являются единственными, в которых интеграл может быть вычислен в конечной форме.

20. В § 7—9 были довольно подробно рассмотрены интегралы, соответствующие кривым жанра нуль. В настоящем параграфе рассмотрим в более общих чертах следующий по степени сложности случай, когда жанр равен единице, так что число двойных точек равно

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1 = \frac{1}{2} n (n-3).$$

Клебш показал [1]), что в этом случае координаты точек кривой могут быть представлены в виде *рациональных функций от параметра t и квадратного корня из полинома от t третьей или четвертой степени.*

Кривые

$$y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

$$y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

являются простейшими кривыми жанра 1. Первая есть типическая кривая третьего порядка без двойных точек. Вторая есть кривая четвертого порядка с двумя двойными точками, в данном случае совпадающими с узловой точкой в бесконечности, в чем можно убедиться, вводя для однородности новое переменное z, заменяя y на 1 и сравнивая получающееся уравнение с рассмотренным Сальмоном на стр. 215 его *Higher plane curves*. Читатель, знакомый с теорией плоских алгебраических кривых, вспомнит, что жанр кривой не нарушается при бирациональном преобразовании координат и что всякая кривая может быть бирационально преобразована в любую другую кривую того же жанра.

---

[1]) „Über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen", *Journal für Mathematik*, Bd. 64, стр. 210—270, 1865.

Метод доказательства этой общей теоремы очень схож с методом доказательства соответствующей теоремы для уникурсальных кривых. Простейшим является случай общей кривой третьего порядка. Примем за начало координат какую-нибудь точку на кривой. Тогда уравнение этой кривой будет иметь вид:

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + ex^2 + 2fxy + gy^2 + hx + ky = 0.$$

Рассмотрим пересечения этой кривой с прямой $y = tx$. Исключая y и разрешая получающееся квадратное уравнение относительно x, находим, что единственной иррациональностью, входящей в выражение для x, является

$$\sqrt{T_2^2 - 4T_1T_3},$$

где

$$T_1 = h + kt, \quad T_2 = e + 2ft + gt^2, \quad T_3 = a + 3bt + 3ct^2 + dt^3.$$

Более элегантный метод был предложен Клебшем [1]). Если мы запишем уравнение кривой третьего порядка в виде

$$LMN = P,$$

где L, M, N, P — линейные функции от x и y, так что L, M и N представляют асимптоты, то гиперболы $LM = t$ будут встречать кривую в четырех фиксированных точках в бесконечности и, значит, только в двух точках, зависящих от t. Для этих точек

$$LM = t, \quad P = tN.$$

Исключая y из этих уравнений, мы получим уравнение вида:

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0,$$

где A, B, C — второй степени относительно t. Следовательно:

$$x = -\frac{B}{A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A} = R(t, \sqrt{T}),$$

где $T = B^2 - AC$ есть полином от t не выше четвертой степени.

Пусть, например, кривая будет

$$x^3 + y^3 - 3axy + 1 = 0,$$

так что

$$L = \omega x + \omega^2 y + a, M = \omega^2 x + \omega y + a, N = x + y + a, P = a^3 - 1,$$

---

[1]) См. *Hermite*, Cours d'analyse, стр. 422—425.

где ω — комплексный кубичный корень из единицы. Тогда линия

$$x+y+a=\frac{a^3-1}{t}$$

будет встречать кривую в точках

$$x=\frac{b-at}{2t}\pm\frac{\sqrt{3T}}{6t}, \quad y=\frac{b-at}{2t}\mp\frac{\sqrt{3T}}{6t},$$

где $b=a^3-1$ и $T=4t^3-9a^2t^2+6abt-b^2$.

В частности, для кривой

$$x^3+y^3+1=0$$

имеем:

$$x=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{4t^3-1}}{2t\sqrt{3}}, \quad y=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{4t^3-1}}{2t\sqrt{3}}.$$

21. Из предыдущего явствует, что

$$\int R\left\{x, \sqrt[3]{a+bx+cx^2+dx^3}\right\} dx$$

всегда может быть приведен к эллиптическому интегралу, если жанр кривой

$$y^3=a+bx+cx^2+dx^3$$

будет равен единице.

Интегралы, соответствующие кривым жанра, превышающего единицу, вообще говоря, уже не могут быть приведены к эллиптическим интегралам. Однако среди интегралов, соответствующих любой данной кривой, скажем, жанра 2, найдется бесконечное множество приводимых к эллиптическим интегралам или даже к элементарным функциям, причем существуют кривые жанра 2, для которых *все* такие интегралы приводимы.

Так, например, интеграл

$$\int R\left\{x, \sqrt{x^6+ax^4+bx^2+c}\right\} dx$$

может быть представлен в виде суммы интеграла от рациональной функции и двух интегралов вида

$$\int\frac{R(x^2)\,dx}{\sqrt{x^6+ax^4+bx^2+c}}, \quad \int\frac{xR(x^2)\,dx}{\sqrt{x^6+ax^4+bx^2+c}},$$

а каждый из последних подстановкой $x^2=t$ приводится к эллиптическому.

А между тем жанр кривой

$$y^2 = x^6 + ax^4 + bx^2 + c$$

есть 2. Другим примером может служить интеграл

$$\int R\left\{x, \sqrt[4]{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d}\right\} dx$$ [1]).

22. Мы не можем входить здесь в изложение общей теории эллиптических интегралов, и тем менее интегралов (обычно именуемых абелевыми), соответствующих кривым жанра, превышающего единицу.

Мы видели, что если жанр равен единице, то интеграл может быть приведен к виду:

$$\int R\left(x, \sqrt{X}\right) dx,$$

где

$$X = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$ [2]).

Можно показать, что преобразованием вида

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$$

этот интеграл может быть приведен к интегралу

$$\int R\left(t, \sqrt{T}\right) dt,$$

где

$$T = t^4 + At^2 + B.$$

Тогда мы можем, как и в случае, когда T — полином второй степени (§ 3), разбить этот интеграл на два:

$$\int R(t)\, dt, \quad \int \frac{R(t)\, dt}{\sqrt{T}}.$$

Первый из этих интегралов элементарен, второй же может быть

---

[1]) См. *Legendre*, Traité des fonctions elliptiques, t. 1. chs. 26—27, 32—33; *Bertrand*, Calcul intégral, стр. 67 и сл.; кроме того, *Enneper*, Ellip'ische Funktionen, Note 1, где приведены исчерпывающие библиографические указания.

[2]) Существует аналогичная теория для кривых жанра 2; для них X — полином *шестой* степени.

в свою очередь представлен[1]) в виде алгебраической суммы некоторых кратных от интегралов

$$\int \frac{dt}{\sqrt{T}}, \int \frac{t\,dt}{\sqrt{T}}, \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{T}}$$

и нескольких интегралов вида

$$\int \frac{dt}{(t-\tau)\sqrt{T}}.$$

Эти интегралы, вообще говоря, не могут быть приведены к элементарным функциям и представляют, следовательно, новые трансцендентности.

Прибавим еще, прежде чем закончить эту главу, что алгебраические части таких интегралов могут быть определены с помощью конечного числа элементарных алгебраических операций, аналогично рациональной части интеграла от рациональной функции, а также алгебраической части простых интегралов, рассмотренных в § 14—15.

VI. Интегрирование трансцендентных функций

1. Теория интегрирования трансцендентных функций, естественно, носит гораздо менее законченный характер, чем теории интегрирования функций рациональных или даже алгебраических. Что это и должно быть так, явствует уже из того факта, что для элементарных трансцендентных функций не имеет места общая теорема, сколько-нибудь соответствующая теореме о том, что любая алгебраическая комбинация алгебраических функций может быть рассматриваема как простая алгебраическая функция — корень некоторого уравнения стандартного вида.

Мы не ошибемся, если скажем, что не существует никакой общей теории интегрирования трансцендентных функций или что вся теория сводится к перечислению нескольких случаев, в которых интеграл с помощью подходящей подстановки может быть преобразован в интеграл от рациональной или алгебраической функции. Однако эти случаи чрезвычайно важны для приложений.

2. 1) Интеграл

$$\int F(e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx})\,dx,$$

где F — алгебраическая функция, а $a, b, \ldots, k$ — соизмеримые

---

[1]) См., например, *Гурса*, Курс математического анализа, т. I, ч. I, стр. 240, ГТТИ, 1933.

числа, всегда может быть приведен к интегралу от алгебраической функции. В частности, интеграл

$$\int R(e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx})\,dx,$$

где R — рациональная функция, всегда элементарен. Действительно, прежде всего, подстановкой вида $x = ay$ он приводится к

$$\int R(e^y)\,dy,$$

а этот интеграл после подстановки $e^y = z$ преобразуется в интеграл от рациональной функции. В частности, так как $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ суть рациональные функции от e^x, а $\cos x$ и $\sin x$ — рациональные функции от e^{ix}, то интегралы вида

$$\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\,dx, \quad \int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

всегда представляют собой элементарные функции. Для второго из этих интегралов указанная выше подстановка будет мнимой; к нему, вообще говоря, удобнее применять подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t,$$

также приводящую к интегралу от рациональной функции, ибо

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

2) Интегралы

$$\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} 2x, \ldots, \operatorname{sh} mx)\,dx,$$

$$\int R(\cos x, \sin x, \cos 2x, \ldots, \sin mx)\,dx$$

принадлежат к указанным только что двум типам.

Рассмотрим подробнее интеграл

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx\ ^{1)}.$$

После подстановки $z = e^{ix}$ подинтегральное выражение приведется к рациональной функции $H(z)$; эта последняя может быть разбита на

a) линейную комбинацию постоянной и нескольких положительных и отрицательных степеней z,

b) группы членов типа

$$\frac{A_0}{z-a} + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(z-a)^{n+1}}.$$

---

[1]) См. *Hermite*, Cours d'analyse, стр. 320 и сл.

Интегрирование выражения „a“ даст после обратного перехода к x сумму вида:

$$\sum (c_k \cos kx + d_k \sin kx).$$

В выражении „b“ полагаем $z = e^{ix}$, $a = e^{i\alpha}$; применяя формулу

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{2} e^{-i\alpha}\left\{-1 - i \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x-\alpha)\right\},$$

мы получаем полином степени $n+1$ относительно $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x-\alpha)$. Так как

$$\operatorname{ctg}^2 x = -1 - \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx}, \quad \operatorname{ctg}^3 x = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg}^2 x), \ \ldots,$$

то этот полином может быть записан в форме:

$$C + C_0 \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x-\alpha) + C_1 \frac{d}{dx}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x-\alpha) + \ldots + C_n \frac{d^n}{dx^n}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x-\alpha).$$

Функция $R(\cos x, \sin x)$ представлена теперь в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых непосредственно интегрируется. Если все коэфициенты C_0 равны нулю, то интеграл является рациональной функцией от $\cos x$ и $\sin x$; в противном случае он содержит члены вида:

$$2C_0 \ln \sin \frac{1}{2}(x-\alpha).$$

Примем для упрощения, что в разложении $H(z)$ на простейшие дроби не содержатся члены вида

$$C, \ z^m, \ z^{-m}, \quad (z-a)^{-p} \qquad (p > 1).$$

Тогда

$$R(\cos x, \sin x) = C_0 \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x-\alpha) + D_0 \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x-\beta) + \ldots,$$

где коэфициенты C_0, D_0, ... можно определить, умножая обе стороны уравнения на $\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)$, $\sin\frac{1}{2}(x-\beta)$, ... и приближая x к α, β, ...

Часто представляется удобным применять формулу

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(x-\alpha) = \operatorname{ctg}(x-\alpha) + \operatorname{cosec}(x-\alpha),$$

позволяющую разбить функцию R на две части $U(x)$ и $V(x)$ такие, что

$$U(x+\pi) = U(x), \quad V(x+\pi) = -V(x).$$

Если R имеет период π, то V должно быть тождественно равно нулю. Если

R меняет знак при возрастании x на π, то U должно тождественно обращаться в нуль. Так, без труда находим, что при $m < n$

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{2n} \sum_{0}^{2n-1} \frac{(-1)^k \sin m\alpha}{\sin (x-\alpha)} = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin m\alpha}{\sin (x-\alpha)},$$

или

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} (-1)^k \sin m\alpha \operatorname{ctg} (x-\alpha),$$

где $\alpha = \frac{k\pi}{n}$, смотря по тому, будет ли $m+n$ нечетным или четным.

Точно так же

$$\frac{1}{\sin (x-a) \sin (x-b) \sin (x-c)} = \sum \frac{1}{\sin (a-b) \sin (a-c) \sin (x-a)},$$

$$\frac{\sin (x-d)}{\sin (x-a) \sin (x-b) \sin (x-c)} = \sum \frac{\sin (a-d)}{\sin (a-b) \sin (a-c)} \operatorname{ctg} (x-a).$$

3) Одним из наиболее важных по приложениям является интеграл

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x},$$

где a и b вещественны. Этот интеграл может быть вычислен как только что изложенным методом, так и при помощи подстановки $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$. Однако более элегантным является следующий метод. Если $a > |b|$, то мы принимаем, что a положительно, и применяем подстановку

$$(a+b\cos x)(a-b\cos y) = a^2-b^2,$$

что дает:

$$\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Если же $|a| < |b|$, то мы принимаем, что b положительно, и применяем подстановку

$$(b\cos x+a)(b\operatorname{ch} y-a) = b^2-a^2.$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$$

может быть приведен к этому виду при помощи подстановки $x+\alpha = y$, где $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{c}$. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}, \quad \int \frac{dx}{(a+b\cos x+c\sin x)^n}$$

приводятся с помощью рекуррентных формул или же диференцирования по a

Интеграл

$$\int \frac{dx}{(A\cos^2 x + 2B\cos x \sin x + C\sin^2 x)^n}$$

на самом деле — того же типа, ибо

$$A\cos^2 x + 2B\cos x \sin x + C\sin^2 x = \frac{1}{2}(A+C) + \frac{1}{2}(A-C)\cos 2x + B\sin 2x.$$

Аналогичные методы применимы к соответствующим интегралам для гиперболических функций; таким образом рассмотренный тип включает большое разнообразие употребительных интегралов.

4) Те же подстановки могут быть, конечно, применены и если подинтегральное выражение представляет собой иррациональную функцию от $\cos x$ и $\sin x$, хотя иногда лучше применять подстановку $\cos x = t$, или $\sin x = t$ или $\operatorname{tg} x = t$. Так, интеграл

$$\int R(\cos x, \sin x, \sqrt{X})\, dx,$$

где

$$X = a\cos^2 x + 2h\cos x \sin x + b\sin^2 x + 2g\cos x + 2f\sin x + c,$$

подстановкой $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ приводится к эллиптическому интегралу. Наиболее важными из интегралов этого типа являются:

$$\int \frac{R(\cos x, \sin x)\, dx}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}}, \quad \int \frac{R(\cos x, \sin x)\, dx}{\sqrt{\alpha + \beta\cos x + \gamma\sin x}}.$$

3. Интеграл

$$\int P(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots, e^{kx})\, dx,$$

где $a, b, \ldots, k$ — произвольные числа (соизмеримые или нет), а P — полином, всегда является элементарной функцией. Действительно, его, очевидно, можно разбить на сумму конечного числа интегралов вида

$$\int x^p e^{Ax}\, dx,$$

а

$$\int x^p e^{Ax}\, dx = \left(\frac{\partial}{\partial A}\right)^p \int e^{Ax}\, dx = \left(\frac{\partial}{\partial A}\right)^p \frac{e^{Ax}}{A}.$$

Под этот тип подходит большое количество разнообразных интегралов, таких, как

$$\int x^m (\cos px)^\mu (\sin qx)\, dx, \quad \int x^m (\operatorname{ch} px)^\mu (\operatorname{sh} qx)^\nu\, dx$$

$$\int x^m e^{-\alpha x} (\cos px)^\mu\, dx, \quad \int x^m e^{-\alpha x} (\sin qx)^\nu\, dx$$

(m, μ, ν — целые числа).

Рекуррентные формулы для выписанных интегралов приводятся во всех учебниках интегрального исчисления.

Такие интегралы, как

$$\int P(x,\ \ln x)\,dx, \quad \int P(x,\ \arcsin x)\,dx, \ldots,$$

где P — полином, с помощью очевидных подстановок

$$x = e^y, \quad x = \sin y, \ldots$$

приводятся к интегралам рассматриваемого типа.

4. За исключением двух классов функций, рассмотренных в предыдущих параграфах, не существует сколько-нибудь общих классов трансцендентных функций, интегралы которых можно *всегда* выразить в конечном виде через элементарные функции, хотя, конечно, для бесчисленного множества частных случаев интегралы могут быть вычислены, разумеется, с помощью столь же специальных средств. Однако существует много классов таких интегралов, для которых может быть дана систематическая теория приведения, аналогичная теории приведения для эллиптических интегралов. Такая теория приведения имеет своей целью:

a) разбить всякий интеграл рассматриваемого класса на сумму нескольких интегралов, из которых некоторые элементарны, другие же нет;

b) свести число последних к минимуму;

c) доказать, что эти интегралы не поддаются дальнейшему приведению и представляют собой существенно новые и независимые трансцендентности.

В качестве примера на такой процесс приведения мы рассмотрим интеграл

$$\int e^x R(x)\,dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция от x [1]). Согласно теории разложения на простейшие дроби мы можем представить этот интеграл в виде суммы членов вида:

$$A\int \frac{e^x}{x-a}\,dx, \quad A_m\int \frac{e^x}{(x-a)^{m+1}}\,dx \ldots, \quad B\int \frac{e^x}{x-b}\,dx, \ldots$$

---

[1]) См. *Hermite*, Cours d'analyse, стр. 352 и сл.

Но

$$\int \frac{e^x}{(x-a)^{m+1}}\,dx = -\frac{e^x}{m(x-a)^m} + \frac{1}{m}\int \frac{e^x}{(x-a)^m}\,dx;$$

следовательно, в итоге наш интеграл будет содержать лишь

a) член

$$e^x S(x),$$

где $S(x)$ — рациональная функция;

b) конечное число членов вида

$$a\int \frac{e^x dx}{x-a}.$$

Если все коэфициенты a равны нулю, то интеграл может быть представлен в конечной форме $e^x S(x)$. Если же не все они равны нулю, то мы во всяком случае можем утверждать, что интеграл не может быть представлен *в этой форме*[1]), ибо соотношение вида

$$a\int \frac{e^x dx}{x-a} + \beta\int \frac{e^x dx}{x-b} + \ldots + \varkappa\int \frac{e^x dx}{x-k} = e^x T(x),$$

где $T(x)$ — рациональная функция, не может иметь места для всех значений x. Чтобы убедиться в этом, достаточно только в интеграле $\int \frac{e^x dx}{x-a}$ положить $x = a + h$ и разложить его по возрастающим степеням h. Тогда

$$a\int \frac{e^x dx}{x-a} = ae^a \int \frac{e^h}{h}\,dh = ae^a(\ln h + h + \ldots),$$

причем в последующих членах *логарифмы* уже не содержатся[2]).

Рассмотрим, например, интеграл

$$\int e^x\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 dx.$$

Он равен

$$e^x - 3\int \frac{e^x}{x}\,dx + 3\int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{e^x}{x^3}\,dx.$$

---

[1]) См. замечания в конце настоящего параграфа.

[2]) Этому предложению нетрудно дать и чисто алгебраическое доказательство, с помощью того же метода, что и в гл. IV, § 2.

Так как

$$3\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{3e^x}{x} + 3\int \frac{e^x}{x}\,dx$$

и

$$-\int \frac{e^x}{x^3}\,dx = \frac{e^x}{2x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = \frac{e^x}{2x^2} + \frac{e^x}{2x} - \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}\,dx,$$

то в итоге получаем:

$$\int e^x\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 dx = e^x\left(1 - \frac{7}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Аналогичным путем находим, что

$$\int e^x\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 dx = 2e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x}\right);$$

таким образом этот интеграл представляет собой уже элементарную функцию.

Так как

$$\int \frac{e^x\,dx}{x-a} = e^a\int \frac{e^y}{y}\,dy,$$

где $x = y + a$, то все интегралы рассматриваемого вида приводятся к известным функциям и одной еще трансцендентной функцин

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx,$$

обозначаемой через Lie^x, играющей большую роль в теории чисел. Естественно возникает вопрос, не будет ли этот интеграл также элементарной функцией.

Лиувилль [1]) доказал следующую теорему: *если интеграл*

$$\int e^x y\,dx,$$

где y — алгебраическая функция от x, является элементарной функцией, то он равен

$$e^x(\alpha + \beta y + \ldots + \lambda y^{n-1}),$$

где α, β, ..., λ — рациональные функции от x и n — степень алгебраического уравнения, определяющего y как функцию от x.

---

[1]) „Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes", *Journal für Mathematik*, Bd. 13, 1835, стр. 93—118. Лиувилль показывает, что интеграл указанной формы всегда может быть вычислен элементарными методами.

Доказательство Лиувилля основывается на тех же общих принципах, что и доказательства соответствующих теорем, относящихся к интегралу $\int y\,dx$. Замечаем, что логарифмические выражения не могут входить в интеграл, что создает сходство нашей теоремы с теоремой, имеющей место для $\int y\,dx$ в том простом случае, когда этот последний интеграл является *алгебраической* функцией. Метод, с помощью которого доказывается, что логарифмические выражения не входят в интеграл, по существу совпадает с методом, которым доказывается, что если они входят в интеграл от алгебраической функции, то только линейно. В данном случае наличие показательного фактора не оставляет места даже и для этой возможности, ибо диференцирование не исключает логарифмов, если последние входят в комбинации

$$e^x \ln f(x).$$

Если, в частности, y есть рациональная функция, то интеграл должен иметь вид:

$$e^x R(x).$$

Но для $y=\frac{1}{x}$ мы уже доказали, что это невозможно. Следовательно, „интегральный логарифм“

$$Lie^x=\int \frac{e^x}{x}\,dx=\int \frac{dv}{\ln y}$$

действительно представляет собой новую трансцендентную функцию, не могущую быть выраженной в конечной форме через элементарные функции; и то же справедливо для всех интегралов следующего вида:

$$\int e^x R(x)\,dx,$$

для которых указанный выше рекуррентный процесс приводит к интегралам

$$a\int \frac{e^x dx}{x-a}$$

с $a \neq 0$.

Все эти соображения могут быть распространены и на интегралы

$$\int \sin x R(x)\,dx, \quad \int \cos x\, R(x)\,dx.$$

Каждый из этих интегралов будет либо вида

$$\cos x\, R_1(x) + \sin x\, R_2(x),$$

либо равен сумме члена этого вида и нескольких членов, содержащих трансцендентности

$$\int \frac{\cos x}{x}\, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\, dx;$$

функции, представляемые этими двумя последними интегралами, называются интегральным косинусом и интегральным синусом от x и обозначаются $Ci x$ и $Si x$. Они, конечно, не отличаются существенно от интегрального логарифма.

5. Лиувилль пошел еще дальше и показал, что всегда возможно определить, является ли интеграл

$$\int (Pe^p + Qe^q + \ldots + Te^t)\, dt,$$

где $P, Q, \ldots, T, p, q, \ldots, t$ — алгебраические функции, элементарной функцией от t, и вычислить его, если он элементарен [1]. Наиболее общей теоремой в этом направлении, также принадлежащей Лиувиллю, является следующая:

„Если производные от $y, z, \ldots$ суть алгебраические функции от $x, y, z, \ldots$, далее, F — алгебраическая функция и интеграл

$$\int F(x, y, z, \ldots)\, dx$$

элементарен, то он должен иметь вид:

$$t + A \ln u + B \ln v + \ldots,$$

где $t, u, v, \ldots$ — алгебраические функции от $x, y, z, \ldots$ Если производные, а также F являются рациональными функциями от $x, y, z, \ldots$, то $t, u, v, \ldots$ также будут рациональными относительно $x, y, z, \ldots$

Эта теорема применима, например, к

$$F(x, e^x, e^{e^x}, \ln x, \ln\ln x, \cos x, \sin x).$$

---

[1]) Из результата Лиувилля, в частности, следует, что $\int e^{-x^2} dx$ не является элементарной функцией.

Действительно, обозначая различные аргументы функции F через x, y, z, ξ, η, ζ, θ, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=y, \quad \frac{dz}{dx}=yz, \quad \frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{x},$$
$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{1}{x\xi}, \quad \frac{d\zeta}{dx}=-\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \frac{d\theta}{dx}=\sqrt{1-\theta^2}.$$

Идеи, на которые опирается доказательство теоремы, не отличаются существенно от применявшихся нами на протяжении всех предыдущих глав.

6. В качестве заключительного примера на применение этих идей рассмотрим следующий вопрос: *при каких условиях интеграл*

$$\int R(x)\ln x\,dx,$$

где R — рациональная функция, является элементарным? Во всяком случае интеграл должен иметь вид:

$$R_0(x, \ln x)+A_1\ln R_1(x, \ln x)+A_2\ln R_2(x, \ln x)+\ldots .$$

Но в производную от этого выражения $\ln x$ входит только линейно, умноженный на рациональную функцию от x. Это приводит нас к заключению, что 1) $R_0(x, \ln x)$ должно иметь вид

$$S(x)(\ln x)^2+T(x)\ln x+U(x),$$

где S, T и U рациональны, и 2) R_1, R_2, ... должны быть рациональными функциями от одного только x. Таким образом интеграл может быть выражен в форме:

$$S(x)(\ln x)^2+T(x)\ln x+U(x)+\sum B_k\ln(x-a_k).$$

Диференцируя и приравнивая результат подинтегральному выражению, получаем:

$$S'=0, \quad \frac{2S}{x}+T'=R, \quad \frac{T}{x}+U'+\sum\frac{B_k}{x-a_k}=0.$$

Следовательно, S есть постоянная, скажем, $\frac{1}{2}C$, и

$$T=\int\left(R-\frac{C}{x}\right)dx.$$

Мы можем всегда определить с помощью конечного числа элементарных операций, является ли этот интеграл рациональным для некоторого значения C. Если нет, то наш исходный интеграл не будет элементарной функцией. Если же T — рациональная функция для некоторого C, то мы должны вычислить ее и подставить в интеграл

$$U = -\int \left\{\frac{T}{x} + \sum \frac{B_k}{x-a_k}\right\} dx = -\int \frac{T}{x}\, dx - \sum B_k \ln (x - a_k).$$

Этот интеграл должен быть рациональным для некоторого значения произвольной постоянной, входящей в T. Рациональную часть интеграла

$$\int \frac{T}{x}\, dx$$

мы можем вычислить; логарифмические же члены

$$\sum B_k \ln (x - a_k)$$

должны быть тогда так подобраны, чтобы они взаимно уничтожились с трансцендентной частью этого интеграла. Таким образом для элементарности нашего исходного интеграла необходимо и достаточно, чтобы R имело вид

$$\frac{C}{x} + \frac{d}{dx}\{R_1(x)\},$$

где C — постоянная и R_1 — рациональная функция. Что в этом случае интеграл действительно элементарен, убеждаемся непосредственно интегрированием по частям:

$$\int \left(\frac{C}{x} + R_1'\right) \ln x\, dx = \frac{1}{2} C (\ln x)^2 + R_1 \ln x - \int \frac{R_1}{x}\, dx.$$

В частности, интегралы

$$1)\ \int \frac{\ln x}{x-a}\, dx, \qquad 2)\ \int \frac{\ln x}{(x-a)(x-b)}\, dx$$

не являются элементарными функциями, если в первом $a \neq 0$, и во втором $b \neq a$. Если интеграл рассматриваемого типа элементарен, то интегрирование всегда может быть выполнено, с той, конечно, оговоркой, которая была сделана относительно интегрирования рациональных функций.

Вопрос, рассмотренный в § 6, является, разумеется, лишь одним из целого класса аналогичных вопросов. Мы рекомендовали бы читателю самостоятельно поставить и рассмотреть еще какую-нибудь из задач этого типа.

7. Из всего предыдущего явствует, что число классов трансцендентных функций, интегралы которых всегда элементарны, чрезвычайно ограниченно и что такие интегралы, как

$$\int f(x,\ e^x)\, dx, \quad \int f(x,\ \ln x)\, dx,$$

$$\int f(x,\ \cos x,\ \sin x)\, dx, \quad \int f(e^x,\ \cos x,\ \sin x)\, dx,$$

где f — алгебраическая или даже рациональная функция, представляют собой, вообще говоря, новые трансцендентности. Эти новые трансцендентности, подобно трансцендентностям, возникающим при интегрировании алгебраических функций (например эллиптическим интегралам), во многих случаях чрезвычайно интересны и важны. Их можно представить часто в виде бесконечных рядов или определенных интегралов, либо же исследовать их свойства, опираясь на определяющие их интегральные выражения. Установленный факт *неэлементарности* такой функции лишь повышает ее значение. При введении этих функций в анализ вместе с ними возникают новые проблемы интегрирования. Мы можем, например, задаться вопросом, при каких условиях эллиптический интеграл, или эллиптическая функция, или же комбинация таких функций и элементарных функций могут быть проинтегрированы в конечном виде с помощью элементарных и эллиптических функций. Но для решения этой фундаментальной теоремы интегрального исчисления в такой, более общей, форме необходимо уже располагать решением частных проблем, сформулированных в гл. III.

ПРИЛОЖЕНИЕ

БИБЛИОГРАФИЯ

Приводим, прежде всего, список работ Абеля, Лиувилля и Чебышева, относящихся к вопросам, обсуждаемым в настоящей книжке.

N. H. Abel

1. Über die Integration der Differential-Formel $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$, wenn R und ρ ganze Funktionen sind, *Journal für Mathematik*, Bd. I, 1826, стр. 185—221 (*Oeuvres*, t. 7, стр. 104—144).
2. Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, *Journal für Mathematik*, Bd. 4, 1829, стр. 236—277, 309—348 (*Oeuvres*, t. 1, стр. 518—617).
3. Théorie des transcendantes elliptiques (*Oeuvres*, t. 2, стр. 87—188).

J. Liouville

1. Mémoire sur la classification des transcendantes, et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients, *Journal de mathématiques*, sér. 1, t. 2, 1837, стр. 56—104.
2. Nouvelles recherches sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique, *там же*, t. 3, 1838, стр. 20—24 (первоначально опубликовано в *Comptes Rendus*, 28 авг. 1837).
3. Suite du mémoire sur la classification des transcendantes, et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients, *там же*, стр. 523—546.
4. Note sur les transcendantes elliptiques considérées comme fonctions de leur module, *там же*, t. 5, 1840, стр. 34—37.
5. Mémoire sur les transcendantes elliptiques considérées comme fonctions de leur module, *там же*, стр. 441—464.
6. Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique, *Journal de l'École Polytechnique*, t. 14, cahier 22, 1833, стр. 124—148 (опубликовано также в *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. 5, 1838, стр. 76—151).
7. Second mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique, *там же*, стр. 149—193 (точно так же опубликован кроме того там же, где и предыдущий).
8. Mémoire sur les transcendantes elliptiques considérées comme fonctions de leur amplitude, *там же*, cahier 23, 1834, стр. 37—83.
9. Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes, *Journal für Mathematik*, Bd. 13, 1835, стр. 93—118.

П. Чебышев (Tschebyscheff)

1. Sur l'intégration des différentielles irrationnelles, *Journal de mathématiques*, sér. 1, t. 18, 1853, стр. 87—111 (*Oeuvres*, t. 1, стр. 147—168).
2. Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré, *там же*, sér. 2, t. 2, 1857-

стр. 1—42 (*Oeuvres*, t. 1, стр. 171—200; опубликовано также в *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg*, sér. 6, t. 6, 1857, стр. 203—232).

3. Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}dx$, *там же*, sér. 2, t. 9, 1864, стр. 225—241 (*Oeuvres*, t. 1, стр. 517—530; первоначально опубликовано в *Bulletin de l'Académie Impériale der Sciences de St-Pétersbourg*, t. 3, 1861, стр. 1—12).
4. Sur l'intégration des différentielles, irrationnelles, *там же*, стр. 242—246 (*Oeuvres*, t. 1, стр. 511—514; первоначально опубликовано в *Comptes Rendus*, 9 июля 1860).
5. Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine cubique, (*Oeuvres*, t. 1, стр. 563—608, опубликовано первоначально только на русском языке).

Кроме того, рекомендуем также ознакомиться со следующими работами:

A. Clebsch

Über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, *Journal für Mathematik*, Bd. 64, 1865, стр. 210—270.

I. Dolbnia

Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel, *Journal de mathématiques*, sér. 4, t. 6, 1890, стр. 293—311.

A. G. Greenhill

Pseudo-elliptic integrals and their dynamical applications, *Proc. London, Math. Soc.*, ser. 1, vol. 25, 1894, стр. 195—304.

G. H. Hardy

Properties of logarithmico-exponential functions, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 10, 1910, стр. 54—90.

L. Königsberger

Bemerkungen zu Liouville's Classificierung der Transcendenten, *Mathematische Annalen*, Bd. 28, 1886, стр. 483—492.

L. Raffy

Sur les quadratures algébriques et logarithmiques, *Annales de l'École Normale*, sér. 3, t. 2, 1885, стр. 185—206.

K. Weierstrass

Über die Integration algebraischer Differentiale vermittelst Logarithmen, *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1857, стр. 148—157 (*Werke*, Bd. 1, стр. 227—232).

G. Zolotareff

Sur la méthode d'intégration de M. Tschebyscheff, *Journal de mathématiques*, sér. 2, t. 19, 1874, стр. 161–188.

Дальнейшие сведения о псевдо-эллиптических интегралах и вообще о вырожденных случаях абелевых интегралов можно найти в ряде заметок следующих авторов: Dolbnia, Kapteyn и Ptaszycki в *Bulletin des sciences mathématiques* и Goursat, Gunther, Picard, Poincaré и Raffy в *Bulletin de la Société Mathématique de France;* см. также Legendre, *Traité des fonctions elliptiques* (t. 1, гл. 26), Halphen, *Traité des fonctions elliptiques* (t. 2, гл. 14) и Enneper, *Elliptische Funktionen.* Литература по общей теории алгебраических функций и их интегралов чересчур обширна, чтобы ее можно было здесь привести; отсылаем читателя за справками к курсу Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, а также к статье Wirtinger, *Algebraische Funktionen und ihre Integrale* в *Enzyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, II, B. 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ АБЕЛЯ ТЕОРЕМЫ гл. V, § 11

Доказательство Абеля (Oeuvres, t. I, стр. 545) таково:

Имеем

$$\Psi(x, u) = 0, \tag{1}$$

где Ψ — неприводимый полином степени m относительно u. С помощью уравнения $f(x, y) = 0$ мы можем y ввести в Ψ, после чего уравнение (1) примет вид:

$$\Phi(x, y, u) = 0, \tag{2}$$

где Φ — полином от трех переменных x, y и u [1]), причем мы можем принять, что Φ, так же как и Ψ, имеет степень m относительно u и неприводим, т. е. не делится ни на какой другой полином той же формы, не совпадающий с ним с точностью до постоянного множителя или не приводящийся к постоянной.

Из уравнений $f = 0$, $\Phi = 0$ имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{du}{dx} = 0,$$

---

[1]) „Or, au lieu de supposer ces coefficiens rationnels $\ln x$, nous les supposerons rationnels $\ln x, y$; *car cette supposition permise simplifiera beaucoup le raisonnement*". [Но вместо того, чтобы предполагать коэфициенты рациональными относительно x, y, мы будем предполагать их рациональными относительно x, y и u, *ибо это предположение значительно упростит наши рассуждения.*]

откуда, исключая $\frac{dy}{dx}$, получаем уравнение такого вида:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\lambda(x, y, u)}{\mu(x, y, u)},$$

где λ и μ — полиномы от x, y и u. Для того чтобы u было интегралом от y, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda-y\mu=0. \tag{3}$$

Абель применяет теперь к полиномам Φ и $\lambda-y\mu$ лемму 2 § 11, или, вернее, ее аналог для полиномов от u, коэфициентами которых служат полиномы от x и y, и заключает, что *все* корни u, $u_1, \ldots$ уравнения $\Phi=0$ удовлетворяют уравнению (3). Отсюда вытекает, что эти корни u, $u_1, \ldots$ все являются интегралами от y, так что интегралом от y является также и

$$\frac{u+u_1+\ldots}{m}. \tag{4}$$

Но выражение (4) является симметрической функцией от корней полинома (2), следовательно, оно представляет собой рациональную функцию от x и y, что и завершает доказательство[1]).

Нужно отметить, что предположение, что уравнение (2) действительно включает y, является существенным, если мы хотим избежать абсурдного заключения, что u необходимо является *рациональной функцией от одного только* x.

Но, с другой стороны, отнюдь не очевидно, каким образом наличие y в полиноме Φ отражается на дальнейших этапах доказательства.

Решающим моментом во всем доказательстве является заключение, что раз $\Phi=0$ и $\lambda-y\mu=0$ как уравнения относительно u имеют общий корень, а Φ неприводимо, то полином $\lambda-y\mu$ должен делиться нацело на Φ. Однако это заключение неверно.

Мы имели бы право применить так лемму лишь в том случае, если бы уравнение (3) удовлетворялось одним из корней уравнения (2) *тождественно*, т. е. для всех значений x и y. Но это не имеет места. Уравнения (2) и (3) удовлетворяются для одних и тех же значений u, *лишь если x и y связаны соотношением* $f(x, y)=0$.

Пусть, например,

$$y=\frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad u=2\sqrt{1+x}.$$

Тогда мы можем принять

$$f=(1+x)y^2-1,$$

$$\Psi=u^2-4(1+x)$$

и

$$\Phi=uy-2.$$

---

[1]) Бертран (Calcul intégral, гл. 5) заменяет этот последний шаг в рассуждениях Абеля замечанием, что если u и u_1 оба являются интегралами от y, то разность $u-u_1$ будет постоянной (см. стр. 50). Отсюда следует, что степень уравнения, определяющего u, может быть понижена, что противоречит предположению о неприводимости этого уравнения.

Дифеpенцируя уравнения $f=0$ и $\Psi=0$ и исключая $\frac{dy}{dx}$, находим:

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{2(1+x)}=\frac{\lambda}{\mu}.$$

Таким образом

$$\Phi=uy-2,\quad \lambda-y\mu=u-2y(1+x).$$

Но эти полиномы имеют общий множитель, лишь если выполняется уравнение $f=0$.

Приведенное в тексте доказательство теоремы Абеля принадлежит H. T. J. Nerton'y.

Редакция Г. А. Сухамлинова. Оформление Н. Я. Костиной
Корректура З. В. Смирновой. Выпускающий Т. С. Малышева.
Сдано в производство 7/VIII 1934 г. подписано к печати 2/XII 1934 г.
Печ. лист. $5^1/_4$. Тираж 6 000. Формат $82\times110^1/_{32}$. Печ. зн. в печ. л. 40 000.
Заказ 309 3729. ГТТИ № 136. Уполн. Главлита В—100881.

1-я Журнальная типография ОНТИ НКТП СССР. Москва, Денисовский пер., 30.