ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

ВЫПУСК 6

И. М. ГЕЛЬФАНД, М. И. ГРАЕВ,
И. И. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

517.2
Г 32
УДК 517.5

АННОТАЦИЯ

Теория представлений групп позволила по-новому понять классические результаты теории автоморфных функций, шире поставить задачи этой теории и получить ряд новых важных результатов. Важную роль играет также язык теории аделей — недавно возникшего раздела математики. В книге имеется много новых понятий и результатов, с которыми до сих пор можно было ознакомиться лишь по журнальной литературе. Поэтому книга представляет интерес для разных кругов читателей, интересующихся современной математикой. Книга может быть рекомендована студентам старших курсов, аспирантам и научным работникам в области математики.

Знания материала предыдущих выпусков от читателя не требуется.

Израиль Моисеевич Гельфанд, Марк Иосифович Граев, Илья Иосифович Пятецкий-Шапиро

Теория представлений и автоморфные функции

(Серия: «Обобщенные функции»)

М., 1966 г., 512 стр. с илл.

Редактор *А. А. Кириллов.*

ехн. редактор *К.Ф. Брудно.* Корректор *Г. Г. Желтова*

дано в набор 30/XI 1965 г. Подписано к печати 27/I 1966 г. Бумага 84 × 108 1/32
из. печ. л. 16 Условн. печ. л. 26.88. Уч.-изд. л. 24.88.
іраж 11500 экз. Т-01444. Цена книги 1 р. 77 к. Заказ 2010

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

2-2-3
78-66

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классическая теория автоморфных функций, возникшая в трудах Клейна и Пуанкаре, была связана с изучением аналитических функций в единичном круге, инвариантных относительно дискретной группы преобразований. Поскольку сам единичный круг можно рассматривать как плоскость Лобачевского в интерпретации Пуанкаре, то можно сказать, что классическая теория автоморфных функций связана с изучением аналитических функций на плоскости Лобачевского, инвариантных относительно некоторой дискретной группы движений этой плоскости.

Существенную роль в дальнейшем развитии теории автоморфных функций сыграли работы Гекке, Зигеля, Зельберга и ряда других исследователей. Отметим, в частности работы Годмана, Мааса, Рельке, Петерсона, Лэнглендса, занимавшихся теми или иными аспектами связи автоморфных функций с теорией групп. С другим очень интересным направлением в теории автоморфных функций можно познакомиться по работам Альфорса и Берса.

Развитие теории автоморфных функций все в большей степени показывало существенность теоретико-группового подхода. В настоящее время многие из понятий этой теории можно связать с произвольной группой Ли и ее дискретной подгруппой.

Связь теории представлений групп с теорией автоморфных функций стала особенно отчетливой в последние 10—20 лет в связи с развитием теории бесконечномерных представлений групп. Хотя эта связь чувствовалась еще раньше (например, в работах Клейна и Гекке), однако по-настоящему ее удалось понять только после построения теории бесконечномерных представлений групп Ли.

Одной из первых работ в этом направлении была работа И. М. Гельфанда и С. В. Фомина, в которой понятия теории представлений связывались с теорией динамических систем и теорией автоморфных функций. Заметим, что связь автоморфных функций с динамическими системами встречалась по существу еще в работах Хопфа по динамическим системам.

Кроме теории бесконечномерных представлений групп Ли, получившей большое развитие за последние 20 лет (см. работы Гельфанда и Наймарка, Хариш-Чандра, Гельфанда и Граева и др.), важную роль в построении современной теории автоморфных функций сыграло создание теории алгебраических групп в работах Шевалле, Бореля, Хариш-Чандра, Титца и др.

Пожалуй, одним из наиболее замечательных понятий, возникшим в последние годы, явилась группа аделей. В процессе работы над этой книгой авторы убедились, насколько естественными становятся многие понятия, когда они применяются к группе аделей и ее дискретной подгруппе главных аделей.

Книга состоит из трех глав. В первой главе рассматриваются задачи теории представлений и теории автоморфных функций, связанные с группой Ли и ее дискретной подгруппой. Хотя отдельные вопросы этой главы носят общий характер, основные результаты относятся к группе вещественных матриц 2-го порядка и ее дискретной подгруппе. В частности, в этой главе изложены на языке теории представлений замечательные результаты Зельберга (формула следа Зельберга).

Во второй главе строится теория представлений группы матриц 2-го порядка с элементами из произвольного локально компактного непрерывного поля. При этом хорошо изученная теория представлений группы комплексных матриц и группы вещественных матриц (см. например, «Обобщенные функции», вып. 5) возникает здесь как частный случай. При таком общем подходе становятся более понятными многие факты теории представлений. Отметим также, что возникающие в этой теории естественным путем специальные функции над произвольным полем близки к интересным функциям теории чисел (суммы Гаусса, суммы Клостермана и др.).

Третья глава посвящена изучению групп аделей и естественных однородных пространств, возникающих в связи с этими группами. Поскольку знания теории аделей у читателя не предполагается, то в первых двух параграфах излагаются основные понятия этой теории.

С группой аделей связано замечательное однородное пространство (пространство классов смежности по подгруппе главных аделей), которое и явилось основным объектом исследования во всех работах, посвященных аделям. В то время как эти работы были посвящены изучению самого однородного пространства, вычислению его объема (числа Тамагава) и т. д., мы исследуем здесь пространство функций на этом однородном пространстве (см. § 4, 6, 7). С этой точки зрения основополагающую работу Тэйта, в которой дан с помощью аделей вывод функционального уравнения для ζ-функции Римана, можно рассматривать как аналог (для случая матриц 1-го порядка) проведенного здесь изучения представлений. Многие из результатов авторов этой книги были позднее получены другими методами Годманом, работа которого оказалась весьма полезной авторам при написании § 4 этой книги.

Последние три параграфа посвящены началам общей теории для группы аделей произвольной алгебраической редуктивной группы. Фундаментальную роль в этой теории играет некоторая группа автоморфизмов функционального пространства, образующая представление группы Вейля. Симметрии относительно этой группы и являются истинным ключом к соотношениям типа функционального соотношения для ζ-функции Римана. Эти автоморфизмы тесно связаны с так называемыми орисферическими отображениями. Поскольку многое из излагаемого в этих параграфах материала изучалось совсем недавно, то это не могло не наложить отпечатка на характер самого изложения, которое зачастую оказывается сложным.

Авторы, однако, надеются, что дополнительный труд, затраченный читателем при чтении этих параграфов, быть может окупится тем, что читатель сможет при желании включиться в работу над этими далеко не завершенными вопросами.

Книгу можно читать независимо от предыдущих выпусков серии «Обобщенные функции», однако идейно она тесно связана с теорией обобщенных функций и особенно с содержанием вып. 5, посвященного изложению аналогичных вопросов на другом материале. Ее можно рассматривать как естественное продолжение 5-го выпуска.

Авторы глубоко признательны А. А. Кириллову, взявшему на себя труд по редактированию книги и написавшему один из разделов книги (Добавление к гл. II), в котором он изложил свои новые результаты.

Примечание при корректуре. После сдачи рукописи в типографию авторы познакомились с препринтом новой интересной работы Лэнглендса и материалами летней школы по теории алгебраических групп, а также с работой C. Moore (Ann. Math., 1965, **82**, № 1). В этих работах читатель сможет получить дополнительные сведения по материалу, изложенному в этой книге.

Авторы

ГЛАВА I

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ДИСКРЕТНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ГРУППОЙ

§ 1. Общие сведения

1. Однородные пространства и их стационарные подгруппы. Начнем с некоторых общих определений.

Пусть X — топологическое пространство и G — топологическая группа. Говорят, что G является *группой преобразований или группой движений пространства* X, если каждому элементу g группы G отвечает взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование

$$x \to xg$$

пространства X. При этом предполагаются выполненными следующие условия:

1) единичному элементу e группы G отвечает тождественное преобразование, т. е. $xe = x$ для любого $x \in X$;

2) $(xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$ для любого x из X и любых g_1, g_2 из G;

3) функция $f(x, g) = xg$, относящая каждой паре $x \in X$ и $g \in G$ точку $xg \in X$, является непрерывной функцией от пары x и g.

Пространство X с группой движений G назывется *однородным пространством*, если любую его точку x можно перевести движениями в любую другую точку. В этом случае говорят также, что группа G *транзитивно действует* на пространстве X.

Напомним, как можно описать все однородные пространства, на которых транзитивно действует заданная группа G, в терминах самой группы G.

Пусть X — однородное пространство с группой движений G. Зафиксируем в нем точку x_0. Сопоставим каждой точке x из X множество преобразований, переводящих x_0 в x. Выясним, что это за множества. Сначала рассмотрим преобразования, переводящие x_0 в x_0. Очевидно, что они образуют замкнутую подгруппу Γ группы G. Эта подгруппа называется *стационарной группой* точки x_0. Далее, если g — одно из преобразований, переводящих x_0 в x, то совокупность всех преобразований, переводящих x_0 в x, образует правый класс смежности Γg подгруппы Γ.

Тем самым установлено соответствие между точками однородного пространства X и правыми классами смежности подгруппы Γ. Это соответствие взаимно однозначно.

Заметим, что множество классов смежности $\Gamma \setminus G$ естественным образом наделено структурой топологического пространства: окрестностями класса смежности Γg являются образы окрестностей элемента g при отображении $G \to \Gamma \setminus G$.

Очевидно, что движению g в исходном пространстве X отвечает умножение классов смежности справа на g.

Итак, *любое однородное пространство с группой движений G может быть получено следующей конструкцией. Берется подгруппа Γ группы G. Точками пространства X объявляются правые классы смежности Γg группы G по подгруппе Γ. Движение в X, отвечающее элементу g_0, определяется как умножение классов смежности справа на g_0.*

Это пространство правых классов смежности будем всегда обозначать так:

$$X = \Gamma \setminus G.$$

Мы установили, что каждое однородное пространство X с группой движений G можно отождествить с пространством классов смежности $\Gamma \setminus G$, где Γ — стационарная подгруппа точки x_0 из X. При этом выбор самой точки x_0 совершенно произволен. Легко видеть, что стационарные подгруппы различных точек между собой сопряжены; именно, если элемент g переводит точку x_0 в точку x, то стационарной подгруппой точки x является группа $g^{-1}Gg$. Следовательно, пространства $\Gamma \setminus G$ и $g^{-1}\Gamma g \setminus G$, связанные с сопряженными подгруппами, следует считать тождественными между собой.

В этой главе в основном мы будем изучать однородные пространства $\Gamma \setminus G$, где G — группа вещественных матриц

2-го порядка

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

с определителем $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, а Γ — дискретная подгруппа группы G.

2. О связи однородных пространств $X=\Gamma\setminus G$ с римановыми поверхностями. Существует тесная связь между пространствами $X=\Gamma\setminus G$, где G — группа вещественных унимодулярных матриц второго порядка, а Γ — ее дискретная подгруппа, и римановыми поверхностями. Именно, $\Gamma\setminus G$ можно интерпретировать как расслоенное пространство, база которого — некоторая риманова поверхность, а слой — окружность.

Сначала остановимся на случае, когда Γ — единичная подгруппа, т. е. на самом групповом пространстве G.

Рассмотрим всевозможные конформные преобразования верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ плоскости комплексного переменного z. Известно, что каждое такое преобразование может быть задано вещественной матрицей $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ с определителем 1 и имеет следующий вид

$$z'=\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}.$$

При этом произведению двух матриц отвечает произведение соответствующих преобразований.

Очевидно, что две матрицы g_1 и g_2 определяют одно и то же конформное преобразование полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ тогда и только тогда, когда $g_2=\pm g_1$. Таким образом, *группа G_0, получающаяся из G отождествлением матриц g и $-g$, изоморфна группе всех конформных преобразований полуплоскости* $\operatorname{Im} z>0$.

Условимся линейным элементом на римановой поверхности называть пару: точка и заданное в этой точке направление.

Покажем, что элементы группы G_0 можно интерпретировать как линейные элементы на полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. В самом деле, зафиксируем на полуплоскости линейный элемент l_0, и пусть l — любой другой линейный элемент. Известно, что существует одно и только одно конформное преобразование g полуплоскости, переводящее линейный элемент l_0 в линейный элемент l. Тем самым устанавливается искомое взаимно однозначное соответствие между элементами g группы G_0 и линейными элементами l на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Итак, *пространство элементов группы G, в котором элементы g и $-g$ считаются отождествленными, можно интерпретировать как пространство всех линейных элементов в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$. Иными словами, оно является расслоенным пространством, базой которого является полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, а слоями — окружности.

Теперь дадим аналогичную интерпретацию пространства $X = \Gamma \setminus G$, где Γ — дискретная подгруппа группы G. Будем предполагать, что Γ содержит элемент $-e$ и что элементы $\gamma \neq \pm e$ из Γ не оставляют на месте ни одной точки полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ *).

Мы покажем сейчас, что *пространство $X = \Gamma \setminus G$ можно интерпретировать как пространство линейных элементов на некоторой римановой поверхности.* Иными словами, оно является расслоенным пространством, база которого — некоторая риманова поверхность, а слой — окружность.

Отождествим на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ те точки, которые переводятся друг в друга преобразованиями из Γ. В результате мы получим некоторую риманову поверхность $\mathcal{D}$, т. е. одномерное (не обязательно компактное) комплексное многообразие. Рассмотрим теперь линейные элементы на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и будем отождествлять те из них, которые переводятся друг в друга преобразованиями из Γ. Легко видеть, что полученное пространство можно интерпретировать как пространство всех линейных элементов на римановой поверхности $\mathcal{D}$.

Здесь существенно предположение, что преобразования $\gamma \neq \pm e$ из Γ не имеют неподвижных точек. Именно, если бы некоторое $\gamma \neq \pm e$ из Γ оставляло неподвижной некоторую точку z_0, то нам пришлось бы отождествлять линейные элементы в точке z_0, переводящиеся друг в друга преобразованием γ.

---

*) Последнее условие равносильно условию, что Γ не содержит элементов конечного порядка, отличных от $\pm e$.

Покажем, что это пространство линейных элементов на римановой поверхности изоморфно исходному пространству $X = \Gamma \setminus G$.

В самом деле, мы знаем, что линейные элементы на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ можно трактовать как элементы группы G_0, полученной из G отождествлением матриц g и $-g$. В этой трактовке линейными элементами на $\mathscr{D}$ являются множества γg, где γ пробегает подгруппу Γ, т. е. классы смежности группы G по подгруппе Γ. Тем самым пространство линейных элементов на $\mathscr{D}$ оказывается тождественным пространству классов смежности $\Gamma \setminus G$.

Итак, мы получили следующую интерпретацию пространства $X = \Gamma \setminus G$.

Пусть G — группа вещественных унимодулярных матриц второго порядка, Γ — дискретная подгруппа группы G, содержащая элемент $-e$ и не содержащая элементов конечного порядка, отличных от $\pm e$. Отождествим на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ точки, получающиеся одна из другой дробно-линейными преобразованиями из подгруппы Γ. Мы получим некоторую риманову поверхность $\mathscr{D}$. Пространство классов смежности $X = \Gamma \setminus G$ представляет собой пространство линейных элементов на этой римановой поверхности $\mathscr{D}$, и, таким образом, является расслоенным пространством, база которого — поверхность $\mathscr{D}$, а слой — окружность.

В случае, когда в Γ содержатся элементы конечного порядка, имеет место аналогичный результат. Однако однородная структура расслоенного пространства при этом в отдельных точках нарушается.

Для римановой поверхности $\mathscr{D}$ верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ служит ее универсальной накрывающей. Таким образом, мы не касаемся здесь других римановых поверхностей, имеющих в качестве универсальной накрывающей либо полную сферу, либо сферу с выколотой точкой. Заметим, что для таких римановых поверхностей пространства линейных элементов устроены проще, чем в рассматриваемом случае.

Пространство линейных элементов на римановой поверхности имеет ряд преимуществ по сравнению с самой римановой поверхностью. Основное преимущество состоит в том, что пространство линейных элементов однородно: его группой автоморфизмов является группа G_0 дробно-линейных преобразований. Между тем у римановой поверхности запас допустимых автоморфизмов как правило существенно беднее.

Например, нетрудно доказать конечность числа автоморфизмов у всякой **компактной** римановой поверхности, универсальной накрывающей которой является верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. В самом деле, пусть $\mathcal{D}$ — одна из таких римановых поверхностей; Γ — соответствующая $\mathcal{D}$ дискретная группа автоморфизмов полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Рассмотрим автоморфизм g поверхности $\mathcal{D}$. Этот автоморфизм естественным образом продолжается до конформного преобразования g' всей верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, т. е. до некоторого дробно-линейного преобразования. Очевидно, что это конформное преобразование g' перестановочно с подгруппой Γ, т. е.

$$g'\Gamma g'^{-1} = \Gamma.$$

Таким образом, g' принадлежит нормализатору N группы Γ. Наша цель — доказать, что пространство классов смежности $\Gamma \diagdown N$ содержит лишь конечное число элементов. Докажем, что N — дискретная подгруппа группы G, а, следовательно, дискретно пространство $\Gamma \diagdown N$.

Рассмотрим какой-либо гиперболический элемент γ подгруппы Γ; не нарушая общности, можно считать, что γ — диагональная матрица; $\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Пусть, далее, γ' — какой-либо другой элемент из Γ, не являющийся диагональной матрицей. Предположим, что подгруппа N не дискретна. Тогда в N найдется последовательность элементов g_n, сходящаяся к единичной матрице. Рассмотрим элементы $\gamma_n = g_n^{-1}\gamma g_n$ и $\gamma_n' = g_n^{-1}\gamma' g_n$. Эти элементы принадлежат подгруппе Γ и в то же время они сходятся соответственно к γ и γ'. Так как подгруппа Γ дискретна, то, начиная с некоторого n, должно быть $g_n^{-1}\gamma g_n = \gamma$, $g_n^{-1}\gamma' g_n = \gamma'$, т. е. g_n перестановочно с γ и γ'. Из перестановочности g_n с диагональной матрицей γ следует, что само g_n является диагональной матрицей. Но это невозможно, ибо тогда g_n не перестановочно с матрицей γ'.

Итак, доказано, что пространство $\Gamma \diagdown N$ дискретно. С другой стороны, из компактности пространства $\Gamma \diagdown G$ следует, что пространство $\Gamma \diagdown N$ также компактно. Следовательно, пространство $\Gamma \diagdown N$ содержит лишь конечное число элементов. Утверждение доказано.

3. Фундаментальная область относительно дискретной группы Γ. Пусть Y — топологическое пространство, в котором действует дискретная группа Γ гомеоморфизмов γ:

$$y \to \gamma y.$$

Дискретность Γ означает, что для любого $y \in Y$ множество точек γy, где γ пробегает группу Γ, не имеет точки накопления в Y.

Мы будем предполагать всегда, что группа Γ действует на Y эффективно. Это означает, что в пространстве Y для любого $\gamma \neq e$ существует такая точка y, что $\gamma y \neq y$. (Точки y, для которых $\gamma y = y$ хотя бы для одного $\gamma \neq e$, мы будем дальше называть неподвижными точками.)

Приведем примеры таких пространств Y.

а) Y — топологическая группа, Γ — ее дискретная подгруппа, действующая на Y как группа левых сдвигов.

б) Y — верхняя полуплоскость ($\operatorname{Im} z > 0$) плоскости комплексного переменного z; Γ — некоторая дискретная группа конформных преобразований верхней полуплоскости.

Введем понятие *фундаментальной области* в Y относительно группы Γ.

Фундаментальной областью в Y относительно группы Γ будем называть открытое множество $F \subset Y$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) для любых $\gamma_1 \neq \gamma_2$ множества $\gamma_1 F$ и $\gamma_2 \overline{F}$, где $\overline{F}$ — замыкание множества F, не имеют общих элементов;

2) объединение множеств $\gamma \overline{F}$, где γ пробегает группу Γ, совпадает со всем пространством Y.

Эти условия можно перефразировать следующим образом. Любую точку y пространства Y можно представить в виде

$$y = \gamma x, \tag{1}$$

где $\gamma \in \Gamma$, $x \in \overline{F}$. Это представление единственно для «почти всех» точек y; именно, если $y = \gamma_1 x_1 = \gamma_2 x_2$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ и $x_1 \in F$, $x_2 \in \overline{F}$, то $\gamma_1 = \gamma_2$, $x_1 = x_2$. Таким образом, точки y, для которых разложение (1) может оказаться неединственным, образуют множество $\Gamma(\overline{F} \setminus F)$.

Заметим, что фундаментальная область относительно группы Γ определена этими условиями неоднозначно. В частности, если F — фундаментальная область, то и любой ее сдвиг γF, где $\gamma \in \Gamma$, также является фундаментальной областью.

Мы опишем сейчас способ конструкции фундаментальной области при некоторых простых дополнительных условиях на пространство Y и группу Γ.

Будем предполагать, что Y — локально компактное метрическое пространство, причем метрика $\rho(y_1, y_2)$ в пространстве Y удовлетворяет следующему условию.

Для любых двух точек y_0, y_1 найдется третья точка y_2 такая, что

$$\rho(y_0, y_2) = \rho(y_2, y_1) = \frac{1}{2}\rho(y_0, y_1). \tag{2}$$

Такую метрику ρ мы будем называть *внутренней* метрикой.

Примером пространства с внутренней метрикой является обычная сфера, на которой расстояние между точками измеряется по дуге большого круга. Заметим, что если расстояние между точками сферы определить иначе — как длину соединяющей их хорды, то такая метрика не будет внутренней.

Легко убедиться, что в полном пространстве с внутренней метрикой любые две точки y_0, y_1 можно соединить непрерывной дугой $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$, такой, что

$$\rho(y(t_1), y(t_2)) = (t_2 - t_1)\rho(y_0, y_1), \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1.$$

В частности, такое пространство является связным.

Можно также доказать, что в локально компактном пространстве с внутренней метрикой любое ограниченное замкнутое множество является компактным множеством.

О группе Γ будем предполагать, что она сохраняет метрику пространства Y, т. е.

$$\rho(\gamma y_0, \gamma y_1) = \rho(y_0, y_1) \tag{3}$$

для любых y_0, $y_1 \in Y$ и $\gamma \in \Gamma$.

Мы построим сейчас фундаментальную область относительно группы Γ.

Зафиксируем в Y точку y_0, не являющуюся неподвижной точкой на Y. Рассмотрим множество F таких точек y, что

$$\rho(y_0, y) < \rho(\gamma y_0, y) \tag{4}$$

для любого $\gamma \neq e$ из группы Γ.

Покажем, что F является фундаментальной областью относительно группы Γ.

Прежде всего, из дискретности группы Γ следует, что F — открытое множество. В самом деле, пусть $y_1 \in F$ и пусть $\rho(y_0, y_1) = d$. Рассмотрим в Y окрестность точки y_0:

$$U_{3d} = \{y : \rho(y_0, y) < 3d\}.$$

Эта окрестность компактна, а потому существует лишь конечное число элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, $\gamma_i \neq e$ из группы Γ таких, что $\gamma_i y_0$ принадлежат U_{3d}. Очевидно, что для остальных элементов $\gamma \in \Gamma$ мы имеем $\rho(\gamma y_0, y_1) \geqslant 2d$. Рассмотрим ε-окрестность точки y_1

$$U_\varepsilon = \{y : \rho(y_1, y) < \varepsilon\}.$$

Легко убедиться, что при $\varepsilon < \min\left(\frac{d}{2}, \frac{d_i - d}{2}, i = 1, \ldots, n\right)$, $d_i = \rho(\gamma_i y_0, y_1)$, эта окрестность принадлежит множеству F. Следовательно, множество F открыто.

Покажем, что множество F удовлетворяет условию 1), т. е. что множества F и $\gamma\bar{F}$, $\gamma \neq e$ не пересекаются. В самом деле, пусть $y \in \bar{F}$. Тогда для любого γ из Γ мы имеем

$$\rho(y_0, y) \leqslant \rho(\gamma^{-1} y_0, y).$$

Следовательно, поскольку $\rho(y_0, y) = \rho(\gamma y_0, \gamma y)$ и $\rho(\gamma^{-1} y_0, y) = \rho(y_0, \gamma y)$, получаем, что

$$\rho(\gamma y_0, \gamma y) \leqslant \rho(y_0, \gamma y).$$

Полученное неравенство означает, что при $\gamma \neq e$ элемент γy не принадлежит множеству F; таким образом, множество $\gamma\bar{F}$, $\gamma \neq e$ не пересекается с множеством F.

Наконец, покажем, что множество F удовлетворяет условию 2), т. е. любая точка $y \in Y$ представима в виде

$$y = \gamma x,$$

где $\gamma \in \Gamma$, $x \in \bar{F}$.

Легко убедиться, что замыкание $\bar{F}$ множества F состоит из всех таких элементов y, что

$$\rho(y_0, y) \leqslant \rho(\gamma y_0, y), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Пусть y — произвольная точка из Y. Для нее найдется такое $\gamma_0 \in \Gamma$, что

$$\rho(\gamma_0 y_0, y) \leqslant \rho(\gamma y_0, y) \tag{5}$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. (В противном случае в некоторой окрестности точки y содержалось бы бесконечное число точек γy_0; но это невозможно ввиду дискретности группы Γ.)

В силу инвариантности метрики ρ, из (5) следует, что

$$\rho\left(y_0, \gamma_0^{-1} y\right) \leqslant \rho\left(\gamma y_0, \gamma_0^{-1} y\right)$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. Таким образом, точка $\gamma_0^{-1} y = x$ принадлежит $\overline{F}$ и, значит, $y = \gamma_0 x$, где $\gamma_0 \in \Gamma$, $x \in \overline{F}$.

Итак, доказано, что построенное множество F действительно является фундаментальной областью относительно группы Γ.

4. Дискретные группы с компактной фундаментальной областью. Большой интерес представляют такие дискретные группы преобразований Γ, для которых замыкание $\overline{F}$ фундаментальной области является компактным множеством.

Прежде всего, укажем условие компактности множества $\overline{F}$. *Предположим, что существует такое компактное подмножество $K \subset Y$, что*

$$Y = \Gamma K,$$

т. е. любое $y \in Y$ представимо в виде

$$y = \gamma k,$$

где $\gamma \in \Gamma$, $k \in K$.

Тогда построенная выше фундаментальная область F относительно группы Γ имеет компактное замыкание.

Напомним, что замыкание $\overline{F}$ множества F состоит из всех таких точек y из Y, для которых

$$\rho(y_0, y) \leqslant \rho(\gamma y_0, y), \quad \gamma \in \Gamma. \tag{6}$$

Предположим, что множество $\overline{F}$ некомпактно. Тогда множество $\overline{F}$ неограничено, а потому в нем найдется последовательность точек y_n такая, что $\rho(y_0, y_n) \to \infty$. Покажем, что это невозможно. Представим точки y_n в виде

$$y_n = \gamma_n k_n,$$

где $\gamma_n \in \Gamma$, $k_n \in K$. На основании неравенства (6) мы имеем

$$\rho(y_0, y_n) \leqslant \rho(\gamma_n y_0, \gamma_n k_n).$$

а потому, в силу инвариантности метрики ρ,

$$\rho(y_0, y_n) \leqslant \rho(y_0, k_n).$$

Так как множество K компактно, то последовательность $\rho(y_0, k_n)$ ограничена. Но тогда ограничена и последовательность $\rho(y_0, y_n)$, что противоречит сделанному предположению.

Теперь рассмотрим свойства дискретных групп преобразований Γ и свойства их фундаментальных областей F, когда $\overline{F}$ является компактным множеством.

Справедливы следующие два утверждения.

I. *Существует конечное число элементов* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *группы* Γ *таких, что область* $\overline{F}$ *задается конечным числом неравенств*

$$\rho(y_0, y) \leqslant \rho(\gamma_i y_0, y), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

II. *Группа* Γ *имеет конечное число образующих.*

Доказательство утверждения I. Ввиду компактности множества $\overline{F}$ существует такое число $c > 0$, что

$$\rho(y_0, y) \leqslant c \tag{7}$$

для любого y из $\overline{F}$. Рассмотрим элементы γ из F такие, что

$$\rho(y_0, y) = \rho(\gamma y_0, y) \tag{8}$$

хотя бы для одного элемента $y \in \overline{F}$. Таких элементов имеется лишь конечное число*). В самом деле, из (7) и (8) следует, что

$$\rho(y_0, \gamma y_0) \leqslant 2c; \tag{9}$$

ввиду дискретности группы Γ, неравенству (9) может удовлетворять лишь конечное число элементов γ. Обозначим элементы $\gamma \neq e$, удовлетворяющие условию (8) через $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Мы докажем, что множество $\overline{F}$ задается конечным числом неравенств

$$\rho(y_0, y) \leqslant \rho(\gamma_i y_0; y) \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Предположим противное: существует точка y', удовлетворяющая неравенствам (10), но не принадлежащая множеству $\overline{F}$.

---

*) Множество таких элементов непусто. В противном случае было бы $\overline{F} = F$, т. е. множество F являлось бы открытым и замкнутым. Но это противоречило бы связности пространства.

Обозначим через E компактное множество точек y, удовлетворяющих неравенствам (10) и неравенству

$$\rho(y_0, y) \leqslant c_1,$$

где $c_1 = \rho(y_0, y') + c$. Это множество содержит $\bar{F}$ и точку y', не принадлежащую $\bar{F}$. Покажем, что E — связное множество. В самом деле, пусть $y_1 \in E$. Рассмотрим непрерывную дугу $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющую точки y_0 и y_1, такую, что

$$\rho(y(t_1), y(t_2)) = (t_2 - t_1)\rho(y_0, y_1), \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1.$$

Легко видеть, что все точки этой дуги удовлетворяют неравенствам (10) и, следовательно, принадлежат E *). Таким образом, множество E связно.

Покажем, что множество $\bar{F}$ открыто в E. В самом деле, множество $\bar{F}$ задается в E бесконечным числом неравенств

$$\rho(y_0, y) < \rho(\gamma y_0, y), \tag{11}$$

где $\gamma \neq e, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Но все эти неравенства, за исключением быть может конечного числа, выполняются во всем множестве E (именно, они выполняются для всех γ таких, что $\rho(y_0, \gamma y_0) > 3c_1$). Следовательно, множество $\bar{F}$ задается фактически в E конечным числом неравенств вида (11), а потому оно открыто в E. Итак множество $\bar{F}$ является замкнутым открытым подмножеством множества E. Поэтому, ввиду связности E, должно быть $\bar{F} = E$; но это противоречит сделанному предположению. Утверждение I доказано.

Доказательство утверждения II. Рассмотрим открытое ограниченное множество U, содержащее $\bar{F}$. Покажем, что $\bar{U}$ покрывается конечным числом множеств $\gamma\bar{F}$. В самом деле, предположим противное. Тогда в $\bar{U}$ найдется последовательность элементов y_n вида $y_n = \gamma_n x_n$, где $\gamma_n \in \Gamma$, $x_n \in \bar{F}$, причем все γ_n попарно различны. Так как $\bar{U}$ и $\bar{F}$ — компактные мно-

---

* В самом деле, имеем $\rho(\gamma_i y_0, y(t)) \geqslant \rho(\gamma_i y_0, y_1) - \rho(y_1, y(t))$; следовательно, поскольку $\rho(\gamma_i y_0, y_1) \geqslant \rho(y_0, y_1)$, $\rho(y_1, y(t)) = (1-t)\rho(y_0, y_1)$, получаем

$$\rho(\gamma_i y_0, y(t)) \geqslant t\rho(y_0, y_1) = \rho(y_0, y(t)).$$

жества, то можно, не нарушая общности, предполагать, что $y_n \to y$, $x_n \to x$. Но тогда очевидно, что $\gamma_n x \to y$. Последнее невозможно ввиду дискретности группы Γ.

Итак, доказано, что $\bar{U}$ покрывается конечным числом множеств $\gamma\bar{F}$, скажем, множествами $\gamma_1\bar{F}, \ldots, \gamma_n\bar{F}$. Рассмотрим подгруппу Γ', порожденную элементами γ_i. Будет доказано, что $\Gamma' = \Gamma$ и, следовательно, группа Γ имеет конечное число образующих. Рассмотрим множество

$$Y' = \bigcup_{\gamma' \in \Gamma'} \gamma'\bar{F}.$$

В силу построения подгруппы Γ', это множество содержит вместе с каждым $\gamma'\bar{F}$ также его окрестность $\gamma' U$. Следовательно, множество Y' открыто. Но тогда открытыми будут и множества

$$\gamma Y' = \bigcup_{\gamma' \in \Gamma'} \gamma\gamma'\bar{F},$$

где γ — произвольный элемент из Γ. Множества $\gamma Y'$ покрывают все пространство Y. Легко видеть, что два таких множества $\gamma_1 Y'$ и $\gamma_2 Y'$ либо не перекрываются, либо совпадают. Если хотя бы два из них различны, то пространство Y является объединением попарно непересекающихся открытых множеств γY; это невозможно, поскольку Y — связное пространство. Итак, все $\gamma Y'$ между собой совпадают, а потому $Y = Y' = \bigcup\limits_{\gamma' \in \Gamma'} \gamma'\bar{F}$. Следовательно, каково бы ни было $\gamma \in \Gamma$, множество $\gamma\bar{F}$ содержится в Y'; но тогда $\gamma F = \gamma' F$ для некоторого $\gamma' \in \Gamma'$, а потому $\gamma = \gamma'$.

Итак, доказано, что Γ совпадает с подгруппой Γ', порожденной конечным числом образующих.

Отметим без доказательства еще одно утверждение о дискретных группах преобразований с компактной фундаментальной областью.

III. *Если пространство Y односвязно, то группа Γ задается конечным числом определяющих соотношений между своими образующими.*

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в статье Вейля [7].

Мы рассмотрели свойства дискретных групп преобразований произвольного локально компактного пространства Y. Теперь рассмотрим случай, когда Γ — дискретная подгруппа локально-компактной группы G.

Докажем, что *если пространство* $\Gamma \setminus G$ *компактно, то множество элементов из* G, *сопряженных с любым фиксированным* $\gamma \in \Gamma$, *является замкнутым в* G.

В самом деле, рассмотрим последовательность $g_i^{-1}\gamma g_i$, $\gamma \in \Gamma$, сходящуюся к некоторому $g \in G$ Нам нужно доказать, что тогда элемент g также сопряжен с элементом $\gamma \in \Gamma$.

Представим элементы g_i в виде $g_i = \gamma_i u_i$, где $\gamma_i \in \Gamma$, $u_i \in \bar{F}$, F — фундаментальная область относительно подгруппы Γ. По предположению, $\bar{F}$ — компактное множество. Следовательно, не нарушая общности, можно считать, что последовательность u_i сходится к некоторому элементу $u \in \bar{F}$. Тогда из равенства

$$\lim_{i \to \infty} (u_i^{-1}\gamma_i^{-1}\gamma\gamma_i u_i) = g$$

следует, что

$$\lim_{i \to \infty} \gamma_i^{-1}\gamma\gamma_i = ugu^{-1}.$$

Но так как Γ — дискретная подгруппа, то сходящаяся последовательность $\gamma_i^{-1}\gamma\gamma_i$ должна стабилизироваться, начиная с достаточно большого номера i. Итак, при достаточно большом i мы имеем $\gamma_i^{-1}\gamma\gamma_i = ugu^{-1}$, т. е. элементы g и γ являются сопряженными. Утверждение доказано.

Применим этот результат к случаю, когда G — группа вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка. Элементы $g \neq \pm e$ группы G распадаются на три класса: эллиптические элементы, т. е. матрицы с комплексными собственными значениями, гиперболические элементы, т. е. матрицы с вещественными попарно различными собственными значениями, параболические элементы, т. е. матрицы с кратными собственными значениями (равными либо 1, либо —1).

Очевидно, что множество элементов группы G, сопряженных с параболическим элементом g, не является замкнутым: замыкание этого множества содержит одну из матриц e и $-e$.

Таким образом, мы заключаем. *Если дискретная подгруппа* Γ *группы* G *вещественных унимодулярных ма-*

триц 2-го порядка такова, что $\Gamma \setminus G$ — компактное пространство, то Γ состоит только из эллиптических и гиперболических элементов.

5. Строение фундаментальной области на плоскости Лобачевского. Пусть Y — плоскость Лобачевского, Γ — дискретная подгруппа движений на Y. В этом пункте мы изучим свойства фундаментальной области, отвечающей Γ в случае, когда объем $v(\Gamma \setminus Y)$ этой фундаментальной области конечен.

Плоскость Лобачевского Y мы будем здесь интерпретировать в виде верхней полуплоскости

$$\operatorname{Im} z > 0$$

на плоскости комплексного переменного z; при этом движениями в Y являются всевозможные дробно-линейные преобразования

$$z' = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

с вещественными коэффициентами α, β, γ, δ.

Вещественную прямую

$$\operatorname{Im} z = 0$$

можно трактовать как совокупность бесконечно удаленных точек плоскости Лобачевского.

Напомним, как строится фундаментальная область F, отвечающая дискретной подгруппе движений Γ. На Y фиксируется точка z_0, не являющаяся неподвижной точкой (т. е. $\gamma z_0 \neq z_0$ при $\gamma \neq 1$). Тогда фундаментальная область F с центром в точке z_0 задается системой неравенств

$$\rho(z_0, z) < \rho(\gamma z_0, z), \quad \gamma \in \Gamma, \quad \gamma \neq 1. \tag{1}$$

Заметим, что область F ограничена дугами геодезических. В самом деле, каждое из уравнений

$$\rho(z_0, z) = \rho(\gamma z_0, z),$$

определяющих границу, есть уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух заданных точек z_0 и γz_0. Но хорошо известно, что такие геометрические места точек являются геодезическими.

Итак, *границей фундаментальной области F является ломаная A (возможно, несвязная и с бесконечным числом сторон), образованная дугами геодезических*. Многоугольник, ограниченный этой ломаной, является звездчатой областью, поскольку область F вместе с каждой точкой z содержит целиком и всю дугу геодезической, соединяющую точки z_0 и z.

Докажем следующую теорему, принадлежащую Зигелю [60], о числе сторон многоугольника.

Если объем фундаментальной области F конечен, то число дуг геодезических, из которых состоит граница области F, конечно.

Заметим, что для компактных областей F теорема была уже доказана в п. 3. Поэтому нам нужно рассмотреть лишь случай некомпактной области.

Основным этапом доказательства будет оценка для углов ω при вершинах области F. Именно, мы покажем, что

$$\sum_{\omega} (\pi - \omega) \leqslant I + 2\pi, \qquad (2)$$

где сумма берется по всем вершинам области F, не лежащим на бесконечно удаленной прямой, а I — объем области F. Переходим к доказательству неравенства (2).

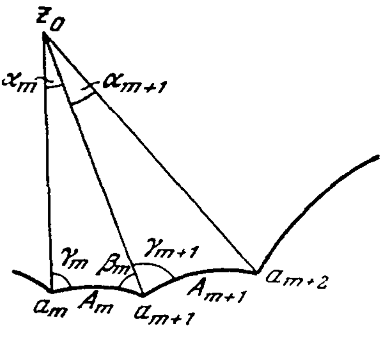

Рис. 1.

Соединим все вершины ломаной A с точкой z_0 геодезическими и рассмотрим получившиеся треугольники. Пусть $\ldots A_m, A_{m+1}, \ldots, A_n \ldots$ — связное множество отрезков ломаной A с вершинами $\ldots a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n+1} \ldots$ (рис. 1). Для определенности будем предполагать, что это множество неограничено в обе стороны. Обозначим через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ углы треугольника со стороной A_k и через ω_k — угол между сторонами A_k и A_{k+1}; таким образом, имеем

$$\omega_k = \beta_k + \gamma_{k+1}.$$

Мы получим сейчас оценку для углов ω_k. Воспользуемся известной формулой площади треугольника с углами α, β, γ

на плоскости Лобачевского:

$$I = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Согласно этой формуле, площадь $I(A_k)$ треугольника со стороной A_k равна

$$I(A_k) = \pi - \alpha_k - \beta_k - \gamma_k.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha_k + \sum_{k=m}^{n} I(A_k) = \pi - \gamma_m - \beta_n + \sum_{k=m}^{n-1} (\pi - \omega_k). \qquad (3)$$

Но левая часть этого равенства ограничена, поскольку $\sum I(A_k) \leqslant v(F)$, $v(F)$ — объем области F, и $\sum \alpha_k \leqslant 2\pi$; значит, ограничена и правая часть равенства. Отсюда вытекает, что ряд $\sum (\pi - \omega_k)$ сходится и существуют пределы $\lim\limits_{m \to -\infty} \gamma_m = \gamma_{-\infty}$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = \beta_\infty$.

Покажем, что $\pi - \gamma_{-\infty} - \beta_\infty \geqslant 0$. В самом деле, $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$ (ибо лишь конечное число отрезков ломаной A может находиться на ограниченном расстоянии от точки z_0); значит, $\rho(z_0, a_k) > \rho(z_0, a_{k-1})$ для бесконечного числа значений k. Но тогда для этих значений k имеем $\gamma_k > \beta_k$. Так как, с другой стороны, $\beta_k + \gamma_k \leqslant \pi$, то $\beta_k \leqslant \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\beta_\infty \leqslant \frac{\pi}{2}$. Аналогично убеждаемся, что и $\gamma_{-\infty} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Этим доказано, что $\pi - \gamma_{-\infty} - \beta_\infty \geqslant 0$.

Переходя в (3) к пределу при $m \to -\infty$, $n \to +\infty$ и принимая во внимание неравенство $\pi - \gamma_{-\infty} - \beta_\infty \geqslant 0$, мы получаем, что

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I(A_k) \geqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\pi - \omega_k). \qquad (4)$$

Неравенство (4) получено в предположении, что связное множество отрезков A_k неограничено в обе стороны. Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что такие же неравенства справедливы и в остальных случаях, когда связное множество отрезков A_k ограничено хотя бы в одну сторону.

Сложив все эти неравенства, мы получим искомую оценку:

$$2\pi + l \geqslant \sum_{\omega} (\pi - \omega), \tag{5}$$

где сумма берется по всем вершинам области F (лежащим на конечном расстоянии от точки z_0), а l — объем области F.

Докажем, на основании этой оценки, что число вершин области F, лежащих на конечном расстоянии от z_0, конечно. Пусть a — некоторая вершина, $a^{(1)} = a$, $a^{(2)}$, ... — все вершины области F, эквивалентные a:

$$a^{(i)} = \gamma_i a, \quad \gamma_i \in \Gamma.$$

Обозначим через $\omega^{(i)}$ углы при вершинах $a^{(i)}$. Легко убедиться, что если a не является неподвижной точкой для $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$, то

$$\omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots = 2\pi. \tag{6}$$

Если же a — неподвижная точка порядка n (т. е. число элементов $\gamma \in \Gamma$, оставляющих на месте точку a, равно n), то

$$\omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots = \frac{2\pi}{n}. \tag{6'}$$

В самом деле, найдем все сдвиги области F, примыкающие к точке a. Очевидно, что это будут области $\gamma\gamma_i^{-1}F$, где γ пробегает n элементов группы Γ, оставляющих точку a на месте. Так как область $\gamma\gamma_i^{-1}F$ имеет в вершине a угол $\omega^{(i)}$, а сумма всех углов в вершине a равна 2π, то мы имеем

$$\omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \ldots = \frac{2\pi}{n}.$$

Ясно, что равенство (6′) несовместимо с оценкой (5), если у F бесконечное число вершин.

Остается доказать, что число вершин области F, принадлежащих бесконечно удаленной прямой, также конечно.

Возьмем любые N вершин области F, лежащих на бесконечно удаленной прямой: $B_1, \ldots, B_N$. Очевидно, что можно построить многоугольник, ограниченный конечным числом дуг геодезических и лежащий внутри F такой, что его бесконечно удаленными вершинами являются точки $B_1, \ldots, B_N$.

Предельным переходом легко убедиться, что для площади I_1 этого многоугольника имеет место следующая формула:

$$\sum_{\omega} (\pi - \omega) = 2\pi + I_1,$$

где сумма берется по всем вершинам многоугольника, ω — углы при вершинах. Так как $\omega = 0$ в бесконечно удаленных вершинах, то отсюда имеем

$$\pi N \leqslant 2\pi + I_1 \leqslant 2\pi + v(F).$$

Таким образом, число N ограничено.

Итак, доказано, что если объем области F конечен, то конечно и число ее вершин. В частности, конечно число вершин области F, лежащих на вещественной оси E:

$$\operatorname{Im} z = 0.$$

Изучим теперь свойства вершин области F, лежащих на вещественной оси E.

Прежде всего заметим, что *если область F некомпактна, то она имеет по крайней мере одну вершину на E*. В самом деле, рассмотрим всевозможные геодезические, выходящие из точки z_0; эти геодезические однозначно определяются своим направлением l в точке z_0. Обозначим через $\tau(l)$ длину отрезка геодезической, лежащего внутри F. Число $\tau(l)$ может быть равно ∞, в этом случае геодезическая лежит целиком внутри F. Очевидно, что $\tau(l)$ является непрерывной функцией от l в тех точках l, в которых $\tau(l) < \infty$. Поэтому, если $\tau(l) < \infty$ для всех l, то функция $\tau(l)$ ограничена. Но тогда область F компактна. Следовательно, если область F некомпактна, то существуют направления l, для которых $\tau(l) = \infty$. Рассмотрим одно из таких направлений l. Очевидно, что пересечение геодезической, проведенной из z_0 в направлении l с вещественной осью E, является вершиной области F. Итак, доказано, что у F действительно существуют вершины, лежащие на вещественной оси E.

Докажем, что *для каждой вершины b области F, лежащей на E, существует элемент $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \pm 1$, оставляющий на месте точку b.*

Пусть b — одна из вершин области F, лежащая на E. Рассмотрим все сдвиги γF области F, имеющие своей вершиной точку b. Очевидно, что таких сдвигов γF имеется бесконечное число. Опишем их. Пусть $b^{(1)}=b, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}$ — вершины области F, эквивалентные b:

$$b^{(k)}=\gamma_k b, \quad \gamma_k \in \Gamma, \qquad k=1, \ldots, n.$$

По доказанному ранее, число этих вершин конечно. Очевидно, что любой сдвиг области F, имеющий в качестве вершины точку b, имеет вид

$$\gamma\gamma_i^{-1}F,$$

где γ пробегает элементы из Γ, оставляющие на месте точку b. Так как таких сдвигов бесконечное множество, а γ_i пробегает лишь конечное множество, то, следовательно, существует бесчисленное множество элементов γ, оставляющих на месте точку b.

Тем самым доказано, что заведомо существует элемент $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \pm 1$, оставляющий на месте точку b. Покажем, что *любой такой элемент* γ *является параболическим элементом* *).

Предположим противное: γ не является параболическим элементом. Рассмотрим геодезическую $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$, $z(0)=z_0$, соединяющую точки z_0 и b. Эта геодезическая лежит целиком внутри области F, а потому

$$\rho(z_0, z(t)) < \rho(\gamma z_0, z(t)), \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{7}$$

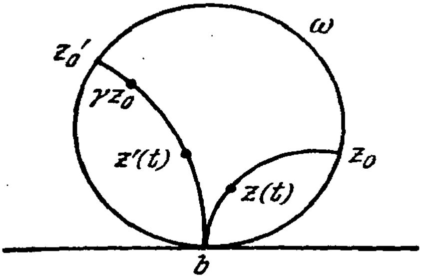

Рис. 2.

Проведем через z_0 орицикл ω, ортогональный к $z(t)$. Этот орицикл изображается в виде окружности, касающейся вещественной оси в точке b (рис. 2). Поскольку, по предположению, преобразование γ не является параболическим, точка γz_0 не принадлежит этому орициклу (в противном случае преобразование γ переводило бы весь орицикл в себя, а таким свойством обладают лишь параболические преобразования). Не нарушая общности, можно считать, что

*) Преобразование $\gamma \in \Gamma$ называется параболическим, если оно задается матрицей с собственными значениями 1.

γz_0 лежит внутри орицикла; иначе мы заменили бы γ на γ^{-1}. Проведем геодезическую $z'(t)$ через точки γz_0 и b; дугу условимся отсчитывать от точки пересечения z_0' этой геодезической с орициклом ω. Тогда мы имеем

$$\rho(z_0, z(t)) = \rho(z_0', z'(t)) = \rho(z_0', \gamma z_0) + \rho(\gamma z_0, z'(t)) \tag{8}$$

Но, как известно, $\rho(z(t), z'(t)) \to 0$ при $t \to \infty$; поэтому расстояние $\rho(\gamma z_0, z'(t))$ сколь угодно мало отличается от $\rho(\gamma z_0, z(t))$ при достаточно больших t. Следовательно, в силу (8) мы получаем, что при достаточно больших t

$$\rho(z_0, z(t)) > \rho(\gamma z_0, z(t)).$$

Полученное неравенство противоречит неравенству (7). Следовательно, предположение о том, что γ не является параболическим элементом, неверно.

Сформулируем окончательный результат. Мы доказали, что *если $v(\Gamma \setminus Y) < \infty$, то существует фундаментальная область F, ограниченная* конечным *числом дуг геодезических. При этом вершины области F, лежащие на вещественной оси, являются параболическими точками; это значит, что для каждой из них существует параболическое преобразование $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \pm 1$, оставляющее эту вершину на месте.*

Покажем, что существует фундаментальная область F, удовлетворяющая следующему дополнительному условию: *вершины области F, лежащие на вещественной оси, попарно не эквивалентны.*

Для этого достаточно доказать следующее утверждение. *Пусть b — вершина фундаментальной области F, лежащая на вещественной оси, такая, что существуют вершины $b^{(1)} = \gamma_1 b, \ldots, b^{(p)} = \gamma_p b$, эквивалентные b. Тогда можно построить другую фундаментальную область, у которой число вершин, лежащих на вещественной оси, меньше, чем у* Γ.

В самом деле, пусть l — одна из сторон многоугольника F, выходящая из b. Легко убедиться, что существует элемент $\gamma \in \Gamma$, обладающий следующими свойствами:

1) γ переводит некоторую вершину $b^{(k)}$ в вершину b.

2) γ переводит одну из сторон l', l'' многоугольника F, выходящих из точки b_k, в сторону l.

Пусть $F_k \subset F$ — треугольник, образованный геодезическими l', l'' и некоторой третьей геодезической. Рассмотрим область $F' = (F \setminus F_k) \cup \gamma F_k$, получаемую из области F путем отбрасывания F_k и добавления треугольника γF_k. Ясно, что эта область F' фундаментальна относительно подгруппы Г. По построению, она имеет на вещественной оси те же вершины, что и F, за исключением вершины $b^{(k)}$. Утверждение доказано.

Из полученного описания фундаментальной области F непосредственно следует, что ее можно разбить на подобласти более простой структуры. Именно, условимся через $F(b)$, где b — параболическая точка, обозначать треугольник, ограниченный двумя геодезическими, выходящими из b и орициклом ω, касающимся вещественной оси в точке b. Тогда мы имеем

$$F = \sum_{k=1}^{n} F(b_k) + F_0,$$

где сумма берется по всем параболическим вершинам области F, а F_0 — компактное множество.

Каждая из областей $F(b_k)$ обладает, как легко убедиться, следующими свойствами. Пусть $F(b_k)$ ограничена дугами геодезических l, l' и орициклом ω. Тогда 1) геодезические l, l' между собой эквивалентны, то есть переводятся одна в другую некоторым преобразованием $\gamma \in \Gamma$, оставляющим точку b_k на месте; 2) любая точка, лежащая внутри орицикла ω, может быть переведена в область $F(b_k)$ некоторым преобразованием $\gamma \in \Gamma$, оставляющим на месте точку b_k.

Возможность такого разбиения фундаментальной области будет существенно использована в § 6.

§ 2. Представления группы G, индуцированные дискретной подгруппой

С каждой дискретной подгруппой Г локально компактной группы G мы свяжем здесь некоторый набор унитарных представлений группы G, называемых индуцированными представлениями. Эти представления приводимы. Задача состоит в том, чтобы разложить их на неприводимые представления или, выражаясь иначе, найти спектр этих представлений.

Эта задача будет рассматриваться здесь для случая, когда пространство $X = \Gamma \setminus G$ является компактным. Мы покажем в п. 3, что в случае компактного пространства $\Gamma \setminus G$ представления группы G, связанные с подгруппой Γ, имеют конечнократный дискретный спектр. Иными словами, они разлагаются в дискретную сумму неприводимых представлений, причем каждое неприводимое представление входит в разложение с конечной кратностью. В п. 4 будет получена «формула следа», позволяющая давать описание всех неприводимых представлений, входящих в разложение. Приложения формулы следа к некоторым конкретным группам будут разобраны в § 5.

1. Определение индуцированных представлений. Пусть G — локально компактная топологическая группа. С каждой дискретной подгруппой Γ группы G мы свяжем набор унитарных представлений группы G.

Сначала опишем простейшее из этих представлений. Оно строится в пространстве функций $f(x)$ на $X = \Gamma \setminus G$, имеющих интегрируемый квадрат модуля:

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2 dx < \infty,$$

dx — инвариантная мера на X. Представление состоит в том, что каждому элементу g из G сопоставляется оператор $T(g)$ следующего вида:

$$T(g) f(x) = f(xg)\,^{*}). \tag{1}$$

(Напомним, что через xg обозначается та точка из X, в которую переводится точка x преобразованием g.)

Операторы $T(g)$ унитарны; это непосредственно следует по инвариантности меры dx при сдвигах $x \to xg$.

Представление (1) условимся называть *порожденным однородным пространством* $\Gamma \setminus G$.

Общая конструкция представления группы G, индуцированного подгруппой Γ, состоит в следующем.

---

*) Правильнее было бы писать $(T(g) f)(x)$. Однако для упрощения записи мы будем всегда вторые скобки опускать.

Пусть задано конечномерное унитарное представление *). $\chi(\gamma)$ подгруппы Γ, действующее в пространстве V. Рассмотрим гильбертово пространство $H(\chi)$ всех измеримых вектор-функций $f(g)$ на G со значениями в V, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $$f(\gamma g) = \chi(\gamma) f(g) \tag{2}$$

для любого $\gamma \in \Gamma$;

2) $$(f, f) \equiv \int_X [f, f]\, dx < \infty, \tag{3}$$

где $[f_1, f_2]$ — скалярное произведение в конечномерном пространстве V. Представление состоит в том, что каждому элементу g_0 из G сопоставляется оператор $T(g_0)$ следующего вида:

$$T(g_0) f(g) = f(g g_0). \tag{4}$$

Легко убедиться, что эти операторы унитарны.

Представление (4) будем называть *индуцированным подгруппой* Γ (или, более подробно, индуцированным заданным представлением $\chi(\gamma)$ подгруппы Γ).

Заметим, что представление (1) является частным случаем этой конструкции, когда $\chi(\gamma)$ есть единичное представление. В самом деле, в этом случае функции $f(g)$ являются скалярными функциями, поскольку пространство V представления $\chi(\gamma)$ одномерно. Условие же (2) принимает вид $f(\gamma g) = f(g)$.

Это значит, что функции $f(g)$ постоянны на классах смежности $\Gamma \setminus G$, а потому их можно рассматривать как функции, заданные на однородном пространстве $X = \Gamma \setminus G$.

Укажем другую реализацию представлений $T(g)$, индуцированных подгруппой Γ. Пусть задана фундаментальная область F в G относительно подгруппы Γ. Это значит, что любой элемент g из G можно представить в виде

$$g = \gamma x, \tag{5}$$

где $\gamma \in \Gamma$, $x \in \bar{F}$, причем разложение (5) единственно для всех элементов g, за исключением множества низшей размерности.

---

*) Аналогичная конструкция, разумеется, возможна и для бесконечномерных унитарных представлений группы Γ.

Очевидно, что любая вектор-функция $f(g)$ из пространства представления $H(\chi)$ однозначно определяется своими значениями на $\overline{F}$; обратно, всякую функцию на F можно однозначно продолжить до функции на всей группе G, удовлетворяющей условию (2).

Тем самым мы приходим к новой реализации пространства $H(\chi)$. Элементами пространства $H(\chi)$ в этой реализации являются всевозможные вектор-функции $f(x)$, $x \in F$, принимающие значения в пространстве V представления $\chi(\gamma)$ и удовлетворяющие условию

$$(f, f) \equiv \int_F [f, f]\, dg < \infty \tag{6}$$

($[f, f]$ — скалярное произведение в пространстве V представления $\chi(\gamma)$).

Отметим, что (6) не зависит от выбора фундаментальной области; это следует из того, что выражение $[f(g), f(g)]$ сохраняется при замене g на γg, где $\gamma \in \Gamma$. Оператор представления $T(g)$ задается в этой реализации следующей формулой:

$$T(g) f(x) = \chi(\gamma) f(x'), \tag{7}$$

где $\gamma \in \Gamma$ и $x' \in F$ определяются из соотношения

$$xg = \gamma x'. \tag{8}$$

С дискретной подгруппой Γ можно связать еще одно важное представление группы G. Рассмотрим множество всех подгрупп Γ_i конечного индекса группы G. Пусть $T_i(g)$ — представление группы G, порожденное однородным пространством $X_i = \Gamma_i \setminus G$. Это представление, как мы знаем, действует в пространстве $L_2(X_i)$ функций с интегрируемым квадратом на X_i.

Заметим теперь, что *если* $\Gamma_i \subset \Gamma_j$, *то имеет место естественное вложение* $L_2(X_j) \subset L_2(X_i)$. В самом деле, функции из $L_2(X_j)$ можно рассматривать как функции на G, постоянные на классах смежности по подгруппе Γ_j; но тогда они постоянны и на классах смежности по Γ_i, т. е. принадлежат пространству $L_2(X_i)$.

Отсюда следует, что *можно построить новое гильбертово пространство H, являющееся прямым спектром* *пространств* $L_2(X_i)$. Это пространство можно описать следующим образом. Упорядочим группы Γ_i с помощью натуральных чисел и положим $\Gamma'_0 = \Gamma$, $\Gamma'_i = \Gamma_1 \cap \ldots \cap \Gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $X'_i = \Gamma'_i \setminus G$. Тогда имеем $\Gamma'_i \subset \Gamma'_{i-1}$, а потому $L_2(X'_{i-1}) \subset L_2(X'_i)$. Обозначим через H'_i ортогональное дополнение подпространства $L_2(X'_{i-1})$ в пространстве $L_2(X'_i)$. Тогда пространство H является прямой суммой гильбертовых пространств $L_2(X)$ и H_1, H_2, ...

В пространстве H естественным образом определено представление группы G, поскольку оно определено в каждом из пространств $L_2(X)$, H_1, H_2, ...

Заметим, что некоторые результаты, касающиеся спектра пространства $L_2(X)$, остаются справедливыми и для пространства H.

Например, предположим, что пространство $X = \Gamma \setminus G$ компактно. Тогда, так как подгруппы Γ_i имеют конечный индекс в группе G, то компактны и пространства $X_i = \Gamma_i \setminus G$. Как будет показано позже, в этом случае каждое из пространств $L_2(X_i)$ распадается в прямую сумму счетного числа инвариантных неприводимых подпространств, причем каждое из этих подпространств входит в $L_2(X_i)$ с конечной кратностью. Выражаясь иначе, спектр представления в пространстве $L_2(X_i)$ является дискретным конечнократным.

Очевидно, что в этом случае представление в пространстве H также распадается в счетную прямую сумму неприводимых представлений.

Было бы весьма интересно изучить это разложение подробнее. Например, можно ли утверждать, хотя бы в частном случае, когда G — группа вещественных матриц 2-го порядка, что неприводимые представления, входящие в H, образуют в известном смысле всюду плотное множество в пространстве всех представлений? Конечна ли кратность, с которой неприводимое представление входит в это разложение?

2. Операторы T_φ. В теории представлений важную роль играют операторы вида

$$T_\varphi = \int \varphi(g) T(g)\, dg, \tag{1}$$

где $T(g)$ — оператор представления группы, $\varphi(g)$ — некоторая функция на группе, а интегрирование ведется по инвариантной мере dg на группе G *).

Интеграл (1) заведомо сходится, когда $\varphi(g)$ является непрерывной финитной (или достаточно быстро убывающей) функцией на группе G.

Легко проверяется, что если φ_1, φ_2 — финитные непрерывные функции, λ_1, λ_2 — комплексные числа, то

$$T_{\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2} = \lambda_1 T_{\varphi_1} + \lambda_2 T_{\varphi_2}, \tag{2}$$

$$T_{\varphi_1 * \varphi_2} = T_{\varphi_1} T_{\varphi_2}, \tag{3}$$

где $\varphi_1 * \varphi_2$ есть свертка. Таким образом, *соответствие* $\varphi \to T_\varphi$ *является представлением алгебры финитных непрерывных функций* $\varphi(g)$, *в которой умножение определено как свертка.*

Отметим также, что если T — унитарное представление, то

$$T_{\varphi^*} = T_\varphi^*, \tag{4}$$

где $\varphi^*(g) = \overline{\varphi(g^{-1})}$. Из (3) и (4) вытекает, что оператор $T_{\varphi * \varphi^*}$ является самосопряженным положительно определенным оператором.

Переход от операторов представления $T(g)$ к операторам T_φ удобен тем, что последние в ряде случаев оказываются интегральными вполне непрерывными операторами (или интегральными операторами с ядром Гильберта—Шмидта). Это позволяет при изучении представлений T применять классические результаты теории интегральных операторов.

В этом пункте мы рассмотрим унитарное представление локально компактной группы G, индуцированное дискретной подгруппой Γ. Будет доказано, что *если пространство* $X = \Gamma \setminus G$ *компактно, то для любой непрерывной финитной функции* $\varphi(g)$ *на* G *оператор*

$$T_\varphi = \int \varphi(g) T(g)\, dg \tag{5}$$

является интегральным вполне непрерывным оператором.

---

*) Мы будем всюду предполагать, что мера dg является **двусторонне инвариантной**, т. е. $dg = d(gg_0) = d(g_0 g)$ для любого элемента $g_0 \in G$.

Доказательство. Напишем явное выражение для оператора T_φ. Напомним, что представление $T(g)$ группы G, связанное с Γ, задается некоторым унитарным представлением $\chi(\gamma)$ подгруппы Γ, действующим в конечномерном пространстве V. Представление $T(g)$ действует в пространстве $H(\chi)$ вектор-функций на G со значениями в V, удовлетворяющих условию

$$f(\gamma g) = \chi(\gamma) f(g), \quad \gamma \in \Gamma, \quad g \in G. \tag{6}$$

Оператор представления $T(g)$ задается формулой

$$T(g_0) f(g) = f(g g_0). \tag{7}$$

На основании (5) и (7) мы получаем следующую форфулу для оператора T_φ:

$$T_\varphi f(g_1) = \int \varphi(g) f(g_1 g)\, dg.$$

Сделав здесь замену переменной $g_1 g = g'$, получим

$$T_\varphi f(g_1) = \int_G \varphi(g_1^{-1} g') f(g')\, dg' = \\ = \int_F \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g_1^{-1} \gamma g_2) \chi(\gamma) f(g_2) \right) dg_2,$$

где F — фундаментальная область относительно подгруппы Γ. Мы видим, что T_φ является интегральным оператором, ядро которого есть

$$K(g_1, g_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g_1^{-1} \gamma g_2) \chi(\gamma). \tag{8}$$

Заметим, что суммирование в (8) ведется фактически по конечному множеству γ. В самом деле, можно считать, что $g_1^{-1} \gamma g_2$ принадлежит компактному множеству, поскольку функция $\varphi(g)$ финитна. С другой стороны g_1 и g_2 также принадлежат компактному множеству — фундаментальной области F. Следовательно, и γ принадлежит некоторому компактному множеству. Но совокупность всех γ дискретна, а потому γ пробегает в сумме (8) лишь конечное множество.

Из сделанного замечания следует, что ядро $K(g_1, g_2)$ оператора T_φ является непрерывной функцией от g_1, g_2.

Значит, T_φ — вполне непрерывный оператор в пространстве $H(\chi)$ *).

Покажем, что оператор T_φ остается вполне непрерывным и для более широкого класса функций, чем финитные функции. Именно, рассмотрим непрерывную функцию $\varphi(g)$, удовлетворяющую следующему условию: существуют неотрицательная суммируемая на G функция $\varphi_1(g)$ и компактная окрестность U единицы группы G такие, что для любого $g_0 \in G$

$$|\varphi(g_0)| \leqslant \int\limits_U \varphi_1(g_0 g)\, dg \text{ **)}. \tag{9}$$

Покажем, что ряд (7) для ядра $K(g_1, g_2)$ оператора T_φ абсолютно сходится.

В самом деле, при фиксированных g_1, g_2 и γ имеет место неравенство

$$|\varphi(g_1^{-1}\gamma g_2)| < \int\limits_U \varphi_1(g_1^{-1}\gamma g_2 g)\, dg. \tag{10}$$

Заметим, что множества $g_1^{-1}\gamma g_2 U$, соответствующие γ и γ' при фиксированных g_1 и g_2, перекрываются тогда и только тогда, когда $\gamma'^{-1}\gamma \in g_2 U U^{-1} g_2^{-1}$. Ввиду дискретности подгруппы Γ, компактное множество $g_2 U U^{-1} g_2^{-1}$ содержит лишь конечное число N элементов из Γ. Отсюда следует, что при фиксированных g_1, g_2 с каждым множеством $g_1^{-1}\gamma g_2 U$ может пересекаться не более чем N множеств $g_1^{-1}\gamma' g_2 U$. Но тогда имеем на основании (10)

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\varphi(g_1^{-1}\gamma g_2)| \leqslant N \int\limits_G \varphi_1(g)\, dg,$$

*) Здесь использован следующий хорошо известный факт. Пусть H — пространство функций $f(x)$, заданных на компактном множестве X и таких, что $\int |f(x)|^2\, dx < \infty$. Если $K(x, y)$ — непрерывная функция на $X \times X$, то интегральный оператор с ядром $K(x, y)$ является вполне непрерывным оператором на H.

**) Легко видеть, что финитные функции удовлетворяют этому условию. Именно, если $\varphi(g)$ — финитная функция, то в качестве U можно взять любую компактную окрестность единицы, а $\varphi_1(g)$ определить, например, по формуле $\varphi_1(g_0) = \dfrac{1}{\operatorname{mes} U} \max\limits_{g \in U} |\varphi(g_0 g^{-1})|$.

т. е. ряд $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}\varphi(g_1^{-1}\gamma g_2)$ абсолютно сходится. Отсюда непосредственно следует абсолютная сходимость ряда (8) для $K(g_1, g_2)$.

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что ряд для K сходится также и равномерно по g_1, g_2, когда g_1, g_2 принадлежит некоторой фиксированной компактной области в G, в частности, если $g_1, g_2 \in F$. Поскольку все члены ряда для $K(g_1, g_2)$ непрерывны, то значит $K(g_1, g_2)$ является непрерывной функцией от g_1, g_2.

Итак, *если пространство* $X=\Gamma\setminus G$ *компактно, то для любой непрерывной функции* $\varphi(g)$, *удовлетворяющей условию* (9), *оператор* $T_\varphi=\int\varphi(g)T(g)\,dg$ *является интегральным вполне непрерывным оператором.*

3. Дискретность спектра индуцированного представления в случае компактного пространства $X=\Gamma\setminus G$. Пусть, как и раньше, G — топологическая локально компактная группа, Γ — ее дискретная подгруппа. Мы докажем здесь следующее утверждение.

Теорема. *Если пространство* $X=\Gamma\setminus G$ *компактно, то представление* $T(g)$ *группы* G, *индуцированное подгруппой* Γ, *распадается в дискретную сумму счетного числа неприводимых унитарных представлений, причем кратность каждого из них конечна.*

Иными словами, спектр представления группы G в пространстве $X=\Gamma\setminus G$ является дискретным и конечнократным.

Для доказательства теоремы рассмотрим операторы $T_\varphi=\int\varphi(g)T(g)\,dg$, где $\varphi(g)$ — непрерывная финитная функция на G. В п. 2 было доказано, что эти операторы вполне непрерывны. Поэтому доказательство теоремы сводится к доказательству следующего утверждения.

Лемма. *Если унитарное представление* $g\to T(g)$ *локально-компактной группы* G *в пространстве* H *таково, что оператор* $T_\varphi=\int\varphi(g)T(g)\,dg$ *вполне непрерывен для любой финитной непрерывной функции* $\varphi(g)$, *то* H *можно разложить в сумму счетного числа* *неприводимых унитарных представлений группы G, причем кратность каждого из них конечна.*

Доказательство леммы. Рассмотрим непрерывные финитные функции $\varphi(g)$, удовлетворяющие дополнительно условию

$$\varphi(g)=\overline{\varphi(g^{-1})}. \tag{1}$$

Оператор $T_\varphi=\int\varphi(g)T(g)\,dg$, отвечающий такой функции является самосопряженным вполне непрерывным интегральным оператором. В самом деле, мы имеем

$$T_\varphi^*=\int\overline{\varphi(g)}\,T^*(g)\,dg=\int\overline{\varphi(g)}\,T(g^{-1})\,dg=$$
$$=\int\overline{\varphi(g^{-1})}\,T(g)\,dg,$$

а потому, в силу (1), $T_\varphi^*=T_\varphi$.

Следовательно, оператор T_φ имеет счетный дискретный спектр, причем все собственные значения $\lambda\neq 0$ оператора T_φ — конечной кратности *). Таким образом, пространство представления H разлагается в прямую сумму подпространств

$$H=H_\varphi\dotplus\sum_{k=1}^{\infty}H_{\varphi,k}, \tag{2}$$

где H_φ — подпространство всех векторов f с собственным значением 0, т. е. таких, что $T_\varphi f=0$; $H_{\varphi,k}$ — подпространство всех собственных векторов оператора T_φ с заданным собственным значением $\lambda_k\neq 0$. При этом все пространства $H_{\varphi,k}$ являются конечномерными.

Очевидно, что аналогичное разложение имеет место и для любого инвариантного подпространства $H'\subset H$, а именно:

$$H'=H'_\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}H'_{\varphi,k}, \tag{3}$$

где $H'_\varphi\subset H_\varphi$, $H'_{\varphi,k}\subset H_{\varphi,k}$.

Рассмотрим теперь всевозможные подпростронства $H_{\varphi,k}$, где φ пробегает непрерывные финитные функции, удовлетворяющие условию (1). Пусть H_1 — минимальное подпро-

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 5.

странство, содержащее все пространства $H_{\varphi, k}$. Покажем, что H_1 совпадает со всем пространством H.

В самом деле, предположим, что это не так. Возьмем вектор $f \neq 0$ из ортогонального дополнения пространства H_1. Этот вектор ортогонален ко всем пространствам $H_{\varphi, k}$, а потому он принадлежит, в силу разложения (2), пространству H_φ. Иными словами, $T_\varphi f = 0$ для любой функции φ. Покажем, что это невозможно.

Из определения представления группы следует, что последовательность векторов $T(g)f$ сходится к f, когда g стремится к единичному элементу. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U единичного элемента, что

$$\|T(g)f - f\| < \varepsilon \|f\|,$$

когда $g \in U$. Подберем непрерывную финитную функцию $\varphi(g)$, удовлетворяющую, помимо соотношения (1), еще следующим двум условиям:

1) функция $\varphi(g)$ сосредоточена в U и принимает лишь вещественные неотрицательные значения.

2) $\int \varphi(g)\, dg = 1$.

Для такой функции $\varphi(g)$ мы имеем

$$T_\varphi f - f = \int_U \varphi(g)(T(g)f - f)\, dg.$$

Следовательно,

$$\|T_\varphi f - f\| \leqslant \int_U \varphi(g)\|T(g)f - f\|\, dg < \varepsilon \|f\|.$$

Так как, в силу нашего предположения, $T_\varphi f = 0$, то имеем отсюда $\|f\| < \varepsilon \|f\|$ для любого $\varepsilon > 0$, что невозможно.

Итак, мы доказали, что минимальное подпространство, содержащее все конечномерные пространства $H_{\varphi, k}$, совпадает со всем пространством H.

Отсюда и из разложения (3) следует, что любое инвариантное подпространство пространства H имеет ненулевое пересечение хотя бы с одним $H_{\varphi, k}$. Опираясь на этот факт, построим разложение пространства H в прямую сумму инвариантных неприводимых подпространств.

Зафиксируем какое-либо пространство $H_{\varphi, k}$. Рассмотрим пересечения пространства $H_{\varphi, k}$ со всевозможными инвариантными подпространствами пространства H. Выберем из этих пересечений ненулевое подпространство минимальной возможной размерности; обозначим его через $H'_{\varphi, k}$. Возьмем все инвариантные подпространства, имеющие с $H_{\varphi, k}$ заданное пересечение $H'_{\varphi, k}$. Среди них имеется минимальное подпространство H_1, являющееся пересечением всех этих пространств.

Покажем, что пространство H_1 неприводимо. В самом деле, предположим, что H_1 распадается в прямую сумму инвариантных подпространств

$$H_1 = H_{11} \dot{+} H_{12}.$$

Из определения $H'_{\varphi, k}$ следует, что подпространство $H'_{\varphi, k}$ должно целиком содержаться в одном из пространств H'_1, H_{12}. Но это противоречит тому, что H_1 — минимальное инвариантное подпространство, содержащее $H'_{\varphi, k}$.

Итак, мы выделили в пространстве H инвариантное неприводимое подпространство H_1. Рассмотрим разложение $H = H_1 + H'_1$, где H'_1 — ортогональное дополнение пространства H_1. Пространство H'_1 инвариантно. Следовательно, существует пространство $H_{\varphi, k}$, с которым H'_1 имеет ненулевое пересечение. Повторяя для H'_1 предыдущие рассуждения, мы выделим в H'_1 инвариантное неприводимое подпространство H_2 и т. д.

Продолжая этот процесс трансфинитно, мы получим искомое разложение

$$H = \sum H_k \tag{4}$$

пространства H в прямую сумму инвариантных неприводимых подпространств H_k. Поскольку H — сепарабельное пространство, то число слагаемых в этой сумме не более чем счетно.

Покажем, наконец, что кратность каждого неприводимого представления, входящего в H, конечна. Рассмотрим какое-либо неприводимое подпространство H_k пространства H, входящее в разложение (4). Можно подобрать оператор T_φ, имеющий в H_k собственный вектор с собственным значением $\lambda \neq 0$. Тогда, очевидно, и в любом подпространстве H_l, где действует эквивалентное представление, также существует собственный вектор оператора T_φ с тем же собственным значением $\lambda \neq 0$. Но имеется лишь конечное число линейно независимых собственных векторов оператора T_φ с заданным собственным значением $\lambda \neq 0$. Следовательно, конечно и число пространств H_l, эквивалентных H_k. Лемма доказана.

Итак, доказано, что спектр представления локально компактной группы G, связанного с дискретной подгруппой Γ, является в случае, когда пространство $X = \Gamma \setminus G$ компактно, дискретным и конечнократным.

Будем называть унитарное представление T группы G вполне непрерывным, если для любой суммируемой функции φ на G оператор T_φ вполне непрерывен. Мы показали, что всякое вполне непрерывное представление имеет дискретный конечнократный спектр. Можно дать необходимое и достаточное условие вполне непрерывности представления T в терминах его спектра. А именно, *для того чтобы представление $T = \Sigma T_l$ было вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *каждая неприводимая компонента T_l была вполне непрерывна;*

2) *последовательность $\{T_l\}$ не имела предельных точек в множестве $\widehat{G}$ всех неприводимых представлений группы G, снабженном естественной топологией.*

Для широкого класса групп Ли, в частности, для всех полупростых и всех нильпотентных групп доказано, что всякое неприводимое унитарное представление вполне непрерывно. Таким образом, для этих групп условие 1) всегда выполнено.

Второе условие является, очевидно, усилением требования конечной кратности спектра.

4. Формула следа. Пусть снова $T(g)$ — представление локально компактной группы G, индуцированное дискретной подгруппой Γ, такой, что пространство $X = \Gamma \setminus G$ является компактным. Мы доказали в п. 3, что представление $T(g)$ имеет дискретный конечнократный спектр. В этом пункте будет получена формула следа, содержащая в разумном смысле полное описание всех неприводимых представлений, входящих в $T(g)$.

Поскольку сами операторы $T(g)$, будучи унитарными операторами в бесконечномерном пространстве, не имеют следа в обычном смысле, то вместо них мы будем рассматривать операторы

$$T_\varphi = \int \varphi(g)\, T(g)\, dg.$$

Эти операторы, как было показано в п. 2, являются при некоторых условиях на функцию $\varphi(g)$ вполне непрерывными интегральными операторами. Это имеет место, например, когда $\varphi(g)$ — финитная непрерывная функция, а также в более общем случае, когда для функции $\varphi(g)$ справедлива оценка

$$|\varphi(g_0)| \leqslant \int\limits_U \varphi_1(g_0 g)\, dg, \tag{1}$$

где U — некоторая компактная окрестность единицы группы G, $\varphi_1(g)$ — неотрицательная суммируемая на G функция.

Будем предполагать дальше, что T_φ — самосопряженные положительно определенные операторы. Это имеет место для функций вида $\varphi(g) = \psi(g) * \overline{\psi(g^{-1})}$.

Ядра $K(g_1, g_2)$ операторов T_φ задаются следующей формулой:

$$K(g_1, g_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g_1^{-1}\gamma g_2)\,\chi(\gamma). \tag{2}$$

Здесь $\chi(\gamma)$ — фиксированное конечномерное унитарное представление подгруппы Γ, которым определяется представление $T(g)$.

Из непрерывности ядра $K(g_1, g_2)$ и из компактности пространства $X = \Gamma \setminus G$ следует, что самосопряженный положительно определенный оператор T_φ имеет след, равный

$$\int\limits_F \operatorname{Tr} K(g, g)\, dg = \int\limits_F \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g^{-1}\gamma g) \operatorname{Tr} \chi(\gamma) \right) dg, \tag{3}$$

где $\operatorname{Tr} K$ — след матрицы $K(g, g)$, $\operatorname{Tr} \chi(\gamma)$ — след матрицы $\chi(\gamma)$, F — фундаментальная область.

Теперь подсчитаем след оператора T_φ другим способом. Для этого сделаем предварительно одно важное предположение о самой группе G.

Будем предполагать, что для любого неприводимого унитарного представления $T_k(g)$ группы G и любой функции $\varphi(g) \in S$, где S — некоторое линейное пространство функций, всюду плотное в пространстве непрерывных функций на G, оператор

$$T_\varphi^k = \int \varphi(g)\, T_k(g)\, dg \tag{4}$$

является вполне непрерывным и имеет след $\mathrm{Tr}(T_\varphi^k)$; *этот след* $\mathrm{Tr}(T_\varphi^k)$ *является непрерывным функционалом в пространстве* S.

Если это предположение выполнено, то мы можем писать, что

$$\mathrm{Tr}(T_\varphi^k) = \int \varphi(g)\,\sigma_k(g)\,dg, \tag{5}$$

где $\sigma_k(g)$ — обобщенная функция на группе G. Обобщенную функцию $\sigma_k(g)$ естественно трактовать как след самого оператора представления $T_k(g)$. Ее обычно называют **характером** заданного представления $T_k(g)$.

Сформулированное здесь условие выполняется для всех полупростых групп Ли *).

Важность понятия характера представления видна уже из следующего результата. Если G — полупростая группа Ли, то любое ее неприводимое унитарное представление однозначно определяется своим характером.

В последующих разделах книги мы получим явные формулы для характеров неприводимых представлений некоторых групп.

Итак, пусть группа G удовлетворяет сделанному предположению. Пусть $H_1, \ldots, H_k, \ldots$ — неприводимые неэквивалентные между собой подпространства, на которые разлагается пространство представления $T(g)$, а $N_1, \ldots, N_k, \ldots$ — кратности, с которыми они входят в это разложение.

По предположению, оператор T_φ имеет в подпространстве H_k след, равный

$$\int \varphi(g)\,\sigma_k(g)\,dg,$$

где $\sigma_k(g)$ — характер неприводимого представления в H_k. Но тогда след оператора T_φ во всем пространстве представления $T(g)$ равен

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k \int \varphi(g)\,\sigma_k(g)\,dg. \tag{6}$$

---

*) В случае полупростых групп Ли в качестве пространства S можно взять пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых функций на G.

Приравнивая между собой выражения (3) и (6) для следа оператора T_φ, мы получим искомую «формулу следа». Именно, *пусть* Γ — *дискретная подгруппа группы* G, *такая, что пространство* $X = \Gamma \setminus G$ *компактно*; $T(g)$ — *представление группы* G, *индуцированное конечномерным унитарным представлением* $\chi(\gamma)$ *группы* Γ. *Обозначим через* $\sigma_k(g)$ *характеры неприводимых представлений, содержащихся в представлении* $T(g)$, *и через* N_k — *кратности, с которыми они входят в это представление. Тогда имеет место следующая формула следа*:

$$\int\limits_F \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g^{-1}\gamma g) \operatorname{Tr} \chi(\gamma) \right) dg = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \int\limits_G \varphi(g) \sigma_k(g) dg. \tag{7}$$

В этой формуле $\operatorname{Tr} \chi(\gamma)$ обозначает след матрицы $\chi(\gamma)$.

Заметим, что в простейшем случае, когда $\chi(\gamma)$ — единичное представление, формула следа принимает следующий вид:

$$\int\limits_F \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g^{-1}\gamma g) \right) dg = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \int \varphi(g) \sigma_k(g) dg. \tag{8}$$

Рассмотрим некоторые следствия из полученной формулы.

1. Пусть группа G компактна. В этом случае из формулы следа получаются явные выражения для кратностей N_k. Именно, положим $\varphi(g) = \overline{\sigma_k(g)}$. Как известно, характеры неэквивалентных представлений ортогональны между собой, т. е.*)

$$\int\limits_G \overline{\sigma_k(g)}\, \sigma_m(g)\, dg = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k = m, \\ 0, & \text{если} \quad k \neq m. \end{cases}$$

Следовательно, правая часть формулы (7) дает нам кратность N_k, с которой входит представление H_k. Левая же

*) Мера dg предполагается нормированной условием $\int dg = 1$.

часть будет равна

$$\int\limits_F \Big(\sum_\gamma \overline{\sigma_k(g^{-1}\gamma g)} \operatorname{Tr}\chi(\gamma)\Big)\, dg = \sum_\gamma \overline{\sigma_k(\gamma)} \operatorname{Tr}\chi(\gamma) \int\limits_F dg =$$
$$= \frac{1}{n_\Gamma} \sum_\gamma \overline{\sigma_k(\gamma)} \operatorname{Tr}\chi(\gamma).$$

(Объем F, очевидно, равен $1/n_\Gamma$, где n_Γ — порядок группы Γ.)

Мы получили, таким образом, следующую формулу для кратностей N_k:

$$N_k = \frac{1}{n_\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{\sigma_k(\gamma)} \operatorname{Tr}\chi(\gamma). \tag{9}$$

В частном случае, когда $\chi(\gamma)$ — единичное представление, эта формула упрощается:

$$N_k = \frac{1}{n_\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sigma_k(\gamma). \tag{10}$$

2. Пусть G — группа вещественных матриц второго порядка с определителем 1. Для применения аналогичного приема к определению кратности N_k, с которой неприводимое представление H_k входит в H, достаточно найти функцию $\varphi(g)$, для которой справедлива оценка (1) и такую, что

$$\int\limits_G \varphi(g)\,\sigma_m(g)\,dg = \begin{cases} 1, & \text{если } m = k, \\ 0, & \text{если } m \neq k. \end{cases} \tag{11}$$

Поскольку характер $\sigma_m(g)$ зависит только от собственных значений матрицы $g \in G$, то такая функция $\varphi(g)$, вообще говоря, не единственна.

Мы увидим дальше, что у группы G имеются два типа представлений — представления непрерывной серии и представления дискретной серии.

Можно показать, что для представлений непрерывной серии функции $\varphi(g)$, удовлетворяющей условию (11), не существует.

Действительно, если $\varphi(g)$ удовлетворяет условию (11), то во всяком случае

$$\int\limits_G |\varphi(g)|\, dg < \infty.$$

Рассмотрим функцию

$$h(s) = \int\limits_G \varphi(g)\,\sigma_s(g)\,dg,$$

где $\sigma_s(g)$ — характер представления основной непрерывной серии с «номером s» (s — чисто мнимое число). Этот характер задается следующей формулой:

$$\sigma_s(g) = \frac{|\lambda_g|^{-s} + |\lambda_g|^{-s}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|}$$

в случае, когда собственные значения λ_g, λ_g^{-1} матрицы g вещественны;

$$\sigma_s(g) = 0$$

в случае, когда λ_g, λ_g^{-1} комплексны.

Можно показать, что функция $h(s)$ аналитична в области $|\operatorname{Re} s| < 1$. Для наших же целей нужна такая функция $\varphi(g)$, чтобы $h(s)$ было отлично от нуля лишь вблизи фиксированной точки s_0. Ясно, что такой функции $\varphi(g)$ не существует.

Для представлений дискретной серии положение иное: для них такая функция существует.

Именно, пусть $T_n(g)$ — представление дискретной серии с номером n, реализуемое в пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости (см. ниже § 3, п. 3). Тогда для него в качестве такой функции $\varphi(g)$ можно взять

$$\varphi_n(g) = \frac{e^{in\theta}(\operatorname{Im} z)^{n/2}}{(z+i)^n},$$

где $z = -\frac{g_{22} + ig_{21}}{g_{12} + ig_{11}}$, $\theta = \arg(g_{12} - ig_{11})$. Подставив $\varphi_n(g)$ в формулу (7), можно получить конечное выражение для кратности N_n, с которой представление $T_n(g)$ входит в $T(g)$. Мы найдем его позже, в § 5, п. 7, применяя несколько иные методы.

5. Другой вид формулы следа. Преобразуем формулу следа к более удобной форме. Именно, *мы покажем, что левую часть равенства* (7) п. 4 *можно преобразовать к следующему виду*:

$$\sum_{\gamma}{}' \mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma) \operatorname{Tr} \chi(\gamma) \int\limits_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg, \tag{1}$$

где γ пробегает по одному представителю из каждого класса сопряженных элементов в группе Г. В этом выражении через G_γ обозначен централизатор элемента γ в группе G; таким образом, интеграл

$$I_\gamma = \int\limits_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg$$

является интегралом функции φ по классу всех элементов в G, сопряженных с γ. Через Γ_γ обозначен централизатор элемента γ в группе Γ; $\mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma)$ есть мера пространства $\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma$ (нетрудно убедиться, что эта мера конечна).

Для доказательства разобъем элементы γ на классы сопряженных между собой элементов относительно подгруппы Γ. Ясно, что на каждом из этих классов выражение $\operatorname{Tr}\chi(\gamma)$ остается постоянным.

Таким образом, левая часть формулы следа может быть записана так:

$$\sum \operatorname{Tr}\chi(\gamma) \int_F \left(\sum_{\gamma'} \varphi(g^{-1}\gamma' g)\right) dg,$$

где внутреннее суммирование ведется по классу сопряженных элементов, а внешнее — по множеству таких классов.

Будем преобразовывать выражение, стоящее под знаком внешней суммы.

Рассмотрим один из классов сопряженных элементов. Этот класс состоит из элементов вида

$$\gamma' = \gamma_i^{-1}\gamma\gamma_i,$$

где γ фиксировано, а γ_i пробегает группу Γ. Заметим, что когда γ_i пробегает группу Γ, каждый такой элемент γ' получается по нескольку раз. Именно, два элемента γ_i и γ_j определяют один и тот же элемент γ' тогда и только тогда, когда $(\gamma_i\gamma_j^{-1})\gamma(\gamma_i\gamma_j^{-1}) = \gamma$, т. е. когда $\gamma_i\gamma_j^{-1}$ принадлежит централизатору Γ_γ элемента γ в группе Γ. Итак, чтобы каждый элемент γ' класса сопряженных элементов получался точно по одному разу, элементы γ_i должны пробегать точно по одному представителю каждого класса смежности $\Gamma_\gamma \setminus \Gamma$. Таким образом, имеем

$$\sum_{\gamma'} \varphi(g^{-1}\gamma' g) = \sum_{\gamma_i \in \Gamma_\gamma \setminus \Gamma} \varphi(g^{-1}\gamma_i^{-1}\gamma\gamma_i g),$$

где γ_i пробегает по одному представителю из каждого класса смежности $\Gamma_\gamma \setminus \Gamma$; следовательно,

$$\int_F \left(\sum_{\gamma'} \varphi(g^{-1}\gamma' g)\right) dg = \int_F \left(\sum_{\gamma_i} \varphi(g^{-1}\gamma_i^{-1}\gamma\gamma_i g)\right) dg = \\ = \int_{F_1} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg,$$

где интеграл берется по множеству

$$F_1 = \sum_{\gamma_i \in \Gamma_\gamma \setminus \Gamma} \gamma_i F.$$

Ясно, что F_1 является фундаментальным множеством подгруппы Γ_γ в группе G. Таким образом, имеем

$$\int_F \left(\sum_{\gamma'} \varphi(g^{-1}\gamma' g) \right) dg = \int_{\Gamma_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg.$$

Пусть теперь G_γ — централизатор элемента γ во всей группе G. Тогда мы имеем

$$\int_{\Gamma_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg = \int_{G_\gamma \setminus G} \int_{\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma} \varphi(g^{-1} g_1^{-1} \gamma g_1 g)\, dg_1\, dg =$$

$$= \int_{G_\gamma \setminus G} \int_{\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg_1\, dg = \mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma) \int_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g) dg.$$

Итак, когда γ' пробегает множество элементов, сопряженных с γ относительно подгруппы Γ, мы имеем

$$\int_F \left(\sum_{\gamma'} \varphi(g^{-1}\gamma' g) \right) dg = \mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma) \int_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg.$$

Умножая это равенство на $\operatorname{Tr} \chi(\gamma)$ и суммируя по множеству классов сопряженных элементов в Γ, мы и получим требуемое выражение (1).

Сформулируем окончательный результат. *Пусть G — локально компактная группа, Γ — ее дискретная подгруппа такая, что пространство $\Gamma \setminus G$ компактно, $\chi(\gamma)$ — унитарное представление группы Γ, $T(g)$ — представление группы G, индуцированное представлением $\chi(\gamma)$.*

Пусть $\sigma_k(g)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — характеры неприводимых унитарных представлений, содержащихся в представлении $T(g)$, N_k — кратности, с которыми эти представления входят в $T(g)$. Тогда для любой *финитной функции* $\varphi(g)$ *на* G *имеет место следующая формула следа*:

$$\sum_k N_k \int \varphi(g)\sigma_k(g)\,dg =$$
$$= \sum_\gamma \operatorname{Tr}\chi(\gamma)\,\mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma) \int\limits_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\,dg. \quad (2)$$

Здесь $\operatorname{Tr}\chi(\gamma)$ — след матрицы $\chi(\gamma)$; G_γ, Γ_γ — централизаторы элемента γ соответственно в группах G и Γ; суммирование ведется по множеству классов сопряженных элементов в Γ. Отметим, что интеграл $\int\limits_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\,dg$ есть не что иное, как интеграл по классу элементов в G, сопряженных с элементом γ.

Формуле следа можно придать иной вид, перейдя от функции $\varphi(g)$ к ее «преобразованию Фурье». Именно, пусть $\sigma(g)$ пробегает характеры всех неприводимых унитарных представлений группы G. Перейдем от функции $\varphi(g)$ на группе G к ее «преобразованию Фурье»

$$h(\sigma) = \int \varphi(g)\,\sigma(g)\,dg. \quad (3)$$

Тогда левую часть формулы следа можно представить в виде

$$\sum_k h(\sigma_k),$$

где сумма берется по всем неприводимым представлениям σ_k, содержащимся в $T(g)$, причем каждое слагаемое повторяется столько раз, какова кратность представления.

С другой стороны, каждое слагаемое в правой части формулы следа также можно выразить через функцию $h(\sigma)$ в виде некоторого интеграла

$$\int h(\sigma)\,\psi_\gamma(\sigma)\,d\sigma.$$

Интеграл берется по множеству всех неприводимых унитарных представлений группы G. Таким образом, формула следа принимает следующий вид:

$$\sum_k h(\sigma_k) = \sum_\gamma \int h(\sigma)\,\psi_\gamma(\sigma)\,d\sigma,$$

где суммирование справа ведется по множеству классов сопряженных элементов в Γ.

Задача состоит в том, чтобы получить явное выражение для функции $\psi_\gamma(\sigma)$. В § 5 эта задача будет решена для группы вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка.

§ 3. Неприводимые унитарные представления группы вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка

В этом параграфе будет дано описание неприводимых унитарных представлений группы G вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка. Результаты, как правило, будут приводиться без доказательств. Подробнее о представлениях группы G читатель сможет узнать из гл. II, где изучаются представления группы матриц 2-го порядка с элементами из любого локально компактного поля (см. также «Обобщенные функции», вып. 5, гл. VII).

1. Основная серия неприводимых унитарных представлений. Неприводимые унитарные представления группы G, отличные от единичного представления, распадаются на 3 серии — основную непрерывную, дополнительную и дискретную серии. Прежде всего мы опишем наиболее простой класс неприводимых унитарных представлений — представления основной серии.

Рассмотрим аффинную плоскость X *с выброшенным началом координат* (в дальнейшем, говоря об аффинной плоскости X, мы будем всегда предполагать, что начало координат выброшено и в X введена соответствующая топология). Плоскость X является однородным пространством, в котором G действует как группа аффинных преобразований. Именно, элемент $g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ группы G переводит любую точку плоскости $x=(x_1, x_2)$ в точку

$$xg=(x_1g_{11}+x_2g_{21},\ x_1g_{12}+x_2g_{22}). \tag{1}$$

Рассмотрим пространство H функций $f(x)$, $x \in X$ с интегрируемым квадратом:

$$\int |f(x)|^2\,dx \equiv \int |f(x_1, x_2)|^2\,dx_1\,dx_2 < \infty.$$

Зададим операторы представления $T(g)$ следующей формулой:

$$T(g)f(x)=f(xg). \tag{2}$$

Это представление унитарно, поскольку мера $dx \equiv dx_1\,dx_2$ сохраняется при преобразованиях $x \to xg$.

Представление $T(g)$ приводимо. При разложении его на неприводимые представления мы получаем основную серию представлений. Укажем, как это разложение производится.

Сначала разложим совокупность функций $f(x)$ на четные и нечетные. Четные функции и функции нечетные образуют, очевидно, инвариантные подпространства, которые мы обозначим соответственно через H^+ и H^-.

Рассмотрим, например, пространство четных функций $f^+(x)$. Положим

$$f_s^+(x)=\int_0^\infty f^+(tx)\,t^{-s}\,dt, \tag{3}$$

где s — чисто мнимое число. Функции $f_s^+(x)$ являются однородными функциями; а именно:

$$f_s^+(tx)=|t|^{s-1}f_s^+(x). \tag{4}$$

Введем в пространство H_s^+ функций $f_s^+(x)$ норму, положив

$$\|f_s^+\|^2=\int_{|x|=1}|f_s^+(x)|^2\,d\varphi, \tag{5}$$

где $d\varphi$ — мера на единичной окружности $|x|=1$. Легко проверить, что представление $T(g)$ в пространстве H_s^+, задаваемое формулой

$$T(g)f_s^+(x)=f_s^+(xg), \tag{6}$$

является унитарным представлением. Это представление неприводимо.

Аналогично строятся представления в пространствах H_s^- нечетных функций.

Представления в пространствах H_s^+ и H_s^- образуют так называемую основную непрерывную серию неприводимых унитарных представлений группы G. В дальнейшем удобно представления в пространствах H_s^+ нечетных функций называть представлениями первой основной серии, а представления в пространствах H_s^- нечетных функций — представлениями второй основной серии.

Можно доказать, что представления, отвечающие s и $-s$ (отдельно в случае четных и отдельно в случае нечетных функций), эквивалентны между собой, а в остальных случаях представления неэквивалентны; таким образом, каждое неприводимое представление встречается здесь дважды. Это в дальнейшем для нас будет очень существенно.

Представление в пространстве H разлагается на указанные здесь представления основной серии. А именно, из равенства Парсеваля для преобразований Меллина непосредственно видно, что

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|f_s^+\|^2 \, d(is) + \int_{-\infty}^{+\infty} \|f_s^-\|^2 \, d(is). \tag{7}$$

Существует другая реализация представлений основной непрерывной серии.

Она получается, если мы вместо однородных функций двух переменных $f(x_1, x_2)$ будем рассматривать функции одной переменной $\varphi(x)$, связанные с функциями f следующим соотношением:

$$\varphi(x) = f(x, 1). \tag{8}$$

(Очевидно, что однородная функция $f_s(x_1, x_2)$ однозначно определяется функцией $\varphi(x)$.) При этом получается следующая реализация представлений основной непрерывной серии.

Представления первой основной серии H_s^+ реализуются в пространстве функций $\varphi(x)$ на прямой со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} \, dx. \tag{9}$$

Операторы представления задаются следующей формулой:

$$T(g)\varphi(x) = \varphi\left(\frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{12}x + g_{22}}\right) |g_{12}x + g_{22}|^{s-1}, \tag{10}$$

где s — мнимое число.

Представления второй основной серии H_s^- также реализуются в пространстве функций на прямой со скалярным произведением (9). Операторы представления задаются следующей формулой:

$$T(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{g_{11}x+g_{21}}{g_{12}x+g_{22}}\right)|g_{12}x+g_{22}|^{s-1}\operatorname{sign}(g_{12}x+g_{22}). \tag{11}$$

2. Дополнительная серия представлений. Пусть $s \neq 0$ — вещественное число из интервала $-1<s<1$. Обозначим через H_s^+ пространство четных функций $f_s^+(x)$, удовлетворяющих условию однородности (4) п. 1, в котором скалярное произведение задается следующей формулой:

$$(f_s', f_s'')=\int\limits_{|x'|=1,\ |x''|=1}\int K_s(x', x'')\,f_s'(x')\,\overline{f_s''(x'')}\,d\varphi'\,d\varphi'', \tag{1}$$

где

$$K_s(x', x'')=|x_1'x_2''-x_2'x_1''|^{-s-1}. \tag{2}$$

(При $s<0$ интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения, см. «Обобщённые функции», вып. 5, гл. VII.)

Оператор представления $T(g)$ определим по-прежнему формулой (6) п. 1. Можно показать, что представления $T(g)$ унитарны и неприводимы; они эквивалентны лишь для s и $-s$. Эти представления называются представлениями дополнительной серии.

Укажем другую реализацию представлений дополнительной серии. Она получается, если мы вместо однородных функций двух переменных $f(x_1, x_2)$ будем рассматривать функции одной переменной $\varphi(x)=f(x, 1)$.

Представление дополнительной серии H_s^+, где $s\neq 0$ — вещественное число из интервала $-1<s<1$, реализуется в пространстве функций на прямой со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x_2|^{-s-1}\varphi_1(x_1)\overline{\varphi_2(x_2)}\,dx_1\,dx_2. \tag{3}$$

Операторы представления задаются формулой

$$T(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{g_{11}x+g_{21}}{g_{12}x+g_{22}}\right)|g_{12}x+g_{22}|^{s-1}. \tag{4}$$

3. Дискретная серия представлений. Эта серия состоит из двух частей. Половина этой серии реализуется в пространстве функций комплексного переменного z, аналитических на верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Операторы представления задаются следующей формулой:

$$T(g)\varphi(z)=\varphi\left(\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}\right)(g_{12}z+g_{22})^{-n-1}, \tag{1}$$

где n — целое неотрицательное число, задающее представление. Скалярное произведение определяется следующей формулой:

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\int\limits_{\operatorname{Im} z>0}\varphi_1(z)\overline{\varphi_2(z)}\,y^{n-1}\,dx\,dy \quad \text{при} \quad n>0, \tag{2}$$

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\,dx \quad \text{при} \quad n=0, \tag{3}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — граничные значения аналитических функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ на вещественной оси.

Другая половина дискретной серии реализуется в пространстве функций, аналитических в нижней полуплоскости. Операторы представлений задаются той же формулой (1), что и в случае первой половины дискретной серии. Скалярное произведение определяется формулой, аналогичной (2). Никакие два из представлений дискретной серии между собой не эквивалентны.

4. Другая реализация представлений основной и дополнительной серий. В этом пункте мы рассмотрим два класса представлений: представления первой основной серии, реализуемые в пространстве H_s^+ четных функций, и представления дополнительной серии.

Эти представления обладают следующим важным свойством. В пространстве представления имеется вектор $f_0(x)$, инвариантный относительно операторов $T(u)$, где u пробегает ортогональные матрицы:

$$u = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

В самом деле, таким вектором является

$$f_0(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{s-1}{2}}. \quad (1)$$

Покажем, что других векторов, инвариантных относительно операторов $T(u)$, не существует.

В самом деле, пусть f — такой вектор, что

$$T(u) f = f,$$

т. е.

$$f(x_1 \cos t - x_2 \sin t, \quad x_1 \sin t + x_2 \cos t) = f(x_1, x_2)$$

для любого t. Из этого равенства непосредственно следует, что f является функцией только от $x_1^2 + x_2^2: f = f(x_1^2 + x_2^2)$. Но так как, кроме того, функция f является однородной функцией степени однородности $s - 1$, то очевидно, что $f = C(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{s-1}{2}}$.

Используя это свойство представлений, мы построим в этом пункте другую их реализацию, а именно мы покажем, что эти представления могут быть реализованы в пространстве функций на $U \setminus G$, где U — подгруппа ортогональных матриц.

Сопоставим каждой функции $f(x)$ из пространства представления H_s^+ функцию $\varphi(g)$ на группе G, определенную следующей формулой:

$$\varphi(g) = (T(g) f, f_0). \quad (2)$$

Здесь f_0 — вектор из H_s^+, инвариантный относительно операторов $T(u)$, а скобки обозначают скалярное произведение в пространстве H_s^+.

Покажем, что *отображение*

$$f(x) \to \varphi(g)$$

является взаимно однозначным.

В самом деле, ядро этого отображения является, очевидно, инвариантным подпространством пространства H_s^+. Поскольку пространство H_s^+ неприводимо, это ядро либо совпадает с H_s^+, либо является нулевым пространством. Но оно не может совпадать с H_s^+, поскольку образ функции $f_0(x)$ отличен от нуля. Следовательно, ядро отображения $f \to \varphi$ является нулевым пространством.

Перейдем от функций $f(x)$ к функциям $\varphi(g) = (T(g) f, f_0)$ и будем таким образом рассматривать представление в пространстве таких функций $\varphi(g)$. Покажем, что оператор представления $T(g)$ задается в пространстве функций $\varphi(g)$ следующей формулой:

$$T(g_0)\varphi(g) = \varphi(gg_0). \tag{3}$$

В самом деле, если к функции f применить оператор $T(g_0)$, то соответствующая функция $\varphi(g) = (T(g) f, f_0)$ перейдет в функцию $\varphi_1(g) = (T(g) T(g_0) f, f_0) = (T(gg_0) f, f_0) = \varphi(gg_0)$.

В результате мы получаем новую реализацию представления $T(g)$. Именно, представление строится в некотором пространстве функций $\varphi(g)$ на группе G. Оператор представления $T(g)$ задается формулой (3).

Полученное пространство функций $\varphi(g)$ будем обозначать по-прежнему через H_s^+.

Изучим основные свойства функций $\varphi(g)$, входящих в пространство H_s^+.

1) *Функции $\varphi(g)$ ограничены.* В самом деле, из равенства $\varphi(g) = (T(g) f, f_0)$ следует, что $|\varphi(g)|^2 \leqslant \leqslant \|T(g) f\| \, \|f_0\|$. Но $T(g)$ — унитарный оператор, а потому $\|T(g) f\| = \|f\|$. Итак, имеем $|\varphi(g)|^2 \leqslant \|f\| \, \|f_0\|$, т. е. функция $\varphi(g)$ ограничена.

2) *Функции $\varphi(g)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями от g.* Для доказательства напишем явное выражение функции $\varphi(g)$ через функцию $f(x_1, x_2)$. По определению

$$\varphi(g) = (f, T(g^{-1}) f_0).$$

Используя формулу для скалярного произведения в пространстве H_s^+ (пп. 1 и 2) и формулу для оператора $T(g)$, мы можем это выражение записать в следующей явной форме.

В случае представления основной серии

$$\varphi(g)=\int\limits_{x_1^2+x_2^2=1} f(x_1, x_2)[(x_1g_{22}-x_2g_{21})^2+$$
$$+(-x_1g_{12}+x_2g_{11})^2]^{\frac{\bar{s}-1}{2}}\,d\varphi. \quad (4)$$

В случае представления дополнительной серии

$$\varphi(g)=\int\limits_{\substack{x_1^2+x_2^2=1\\ y_1^2+y_2^2=1}} f(x_1, x_2)|x_1y_2-x_2y_1|^{-s-1}[(y_1g_{22}-y_2g_{21})^2+$$
$$+(-y_1g_{12}+y_2g_{11})^2]^{\frac{s-1}{2}}\,d\varphi_1\,d\varphi_2. \quad (5)$$

Бесконечная дифференцируемость функции $\varphi(g)$ по переменным g_{ij} непосредственно следует из этих формул. Заметим при этом, что если L_g — произвольный линейный дифференциальный оператор на G, то справедлива формула дифференцирования под знаком интеграла:

$$L_g\varphi(g)=(f, L_gT(g^{-1})f_0).$$

Подробная проверка этих фактов предоставляется читателю.

3) *Функции $\varphi(g)$ постоянны на правых классах смежности группы G по подгруппе U ортогональных матриц, т. е.*

$$\varphi(ug)=\varphi(g)$$

для любой ортогональной матрицы

$$u=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

В самом деле, имеем

$$\varphi(ug)=(T(ug)f, f_0)=(T(u)T(g)f, f_0)=$$
$$=(T(g)f, T(u^{-1})f_0).$$

Но вектор f_0 инвариантен относительно операторов $T(u)$, т. е. $T(u)f_0=f_0$. Следовательно,

$$\varphi(ug)=(T(g)f, f_0)=\varphi(g).$$

В силу доказанного, функции $\varphi(g)$ можно трактовать как функции, заданные в пространстве классов смежности $U \setminus G$.

Покажем, что однородное пространство $U \setminus G$ изоморфно полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ плоскости комплексного переменного z, на которой группа G действует как группа дробно-линейных преобразований.

В самом деле, зафиксируем на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ точку $z_0 = i$ и сопоставим каждой точке z полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ совокупность всех элементов g из G, которые переводят точку i в эту точку z, т. е.

$$\frac{ig_{11} + g_{21}}{ig_{12} + g_{22}} = z.$$

Тем самым определено отображение группы G на верхнюю полуплоскость. Совокупность элементов g, переходящих при этом отображении в точку i, т. е. таких, что

$$\frac{ig_{11} + g_{21}}{ig_{12} + g_{22}} = i,$$

образует, очевидно, подгруппу U ортогональных матриц. Отсюда ясно, что прообразами точек z являются при этом отображении классы смежности Ug. В результате мы получили взаимно однозначное соответствие между классами смежности Ug и точками z полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Очевидно, что при преобразовании $g \to gg_0$ соответствующая точка z подвергается дробно-линейному преобразованию с матрицей g_0:

$$z \to z' = \frac{zg_{11} + g_{21}}{zg_{12} + g_{22}}.$$

Итак, функции φ можно рассматривать как функции на верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и писать $\varphi(z)$ вместо $\varphi(g)$.

Найдем выражение функций $\varphi(z)$ через исходные функции $f(x_1, x_2)$. Пусть $z = x + iy$ — точка верхней полуплоскости, Ug — класс смежности, являющийся прообразом точки z; напомним, что этот класс состоит из матриц, переводящих точку i в точку z. В качестве представителя этого класса можно, как легко убедиться, взять следующую матрицу:

$$g_z = \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ xy^{-1/2} & y^{-1/2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Таким образом, функции $\varphi(z)$ выражаются через исходные функции $f(x_1, x_2)$ следующей формулой:

$$\varphi(z) = (T(g_z) f, f_0),$$

где g_z — матрица вида (6).

Сформулируем окончательный результат.

Пространство H_s^+ неприводимого представления первой основной или дополнительной серии можно реализовать как некоторое пространство бесконечно дифференцируемых ограниченных функций $\varphi(z)$ на верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. *Оператор представления $T(g)$ определяется в этой реализации следующей формулой:*

$$T(g)\varphi(z) = \varphi\left(\frac{zg_{11} + g_{21}}{zg_{12} + g_{22}}\right).$$

Заметим, что полного описания функций $\varphi(z)$, из которых состоит пространство H_s^+, мы не получили. Кроме того, не найдена и явная формула для скалярного произведения в пространстве функций $\varphi(z)$.

В следующем пункте будет получена дополнительная информация о пространстве H_s^+.

5. Оператор Лапласа Δ. Пространства $\mathfrak{Q}_s$. Рассмотрим пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(z)$ на верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Определим операторы представления $T(g)$ группы G по следующей формуле:

$$T(g)\varphi(z) = \varphi\left(\frac{zg_{11} + g_{21}}{zg_{12} + g_{22}}\right). \tag{1}$$

Покажем, что на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ существует дифференциальный оператор второго порядка Δ, перестановочный со всеми операторами $T(g)$:

$$\Delta T(g) = T(g)\Delta \tag{2}$$

или более подробно

$$\Delta\varphi\left(\frac{zg_{11} + g_{21}}{zg_{12} + g_{22}}\right) = (\Delta\varphi)\left(\frac{zg_{11} + g_{21}}{zg_{12} + g_{22}}\right). \tag{2'}$$

В самом деле, рассмотрим оператор

$$\Delta = (z - \bar{z})^2 \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{3}$$

Покажем, что он удовлетворяет соотношению (2). Положим $z' = \frac{zg_{11}+g_{21}}{zg_{12}+g_{22}}$. Тогда имеем: $\frac{\partial}{\partial z'} = (zg_{12}+g_{22})^2 \frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}'} = (\bar{z}g_{12}+g_{22})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $z' - \bar{z}' = |zg_{12}+g_{22}|^{-2}(z-\bar{z})$.

Отсюда непосредственно получаем, что

$$(z'-\bar{z}')^2 \frac{\partial^2}{\partial z'\,\partial \bar{z}'} = (z-\bar{z}) \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}.$$

Очевидно, что полученное равенство равносильно равенству (2).

Итак, доказано, что оператор $\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ перестановочен с операторами $T(g)$. Этот оператор Δ будем называть *оператором Лапласа* на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Нетрудно убедиться, что любой другой дифференциальный оператор второго порядка, перестановочный с операторами $T(g)$, имеет вид

$$\alpha\Delta + \beta,$$

где α, β — постоянные числа. В самом деле, пусть оператор

$$\Delta_1 = a_1(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_2(z)\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + a_3(z)\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}} + \\ + a_4(z)\frac{\partial}{\partial z} + a_5(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + a_6(z)$$

удовлетворяет условию перестановочности (2). Для случая, когда матрица g имеет вид $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, это условие дает: $a_i(z+\gamma) = a_i(z)$, где γ — любое вещественное число, $i = 1, \ldots, 6$. Следовательно, коэффициенты $a_i(z)$ зависят только от $\operatorname{Im} z = y$. Итак, имеем

$$a_i(z) = a_i(y).$$

Применим далее условие (2) к случаю, когда $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Мы получим, что $a_i(\lambda^2 y) = \lambda^4 a_i(y)$ при $i = 1, 2, 3$; $a_i(\lambda^2 y) = \lambda^2 a_i(y)$ при $i = 4,5$; $a_6(\lambda^2 y) = a_6(y)$. Следовательно, $a_i(y) = \alpha_i y^2$ при $i = 1, 2, 3$; $a_i(y) = \alpha_i y$ при $i = 4, 5$; $a_6(y) = \alpha_6$, где α_i — постоянные.

Наконец, применяя условие (2) к случаю, когда $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, мы легко убеждаемся, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.

В предыдущем пункте мы получили реализицию представлений основной и дополнительной серии группы G в некоторых подпространствах H_s^+ бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(z)$, $\operatorname{Im} z > 0$. Выясним, какой вид имеет оператор Лапласа Δ в каждом из этих подпространств.

Будет показано, что *на подпространстве* H_s^+ *оператор Лапласа* Δ *кратен единичному оператору, а именно*:

$$\Delta = \frac{1-s^2}{4} E, \tag{4}$$

где E — единичный оператор.

Для доказательства воспользуемся интегральным представлением функций $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) = \left(T(g_z) f, \ f_0\right) = \left(f, \ T\left(g_z^{-1}\right) f_0\right),$$

где $f_0(x) = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{s-1}{2}}$, а скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ определено, согласно п.п. 1 и 2, следующими формулами:

$$(f_1, \ f_2) = \int\limits_{|x|=1} f_1(x) \overline{f_2(x)} \, d\varphi$$

в случае представления основной серии;

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{|x'|=1} \int\limits_{|x''|=1} |x_1' x_2'' - x_1'' x_2'|^{-s-1} f_1(x') \overline{f_2(x'')} \, d\varphi' \, d\varphi''$$

в случае представления дополнительной серии. Дифференцируя под знаком интеграла, мы получаем, что

$$\Delta\varphi(z) = \left(f, \ \Delta T\left(g_z^{-1}\right) f_0\right).$$

Таким образом, нам достаточно убедиться, что

$$\Delta T\left(g_z^{-1}\right) f_0(x) = \frac{1-s^2}{4} T\left(g_z^{-1}\right) f_0(x). \tag{5}$$

В справедливости соотношения (5) мы убедимся непосредственной проверкой. Имеем

$$g_z^{-1} = \begin{pmatrix} y^{-1/2} & 0 \\ -xy^{-1/2} & y^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$T(g_z^{-1})f_0 \equiv T(g_z^{-1})(x_1^2+x_2^2)^{\frac{s-1}{2}} = \\ = [y^{-1}(x_1 - xx_2)^2 + yx_2^2]^{\frac{s-1}{2}}.$$

Перепишем это выражение в переменных $z = x + iy$ и $\bar{z}$:

$$T(g_z^{-1})f_0 = \left[2i\frac{(x_2 z - x_1)(x_2\bar{z} - x_1)}{z-\bar{z}}\right]^{\frac{s-1}{2}}.$$

Применяя теперь к этому выражению оператор Лапласа $\Delta = (z-\bar{z})^2 \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}$, мы получим

$$\Delta\left[2i\frac{(x_2 z - x_1)(x_2\bar{z} - x_1)}{z-\bar{z}}\right]^{\frac{s-1}{2}} = \\ = \frac{1-s^2}{4}\left[2i\frac{(x_2 z - x_1)(x_2\bar{z} - x_1)}{z-\bar{z}}\right]^{\frac{s-1}{2}}.$$

Итак, равенство (5) доказано.

Сформулируем окончательно полученные результаты. Пусть $T(g)$ — представление основной или дополнительной серии, f_0 — вектор в пространстве представления H_s^+, инвариантный относительно операторов $T(u)$, где u пробегает ортогональные матрицы. Каждому вектору f из пространства представления мы сопоставили функцию $\varphi(g)$, определенную формулой

$$\varphi(g) = (T(g)f, f_0).$$

В п. 3 было показано, что соответствие $f \to \varphi$ взаимно однозначно и что функции $\varphi(g)$ ограничены и бесконечно дифференцируемы. Далее, было установлено, что функции φ постоянны на классах смежности по подгруппе U ортогональных матриц, а потому их можно трактовать как функции в пространстве классов смежности $U\setminus G$. Поскольку пространство $U\setminus G$ изоморфно верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ плоскости комплексного переменного z, то функции φ можно рассматривать также как функции $\varphi(z)$, заданные на верхней полуплоскости. Исходное представление

$T(g)$ можно считать заданным в пространстве таких функций $\varphi(z)$. При этом операторы представления $T(g)$ задаются следующей формулой:

$$T(g)\varphi(z)=\varphi\left(\frac{zg_{11}+g_{21}}{zg_{12}+g_{22}}\right). \tag{6}$$

В этом пункте было показано, что функции $\varphi(z)$ являются собственными функциями оператора $\Delta=(z-\bar{z})^2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}$, отвечающими собственному значению $\frac{1-s^2}{4}$:

$$\Delta\varphi(z)=\frac{1-s^2}{4}\varphi(z). \tag{7}$$

Заметим, что обратное утверждение не имеет места: не всякое решение уравнения (7) принадлежит пространству H_s^+ *).

Иногда удобно вместо гильбертова пространства H_s^+, в котором первоначально строилось представление, рассматривать его расширение — пространство $\mathfrak{Q}_s$ *всех* решений уравнения (7). В этом пространстве $\mathfrak{Q}_s$ можно естественным образом задать топологию, относительно которой оно оказывается полным топологическим пространством. Очевидно, что представление $T(g)$ продолжается с H_s^+ на все пространство $\mathfrak{Q}_s$; операторы представления задаются на $\mathfrak{Q}_s$ той же формулой (6).

Это пространство $\mathfrak{Q}_s$ назовем *полным пространством, связанным с данным неприводимым представлением* $T(g)$. Оно играет фундаментальную роль в теореме двойственности (§ 4).

Сформулируем без доказательства некоторые свойства пространства $\mathfrak{Q}_s$.

1) H_s^+ является всюду плотным подмножеством в пространстве $\mathfrak{Q}_s$.

2) Пространство $\mathfrak{Q}_s$ неприводимо во всех разумных интерпретациях этого термина (см. «Обобщенные функции», вып. 5). В частности, пространство $\mathfrak{Q}_s$ не содержит замкнутого инвариантного подпространства; не существует ограниченного оператора в $\mathfrak{Q}_s$, отличного от единичного, перестановочного со всеми операторами $T(g)$.

---

*) Так, уравнение (7) обладает неограниченными решениями. Между тем, все функции $\varphi(z)\in H_s^+$ являются ограниченными.

§ 4. Теорема двойственности

В § 2 была поставлена следующая задача: задано представление $T(g)$ группы G, индуцированное дискретной подгруппой Γ. Требуется найти спектр представления $T(g)$, иными словами, разложить это представление на неприводимые.

В данном параграфе устанавливается связь между этой задачей и классическими задачами теории автоморфных форм. Именно, мы покажем, что кратность, с которой данное неприводимое представление входит в представление $T(g)$, равна размерности пространства автоморфных форм, соответствующих этому неприводимому представлению. Понятие автоморфной формы будет дано позднее.

Использованные при этом соображения проще всего понять в случае, когда G — компактная группа, а Γ — любая ее подгруппа, не обязательно дискретная.

Пусть задано неприводимое представление $\chi(\gamma)$ подгруппы Γ и пусть $T(g)$ — индуцированное им представление группы G. Будем искать кратность, с которой заданное неприводимое представление $T_k(g)$ содержится в представлении $T(g)$. Для этого рассмотрим операторы $T_k(\gamma)$, где γ пробегает подгруппу Γ. Они образуют представление подгруппы Γ, вообще говоря, приводимое. Оказывается, что имеет место следующая.

Теорема двойственности. *Кратность, с которой неприводимое представление $T_k(g)$ содержится в представлении $T(g)$, равна кратности, с которой неприводимое представление $\chi(\gamma)$ подгруппы Γ содержится в представлении $T_k(\gamma)$.*

Отметим частный случай этой теоремы, когда $\chi(\gamma)$ — единичное представление группы Γ. В этом случае $T(g)$ есть представление в пространстве функций $f(x)$ на $X = \Gamma \setminus G$, определенное по формуле

$$T(g) f(x) = f(xg).$$

Теорему двойственности в этом случае можно сформулировать так. *Кратность, с которой неприводимое представление $T_k(g)$ содержится в представлении $T(g)$, равна числу линейно независимых векторов ξ в пространстве представления $T_k(g)$, инвариантных* *относительно* Γ, *то есть таких, что*

$$T_k(\gamma)\xi = \xi$$

для любого $\gamma \in \Gamma$.

Наша задача — распространить этот результат на некомпактные группы. Отметим, что непосредственно теорема двойственности не сохраняется для некомпактных групп G. Основная причина этого в том, что поскольку неприводимые унитарные представления таких групп G являются, вообще говоря, бесконечномерными, инвариантные относительно Γ векторы уже не лежат в гильбертовом пространстве представления.

Тем не менее, аналог теоремы двойственности можно получить для любой полупростой группы Ли G и ее дискретной подгруппы Γ, такой, что пространство $X = \Gamma \setminus G$ компактно. Для этого, оказывается, нужно расширить запас функций, на которые действуют операторы неприводимого представления $T_k(g)$. Иными словами, неприводимое представление $T_k(g)$ нужно задавать не в гильбертовом пространстве, а в некотором его расширении Ω_k. Для ряда групп Ли это пространство Ω_k может быть эффективно описано.

Сначала подробно разберем теорему двойственности для случая группы вещественных матриц 2-го порядка. При этом, ради простоты, будем рассматривать не все представления, индуцированные подгруппой Γ, а лишь простейшее из них — представление, порожденное однородным пространством $X = \Gamma \setminus G$.

Общие результаты, относящиеся к произвольной полупростой группе Ли G, будут приведены в конце параграфа.

1. Автоморфные формы. В этом параграфе будет получена теорема двойственности для группы G вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка. Для формулировки этой теоремы нам понадобится понятие автоморфной формы.

Пусть $T(g)$ — унитарное неприводимое представление группы G; Γ — дискретная подгруппа группы G. Автоморфными формами (относительно подгруппы Γ) следовало бы назвать векторы ξ в пространстве представления, инвариантные относительно операторов $T(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$:

$$T(\gamma)\xi = \xi.$$

Однако, если представление бесконечномерно, то такое определение может оказаться не вполне удобным; естественно допускать, чтобы векторы ξ принадлежали не обязательно пространству представления, а некоторому его расширению.

Введем точное понятие автоморфной формы, соответствующей заданному неприводимому представлению группы G. Напомним, что у группы G имеется три серии неприводимых представлений — основная непрерывная, дополнительная и дискретная серии.

Начнем с представлений дискретной серии. Согласно § 3, представления дискретной серии задаются натуральным числом n. Половина их реализуется в пространствах H_n всех функций $\varphi(z)$, $z = x + iy$, аналитических в верхней полуплоскости, для которых

$$\int\limits_{\operatorname{Im} z > 0} |\varphi(z)|^2 y^{n-1}\, dx\, dy < \infty.$$

Другая половина представлений дискретной серии реализуется в пространствах функций, аналитических в нижней полуплоскости. Оператор представления $T_n(g)$ задается следующей формулой:

$$T_n(g)\varphi(z) = \varphi\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right)(g_{12}z + g_{22})^{-n-1}. \qquad (1)$$

Для определенности будем дальше рассматривать первую половину представлений дискретной серии.

Рассмотрим вместо пространства H_n пространство Ω_n всех функций, аналитических в верхней полуплоскости, и введем в Ω_n естественным образом топологию. Мы получим полное пространство, в котором также действует представление группы G, определенное формулой (1). Можно показать, что это представление (топологически) неприводимо.

Автоморфной формой, соответствующей представлению $T_n(g)$ дискретной серии, будем называть функцию $\varphi(z)$, аналитическую в верхней полуплоскости и инвариантную относительно операторов $T_n(\gamma)$, то есть такую, что

$$\varphi\left(\frac{\gamma_{11}z + \gamma_{21}}{\gamma_{12}z + \gamma_{22}}\right)(\gamma_{12}z + \gamma_{22})^{-n-1} = \varphi(z) \qquad (2)$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. (Эта функция может и не принадлежать гильбертову пространству H_n.)

Аналогично определяются автоморфные формы для второй половины дискретной серии.

Теперь перейдем к представлениям основной и дополнительной серий. При этом, говоря о представлениях основной серии, мы будем иметь в виду только представления $T_s(g)$, реализуемые в пространствах четных функций на аффинной плоскости (то есть такие представления, для которых $T_s(-g) = T_s(g)$).

Из § 3, п. 4 мы знаем, что представление $T_s(g)$ основной или дополнительной серий можно реализовать в некотором подпространстве функций $\varphi(z)$ на верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, удовлетворяющих уравнению

$$\Delta\varphi \equiv -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi = \frac{1-s^2}{4}\varphi. \tag{3}$$

(Напомним, что оператор Лапласа Δ перестановочен с дробно-линейными преобразованиями полуплоскости.)

Оператор представления $T_s(g)$ определяется следующей формулой:

$$T_s(g)\varphi(z) = \varphi\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right). \tag{4}$$

Заметим, что числам s и $-s$ отвечают эквивалентные представления; таким образом, представление $T_s(g)$ однозначно определяется собственным значением $\frac{1-s^2}{4}$ оператора Лапласа Δ.

Введем теперь пространство Ω_s всех функций $\varphi(z)$ в верхней полуплоскости, удовлетворяющих уравнению (3) *). Оператор $T_s(g)$, определенный формулой (4), задает представление группы G в этом пространстве Ω_s. *Автоморфной формой, соответствующей представлению* $T_s(g)$ *основной или дополнительной серии, будем называть функцию* $\varphi(z) \in \Omega_s$, *инвариантную относительно операторов* $T_s(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, *т. е. такую, что* $T_s(\gamma)\varphi(z) = \varphi(z)$. *По-*

*) Ввиду эллиптичности уравнения (3) эти функции являются бесконечно дифференцируемыми.

дробнее автоморфной формой, соответствующей представлению $T_s(g)$, называется функция $\varphi(z)$ в верхней полуплоскости, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\Delta\varphi \equiv -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi = \frac{1-s^2}{4}\varphi, \quad \varphi\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}}\right)=\varphi(z)$$

для любого $\gamma \in \Gamma$.

2. Формулировка теоремы двойственности. Пусть Γ — дискретная подгруппа группы G вещественных унимодулярных матриц второго порядка такая, что пространство $X = \Gamma \setminus G$ компактно.

Рассмотрим представление группы G, порожденное пространством X. Напомним, что оно строится в пространстве функций $f(x)$, $x \in X$, для которых

$$\int |f(x)|^2\, dx < \infty,$$

dx — инвариантная мера на X. Оператор представления $T(g)$ задается следующей формулой:

$$T(g) f(x) = f(xg).$$

Представление $T(g)$ разлагается на представления основной непрерывной, дополнительной и дискретной серий.

Будем предполагать для простоты, что подгруппа Γ содержит матрицу $g_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда в разложение представления $T(g)$ не войдут представления H_s^- основной непрерывной серии, реализуемые в пространствах однородных нечетных функций на аффинной плоскости.

В самом деле, при нашем предположении оператор $T(g_0)$ является единичным оператором: $T(g_0) f(x) = f(x)$. Между тем, для представлений H_s^- мы имеем $T(g_0) f = -f$. По той же причине в разложение представления $T(g)$ не войдут и представления дискретной серии с четным номером n.

Так как пространство X компактно, то (см. § 2) представление $T(g)$ разлагается в сумму счетного числа неприводимых представлений, причем каждое представление входит в разложение с конечной кратностью. Нас интересует, какие неприводимые представления и с какой кратностью фактически входят в это разложение. Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема двойственности. *Каждое из неприводимых представлений группы G входит в представление $T(g)$ с конечной кратностью, равной размерности пространства соответствующих автоморфных форм.*

Иными словами, если $T_s(g)$ — представление основной или дополнительной серии, то кратность, с которой $T_s(g)$ входит в представление $T(g)$, равна числу линейно независимых функций $\varphi(z)$ на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, удовлетворяющих условиям

$$\Delta\varphi(z) \equiv -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi = \frac{1-s^2}{4}\varphi, \quad \varphi\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}}\right) = \varphi(z)$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. Если же $T_n(g)$ — представление дискретной серии (действующее, например, в пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости), то кратность, с которой $T_n(g)$ входит в представление $T(g)$, равна числу функций $\varphi(z)$, аналитических в верхней полуплоскости и удовлетворяющих условию

$$\varphi\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}}\right)(\gamma_{12}z+\gamma_{22})^{-n-1} = \varphi(z)$$

для любого $\gamma \in \Gamma$.

Доказательство теоремы двойственности дается в следующих пунктах.

3. Оператор Лапласа. Важную роль в доказательстве теоремы двойственности играет оператор Лапласа Δ. Пусть $T(g)$ — любое унитарное представление группы G. Рассмотрим следующие однопараметрические подгруппы группы G:

$$\left.\begin{aligned} g_1(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad g_2(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \\ g_3(t) &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Этим подгруппам соответствуют однопараметрические группы унитарных операторов в пространстве H представления $T(g)$:

$$T_k(t) = T(g_k(t)), \qquad k = 1, 2, 3. \tag{2}$$

По известной теореме Стона, каждая однопараметрическая группа унитарных операторов имеет вид:

$$T_k(t) = e^{itU_k}, \tag{3}$$

где U_k — самосопряженный оператор в пространстве H.

Оператор Δ мы определим по следующей формуле:

$$\Delta = -\frac{1}{4}\left(U_1^2 - U_2^2 - U_3^2\right) \tag{4}$$

и назовем его оператором Лапласа в пространстве H.

Заметим, что операторы U_k и Δ определены не на всем пространстве H. Однако они определены на некотором всюду плотном линейном многообразии в H. Именно, назовем вектор $f \in H$ бесконечно дифференцируемым, если $T(g)f$ есть бесконечно дуфференцируемая вектор-функция от g. Множество бесконечно дифференцируемых векторов в H называется **пространством Гординга**. Можно показать, что пространство Гординга всюду плотно в H и что iU_1, iU_2, iU_3 и Δ являются симметричными операторами в пространстве Гординга (см., например, Нэлсон Э., Аналитические векторы, Математика (сб. переводов), 6:3, 1962).

Вычислим оператор Δ на каждом неприводимом инвариантном подпространстве пространства H.

Покажем, что *на каждом неприводимом пространстве H оператор Δ кратен единичному оператору E* *). *Именно, в пространстве представления $T_s(g)$ основной или дополнительной серии $\Delta = \frac{1-s^2}{4}E$; в пространстве представления дискретной серии индекса n $\Delta = \frac{1-n^2}{4}E$.*

Рассмотрим сперва представление $T_s^+(g)$ основной или дополнительной серии. Из § 3, п. 3, 4 мы знаем, что это представление можно реализовать в некотором пространстве бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(z)$ на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, удовлетворяющих уравнению

$$(z - \bar{z})^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \frac{1-s^2}{4}\varphi. \tag{5}$$

*) Точнее, $\Delta = \lambda E$ на подпространстве Гординга.

При этом оператор представления $T_s^+(g)$ имеет вид:

$$T_s^+(g)\varphi(z)=\varphi\left(\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}\right). \tag{6}$$

Подставляя в (6) вместо g матрицы $g_k(t)$ и дифференцируя эти выражения по t, мы получим следующие формулы для операторов U_1, U_2, U_3:

$$iU_1=-(1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}-(1+\bar{z}^2)\frac{\partial}{\partial\bar{z}},$$

$$iU_2=(1-z^2)\frac{\partial}{\partial z}+(1-\bar{z}^2)\frac{\partial}{\partial\bar{z}}.$$

$$iU_3=2z\frac{\partial}{\partial z}+2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}.$$

Отсюда непосредственно находим, что

$$\Delta\equiv-\frac{1}{4}\left(U_1^2-U_2^2-U_3^2\right)=(z-\bar{z})^2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}.$$

Следовательно, в силу равенства (5) имеем $\Delta=\frac{1-s^2}{4}E$.

Аналогичное рассуждение справедливо и для представления $T_s^-(g)$ второй основной серии.

Теперь рассмотрим представление дискретной серии $T_n(g)$, содержащееся в $T(g)$. Это представление реализуется либо в пространстве функций $\varphi(z)$, аналитических в верхней полуплоскости, либо в пространстве функций, аналитических в нижней полуплоскости; для определенности будем дальше рассматривать первый случай.

Оператор представления $T_n(g)$ имеет следующий вид:

$$T_n(g)\varphi(z)=\varphi\left(\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}\right)(g_{12}z+g_{22})^{-n-1}. \tag{7}$$

Подставляя в (7) вместо g матрицы $g_k(t)$ и дифференцируя по t, мы получим следующие формулы для операторов U_1, U_2, U_3:

$$iU_1=-(1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}-(n+1)z,$$

$$iU_2=(1-z^2)\frac{\partial}{\partial z}-(n+1)z,$$

$$iU_3=2z\frac{\partial}{\partial z}+(n+1).$$

Отсюда непосредственно находим, что

$$\Delta \equiv -\frac{1}{4}(U_1^2 - U_2^2 - U_3^2) = \frac{1-n^2}{4} E.$$

4. Доказательство теоремы двойственности для представлений непрерывных серий. Пусть $T_s(g)$ — представление основной или дополнительной серии. Нам нужно доказать, что кратность, с которой это представление входит в представление $T(g)$, порожденное пространством $X = \Gamma \setminus G$, равна числу соответствующих ему линейно независимых автоморфных форм, т. е. числу функций $\varphi(z)$ на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi = \frac{1-s^2}{4}\varphi,$$

$$\varphi\left(\frac{\gamma_{11}z + \gamma_{21}}{\gamma_{12}z + \gamma_{22}}\right) = \varphi(z)$$

для любого $\gamma \in \Gamma$.

Предварительно покажем, что *кратность, с которой представление $T_s(g)$ основной или дополнительной серии содержится в представлении $T(g)$, равна числу линейно независимых функций на $X = \Gamma \setminus G$, удовлетворяющих следующим условиям*:

$$\Delta f = \frac{1-s^2}{4} f, \quad T(g_1(t)) f = f. \tag{1}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, построенный в п. 3, а

$$g_1(t) = \begin{pmatrix} \cos & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$g_1(t)$ — ортогональная матрица.

В самом деле, пусть H — пространство, на котором действует представление $T(g)$, H_s^+ — его неприводимое подпространство, на котором действует представление, эквивалентное $T_s(g)$. Мы знаем, что в H_s^+ имеется один и, с точностью до постоянного множителя, только один вектор f, для которого $T(g_1(t)) f = f$ (см. § 3, п. 4); на этом векторе определен оператор Δ, причем $\Delta f = \frac{1-s^2}{4} f$.

С другой стороны, пусть вектор $f \in H$ удовлетворяет соотношениям (1). Разлагая H в прямую сумму неприводимых подпространств относительно $T(g)$, имеем $f=\Sigma f_k$, где $f_k \in H^{+}_{s_k}$ *). Тогда векторы f_k также удовлетворяют соотношению $T(g_1(t))f_k = f_k$, оператор Δ на них определен и $\Delta f_k = \frac{1-s_k^2}{4}$. Так как $(\Delta f, f_k) = (f, \Delta f_k)$, то $\frac{1-s_k^2}{4} = \frac{1-s^2}{4}$. Отсюда непосредственно следует наше утверждение.

Найдем число функций f, удовлетворяющих условиям (1). Для этого введем удобную параметризацию группы G и продолжим функции с пространства X на группу G.

Пусть $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$. Примем в качестве параметров, определяющих матрицу g, комплексное число $z = -\frac{g_{22}+ig_{21}}{g_{12}+ig_{11}}$ и вещественное число $\theta = \arg(g_{12} - ig_{11})$.

Заметим, что $\operatorname{Im} z = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}{|g_{12}+ig_{11}|^2} = |g_{12}+ig_{11}|^{-2}$, а потому $\operatorname{Im} z > 0$.

Легко убедиться, что параметры z и θ преобразуются по следующим формулам:

1) если $g=(z, \theta)$, $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $a^{-1}g = (z_1, \theta_1)$, где

$$z_1 = \frac{a_{11}z + a_{21}}{a_{12}z + a_{22}}, \quad \theta_1 = \theta - \arg(a_{12}z + a_{22}),$$

2) если $u = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, то $gu = (z, \theta+\varphi)$.

Функции на $X = \Gamma \setminus G$ можно рассматривать как функции $f(g)$ на всей группе G, удовлетворяющие условию $f(\gamma^{-1}g) = f(g)$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Иными словами, их можно рассматривать как функции $f(z, \theta)$, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$f\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}}, \ \theta - \arg(\gamma_{12}z+\gamma_{22})\right) = f(z, \theta)$$

*) Компоненты вектора f в неприводимых подпространствах, где действуют представления дискретной серии, равны нулю, так как в этих подпространствах нет векторов, инвариантных относительно $T(g_1(t))$.

для всех $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$ из подгруппы Г. Таким образом, условия (1) могут быть записаны в следующем виде:

$$f(z,\ \theta + \varphi) = f(z,\ \theta); \tag{2}$$

$$\Delta f = \frac{1 - s^2}{4} f; \tag{3}$$

$$f\left(\frac{\gamma_{11}z + \gamma_{21}}{\gamma_{12}z + \gamma_{22}},\ \theta - \arg(\gamma_{12}z + \gamma_{22})\right) = f(z,\ \theta). \tag{4}$$

Из условия (2) вытекает, что функция f не зависит от θ, то есть она является функцией только от комплексного переменного z, принадлежащего верхней полуплоскости.

Далее, простым подсчетом мы получаем, что оператор Δ имеет в координатах x, y, θ $(z = x + iy)$ следующий вид:

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}\ ^{*)}.$$

---

*) Приведем вычисление оператора Δ. Оператор представления $T(a)$ задается формулой $T(a)f(g) = f(ga)$, $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, или в параметрах z и θ

$$T(a)f(z,\ \theta) = f(z_1,\ \theta_1), \tag{5}$$

где

$$z_1 = -\frac{g_{22}(a_{22} + ia_{21}) + g_{21}(a_{12} + ia_{11})}{g_{12}(a_{22} + ia_{21}) + g_{11}(a_{12} + ia_{11})},$$

$$\theta_1 = \arg\left(g_{12}(a_{22} - ia_{21}) + g_{11}(a_{12} - ia_{11})\right).$$

Подставляя в (5) вместо a матрицы $g_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ (см. стр. 74) и дифференцируя по t, получим следующие формулы для операторов U_1, U_2, U_3:

$$iU_1 = \frac{\partial}{\partial\theta},\quad iU_2 = 2y\left(\cos 2\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin 2\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\right) - \cos 2\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$iU_3 = 2y\left(-\sin 2\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos 2\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\right) + \sin 2\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Отсюда находим, что

$$\Delta \equiv -\frac{1}{4}\left(U_1^2 - U_2^2 - U_3^2\right) = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}.$$

Следовательно, поскольку функции f не зависят от θ, то условие (3) принимает вид

$$-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f=\frac{1-s^2}{4}f.$$

Итак, установлено, что число линейно независимых решений уравнений (1) равно числу линейно независимых решений уравнений

$$-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(z)=\frac{1-s^2}{4}f(z),$$

$$f\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}}\right)=f(z),$$

то есть числу автоморфных форм соответствующего неприводимого представления. Тем самым, теорема двойственности доказана для представлений основной и дополнительной серий.

5. Доказательство теоремы двойственности для представлений дискретной серии. Пусть $T_n(g)$ — представление дискретной серии, содержащееся в $T(g)$. Для определенности будем предполагать, что оно реализуется в пространстве функций $\varphi(z)$, аналитических в в е р х н е й полуплоскости. Оператор представления $T_n(g)$ имеет следующий вид:

$$T_n(g)\varphi(z)=\varphi\left(\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}\right)(g_{12}z+g_{22})^{-n-1}. \qquad (1)$$

Нам нужно доказать, что кратность, с которой это представление входит в $T(g)$, равна числу соответствующих ему линейно независимых автоморфных форм, т. е. числу функций $\varphi(z)$, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и удовлетворяющих условию

$$\varphi\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}}\right)(\gamma_{12}z+\gamma_{22})^{-n-1}=\varphi(z)$$

для любого $\gamma\in\Gamma$.

Предварительно покажем, что *кратность, с которой представление $T_n(g)$ дискретной серии содержится в представлении $T(g)$, равна числу линейно независи-*

мых функций на $X = \Gamma \setminus G$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\Delta f = \frac{1-n^2}{4} f, \qquad T(g_1(t)) f = e^{-i(n+1)t} f. \tag{2}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, построенный в п. 3, а

$$g_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Для доказательства заметим, что с, одной стороны, в каждом неприводимом подпространстве H_n, где действует представление $T_n(g)$, имеется один и, с точностью до постоянного множителя, только один вектор f такой, что

$$T_n(g_1(t)) f = e^{-i(n+1)t} f. \tag{3}$$

В самом деле, в модели (1) представления $T_n(g)$ условие (3) записывается следующим образом:

$$\varphi\left(\frac{z\cos t - \sin t}{z\sin t + \cos t}\right)(z\sin t + \cos t)^{-n-1} = e^{-i(n+1)t}\varphi(z). \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что уравнению (4) удовлетворяет функция

$$\varphi(z) = (z+i)^{-n-1}$$

и что это — единственное решение уравнения (4) в пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости.

Назовем такой вектор f **вектором старшего веса** в H_n. На этом векторе оператор Δ определен, причем

$$\Delta f = \frac{1-n^2}{4} f.$$

С другой стороны, покажем, что любой вектор $f \in H$, удовлетворяющий соотношениям (2), является линейной комбинацией векторов старшего веса из неприводимых подпространств пространства H, эквивалентных H_n. В самом деле, разлагая H в прямую сумму неприводимых подпространств относительно $T(g)$, имеем $f = \sum f_k$, где $f_k \in H_{s_k}$. Тогда векторы f_k также удовлетворяют соотношению $T(g_1(t)) f_k = e^{-i(n+1)t} f_k$, оператор Δ на них определен и $\Delta f_k = \frac{1-s_k^2}{4} f_k$.

Так как $(f, \Delta f_k) = (\Delta f, f_k)$, то $\frac{1-s_k^2}{4} = \frac{1-n^2}{4}$; следовательно, f_k являются векторами старшего веса в подпространствах, эквивалентных H_n *). Отсюда непосредственно следует наше утверждение.

Найдем число линейно независимых функций f, удовлетворяющих условиям (2). Повторяя рассуждения, приведенные на стр. 78, мы вместо соотношений (2), (3) и (4) на стр. 79 получаем следующие соотношения для $f(z, \theta)$:

$$f(z,\ \theta+\varphi) = f(z,\ \theta)\, e^{-i(n+1)\varphi}, \tag{5}$$

$$\Delta f \equiv \left[-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+y\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\theta}\right]f = \frac{1-n^2}{4}f, \tag{6}$$

$$f\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}},\ \theta-\arg(\gamma_{12}z+\gamma_{22})\right) = f(z,\ \theta). \tag{7}$$

Найдем все такие функции. Прежде всего, из уравнения (5) следует, что

$$f(z,\ \theta) = e^{-i(n+1)\theta} f_1(z).$$

Представим решение уравнений (6) и (7) в виде

$$f(z,\ \theta) = e^{-i(n+1)\theta} y^{\frac{n+1}{2}}\, \overline{F(z)}. \tag{8}$$

Подставляя это выражение в (6) и (7), мы получим следующие соотношения для функции $F(z)$:

$$\left[-y\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+i(n+1)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]F(z) = 0, \tag{9}$$

$$F\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}}\right) = F(z)\,(\gamma_{12}z+\gamma_{22})^{n+1} \tag{10}$$

для любого $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}$ из подгруппы Γ.

Соотношение (10) означает, что функция $F(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению автоморфной формы.

---

*) Это утверждение требует уточнения, поскольку имеется два представления дискретной серии с одним и тем же номером: n — представление в пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости, и представление в пространстве функций, аналитических в нижней полуплоскости. Однако легко убедиться, что вектор, удовлетворяющий условию (3), имеется только в первом из этих пространств.

Докажем, что $F(z)$ является аналитической функцией.

Итак, пусть $f \in H$ удовлетворяет условиям (5) — (7). Как было установлено раньше, такая функция f представима в виде $f = \sum f_k$, где f_k — векторы старшего веса в неприводимых подпространствах пространства H, эквивалентных H_n. (Число слагаемых этой суммы конечно, поскольку каждое неприводимое подпространство входит в H с конечной кратностью.)

Введем оператор

$$A_+ = iU_2 + U_3,$$

где U_2, U_3 — самосопряженные операторы, определенные на стр. 77. Оператор A_+ определен на каждом из векторов старшего веса f_k, а значит, и на $f = \sum f_k$. Покажем, что $A_+ f_k = 0$ для каждого f_k, а потому

$$A_+ f = 0.$$

В самом деле, реализуем неприводимое подпространство H_n пространства H как пространство функций, аналитических в верхней полуплоскости. В этой реализации вектор старшего веса f_k имеет вид:

$$f_k = c(z+i)^{-n-1}. \tag{11}$$

Оператор же A_+ задается в пространстве H_n следующей формулой:

$$A_+ = -(z+i)^2 \frac{\partial}{\partial z} - (n+1)(z+i). \tag{12}$$

(Эта формула следует из выражений для операторов U_2, U_3 в пространстве H_n, приведенных на стр. 76.) Из (11) и (12) непосредственно получаем, что $A_+ f_k = 0$.

Напишем явное выражение для оператора A_+ в пространстве функций $f(z, \theta)$. На основании формул для U_2 и U_3, приведенных на стр. 79, получаем

$$A_+ = e^{2i\theta}\left[2y\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\right].$$

Подставляя в уравнение $A_+ f = 0$ вместо функции f ее выражение (8), получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)F = 0.$$

Тем самым, аналитичность функции $F(z)$ доказана. Очевидно, что обратно, если $F(z)$ — аналитическая функция, то она удовлетворяет уравнению (9). Но тогда функция f, определенная формулой (8), удовлетворяет уравнению (6).

Итак, доказано, что условия (5) — (7) на функцию f равносильны следующим условиям на функцию $F(z)$, связанную с f формулой (8):

1) Функция $F(z)$ удовлетворяет функциональному соотношению

$$F\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}}\right)(\gamma_{12}z+\gamma_{22})^{-n-1}=F(z);$$

2) функция $F(z)$ аналитична в верхней полуплоскости.

Иными словами, функция $F(z)$ является автоморфной формой, соответствующей представлению $T_n(g)$ дискретной серии. Тем самым, доказано, что кратность, с которой $T_n(g)$ входит в представление $T(g)$, равна числу линейно независимых форм, соответствующих этому представлению $T_n(g)$. Теорема двойственности доказана.

Примечание 1. Теорема двойственности была здесь доказана в предположении, что подгруппа Γ содержит матрицу $g_0=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. При этом предположении в разложение представления группы G, порожденного пространством $X=\Gamma\setminus G$, не входят представления H_s^- основной непрерывной серии (т. е. те представления, которые реализуются в пространстве нечетных функций на аффинной плоскости) и представления дискретной серии с четными номерами n.

Можно показать, что теорема двойственности остается справедливой и в том случае, когда Γ не содержит матрицы $g_0=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Заметим, что в этом случае в разложение представления группы G, порожденного пространством $X=\Gamma\setminus G$, входят также представления H_s^- и представления дискретной серии с четными номерами n.

Приведем определение автоморфной формы, соответствующей представлению H_s^-.

Рассмотрим пространство непрерывных функций $\varphi(z)$ на полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Зададим в этом пространстве представление $T(g)$ группы G по следующей формуле:

$$T(g)\varphi(z)=\varphi\left(\frac{g_{11}z+g_{21}}{g_{12}z+g_{22}}\right)(g_{12}z+g_{22})^{-1}. \tag{15}$$

Дифференциальный оператор второго порядка Δ в пространстве функций $\varphi(z)$, перестановочный со всеми операторами $T(g)$, имеет следующий вид:

$$\Delta=-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+iy\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{16}$$

Можно показать, что представление H_s^- реализуется в некотором подпространстве функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих уравнению

$$\Delta\varphi(z)=\frac{1-s^2}{4}\varphi(z). \tag{17}$$

При этом оператор представления задается формулой (15). *Автоморфной формой, соответствующей представлению* H_s^-, *будем называть любую функцию* $\varphi(z)$, *удовлетворяющую уравнению* (17) *и соотношению*

$$\varphi\left(\frac{\gamma_{11}z+\gamma_{21}}{\gamma_{12}z+\gamma_{22}}\right)(\gamma_{12}z+\gamma_{22})^{-1}=\varphi(z)$$

для любого $\gamma\in\Gamma$.

Доказательство теоремы двойственности для представлений H_s^- проводится почти дословно так же, как и для представлений H_s^+. Это доказательство рекомендуется провести читателю в виде упражнения.

Примечание 2. Приведем без доказательства формулировку теоремы двойственности для любого представления $T(g)$, индуцированного конечномерным представлением подгруппы Γ.

Пусть Γ — *дискретная подгруппа группы* G *такая, что пространство* $X=\Gamma\setminus G$ *компактно,* $\chi(\gamma)$ — *конечномерное неприводимое унитарное представление подгруппы* Γ, $T(g)$ — *индуцированное им представление группы* G.

Тогда кратность, с которой данное неприводимое представление $T_k(g)$ *группы* G *входит в представление* $T(g)$, *равна кратности, с которой пространство неприводимого представления* $\chi(\gamma)$ *подгруппы* Γ *содержится в пространстве* Ω_k *представления* T_k.

Определение пространств Ω_k для различных неприводимых представлений группы G было дано раньше.

6. Общая теорема двойственности. В этом пункте будет дано доказательство теоремы двойственности для любой полупростой группы Ли G. Каждое гильбертово пространство H, в котором действует неприводимое унитарное представление группы G, будет вложено в некоторое линейное топологическое пространство Ω. При этом теорема двойственности будет установлена в следующей форме: *Если фактор-пространство* $X = \Gamma \setminus G$ *компактно, то кратность, с которой неприводимое представление* H *входит в представление, порожденное пространством* X, *равна числу линейно независимых векторов в* Ω, *инвариантных относительно группы* Γ.

Для построения пространства Ω нам понадобится следующее свойство (A) представлений полупростых групп Ли, которое приводится ниже без доказательства.

Пусть G — полупростая группа Ли, U — ее максимальная компактная подгруппа, H — гильбертово пространство, в котором действует неприводимое унитарное представление $T(g)$ группы G.

Рассмотрим в пространстве H представление подгруппы U. Поскольку U компактна, то H можно разложить в прямую сумму подпространств H_m, в каждом из которых действует представление группы U, кратное неприводимому. (Предполагается, что неприводимые представления группы U в пространствах H_m не эквивалентны.)

(A) *Каждое из пространств* H_m *является конечномерным. Иными словами, каждое неприводимое представление подгруппы* U *входит в* H *с конечной кратностью* *).

Элементы ξ из подпространств H_m и их конечные линейные комбинации условимся называть U-*полиномами*. Очевидно, что $\xi \in H$ является U-полиномом тогда и только тогда, когда пространство, натянутое на векторы $T(u)\xi$, $u \in U$, конечномерно.

---

*) На самом деле, именно это свойство, а не полупростота группы G, используется при доказательстве теоремы двойственности.

Переходим к построению пространства Ω.

Зафиксируем в H некоторый U-полином ξ_0. Сопоставим каждому вектору $\eta \in H$ непрерывную функцию на группе G:

$$\varphi_\eta(g) = (T(g)\,\eta,\ \xi_0), \tag{1}$$

где скобки $(\cdot\ ,\ \cdot)$ обозначают скалярное произведение в H.

Легко видеть, что соответствие

$$\eta \to \varphi_\eta(g) \tag{2}$$

линейно и $\varphi_\eta(g) = 0$ тождественно на группе G только тогда, когда $\eta = 0$. Таким образом, это соответствие является изоморфизмом.

В семействе функций $\varphi_\eta(g)$ имеется естественная топология: последовательность функций называется сходящейся, если она равномерно сходится на любом компактном подмножестве в G. Перенесем эту топологию на H и пополним H по этой топологии. Полученное пространство обозначим через Ω.

В конструкции пространства Ω имеется произвол — выбор U-полинома ξ_0. Мы покажем, что на самом деле пространство Ω не зависит от выбора U-полинома ξ_0. Для этого достаточно доказать следующее утверждение: *Если для некоторого $\xi_0 \in H$ последовательность функций*

$$\varphi_{\eta_n,\ \xi_0}(g) = (T(g)\,\eta_n,\ \xi_0) \tag{3}$$

равномерно сходится на каждом компактном множестве в группе G, то это же самое имеет место для любого U-полинома ξ.

Доказательство. Если последовательность $\varphi_{\eta_n,\ \xi_0}(g)$ сходится на каждом компактном множестве в группе G, то это же имеет место для любого вектора ξ вида

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} c_k T(g_k)\,\xi_0. \tag{4}$$

Такие векторы ξ образуют всюду плотное подмножество H_0 в пространстве H.

Пусть $\xi_m \neq 0$ — произвольный U-полином, принадлежащий подпространству H_m. Из того, что H_0 образует всюду плотное линейное подмножество в H, а H_m — конечномерное подпространство в H, следует, что проекция H_0 на H_m

совпадает со всем пространством H_m. Иными словами, существует вектор ξ вида (4) такой, что

$$P_m \xi = \xi_m, \tag{5}$$

где P_m — оператор проектирования на H_m.

Оператор проектирования P_m задается следующей формулой:

$$P_m \xi = \int_U \overline{\sigma_m(u)}\, T(u)\, \xi\, du, \tag{6}$$

где $\sigma_m(u)$ — характер неприводимого представления группы U, отвечающего пространству H_m.

Таким образом, на основании (5) и (6) мы получаем

$$\varphi_{\eta_n,\, \xi_m}(g) \equiv (T(g)\,\eta_n,\ P_m\xi) = \int_U \sigma_m(u)\,(T(u^{-1}g)\,\eta_n,\ \xi)\, du,$$

т. е.

$$\varphi_{\eta_n,\, \xi_m}(g) = \int_U \sigma_m(u)\, \varphi_{\eta_n,\, \xi}(u^{-1}g)\, du. \tag{7}$$

Из того, что последовательность функций $\varphi_{\eta_n,\, \xi}(g)$ равномерно сходится на каждом компактном множестве в G, вытекает, в силу формулы (7), что этим же свойством обладает и последовательность функций $\varphi_{\eta_n,\, \xi_m}(g)$. Утверждение доказано.

Итак, каждое гильбертово пространство H, в котором действует неприводимое унитарное представление группы G, мы вложили в полное линейное топологическое пространство Ω.

Введем понятие матричного элемента в пространстве Ω. Пусть сначала $\eta, \xi \in H$. Тогда мы полагаем

$$f_{\eta,\, \xi}(g) = (T(g)\,\eta,\ \xi), \tag{8}$$

где $(\cdot,\ \cdot)$ обозначает скалярное произведение в H.

Пусть теперь η, ξ — векторы из Ω, из которых один, например ξ, принадлежит пространству H. Предположим, что существует последовательность $\{\eta_n\}$ векторов из H, сходящаяся к η в топологии пространства Ω и такая, что последовательность функций

$$f_{\eta_n,\, \xi}(g) = (T(g)\,\eta_n,\ \xi)$$

равномерно сходится на каждом компактном множестве в G. Тогда мы полагаем

$$f_{\eta,\,\xi}(g) = \lim_{n\to\infty} f_{\eta_n,\,\xi}(g). \tag{9}$$

Аналогично определяется $f_{\eta,\,\xi}(g)$ при $\eta \in H$. Функцию $f_{\eta,\,\xi}(g)$ будем называть *матричным элементом* в Ω.

Установим основные свойства этой функции. Из определения непосредственно следует, что $f_{\eta,\,\xi}(g)$ — непрерывная функция от g. Далее, без труда устанавливаются следующие свойства матричных элементов $f_{\eta,\,\xi}(g)$.

1) Для каждого η найдется хотя бы одно ξ, для которого функция $f_{\eta,\,\xi}(g)$ определена. (Именно, функция $f_{\eta,\,\xi}(g)$ определена, если один из векторов ξ, η является U-полиномом, — это следует из определения пространства Ω.)

2) Если $f_{\eta,\,\xi}(g)$ определена, то и $f_{\xi,\,\eta}(g)$ также определена, и $f_{\xi,\,\eta}(g) = \overline{f_{\eta,\,\xi}(g^{-1})}$.

3) Если $f_{\eta_1,\,\xi}(g)$ и $f_{\eta_2,\,\xi}(g)$ определены, то $f_{\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2,\,\xi}(g)$ также определена, причем

$$f_{\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2,\,\xi}(g) = \alpha_1 f_{\eta_1,\,\xi}(g) + \alpha_2 f_{\eta_2,\,\xi}(g).$$

4) Если $f_{\xi,\,\xi}(g)$ существует, то $f_{\xi,\,\xi}(e) > 0$, где e обозначает единицу группы G.

5) Если $f_{\eta,\,\xi}(g)$ существует, то существует $f_{T(g_1)\eta,\,T(g_2)\xi}(g)$ для любых g_1, $g_2 \in G$, причем

$$f_{T(g_1)\eta,\,T(g_2)\xi}(g) = f_{\eta,\,\xi}(g_2^{-1} g g_1).$$

6) Пусть последовательность η_n сходится к η в топологии пространства Ω. Если $f_{\eta_n,\,\xi}(g)$ определены и равномерно сходятся на любом компактном множестве в G, то $f_{\eta,\,\xi}(g)$ также определено и

$$f_{\eta,\,\xi}(g) = \lim_{n\to\infty} f_{\eta_n,\,\xi}(g).$$

Наконец, имеет место следующее свойство полноты пространства Ω.

Если для некоторого $\xi \in H$ последовательность функций $f_{\eta_n,\,\xi}(g)$ определена и равномерно сходится на любом *компактном множестве в G, то последовательность* η_n *сходится в пространстве* Ω.

Действительно, в силу утверждения, доказанного на стр. 87, если последовательность $f_{\eta_n, \xi}(g)$ равномерно сходится на любом компакте в G, то это же имеет место для последовательности $f_{\eta_n, \xi_0}(g)$, где ξ_0 — произвольный U-полином. Но тогда, по определению топологии в пространстве Ω, последовательность η_n является сходящейся.

Перейдем к формулировке и доказательству теоремы двойственности.

Пусть G — полупростая группа Ли, Γ — ее дискретная подгруппа такая, что фактор-пространство $X = \Gamma \setminus G$ компактно, H — пространство неприводимого унитарного представления группы G, Ω — построенное выше линейное топологическое пространство, содержащее H.

Теорема двойственности. *Кратность, с которой H входит в представление группы G, порожденное пространством X, равна числу линейно независимых векторов в Ω, инвариантных относительно* Γ.

Доказательство. Будем предполагать, что представление, порожденное пространством X, реализовано в пространстве $\mathscr{H}$ функций на группе G, удовлетворяющих следующим условиям:

$$f(\gamma g) = f(g) \quad \text{для любого} \quad \gamma \in \Gamma;$$

$$\|f\|^2 = \int_F |f(g)|^2 \, dg < \infty,$$

где F — фундаментальная область в G относительно подгруппы Γ. Оператор представления $T(g)$ задается формулой

$$T(g_0) f(g) = f(gg_0).$$

Пусть пространство H, в котором действует неприводимое унитарное представление группы G, входит в $\mathscr{H}$. Это значит, что имеется соответствие: каждому $\xi \in H$ соответствует функция $\varphi_\xi(g) \in \mathscr{H}$, причем

1) $\quad \varphi_{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2}(g) = \alpha_1\varphi_{\xi_1}(g) + \alpha_2\varphi_{\xi_2}(g),$

2) $\quad \varphi_{T(g_0)\xi}(g) = \varphi_\xi(gg_0) \quad$ для любых $g_0, g \in G$,

3) $\quad (\xi_1, \xi_2) = \int_F \varphi_{\xi_1}(g)\, \overline{\varphi_{\xi_2}(g)}\, dg.$

Заметим, что семейство функций $\varphi_\xi(g)$ содержит всюду плотное подмножество непрерывных функций. Действительно, это семейство вместе с функцией $\varphi_\xi(g)$ содержит функцию $\varphi_{A\xi}(g)$, где $A = \int\limits_U T(g)\,dg$, U — любая окрестность единицы в G. Очевидно, что функции $\varphi_{A\xi}(g)$ образуют всюду плотное подмножество. С другой стороны, из формулы

$$\varphi_{A\xi}(g) = \int\limits_U \varphi_\xi(gg_1)\,dg_1$$

легко следует, что эти функции непрерывны.

Сопоставим теперь пространству H вектор $\eta \in \Omega$, инвариантный относительно операторов $T(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Для этого зададим базис окрестностей единичного элемента группы G:

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$$

Рассмотрим усреднения функции $\varphi_\xi(g)$ по каждой из этих окрестностей:

$$\psi_{\xi,\,n}(g) = \frac{1}{\operatorname{mes} U_n} \int\limits_{U_n} \varphi_\xi(g_1 g)\,dg_1.$$

Легко проверить, что $\psi_{\xi,\,n}(e)$ являются непрерывными линейными функционалами на H. Следовательно, для каждого n существует такой вектор $\eta_n \in H$, что

$$\psi_{\xi,\,n}(e) = (\xi,\ \eta_n).$$

Отсюда следует, что

$$\psi_{\xi,\,n}(g) = \psi_{T(g)\xi,\,n}(e) = (T(g)\,\xi,\ \eta_n),$$

т. е.

$$\psi_{\xi,\,n}(g) = f_{\xi,\,\eta_n}(g).$$

Если функция $\varphi_\xi(g)$ непрерывна, то последовательность функций $\psi_{\xi,\,n}(g) = f_{\xi,\,\eta_n}(g)$ равномерно сходится к $\varphi_\xi(g)$ на каждом компактном множестве в группе G. Следовательно, в силу свойства полноты, последовательность соответствующих векторов $\eta_n \in H$ сходится в топологии пространства Ω к некоторому вектору η и

$$f_{\xi, \eta}(g) = \varphi_\xi(g).$$

Этот вектор η инвариантен относительно операторов $T(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. В самом деле, мы имеем

$$f_{\xi, T(\gamma)\eta}(g) = f_{\xi, \eta}(\gamma^{-1}g) = \varphi_\xi(\gamma^{-1}g) = \varphi_\xi(g) = f_{\xi, \eta}(g).$$

Следовательно, $T(\gamma)\eta = \eta$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Итак, неприводимому подпространству H, содержащемуся в $\mathscr{H}$, мы сопоставили вектор $\eta \in \Omega$, инвариантный относительно $T(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Покажем теперь обратное, а именно, что всякому вектору $\eta \in \Omega$, инвариантному относительно $T(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, соответствует некоторая реализация пространства H в $\mathscr{H}$.

Действительно, пусть η_0 — инвариантный вектор в Ω. Если ξ — U-полином, то $f_{\xi, \eta_0}(g)$ определено. Положим

$$\varphi_\xi(g) = f_{\xi, \eta_0}(g).$$

Легко видеть, что

$$\varphi_\xi(\gamma^{-1}g) = \varphi_\xi(g)$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. В самом деле, имеем

$$\varphi_\xi(\gamma^{-1}g) = f_{\xi, \eta_0}(\gamma^{-1}g) = f_{\xi, T(\gamma)\eta_0}(g) = f_{\xi, \eta_0}(g) = \varphi_\xi(g).$$

Введем в совокупности функций $\varphi_\xi(g)$ скалярное произведение по формуле

$$(\varphi_{\xi_1}(g), \varphi_{\xi_2}(g)) = \int_F \varphi_{\xi_1}(g)\overline{\varphi_{\xi_2}(g)}\,dg.$$

Пополнив совокупность функций $\varphi_\xi(g)$ по этому скалярному произведению, мы получим реализацию H в виде подпространства $\mathscr{H}$.

Итак, вектору $\eta \in \Omega$, инвариантному относительно $T(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, сопоставлена реализация пространства H в $\mathscr{H}$. Легко убедиться, что линейно независимым векторам η при этом отвечают линейно независимые пространства. Таким образом, показано, что кратность, с которой H входит в $\mathscr{H}$, равна числу линейно независимых векторов в Ω, инвариантных относительно Γ. Теорема двойственности доказана.

При рассмотрении группы унимодулярных матриц второго порядка пространство Ω определялось иначе, а именно как пространство всех собственных функций оператора Лапласа на плоскости Лобачевского, отвечающих заданному собственному значению. Такое определение пространства Ω может быть дано и в случае произвольной полупростой группы Ли G.

Дадим сначала определение пространства Ω для случая, когда в H содержится вектор η_0, инвариантный относительно операторов $T(u)$, где u пробегает максимальную компактную подгруппу U.

Сопоставим каждому $\xi \in H$ функцию на G,

$$\xi \to \varphi_\xi(g) = (T(g)\xi, \eta_0).$$

Легко видеть, что функции $\varphi_\xi(g)$ удовлетворяют условию

$$\varphi_\xi(ug) = \varphi_\xi(g)$$

для любого $u \in U$, т. е. они постоянны на классах смежности группы G по подгруппе U. Таким образом, их можно рассматривать как функции $\varphi_\xi(x)$ на симметрическом пространстве $S = U \setminus G$.

Рассмотрим операторы Лапласа на симметрическом пространстве S, т. е. дифференциальные операторы Δ на S, перестановочные с групповыми сдвигами:

$$(\Delta\varphi_\xi)(xg) = \Delta(\varphi_\xi(xg)).$$

Из неприводимости пространства функций $\varphi_\xi(x)$ следует, что все эти функции являются собственными функциями операторов Лапласа с одинаковыми для всего набора функций собственными значениями, зависящими только от H.

Можно показать, что наше пространство Ω состоит из всех собственных функций операторов Лапласа на S с фиксированным набором собственных значений.

Аналогичное утверждение имеет место и в общем случае. Именно, каждое пространство Ω может быть реализовано как линейное семейство непрерывных вектор-функций $f(x)$ на S со следующими свойствами.

1) Ω замкнуто по равномерной сходимости на любом компактном множестве в S.

2) В Ω действует представление группы G, определяемое следующей формулой:

$$T(g) f(x) = \alpha(x, g) f(xg),$$

где $\alpha(x, g)$ — некоторая непрерывная матричная функция от x и g.

3) Исходное пространство H содержится в Ω как всюду плотное подмножество. Именно, каждому $\xi \in H$ соответствует функция $f_\xi(x) \in \Omega$, причем

$$f_{T(g)\xi}(x) = T(g) f(x).$$

и если $(\xi_n, \xi_n) \to 0$, то функции $f_{\xi_n}(x)$ стремятся к нулю равномерно на каждом компактном множестве в S.

4) Пространство Ω состоит из всех собственных функций некоторых дифференциальных операторов на G (с матричными коэффициентами).

§ 5. Формула следа для группы G вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка

1. Постановка задачи. В § 2, п. 4 была получена формула следа для локально компактной группы G и ее дискретной подгруппы Γ такой, что $\Gamma \setminus G$ — компактное пространство.

Именно, пусть $\chi(\gamma)$ — конечномерное представление подгруппы Γ, $T(g)$ — индуцированное им унитарное представление группы G. Обозначая через $\sigma_k(g)$ характеры неприводимых представлений, входящих в разложение представления $T(g)$, мы получили там следующее соотношение:

$$\sum_k \int \varphi(g)\,\sigma_k(g)\,dg = \sum_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{Tr}\chi(\gamma)\,\mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma) \int\limits_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\,dg. \tag{1}$$

Здесь Γ_γ, G_γ — централизаторы элемента γ соответственно в Γ и G; $\operatorname{Tr}\chi(\gamma)$ — след матрицы $\chi(\gamma)$; γ пробегает по одному представителю из каждого класса сопряженных элементов в группе Γ. Функция $\varphi(g)$ — положительно определенная непрерывная функция, удовлетворяющая следующей оценке:

$$|\varphi(g_0)| \leqslant \int\limits_U \varphi_1(g_0 g)\,dg, \tag{2}$$

где U — некоторая компактная окрестность единичного элемента, $\varphi_1(g)$ — неотрицательная суммируемая на G функция.

Формула (1) содержит много информации о том, как представление $T(g)$ разлагается на неприводимые представления.

Например, в случае компактной группы G из нее сразу получается выражение для кратности, с которой данное неприводимое представление содержится в $T(g)$. Именно, подставляя вместо $\varphi(g)$ характер $\sigma(g)$ неприводимого представления, получаем, что кратность N, с которой это представление входит в $T(g)$, равна

$$N = \frac{1}{n_\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{\sigma(\gamma)} \operatorname{Tr}\chi(\gamma)$$

(n_Γ — порядок группы Γ), см. § 2, п. 4.

Заметим, что если нам известны кратности N, то тем самым известно, какие неприводимые представления входят в $T(g)$ и какие не входят.

В этом параграфе будет рассмотрена формула следа для некомпактной группы — группы G вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка.

В случае компактной группы для определения кратностей N мы подставляли в формулу следа вместо $\varphi(g)$ характеры $\sigma(g)$ неприводимых представлений. Здесь мы тоже перейдем от функции $\varphi(g)$ к функции

$$h(\sigma) = \int \varphi(g)\,\sigma(g)\,dg,$$

где σ пробегает характеры неприводимых представлений.

Левая часть формулы (1) преобразуется к $h(\sigma)$ очевидным образом. Основная задача состоит в том, чтобы преобразовать к $h(\sigma)$ правую часть равенства. Эта задача будет решена в пп. 3—6.

Окончательное соотношение для функции $h(\sigma)$ будет получено в п. 6.

Из этого соотношения в пп. 7 и 10 будут получены важные следствия, а именно:

1) Формулы для кратностей, с которыми входят в $T(g)$ представления дискретной серии.

2) Асимптотическая формула для числа представлений $T_s(g)$ непрерывной серии с «номерами» $|s| \leqslant \alpha$, входящих в $T(g)$ (при $\alpha \to \infty$).

Отметим, что, несмотря на некоторые длинноты проводимых ниже вычислений, все они элементарны, не требуют никаких новых идей и соображений, а следуют обычным стандартам, выработанным в этих разделах теории представлений.

2. Функция h. Приведем без вывода формулы для характеров неприводимых представлений группы G. (Вывод этих формул будет дан в гл. II, § 4.)

1) Характер представления T_s^+, $s = i\rho$ первой основной серии сосредоточен на множестве гиперболических элементов (т. е. на множестве матриц с вещественными собственными

значениями $\lambda \neq \pm 1$) и задается на этом множестве следующей формулой:

$$\sigma_\rho^+ (g) = \frac{|\lambda_g|^{i\rho} + |\lambda_g|^{-i\rho}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|}, \tag{1}$$

где λ_g — собственное значение матрицы g.

2) Характер представления T_s^-, $s = i\rho$ второй основной серии также сосредоточен на множестве гиперболических элементов и задается на этом множестве следующей формулой:

$$\sigma_\rho^- (g) = \frac{|\lambda_g|^{i\rho} + |\lambda_g|^{-i\rho}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|} \operatorname{sign} \lambda_g. \tag{2}$$

3) Характер представления T_s, $s = \rho$ дополнительной серии сосредоточен на множестве гиперболических элементов и задается на этом множестве следующей формулой:

$$\sigma_{i\rho} (g) = \frac{|\lambda_g|^{\rho} + |\lambda_g|^{-\rho}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|}, \quad 0 < \rho < 1. \tag{3}$$

(Эта формула получается, таким образом, из формулы для характера первой основной серии аналитическим продолжением по ρ.)

4) Характер представления первой половины дискретной серии задается следующими формулами. На множестве гиперболических элементов

$$\sigma_n^+ (g) = \frac{\lambda_g^{-n}}{\lambda_g - \lambda_g^{-1}}, \tag{4}$$

где λ_g — наибольшее по модулю собственное значение матрицы g. На множестве эллиптических элементов

$$\sigma_n^+ (g) = \frac{e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}, \tag{5}$$

где φ — угол поворота, отвечающий матрице g. (Иными словами, матрица g сопряжена с матрицей $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.)

5) Характер представления второй половины дискретной серии задается следующими формулами. На множестве

гиперболических элементов

$$\sigma_n^-(g)=\sigma_n^+(g)=\frac{\lambda_g^{-n}}{\lambda_g-\lambda_g^{-1}}. \tag{6}$$

На множестве эллиптических элементов

$$\sigma_n^-(g)=\frac{e^{in\varphi}}{e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}}, \tag{7}$$

где φ определяется так же, как и в (5).

Сопоставим теперь функции $\varphi(g)$ на G, удовлетворяющей оценке (2) п. 1, следующий набор функций:

$$\left.\begin{aligned} h^+(\rho)&=\int\varphi(g)\,\sigma_\rho^+(g)\,dg\ ^{*)},\\ h^-(\rho)&=\int\varphi(g)\,\sigma_\rho^-(g)\,dg,\\ h^+(i\rho)&=\int\varphi(g)\,\sigma_{i\rho}^+(g)\,dg,\\ h_n^+&=\int\varphi(g)\,\sigma_n^+(g)\,dg,\\ h_n^-&=\int\varphi(g)\,\sigma_n^-(g)\,dg. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Задача состоит в том, чтобы перейти в формуле следа (1) п. 1 от функции $\varphi(g)$ к функциям h.

Очевидно, что левую часть формулы (1) можно записать в следующем виде:

$$\sum h^+(\rho_k)+\sum h^-(\rho_l)+\sum h^+(i\rho_m)+\sum h_{n_s}^+ +\sum h_{n_t}^-,$$

где суммы берутся по тем номерам ρ_k, n_s, n_t представлений основной, дополнительной и дискретной серий, которые входят в представление $T(g)$. Таким образом, наша основная задача — выразить через функции h правую часть формулы следа (1) п. 1:

$$I=\sum_{\gamma\in\Gamma}\operatorname{Tr}\chi(\gamma)\,\mu\,(\Gamma_\gamma\setminus G_\gamma)\int\limits_{G_\gamma\setminus G}\varphi(g^{-1}\gamma g)\,dg. \tag{9}$$

---

*) Иначе говоря, $h^+(\rho)=\operatorname{Tr}\left[\int\varphi(g)\,T_{i\rho}^+(g)\,dg\right]$.

Будем дальше предполагать, что подгруппа Γ содержит матрицу $-e=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. (Случай, когда $-e$ не содержится в Γ, будет рассмотрен отдельно в п. 11.)

Заметим, что ввиду компактности пространства $\Gamma\diagdown G$, группа Γ не содержит параболических элементов; таким образом, элементы $\gamma\neq\pm e$ группы Γ являются гиперболическими или эллиптическими.

Мы найдем вклад в формулу следа отдельно от гиперболических элементов, от эллиптических элементов и от элементов e, $-e$.

3. Вклад в формулу следа от гиперболических элементов. Пусть $I(\delta)$ — интеграл функции $\varphi(g)$ по классу элементов, сопряженных с диагональной матрицей $\delta=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$, $\lambda\neq\pm 1$:

$$I(\delta)=\int\limits_{D\diagdown G} f(g^{-1}\delta g)\,d\tilde{g}, \tag{1}$$

(Интегрирование ведется по пространству классов смежности группы G по подгруппе D диагональных матриц.)

Имеет место следующая формула, выражающая функцию $I(\delta)$ через функцию $h(\rho)$:

$$I(\delta)=\frac{1}{4\pi|\lambda-\lambda^{-1}|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(h^{+}(\rho)+h^{-}(\rho)\operatorname{sign}\lambda\right)|\lambda|^{i\rho}\,d\rho. \tag{2}$$

Чтобы не прерывать изложения, мы дадим вывод формулы (2) в конце этого пункта. Сейчас, на основании формулы (2), мы найдем вклад в формулу следа от гиперболических элементов.

Гиперболический элемент $\gamma\in\Gamma$ будем называть **примитивным**, если выполняются следующие два условия.

1) Элемент γ не является степенью никакого другого элемента из подгруппы Γ.

2) Собственные значения элемента γ положительны.

Соответственно, класс сопряженных элементов $\{\gamma\}$ будем также называть примитивным.

Очевидно, что любой гиперболический элемент γ представим в виде $\gamma=\pm\gamma_1^k$, где γ_1 — примитивный элемент.

Пусть γ — примитивный гиперболический элемент. Тогда легко видеть, что классы $\{\gamma^k\}$ и $\{-\gamma^l\}$, $k, l=1, 2, \ldots$ будут все попарно различными. Далее, если γ_1 — другой примитивный элемент с положительными собственными значениями такой, что $\{\gamma_1\}\neq\{\gamma\}$, то классы $\{\gamma_1^{k_1}\}$, $\{-\gamma_1^{l_1}\}$ и $\{\gamma^k\}$, $\{-\gamma^l\}$ будут все различны между собой.

Рассмотрим в правой части формулы следа совокупность членов, отвечающих классам $\{\gamma^k\}$ и $\{-\gamma^l\}$, где γ — примитивный гиперболический элемент.

Поскольку $G_{\gamma^k}=G_{-\gamma^l}=G_\gamma$, $\Gamma_{\gamma^k}=\Gamma_{-\gamma^l}=\Gamma_\gamma$, то соответствующая сумма имеет следующий вид:

$$\mu(\Gamma_\gamma\setminus G_\gamma)\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Tr}\chi(\gamma^k)\int\limits_{G_\gamma\setminus G}\varphi(g^{-1}\gamma^k g)\,dg+$$
$$+\mu(\Gamma_\gamma\setminus G_\gamma)\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Tr}\chi(-\gamma^k)\int\limits_{G_\gamma\setminus G}\varphi(-g^{-1}\gamma^k g)\,dg. \qquad (3)$$

Не нарушая общности, можно считать, что элемент γ является диагональной матрицей

$$\gamma=\begin{pmatrix}\lambda_\gamma & 0\\ 0 & \lambda_\gamma^{-1}\end{pmatrix},$$

где $\lambda_\gamma>1$. Тогда G_γ совпадает с группой D всех диагональных матриц, а Γ_γ есть подгруппа, порожденная матрицами γ и $-\gamma$.

Вычислим $\mu(\Gamma_\gamma\setminus G_\gamma)$. Инвариантная мера на подгруппе $G_\gamma=D$ диагональных матриц $\delta=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$ задается следующей формулой:

$$d\delta=\frac{d\lambda}{|\lambda|}$$

(при этом считается, что мера $d\tilde{g}$ на $G_\gamma\setminus G$ нормирована так, что если $g=\delta\tilde{g}$, то $dg=d\delta\,d\tilde{g}$). Поскольку фундаментальная область в G_γ относительно подгруппы Γ_γ состоит из матриц $\delta=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$, $1<\lambda<\lambda_\gamma$, то мы имеем

$$\mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma)=\int\limits_1^{\lambda_\gamma}\frac{d\lambda}{\lambda}=\ln\lambda_\gamma.$$

Подставим в (3) вместо интегралов их выражения через $h(\rho)$ согласно формуле (2). В результате, после перегруппировки членов, мы получаем следующее выражение:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\ln\lambda_\gamma \operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{2\pi\left|\lambda_\gamma^s-\lambda_\gamma^{-s}\right|}\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h^+(\rho)\,\lambda_\gamma^{i\rho s}\,d\rho+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\varepsilon}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h^-(\rho)\,\lambda_\gamma^{i\rho s}\,d\rho\right),$$

где λ_γ — наибольшее из собственных значений элемента γ; $\varepsilon=1$, если $\chi(-e)=E$, $\varepsilon=-1$, если $\chi(-e)=-E$, где E — единичный оператор.

Чтобы найти вклад в формулу следа от всех гиперболических элементов, остается просуммировать полученное выражение по множеству всех примитивных классов гиперболических элементов. Итак, окончательно, мы имеем:

Вклад в формулу следа от гиперболических элементов γ равен

$$\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\ln\lambda_\gamma \operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{2\pi\left|\lambda_\gamma^s-\lambda_\gamma^{-s}\right|}\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h^+(\rho)\,\lambda_\gamma^{i\rho s}\,d\rho+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\varepsilon}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h^-(\rho)\,\lambda_\gamma^{i\rho s}\,d\rho\right), \tag{4}$$

где сумма берется по множеству всех примитивных классов $\{\gamma\}$ сопряженных гиперболических элементов; λ_γ — наибольшее из собственных значений элемента γ; $\varepsilon=1$, если $\chi(-e)=E$, и $\varepsilon=-1$, если $\chi(-e)=-E$, где E — единичный оператор.

Приведем вывод формулы (2). Этот вывод основывается на следующем интегральном соотношении для функции $I(\delta)$, которое мы даем здесь без доказательства:

$$\int\limits_{|\lambda|<1} I(\delta)\,\omega(\delta)\,d\delta=\int\limits_{|\lambda|>1} I(\delta)\,\omega(\delta)\,d\delta=$$
$$=\int\limits_{G_{\text{гип}}} \varphi(g)\,\omega(g)\left|\lambda_g-\lambda_g^{-1}\right|^{-2}dg, \qquad (5)$$

где интеграл справа берется по множеству $G_{\text{гип}}$ гиперболических элементов группы G, λ_g, λ_g^{-1} — собственные значения матрицы g; $\omega(g)$ — произвольная функция на G, постоянная на каждом классе сопряженных элементов.

Из этого интегрального соотношения следует, что для любого вещественного ρ справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(\delta)\,|\lambda-\lambda^{-1}|\,|\lambda|^{i\rho-1}\,d\lambda=$$
$$=\int\limits_{G_{\text{гип}}} \varphi(g)\,\frac{|\lambda_g|^{i\rho}+|\lambda_g|^{-i\rho}}{|\lambda_g-\lambda_g^{-1}|}\,dg=h^+(\rho).$$

Аналогично,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(\delta)\,|\lambda-\lambda^{-1}|\,|\lambda|^{i\rho-1}\operatorname{sign}\lambda\,d\lambda=h^-(\rho).$$

Отсюда получаем, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} I(\delta)\,|\lambda-\lambda^{-1}|\,\lambda^{i\rho-1}\,d\lambda=\frac{1}{2}\left(h^+(\rho)+h^-(\rho)\right).$$

Следовательно, по формуле обратного преобразования Меллина имеем

$$I(\delta)=\frac{1}{4\pi\,|\lambda-\lambda^{-1}|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(h^+(\rho)+h^-(\rho)\right)\lambda^{i\rho}\,d\rho$$

при $\lambda>0$. Аналогично,

$$I(\delta)=\frac{1}{4\pi\,|\lambda-\lambda^{-1}|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(h^+(\rho)-h^-(\rho)\right)|\lambda|^{i\rho}\,d\rho$$

при $\lambda<0$.

4. Вклад от эллиптических элементов. Пусть $I(u)$ — интеграл функции $\varphi(g)$ по классу элементов, сопряженных с ортогональной матрицей $u = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $0 < |t| < \pi$:

$$I(u) = \int_{U \setminus G} \varphi(g^{-1}ug)\, d\tilde{g}. \tag{1}$$

(Интегрирование ведется по пространству классов смежности группы G по подгруппе U ортогональных матриц.)

Имеет место следующая формула, выражающая функцию $I(u)$ *через* $h(\rho)$ *и* h_n:

$$I(u) = -\frac{1}{4\pi i \sin t}\left\{\frac{h_0^+ - h_0^-}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n^+ e^{int} - h_n^- e^{-int}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{1}{16\pi \sin|t|}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(h^+(\rho)\frac{\operatorname{ch}\frac{(2|t|-\pi)\rho}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\rho}{2}} - \right.$$
$$\left. - h^-(\rho)\frac{\operatorname{sh}\frac{(2|t|-\pi)\rho}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\pi\rho}{2}}\right)d\rho. \tag{2}$$

Как и в предыдущем пункте, чтобы не прерывать изложения, мы дадим вывод формулы (2) в конце этого пункта. Сейчас, на основании формулы (2), найдем вклад в формулу следа от эллиптических элементов.

Прежде всего, отметим, что все эллиптические элементы $\gamma \in \Gamma$ имеют конечный порядок. В самом деле, если бы эллиптический элемент γ был бесконечного порядка, то из последовательности $\gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^n, \ldots$ можно было бы выделить сходящуюся подпоследовательность попарно различных элементов, а это противоречит дискретности подгруппы Γ.

Назовем эллиптический элемент $\gamma \in \Gamma$ *примитивным*, если выполняются следующие условия:

1) элемент γ не является степенью другого элемента из Γ, имеющего более высокий порядок;

2) среди элементов $\gamma, \gamma^2, \ldots$ элемент γ задает поворот на наименьший положительный угол.

Соответственно, класс сопряженных элементов $\{\gamma\}$ будем называть примитивным классом.

Очевидно, что любой эллиптический элемент является степенью примитивного эллиптического элемента.

Заметим, что порядок примитивного элемента есть всегда **четное** число. В самом деле, пусть эллиптический элемент γ имеет нечетный порядок k, $\gamma^k = e$. Очевидно, что тогда элемент $-\gamma$ имеет порядок $2k$, и $(-\gamma)^{k+1} = \gamma$.

Пусть γ — примитивный эллиптический элемент порядка $2k$. Из определения следует, что элемент γ сопряжен в G с матрицей $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{k} & \sin\frac{\pi}{k} \\ -\sin\frac{\pi}{k} & \cos\frac{\pi}{k} \end{pmatrix}$. Не нарушая общности, можно предполагать, что

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{k} & \sin\frac{\pi}{k} \\ -\sin\frac{\pi}{k} & \cos\frac{\pi}{k} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим классы сопряженных элементов $\{\gamma^s\}$, $\{-\gamma^t\} = \{\gamma^{k+t}\}$, $s, t = 1, \ldots, k-1$. Очевидно, что все эти классы различны между собой. Назовем эти классы **связанными с данным примитивным элементом** γ. Легко убедиться, что классы, связанные с двумя не сопряженными (в Γ) примитивными эллиптическими элементами γ, γ_1, будут все различны между собой.

Рассмотрим в формуле следа совокупность членов, связанных с заданным примитивным эллиптическим элементом γ, т. е. совокупность членов, отвечающих классам $\{\gamma^s\}$ и $\{-\gamma^t\}$, $s, t = 1, \ldots, k-1$.

Соответствующая сумма имеет вид

$$\mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma) \sum_{s=1}^{k-1} \operatorname{Tr} \chi(\gamma^s) \int_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma^s g)\, dg + \\ + \mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma) \sum_{s=1}^{k-1} \operatorname{Tr} \chi(-\gamma^s) \int_{G_\gamma \setminus G} \varphi(-g^{-1}\gamma^s g)\, dg. \quad (3)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае G_γ есть группа всех ортогональных матриц $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$; Γ_γ — ее циклическая подгруппа порядка $2k$, порожденная элементом γ. Следовательно, если мера на G_γ нормирована условием

$$\mu(G_\gamma) = 2\pi,$$

то мы имеем

$$\mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma) = \frac{\pi}{k}.$$

Подставим в (3) вместо интегралов их выражения через $h(\rho)$ и h_n согласно формуле (2). В результате, после перегруппировки членов, мы получаем, что вклад в формулу следа от классов, связанных с данным примитивным эллиптическим элементом γ порядка $2k$, равен

$$-\frac{1}{4ki}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}\left\{(1-\varepsilon)\frac{h_0^+ - h_0^-}{2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n\varepsilon)\left(h_n^+ e^{i\frac{\pi s n}{k}} - h_n^- e^{-i\frac{\pi s n}{k}}\right)\right\} +$$
$$+\frac{1}{16k}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(1+\varepsilon)\,h^+(\rho)\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi(2s-k)\rho}{2k}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\rho}{2}} - \right.$$
$$\left. -(1-\varepsilon)\,h^-(\rho)\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(2s-k)\rho}{2k}}{\operatorname{sh}\frac{\pi\rho}{2}}\right]d\rho.$$

Чтобы найти вклад в формулу следа от всех эллиптических элементов, нам остается просуммировать полученное выражение по множеству всех примитивных классов эллиптических элементов.

Итак, окончательно, мы имеем:

Вклад в формулу следа от эллиптических элементов равен

$$-\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{4ki}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}\left\{(1-\varepsilon)\frac{h_0^+-h_0^-}{2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n\varepsilon)\left(h_n^+e^{i\frac{\pi sn}{k}}-h_n^-e^{-i\frac{\pi sn}{k}}\right)\right\}+$$
$$+\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{16k}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(1+\varepsilon)h^+(\rho)\frac{\operatorname{ch}\frac{(2s-k)\pi\rho}{2k}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\rho}{2}}-\right.$$
$$\left.-(1-\varepsilon)h^-(\rho)\frac{\operatorname{sh}\frac{(2s-k)\pi\rho}{2k}}{\operatorname{sh}\frac{\pi\rho}{2}}\right]d\rho, \qquad (4)$$

где суммирование ведется по множеству всех примитивных классов $\{\gamma\}$ эллиптических элементов; $2k$ — порядок примитивного эллиптического элемента γ.

Приведем вывод формулы (2). Этот вывод основывается на следующем интегральном соотношении для функции $I(u)$, которое мы здесь даем без доказательства

$$\int_{-\pi}^{\pi} I(u)\,\omega(u)\,dt=\int_{G_{\text{эл}}}\varphi(g)\,|e^{it}-e^{-it}|^{-2}\,\omega(g)\,dg, \qquad (5)$$

где $u=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$, интеграл справа берется по множеству $G_{\text{эл}}$ эллиптических элементов группы G; e^{it}, e^{-it} — собственные значения матрицы g; $\omega(g)$ — произвольная функция на G, постоянная на каждом классе сопряженных элементов.

Из этого соотношения следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} I(u)\,(e^{-it}-e^{it})\,e^{-int}\,dt=\int_{G_{\text{эл}}}\varphi(g)\frac{e^{-int}}{e^{it}-e^{-it}}\,dg.$$

Сравним полученное выражение с формулами, определяющими h_n^+ и h_n^-:

$$h_n^+ = \int\limits_{G_{\text{эл}}} \varphi(g) \frac{e^{-int}}{e^{it}-e^{-it}}\, dg + \int\limits_{G_{\text{гип}}} \varphi(g) \frac{\lambda^{-n}}{\lambda-\lambda^{-1}}\, dg,$$

$$h_n^- = -\int\limits_{G_{\text{эл}}} \varphi(g) \frac{e^{int}}{e^{it}-e^{-it}}\, dg + \int\limits_{G_{\text{гип}}} \varphi(g) \frac{\lambda^{-n}}{\lambda-\lambda^{-1}}\, dg,$$

где первые интегралы берутся по множеству эллиптических элементов, а вторые — по множеству гиперболических элементов g, λ — наибольшее по модулю собственное значение элемента g; $n \geqslant 0$.

Мы получим, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} I(u)(e^{-it}-e^{it})\, e^{-int}\, dt = h_n^+ - \int\limits_{G_{\text{гип}}} \varphi(g) \frac{\lambda^{-n}}{\lambda-\lambda^{-1}}\, dg,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} I(u)(e^{-it}-e^{it})\, e^{int}\, dt = -h_n^- + \int\limits_{G_{\text{гип}}} \varphi(g) \frac{\lambda^{-n}}{\lambda-\lambda^{-1}}\, dg.$$

На основании формулы обратного преобразования Фурье получаем отсюда, что

$$I(u) = \frac{1}{2\pi(e^{-it}-e^{it})} \left\{ \frac{h_0^+ - h_0^-}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_n^+ e^{int} - h_n^- e^{-int}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{G_{\text{гип}}} \varphi(g) \frac{\lambda^{-n}(e^{int}-e^{-int})}{\lambda-\lambda^{-1}}\, dg \right\}. \quad (6)$$

Остается выразить последнее слагаемое в этой формуле через $h^+(\rho)$ и $h^-(\rho)$.

Прежде всего, заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}(e^{int}-e^{-int}) = \frac{\lambda(e^{it}-e^{-it})}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2}.$$

Следовательно,

$$I_t \equiv -\frac{1}{2\pi(e^{-it}-e^{it})}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{G_{\text{гип}}}\varphi(g)\frac{\lambda^{-n}(e^{int}-e^{-int})}{\lambda-\lambda^{-1}}\,dg =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{G_{\text{гип}}}\varphi(g)\frac{\lambda}{(\lambda-\lambda^{-1})(1-2\lambda\cos t+\lambda^2)}\,dg.$$

На основании формул, приведенных в конце предыдущего пункта, получаем, что

$$I_t = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(h^+(\rho)+h^-(\rho))\frac{\lambda^{i\rho}}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2}\,d\rho\,d\lambda +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(h^+(\rho)-h^-(\rho))\frac{\lambda^{i\rho}}{1+2\lambda\cos t+\lambda^2}\,d\rho\,d\lambda.$$

Упростим полученное выражение. Прежде всего, используя тот факт, что $h^+(-\rho)=h^+(\rho)$ и $h^-(-\rho)=h^-(\rho)$, мы можем переписать его в следующем виде:

$$I_t = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}(h^+(\rho)+h^-(\rho))\frac{\lambda^{i\rho}}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2}\,d\lambda\,d\rho +$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}(h^+(\rho)-h^-(\rho))\frac{\lambda^{i\rho}}{1+2\lambda\cos t+\lambda^2}\,d\lambda\,d\rho.$$

Теперь выполним интегрирование по λ, воспользовавшись следующими известными формулами:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{i\rho}}{1+2\lambda\cos t+\lambda^2}\,d\lambda = \frac{\pi\,\mathrm{sh}\,\rho t}{\mathrm{sh}\,\rho\pi\,\sin t}, \qquad 0<|t|<\pi,$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{i\rho}}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2}\,d\lambda = -\frac{\pi\,\mathrm{sh}\,\rho(t-\pi)}{\mathrm{sh}\,\rho\pi\,\sin t}, \qquad 0<t<\pi,$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{i\rho}}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2}\,d\lambda = -\frac{\pi\,\mathrm{sh}\,\rho(t+\pi)}{\mathrm{sh}\,\rho\pi\,\sin t}, \qquad -\pi<t<0.$$

В результате мы получим, что

$$I_t = I_{-t} = -\frac{1}{16\pi \sin t}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (h^+(\rho) + h^-(\rho)) \frac{\operatorname{sh} \rho (t-\pi)}{\operatorname{sh} \rho\pi} d\rho - \right.$$
$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} (h^+(\rho) - h^-(\rho)) \frac{\operatorname{sh} \rho t}{\operatorname{sh} \rho\pi} d\rho \right\},$$

где $0 < t < \pi$. Перегруппировав члены, получим, что

$$I_t = I_{-t} =$$
$$= \frac{1}{16\pi \sin t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h^+(\rho) \frac{\operatorname{ch} \frac{(2t-\pi)\rho}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\rho}{2}} - h^-(\rho) \frac{\operatorname{sh} \frac{(2t-\pi)\rho}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi\rho}{2}} \right) d\rho,$$

где $0 < t < \pi$.

Подставляя это выражение в формулу (6) для $I(u)$, получим искомую формулу:

$$I(u) = -\frac{1}{4\pi i \sin t}\left\{ \frac{h_0^+ - h_0^-}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_n^+ e^{int} - h_n^- e^{-int}\right) \right\} +$$
$$+ \frac{1}{16\pi \sin |t|} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(h^+(\rho) \frac{\operatorname{ch} \frac{(2|t|-\pi)\rho}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\rho}{2}} - h^-(\rho) \frac{\operatorname{sh} \frac{(2|t|-\pi)\rho}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi\rho}{2}} \right) d\rho,$$

где $|t| < \pi$.

5. Вклад в формулу следа от элементов e и $-e$. Очевидно, что слагаемые в формуле следа, отвечающие $\gamma = \pm e$, суть

$$\nu\mu(\Gamma \setminus G)[\varphi(e) + \varepsilon\varphi(-e)], \tag{1}$$

где ν — размерность представления $\chi(\gamma)$, $\mu(\Gamma \setminus G)$ — объем пространства $\Gamma \setminus G$; $\varepsilon = 1$, если $\chi(-e) = E$, $\varepsilon = -1$, если $\chi(-e) = -E$, E — единичный оператор. Таким образом, нам нужно выразить $\varphi(e)$ и $\varphi(-e)$ через функцию h. Эти выражения будут получены позже, в гл. II, § 6. Здесь мы приведем их без доказательства.

Имеют место следующие формулы:

$$\varphi(e)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(h^+(\rho)\rho\,\mathrm{th}\frac{\pi\rho}{2}+h^-(\rho)\rho\,\mathrm{cth}\frac{\pi\rho}{2}\right)d\rho+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(h_n^++h_n^-\right);\tag{2}$$

$$\varphi(-e)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(h^+(\rho)\rho\,\mathrm{th}\frac{\pi\rho}{2}-h^-(\rho)\rho\,\mathrm{cth}\frac{\pi\rho}{2}\right)d\rho+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\left(h_n^++h_n^-\right).\tag{2'}$$

Таким образом, *вклад в формулу следа от элементов e и $-e$ есть*

$$\nu\mu(\Gamma\setminus G)\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(h^+(\rho)(1+\varepsilon)\rho\,\mathrm{th}\frac{\pi\rho}{2}+h^-(\rho)(1-\varepsilon)\rho\,\mathrm{cth}\frac{\pi\rho}{2}\right)d\rho+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\varepsilon\right)n\left(h_n^++h_n^-\right)\right\}.\tag{3}$$

6. Окончательная формула следа. Итак, мы нашли вклад в формулу следа отдельно от гиперболических элементов, от эллиптических элементов и от элементов e и $-e$.

Напишем окончательную формулу следа.

Пусть $h^+(\rho)$, $h^-(\rho)$, $h^+(i\rho)$, h_n^+, h_n^- — «преобразования Фурье» функции $\varphi(g)$, отвечающие различным сериям неприводимых унитарных представлений группы G (см. формулы (8) п. 2).

Пусть Γ — дискретная подгруппа группы G, содержащая матрицу $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, и такая, что пространство $\Gamma\setminus G$ компактно; $\chi(\gamma)$ — конечномерное унитарное представление подгруппы Γ, $T(g)$ — представление группы G, индуцированное представлением $\chi(\gamma)$ подгруппы G.

Тогда имеет место следующая формула следа:

$$\sum h^+(\rho_k)+\sum h^-(\rho_l)+\sum h^+(i\rho_m)+\sum h^+_{n_l}+\sum h^-_{n_j}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\nu\mu(\Gamma\setminus G)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[h^+(\rho)(1+\varepsilon)\rho\,\mathrm{th}\frac{\pi\rho}{2}+\right.$$

$$\left.+h^-(\rho)(1-\varepsilon)\rho\,\mathrm{cth}\frac{\pi\rho}{2}\right]d\rho+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\nu\mu(\Gamma\setminus G)\sum_{n=1}^{\infty}n\left[1+(-1)^{n-1}\varepsilon\right]\left(h_n^++h_n^-\right)+$$

$$+\sum_{\{\gamma\}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln\lambda_\gamma\operatorname{Tr}\chi(\gamma^k)}{2\pi\left|\lambda_\gamma^k-\lambda_\gamma^{-k}\right|}\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h^+(\rho)\lambda_\gamma^{i\rho k}\,d\rho+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\varepsilon}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h^-(\rho)\lambda_\gamma^{i\rho k}\,d\rho\right)-$$

$$-\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{4ki}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}\left\{\frac{1-\varepsilon}{2}\left(h_0^+-h_0^-\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\varepsilon\right]\left(h_n^+e^{i\frac{\pi sn}{k}}-h_n^-e^{-i\frac{\pi sn}{k}}\right)\right\}+$$

$$+\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{16k}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[h^+(\rho)(1+\varepsilon)\frac{\frac{(2s-k)\pi\rho}{2k}}{\mathrm{ch}\frac{\pi\rho}{2}}-\right.$$

$$\left.-h^-(\rho)(1-\varepsilon)\frac{\mathrm{sh}\frac{(2s-k)\pi\rho}{2k}}{\mathrm{sh}\frac{\pi\rho}{2}}\right]d\rho.$$

В левой части этой формулы суммы берутся по тем представлениям, которые входят в разложение представления $T(g)$; каждое слагаемое считается столько раз, какова кратность представления.

В правой части первые два члена являются вкладом от элементов e и $-e$; третий член является вкладом от гиперболических элементов; два последних члена являются вкладом от эллиптических элементов.

Напомним принятые здесь обозначения: ν — размерность представления $\chi(\gamma)$; $\mu(\Gamma \setminus G)$ — объем фундаментальной области; $\varepsilon = 1$ в случае, когда $\chi(-e) = E$, $\varepsilon = -1$ в случае, когда $\chi(-e) = -E$, E — единичный оператор; $\operatorname{Tr} \chi(\gamma)$ — след матрицы $\chi(\gamma)$; λ_γ — наибольшее собственное значение примитивного гиперболического элемента γ; $2k$ — порядок примитивного эллиптического элемента γ. Суммирование в третьей сумме ведется по множеству примитивных классов $\{\gamma\}$ сопряженных гиперболических элементов; в четвертой и пятой — по множеству примитивных классов $\{\gamma\}$ сопряженных эллиптических элементов.

7. Формулы для кратностей представлений дискретной серии. На основании формулы следа мы получим сейчас формулы для кратностей, с которыми входят в $T(g)$ представления дискретной серии.

Наше рассуждение будет основываться на следующем факте. Можно построить непрерывные положительно определенные функции $\varphi_n^+(g)$, $\varphi_n^-(g)$, $n = 1, 2, \ldots$ на группе G, удовлетворяющие следующим условиям:

1) Операторы

$$T_{\varphi_n^+} = \int \varphi_n^+(g) T(g)\, dg \quad \text{и} \quad T_{\varphi_n^-} = \int \varphi_n^-(g) T(g)\, dg$$

являются интегральными вполне непрерывными операторами.

Из этого условия следует, что к функциям $\varphi_n^+(g)$ и $\varphi_n^-(g)$ применима формула следа.

2) Для функции $\varphi_n^+(g)$ имеем $h^+(\rho) = h^-(\rho) = 0$, $h_i^- = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$; $h_j^+ = 0$ при $j \neq n$; $h_n^+ \neq 0$. Аналогично, для функции $\varphi_n^-(g)$ имеем $h^+(\rho) = h^-(\rho) = 0$, $h_i^+ = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$; $h_j^- = 0$ при $j \neq n$; $h_n^- \neq 0$.

Чтобы не прерывать изложения, мы построим эти функции позднее, в п. 9.

Применим формулу следа к функции $\varphi_n^+(g)$. В силу условия 2, в этой формуле отличными от нуля будут только члены с h_n^+. В результате, после сокращения на h_n^+, мы получим формулу для кратности, с которой входит в $T(g)$ представление $T_n^+(g)$ дискретной серии.

Именно, *кратность* N_n^+, *с которой входит в представление* $T(g)$ *представление* $T_n^+(g)$, $n>0$ *дискретной серии выражается следующей формулой*:

$$N_n^+=\left[1+(-1)^{n-1}\varepsilon\right]\left\{\frac{\nu\mu(\Gamma\diagdown G)}{\pi^2}n-\right.$$
$$\left.-\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{4ki}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}e^{\frac{i\pi sn}{k}}\right\}. \qquad (1)$$

Аналогично, применяя формулу следа к функции $\varphi_n^-(g)$, мы получим:

Кратность N_n^-, *с которой входит в представление* $T(g)$ *представление* $T_n^-(g)$ $n>0$, *второй половины дискретной серии, выражается следующей формулой*:

$$N_n^-=\left[1+(-1)^{n-1}\varepsilon\right]\left\{\frac{\nu\mu(\Gamma\diagdown G)}{\pi^2}n+\right.$$
$$\left.+\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{4ki}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}e^{-\frac{i\pi sn}{k}}\right\}. \qquad (1')$$

В частном случае, когда подгруппа Γ не содержит эллиптических элементов, мы имеем

$$N_n^+=N_n^-=\left[1+(-1)^{n-1}\varepsilon\right]\frac{\nu\mu(\Gamma\diagdown G)}{\pi^2}n. \qquad (2)$$

8. Полное расщепление формулы следа. Применим формулу следа к произвольной функции $\varphi(g)$. Из результата п. 7 следует, что члены с $h_n^\pm$, стоящие в левой и правой частях этой формулы, тождественно равны; следовательно, все эти члены могут быть отброшены. В результате получается соотношение, содержащее только функции $h^+(\rho)$ и $h^-(\rho)$. Покажем, что это соотношение, в свою очередь, можно расщепить на соотношение для $h^+(\rho)$ и соотношение для $h^-(\rho)$.

В самом деле, заменим функцию $\varphi(g)$ функцией $\varphi^+(g) = \frac{\varphi(g)+\varphi(-g)}{2}$. Очевидно, что для $\varphi^+(g)$ и $\varphi(g)$ функции $h^+(\rho)$ совпадают; с другой стороны, для функции $\varphi^+(g)$ имеем $h^-(\rho)=0$. Следовательно, переход в формуле следа от функции $\varphi(g)$ к функции $\varphi^+(g)$ сводится к тому, что мы в этой формуле отбрасываем члены с $h^-(\rho)$.

Итак, окончательно, мы свели формулу следа к двум соотношениям — одно для функции $h^+(\rho)$, а другое — для функции $h^-(\rho)$. Эти соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sum_k h^+(\rho_k) + \sum_l h^+(i\rho_l) = {} & \\ = \frac{1}{4\pi^2}\nu\mu(\Gamma\setminus G)(1+\varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} h^+(\rho)\rho\,\mathrm{th}\frac{\pi\rho}{2}\,d\rho + {} & \\ + (1+\varepsilon)\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\ln\lambda_\gamma \operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{4\pi\,|\lambda_\gamma^s-\lambda_\gamma^{-s}|}\int_{-\infty}^{+\infty} h^+(\rho)\lambda_\gamma^{i\rho s}\,d\rho + {} & \\ + (1+\varepsilon)\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{16k}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}\int_{-\infty}^{+\infty} h^+(\rho)\frac{\mathrm{ch}\,\frac{2s-k}{2k}\pi\rho}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi\rho}{2}}\,d\rho; & \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum h^-(\rho_k) = \frac{1}{4\pi^2}\nu\mu(\Gamma\setminus G)(1-\varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} h^-(\rho)\rho\,\mathrm{cth}\frac{\pi\rho}{2}\,d\rho + {} & \\ + (1-\varepsilon)\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\ln\lambda_\gamma \operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{4\pi\,|\lambda_\gamma^s-\lambda_\gamma^{-s}|}\int_{-\infty}^{+\infty} h^-(\rho)\lambda_\gamma^{i\rho s}\,d\rho + {} & \\ + (1-\varepsilon)\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k-1}\frac{1}{16k}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{\pi s}{k}}\int_{-\infty}^{+\infty} h^-(\rho)\frac{\mathrm{sh}\,\frac{2s-k}{2k}\pi\rho}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi\rho}{2}}. & \qquad (2)\end{aligned}$$

Отметим, что сумма $\sum h^+(i\rho_l)$ в формуле (1) является конечной, так как в представление $T(g)$ может входить лишь конечное число представлений дополнительной серии *).

Далее, можно доказать, что число примитивных классов $\{\gamma\}$ эллиптических элементов конечно; поэтому вклад в формулу следа от эллиптических элементов содержит лишь конечное число слагаемых.

9. Построение функций $\varphi_n^+(g)$ и $\varphi_n^-(g)$. В п. 7 формулы для кратностей представлений дискретной серии были получены на основании следующего, не доказанного там утверждения. Для каждого натурального числа n существуют непрерывные положительно определенные функции $\varphi_n^+(g)$ и $\varphi_n^-(g)$ на группе G, удовлетворяющие следующим условиям:

1) Операторы $T_{\varphi_n^\pm} = \int \varphi_n^\pm(g) T(g)\, dg$ являются интегральными вполне непрерывными операторами.

2) Для функции $\varphi_n^+(g)$ имеем $h^+(\rho) = h^-(\rho) = 0$, $h_i^- = 0$, $h_j^+ = 0$ при $j \neq n$, $h_n^+ \neq 0$. Аналогичное условие имеет место для функции $\varphi_n^-(g)$.

Здесь будет дано построение таких функций в предположении, что $n > 1$. (Исключительные случаи $n = 0$ и $n = 1$ требуют специального рассмотрения, которое мы здесь проводить не будем.)

Рассмотрим для определенности представление $T_n^+(g)$. Напомним, что оно реализуется в пространстве H_n^+ функций $f(z)$, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, таких, что

$$\| f \|^2 = \int\limits_{\operatorname{Im} z > 0} | f(z) |^2 (\operatorname{Im} z)^{n-1}\, dx\, dy < +\infty. \tag{1}$$

Оператор представления задается следующей формулой:

$$T_n^+(g) f(z) = (z g_{12} + g_{22})^{-n-1} f\left(\frac{g_{11} z + g_{21}}{g_{12} z + g_{22}}\right). \tag{2}$$

---

*) В самом деле, в противном случае множество чисел ρ_l имело бы точку накопления (поскольку $0 < \rho_l < 1$), а это противоречит теореме о дискретности спектра (см. стр. 46).

Мы реализуем сейчас это представление в пространстве функций на самой группе G.

Предварительно введем параметры на группе G. Именно будем задавать матрицы $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ комплексным числом

$$z = \frac{g_{11}i + g_{21}}{g_{12}i + g_{22}} \tag{3}$$

и вещественным числом

$$\theta = \arg(g_{22} - g_{12}i). \tag{4}$$

Заметим, что $\operatorname{Im} z > 0$.

Легко убедиться, что при сдвиге $g \to ga$, $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ параметры z и θ преобразуются по следующим формулам:

$$z \to \frac{a_{11}z + a_{21}}{a_{12}z + a_{22}}, \quad \theta \to \theta - \arg(a_{12}z + a_{22}). \tag{5}$$

Далее, инвариантная мера dg на группе G выражается следующим образом через $z = x + iy$ и θ:

$$dg = \frac{1}{2\pi} y^{-2}\, dx\, dy\, d\theta. \tag{6}$$

Сопоставим функциям $f(z)$ из пространства представления H_n^+ функции $\varphi(g)$ на группе G, определенные следующей формулой:

$$\varphi(g) = e^{i(n+1)\theta} y^{\frac{n+1}{2}} f(z), \tag{7}$$

где $z = x + iy$ и θ определяются формулами (3) и (4). Установим свойства функций $\varphi(g)$.

Очевидно, что функции $\varphi(g)$ непрерывны. Далее, мы имеем на основании (6), (7):

$$\int |\varphi(g)|^2\, dg = \int |f(z)|^2 y^{n-1}\, dx\, dy < +\infty. \tag{8}$$

Таким образом, функции $\varphi(g)$ имеют интегрируемый квадрат модуля. Наконец, легко убедиться, что при преобразовании $f(z) \to T_n^+(g_0) f(z)$ функции $\varphi(g)$ преобразуются по формуле

$$T_n^+(g_0)\, \varphi(g) = \varphi(gg_0). \tag{9}$$

Таким образом, мы получили реализацию представления $T_n^+(g)$ в некотором подпространстве непрерывных функций $\varphi(g)$ на группе G с интегрируемым квадратом модуля. Оператор представления в этом пространстве определяется формулой (9).

Пусть $f_0(z)$ — вектор старшего веса в пространстве H_n^+: $f_0(z)=(z+i)^{-n-1}$ (см. § 4, п. 5). Зададим функцию $\varphi_n^+(g)$ следующей формулой:

$$\overline{\varphi_n^+(g)}=e^{i(n+1)\theta}y^{\frac{n+1}{2}}f_0(z). \tag{10}$$

Функция $\varphi_n^+(g)$ положительно определена; это вытекает из легко проверяемого равенства

$$\varphi_n^+(g)=c\,(T(g)f_0,\ f_0).$$

Покажем теперь, что для функции $\varphi_n^+(g)$ справедлива оценка

$$|\varphi_n^+(g_0)|<\int_U \tilde{\varphi}(g_0g)\,dg, \tag{11}$$

где U — некоторая компактная окрестность единичной матрицы, $\tilde{\varphi}(g)$ — суммируемая на G неотрицательная функция.

Прежде всего, заметим, что при $n>1$

$$\int|\varphi_n^+(g)|\,dg=\int y^{\frac{n-3}{2}}\,|z+i|^{-n-1}\,dx\,dy<+\infty, \tag{12}$$

т. е. $\varphi_n^+(g)$ — суммируемая функция.

Далее, заметим, что

$$|\varphi_n^+(ga)|=y^{\frac{n+1}{2}}\,|a_{11}+ia_{12}|^{-n-1}\,|z+z_a|^{-n-1}, \tag{13}$$

где $a=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $z_a=\dfrac{a_{21}+ia_{22}}{a_{11}+ia_{12}}$.

Пусть теперь U — компактная окрестность единичной матрицы. Из формулы (13) очевидно, что существует такая постоянная $C>0$, зависящая от U, что

$$|\varphi_n^+(g_0)|<C\,|\varphi_n^+(g_0a)| \tag{14}$$

для любого $g_0 \in G$ и любого $a \in U$. Следовательно, для функции $\varphi_n^+(g)$ справедлива оценка

$$|\varphi_n^+(g_0)| < \int_U \tilde{\varphi}(g_0 g)\, dg,$$

где $\tilde{\varphi}(g) = \frac{C}{\operatorname{mes} U} |\varphi_n^+(g)|$; при этом $\tilde{\varphi}(g)$ является суммируемой функцией на G. Из этой оценки следует (см. § 2, п. 2), что оператор $T_{\varphi_n^+} = \int \varphi_n^+(g)\, T(g)\, dg$ является интегральным вполне непрерывным оператором. Итак, справедливость условия 1) для функции $\varphi_n^+(g)$ установлена.

Теперь докажем, что функция $\varphi_n^+(g)$ удовлетворяет условию 2). В самом деле, по построению, функция $\overline{\varphi_n^+(g)}$ содержится в неприводимом подпространстве пространства всех функций $\varphi(g)$ на G таких, что

$$\int |\varphi(g)|^2\, dg < +\infty.$$

В этом подпространстве действует неприводимое представление $T_n^+(g)$ группы G. Отсюда следует, что для любого неприводимого представления $T_\alpha(g)$ группы G, отличного от $T_n^+(g)$, оператор

$$T_{\varphi_n^+, \alpha} = \int \varphi_n^+(g)\, T_\alpha(g)\, dg$$

является нулевым. Значит, и след оператора $T_{\varphi_n^+, \alpha}$ равен нулю. Тем самым доказано, что для функции $\varphi_n^+(g)$ имеем

$$h^+(\rho) = h^-(\rho) = 0, \quad h_i^- = 0 \quad \text{и} \quad h_j^+ = 0 \quad \text{при} \quad j \neq n.$$

Покажем, что $h_n^+ \neq 0$. В самом деле, если бы было $h_n^+ = 0$, то на основании формулы (2) п. 5, выражающей $\varphi(e)$ через $h^+(\rho)$, $h^-(\rho)$, h_i и h_j, мы имели бы $\varphi_n^+(e) = 0$. Между тем $\varphi_n^+(e) \neq 0$.

Итак, доказано, что функция $\varphi_n^+(g)$, определенная формулой (10), действительно удовлетворяет условиям 1) и 2).

Функция $\varphi_n^-(g)$ строится аналогично.

10. Асимптотическая формула. Из формулы, указанной на стр. 113, вытекает справедливость следующей асимптотической формулы. Пусть для определенности $\varepsilon = 1$, т. е. в разложение $T(g)$ не входят представления второй основной серии. Обозначим через $N(t)$ число ρ_k, лежащих в интервале $0 \leqslant \rho_k \leqslant t$. Тогда

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{N(t)}{t^2} = \frac{1}{4\pi^2} \nu\mu(\Gamma \setminus G), \tag{1}$$

где ν — размерность представления $\chi(\gamma)$, $\mu(\Gamma \setminus G)$ — объем фактор-пространства $\Gamma \setminus G$. Отметим, что в случае отсутствия эллиптических элементов эта формула позволяет определить жанр подгруппы Γ, так как по $\mu(\Gamma \setminus G)$ жанр определяется однозначно.

Примерный план доказательства этой формулы следующий. Если бы в формулу на стр. 113 можно было бы подставить функцию следующего вида:

$$\widetilde{h}_T(\rho) = \begin{cases} 1, & |\rho| \leqslant T, \\ 0, & |\rho| > T \end{cases} \tag{2}$$

и затем доказать, что в правой части главную роль играет член

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}_T(\rho)\, \rho \operatorname{th} \frac{\pi\rho}{2}\, d\rho, \tag{3}$$

то мы сразу бы получили формулу (1).

Однако среди функций, для которых справедлива формула на стр. 113, функций вида (2) нет. Идея дальнейшего рассуждения состоит в том, что строится семейство функций $h_T(\rho)$, аппроксимирующих в известном смысле последовательность функций $\widetilde{h}_T(\rho)$.

Именно, пусть последовательность функций $h_T(\rho)$ обладает следующими свойствами:

1) $h_T(\rho)$ — целая функция, удовлетворяющая оценке $|h_T(\rho)| < C \exp \alpha |\operatorname{Im}(\rho)|$, где $\alpha = \min \ln \lambda_\gamma$, минимум берется по всем примитивным гиперболическим элементам $\gamma \in \Gamma$.

2) $h_T(\rho)$ — четная функция.

3) $h_T(\rho) \geqslant 0$ на вещественной оси.

4) Существует такое $\varepsilon > 0$, что $h_T(\rho) = o(|\rho|^{-2-\varepsilon})$ в полосе при $\operatorname{Re} \rho \to \infty$.

5) Пусть $C_T = \max\limits_{0 \leqslant \rho \leqslant T} h_T(\rho)$, $c_T = \min\limits_{0 \leqslant \rho \leqslant T} h_T(\rho)$. Тогда $\lim\limits_{T \to +\infty} C_T = \lim\limits_{T \to +\infty} c_T = 1$.

$$6)\quad \int_0^\infty h_T(\rho)\,\rho\,d\rho \sim \frac{T^2}{2} \qquad \text{при} \quad T \to +\infty.$$

$$7)\quad \int_T^\infty |h_T'(\rho)|\,\rho^2\,d\rho = O(T^2) \quad \text{при} \quad T \to +\infty.$$

Покажем, как из существования семейства функций $h_T(\rho)$ выводится асимптотическая формула (1).

Прежде всего из соотношений 1), 2) и 4) можно вывести, что функция $h^+(\rho) \equiv h_T(\rho)$ является преобразованием Фурье (см. п. 2, первая из формул (8)) некоторой функции $\varphi_T(g)$ на группе G. Более того, эту функцию $\varphi_T(g)$ можно подобрать так, что оператор $T_{\varphi_T} = \int \varphi_T(g)\,T(g)\,dg$ является вполне непрерывным и имеет след; тем самым к функции $\varphi_T(g)$ применима формула следа (1), приведенная на стр. 113. Рассмотрим отдельно члены этой формулы.

Из условия 1) вытекает, что вклад в формулу следа от гиперболических элементов равен нулю. Каждое из конечного числа слагаемых, отвечающих эллиптическим элементам, содержит под интегралом множитель $\dfrac{\operatorname{ch} \frac{2s-k}{2k} \pi\rho}{\operatorname{ch} \frac{\pi\rho}{2}}$, который экспоненциально убывает при $\rho \to \infty$. Поэтому эти слагаемые не влияют на асимптотическую формулу. Далее, заметим, что сумма $\sum h_T(i\rho_l)$ в формуле следа содержит лишь конечное число слагаемых (см. стр. 114), а потому также не влияет на асимптотическую оценку.

В результате, отбрасывая в формуле (1) на стр. 113 члены, не влияющие на асимптотическую оценку, получаем

$$\sum h_T(\rho_k) \sim \frac{1}{4\pi^2}\,\nu\mu(\Gamma \setminus G) \int_{-\infty}^{+\infty} h_T(\rho)\,\rho \operatorname{th} \frac{\pi\rho}{2}\,d\rho.$$

Используя условия 5) и 7), находим, что $\sum h_T(\rho_k) \sim N(T)$. С другой стороны, из условий 6) и 7) следует, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_T(\rho)\,\rho \operatorname{th} \frac{\pi\rho}{2}\,d\rho \sim T^2$. Отсюда непосредственно вытекает искомая асимптотическая формула (1).

Таким образом, из существования последовательности $h_T(\rho)$ со свойствами 1) — 7) следует асимптотическая формула.

Построения последовательности таких функций $h_T(\rho)$ мы проводить здесь не будем.

Отметим, что существование функции $\varphi_T(g)$ на группе G, для которой $h_T(\rho)$ является преобразованием Фурье и для которой оператор T_{φ_T} вполне непрерывен и имеет след, тесно связано с теоремой Пэли — Винера на G. Эта теорема для случая группы комплексных матриц изложена в вып. 5 «Обобщенных функций»; случай группы вещественных матриц рассмотрен Эренпрейсом и Маутнером (см. [6] в библиографии к вып. 5).

11. Формула следа для случая, когде $-e$ не принадлежит подгруппе Γ. Все формулы предыдущих пунктов получены для случая, когда подгруппа Γ содержит матрицу $-e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Не представляет, однако, труда получить аналогичные результаты и для случая, когда матрица $-e$ не принадлежит Γ.

Итак, пусть Γ — дискретная подгруппа группы G такая, что пространство $X = \Gamma \setminus G$ компактно, причем эта подгруппа не содержит матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Рассматривается представление $T(g)$ группы G, индуцированное конечномерным представлением $\chi(\gamma)$ группы Γ. Пусть $\varphi(g)$ — функция на группе G, $h^+(\rho)$, $h^-(\rho)$, h_n^+, h_n^- — ее «преобразования Фурье», определенные формулами (8) п. 2. Наша цель — вычислить кратности, с которыми входят в $T(g)$ представления дискретной серии и получить соотношения для функций $h^+(\rho)$, $h^-(\rho)$, аналогичные приведенным в п. 8.

Укажем, не приводя выкладок, какой вклад дают в формулу следа элементы различных типов группы Γ.

1) Гиперболические элементы. Прежде всего, видоизменим определение примитивного гиперболического элемента. Гиперболический элемент γ будем называть примитивным, если он не является степенью никакого другого элемента из подгруппы Γ. (Таким образом, мы не требуем

здесь, чтобы собственные значения элемента γ были положительными, ср. стр. 98.) По аналогии с п. 3 мы получаем:

Вклад в формулу следа от гиперболических элементов равен

$$\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\ln|\lambda_\gamma|\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{2\pi\,|\lambda_\gamma^s-\lambda_\gamma^{-s}|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(h^+(\rho)+h^-(\rho)\operatorname{sign}\lambda_\gamma^s\right)|\lambda_\gamma|^{i\rho}\,d\rho. \quad (1)$$

Здесь сохранены обозначения п. 3; сумма берется по множеству всех примитивных классов $\{\gamma\}$ гиперболических элементов.

2) Эллиптические элементы. Определение примитивного эллиптического элемента мы оставляем неизменным (см. стр. 102). Заметим, что в нашем случае все эллиптические элементы имеют нечетный порядок. В самом деле, если элемент γ из Γ имеет четный порядок $2k$, то $\gamma^k=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Следовательно, матрица $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ принадлежит подгруппе Γ, что неверно. По аналогии с п. 4 мы получаем:

Вклад в формулу следа от эллиптических элементов равен

$$-\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{2k}\frac{1}{2(2k+1)i}\,\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{2\pi s}{2k+1}}\left\{\frac{h_0^+-h_0^-}{2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n^+e^{i\frac{2\pi sn}{2k+1}}-h_n^-e^{-i\frac{2\pi sn}{2k+1}}\right)\right\}+$$
$$+\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{8(2k+1)}\,\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)+\operatorname{Tr}\chi(\gamma^{-s})}{\sin\frac{2\pi s}{2k+1}}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(h^+(\rho)\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi(4s-2k-1)\rho}{2(2k+1)}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\rho}{2}}-\right.$$
$$\left.-h^-(\rho)\operatorname{sh}\frac{\pi(4s-2k-1)\rho}{\operatorname{sh}\frac{\pi\rho}{2}}\right)d\rho. \quad (2)$$

Здесь сумма берется по множеству всех примитивных классов $\{\gamma\}$ эллиптических элементов.

3) Единичный элемент. Вклад от этого элемента равен

$$\nu\mu(\Gamma\setminus G)\varphi(e)=\frac{\nu\mu(\Gamma\setminus G)}{\pi^2}\left\{\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\,\mathrm{th}\frac{\pi\rho}{2}h^+(\rho)\,d\rho+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\,\mathrm{cth}\frac{\pi\rho}{2}h^-(\rho)\,d\rho+\sum_{n=1}^{\infty}n\left(h_n^++h_n^-\right)\right\}. \quad (3)$$

Подчеркнем, что в рассматриваемом случае в разложение представления $T(g)$ могут входить неприводимые представления из всех серий.

По аналогии с п. 7 мы получаем.

Кратности N_n^+ и N_n^-, с которыми входят в $T(g)$ соответственно представления $T_n^+(g)$ и $T_n^-(g)$ дискретной серии ($n>0$), выражаются следующими формулами:

$$N_n^+=\frac{1}{\pi^2}\nu\mu(\Gamma\setminus G)n-\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{2k}\frac{1}{2(2k+1)i}\frac{\mathrm{Tr}\,\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{2\pi s}{2k+1}}e^{i\frac{2\pi sn}{2k+1}}, \quad (4)$$

$$N_n^-=\frac{1}{\pi^2}\nu\mu(\Gamma\setminus G)n+\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{2k}\frac{1}{2(2k+1)i}\frac{\mathrm{Tr}\,\chi(\gamma^s)}{\sin\frac{2\pi s}{2k+1}}e^{-i\frac{2\pi sn}{2k+1}}. \quad (4')$$

Для функций $h^+(\rho)$ и $h^-(\rho)$ имеют место следующие соотношения:

$$\sum h^+(\rho_k)+\sum h^+(i\rho_l)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\nu\mu(\Gamma\setminus G)\int_{-\infty}^{+\infty}h^+(\rho)\rho\,\mathrm{th}\frac{\pi\rho}{2}\,d\rho+$$

$$+\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\ln|\lambda_\gamma|\,\mathrm{Tr}\,\chi(\gamma^s)}{2\pi\left|\lambda_\gamma^s-\lambda_\gamma^{-s}\right|}\int_{-\infty}^{+\infty}h^+(\rho)\,|\lambda_\gamma|^{i\rho s}\,d\rho+$$

$$+\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{8(2k+1)}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)+\operatorname{Tr}\chi(\gamma^{-s})}{\sin\frac{2\pi s}{2k+1}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}h^{+}(\rho)\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi(4s-2k-1)\rho}{2(2k+1)}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\rho}{2}}\,d\rho, \qquad (5)$$

$$\sum h^{-}(\rho_k)=\frac{1}{4\pi^2}\nu\mu(\Gamma\setminus G)\int_{-\infty}^{+\infty}h^{-}(\rho)\,\rho\operatorname{cth}\frac{\pi\rho}{2}\,d\rho+$$

$$+\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\ln|\lambda_\gamma|\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)}{2\pi\left|\lambda_\gamma^s-\lambda^{-s}\right|}\int_{-\infty}^{+\infty}h^{-}(\rho)\,|\lambda_\gamma|^{i\rho s}\operatorname{sign}\lambda_\gamma^s\,d\rho-$$

$$-\sum_{\{\gamma\}}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{8(2k+1)}\frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma^s)+\operatorname{Tr}\chi(\gamma^{-s})}{\sin\frac{2\pi s}{2k+1}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}h^{-}(\rho)\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(4s-2k-1)\rho}{2(2k+1)}}{\operatorname{sh}\frac{\pi\rho}{2}}\,d\rho. \qquad (6)$$

ДОБАВЛЕНИЕ I К § 5

ТЕОРЕМА О НЕПРЕРЫВНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ДИСКРЕТНОЙ ПОДГРУППЫ

На протяжении этого Добавления Γ обозначает дискретную подгруппу группы G вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка, для которой пространство $\Gamma\setminus G$ компактно.

В настоящем добавлении выясняется вопрос о том, в какой мере представление группы G, порожденное пространством $X = \Gamma \setminus G$, определяет подгруппу Γ. По всей видимости, хотя это и не доказано, это представление определяет подгруппу Γ с точностью до перехода к сопряженной подгруппе. Здесь будет получен несколько более слабый результат.

Отметим прежде всего, что если представления $T_1(g)$ и $T_2(g)$ группы G, порожденные пространствами $X_1 = \Gamma_1 \setminus G$ и $X_2 = \Gamma_2 \setminus G$, эквивалентны, а группы Γ_1 и Γ_2 не содержат эллиптических элементов, то эти группы изоморфны.

В самом деле, если представления, порожденные пространствами X_1 и X_2 эквивалентны, то одинаковы «номера» ρ_i представлений основной серии, входящих в разложение этих представлений. Но тогда, на основании асимптотической формулы, установленной в п. 10, заключаем, что жанры подгрупп Γ_1 и Γ_2 совпадают. Остается воспользоваться известным результатом, что если жанры подгрупп Γ_1 и Γ_2 совпадают, то эти группы изоморфны.

Введем теперь понятие **непрерывной деформации** подгруппы Γ. Предположим, что каждому t из интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$ сопоставлена дискретная подгруппа $\Gamma_t \subset G$, изоморфная Γ, причем $\Gamma_0 = \Gamma$. Обозначим через $\gamma(t)$ образ элемента $\gamma \in \Gamma$ при изоморфизме $\Gamma \to \Gamma_t$. Если все функции $\gamma(t)$ непрерывны, то набор групп Γ_t называется непрерывной деформацией группы $\Gamma = \Gamma_0$.

Отметим, что у любой группы Γ существуют непрерывные деформации следующего вида. Пусть $g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — непрерывная кривая в G, выходящая из единичного элемента ($g(0) = e$). Положим $\Gamma_t = g^{-1}(t)\Gamma g(t)$. Очевидно, что определенный так набор групп Γ_t образует непрерывную деформацию группы Γ. Такая деформация называется **тривиальной**.

Известно, что у дискретных подгрупп (с компактной фундаментальной областью) любой полупростой группы Ли, отличной от группы вещественных матриц 2-го порядка, всякая непрерывная деформация является тривиальной. Этот замечательный результат принадлежит А. Вейлю.

В этом Добавлении мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть Γ_t — непрерывная деформация подгруппы Γ. Если представления группы G, порожденные пространствами $X_t = \Gamma_t \setminus G$ эквивалентны, то деформация Γ_t тривиальна.*

Воспользуемся следующим фактом.

(*) *Следы матриц дискретной подгруппы образуют дискретное множество на числовой оси* *).

Опираясь на этот факт, мы докажем две леммы.

Лемма 1. *Если представления* $T_1(g)$ *и* $T_2(g)$, *порожденные пространствами* $X_1 = \Gamma_1 \setminus G$ *и* $X_2 = \Gamma_2 \setminus G$, *эквивалентны, то для каждой матрицы* $\gamma_1 \in \Gamma_1$ *найдется матрица* $\gamma_2 \in \Gamma_2$, *сопряженная с матрицей* γ_1.

Доказательство. Если представления $T_1(g)$ и $T_2(g)$ эквивалентны, то совпадают и следы этих представлений. Следовательно, для любой финитной непрерывной функции $\varphi(g)$ мы имеем

$$\int\limits_{\Gamma_1 \setminus G} \sum_{\gamma \in \Gamma_1} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg = \int\limits_{\Gamma_2 \setminus G} \sum_{\gamma \in \Gamma_2} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg \qquad (1)$$

(см. § 2, п. 4, формула (3)). Пусть теперь $\gamma_1 \in \Gamma_1$.

Предположим, что в группе Γ_2 нет элемента, сопряженного с γ_1. Тогда, в силу (*), для любой функции $\varphi(g)$, сосредоточенной в достаточно малой окрестности элемента γ_1, правая часть равенства (1) равна нулю. Но это невозможно, поскольку для таких функций $\varphi(g)$ левая часть равенства (1) отлична от нуля.

Лемма 2. *Пусть* Γ_t — *непрерывная деформация группы* G *такая, что представления, порожденные однородными пространствами* $X_t = \Gamma_t \setminus G$, *между собой эквивалентны.*

Обозначим через $\gamma(t)$ *образ элемента* $\gamma = \gamma(0) \in \Gamma$ *при изоморфизме* $\Gamma \to \Gamma_t$. *Тогда след матрицы* $\gamma(t)$ *не зависит от* t.

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать утверждение леммы лишь для достаточно малых значений t. Но для малых t это утверждение непосредственно следует из леммы 1 и из утверждения (*).

---

*) Если бы последовательность $\{\operatorname{Tr} \gamma_k\}$ имела предел, то при подходящем выборе $g_k \in G$ последовательность $g_k^{-1}\gamma_k g_k$ также имела бы предел. Запишем g_k в виде $g_k = \gamma'_k g'_k$, где $\gamma'_k \in \Gamma$, $g'_k \in F$. Так как фундаментальная область F компактна, мы можем считать, что $\{g'_k\}$ — сходящаяся последовательность. Но тогда $\{(\gamma'_k)^{-1}\gamma_k\gamma'_k\}$ — также сходящаяся последовательность, что противоречит дискретности Γ.

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим через $\mathfrak{A}_t$ алгебру матриц вида $\sum_k \lambda_k \gamma_k(t)$, где λ_k — вещественные числа, а $\gamma_k(t)$ — элементы группы Γ_t.

Нетрудно убедиться, что алгебра $\mathfrak{A}_t$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{A}$ всех матриц второго порядка.

Установим изоморфное отображение $\mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{A}_t$ алгебры $\mathfrak{A}_0$ на алгебру $\mathfrak{A}_t$. Пусть $a \in \mathfrak{A}_0$. Представим элемент a в виде

$$a = \sum_k \lambda_k \gamma_k, \tag{2}$$

где $\gamma_k \in \Gamma$, и сопоставим ему элемент $a_t \in \mathfrak{A}_t$ вида

$$a_t = \sum_k \lambda_k \gamma_k(t).$$

Нам нужно убедиться, что определенное так соответствие $a \to a_t$ не зависит от способа записи элемента a в виде (2). Иными словами, нужно доказать, что если $\sum_k \lambda_k \gamma_k = 0$, то и $\sum_k \lambda_k \gamma_k(t) = 0$. Докажем это.

Итак, пусть $\sum_k \lambda_k \gamma_k = 0$. Тогда $\sum_k \lambda_k \gamma_k \gamma = 0$ для любого $\gamma \in \Gamma$, а потому $\mathrm{Tr}\left(\sum_k \lambda_k \gamma_k \gamma\right) = 0$. Но, в силу леммы 2,

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_k \lambda_k \gamma_k \gamma\right) = \mathrm{Tr}\left(\sum_k \lambda_k \gamma_k(t)\, \gamma(t)\right).$$

Следовательно,

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_k \lambda_k \gamma_k(t)\, \gamma(t)\right) = 0 \tag{3}$$

для любого $\gamma(t) \in \Gamma_t$. Так как алгебра, натянутая на матрицы $\gamma(t)$, совпадает с алгеброй $\mathfrak{A}$ всех матриц 2-го порядка, то из (3) следует, что

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_k \lambda_k \gamma_k(t)\right) a\right) = 0$$

для любой матрицы a. Следовательно,

$$\sum \lambda_k \gamma_k(t) = 0.$$

Итак, мы определили отображение алгебры $\mathfrak{A}_0$ на алгебру $\mathfrak{A}_t$. Легко видеть, что это отображение является изоморфизмом.

Известно, что любой автоморфизм полной матричной алгебры является внутренним автоморфизмом. Таким образом, существует матрица $g = g(t)$ такая, что

$$\sum_k \lambda_k \gamma_k(t) = g^{-1}(t) \left(\sum_k \lambda_k \gamma_k \right) g(t) \tag{4}$$

для любых вещественных чисел λ_k и любых элементов $\gamma_k \in \Gamma$.

Из того факта, что левая часть равенства (4) является непрерывной функцией от t, вытекает, что $g(t)$ также можно выбрать непрерывной функцией от t.

В частности, для любой матрицы $\gamma \in \Gamma$ получаем на основании (4), что

$$\gamma(t) = g^{-1}(t)\, \gamma g(t),$$

т. е. деформация Γ_t является тривиальной. Теорема доказана.

ДОБАВЛЕНИЕ II К § 5

ФОРМУЛА СЛЕДА ДЛЯ ГРУППЫ КОМПЛЕКСНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ 2-го ПОРЯДКА

Здесь будет получена формула следа для группы G комплексных унимодулярных матриц 2-го порядка. Заметим, что комплексный случай оказывается существенно проще вещественного, поскольку неприводимые представления у группы комплексных матриц устроены проще, чем у группы вещественных матриц. Читатель убедится в п. 2, что формула следа для группы комплексных матриц имеет более простую структуру, чем в вещественном случае.

Поскольку результаты для комплексного случая получаются теми же методами, что и в вещественном случае, детали доказательств мы будем опускать.

1. Неприводимые унитарные представления группы G. У группы G комплексных унимодулярных матриц 2-го порядка имеется две серии неприводимых унитарных представлений — основная и дополнительная серии.

Основная серия представлений реализуется в пространстве H функций $f(z)$ комплексного переменного z с интегрируемым квадратом

$$\frac{i}{2}\int |f(z)|^2\,dz\,d\bar{z} < +\infty.$$

Представление состоит в том, что каждой комплексной матрице

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

сопоставляется оператор $T_{\rho,\,m}(g)$ в пространстве H следующего вида:

$$T_{\rho,\,m}(g)\,f(z)=|\beta z+\delta|^{m+i\rho-2}(\beta z+\delta)^{-m}f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right). \quad (1)$$

Представление задается, таким образом, парой чисел: вещественным числом ρ и целым числом m. Можно показать, что два представления $T_{\rho,\,m}(g)$ и $T_{\rho',\,m'}(g)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $\rho=\rho'$, $m=m'$, либо $\rho=-\rho'$, $m=-m'$.

Характер представления $T_{\rho,\,m}(g)$ задается следующей формулой:

$$\sigma_{\rho,\,m}(g)=\frac{|\lambda_g|^{i\rho+m}\lambda_g^{-m}+|\lambda_g|^{-i\rho-m}\lambda_g^{m}}{|\lambda_g-\lambda_g^{-1}|^2}, \quad (2)$$

где λ_g, λ_g^{-1} — собственные значения матрицы g.

Если в формуле (1) считать ρ произвольным комплексным числом, то мы получим, вообще говоря, не унитарное представление группы G. При этом всегда можно разумным образом задать пространство функций $f(z)$, в котором это представление действует. Характер представления $T_{\rho,\,m}(g)$ и в этом общем случае задается формулой (2).

Дополнительная серия неприводимых унитарных представлений получается при $m=0$ $\rho=is$, где $-2<s<2$, $s\neq 0$. Гильбертово пространство, в котором действуют операторы $T_{\rho,\,0}(g)$ дополнительной серии, состоит из функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|^2=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int |z_1-z_2|^{s-2}f(z_1)\overline{f(z_2)}\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2<+\infty.$$

Подробно о неприводимых представлениях группы G читатель сможет узнать из гл. II, см. также вып. 5 «Обобщенных функций».

2. Формула следа для группы G. Пусть Γ — дискретная подгруппа группы G такая, что пространство $\Gamma \setminus G$ компактно; $\chi(\gamma)$ — конечномерное представление подгруппы Γ; $T(g)$ — представление группы G, индуцированное представлением $\chi(\gamma)$. Представление $T(g)$ распадается, ввиду компактности пространства $\Gamma \setminus G$, в дискретную сумму неприводимых унитарных представлений. Информация о том, какие неприводимые представления входят в это разложение, содержится в формуле следа, полученной в § 2:

$$\sum \int \varphi(g)\, \sigma_{\rho_k, m_k}(g)\, dg = \\ = \sum_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{Tr} \chi(\gamma)\, \mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma) \int\limits_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg, \qquad (1)$$

где суммирование слева ведется по всем представлениям, входящим в $T(g)$ *).

Эта формула справедлива для любой функции $\varphi(g)$ на группе G, для которой оператор $T_\varphi = \int \varphi(g)\, T(g)\, dg$ вполне непрерывен и имеет след, в частности для любой гладкой финитной положительно определенной функции.

Наша цель состоит в том, чтобы перейти в формуле следа (1) от функции $\varphi(g)$ к ее «преобразованию Фурье»

$$h(\rho, m) = \int \varphi(g)\, \sigma_{\rho, m}(g)\, dg.$$

На основании приведенных в п. 1 формул для характеров $\sigma_{\rho, m}(g)$ эта функция $h(\rho, m)$ задается следующей явной формулой:

$$h(\rho, m) = \int \varphi(g) \frac{|\lambda_g|^{i\rho+m} \lambda_g^{-m} + |\lambda_g|^{-i\rho-m} \lambda_g^{m}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^2}\, dg \qquad (2)$$

*) Напоминаем, что через Γ_γ, G_γ в формуле (1) обозначены централизаторы элемента $\gamma \in \Gamma$ соответственно в Γ и G.

Левая часть формулы (1) преобразуется к $h(\rho, m)$ очевидным образом. Таким образом, задача состоит в том, чтобы выразить через $h(\rho, m)$ интегралы

$$\int\limits_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, dg$$

по классам элементов, сопряженных с матрицей $\gamma \in \Gamma$.

Заметим, что, ввиду компактности пространства $\Gamma \setminus G$, в группе Γ нет параболических элементов. Таким образом, любой элемент $\gamma \in \Gamma$, отличный от $\pm e$, сопряжен с диагональной матрицей

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Введем функцию

$$I(\delta) = \int\limits_{G_\delta \setminus G} \varphi(g^{-1}\delta g)\, dg$$

и постараемся выразить ее через функцию $h(\rho, m)$. Для этого воспользуемся интегральным соотношением между функцией $\varphi(g)$ и функцией $I(\delta)$, которое мы приводим здесь без вывода *)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{i}{2} \int I(\delta)\, \omega(\delta) \frac{d\lambda\, d\bar{\lambda}}{|\lambda|^2} = \int \varphi(g)\, \omega(g)\, |\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^{-4}\, dg,$$

где $\omega(g)$ — произвольная функция на G, постоянная на классах сопряженных элементов.

Полагая в этом соотношении

$$\omega(g) = |\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^4 \sigma_{\rho, m}(g) = \\ = |\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^2 \left(|\lambda_g|^{i\rho+m} \lambda_g^{-m} + |\lambda_g|^{-i\rho-m} \lambda_g^{m} \right),$$

мы получаем отсюда, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{i}{2} \int I(\delta)\, |\lambda - \lambda^{-1}|^2 \left(|\lambda|^{i\rho+m} \lambda^{-m} + \right. \\ \left. + |\lambda|^{-i\rho-m} \lambda^{m} \right) \frac{d\lambda\, d\bar{\lambda}}{|\lambda|^2} = h(\rho, m).$$

*) Вывод этого соотношения см., например, в вып. 5 «Обобщенных функций».

Принимая во внимание, что $I(\delta) = I(\delta^{-1})$, эту формулу можно также переписать в виде

$$\frac{i}{2} \int I(\delta) \, | \lambda - \lambda^{-1} |^2 \, | \lambda |^{i\rho + m} \lambda^{-m} \frac{d\lambda \, d\bar{\lambda}}{| \lambda |^2} = h(\rho, m).$$

Итак, мы видим, что $h(\rho, m)$ есть преобразование Меллина функции $I(\lambda) \, | \lambda - \lambda^{-1} |^2$. Следовательно, по формуле обратного преобразования Меллина, мы имеем

$$I(\delta) = \frac{(2\pi)^{-2}}{| \lambda - \lambda^{-1} |^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho, m) \, | \lambda |^{-i\rho - m} \lambda^m \, d\rho.$$

Тем самым мы выразили интеграл по любому неособому классу сопряженных элементов через функцию $h(\rho, m)$. На основании этой формулы имеем: при $\gamma \neq \pm e$

$$\int\limits_{G_\gamma \setminus G} \varphi(g^{-1} \gamma g) \, dg =$$

$$= \frac{(2\pi)^{-2}}{| \lambda_\gamma - \lambda_\gamma^{-1} |^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho, m) \, | \lambda_\gamma |^{-i\rho - m} \lambda_\gamma^m \, d\rho,$$

где λ_γ, λ_γ^{-1} — собственные значения матрицы γ.

Теперь рассмотрим особый случай: $\gamma = e$ и $\gamma = -e$. В этом случае класс сопряженных элементов состоит из одного единственного элемента, и интеграл по этому классу вырождается соответственно в $\varphi(e)$ и $\varphi(-e)$. Итак, нам нужно выразить $\varphi(e)$ и $\varphi(-e)$ через $h(\rho, m)$. Приведем без вывода окончательные формулы

$$\varphi(e) = \frac{1}{32\pi^4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (m^2 + \rho^2) \, h(\rho, m) \, d\rho,$$

$$\varphi(-e) = \frac{1}{32\pi^4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} (m^2 + \rho^2) \, h(\rho, m) \, d\rho.$$

Эти формулы непосредственно следуют из результатов § 6 главы II, см. также «Обобщенные функции», вып. 5.

В результате, после перехода от функции $\varphi(g)$ к функции $h(\rho, m)$ формула следа принимает вид

$$\sum h(\rho_k, m_k) = \frac{1}{32\pi^4} \nu\mu(\Gamma \setminus G) \times$$
$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} [1+(-1)^m \varepsilon] \int_{-\infty}^{\infty} (m^2+\rho^2) h(\rho, m)\, d\rho +$$
$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma)\mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma)}{4\pi^2 |\lambda_\gamma - \lambda_\gamma^{-1}|^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho, m) |\lambda_\gamma|^{-i\rho-m} \lambda_\gamma^m\, d\rho, \quad (3)$$

где ν — размерность представления $\chi(\gamma)$; $\varepsilon = 1$, если $\chi(-e) = E$, $\varepsilon = -1$, если $\chi(-e) = -E$, E — единичный оператор.

Суммирование слева ведется по всем представлениям основной и дополнительной серии, содержащимся в представлении $T(g)$.

Полученную формулу можно расщепить на соотношения для $h(\rho, m)$ при фиксированных значениях m:

$$\sum_k h(\rho_k, 0) = \frac{1}{32\pi^4} \nu\mu(\Gamma \setminus G)(1+\varepsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^2 h(\rho, 0)\, d\rho +$$
$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\operatorname{Tr}\chi(\gamma)\mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma)}{4\pi^2 |\lambda_\gamma - \lambda_\gamma^{-1}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho, 0) |\lambda_\gamma|^{-i\rho}\, d\rho; \quad (4)$$

$$\sum_k h(\rho_{m,k}, m) =$$
$$= \frac{1}{16\pi^4} \nu\mu(\Gamma \setminus G)[1+(-1)^m \varepsilon] \int_{-\infty}^{+\infty} (m^2+\rho^2) h(\rho, m)\, d\rho +$$
$$+ \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{2\operatorname{Tr}\chi(\gamma)\mu(\Gamma_\gamma \setminus G_\gamma)}{4\pi^2 |\lambda_\gamma - \lambda_\gamma^{-1}|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho, m) |\lambda_\gamma|^{-i\rho-m} \lambda_\gamma^m\, d\rho. \quad (5)$$

Заметим, что представления дополнительной серии учитываются только первой из этих формул. Вывод этих формул из формулы (3) предоставляется читателю.

3. Асимптотическая формула. Из формул (4) и (5) п. 2 легко вытекают асимптотические формулы для распределения чисел ρ_k, которые мы приведем здесь без вывода. Именно, обозначим через $N_m(\rho)$ количество чисел $\rho_{m,k} > 0$, не превосходящих ρ. Тогда имеет место следующая асимптотическая формула при $\rho \to \infty$:

$$N_m(\rho) \sim \frac{\nu\mu(\Gamma \setminus G)}{12\pi^2}\rho^3.$$

§ 6. Изучение спектра представления, порожденного некомпактным пространством $X = \Gamma \setminus G$ (отделение дискретной части спектра)

В этом параграфе будет продолжено изучение представлений группы G вещественных матриц 2-го порядка, порожденных пространством $X = \Gamma \setminus G$, где Γ — дискретная подгруппа группы G. Как и прежде, будем предполагать, что Γ содержит матрицу $-e$.

Раньше мы подробно изучили случай компактного пространства X. Было показано, что спектр представления, порожденного компактным пространством X, является дискретным.

Здесь мы будем предполагать, что пространство X не компактно, но имеет конечный объем. Основная задача состоит по-прежнему в том, чтобы изучить спектр представления $T(g)$, порожденного пространством X, т. е., иными словами, разложить это представление на неприводимые. Решение этой задачи ведется на основе метода орисфер.

Метод орисфер позволяет разложить пространство представления на два инвариантных подпространства с более простой структурой спектра. Здесь изучается первое из этих подпространств. Доказывается, что оно имеет счетный дискретный спектр.

Можно доказать, что второе подпространство имеет не более чем конечное число точек дискретного спектра, а спектр его остальной части — непрерывный конечнократный; при этом кратность непрерывного спектра равна минимальному числу параболических вершин фундаментальной области подгруппы Γ. Доказательство основывается на теории возмущений дифференциальных операторов. Чтобы не перегружать книгу специальными вопросами теории дифференциальных операторов, мы изложим это доказательство в другом месте.

1. Орисферы в однородном пространстве. Орисферическими подгруппами группы G называются подгруппа Z матриц вида

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix},$$

и все подгруппы, сопряженные с группой Z.

Орисферами в однородном пространстве $X = \Gamma \setminus G$ называются орбиты орисферических подгрупп, т. е. линии вида

$$x_z = xgzg^{-1},$$

где $x \in X$ и $g \in G$ фиксированы, а z пробегает подгруппу Z.

Заметим, что большинство орисфер на $\Gamma \setminus G$ оказываются некомпактными и даже незамкнутыми множествами. Для нас существенную роль играют только те орисферы в пространстве $\Gamma \setminus G$, которые являются компактными.

Сформулируем условие компактности орисферы. Поскольку сдвиг орисферы есть снова орисфера и сдвиг компактной орисферы есть снова компактная орисфера, то достаточно ограничиться рассмотрением орисфер, проходящих через фиксированную точку x_0:

$$x_z = x_0 gzg^{-1}.$$

В качестве x_0 возьмем точку, отвечающую единичному классу в $\Gamma \setminus G$.

Пусть сначала $g = e$. Тогда орисфера имеет вид

$$x_z = x_0 z. \tag{1}$$

Покажем, что *орисфера* (1) *компактна тогда и только тогда, когда подгруппа* $\Delta = \Gamma \cap Z$ *отлична от единичной.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение

$$z \to x_0 z \tag{2}$$

группы Z на нашу орисферу C. Очевидно, что прообразами точек орисферы C при этом отображении являются классы смежности группы Z по подгруппе $\Delta = \Gamma \cap Z$.

Тем самым отображение (2) индуцирует непрерывное взаимно однозначное отображение

$$Z/\Delta \to C$$

фактор-группы Z/Δ на орисферу C.

Предположим, что подгруппа $\Delta = \Gamma \cap Z$ отлична от единичной. Покажем, что тогда орисфера C компактна. В самом деле, орисферическая подгруппа Z изоморфна аддитивной группе вещественных чисел; отсюда непосредственно следует, что ее фактор-группа по подгруппе Δ компактна, если последняя нетривиальна. Но тогда и орисфера C, будучи непрерывным образом компактного множества Z/Δ, также компактна.

Обратно, предположим, что орисфера C компактна. Тогда фактор-пространство Z/Δ компактно и, значит, подгруппа Δ не тривиальна. Это непосредственно следует из одной общей теоремы, которую мы приводим без доказательства (см. Понтрягин, [31], гл. 3, теорема 20).

Пусть C — локально-компактное однородное пространство, в котором действует локально компактная группа Z, допускающая счетное покрытие компактными множествами. Тогда однородное пространство C изоморфно пространству Z/Δ классов смежности группы Z по стационарной подгруппе Δ одной из точек в C.

Итак, установлено, что для компактности орисферы

$$x_z = x_0 z$$

необходимо и достаточно, чтобы подгруппа $\Delta = \Gamma \cap Z$ была отлична от единичной.

Аналогично легко убедиться, что для компактности орисферы

$$x_z = x_0 g z g^{-1}$$

необходимо и достаточно, чтобы подгруппа

$$\Delta_g = \Gamma \cap gZg^{-1}$$

была отлична от единичной.

Будем говорить, что две компактные орисферы *принадлежат одному семейству*, если они получаются одна из другой некоторым сдвигом. Число таких семейств является важной характеристикой однородного пространства $X = \Gamma \setminus G$. Нетрудно убедиться, что это число равно минимальному числу параболических вершин фундаментальной области относительно подгруппы Γ. Из последующих результатов этого параграфа будет следовать, что это число конечно, если конечен объем пространства X.

2. Формулировка основной теоремы. Пусть Γ — дискретная подгруппа группы G такая, что объем пространства $\Gamma \setminus G$ конечен.

Рассмотрим представление группы G, порожденное однородным пространством $X = \Gamma \setminus G$. Напомним, что это представление действует в пространстве H функций $f(x)$, $x \in X$ с интегрируемым квадратом:

$$\int |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Оператор представления задается формулой

$$T(g) f(x) = f(xg).$$

Наша задача состоит в том, чтобы изучить спектр этого представления.

В этом параграфе будет проведено отделение дискретной части спектра. Именно, будет определено инвариантное подпространство H^0 пространства H, спектр которого является дискретным.

Сформулируем точный результат этого параграфа.

Рассмотрим совокупность H^0 функций из H, интегралы которых по любой компактной орисфере равны нулю.

Нетрудно убедиться, что H^0 является замкнутым подпространством пространства H и что это подпространство инвариантно.

Разумеется, условие, что интеграл по одной компактной орисфере равен нулю, еще не выделяет замкнутого подпространства. Однако условие, что интегралы по заданной компактной орисфере и по всем достаточно близким к ней орисферам равны нулю, уже определяет замкнутое подпространство.

Доказательство. Рассмотрим множество орисфер, достаточно близких к заданной компактной орисфере l. Так как эти орисферы между собой не пересекаются (см. ниже п. 3), то область $K \subset X$, которую они заполняют, является топологическим произведением

$$K = I \times C$$

компакта T на окружность C. Пусть H_K — подпространство функций $f(t, c)$ из H, сосредоточенных на K. Условие, что интегралы этих функций по орисферам, близким к l, равны нулю, записывается в виде

$$\int_C f(t, c)\, dc = 0 \quad \text{для любого} \quad t \in T.$$

Очевидно, что это условие выделяет замкнутое подпространство H'_K в H_K (в чем можно убедиться, перейдя, например, от функций $f(t, c)$ к их преобразованиям Фурье по c). Но тогда и на всем пространстве H это условие выделяет замкнутое подпространство, а именно, подпространство $H'_K + H''_K$, где H''_K — ортогональное дополнение к H_K.

Теорема. *Пространство H^0 разлагается в прямую сумму не более чем счетного числа инвариантных неприводимых подпространств.* Иными словами, спектр представления $T(g)$ в подпространстве H^0 является дискретным.

Опираясь на результаты § 2, мы сведем сейчас эту теорему к доказательству другого утверждения.

Именно, рассмотрим финитные функции $\varphi(g)$ на G вида

$$\varphi(g) = \psi(g) * \overline{\psi(g^{-1})},$$

где $\psi(g)$ — финитные бесконечно дифференцируемые функции на G, отличные от нуля лишь в достаточно малой окрестности единичного элемента.

Наша цель — показать, что операторы

$$T_\varphi = \int \varphi(g)\, T(g)\, dg$$

являются вполне непрерывными в пространстве H^0. Отсюда на основании леммы § 2 п. 3 будет непосредственно следовать, что H^0 разлагается в прямую сумму не более чем счетного числа инвариантных неприводимых подпространств.

Так как T_φ — самосопряженный положительно определенный оператор, то для доказательства его полной непрерывности достаточно показать, что его след конечен.

Таким образом, основная теорема сводится к доказательству следующего утверждения. *Оператор T_φ, где $\varphi(g)$ — функция вида $\varphi(g) = \psi(g) * \overline{\psi(g^{-1})}$, сосредоточенная в достаточно малой окрестности единичного элемента группы G, имеет конечный след на H^0.*

3. Цилиндрические множества. Для доказательства основной теоремы мы разобьем пространство $X = \Gamma \setminus G$ на цилиндрические подмножества, устроенные в известном смысле проще, чем само пространство X.

Будем называть открытое подмножество X_i пространства X цилиндрическим множеством, если оно расслаивается на попарно непересекающиеся компактные орисферы, принадлежащие одному и тому же семейству.

Иными словами, X_i есть множество всех элементов $x \in X$ вида

$$x = x_0 g_0 z g_0^{-1} v,$$

где x_0 — фиксированная точка из X, g_0 — фиксированный элемент из G такой, что подгруппа $\Gamma \cap g_0 Z g_0^{-1}$ отлична от единичной (условие компактности орисферы); z пробегает подгруппу Z, а v пробегает некоторое множество V в группе G. При этом элемент v — «номер» орисферы — однозначно определяется точкой x.

Задачей этого пункта является доказательство следующего утверждения. *Пространство X можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств*

$$X = X_0 + X_1 + \ldots + X_p,$$

где X_0 — компактное множество, а $X_1, \ldots, X_p$ — цилиндрические множества.

Доказательство этого утверждения основано на результате, полученном в § 1, п. 4. Этот результат мы сейчас напомним.

В § 1, п. 4 было доказано, что на плоскости Лобачевского существует фундаментальная область F относительно подгруппы Γ, являющаяся объединением попарно непересекающихся подмножеств

$$F = F_0 + \sum_{k=1}^{p} F(b_k), \tag{1}$$

где F_0 — компактное множество, b_k — бесконечно удаленные вершины области F, $F(b_k)$ — треугольник, ограниченный двумя геодезическими линиями l_k, l'_k, выходящими из b_k и орициклом ω_k, проходящим через b_k, $k = 1, \ldots, p$. При этом стороны l_k, l'_k треугольника $F(b_k)$ между собой эквивалентны, т. е. получаются одна из другой некоторым преобразованием $\gamma \in \Gamma$. Кроме того, любая точка, лежащая внутри орицикла ω_k, может быть переведена в точку из $F(b_k)$ некоторым преобразованием $\gamma \in \Gamma$, оставляющим на месте точку b_k.

Сопоставим разбиению (1) разбиение пространства $X = \Gamma \setminus G$ на непересекающиеся подмножества.

Для этого заметим, что плоскость Лобачевского является однородным пространством G/U классов смежности группы G вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка по подгруппе U ортогональных матриц. Следовательно, фундаментальную область F на плоскости Лобачевского относительно подгруппы Γ можно естественным образом отождествить с пространством двусторонних классов смежности $\Gamma \setminus G / U$. Рассмотрим естественное отображение

$$X = \Gamma \setminus G \to F = \Gamma \setminus G / U. \tag{2}$$

Обозначим через X_0 и X_k полные прообразы множеств F_0 и $F(b_k)$, $k = 1, \ldots, p$ при этом отображении. Тогда мы получаем разбиение

$$X = X_0 + X_1 + \ldots + X_p \tag{3}$$

множества X на попарно непересекающиеся подмножества.

Очевидно, что X_0 — компактное множество (поскольку его образ F_0 и ядро отображения U являются компактными множествами). Нам нужно показать, что остальные множества X_k, входящие в это разбиение, являются цилиндрическими множествами.

Рассмотрим одно из этих множеств X_k и его образ $F(b_k)$ при отображении (2). Сначала опишем эти множества в матричной форме.

Не нарушая общности, можно предполагать, что $b_k = \infty$. В этом случае подгруппа параболических элементов, оставляющих на месте точку b_k, совпадает с группой Z матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$. Поскольку существуют параболические преобразования $\gamma \in \Gamma$, оставляющие на месте точку b_k, то подгруппа $\Delta = \Gamma \cap Z$ отлична от единичной группы.

Легко убедиться, что множество $F(b_k)$ состоит из всех точек вида

$$(za)\, z_0,$$

где $z_0 = i$ — точка на плоскости Лобачевского, имеющая своей стационарной подгруппой группу U, a пробегает множество диагональных матриц вида

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < N, \tag{4}$$

а z пробегает некоторую фундаментальную область Z_Γ группы Z относительно подгруппы $\Delta = \Gamma \cap Z$. Эта область Z_Γ компактна, поскольку подгруппа Δ отлична от единичной.

Ясно, что полный прообраз X_k области $F(b_k)$ состоит из всех точек вида

$$x = x_0 z a u, \tag{5}$$

где x_0 — фиксированная точка в $X = \Gamma \setminus G$, отвечающая единичному классу, а z, a и u пробегают описанные выше множества матриц.

Покажем, что X_k является цилиндрическим множеством. Прежде всего, заметим, что при фиксированных a, u множество точек (5) образует компактную орисферу.

Таким образом, через каждую точку области X_k проходит компактная орисфера из заданного семейства. Остается убедиться, что различным парам a, u отвечают орисферы, не имеющие общих точек.

В самом деле, предположим, что орисферы $x_z = x_0 z a_1 u_1$ и $x_z = x_0 z a_2 u_2$ имеют общую точку. Тогда существуют элементы z_1, $z_2 \in Z_\Gamma$ и $\gamma \in \Gamma$ такие, что

$$\gamma z_1 a_1 u_1 = z_2 a_2 u_2. \tag{6}$$

Рассмотрим отображение $G \to G/U$ группы G на плоскость Лобачевского. При этом отображении элементы $z_1 a_1 u_1$ и $z_2 a_2 u_2$ переходят в точки, принадлежащие области $F(b_k)$. Равенство (6) означает, что эти точки переводятся одна в другую некоторым элементом $\gamma \in \Gamma$. Но, поскольку $F(b_k)$ принадлежит фундаментальной области относительно подгруппы Γ, это возможно, лишь когда эти точки совпадают и $\gamma = 1$.

Итак, из равенства (5) следует, что $\gamma = 1$, а потому

$$z_1 a_1 u_1 = z_2 a_2 u_2. \tag{7}$$

Поскольку любая матрица $g \in G$ может быть разложена единственным образом в произведение вида $g = zau$, то из равенства (7) мы имеем $a_1 = a_2$, $u_1 = u_2$. Следовательно, орисферы $x_z = x_0 z a_1 u_1$ и $x_z = x_0 z a_2 u_2$ совпадают.

Итак, доказано, что множества X_k, $k = 1, \ldots, p$ в разбиении (3) пространства $X = \Gamma \setminus G$ являются цилиндрическими множествами.

4. Редукция основной теоремы. В п. 2. основная теорема этого параграфа была сведена к следующей теореме.

Любой оператор вида

$$T_\varphi = \int \varphi(g) T(g)\, dg,$$

где $\varphi(g)$ — бесконечно дифференцируемая функция вида $\varphi(g) = \psi(g) * \overline{\psi(g^{-1})}$, сосредоточенная в достаточно малой окрестности единичного элемента группы G, имеет конечный след на H^0.

Проведем дальнейшую редукцию основной теоремы.

Для этого разобьем однородное пространство X на сумму непересекающихся подмножеств

$$X = X_0 + X_1 + \ldots + X_p,$$

где X_0 — компактное множество, а каждое из множеств $X_1, \ldots, X_p$ является цилиндрическим множеством, т. е. расслаивается на попарно непересекающиеся орисферы одного и того же семейства. Возможность такого разбиения была установлена в предыдущем пункте.

Обозначим через H_k подпространство функций с интегрируемым квадратом на X, равных нулю вне X_k, а через P_k оператор проектирования пространства H на это подпространство, $k = 0, 1, \ldots, p$. Далее, обозначим через H_k^0 подпространство функций из H_k, интегралы которых по орисферам семейства, входящего в X_k, равны нулю.

Очевидно, что имеет место следующее включение:

$$H^0 \subset H_0 + H_1^0 + \ldots + H_p^0. \tag{1}$$

Отсюда вытекает, что след положительного самосопряженного оператора T_φ на пространстве H^0 не больше, чем сумма следов операторов $P_k T_\varphi P_k$ на пространствах H_0, $H_1^0, \ldots, H_p^0$.

Итак, доказательство основной теоремы сводится к доказательству следующего утверждения.

След оператора $P_0T_\varphi P_0$ *на* H_0 *и след оператора* $P_kT_\varphi P_k$ *на пространстве* H_k^0, $k=1, \ldots, p$ *конечны.*

Сначала докажем конечность следа оператора $P_0T_\varphi P_0$ в H_0 (напоминаем, что X_0 — компактное множество).

Для этого напомним, что оператор T_φ является интегральным положительным оператором вида

$$T_\varphi f(g_1)=\int_F K(g_1, g_2) f(g_2) dg_2 \tag{2}$$

с ядром

$$K(g_1, g_2)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(g_1^{-1}\gamma g_2), \tag{3}$$

где F — фундаментальная область в G относительно преобразований $g\to\gamma g$, $\gamma\in\Gamma$. При этом функция $K(g_1, g_2)$ является непрерывной функцией от g_1, g_2.

Пусть F_0 — прообраз компактного множества X_0 в F. Отображение $F_0\to X_0$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно, а потому F_0 также является компактным множеством.

Легко видеть, что оператор $P_0T_\varphi P_0$ является интегральным оператором на F_0 вида

$$\int_{F_0} K(g_1, g_2) f(g_2) dg_2.$$

Так как ядро $K(g_1, g_2)$ непрерывно, то на компактном множестве F_0 оно и ограничено. Поэтому оператор $P_0T_\varphi P_0$ имеет конечный след на всем пространстве H_0, равный

$$\int_{F_0} K(g, g) dg.$$

Итак, нам остается доказать конечность следа оператора $P_kT_\varphi P_k$, $k=1, \ldots, p$. Переходим к доказательству этого утверждения.

5. Доказательство конечности следа оператора $P_kT_\varphi P_k$ в пространстве H_k^0. Пусть F — фундаментальная область группы G относительно подгруппы Γ, F_k — прообраз цилиндрического множества X_k в F. Не нарушая общности, можно считать, что цилиндрическое множество X_k расслаивается на орисферы вида

$$x = x_0 z g. \tag{1}$$

Тогда, как было показано в п. 3, F_k состоит из всевозможных элементов вида

$$zau,$$

где z пробегает некоторую фундаментальную область группы Z относительно подгруппы $\Delta = \Gamma \cap Z$, a пробегает множество диагональных матриц

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < N, \tag{2}$$

u пробегает ортогональные матрицы.

Очевидно, что оператор $P_k T_\varphi P_k$ в пространстве H_k можно рассматривать как интегральный оператор на F_k вида

$$\int\limits_{F_k} K(g_1, g_2) f(g_2) \, dg_2, \tag{3}$$

где

$$K(g_1, g_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g_1^{-1} \gamma g_2). \tag{4}$$

Нас интересует оператор $P_k T_\varphi P_k$ не на всем пространстве H_k, а на его подпространстве H_k^0. Будет удобно заменить это подпространство H_k^0 другим подпространством, ему изоморфным.

С этой целью будем считать функции $f(g)$, $g \in F_k$ продолженными на множество ΔF_k по формуле $f(\gamma g) = f(g)$ для любых $\gamma \in \Delta$ и $g \in F_k$.

Рассмотрим отображение

$$Q\colon \quad f(g) \to \mu^{-1} \int\limits_{\Delta \setminus Z} f(zg) \, dz \tag{5}$$

пространства H_k в себя, где μ — мера пространства $\Delta \setminus Z$. Очевидно, что ядром этого отображения является наше подпространство H_k^0, а образом — подпространство H_k^{I} всех функций из H_k, удовлетворяющих условию

$$f(zg) = f(g). \tag{6}$$

Отсюда следует, что пространство H_k^0 изоморфно ортогональному дополнению $\widetilde{H}_k$ к подпространству H_k^{I}.

Итак, мы можем заменить пространство H_k^0 пространством $\widetilde{H}_k$ — ортогональным дополнением к подпространству функций $f(g) \in H_k$, удовлетворяющих условию (6).

Будем доказывать конечность следа оператора $P_k T_\varphi P_k$ в подпространстве $\widetilde{H}_k$. Иными словами, нам нужно доказать конечность следа оператора:

$$P_k T_\varphi P_k - Q P_k T_\varphi P_k Q, \tag{7}$$

где Q — оператор проектирования на H_k^{I}, задаваемый формулой (5).

Найдем ядро этого оператора. В силу (5) оператор $Q P_k T_\varphi P_k Q$ задается ядром

$$K_{\mathrm{I}}(g_1, g_2) = \mu^{-2} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \int\limits_{\Delta \setminus Z} K(z_1 g_1, z_2 g_2)\, dz_1\, dz_2, \tag{8}$$

где K — ядро оператора T_φ. Следовательно, ядро оператора $P_k T_\varphi P_k - Q P_k T_\varphi P_k Q$ имеет вид

$$K(g_1, g_2) - \mu^{-2} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \int\limits_{\Delta \setminus Z} K(z_1 g_1, z_2 g_2)\, dz_1\, dz_2. \tag{9}$$

Нам нужно доказать, что этот оператор имеет конечный след, т. е. что сходится следующий интеграл:

$$I = \int\limits_{F_k} \left[K(g, g) - \mu^{-2} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \int\limits_{\Delta \setminus Z} K(z_1 g, z_2 g)\, dz_1\, dz_2 \right] dg. \tag{10}$$

Преобразуем этот интеграл.

Подставляя в I явное выражение (4) для ядра K, мы получим

$$I = \int \sum_{\gamma \in \Gamma} \Bigg[\varphi(u^{-1}a^{-1}z^{-1}\gamma z a u) - \\ - \mu^{-2} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \varphi\left(u^{-1}a^{-1}z^{-1}z_1^{-1}\gamma z_2 z a u\right) dz_1\, dz_2 \Bigg] \alpha\, d\alpha\, dz\, du\,^{*)}. \tag{11}$$

Упростим это выражение. Прежде всего, заменяя функцию φ ее усреднением $\varphi_1(g) = \int \varphi(u^{-1}gu)\, du$ по подгруппе U ортогональных матриц, мы можем писать

$$I = \int \sum_{\gamma \in \Gamma} \Bigg[\varphi_1(a^{-1}z^{-1}\gamma z a) - \\ - \mu^{-2} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \varphi_1\left(a^{-1}z^{-1}z_1^{-1}\gamma z_2 z a\right) dz_1\, dz_2 \Bigg] \alpha\, d\alpha\, dz. \tag{12}$$

Покажем теперь, что суммирование в (12) ведется фактически только по элементам $\gamma \in \Delta = \Gamma \cap Z$. Иными словами, докажем следующее утверждение:

если $\varphi\left(a^{-1}z_1^{-1}\gamma z_2 a\right) \neq 0$, *где* $z_1, z_2 \in Z$ *и* $a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$, $0 < \alpha < N$, *то* $\gamma \in \Delta$.

Предварительно напомним, что функция $\varphi_1(g)$ предполагается равной нулю вне достаточно малой окрестности V единичного элемента.

Итак, пусть $\varphi_1\left(a^{-1}z_1^{-1}\gamma z_2 a\right) \neq 0$, т. е.

$$a^{-1}z_1^{-1}\gamma z_2 a = v \in V. \tag{13}$$

Представим элемент v в виде

$$v = z a' u, \tag{14}$$

*) Здесь использована формула для инвариантной меры на g в параметрах z, a и u: если $g = zau$, то $dg = \alpha\, d\alpha\, dz\, du$, где dz и du — инвариантные меры на Z и на U.

где $z \in Z$, u — ортогональная матрица,

$$a' = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \alpha'^{-1} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что если V — достаточно малая окрестность единицы, то элемент α' матрицы a' сколь угодно близок к единице.

Из равенств (13) и (14) получаем, что

$$\gamma z_2 a = z' a a' u. \tag{15}$$

Следовательно, орисферы в пространстве X: $x_z = x_0 z a$ и $x_z = x_0 z a a' u$ имеют общую точку пересечения.

Напомним теперь, что множество точек в пространстве X вида

$$x = x_0 z a u, \tag{16}$$

где z пробегает подгруппу Z, u пробегает ортогональные матрицы, а a пробегает диагональные матрицы $a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$, $0 < \alpha < N$, образует цилиндрическое множество в X. Легко убедиться, что при $0 < \alpha < N + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое число, элементы (16) все еще образуют цилиндрическое множество.

Следовательно, из того, что орисферы $x_z = x_0 z a$ и $x_z = x_0 z a a' u$ имеют общую точку пересечения, вытекает, что они целиком совпадают, а потому $a' = 1$ и $u = 1$. Но тогда из равенства (15) следует, что $\gamma \in \Gamma \cap Z$.

Итак, доказано, что суммирование в (12) ведется фактически по элементам $\gamma \in \Delta = \Gamma \cap Z$. Таким образом, это выражение можно переписать в следующем виде:

$$I = \int \sum_{\gamma \in \Delta} \Big[\varphi_1 (a^{-1} z^{-1} \gamma z a) - \\ - \mu^{-2} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \varphi_1 (a^{-1} z^{-1} z_1^{-1} \gamma z_2 z a) \, dz_1 \, dz_2 \Big] \alpha \, d\alpha \, dz. \tag{17}$$

Ввиду коммутативности группы Z подынтегральное выражение от z не зависит. Поэтому, интегрируя по z, мы получаем

$$I = \mu \int \sum_{\gamma \in \Delta} \Big[\varphi_1 (a^{-1} \gamma a) - \mu^{-1} \int\limits_{\Delta \setminus Z} \varphi_1 (a^{-1} \gamma z a) \, dz \Big] \alpha \, d\alpha. \tag{18}$$

Перейдем в этом выражении от матричной записи к записи через элементы.

Подгруппа Δ является бесконечной циклической. Таким образом, элементы $\gamma \in \Delta$ имеют вид

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\sigma & 1 \end{pmatrix},$$

где σ фиксировано, а n пробегает целые числа. Для простоты будем считать, что $\sigma = 1$.

Тогда имеем

$$a^{-1}\gamma a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a^{-1}\gamma z a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+z)\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем функцию одного переменного

$$\psi(x) = \varphi_1(z), \tag{19}$$

где $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Тогда выражение (18) можно переписать в следующем виде:

$$I = \int_0^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\psi(n\alpha^2) - \int_0^1 \psi((n+z)\alpha^2)\, dz \right] \alpha\, d\alpha, \tag{20}$$

где $\psi(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция.

Итак, нужно доказать сходимость интеграла (20). Поскольку

$$\int_0^1 \psi((n+z)\alpha^2)\, dz = \psi((n+\theta_n)\alpha^2), \quad 0 \leqslant \theta_n \leqslant 1,$$

то имеем

$$\psi(n\alpha^2) - \int_0^1 \psi((n+z)\alpha^2)\, dz = -\psi'\left(\left(n+\theta'_n\right)\alpha^2\right)\theta_n \alpha^2,$$

где $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta'_n \leqslant 1$.

Таким образом, интеграл (20) мажорируется интегралом

$$I_1 = \int_0^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \psi'\left(\left(n+\theta'_n\right)\alpha^2\right) \right| \alpha^3\, d\alpha. \tag{21}$$

Так как функция $\psi'(x)$ финитна, то суммирование в (21) ведется фактически лишь по тем n, для которых $|n+\theta_n'|\alpha^2 < C$, где C — некоторая константа. Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\psi'((n+\theta_n')\alpha^2)| \leqslant \frac{C_1}{\alpha^2},$$

а потому

$$I_1 \leqslant \int_0^N C_1 \alpha\, d\alpha < \infty.$$

Тем самым доказано, что след оператора $P_k T_\varphi P_k$ в подпространстве H_k^0 конечен.

ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ I

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ G ВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ 2-го ПОРЯДКА

1. Определение арифметической подгруппы. Здесь будут разобраны примеры дискретных подгрупп группы G вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка. Среди всех дискретных подгрупп группы G наиболее интересными и важными являются арифметические подгруппы. Дадим их определение.

Пусть $g \to T(g)$ — какое-нибудь конечномерное представление группы G. Рассмотрим совокупность всех элементов $g \in G$, которым отвечают целочисленные матрицы $T(g)$. Нетрудно убедиться, что эти элементы g образуют дискретную подгруппу группы G. Все получающиеся таким способом дискретные группы, а также все их подгруппы конечного индекса, мы будем называть здесь арифметическими подгруппами. Простейшим примером арифметической подгруппы группы G является группа Γ всех *целочисленных* матриц

$$\gamma = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \qquad m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1.$$

Ее называют *модулярной* группой.

В п. 4 будут приведены другие примеры дискретных подгрупп — так называемые кватернионные группы. Из результатов А. Вейля вытекает, что модулярной и кватернионными группами, а также их подгруппами конечного индекса, исчерпываются все арифметические подгруппы группы G.

Данное определение арифметической подгруппы несколько отличается от общепринятого. Приведем общепринятое определение арифметической подгруппы произвольной полупростой группы Ли. Предварительно введем понятие линейной алгебраической группы.

Рассмотрим группу всех невырожденных матриц n-го порядка над полем комплексных чисел и некоторое конечное множество полиномиальных соотношений между элементами матриц. Выделим совокупность всех матриц, удовлетворяющих этим соотношениям. Если эта совокупность матриц образует группу, то эта группа называется *линейной алгебраической группой*.

Если коэффициенты полиномов принадлежат полю рациональных чисел, то говорят, что *группа определена над полем рациональных чисел*. Обозначим эту группу через G, понимая под G не множество точек, а множество полиномиальных соотношений.

Если k — любое коммутативное кольцо над полем рациональных чисел, то через G_k мы будем обозначать множество матриц с элементами из k, удовлетворяющих этим соотношениям, таких, что их определитель есть единица кольца.

Арифметической подгруппой полупростой группы Ли G_R (R — поле вещественных чисел) называется любая дискретная подгруппа, получаемая следующей конструкцией.

Пусть $G'_R \supset G_R$ — произвольная полупростая группа Ли, содержащая G_R в качестве подгруппы и являющаяся прямым произведением

$$G'_R = G_R \times K$$

группы G_R и компактной группы K. Возьмем в G'_R произвольную дискретную подгруппу Γ', соизмеримую с G'_Z, где Z — кольцо целых чисел. (Это означает, что $\Gamma' \cap G'_Z$ имеет конечный индекс в G'_Z и в Γ'.) Пусть $\Gamma \subset G_R$ — проекция группы Γ' при естественном отображении $G'_R \to G_R$. Все получаемые так подгруппы Γ и называются арифметическими подгруппами группы G_R.

2. Модулярная группа. В этом пункте мы построим фундаментальную область модулярной группы Γ и докажем, что эта область имеет конечный объем.

Мы знаем из § 1, п. 2, что однородное пространство $X = \Gamma \setminus G$ можно интерпретировать как пространство линейных элементов некоторой римановой поверхности $\mathscr{D}$.

Постараемся описать эту риманову поверхность. Напомним, что согласно п. 2, поверхность $\mathscr{D}$ строится следующим образом. Рассматривается полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ плоскости z; на ней рассматриваются все дробно-линейные преобразования, отвечающие элементам $\gamma \in \Gamma$. Если отождествить между собой точки z, переходящие друг в друга при этих преобразованиях, то мы и получим искомую поверхность $\mathscr{D}$.

Чтобы явно описать эту риманову поверхность, мы построим фундаментальную область группы Γ на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, где эта группа действует как группа дробно-линейных преобразований.

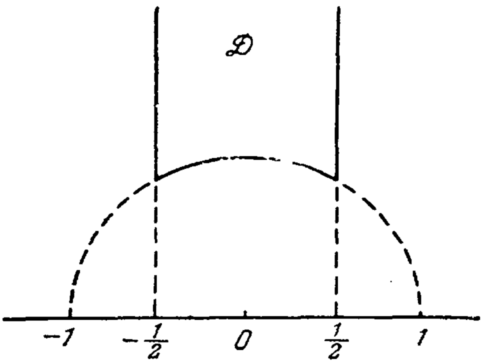

Рис. 3.

Рассмотрим на полуплоскости область $\mathscr{D}$, задаваемую следующими неравенствами:

$$|z| > 1, \quad |\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}, \tag{1}$$

или, что равносильно, неравенствами

$$|z| > 1, \quad |z + 1| > |z|, \quad |z - 1| > |z| \tag{2}$$

(рис. 3). Покажем, что эта область является фундаментальной областью относительно модулярной группы Γ.

Сначала покажем, что любую точку полуплоскости можно перевести в $\overline{\mathscr{D}}$ некоторым преобразованием из Γ.

Пусть z — произвольная точка полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Рассмотрим на плоскости решетку, образованную точками

$$w = mz + n,$$

где m и n пробегают всевозможные целые числа. Выберем из точек решетки ближайшую (в смысле обычного евклидовского расстояния) к точке 0. Пусть это будет точка

$$w_1 = m_{12} z + m_{22}$$

(рис. 4). Затем рассмотрим точки решетки, не лежащие на прямой, проходящей через 0 и w_1, и среди них снова выберем точку, ближайшую к 0. Пусть это будет точка

$$w_2 = m_{11}z + m_{21}.$$

Согласно определению точек w_1, w_2, в треугольнике с вершинами 0, w_1, w_2 не содержится ни одной точки решетки, отличной от вершин этого треугольника. Отсюда

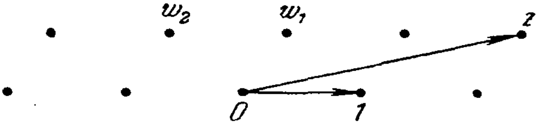

Рис. 4.

сразу следует, что и в параллелограмме с вершинами 0, w_1, w_2, $w_1 + w_2$ также не содержится ни одной точки решетки, отличной от вершин этого параллелограмма*).

Покажем, что

$$m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = \pm 1.$$

Для этого достаточно убедиться, что любая точка решетки w, в том числе 1 и z, является целочисленной линейной комбинацией w_1 и w_2. Представим w в виде

$$w = a_1 w_1 + a_2 w_2,$$

где a_1, a_2 — вещественные числа. Нам нужно доказать, что на самом деле a_1, a_2 являются целыми числами. Представим эти числа в виде

$$a_1 = m_1 + r_1, \qquad a_2 = m_2 + r_2,$$

где m_1, m_2 — целые числа и $0 \leqslant r_1, r_2 < 1$. Очевидно, что точка

$$w' = w - m_1 w_1 - m_2 w_2 = r_1 w_1 + r_2 w_2$$

*) В самом деле, если бы в треугольнике с вершинами w_1, w_2, $w_1 + w_2$ имелась бы еще одна точка w решетки, то существовала бы еще одна точка решетки и в треугольнике с вершинами 0, w_1, w_2, а именно, точка $w_1 + w_2 - w$.

также является точкой нашей решетки. Но эта точка принадлежит параллелограмму с вершинами 0, w_1, w_2, w_1+w_2. Следовательно, $w'=0$, т. е. $w=m_1w_1+m_2w_2$.

Итак, доказано, что $m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}=\pm 1$. Меняя в случае необходимости знаки у m_{12} и m_{22}, мы можем считать, что

$$m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}=1.$$

Рассмотрим теперь точку

$$z'=\frac{w_2}{w_1}=\frac{m_{11}z+m_{21}}{m_{12}z+m_{22}}.$$

Покажем, что она принадлежит $\bar{\mathscr{D}}$. В самом деле, из определения точек w_1, w_2 следует, что

$$|w_2|\geqslant|w_1|, \qquad |w_2+w_1|\geqslant|w_2|, \qquad |w_2-w_1|\geqslant|w_2|.$$

Деля все эти неравенства на $|w_1|$, получаем, что

$$|z'|\geqslant 1, \qquad |z'+1|\geqslant|z'|, \qquad |z'-1|\geqslant|z'|,$$

т. е. z' действительно принадлежит $\bar{\mathscr{D}}$.

Итак, мы доказали, что преобразованиями из Γ любую точку полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ можно перевести в замыкание $\bar{\mathscr{D}}$ области $\mathscr{D}$.

Теперь посмотрим, какие точки из $\bar{\mathscr{D}}$ могут быть переведены друг в друга преобразованиями из Γ. Мы покажем, что единственными парами таких точек являются точки границы области $\bar{\mathscr{D}}$, симметричные относительно мнимой оси; этим будет доказано, что $\mathscr{D}$ — фундаментальная область.

Пусть точка $z_1=x_1+iy_1$ из $\bar{\mathscr{D}}$ переводится в другую точку $z_2=x_1+iy_1$ из $\bar{\mathscr{D}}$ некоторым преобразованием γ из Γ:

$$z_2=\frac{m_{11}z_1+m_{21}}{m_{12}z_1+m_{22}}. \tag{3}$$

Наша цель — доказать, что точки z_1 и z_2 лежат на границе области $\mathscr{D}$ и что $y_1=y_2$.

Не нарушая общности, можно предполагать, что $y_2\geqslant y_1$. Покажем сначала, что $y_2\leqslant y_1$; отсюда будет следовать, что $y_2=y_1$. Для этого воспользуемся равенством

$$y_2=\frac{y_1}{|m_{12}z+m_{22}|^2}, \tag{4}$$

которое следует непосредственно из равенства (3). Докажем что $|m_{12}z_1+m_{22}|\geqslant 1$. В самом деле, имеем

$$|m_{12}z_1+m_{22}|^2=m_{12}^2(x_1^2+y_1^2)+2m_{12}m_{22}x_1+m_{22}^2.$$

Поскольку для точек z_1 из $\overline{\mathscr{D}}_1$ $x_1^2+y_1^2\geqslant 1$ и $|x_1|\leqslant\frac{1}{2}$, то получаем отсюда, что $|m_{12}z_1+m_{22}|^2\geqslant m_{12}^2-|m_{12}m_{22}|+m_{22}^2\geqslant 1$ (за исключением случая $m_{12}=m_{22}=0$, который фактически и не может встретиться, так как $m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}=1$).

Итак, $|m_{12}z_1+m_{22}|^2\geqslant 1$. Тем самым на основании (4) доказано, что $y_2\leqslant y_1$ Но мы заранее предполагали, что $y_2\geqslant y_1$; следовательно, $y_1=y_2$.

Теперь покажем, что точки $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ принадлежат границе области $\mathscr{D}$. В самом деле, так как $y_1=y_2$, то мы имеем на основании (4)

$$(m_{12}x_1+m_{22})^2+m_{12}^2y_1^2=1.$$

Перебирая снова все возможные значения m_{12}, m_{22}, x_1, y_1, легко убеждаемся, что это равенство имеет место лишь в следующих трех случаях:

1) $m_{12}=\pm 1,\quad m_{22}=0,\quad x_1^2+y_1^2=1,$

2) $m_{12}=\pm 1$, $m_{22}=\pm 1$, $x_1=\pm\frac{1}{2}$ (знак x_1 противоположен знаку произведения $m_{12}m_{22}$), $y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

3) $m_{12}=0$, $m_{22}=\pm 1$.

В первых двух случаях точка z_1 лежит на окружности $|z|=1$, т. е. на границе области $\mathscr{D}$. В третьем случае должно быть также $m_{11}=\pm 1$. а потому z_2 выражается через z_1 следующим образом:

$$z_2=z_1+n,$$

где n — целое число ($n\neq 0$). Но тогда $|z_2-z_1|\geqslant 1$. Очевидно, что это возможно лишь в случае, когда точки z_1 и z_2 лежат на вертикальных кусках границы области $\mathscr{D}$. Итак, доказано, что область $\mathscr{D}$, изображенная на рис. 3, действительно является фундаментальной областью относительно модулярной группы Г.

Тем самым мы описали риманову поверхность, связанную с модулярной группой Г. Именно, доказано, что этой поверхностью является замыкание $\bar{\mathscr{D}}$ области $\mathscr{D}$, причем точки границы области $\mathscr{D}$, симметричные относительно мнимой оси, считаются отождествленными. Таким образом, эта риманова поверхность гомеоморфна сфере с одной выколотой точкой (отвечающей бесконечно удаленной точке на $\mathscr{D}$).

Мы покажем, что площадь неограниченной области $\mathscr{D}$ конечна и вычислим эту площадь.

По определению, элемент площади dv на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ должен сохраняться при конформных преобразованиях полуплоскости. Из этого условия мы легко получаем, что с точностью до постоянного множителя, инвариантный элемент площади dv на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ выражается следующей формулой:

$$dv = \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Следовательно, площадь $S(\mathscr{D})$ области $\mathscr{D}$ выражается по формуле

$$S(\mathscr{D}) = \int_{\mathscr{D}}\int \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Вычисляя этот интеграл, получаем, что

$$S(\mathscr{D}) = \frac{\pi}{3}.$$

Итак, доказано, что фундаментальная область $\mathscr{D}$ группы Г на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет конечную площадь.

Отсюда непосредственно следует, что и на группе G фундаментальная область подгруппы Г имеет конечный объем. В самом деле, эту фундаментальную область можно реализовать как пространство линейных элементов на $\mathscr{D}$.

3. Некоторые подгруппы модулярной группы. В этом пункте будут изучены некоторые важные классы подгрупп конечного индекса модулярной группы Г.

Пусть n — фиксированное натуральное число, $n > 1$. Рассмотрим кольцо Z_n классов вычетов по $\operatorname{mod} n$. Условимся класс вычетов, которому принадлежит заданное целое число a, обозначать через a^*.

Обозначим через Γ_n^* группу всех унимодулярных матриц

$$\gamma^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$$

с элементами из кольца Z_n вычетов по $\operatorname{mod} n$.

Имеет место естественный гомоморфизм

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \tag{1}$$

модулярной группы Γ в Γ_n^*. Ядро Γ_n' этого гомоморфизма называется главной конгруэнцподгруппой степени n. Очевидно, что группа Γ_n' состоит из всех целочисленных унимодулярных матриц γ, представимых в виде

$$\gamma = e + n\gamma',$$

где e — единичная матрица, γ' — целочисленная матрица.

Докажем, что *отображение* (1) *является отображением на всю группу* Γ_n^* *и, следовательно*:

$$\Gamma/\Gamma_n' \approx \Gamma_n^*.$$

Доказательство. Пусть $\gamma^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$ — произвольная матрица из Γ_n^*, и пусть a, b, c, d — произвольно выбранные элементы из соответствующих классов вычетов a^*, b^*, c^*, d^*. Тогда имеем $ad - bc \equiv 1 \pmod{n}$, т. е. $ad - bc = 1 + mn$, где m — целое число. Очевидно, что общий наибольший делитель (c, d) чисел c и d взаимно прост с n. Поэтому найдется такое q, при котором числа c и $d + qn$ будут взаимно просты. Не нарушая общности, можно предполагать с самого начала, что $(c, d) = 1$.

Рассмотрим матрицу

$$\gamma = \begin{pmatrix} a + rn & b + sn \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен $ad - bc + n(rd - sc) = 1 + n(m - rd - sc)$. Поскольку числа d и c взаимно просты, мы можем так подобрать целые r и s, чтобы было $m - rd - sc = 0$, т. е. чтобы матрица γ была унимодулярной. Тем самым доказано, что любая матрица $\gamma^* \in \Gamma_n^*$ имеет прообраз в группе Γ.

Вычислим индекс $\Gamma : \Gamma_n'$ подгруппы Γ_n' или, что равносильно, порядок $|\Gamma_n^*|$ группы Γ_n^*. Мы покажем, что

$$|\Gamma_n^*| = n^3 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \tag{2}$$

где произведение берется по различным простым делителям p числа n.

Пусть p — простой делитель числа n. Тогда существует естественный гомоморфизм $Z_n \to Z_{n/p}$ кольца вычетов по $\operatorname{mod} n$ на кольцо вычетов по $\operatorname{mod} \frac{n}{p}$. Этот гомоморфизм индуцирует гомоморфизм соответствующих групп

$$\Gamma_n^* \to \Gamma_{n/p}^*.$$

Обозначим через $I_{n,\,p}$ ядро этого гомоморфизма. Тогда имеем

$$|\Gamma_n^*| = |I_{n,\,p}|\,|\Gamma_{n/p}^*|.$$

Следовательно, если мы найдем порядок $|I_{n,\,p}|$ группы $I_{n,\,p}$, то элементарной индукцией по числу простых сомножителей числа n мы вычислим и порядок $|\Gamma_n^*|$ группы Γ_n^*.

Итак, вычислим порядок группы $I_{n,\,p}$. Очевидно, что группа матриц $I_{n,\,p}$ состоит из всех матриц $\gamma^* \in \Gamma_n^*$, представимых в виде

$$\gamma^* = e + \frac{n}{p}\gamma_1^*.$$

Иными словами, элементами группы $I_{n,\,p}$ являются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{n}{p}a & \frac{n}{p}b \\ \frac{n}{p}c & 1 + \frac{n}{p}d \end{pmatrix},$$

где a, b, c, d — элементы кольца вычетов по $\operatorname{mod} p$. По условию, определитель таких матриц равен 1 $(\operatorname{mod} n)$ т. е.

$$1 + \frac{n}{p}(a + d) + \frac{n^2}{p^2}(ad - bc) \equiv 1 \qquad (\operatorname{mod} n).$$

Вычитая 1 и сокращая на n/p, мы получаем отсюда

$$a+d+\frac{n}{p}(ad-bc)\equiv 0 \pmod p. \tag{3}$$

Порядок группы $I_{n,\,p}$ равен числу решений этого сравнения. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. n/p делится на p. В этом случае равенство (3) принимает вид

$$a+d\equiv 0 \pmod p.$$

Таким образом, в этом случае a, b, c могут быть любыми классами вычетов по $\operatorname{mod} p$, а элемент d однозначно выражается через a. Следовательно, в этом случае порядок группы $I_{n,\,p}$ равен p^3.

Случай 2. Числа p и n/p взаимно просты. В этом случае запишем равенство (3) в виде

$$a\left(1+\frac{n}{p}d\right)+d-\frac{n}{p}bc\equiv 0 \pmod p.$$

В случае $1+\frac{n}{p}d\not\equiv 0 \pmod p$ элементы b, c могут быть любыми, а элемент a однозначно выражается через b, c, d. Следовательно, число элементов группы $I_{n,\,p}$, удовлетворяющих условию $1+\frac{n}{p}d\not\equiv 0$, равно $p^2(p-1)$. В случае $1+\frac{n}{p}d\equiv 0 \pmod p$ произведение bc принимает фиксированное значение, не равное нулю, а элемент a — произволен. Следовательно, число элементов группы $I_{n,\,p}$, удовлетворяющих условию $1+\frac{n}{p}d\equiv 0 \pmod p$, равно $(p-1)\,p$.

Таким образом, общее число элементов группы $I_{n,\,p}$ равно

$$(p-1)\,p^2+(p-1)\,p=p^3\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

Итак, установлено, что

$$|I_{p,\,n}|=\begin{cases} p^3, & \text{если } \dfrac{n}{p} \text{ делится на } p,\\[2mm] p^3\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right), & \text{если } \dfrac{n}{p} \text{ не делится на } p.\end{cases}$$

На основании равенства $|\Gamma_n^*| = |I_{n,p}|\,|\Gamma_{n/p}^*|$ непосредственно получаем индукцией по числу простых множителей числа n искомую формулу

$$|\Gamma_n^*| = n^3 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

где произведение берется по различным простым делителям p числа n.

Полученный результат можно использовать для вычисления площади v фундаментальной области на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ относительно подгруппы Γ_n'.

Для этого воспользуемся следующим очевидным замечанием. Пусть Γ' — дискретная подгруппа группы G и Γ'' — подгруппа конечного индекса группы Γ'. Тогда, если F' — фундаментальная область относительно Γ', то фундаментальной областью Γ'' является объединение

$$F'' = \bigcup_{\gamma} \gamma F'$$

множеств $\gamma F'$, где γ пробегает по одному представителю каждого класса смежности $\Gamma'' \setminus \Gamma'$.

Отсюда следует, что площади $v_{\Gamma'}$, $v_{\Gamma''}$ фундаментальных областей относительно подгрупп Γ' и Γ'' связаны соотношением

$$v_{\Gamma''} = [\Gamma' : \Gamma'']\, v_{\Gamma'},$$

где $[\Gamma' : \Gamma'']$ — индекс подгруппы Γ'' в группе Γ'.

В п. 2 было установлено, что площадь фундаментальной области относительно модулярной группы Γ равна $\pi^2/3$. Следовательно, на основании формулы (2) заключаем: площадь $v_{\Gamma_n'}$ фундаментальной области относительно конгруэнцподгруппы Γ_n' равна

$$v_{\Gamma_n'} = \frac{\pi^2}{3} n^3 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

(произведение берется по всем простым делителям p числа n).

Укажем еще один класс подгрупп модулярной группы Γ. Обозначим через Γ_n совокупность матриц из Γ вида

$$\begin{pmatrix} a & nb \\ nc & d \end{pmatrix},$$

где a, b, c, d — целые числа. Очевидно, что Γ_n является группой и что $\Gamma_n \supset \Gamma'_n$.

Вычислим индекс $\Gamma : \Gamma_n$ подгруппы Γ_n в группе Γ. Для этого заметим, что фактор-группа Γ_n/Γ'_n изоморфна группе всех диагональных унимодулярных матриц

$$\gamma^* = \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & d^* \end{pmatrix},$$

где a^*, d^* — элементы кольца вычетов по $\operatorname{mod} n$. Число таких матриц равно, очевидно, числу $\varphi(n)$ натуральных чисел $x < n$, взаимно простых с n. Как известно

$$\varphi(n) = n \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

где произведение берется по всем простым делителям p числа n. Следовательно, имеем

$$[\Gamma_n : \Gamma'_n] = n \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Но тогда

$$\Gamma : \Gamma_n = \frac{\Gamma : \Gamma'_n}{\Gamma_n : \Gamma'_n} = n^2 \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

На основании этого результата получаем, что площадь v_{Γ_n} фундаментальной области относительно подгруппы Γ_n равна

$$v_{\Gamma_n} = \frac{\pi^2}{3} n^2 \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

где произведение берется по всем простым делителям p числа n.

Наконец, отметим еще подгруппы $\widehat{\Gamma}_n$ модулярной группы Γ, состоящие из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & nb \\ c & d \end{pmatrix},$$

где a, b, c, d — целые числа. Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, легко убеждаемся, что

$$\Gamma : \widehat{\Gamma}_n = n \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

где, как и раньше, произведение берется по всем простым делителям p числа n.

4. Кватернионные группы. В пп. 2 и 3 мы разобрали примеры арифметических подгрупп Γ, для которых пространство $X = \Gamma | G$ имеет конечный объем, но не компактно. В этом пункте будет построен еще один класс арифметических подгрупп группы G — так называемые кватернионные группы. Будет доказано, что для этих групп пространство $X = \Gamma \setminus G$ является компактным. Кватернионные группы мы построим на основании некоторых алгебраических соображений.

Вначале опишем один класс алгебр над полем рациональных чисел.

Рассмотрим алгебру A над полем рациональных чисел с базисом $1, \alpha, \beta, \gamma$, где 1 обозначает единицу алгебры, а α, β и γ связаны соотношениями

$$\gamma = \alpha\beta = -\beta\alpha, \quad \alpha^2 = a, \quad \beta^2 = b, \tag{1}$$

где a и b — целые положительные числа. Таким образом, произвольный элемент алгебры A имеет вид

$$x = x_0 + x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma, \tag{2}$$

где x_0, x_1, x_2, x_3 — рациональные числа.

В случае, когда A является алгеброй с делением, ее часто называют алгеброй *обобщенных кватернионов* или просто алгеброй кватернионов. Мы также воспользуемся здесь этой терминологией.

Вначале покажем, что каждому элементу x алгебры A можно взаимно однозначно сопоставить вещественную матрицу g_x, так, что

$$g_x + g_y = g_{x+y}, \quad g_{xy} = g_x g_y. \tag{3}$$

В самом деле, положим

$$g_x = \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2\sqrt{b} + x_3\sqrt{ab} \\ x_2\sqrt{b} - x_3\sqrt{ab} & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Проверка соотношений (3) предоставляется читателю.

Определитель матрицы g_x равен

$$x_0^2 - x_1^2 a - x_2^2 b + x_3^2 ab. \tag{5}$$

Выражение (5) принято называть **нормой** элемента x и обозначать через $N(x)$. Очевидно, что

$$N(xy) = N(x)\,N(y), \qquad N(1) = 1.$$

Роль нормы $N(x)$ видна из следующей теоремы. *Если $N(x) = 0$ только при $x = 0$, то алгебра A является алгеброй с делением. Обратно, если A — алгебра с делением, то $N(x) = 0$ только при $x = 0$.*

Доказательство. Пусть $N(x) \neq 0$. Тогда элемент

$$x^{-1} = \frac{1}{N(x)}(x_0 - x_1\alpha - x_2\beta - x_3\gamma)$$

является, как легко видеть, элементом, обратным к x. Обратно, если A — алгебра с делением, то $N(x)\,N(x^{-1}) = 1$ и, значит, $N(x) \neq 0$.

Приведем пример алгебры с делением. Пусть b — простое число, a — произвольное число, не являющееся квадратичным вычетом по $\operatorname{mod} b$ (т. е. сравнение $x^2 \equiv a \pmod b$ не имеет решения в целых числах). Покажем, что тогда алгебра A, определенная соотношением (1), является алгеброй с делением.

В самом деле, в противном случае существовал бы элемент $x \neq 0$ алгебры A с нормой

$$x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 = 0. \tag{6}$$

Не нарушая общности, можно считать, что x_0, x_1, x_2, x_3 — целые числа, не имеющие общего делителя. Из равенства (6) следует, что $x_0^2 \equiv ax_1^2 \pmod b$; следовательно, поскольку a — квадратичный невычет по $\operatorname{mod} b$, целые числа x_0, x_1 должны делиться на b. Но тогда снова из равенства (6) следует, что $x_2^2 \equiv ax_3^2 \pmod b$, а потому x_2 и x_3 также делятся на b. Это противоречит предположению, что числа x_0, x_1, x_2, x_3 не имеют общего делителя.

Перейдем к определению кватернионной группы. Пусть A — кватернионная алгебра с делением. Рассмотрим совокупность Γ матриц g_x с определителем 1, у которых x_0, x_1, x_2, x_3 — целые числа. Очевидно, что Γ является группой. Покажем, что группа Γ дискретна.

Для этого достаточно указать окрестность единицы в группе G всех вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка, в которой нет элементов группы Γ, отличных от единицы. Такой окрестностью, например, является совокупность матриц вида

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$|g_{11}-1|<\frac{1}{2}, \quad |g_{12}|<\frac{1}{2}, \quad |g_{21}|<\frac{1}{2}, \quad |g_{22}-1|<\frac{1}{2}.$$

В самом деле, предположим, что в этой окрестности лежит матрица $g_x\in\Gamma$, т. е. матрица с элементами $g_{11}=x_0+x_1\sqrt{a}$, $g_{12}=x_2\sqrt{b}+x_3\sqrt{ab}$, $g_{21}=x_2\sqrt{b}-x_3\sqrt{ab}$, $g_{22}=x_0-x_1\sqrt{a}$, где x_0, x_1, x_2, x_3 — целые числа. Из неравенств следует, что $|g_{11}+g_{22}-2|<1$, $|g_{12}+g_{21}|<1$, т. е. $|2x_0-2|<1$, $|2x_2\sqrt{b}|<1$. Следовательно, $x_0=1$, $x_2=0$. Далее, из неравенств $|g_{11}-1|<\frac{1}{2}$, $|g_{12}|<\frac{1}{2}$ получаем, что $x_1=x_3=0$. Таким образом, g_x — единичная матрица.

Мы покажем, что *фактор-пространство* $\Gamma\setminus G$ *компактно*. Вначале покажем, что для каждой матрицы g с определителем 1 существует матрица g_x с целыми x_0, x_1, x_2, x_3, но не обязательно с определителем 1 такая, что g_xg принадлежит некоторой фиксированной компактной области.

Заметим, что при фиксированной матрице g элементы матрицы g_xg являются линейными формами l_{ij} от x_0, x_1, x_2, x_3. Нетрудно подсчитать определитель этой системы линейных форм. Он равен $4ab$. Следовательно, по лемме Минковского существуют такие числа x_0, x_1, x_2, x_3, не все равные нулю, что $|l_{ij}|\leqslant c_{ij}$, где c_{ij} — произвольно выбранные положительные константы, произведение которых равно $4ab$ *).

Обозначим через F совокупность вещественных матриц g, для которых $|g_{ij}|\leqslant c_{ij}$. Мы доказали, что для любой вещественной матрицы g с определителем, равным 1, существует матрица g_x, где x — целый кватернион, такая, что $g_xg\in F$.

Само множество F еще не компактно. Однако мы сейчас покажем, что g_xg принадлежит фактически некоторому компактному подмножеству множества F.

---

*) Формулировка и доказательство леммы Минковского приведены в конце этого Добавления на стр. 164.

Нужное нам утверждение получается, если применить лемму Минковского к параллелепипеду $|l_{ij}|\leqslant c_{ij}$, $i, j=1, 2$, в четырехмерном пространстве.

Мы имеем $\det(g_x g) = \det g_x = N(x)$. Воспользуемся тем, что A — алгебра с делением, и значит, $\det g_x = N(x) \neq 0$. Так как, кроме того, $N(x)$ — целое число, то $\det(g_x g)$ есть целое число, отличное от нуля. Обозначим через F_m, $m \neq 0$, совокупность элементов $g \in F$ с определителем, равным m. Ясно, что F_m компактно и что при достаточно большом $|m|$ множество F_m пусто. По доказанному, $g_x g$ принадлежит объединению множеств F_m, $m \neq 0$, т. е. принадлежит компактному множеству.

Итак, доказано, что для каждой унимодулярной матрицы g существует целочисленная, но не обязательно унимодулярная матрица g_x, такая, что $g_x g$ принадлежит компактному множеству.

Для завершения доказательства компактности $\Gamma \diagdown G$ остается доказать следующую лемму.

Лемма. *Условимся называть целые кватернионы x и y эквивалентными, если xy^{-1} — целый кватернион с нормой, равной 1. Тогда совокупность целых кватернионов с нормой m состоит из конечного числа классов эквивалентных кватернионов.*

Доказательство. Каждому целому кватерниону x $(N(x) = m)$ сопоставим матрицу a_x четвертого порядка, являющуюся матрицей преобразования $y \to yx$, записанного в базисе (1). Легко убедиться, что a_x является целочисленной матрицей с определителем m^2.

Известно, что среди целочисленных матриц порядка n с заданным значением определителя Δ существует конечное число матриц $a_1, \ldots a_p$ таких, что любая матрица с определителем Δ имеет вид $a_k \alpha$, где α — некоторая унимодулярная целочисленная матрица *). Таким образом, среди

*) Это вытекает из следующего легко проверяемого утверждения. Любую целочисленную невырожденную матрицу a можно умножением на подходящую целочисленную унимодулярную матрицу α привести к следующему виду:

$$a\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $|a_{ij}| < |a_{ii}|$ при $j < i$; $i, j = 1, \ldots, n$.

матриц $a_{x_i}(N(x)=m)$ существуют матрицы $a_x(N(x)=m)$ такие, что любая матрица $a_{x_i}(N(x)=m)$ равна $a_{x_i}\alpha$, где α — целочисленная унимодулярная матрица. Так как отображение $x \to a_x$ переводит произведение кватернионов в произведение соответствующих матриц, то $\alpha = a_{x_i^{-1}x}$. Из целочисленности α следует, что кватернион $x_i^{-1}x$ является целым. Доказательство закончено.

* * *

Лемма Минковского. *Пусть задана решетка в n-мерном пространстве, т. е. совокупность точек* $(l_i, \ldots, l_n)$, $l_i = \sum_{i=1}^{n} l_{ij}n_j$, *где* l_{ij} — *фиксированные вещественные числа, а* n_j *пробегают все целые числа; предполагается, что определитель* $|l_{ij}|_{i,j=1}^{n} = \Delta$ *отличен от нуля. Тогда любое выпуклое центрально-симметричное тело с центром в точке O, имеющее объем* $v \geqslant 2^n\Delta$, *содержит по крайней мере две (симметричные относительно центра) точки этой решетки.*

Доказательство. Пусть имеется выпуклое тело U с центром в точке O, не содержащее никаких других точек решетки, кроме точки O. Уменьшим это тело линейно вдвое, применив преобразование подобия с центром в точке O, полученное тело обозначим через U_0. Построим тела, равные U_0 и расположенные параллельно U_0 вокруг всех точек нашей решетки как центров. Покажем, что построенные тела не имеют общих точек.

В самом деле, предположим, что два таких тела U_A, U_B с центрами соответственно в точках A и B решетки имеют общую

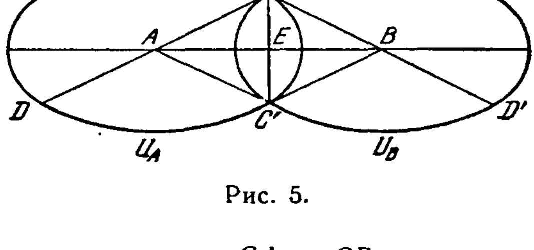

Рис. 5.

точку C. Проведем прямые CA и CB и построим параллелограмм $CAC'B$ (рис. 5). Пусть D — точка, симметричная C относительно точки A. Эта точка принадлежит телу U_A (поскольку A является центром симметрии тела U_A, но тогда, поскольку тела U_A

и U_B равны и параллельно расположены, точка C' должна принадлежать телу U. Поскольку тело U_B выпукло, то середина E отрезка CC' также принадлежит U_B. Аналогично убеждаемся, что точка E принадлежит и телу U_A. Итак, доказано, что если два тела с центрами в точках решетки A и B имеют хотя бы одну общую точку, то середина отрезка AB также является их общей точкой. Но это противоречит предположению, что исходное тело U не содержит никаких точек решетки, кроме своего центра.

Поскольку построенные тела с центрами в точках решетки не пересекаются, то, как нетрудно убедиться, объемы их меньше объема Δ основного параллелепипеда решетки. Но тогда объем исходного тела U меньше, чем $2^n V$.

Итак, если выпуклое тело с центром в O не содержит никаких точек решетки, кроме точки O, то его объем меньше, чем $2^n\Delta$, где Δ — объем основного параллелепипеда решетки. Следовательно, если выпуклое тело U с центром в O имеет объем $v \geqslant 2^n\Delta$, то оно обязательно содержит, кроме O, еще по крайней мере две точки решетки.

ГЛАВА II

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ 2-го ПОРЯДКА С ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ НЕПРЕРЫВНОГО ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОГО ПОЛЯ

В этой главе изучаются представления группы G унимодулярных матриц 2-го порядка с элементами из непрерывного локально компактного поля K. Полное описание всех таких полей хорошо известно (см. § 1).

В §§ 3 и 4 строятся неприводимые унитарные представления группы G.

Операторы представлений $T(g)$ будут задаваться своими ядрами, являющимися обобщенными функциями. Спрашивается, каков запас функций, из которых составлены эти ядра.

Основную роль играют два типа функций на локально компактном поле — аддитивные характеры, являющиеся обобщением показательной функции и мультипликативные характеры, являющиеся обобщением степенной функции.

Аддитивным характером на поле K называется непрерывная комплекснозначная функция $\chi(x)$, удовлетворяющая условию

$$\chi(x+y)=\chi(x)\chi(y)$$

для любых элементов x и y из K.

В случае поля вещественных чисел эти функции имеют вид $\chi(x)=e^{\alpha x}$, где α — комплексное число; в случае поля комплексных чисел $z=x+iy$ они имеют вид $\chi(z)=e^{\alpha x+\beta y}$, где α, β — комплексные числа.

Мультипликативным характером на K называется непрерывная комплекснозначная функция $\pi(x)$ на $K\setminus 0$, удовлетворяющая условию

$$\pi(xy)=\pi(x)\pi(y)$$

для любых элементов $x \neq 0$, $y \neq 0$ из K. В случае поля вещественных чисел эти функции имеют вид $\pi(x) = |x|^{\alpha}$, либо вид $\pi(x) = |x|^{\alpha} \operatorname{sign} x$, где α — любое комплексное число; в случае поля комплексных чисел $z = re^{i\varphi}$ они имеют вид $\pi(z) = r^{\alpha} e^{in\varphi}$, где α — комплексное, n — целое число.

Все богатство функций, нужных в теории представлений (Г-функция, В-функция, функции Бесселя, гипергеометрическая функция), составляется из аддитивных и мультипликативных характеров рациональными преобразованиями независимых переменных и интегрированием по параметрам. В частности, мы увидим в § 3, что ядра операторов неприводимых унитарных представлений группы G выражаются через функции Бесселя, либо, после перехода к другому базису в пространстве представления, через гипергеометрическую функцию.

У группы G имеется несколько серий неприводимых унитарных представлений. Одна из этих серий («непрерывная серия») связана с основным полем K; каждая из остальных («дискретных») серий связана с некоторым квадратичным расширением поля K. Таким образом, если K — поле комплексных чисел, то серия только одна (так как поле комплексных чисел не может быть расширено), если K — поле вещественных чисел, то имеется две серии представлений (так как у поля вещественных чисел имеется одно квадратичное расширение), если K — несвязное поле, то имеется четыре серии представлений (так как у несвязного поля имеется три квадратичных расширения) *).

Внутри каждой серии представление задается некоторым мультипликативным характером. Именно, представление непрерывной серии задается мультипликативным характером π на K, при этом характерам π и π^{-1} отвечают эквивалентные представления. Представление дискретной серии, отвечающей квадратичному расширению $K(\sqrt{\tau})$ поля K, задается характером на «единичной окружности» в $K(\sqrt{\tau})$, т. е. на мультипликативной группе элементов $t = x + \sqrt{\tau}\, y$, для которых $t\bar{t} \equiv x^2 - \tau y^2 = 1$. При этом характерам π и π^{-1} снова отвечают эквивалентные представления.

---

*) За исключением некоторых особых случаев, когда число квадратичных расширений поля K больше трех (см. § 1).

Таким образом, имеется полная двойственность между неприводимыми представлениями группы G и «картановскими подгруппами» группы G: каждое неприводимое представление группы G задается характером на одной из картановских подгрупп.

Отметим, что при построении представлений дискретной серии наблюдается следующий интересный факт: эти представления реализуются не в пространстве всех функций, на K, а в пространстве функций, граничных к аналитическим функциям. (В случае несвязного поля понятия (комплекснозначной) аналитической функции не существует. Тем не менее можно естественно определить понятие функции, «граничной к функции, аналитической в верхней полуплоскости», см. § 2, п. 8.)

В § 5 будут вычислены следы (характеры) неприводимых представлений. Для них будет получена единая формула, не зависящая от структуры поля K. Именно, мы увидим, что след представления непрерывной серии, отвечающего характеру $\pi(t)$, выражается следующей формулой:

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g) = \int_K \delta\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right)\pi(t)\,|t|^{-1}\,dt,$$

где λ_g, λ_g^{-1} — собственные значения матрицы g, а $\delta(t)$ — дельта-функция.

Представления «дискретной» серии, отвечающей квадратичному расширению $K(\sqrt{\tau})$ поля K, удобно объединять в пары. При этом оказывается, что след суммы родственных представлений дискретной серии выражается следующей формулой:

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g) = 2\int_{t\bar{t}=1} \frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right)}{\left|\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right|}\,\pi(t)\,d^*t.$$

Смысл обозначений $|t|$ и $\operatorname{sign}_\tau t$ в случае несвязного поля K будет разъяснен в § 1.

В § 6 будет получена формула Планшереля, дающая разложение регулярного представления группы G на представления непрерывной и дискретной серий. Именно, отнесем каждому из представлений $T_\pi(g)$ этих серий оператор

$$T_\pi(f) = \int f(g)\,T_\pi(g)\,dg,$$

где f — функция на G с интегрируемым квадратом. Тогда имеют место формула обращения

$$f(g) = \int \mu(\pi)\operatorname{Tr}\left(T_\pi(f)\, T_\pi^{-1}(g)\right) d\pi$$

и формула Планшереля

$$\int |f(g)|^2 dg = \int \mu(\pi)\operatorname{Tr}\left(T_\pi(f)\, T_\pi^*(f)\right) d\pi.$$

Будет доказано, что входящая в эти формулы «мера Планшереля» $\mu(\pi)$ может быть задана следующей единой формулой:

$$\mu(\pi) = c\int \pi(t)\,|1-t|^{-2}\,dt.$$

Здесь в случае представлений непрерывной серии интегрирование ведется по K, а в случае представлений дискретной серии, отвечающей квадратичному расширению $K(\sqrt{\tau})$ поля K, — по единичной окружности $t\bar{t} \equiv x^2 - \tau y^2 = 1$. Интеграл следует всегда понимать в смысле регуляризованного значения.

Этот интеграл может быть без труда вычислен в случае, когда K — поле комплексных или вещественных чисел.

Для поля комплексных чисел мы получаем

$$\mu(\pi) = c(\rho^2 + n^2), \quad \text{где} \quad \pi(re^{i\varphi}) = r^{i\rho}e^{in\varphi}.$$

Для поля вещественных чисел имеем: в случае представлений непрерывной серии

$$\mu(\pi) = c\rho \operatorname{th}\frac{\pi\rho}{2}, \quad \text{когда} \quad \pi(x) = |x|^{i\rho},$$

$$\mu(\pi) = c\rho \operatorname{cth}\frac{\pi\rho}{2}, \quad \text{когда} \quad \pi(x) = |x|^{i\rho}\operatorname{sign} x;$$

в случае представлений дискретной серии

$$\mu(\pi) = c\,|n|, \quad \text{когда} \quad \pi(t) = t^n, \quad |t| = 1.$$

§ 1. Строение локально компактных полей

В этом параграфе излагаются в основном хорошо известные результаты о строении локально компактных полей. Часть результатов только формулируется. Их подробное доказательство можно найти, например, в [1] (см. также [59]).

1. Классификация локально компактных полей. Мы будем рассматривать только непрерывные поля (т. е. поля с недискретной топологией) *). Приведем классические примеры локально компактных непрерывных полей.

1. Поле R вещественных чисел.
2. Поле C комплексных чисел.
3. Поле Q_p p-адических чисел, где p — любое простое число. Напомним определение поля Q_p.

Элементами поля Q_p являются формальные степенные ряды

$$x=\sum_{i=k}^{+\infty} a_i p^i, \tag{1}$$

где k — любое целое (положительное или отрицательное) число, а a_i — целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant a_i < p$. Таким образом, ряды (1) могут содержать любое конечное число членов с целыми отрицательными степенями. Суммой двух p-адических чисел $x=\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i$ и $y=\sum_{i=l}^{\infty} b_i p^i$ называется p-адическое число $z=\sum_{i=m}^{\infty} c_i p^i$, $m=\min(k, l)$, такое, что

$$\sum_{i=k}^{n} a_i p^i+\sum_{i=l}^{n} b_i p^i \equiv \sum_{i=m}^{n} c_i p^i \pmod{p^{n+1}} \tag{2}$$

для любого целого положительного числа n. (Очевидно, что из соотношения (2) коэффициенты c_i могут быть последовательно найдены.) Аналогично определяется произведение p-адических чисел. Окрестностью p-адического числа $x=\sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i$ называется совокупность U_n p-адических чисел $y=\sum_{i=k}^{\infty} b_i p^i$, у которых $b_i=a_i$ при $i \leqslant n$. Нетрудно убедиться, что относительно этой топологии Q_p является локально компактным пространством и что операции сложения и умножения непрерывны в этой топологии.

---

*) Тем самым мы не рассматриваем здесь поля рациональных чисел.

Отметим, что поле Q_p можно получить, пополняя поле рациональных чисел относительно подходяще введенной топологии.

Именно, пусть $n(r)$ — степень, в которой простое число p входит сомножителем в рациональное число r. Число $p^{-n(r)}$ назовем p-нормой числа r. Последовательность рациональных чисел называется фундаментальной, если она фундаментальна в смысле p-нормы.

Таким образом, Q_p содержит поле рациональных чисел в качестве всюду плотного подмножества.

4. Поле $K_p(t)$ степенных рядов над полем вычетов по модулю p (p — любое простое число). По определению, элементами поля $K_p(t)$ являются степенные ряды

$$x = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i,$$

которые могут содержать конечное число членов с отрицательными степенями t; коэффициенты этих рядов принадлежат полю вычетов по модулю p. Сложение и умножение двух степенных рядов определяется естественным образом. Окрестностью степенного ряда $x = \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i t^i$ называется совокупность степенных рядов, у которых все коэффициенты до некоторого фиксированного номера совпадают с a_i.

Теперь приведем описание всех локально компактных (недискретных) полей (теорема Ковальского — Понтрягина).

Полем R вещественных чисел и полем C комплексных чисел исчерпываются все связные локально компактные поля.

Всякое несвязное локально компактное поле характеристики 0 *является конечным расширением поля Q_p p-адических чисел.*

Всякое локально компактное поле характеристики $p \neq 0$ является конечным расширением поля $K_p(t)$ степенных рядов над полем вычетов по модулю p.

Для полей характеристики $p \neq 0$ можно сформулировать и более сильный результат. *Любое локально компактное поле характеристики $p \neq 0$ изоморфно полю степенных рядов*

$$x = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i,$$

коэффициенты которых принадлежат некоторому конечному полю характеристики p. Алгебраические операции и топология в этом поле определяются так же, как и в случае поля $K_p(t)$.

2. Норма в K. Введем для произвольного локально компактного поля K понятие нормы. Для этого рассмотрим меру dx на K, инвариантную относительно сложения:

$$d(x+a) = dx$$

для любого a из K. Известно, что такая мера определена на K однозначно, с точностью до постоянного множителя.

Пусть x_0 — произвольный элемент из K. Легко видеть, что мера $d_{x_0}x = d(xx_0)$ также инвариантна относительно сложения, а потому она отличается от dx только множителем, зависящим от x_0. Обозначим этот множитель через $|x_0|$:

$$d_{x_0}x = |x_0|\, dx.$$

Тем самым мы ввели в поле K непрерывную функцию $|x|$. Очевидно, что функция $|x|$ обладает следующими свойствами:

1) $|x| > 0$ при $x \neq 0$; $|0| = 0$,

2) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

Можно показать, что в случае несвязного поля K выполняется также следующее свойство:

3) $|x+y| \leqslant \max(|x|, |y|)$.

Функцию $|x|$ назовем *нормой* в K элемента x.

Очевидно, что в случае поля вещественных чисел, $|x|$ равно абсолютной величине числа x; в случае поля комплексных чисел $|x|$ есть квадрат модуля числа x.

Выясним, какие значения может принимать $|x|$, $x \neq 0$. Для этого заметим, что отображение

$$x \to |x|$$

есть непрерывный гомоморфизм мультипликативной группы поля K в мультипликативную группу вещественных положительных чисел. Отсюда легко следует, что *в случае связного поля $|x|$ ($x \neq 0$) пробегает все вещественные положительные числа; в случае же несвязного поля $|x|$ ($x \neq 0$) пробегает дискретное множество значений q^n, где q — фиксированное число, а $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$*

Из сформулированного результата следует, что в несвязном поле K множество точек x, для которых $|x| = c$, $c > 0$, и множество точек x, для которых $|x| < c$, $c > 0$, оба открыты в K.

Можно показать, что множества точек x несвязного поля K, для которых $|x| < c$ (где c пробегает положительные числа), образуют полную систему окрестностей нулевого элемента. Таким образом, *топология в несвязном поле K полностью определяется заданием нормы в K.* (Для связных полей последний результат очевиден.)

3. Структура несвязных полей. Используя понятие нормы, опишем детальнее структуру несвязных полей. Пусть K — несвязное поле с нормой $|x|$. Тогда имеют место следующие факты:

1) Множество O элементов из K, для которых $|x| \leqslant 1$, компактно и открыто в K. Очевидно, что O является подкольцом. Элементы из O называют *целыми* элементами поля K.

2) Совокупность элементов x из O, для которых $|x| < 1$ образуют простой идеал P кольца O. Поле вычетов $\mathscr{K} = O/P$ состоит из конечного числа q элементов (это число q есть всегда степень некоторого простого числа).

3) Простой идеал P является главным, т. е. в P существует такой элемент $\mathfrak{p}$, что $P = \mathfrak{p}O$. Норма элемента $\mathfrak{p}$ задается формулой

$$|\mathfrak{p}| = q^{-1},$$

где q — порядок поля вычетов O/P.

Примеры: 1) K — поле p-адических чисел. В этом случае кольцо O состоит из элементов вида $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$, а его простой идеал P — из элементов вида $\sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i$. Очевидно, что идеал P порождается числом p. При этом имеем $|p| = p^{-1}$.

2) K — поле степенных рядов над полем вычетов по модулю p. В этом случае кольцо состоит из элементов вида $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, а его простой идеал P — из элементов вида

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$. Очевидно, что идеал P порождается элементом t. При этом имеем $|t| = p^{-1}$.

3) В мультипликативной группе поля K существует элемент ε конечного порядка $q-1$ (q — порядок поля вычетов O/P). Очевидно, что $|\varepsilon| = 1$, т. е. ε принадлежит O, но не принадлежит P. Элементы $0, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{q-1} = 1$ образуют полный набор представителей классов вычетов O/P.

4) Любой элемент поля K однозначно представим в виде сходящегося ряда

$$x = \mathfrak{p}^n (a_0 + a_1\mathfrak{p} + a_2\mathfrak{p}^2 + \ldots), \quad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

где $\mathfrak{p}$ — образующий элемент идеала P *), n — целое число, а коэффициенты a_i могут принимать значения $0, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon^{q-1} = 1$.

4. Аддитивные и мультипликативные характеры поля K. Как алгебраический объект поле K выступает в двух планах: оно есть группа по сложению, в то же время множество элементов из K, отличных от 0, образует группу по умножению. В дальнейшем будем через K^+ обозначать аддитивную группу поля K, а через K^* его мультипликативную группу. Важнейшими функциями в K являются аддитивные и мультипликативные характеры поля K. Позже мы увидим, что на базе этих функций строится теория представлений групп, и в частности теория специальных функций.

Аддитивным характером поля K будем называть характер группы K^+, т. е. непрерывную комплекснозначную функцию $\chi(x)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ для любых элементов x, y из K;

2) $|\chi(x)| = 1$.

---

*) Таким образом, $\mathfrak{p} = p$ в случае поля Q_p p-адических чисел; в случае же поля $K_q(t)$ степенных рядов над конечным полем имеем $\mathfrak{p} = t$ (см. примеры выше).

Подчеркнем, что в случае поля Q_p представление (1) не эквивалентно обычному представлению p-адического числа в виде ряда (см. п. 1). Там коэффициенты a_i были целыми числами, $0 \leqslant a_i < p$, здесь они являются целыми p-адическими числами такими, что либо $a_i^{p-1} = 1$, либо $a_i = 0$.

Мультипликативным характером поля K назовем характер ее группы по умножению K^*, т. е. непрерывную комплекснозначную функцию $\pi(x)$ на K, удовлетворяющую условиям:

1) $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ для любых элементов x и y из K^*;
2) $|\pi(x)| = 1$.

Аддитивные и мультипликативные характеры сами образуют топологические группы. Опишем эти группы характеров.

Известно, что *группа аддитивных характеров непрерывного локально компактного поля K изоморфна его аддитивной группе K^+* *). Этот изоморфизм осуществляется следующим образом. Пусть $\chi(x) \not\equiv 1$ — фиксированный нетривиальный аддитивный характер. Тогда можно показать, что любой характер на K^+ имеет вид

$$\chi_u(x) = \chi(ux),$$

где u — некоторый элемент из K. Соответствие $u \to \chi_u(x)$ и задает искомый изоморфизм групп K^+ и ее группы характеров.

Заметим, что в случае поля Q_p p-адических чисел любой характер $\chi(ux)$ можно записать в явном виде

$$\chi(ux) = e^{2\pi iux}.$$

Выражение $e^{2\pi iux}$ имеет следующий смысл. Поскольку $e^{2\pi in} = 1$ для любого целого n, то целую часть p-адического числа ux мы вправе в показателе отбросить. Такая запись характеров уже не годится, однако, для расширений поля Q_p.

Переходим к описанию мультипликативной группы K^* поля K и ее группы характеров.

Согласно п. 3 (утверждение 5) любой элемент поля представим в виде

$$x = \mathfrak{p}^n \varepsilon^k (1 + a_1\mathfrak{p} + a_2\mathfrak{p}^2 + \ldots), \tag{1}$$

где $\mathfrak{p}$ — образующий элемент простого идеала P (в кольце целых элементов O), а a_i принимают значения 0 либо ε^l ($\varepsilon^{q-1} = 1$). Элементы $\mathfrak{p}^n$ образуют бесконечную циклическую подгруппу группы K^*, а элементы ε^k — конечную подгруппу

*) Если поле K дискретно, то группа аддитивных характеров компактна, а потому не изоморфна K^+.

порядка $q-1$. Очевидно, что элементы $1+a_1\mathfrak{p}+a_2\mathfrak{p}^2+\ldots$ также образуют подгруппу группы K^*, причем эта подгруппа компактна. Заметим, что подгруппа элементов $1+a_1\mathfrak{p}+a_2\mathfrak{p}^2+\ldots$ удобно описывается в терминах нормы: элементы $x=1+a_1\mathfrak{p}+a_2\mathfrak{p}^2+\ldots$ это те и только те элементы поля K, для которых $|x-1|<1$.

Итак, *мультипликативная группа K^* поля K есть прямое произведение*

$$K^*=Z\times Z_{q-1}\times A$$

трех групп: бесконечной циклической группы Z элементов $\mathfrak{p}^n$, конечной циклической группы Z_{q-1} порядка $q-1$ элементов ε^k и компактной группы A элементов x, для которых $|x-1|<1$.

Отсюда можно сделать заключение и о строении группы мультипликативных характеров поля K. *Группа мультипликативных характеров поля K есть прямое произведение трех групп: группы вращений окружности, циклической группы порядка $q-1$ и некоторой бесконечной дискретной группы (группа, двойственная A).* Таким образом, любой мультипликативный характер $\pi(x)$ задается тремя величинами: вещественным числом ρ, определенным по модулю 1, целым числом α, определенным по модулю $q-1$, и характером $\theta(a)$ подгруппы A. Он выражается следующей формулой: если

$$x=\mathfrak{p}^n\varepsilon^k a, \tag{2}$$

где a принадлежит A, то

$$\pi(x)=e^{2\pi in\rho}e^{2\pi i\frac{\alpha k}{q-1}}\theta(a). \tag{3}$$

В дальнейшем мы будем также рассматривать и неунитарные характеры $\pi(x)$, т. е. непрерывные функции, удовлетворяющие только условию

$$\pi(xy)=\pi(x)\,\pi(y).$$

Нетрудно убедиться, что любой такой характер $\pi(x)$ по-прежнему задается формулой (3), в которой ρ может быть уже любым комплексным числом.

5. Структура подгруппы A. Функции $\exp x$ и $\ln x$. В этом пункте мы рассмотрим несвязное поле K характеристики 0. Наша цель — изучить подробнее структуру мультипликативной группы A элементов x таких, что $|x-1|<1$. Будет показано, что при некоторых дополнительных ограничениях на поле K эта подгруппа изоморфна аддитивной группе P элементов x, для которых $|x|<1$.

Изоморфизм $A\cong P$ будет установлен с помощью функций $\exp x$ и $\ln x$. Эти функции мы определим как суммы степенных рядов:

$$\exp x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots,$$

$$\ln x = x-\frac{x^2}{2}+\ldots$$

Установим, для каких x эти ряды сходятся.

Заметим, что поле K является конечным расширением поля Q_p p-адических чисел. Простое число p однозначно определяется полем K: это — единственное простое число, норма которого $|p|<1$; нормы всех других простых чисел равны 1.

Покажем, что *ряд* $\exp x$ *сходится тогда и только тогда, когда* $|x|<|p|^{\frac{1}{p-1}}$.

Для доказательства оценим сначала $|n!|$. Пусть $p^k\leqslant n<p^{k+1}$. Тогда, как легко проверить, что степень, в которой входит p сомножителем в число $n!$, есть *)

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Следовательно,

$$|n!|=|p|^{\left[\frac{n}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]},$$

а потому

$$|n!|\geqslant|p|^{n\frac{1-p^{-k}}{p-1}}. \qquad (1)$$

Предположим, что $|x|<|p|^{\frac{1}{p-1}}$, т. е. $|x|=|p|^{\frac{1+\varepsilon}{p-1}}$, где $\varepsilon>0$. Тогда на основании оценки для $|n!|$ получаем

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|\leqslant|p|^{n\frac{\varepsilon+p^{-k}}{p-1}}. \qquad (2)$$

Из этой оценки непосредственно следует сходимость ряда $\exp x$ при $|x|<|p|^{\frac{1}{p-1}}$.

*) Символ $[a]$ обозначает целую часть числа a.

С другой стороны, пусть $|x| \geqslant |p|^{\frac{1}{p-1}}$. Тогда для $n = p^k$ имеем

$$|n!| = |p|^{n\frac{1-p^{-k}}{p-1}},$$

а потому

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \geqslant |p|^{\frac{p^{-k}}{p-1}}.$$

Из этой оценки видно, что в случае $|x| \geqslant |p|^{\frac{1}{p-1}}$ ряд $\exp x$ расходится.

Пусть x *принадлежит области сходимости ряда* $\exp x$, *т. е.* $|x| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$. *Тогда*

$$|\exp x - 1 - x| < |x|. \tag{3}$$

В самом деле, из оценки (2) имеем, поскольку $n \geqslant p^k$,

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leqslant |x|\,|p|^{\frac{(n-1)\varepsilon}{p-1}}.$$

Следовательно, $\left|\frac{x^n}{n!}\right| < |x|$ при $n \geqslant 2$. Отсюда непосредственно следует (3).

Ряд для $\ln(1+x)$ *сходится тогда и только тогда, когда* $|x| < 1$.

Если $|1-y| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, *то* $|\ln y| = |1-y|$.

Проверку этих утверждений мы предоставляем читателю.

Без труда доказывается, что функции $\exp x$ и $\ln x$ обладают обычными свойствами: $\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \exp x_2$, $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$ (при условии, что элементы x_1, x_2 лежат в области определения соответствующей функции).

Функция $y = \exp x$ *осуществляет изоморфное отображение аддитивной группы* B *элементов* x, *для которых* $|x| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$ *на мультипликативную группу* A_1 *элементов* y, *для которых* $|1-y| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$. *Обратный изоморфизм задается функцией* $x = \ln y$.

В самом деле, пусть $x \in B$. Тогда для x сходится ряд $y = \exp x$. Из оценки (3) следует, что $|\exp x - 1| = |x|$, а потому $|1-y| < 1$. Но тогда сходится ряд $\ln y = \ln(\exp x)$. Путем формальной операции над рядами мы убеждаемся, что

$$\ln(\exp x) = x \tag{4}$$

для любого x из B,

Обратно, пусть $y \in A_1$. Тогда ряд $x = \ln y$ сходится. При этом $|\ln y| = |1 - y|$; следовательно, ряд $\exp x = \exp(\ln y)$ также сходится. Путем формальной операции над рядами убеждаемся, что

$$\exp(\ln y) = y \tag{5}$$

для любого y из A_1.

Из (4), (5) вытекает, что функция $y = \exp x$ осуществляет взаимно однозначное отображение B на A_1. Изоморфизм этого отображения следует из соотношения $\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \exp x_2$.

Выясним, при каком условии подгруппа A_1 совпадает с мультипликативной группой A всех элементов x поля, для которых $|1 - x| < 1$.

Пусть O — кольцо целых элементов в K, P — максимальный идеал в O, $\mathfrak{p}$ — образующий элемент идеала P, $q^{-1} = |\mathfrak{p}|$ — его норма.

Очевидно, что A состоит из тех и только тех элементов x, для которых $|1 - x| \leqslant q^{-1}$, причем равенство может также иметь место. Следовательно, условие, что $A = A_1$ записывается в виде

$$q^{-1} < |p|^{\frac{1}{p-1}}. \tag{6}$$

Пусть $|p| = q^{-(s-1)}$. Это означает, что p принадлежит P^{s-1}, но не принадлежит P^s. Тогда условие (6) перепишется в виде $q^{-1} < q^{-\frac{s-1}{p-1}}$. Отсюда получаем условие на s: $s < p$.

Сформулируем окончательный результат. *Пусть K — несвязное поле характеристики 0, O — подкольцо целых чисел из K, P — максимальный идеал в O, p — характеристика поля вычетов O/P. Предположим, что число p не принадлежит P^{p-1}. Тогда мультипликативная группа A элементов поля x, для которых $|1 - x| < 1$, оказывается изоморфной аддитивной группе P элементов y, для которых $|y| < 1$. Изоморфизм осуществляется функцией $y = \ln x$.*

В общем случае это утверждение неверно: подгруппа A может содержать элементы конечного порядка p^n; тем самым она не будет изоморфна ни одной из подгрупп аддитивной группы P (поскольку все элементы группы P имеют бесконечный порядок).

6. Квадратичные расширения несвязного поля. Пусть τ — элемент поля K, не являющийся квадратом другого элемента поля. Присоединив к K квадратный корень $\sqrt{\tau}$, мы получим квадратичное расширение $K(\sqrt{\tau})$ поля K. Элементы поля $K(\sqrt{\tau})$ имеют вид $z = x + \sqrt{\tau}\, y$, где x, y принадлежат K. Сложение и умножение таких элементов производится обычным образом. Выясним, сколько имеется различных квадратичных расширений у несвязного поля K.

Очевидно, что два квадратичных расширения $K(\sqrt{x})$ и $K(\sqrt{y})$ поля K совпадают тогда и только тогда, когда отношение xy^{-1} есть квадрат в K. Иными словами, квадратичных расширений поля K столько же, сколько имеется неединичных классов смежности мультипликативной группы K^* по подгруппе всех квадратов $(K^*)^2$.

Найдем индекс $K^*:(K^*)^2$ подгруппы $(K^*)^2$. Мы знаем из п. 4, что K^* есть прямое произведение

$$K^* = Z \times Z_{q-1} \times A$$

бесконечной циклической группы Z, конечной циклической группы Z_{q-1} порядка $q-1$ и подгруппы A элементов x из K, для которых $|x-1|<1$. Поэтому $K^*:(K^*)^2 = (Z:Z^2)\times \times (Z_{q-1}:Z_{q-1}^2)\cdot(A:A^2)$, где Z^2, Z_{q-1}^2, A^2 — подгруппы, состоящие из квадратов элементов соответствующих групп.

Будем дальше предполагать, что q — нечетное число, т. е. поле вычетов O/P имеет характеристику $p \neq 2$. В этом случае Z_{q-1} — циклическая группа четного порядка, а потому $Z_{q-1}:Z_{q-1}^2 = 2$. Далее, имеем $Z:Z^2 = 2$.

Покажем, наконец, что $A = A^2$, т. е. что для любого $a \in A$ уравнение $x^2 = a$ имеет решение в A. В самом деле, пусть $a = 1 + a_1\mathfrak{p} + a_2\mathfrak{p}^2 + \ldots$. Будем искать решение x уравнения $x^2 = a$ в виде ряда $x = 1 + x_1\mathfrak{p} + x_2\mathfrak{p}^2 + \ldots$, где $x_i = 0$ или $x_i = \varepsilon^k$ (ε — элемент из O^* порядка $q-1$). Равенство $x^2 = a$ сводится к системе сравнений

$$2x_1 \equiv a_1 \pmod{P}, \quad 2x_1 + (2x_2 + x_1^2)\,\mathfrak{p} \equiv a_1 + a_2\mathfrak{p} \pmod{P^2}$$

и т. д. Очевидно, что при сделанном предположении о числе q, из этих сравнений можно последовательно найти $x_1, x_2, \ldots$

Итак, мы получаем: *если характеристика поля вычетов O/P отлична от 2, то квадраты элементов $x \neq 0$ поля K образуют подгруппу индекса 4 мультипликативной группы поля K. Тем самым имеется 3 различных квадратичных расширения поля K. Очевидно, что этими квадратичными расширениями являются $K(\sqrt{\mathfrak{p}})$, $K(\sqrt{\varepsilon\mathfrak{p}})$ и $K(\sqrt{\varepsilon})$* *).

---

*) Заметим, что случаи $\tau = \varepsilon\mathfrak{p}$ и $\tau = \mathfrak{p}$ неразличимы, поскольку элемент $\varepsilon\mathfrak{p}$ может играть роль $\mathfrak{p}$.

Этот результат неверен, когда характеристика поля O/P равна 2. Например, если само поле K — характеристики 2, то $A : A^2 = \infty$.

7. Мультипликативые характеры $\operatorname{sign}_\tau x$. Пусть K—несвязное локально компактное поле. Будем, как и раньше, предполагать, что связанное с ним конечное поле вычетов O/P имеет характеристику, отличную от 2. В этом пункте мы сопоставим каждому квадратичному расширению $K(\sqrt{\tau})$ поля K некоторый мультипликативный характер $\operatorname{sing}_\tau x$ на K, принимающий значения ± 1.

Итак, пусть $K(\sqrt{\tau})$ — какое-нибудь квадратичное расширение поля K. Рассмотрим произведения

$$z\bar{z} = x^2 - \tau y^2$$

элементов $z = x + \sqrt{\tau} y$ из $K(\sqrt{\tau})$ на элементы $\bar{z} = x - \sqrt{\tau} y$, им сопряженные *).

Множество элементов $z\bar{z}$, $z \neq 0$ образует подгруппу $\overset{*}{K_\tau}$ мультипликативной группы K^*. Очевидно, что подгруппа $(K^*)^2$ квадратов элементов из K^* содержится в $\overset{*}{K_\tau}$.

Покажем, что *индекс* $\overset{*}{K} : \overset{*}{K_\tau}$ *подгруппы* $\overset{*}{K_\tau}$ *равен* 2. Нам достаточно убедиться, что $\overset{*}{K_\tau} \neq \overset{*}{K}$ и $\overset{*}{K_\tau} \neq (\overset{*}{K})^2$. Утверждение будет тогда непосредственно следовать из того, что $K^* : (K^*)^2 = 4$ (см. п. 6).

Сначала покажем, что $\overset{*}{K_\tau} \neq (\overset{*}{K})^2$. В самом деле, если $\tau = \mathfrak{p}$ либо $\tau = \varepsilon\mathfrak{p}$, то элемент $-\tau$ не является квадратом элемента из K^*, но в то же время принадлежит $\overset{*}{K_\tau}$. Пусть теперь $\tau = \varepsilon$. Можно показать, что найдутся такие целые элементы x и y, что $x^2 - \varepsilon y^2 \equiv \varepsilon \pmod{F}$ **). Очевидно, что тогда $x^2 - \varepsilon y^2$ не является квадратом, в то время как $x^2 - \varepsilon y^2$ принадлежит $\overset{*}{K_\tau}$. Итак, доказано, что $\overset{*}{K_\tau} \neq (\overset{*}{K})^2$. Теперь покажем, что $\overset{*}{K_\tau} \neq \overset{*}{K}$. В самом деле, в случае, когда $\tau = \mathfrak{p}$

---

*) Выражение $z\bar{z}$ часто называют нормой элемента z относительно K.

**) Это вытекает из следующей теоремы. Пусть F — конечное поле, ε — элемент поля, не являющийся квадратом; тогда любой элемент поля x представим в виде $x = x_1^2 - \varepsilon x_2^2$, где $x_1, x_2 \in F$ (см. [35]).

либо $\tau = \varepsilon\mathfrak{p}$, элемент ε не принадлежит K_τ^*. В случае же $\tau = \varepsilon$ подгруппе K_τ^* не может принадлежать элемент $\mathfrak{p}$ (в противном случае выполнялось бы равенство $x^2 - \varepsilon y^2 \equiv 0 \pmod P$) для некоторых $x \not\equiv 0 \pmod P$ и $y \not\equiv 0 \pmod P$, что невозможно).

Итак, доказано, что $K_\tau^* \neq (K^*)^2$, $K_\tau^* \neq K^*$. Отсюда следует, что $K^* : K_\tau^* = 2$.

Введем теперь на группе K^* функцию $\operatorname{sign}_\tau x$. Положим

$$\operatorname{sign}_\tau x = 1,$$

когда $x \in K_\tau^*$, т. е. когда x представимо в виде $x = x_1^2 - \tau x_2^2$ и

$$\operatorname{sign}_\tau x = -1,$$

когда x не представимо в виде $x = x_1^2 - \tau x_2^2$.

Из того, что K_τ^* есть подгруппа индекса 2 в K^*, непосредственно следует: $\operatorname{sign}_\tau x$ есть характер на K^*, т. е.

$$\operatorname{sign}_\tau (xy) = \operatorname{sign}_\tau x \cdot \operatorname{sign}_\tau y$$

для любых x и y из K^*.

Условимся называть элементы x из K, в зависимости от знака $\operatorname{sign}_\tau x$, положительными или отрицательными (точнее было бы: τ-положительными или τ-отрицательными).

Можно показать, что функции $\operatorname{sign}_\tau x$, где $\tau = \mathfrak{p}$, $\varepsilon\mathfrak{p}$, ε независимы. Поэтому вместе с функцией $\pi_0(x) \equiv 1$ они образуют полную систему характеров на фактор-группе $K^*/(K^*)^2$.

8. Окружности в $K(\sqrt{\tau})$. Пусть $K(\sqrt{\tau})$ — квадратичное расширение несвязного поля K. Множество элементов z из $K(\sqrt{\tau})$, удовлетворяющих уравнению

$$z\bar{z} = c, \quad c \neq 0,$$

назовем *окружностью* в $K(\sqrt{\tau})$ (с центром в точке 0).

Заметим, что, в отличие от поля вещественных чисел, имеется два типа окружностей: окружности «вещественного» радиуса, для которых c есть квадрат элемента из K, и окружности «мнимого» радиуса, для которых c не является квадратом.

Особую роль играет окружность

$$z\bar{z} \equiv x^2 - \tau y^2 = 1.$$

Элементы этой окружности образуют группу по умножению, которую будем дальше обозначать через C_τ.

Составим параметрическое уравнение окружности

$$x^2 - \tau y^2 = 1.$$

Введем параметр $\frac{y}{x+1} = t$. Из уравнения окружности следует, что

$$\frac{x-1}{x+1} = \tau \frac{y^2}{(x+1)^2} = \tau t^2,$$

откуда

$$x = \frac{1+\tau t^2}{1-\tau t^2}, \qquad y = (x+1)\,t = \frac{2t}{1-\tau t^2}.$$

Итак, *окружность $x^2 - \tau y^2 = 1$ задается следующими параметрическими уравнениями*:

$$x = \frac{1+\tau t^2}{1-\tau t^2}, \quad y = \frac{2t}{1-\tau t^2}. \tag{1}$$

Покажем, что *все окружности компактны*.

Достаточно рассмотреть только окружность единичного радиуса, поскольку любая другая окружность состоит из точек $w = az$, где z пробегает окружность $z\bar{z} = 1$. Очевидно, что множество точек окружности $z\bar{z} = 1$ замкнуто. С другой стороны, из параметрических уравнений (1) следует, что $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$; следовательно, множество точек окружности лежит в ограниченной области, а потому оно компактно.

Изучим подробнее строение группы C_τ элементов z, $z\bar{z} = x^2 - \tau y^2 = 1$. Пусть сначала $\tau = \mathfrak{p}$ либо $\tau = \varepsilon\mathfrak{p}$. В этом случае имеем $|x^2| = 1$, $|\tau y^2| < 1$. Следовательно, $|1 - x^2| < 1$, а потому либо $|1 - x| < 1$, либо $|1 + x| < 1$. Отсюда заключаем: *в случае, когда $\tau = \mathfrak{p}$ либо $\tau = \varepsilon\mathfrak{p}$ группа C_τ есть прямое произведение*

$$C_\tau = Z_2 \times C'_\tau$$

циклической группы второго порядка $Z_2 = \{1, -1\}$ и подгруппы C'_τ элементов из C_τ, для которых $|z - 1| < 1$ *).

---

*) Норму $|z|$ на $K(\sqrt{\tau})$ мы определяем по норме $|x|$ на K следующей формулой: $|z| = |z\bar{z}|^{1/2}$.

Теперь разберем случай $\tau=\varepsilon$. Элементы окружности $z\bar{z}=1$ могут быть записаны в виде ряда

$$z=(a_0+\sqrt{\varepsilon}\,b_0)\,[1+(a_1+\sqrt{\varepsilon}\,b_1)\,\mathfrak{p}+(a_2+\sqrt{\varepsilon}\,b_2)\,\mathfrak{p}^2+\ \ldots],$$

где a_i и b_i принимают значения 0 и ε^k, $k=0, 1, \ldots, q-1$. Из условия $z\bar{z}=1$ следует, что

$$a_0^2-\varepsilon b_0^2\equiv 1 \pmod P.$$

Можно показать, что это сравнение имеет $q+1$ решение, где q — порядок поля вычетов O/P *).

Отсюда заключаем: *пусть C'_ε — подгруппа группы C_ε, состоящая из элементов z, для которых $|z-1|<1$; тогда индекс подгруппы C'_ε в группе C_ε равен $q+1$.*

9. Декартовы и полярные координаты в поле $K(\sqrt{\tau})$. Каждый элемент поля $K(\sqrt{\tau})$ однозначно представим в виде

$$z=x+\sqrt{\tau}\,y,$$

где x, $y\in K$. Тем самым он задается парой элементов x, y из K, которые мы будем называть декартовыми координатами элемента z.

Введем теперь полярные координаты точки z. Пусть $z\bar{z}=c$. Тогда возможны два случая: либо c есть квадрат элемента из K, либо c не является квадратом.

Пусть сначала $c=r^2$, $r\in K$. В этом случае полярными координатами точки z мы назовем пару элементов: элемент $\rho=r\in K$ и элемент $t=\rho^{-1}z$, принадлежащий окружности $t\bar{t}=1$. Ясно, что своими полярными координатами точка z однозначно определена.

Заметим, что элемент ρ определен с точностью до знака. Следовательно, $(-\rho, -t)$ равным образом можно рассматривать как полярные координаты точки z. Итак, полярные координаты определяются точкой z с точностью до знака.

Теперь рассмотрим случай, когда c не является квадратом. Зафиксируем в $K(\sqrt{\tau})$ какой-либо элемент ν такой, что $\nu\bar{\nu}$ не является квадратом в K. Тогда c можно предста-

*) Это вытекает из теоремы для конечных полей: уравнение $x^2-\omega y^2=1$ в конечном поле порядка q, где ω не является квадратом, имеет $q+1$ решение (утверждение теоремы непосредственно следует из параметрических уравнений окружности).

вить в виде $c=(\nu r)(\overline{\nu r})$, где $r \in K$. Полярными координатами точки z мы назовем пару элементов $\rho=\nu r$ и $t=\nu^{-1}z$, из которых второй есть снова точка единичной окружности. Как и в первом случае, имеем

$$(\rho,\ t)=(-\rho,\ -t).$$

10. Инвариантные меры в поле K и в его квадратичном расширении $K(\sqrt{\tau})$. В поле K имеются две инвариантные меры: мера dx, инвариантная относительно сложения ($d(x+a)=dx$) и мера d^*x, инвариантная относительно умножения ($d^*(xa)=d^*x$). Эти меры очень просто связаны между собой:

$$d^*x=|x|^{-1}\,dx. \tag{1}$$

В самом деле, по определению функции $|x|$, имеем $d(xa)=|a|\,dx$. Следовательно, $|xa|^{-1}\,d(xa)=|x|^{-1}\,dx$, т. е. мера $|x|^{-1}\,dx$ инвариантна относительно умножения.

Условимся меру dx нормировать всегда следующим условием:

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} dx=1.$$

Рассмотрим теперь меры dz и d^*z, $z=x+\sqrt{\tau}\,y$ на $K(\sqrt{\tau})$, инвариантные соответственно относительно сложения и относительно умножения. Выразим эти меры через декартовы координаты x и y точки z. Мы получим

$$dz=dx\,dy, \quad d^*z=\frac{dx\,dy}{|x^2-\tau y^2|}.$$

Теперь выразим меры dz и d^*z через полярные координаты $(\rho,\ t)$ точки z. Напомним, что координата ρ определяется с точностью до знака из равенства $\rho\bar{\rho}=z\bar{z}$, вторая координата $t=\rho^{-1}z$ есть точка окружности $t\bar{t}=1$.

Поскольку окружность $t\bar{t}=1$ есть группа по умножению, то на ней существует инвариантная мера d^*t. Эту меру условимся нормировать условием

$$\int\limits_{t\bar{t}=1} d^*t=1.$$

Легко убедиться, что в полярных координатах меры dz, d^*z выражаются следующими формулами:

$$dz = a_\tau d(z\bar{z})\, d^*t, \quad d^*z = a_\tau \frac{d(z\bar{z})\, d^*t}{|z\bar{z}|},$$

где $d(z\bar{z})$ — мера на K, а $a_\tau = 2(1+q^{-1})(1+|\tau|)^{-1}$

11. Аддитивные и мультипликативные характеры на «плоскости» $K(\sqrt{\tau})$. Аддитивная группа поля $K(\sqrt{\tau})$ есть прямая сумма двух групп, изоморфных аддитивной группе поля K. Отсюда следует, что любой аддитивный характер $\chi(z)$, $z = x + \sqrt{\tau}\, y$ поля $K(\sqrt{\tau})$ имеет вид

$$\chi(z) = \chi_1(x)\,\chi_2(y), \tag{1}$$

где χ_1, χ_2 — аддитивные характеры на K.

Перейдем к описанию мультипликативных характеров на $K(\sqrt{\tau})$.

Для этого изучим подробнее мультипликативную группу поля $K(\sqrt{\tau})$. Согласно п. 8, каждый элемент поля представим в виде $z = rt$ либо в виде $z = \nu rt$, где $r \in K$, $t\bar{t} = 1$, а ν — фиксированный элемент из $K(\sqrt{\tau})$ такой, что $\nu\bar{\nu}$ не является квадратом элемента из K.

Пусть $\pi(z)$ — мультипликативный характер на $K(\sqrt{\tau})$. Обозначим через π_1 и π_2 его ограничения соответственно на поле K и на окружность $t\bar{t} = 1$. Тогда имеем

$$\pi(rt) = \pi_1(r)\,\pi_2(t). \tag{2}$$

Из равенства $rt = (-r)(-t)$ получаем условие, связывающее π_1 и π_2:

$$\pi_1(-1) = \pi_2(-1). \tag{3}$$

Далее, поскольку $\nu\bar{\nu} = r_0 \in K$, то $\nu^2 = r_0 t_0$, где $t_0\bar{t}_0 = 1$. Следовательно, $\pi(\nu^2) = \pi_1(r_0)\,\pi_2(t_0)$, т. е.

$$\pi^2(\nu) = \pi_1(\nu\bar{\nu})\,\pi_2\left(\frac{\nu}{\bar{\nu}}\right). \tag{4}$$

Обратно, пусть π_1, π_2 — произвольные мультипликативные характеры соответственно на K и на окружности $t\bar{t} = 1$, связанные соотношением (3). Определим $\pi(\nu)$ так, чтобы выполнялось равенство (4) и зададим функцию $\pi(z)$ на $K(\sqrt{\tau})$ следующими формулами:

$$\pi(rt) = \pi_1(r)\pi_2(t), \tag{5}$$

$$\pi(\nu rt) = \pi(\nu)\pi(rt). \tag{6}$$

Очевидно, что эта функция будет мультипликативным характером поля $K(\sqrt{\tau})$. Таким образом, *мультипликативный характер поля $K(\sqrt{\tau})$ задается своими значениями на основном поле K и на окружности $t\bar{t}=1$ и значением в фиксированной точке ν такой, что $\nu\bar{\nu}$ не является квадратом в K* *). Эти значения согласованы между собой соотношениями (3) и (4).

§ 2. Основные и обобщенные функции на локально компактном несвязном поле K

В этом параграфе рассматриваются некоторые вопросы анализа на непрерывном локально компактном несвязном поле K.

1. Пространство основных функций. Пусть K — локально компактное несвязное поле. Напомним, что в поле K существует убывающая последовательность подколец

$$P \supset P^2 \supset \ldots \supset P^n \supset \ldots$$

(P — максимальный идеал кольца целых элементов из K), являющихся открытыми компактными множествами и образующих полную систему окрестностей нуля.

Мы хотим задать совокупность «достаточно хороших» функций на K. В качестве этой совокупности рассмотрим множество S всех комплекснозначных функций $f(x)$ на K, удовлетворяющих следующим двум требованиям:

1) Функция $f(x)$ финитна, т. е. равна нулю вне некоторого компактного открытого множества.

---

*) Заметим, что значение характера π в точке ν с точностью до знака определено, в силу (4), его значениями на K и на окружности $t\bar{t}=1$.

2) Существует целое положительное число n (зависящее от $f(x)$ такое, что функция $f(x)$ постоянна на классах смежности K/P^n.

Из условия 2) автоматически следует, что функция $f(x)$ непрерывна на K. Ясно, что совокупность S таких функций $f(x)$ образует линейное пространство. Введем теперь топологию в пространстве S.

Последовательность функций $f_i(x)$ мы назовем стремящейся к нулю, если:

1) функции $f_i(x)$ равны нулю вне некоторого (не зависящего от i) компактного множества;

2) существует такое целое положительное n, что все функции $f_i(x)$ постоянны на классах смежности K/P^n;

3) последовательность $f_i(x)$ при $i \to \infty$ стремится к нулю равномерно по x.

Легко убедиться, что *относительно введенной топологии совокупность S является полным линейным пространством*. Это пространство S мы будем называть пространством основных функций. Обобщенными функциями $\varphi(x)$ будем называть непрерывные функционалы (φ, f) на S.

По аналогии с пространством S может быть определено пространство S_n функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных из K.

2. Обобщенные функции, сосредоточенные в точке. Определим, как обычно, обобщенную функцию $\delta(x)$ следующей формулой:

$$(\delta(x),\ f(x)) = f(0).$$

Нетрудно видеть, что *любая обобщенная функция, сосредоточенная в точке $x = 0$, есть, с точностью до множителя, функция $\delta(x)$*.

Утверждение непосредственно следует из того факта, что любая основная функция $f(x) \in S$ постоянна в окрестности точки $x = 0$.

Это утверждение справедливо, разумеется, и для обобщенных функций от n переменных.

3. Однородные обобщенные функции. Пусть $\pi(x)$ — мультипликативный характер на K, т. е.

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$$

для любых x, y из K (мы не требуем, чтобы было $|\pi(x)|=1$). *Назовем обобщенную функцию* $\varphi(x)$ *однородной степени однородности* π, если для любой функции $f\in S$ и $t\neq 0$ имеем

$$(\varphi,\ f(t^{-1}x))=\pi(t)|t|(\varphi,\ f(x)). \qquad (1)$$

Наша задача—описать все однородные обобщенные функции. Согласно § 1, п. 4 мультипликативный характер $\pi(x)$ можно представить в виде

$$\pi(x)=|x|^{s-1}\theta(x), \qquad (2)$$

где s — некоторое комплексное число, $\theta(x)$ — другой характер на K такой, что

$$|\theta(x)|=1, \qquad (3)$$

$$\theta(\mathfrak{p})=1. \qquad (4)$$

В силу (4), характер θ задается своими значениями на компактной подгруппе элементов x с нормой $|x|=1$. Следовательно, множество таких характеров θ дискретно.

Сопоставим характеру $\pi(x)$ обобщенную функцию $\pi(x)$, определяемую по формуле

$$(\pi(x),\ f(x))=\int\pi(x)f(x)\,dx\equiv\int|x|^{s-1}\theta(x)f(x)\,dx. \qquad (5)$$

При $\operatorname{Re}s>0$ этот интеграл сходится в обычном смысле и является аналитической функцией от s. При $\operatorname{Re}s<0$ определим его посредством аналитического продолжения.

Нетрудно видеть, что $\pi(x)$ *является однородной обобщенной функцией степени однородности* π, *при условии, что* s — *неособая точка интеграла* (5).

Покажем, что *единственной особенностью обобщенной функции* $\pi(x)=|x|^{s-1}\theta(x)$, *рассматриваемой как функция дискретного аргумента* θ *и аналитическая функция от* s, *является точка* $\theta\equiv 1$, $s=0$. *В этой точке* $\pi(x)$ *имеет, как функция от* s, *простой полюс с вычетом* $\frac{q-1}{q\ln q}\delta(x)$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что функция $f(x)$ сосредоточена в области $|x|\leqslant 1$.

Перепишем выражение (5) в виде

$$(\pi, f) = \int\limits_{|x| \leqslant 1} |x|^{s-1} \theta(x) [f(x) - f(0)]\, dx + \\ + f(0) \int\limits_{|x| \leqslant 1} |x|^{s-1} \theta(x)\, dx.$$

Первый интеграл сходится при любых s, так как функция $f(x) - f(0)$ равна нулю в окрестности точки $x = 0$. Поэтому остается рассмотреть второй интеграл. Разобьем его на сумму интегралов

$$\int\limits_{|x| \leqslant 1} |x|^{s-1} \theta(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k(s-1)} \int\limits_{|x| = q^{-k}} \theta(x)\, dx.$$

Если $\theta(x) \not\equiv 1$, то $\int\limits_{|x| = q^{-k}} \theta(x)\, dx = 0$ для любого k. Поэтому нам остается рассмотреть случай $\theta(x) \equiv 1$, т. е. вычислить интеграл

$$\int\limits_{|x| \leqslant 1} |x|^{s-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k(s-1)} \int\limits_{|x| = q^{-k}} dx.$$

Напомним, что мера dx нормирована так, что

$$\int\limits_{|x| \leqslant 1} dx = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{|x| \leqslant q^{-k}} dx = \int\limits_{|y| \leqslant 1} d(\mathfrak{p}^k y) = q^{-k}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|x| = q^{-k}} dx = \int\limits_{|x| \leqslant q^{-k}} dx - \int\limits_{|x| \leqslant q^{-k-1}} dx = q^{-k}(1 - q^{-1}).$$

Итак,

$$\int\limits_{|x| \leqslant 1} |x|^{s-1} dx = (1 - q^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} q^{-ks} = \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-s}}.$$

Мы видим, что единственной особенностью этого выражения является простой полюс в точке $s=0$. При этом

$$\underset{s=0}{\text{Выч}}\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-s}}=\frac{q-1}{q\ln q}.$$

Таким образом,

$$\underset{s=0}{\text{Выч}}\left(|x|^{s-1},\ f(x)\right)=\frac{q-1}{q\ln q}f(0),$$

т. е.

$$\underset{s=0}{\text{Выч}}|x|^{s-1}=\frac{q-1}{q\ln q}\delta(x).$$

Утверждение доказано. Сформулируем окончательный результат.

Каждому мультипликативному характеру $\pi(x)$, *за исключением характера* $\pi_0(x)=|x|^{-1}$, *отвечает однородная обобщенная функция* $\pi(x)$ *степени однородности* π, *определенная формулой* (5). *Очевидно, что однородной функцией степени однородности* π_0 *является функция* $\delta(x)$.

Покажем, что *других однородных обобщенных функций не существует.*

Пусть $\varphi(x)$ — однородная обобщенная функция степени однородности π, $\pi(x)\neq|x|^{-1}$. Можно без труда убедиться, что для функций $f(x)$, равных нулю в окрестности точки $x=0$, имеем

$$(\varphi,\ f)=c(\pi,\ f),$$

где c — некоторый коэффициент. Следовательно, функция $\varphi(x)-c\pi(x)$ сосредоточена в точке $x=0$, а потому $\varphi(x)-c\pi(x)=c_1\delta(x)$. Но функции $\varphi(x)-c\pi(x)$ и $\delta(x)$ имеют различные степени однородности. Следовательно, $c_1=0$, т. е. $\varphi(x)=c\pi(x)$.

Пусть теперь $\varphi(x)$ — однородная обобщенная функция степени однородности π_0, $\pi_0(x)=|x|^{-1}$. Покажем, что функция $\varphi(x)$ сосредоточена в точке $x=0$ и, следовательно, $\varphi(x)=c\delta(x)$. В самом деле, предположим, что функция $\varphi(x)$ не сосредоточена в точке $x=0$. Тогда можно без труда показать, что

$$(\varphi,\ f)=c\int|x|^{-1}f(x)\,dx,\qquad c\neq 0,$$

для любой функции f, равной нулю в окрестности точки O. Введем обобщенную функцию φ_1:

$$(\varphi_1, f) = c \int\limits_{|x| \leqslant 1} |x|^{-1} [f(x) - f(0)]\, dx + c \int\limits_{|x|>1} |x|^{-1} f(x)\, dx. \tag{6}$$

Имеем $(\varphi, f) = (\varphi_1, f)$ для любой функции f, равной нулю в окрестности точки $x = 0$. Следовательно, функция $\varphi - \varphi_1$ сосредоточена в точке $x = 0$, а потому $\varphi - \varphi_1 = c\delta(x)$. Но функции $\varphi(x)$ и $\delta(x)$ однородны одной и той же степени однородности π_0; значит, однородной должна быть и функция φ_1. Между тем, как легко убедиться из выражения (6), функция φ_1 не однородна. Это противоречие доказывает, что $\delta(x)$ — единственная однородная функция степени однородности π_0, $\pi_0(x) = |x|^{-1}$.

4. Преобразование Фурье основных функций. Пусть $\chi(x) \not\equiv 1$ — аддитивный характер в поле K. Преобразование Фурье функции $f(x)$ определим формулой

$$\tilde{f}(u) = \int \chi(ux) f(x)\, dx. \tag{1}$$

Преобразование Фурье определено для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом модуля; интеграл (1) нужно при этом понимать в смысле среднего квадратичного значения. Известно, что функция $f(x)$ выражается через свое преобразование Фурье по формуле

$$f(x) = c \int \chi(-ux) \tilde{f}(u)\, du, \tag{2}$$

где c — некоторая положительная постоянная, зависящая от выбора характера χ. При этом имеет место формула Планшереля

$$\int |f(x)|^2\, dx = c \int |\tilde{f}(u)|^2\, du. \tag{3}$$

Установим, как зависит константа c от выбора характера χ. Из непрерывности χ следует, что $\chi(x) \equiv 1$ на подгруппе $\mathfrak{p}^k O$ при достаточно большом k, где O — подгруппа элементов x с нормой $|x| \leqslant 1$. Назовем *рангом* характера χ наименьшее число n такое, что $\chi(x) \equiv 1$ на $\mathfrak{p}^n O$. Ясно, что если характер χ имеет ранг n, то характер $\chi'(x)=\chi(\mathfrak{p}^k x)$ имеет ранг $n-k$.

Покажем, что константа c в формуле обращения (2) и в формуле Планшереля (3) выражается через ранг характера χ следующим образом:

$$c=q^n, \tag{4}$$

где $q^{-1}=|\mathfrak{p}|$. Для этого обозначим через ψ характеристическую функцию множества O и вычислим ее преобразование Фурье. Мы получим

$$\tilde{\psi}(u)=\int_K \psi(x)\chi(ux)\,dx=\int_O \chi(ux)\,dx.$$

Представим элемент u в виде $\mathfrak{p}^k v$, $|v|=1$. Тогда

$$\tilde{\psi}(u)=\int_O \chi(\mathfrak{p}^k vx)\,dx=|\mathfrak{p}|^{-k}\int_{\mathfrak{p}^k O}\chi(y)\,dy. \tag{5}$$

Пусть ранг χ равен n. При $k\geqslant n$ подынтегральная функция в (5) равна 1, и мы получаем

$$\tilde{\psi}(u)=|\mathfrak{p}|^{-k}\int_{\mathfrak{p}^k O} dy=\int_O dx=1.$$

Если же $k<n$, то χ — нетривиальный характер на $\mathfrak{p}^k O$ и поэтому интеграл равен 0.

Полученный результат можно записать так:

$$\tilde{\psi}(u)=\begin{cases} 1, & \text{когда } |u|\leqslant q^{-n},\\ 0, & \text{когда } |u|>q^{-n},\end{cases} \tag{6}$$

т. е. $\tilde{\psi}$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{p}^n O$.

Подставляя ψ и $\tilde{\psi}$ в формулу Планшереля, получаем искомое равенство (4). В частности, если ранг χ равен нулю, то $c=1$.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что характер χ в определении преобразования Фурье имеет ранг 0 и, следовательно,

$$c=1.$$

Рассмотрим в первую очередь преобразование Фурье основных функций.

Преобразование Фурье функции $f \in S$ есть также функция из S.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — функция из S. Это значит, что

1) найдется такое m, что $f(x) = 0$ при $|x| \geqslant q^m$,

2) найдется такое n, что для любого t с нормой $|t| \leqslant q^{-n}$ имеем $f(x+t) = f(x)$.

Рассмотрим преобразование Фурье функции $f(x)$:

$$\tilde{f}(u) = \int \chi(ux) f(x)\, dx. \tag{7}$$

Покажем, сначала, что $\tilde{f}(u)$ — финитная функция. Для этого заменим под интегралом x на $x+t$, где $|t| \leqslant q^{-n}$. На основании свойства 2 получаем

$$\tilde{f}(u) = \chi(ut) \int \chi(ux) f(x)\, dx,$$

т. е.

$$\tilde{f}(u) = \chi(ut)\, \tilde{f}(u). \tag{8}$$

Если $|u| > q^n$, то $|ut| > 1$ и, значит, $\chi(ut) \neq 1$. Но тогда из равенства (8) следует, что $\tilde{f}(u) = 0$, когда $|u| > q^n$. Этим доказано, что $\tilde{f}(u)$ — финитная функция.

Теперь покажем, что функция $\tilde{f}(u)$ удовлетворяет условию 2).

Так как $f(x) = 0$ при $|x| \geqslant q^m$, то имеем

$$\tilde{f}(u) = \int\limits_{|x| \leqslant q^m} \chi(ux) f(x)\, dx.$$

Следовательно, при $|t| \leqslant q^{-m}$ получаем

$$\tilde{f}(u+t) = \int\limits_{|x| \leqslant q^m} \chi(tx)\chi(ux) f(x)\, dx = \tilde{f}(u),$$

поскольку $\chi(tx) = 1$. Значит, функция $\tilde{f}(u)$ удовлетворяет условию 2). Утверждение доказано.

Заметим, что $\tilde{\tilde{f}}(x) = f(-x)$. Отсюда непосредственно следует:

Преобразование Фурье осуществляет взаимно однозначное отображение пространства S основных функций на себя.

Теперь дадим определение преобразования Фурье обобщенной функции. За основу для этого определения примем формулу Планшереля

$$\int \varphi(x)\overline{f(x)}\,dx = \int \tilde{\varphi}(u)\overline{\tilde{f}(u)}\,du, \tag{9}$$

справедливую для любых основных функций f и φ. Нетрудно видеть, что функция $\overline{\tilde{f}(u)}$ является преобразованием Фурье функции $\overline{f(-x)}$. Таким образом, если в равенстве (9) заменить $f(x)$ на $\overline{f(-x)}$, то мы получим

$$\int \varphi(x) f(-x)\,dx = \int \tilde{\varphi}(u)\tilde{f}(u)\,du. \tag{10}$$

Равенство (10) означает, что функция $\tilde{\varphi}(u)$, рассматриваемая как функционал, удовлетворяет следующему соотношению:

$$(\tilde{\varphi}, \tilde{f}(u)) = (\varphi, f(-x)). \tag{11}$$

Это соотношение мы примем в качестве определения преобразования Фурье обобщенной функции $\varphi(x)$. Именно, *преобразованием Фурье обобщенной функции $\varphi(x)$ мы назовем обобщенную функцию $\tilde{\varphi}(u)$, определенную формулой* (11).

5. Преобразование Фурье обобщенных однородных функций. Г-функция и В-функция. Из определения преобразования Фурье непосредственно получаем

$$\tilde{1} = \delta(x), \quad \widetilde{\delta(x)} = 1. \tag{1}$$

Покажем теперь, что *преобразование Фурье обобщенной однородной функции степени однородности π является однородной функцией степени однородности $\pi^{-1}\pi_0^{-1}$, где $\pi_0(x) = |x|$.*

В самом деле, пусть φ — однородная обобщенная функция степени однородности π. Это значит, что для любого $t \neq 0$ из K имеем

$$\left(\varphi, f\left(t^{-1}x\right)\right) = \pi\pi_0(t)(\varphi, f(x)),$$

где

$$\pi_0(t) = |t| \quad (\pi\pi_0(t) \equiv \pi(t)\pi_0(t)).$$

Заметим теперь, что если $f_1(x) = |t| f(tx)$, то $\tilde{f}_1(u) = \tilde{f}(t^{-1}u)$. Следовательно,

$$\left(\tilde{\varphi},\ \tilde{f}\left(t^{-1}u\right)\right) = (\varphi,\ |t| f(-tx)) = \pi^{-1}(t)(\varphi,\ f(-x)),$$

т. е.

$$\left(\tilde{\varphi},\ \tilde{f}\left(t^{-1}u\right)\right) = \pi^{-1}(t)(\tilde{\varphi},\ \tilde{f}(u)).$$

Полученное равенство означает, что $\tilde{\varphi}$ — однородная функция степени однородности $\pi^{-1}\pi_0^{-1}$.

Таким образом, преобразование Фурье однородной обобщенной функции $\pi(x)|x|^{-1}$ есть, с точностью до множителя, однородная обобщенная функция $\pi^{-1}(u)$. Возникающий при этом множитель мы обозначим через $\Gamma(\pi)$ и будем называть Г-функцией. Итак, имеем

$$\overline{\pi(x)|x|^{-1}} = \Gamma(\pi)\pi^{-1}(u). \tag{2}$$

Найдем интегральное представление функции $\Gamma(\pi)$. Для этого запишем $\overline{\pi(x)|x|^{-1}}$ в виде интеграла

$$\Gamma(\pi)\pi^{-1}(u) = \int \chi(ux)\pi(x)|x|^{-1}\,dx.$$

Если подставить сюда $u = 1$, то мы получим

$$\Gamma(\pi) = \int \chi(x)\pi(x)|x|^{-1}\,dx. \tag{3}$$

Ясно, что полученное выражение напоминает формулу для классической Г-функции *).

*) Отметим, что в случае поля вещественных чисел введенная нами Г-функция не совпадает с классической, а отличается от нее множителем. Например, если $\pi(x) = |x|^s$, то

$$\Gamma(\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{s-1}e^{ix}\,dx = 2\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s),$$

где $\Gamma(s)$ — классическая Г-функция. Аналогично, в случае $\pi(x) = |x|^s \operatorname{sign} x$ имеем $\Gamma(\pi) = 2i\sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)$.

Интегралу (3) можно придать смысл, применяя метод разбиения. Именно запишем интеграл (3) в виде суммы двух интегралов

$$\Gamma(\pi) = \int\limits_{|x| \leqslant 1} \chi(x)\pi(x)|x|^{-1}\,dx + \int\limits_{|x|>1} \chi(x)\pi(x)|x|^{-1}\,dx.$$

Каждый из этих интегралов сходится в некоторой области значений π и является в этой области аналитической функцией от π. Применяя метод аналитического продолжения, мы определим эти интегралы для любых π.

Разбивая интеграл (3) в сумму интегралов по областям $|x| = \mathrm{const}$, мы получим, после подходящей замены переменных следующее выражение для функции $\Gamma(\pi)$ (*разложение в ряд Фурье*):

$$\Gamma(\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi(\mathfrak{p}^k) \int\limits_{|x|=1} \chi(\mathfrak{p}^k x)\pi(x)\,dx. \tag{4}$$

Из определения Г-функции непосредственно вытекают следующие ее свойства:

1) Единственной особой точкой функции $\Gamma(\pi)$ является точка $\pi \equiv 1$.

2) Единственным нулем функции $\Gamma(\pi)$ является $\pi_0(x) = |x|$.

3) Имеет место функциональное соотношение

$$\Gamma(\pi)\,\Gamma(\pi_0\pi^{-1}) = \pi(-1). \tag{5}$$

Для получения соотношения (5) достаточно применить преобразование Фурье к обеим частям равенства (2).

Заметим, что формула (5) напоминает соотношение для классической Г-функции, связывающее $\Gamma(t)$ и $\Gamma(1-t)$. Дадим теперь определение В-функции.

В-функцией от мультипликативных характеров π_1, π_2 поля K мы назовем следующее выражение:

$$B(\pi_1, \pi_2) = \int \pi_1(x)|x|^{-1}\pi_2(1-x)|1-x|^{-1}\,dx. \tag{6}$$

Написанный интеграл расходится, и его следует понимать в следующем смысле. Разобьем (6) на два интеграла:

$$\mathrm{B}(\pi_1, \pi_2) = \int\limits_{|x| \leqslant 1} \pi_1(x) |x|^{-1} \pi_2(1-x) |1-x|^{-1} dx + \\ + \int\limits_{|x| > 1} \pi_1(x) |x|^{-1} \pi_2(1-x) |1-x|^{-1} dx.$$

Каждый из написанных интегралов сходится в некоторой области характеров π_1, π_2 и является в этой области аналитической функцией от π_1, π_2. Применяя метод аналитического продолжения, мы определим эти интегралы для всех π_1, π_2. Тем самым мы определили $\mathrm{B}(\pi_1, \pi_2)$ как аналитическую функцию от π_1, π_2.

Без труда доказывается, что функция $\mathrm{B}(\pi_1, \pi_2)$ выражается следующим образом через Г-функцию

$$\mathrm{B}(\pi_1, \pi_2) = \frac{\Gamma(\pi_1)\,\Gamma(\pi_2)}{\Gamma(\pi_1\pi_2)}. \tag{7}$$

(Вывод этой формулы проводится так же, как и для классических В- и Г-функций.)

6. Дополнительные сведения о Г-функции. Напомним, что мультипликативная группа K^* несвязного непрерывного поля K является прямым произведением бесконечной циклической группы, порожденной элементом $\mathfrak{p}$, и компактной группы O^*, состоящей из всех элементов с нормой 1. Поэтому группа Π всех (не обязательно унитарных) характеров группы K^* является прямым произведением мультипликативной группы C^* комплексных чисел $\lambda \neq 0$ и группы $\hat{O}^*$ всех характеров θ группы O^*. Таким образом, каждый характер π на K^* можно задать парой (λ, θ), где $\lambda \in C^*$, $\theta \in \hat{O}^*$.

Каждый элемент $x \in K^*$ однозначно записывается в виде

$$x = \mathfrak{p}^k y,$$

где $y \in O^*$. Значение характера π на элементе x равно

$$\pi(x) = \lambda^k \theta(y). \tag{1}$$

Удобна также следующая, эквивалентная (1), запись характера π. Продолжим характер θ на все K^*, полагая $\theta(\mathfrak{p}) = 1$. Тогда имеем

$$\pi(x) = |x|^s \theta(x), \tag{1'}$$

где s — комплексное число, связанное с λ соотношением $\lambda = |\mathfrak{p}|^s = q^{-s}$.

Отметим, что множество $\widehat{O}^*$ характеров θ счетно и дискретно, так что Π является объединением счетного числа комплексных плоскостей с выброшенным нулем.

Из интегрального представления Γ-функции

$$\Gamma(\pi) = \int \chi(x)\pi(x)\,d^*x \tag{2}$$

мы получим сейчас разложение Γ-функции в ряд Лорана по λ. Для этого представим K^* как объединение множеств $\mathfrak{p}^k O^*$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Тогда мы получим

$$\Gamma(\pi) = \sum_k \int_{|y|=1} \chi(\mathfrak{p}^k y)\pi(\mathfrak{p}^k y)\,dy =$$

$$= \sum_k \lambda^k \int_{|y|=1} \chi(\mathfrak{p}^k y)\theta(y)\,dy.$$

Таким образом, коэффициенты разложения $\Gamma(\pi)$ в ряд Лорана по λ имеют вид

$$\Gamma_k(\theta) = \int_{|y|=1} \chi(\mathfrak{p}^k y)\theta(y)\,dy. \tag{3}$$

Заметим, что интегралы (3) являются сходящимися, в отличие от интеграла (2), который нужно понимать в смысле обобщенных функций.

Мы увидим сейчас, что почти все коэффициенты $\Gamma_k(\theta)$ можно явно вычислить. Из этого вычисления будет следовать, что функция $\Gamma(\pi) \equiv \Gamma(\lambda, \theta)$ является при любом фиксированном θ рациональной функцией от λ.

Предварительно напомним, что о характере χ, участвующем в определении Γ-функции, сделано следующее предположение: $\chi(x) = 1$, когда $|x| \leqslant 1$; $\chi(x) \not\equiv 1$ на множестве $|x| \leqslant q$.

Введем теперь понятие ранга характера θ. Рассмотрим группу O^* элементов с нормой 1. В этой группе имеется убывающая последовательность открытых подгрупп O_n^*, состоящих из элементов вида $1+\mathfrak{p}^n x$, $|x|\leqslant 1$. Из непрерывности характера θ следует, что если n достаточно велико, то $\theta(x)\equiv 1$ на O_n^*. Назовем **рангом** характера θ наименьшее из чисел n, для которых $\theta(x)\equiv 1$ на O_n^*. Очевидно, что множество характеров ранга, не превосходящего n, конечно *). В частности, имеется единственный характер ранга 0, а именно, $\theta_0\equiv 1$.

Будет доказано следующее утверждение.

Если ранг характера θ *равен* m, $m>0$, *то* $\Gamma_k(\theta)=0$ при $k\neq -m$; *кроме того,*

$$|\Gamma_{-m}(\theta)|=q^{-m/2}. \tag{4}$$

Если ранг характера θ *равен нулю*, т. е. $\theta(x)\equiv 1$, то

$$\Gamma_k(\theta)=\begin{cases} 0 & \text{при } k<-1 \\ -q^{-1} & \text{при } k=-1 \\ 1-q^{-1} & \text{при } k>-1. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, Γ-функция на несвязном поле K является функцией очень простого вида. А именно, если $\theta(x)\not\equiv 1$, то

$$\Gamma(\lambda,\ \theta)=\Gamma_{-m}(\theta)\lambda^{-m}, \tag{6}$$

где m — ранг характера θ $(m>0)$, причем $|\Gamma_{-m}(\theta)|=q^{-m/2}$. Если же $\theta=\theta_0\equiv 1$, то

$$\Gamma(\lambda,\ \theta_0)=(1-q^{-1})\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k-q^{-1}\lambda^{-1}=\frac{1-q^{-1}\lambda^{-1}}{1-\lambda}. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда θ — характер ранга $m>0$. Покажем, что тогда $\Gamma_k(\theta)=0$ при $k\neq -m$.

Если $k\geqslant 0$, то, так как $\chi(\mathfrak{p}^k y)\equiv 1$, мы имеем

$$\Gamma_k(\theta)=\int\limits_{|y|=1}\theta(y)\,dy=0$$

*) Это множество является группой, двойственной к конечной группе O^*/O_n^*.

Пусть теперь $k < 0$. Запишем элемент y в виде

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \mathfrak{p} + \ldots + \alpha_n \mathfrak{p}^n + \ldots$$

(см. § 1). Поскольку ранг характера θ равен m, то $\theta(y)$ зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, причем зависимость от α_{m-1} нетривиальна. С другой стороны, функция $\chi(\mathfrak{p}^k y)$ зависит только от $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{-k-1}$, причем зависимость от α_{-k-1} нетривиальна.

Если $0 > k > -m$, то $-k-1 < m-1$, а потому $\chi(\mathfrak{p}^k y)$ не зависит от α_{m-1}. Разбивая интеграл (3) на интегралы по классам смежности относительно O^*_{m-1} и учитывая, что θ — нетривиальный характер на O^*_{m-1}, мы получаем, что каждый из этих интегралов равен нулю. Итак, если $0 > k > -m$, то $\Gamma_k(\theta) = 0$.

Наконец, если $k < -m$, то $m-1 < -k-1$, а потому $\theta(y)$ не зависит от α_{-k-1}. Разбивая интеграл (3) на интегралы по множествам вида $y + \mathfrak{p}^{-k-1}O$, и учитывая, что характер $\chi(x)$ нетривиален на $\mathfrak{p}^{-1}O$, убеждаемся, что каждый из этих интегралов равен нулю *). Итак, если $k < -m$, то $\Gamma_k(\theta) = 0$.

Таким образом, установлено, что если θ — характер ранга $m > 0$, то $\Gamma_k(\theta) = 0$ при $k \neq -m$. Остается вычислить $\Gamma_{-m}(\theta)$.

Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} \theta(x), & \text{когда } |x| = 1, \\ 0, & \text{когда } |x| \neq 1, \end{cases} \tag{8}$$

и вычислим ее преобразование Фурье. Пусть $u = \mathfrak{p}^k v$, $|v| = 1$; тогда

$$\tilde{\varphi}(u) = \int_K \varphi(x)\chi(ux)\,dx = \int_{|y|=1} \theta(y)\chi(\mathfrak{p}^k v y)\,dy = \Gamma_k(\theta)\,\theta^{-1}(v).$$

---

*) Отметим, что использованное здесь разбиение O^* на области вида $y + \mathfrak{p}^{-k-1}O$ возможно лишь при условии, что $-k-1 > 0$, т. е. при $k < -1$. Это условие автоматически выполнено при $m > 0$, так как мы предположили, что $k < -m$.

Но $\Gamma_k(\theta)$ отлично от нуля лишь при $k=-m$. Таким образом, имеем

$$\tilde{\varphi}(u)=\begin{cases}\Gamma_{-m}(\theta)\,\theta^{-1}(v), & \text{когда} \quad u=\mathfrak{p}^{-m}v,\ |v|=1,\\ 0, & \text{когда} \quad |u|\neq q^m.\end{cases} \tag{9}$$

Подставляя найденное значение $\tilde{\varphi}$ в формулу Планшереля для преобразования Фурье, получаем искомое равенство $|\Gamma_{-m}(\theta)|^2=q^{-m}$.

Перейдем к случаю $\theta=\theta_0\equiv 1$. Исследуемый интеграл имеет вид

$$\Gamma_k(\theta_0)=\int\limits_{|y|=1}\theta_0(y)\,\chi(\mathfrak{p}^k y)\,dy=\int\limits_{|y|=1}\chi(\mathfrak{p}^k y)\,dy=$$
$$=\int\limits_{|y|\leqslant 1}\chi(\mathfrak{p}^k y)\,dy-\int\limits_{|y|<1}\chi(\mathfrak{p}^k y)\,dy=$$
$$=q^k\int\limits_{|y|\leqslant q^{-k}}\chi(y)\,dy-q^k\int\limits_{|y|\leqslant q^{-k-1}}\chi(y)\,dy.$$

Заметим теперь, что

$$\int\limits_{|y|\leqslant q^{-k}}\chi(y)\,dy=\begin{cases}q^{-k} & \text{при } k\geqslant 0\\ 0 & \text{при } k<0.\end{cases}$$

Отсюда немедленно вытекает формула (5) для $\Gamma_k(\theta_0)$. Утверждение доказано.

Отметим, что соотношение (4) может быть представлено в следующем виде. Если $\pi(x)=|x|^s\,\theta(x)$, где $\theta(\mathfrak{p})=1$, причем ранг характера θ равен $m>0$, то

$$|\Gamma(\pi)|=q^{m\left(\operatorname{Re}s-\frac{1}{2}\right)}.$$

Отсюда, в частности, следует, что на множестве характеров вида $\pi(x)=|x|^{1/2+r\rho}\,\theta(x)$ имеем

$$|\Gamma(\pi)|=1.$$

(Характер $\pi_{1/2+r\rho}(x)=|x|^{1/2+r\rho}$ не является исключением, поскольку в силу (7) мы имеем $\left|\Gamma\left(\pi_{1/2+r\rho}\right)\right|=1$.)

Докажем теперь, что *если ранг характера* θ *равен* m, $m>0$, *то имеет место следующее соотношение*:

$$\Gamma_{-m}(\theta)\,\Gamma_{-m}(\theta^{-1})=q^{-m}\theta(-1). \tag{10}$$

Для доказательства рассмотрим функцию $\varphi(x)$, определенную формулой (8). Ее преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(x)$ выражается формулой (9). Вычислим теперь преобразование Фурье $\tilde{\tilde{\varphi}}(x)$ функции $\tilde{\varphi}(u)$. Пусть $x=\mathfrak{p}^k y$, $|y|=1$. Тогда

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x)=\int\limits_K \tilde{\varphi}(u)\,\chi(ux)\,du=$$
$$=\Gamma_{-m}(\theta)\,q^m \int\limits_{|v|=1} \theta^{-1}(v)\,\chi(\mathfrak{p}^{k-m}vy)\,dv=$$
$$=\Gamma_{-m}(\theta)\,q^m\Gamma_{k-m}(\theta^{-1})\,\theta(y).$$

Но $\Gamma_{k-m}(\theta^{-1})$ отлично от нуля только при $k=0$. Таким образом, имеем

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x)=\begin{cases}\Gamma_{-m}(\theta)\,\Gamma_{-m}(\theta^{-1})\,q^m\theta(x), & \text{когда } |x|=1,\\ 0, & \text{когда } |x|\neq 1,\end{cases}$$

т. е.

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x)=\Gamma_{-m}(\theta)\,\Gamma_{-m}(\theta^{-1})\,q^m\varphi(x). \tag{11}$$

С другой стороны, из общих свойств преобразования Фурье следует, что

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x)=\varphi(-x)=\theta(-1)\,\varphi(x). \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (12), получаем требуемое соотношение (10).

Соотношение (10) позволяет с точностью до знака вычислить значение $\Gamma(\pi)=\Gamma(\lambda,\theta)$ в случае, когда $\theta^2\equiv 1$, причем $\theta\not\equiv 1$. Именно в этом случае ранг характера θ равен 1, и мы имеем, согласно (10),

$$\Gamma_{-1}^2(\theta)=q^{-1}\theta(-1),$$

откуда $\Gamma_{-1}(\theta)=\pm\sqrt{\theta(-1)}\,q^{-1/2}$. Следовательно, в силу формулы (6),

$$\Gamma(\lambda,\theta)=\pm\sqrt{\theta(-1)}\,q^{-1/2}\lambda^{-1}. \tag{13}$$

Укажем значения функции $\Gamma(\pi)$ для некоторых специальных значений характера π.

1. $\pi(x) = |x|^s$. В этом случае $\lambda = q^{-s}$, $\theta \equiv 1$. Следовательно, по формуле (7)

$$\Gamma(\pi) = \frac{1 - q^{s-1}}{1 - q^{-s}}. \tag{14}$$

2. $\pi(x) = |x|^s \operatorname{sign}_\varepsilon x$. В этом случае $\lambda = -q^{-s}$, $\theta \equiv 1$ *). Следовательно,

$$\Gamma(\pi) = \frac{1 + q^{s-1}}{1 + q^{-s}}. \tag{15}$$

3. $\pi(x) = |x|^s \operatorname{sign}_\tau x$, где $\tau = \mathfrak{p}$, $\varepsilon\mathfrak{p}$. В этом случае $\lambda = q^{-s}$, $\theta(y) = \operatorname{sign}_\tau y$, т. е. $\theta^2 \equiv 1$. Следовательно, по формуле (13) имеем

$$\Gamma(\pi) = \pm \sqrt{\operatorname{sign}_\tau(-1)}\, q^{s-1/2}. \tag{16}$$

Приведем еще два соотношения для Г-функции, получающиеся как следствия из формулы (10). Пусть характер π имеет на подгруппе O^* ранг $m > 0$. Тогда имеем

$$\Gamma(\pi)\,\Gamma(\pi^{-1}) = q^{-m}\pi(-1). \tag{17}$$

Далее, сравнивая это соотношение с соотношением

$$\Gamma(\pi\pi_0)\,\Gamma(\pi^{-1}) = \pi(-1),$$

где $\pi_0(x) = |x|$ (см. п. 5, формула (4)), мы получаем

$$\Gamma(\pi\pi_0) = q^m \Gamma(\pi). \tag{18}$$

Соотношение (18) можно рассматривать как аналог соотношения $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ для классической Г-функции.

В исключительном случае, когда $\pi(x) \equiv 1$ на O^*, т. е.

$$\pi(x) = |x|^s,$$

мы получаем на основании формулы (14):

$$\Gamma(\pi)\,\Gamma(\pi^{-1}) = \frac{(1 - q^{s-1})(1 - q^{-s-1})}{(1 - q^{-s})(1 - q^{s})}; \tag{17'}$$

$$\Gamma(\pi\pi_0) = \frac{(1 - q^{-s})(1 - q^{s})}{(1 - q^{s-1})(1 - q^{-s-1})}\,\Gamma(\pi). \tag{18'}$$

---

*) Случай 2 получается из 1-го заменой s на $s + \frac{2\pi i}{\ln q}$.

Введем понятие *неполной* Г-функции, определив ее следующей формулой:

$$\Gamma^{(k)}(\pi) \equiv \Gamma^{(k)}(\lambda, \theta) = \int\limits_{|x| \leqslant q^k} \chi(x)\pi(x)\, d^*x.$$

На основании формул (4) и (5) имеем следующий результат. *Если ранг характера* θ *равен* $m > 0$, *то*

$$\Gamma^{(k)}(\pi) = \begin{cases} 0 & \text{при } k < m, \\ \Gamma(\pi) & \text{при } k \leqslant m. \end{cases}$$

В исключительном случае, когда $\theta = \theta_0 \equiv 1$, *имеем*

$$\Gamma^{(k)}(\pi) = \begin{cases} \dfrac{(1-q^{-1})\lambda^k}{1-\lambda} & \text{при } k \leqslant 0 \\ \dfrac{1-q^{-1}\lambda^{-1}}{1-\lambda} & \text{при } k > 0. \end{cases}$$

Мы видим, таким образом, что для любого фиксированного π последовательность

$$\Gamma^{(0)}(\pi),\ \Gamma^{(1)}(\pi),\ \ldots,\ \Gamma^{(k)}(\pi),\ \ldots$$

стабилизируется, начиная с достаточно большого номера k.

7. Интеграл $\int \chi(ut\bar{t})\,dt$. В дальнейшем нам понадобится интеграл

$$F(u) = \int \chi(ut\bar{t})\,dt, \tag{1}$$

где интегрирование ведется на плоскости $K(\sqrt{\tau})$. Вычислим его. Прежде всего, заметим, что (1) можно переписать как интеграл по K (см. формулу на стр. 186):

$$F(u) = a_\tau \int\limits_{\operatorname{sign}_\tau x = 1} \chi(ux)\,dx =$$

$$= \frac{a_\tau}{2}\int\limits_K \chi(ux)\,dx + \frac{a_\tau}{2}\int\limits_K \chi(ux)\operatorname{sign}_\tau x\,dx,$$

где $a_\tau = 2(1+q^{-1})(1+|\tau|)^{-1}$. Согласно п. 5 имеем

$$\int \chi(ux)\,dx = \delta(u), \qquad \int \chi(ux)\operatorname{sign}_\tau x\,dx = \Gamma(\pi)\frac{\operatorname{sign}_\tau u}{|u|},$$

где $\pi(x)=|x|\operatorname{sign}_\tau x$. Итак,

$$\int \chi(ut\bar{t})\,dt=c_\tau^{-1}\frac{\operatorname{sign}_\tau u}{|u|}+\frac{a_\tau}{2}\delta(u), \tag{2}$$

где положено

$$c_\tau^{-1}=\frac{a_\tau}{2}\Gamma(\pi)=\frac{1+q^{-1}}{1+|\tau|}\int \chi(x)\operatorname{sign}_\tau x\,dx. \tag{3}$$

Заметим, что коэффициент c_τ удовлетворяет соотношению

$$\bar{c}_\tau=c_\tau\operatorname{sign}_\tau(-1). \tag{4}$$

Таким образом, c_τ вещественно, если $\operatorname{sign}_\tau(-1)=1$, c_τ чисто мнимо, если $\operatorname{sign}_\tau(-1)=-1$.

Коэффициент c_τ можно сосчитать с точностью до знака на основании результатов п. 6. Именно, на основании формулы (15) п. 6 имеем

$$c_\tau=1 \text{ в случае, когда } \tau=\varepsilon; \tag{5}$$

на основании формулы (16) п. 6 имеем

$$c_\tau=\pm[\operatorname{sign}_\tau(-1)]^{1/2}q^{-1/2} \text{ в случае, когда } \tau=\mathfrak{p},\ \varepsilon\mathfrak{p}. \tag{6}$$

8. О функциях, граничных к функциям, аналитическим в верхней и в нижней полуплоскости. Пусть $K(\sqrt{\tau})$ — квадратичное расширение несвязного поля K. Назовем верхней полуплоскостью плоскости $K(\sqrt{\tau})$ совокупность точек $z=x+\sqrt{\tau}y$, $\operatorname{sign}_\tau y=1$; нижней полуплоскостью плоскости $K(\sqrt{\tau})$ назовем совокупность точек $z=x+\sqrt{\tau}y$, $\operatorname{sign}_\tau y=-1$.

Легко убедиться, что *верхняя и нижняя полуплоскости являются однородными пространствами относительно группы дробно-линейных преобразований* $z'=\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

Для несвязных полей не существует понятия комплекснозначной функции, аналитической в верхней (или в нижней) полуплоскости. Однако мы можем ввести понятие функции, граничной с аналитической.

С этой целью введем на K обобщенные функции, аналогичные обобщенным функциям $(x+i0)^{-1}$ и $(x-i0)^{-1}$ в случае вещественного поля.

Определим обобщенную функцию $(x+\sqrt{\tau}\,0)^{-1}$ *как преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f_\tau^+(u)=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{sign}_\tau u\right),$$

равной 1 *при* $\operatorname{sign}_\tau u=1$ *и равной* 0 *при* $\operatorname{sign}_\tau u=-1$. *Аналогично определим обобщенную функцию* $(x-\sqrt{\tau}\,0)^{-1}$ *как преобразование Фурье обобщенной функции*

$$f_\tau^-(u)=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sign}_\tau u\right),$$

равной 1 при $\operatorname{sign}_\tau u=-1$ и равной 0 при $\operatorname{sign}_\tau u=1$.

На основании пп. 6 и 7 мы можем эти функции выразить через обобщенные функции $\delta(x)$ и $\dfrac{\operatorname{sign}_\tau x}{|x|}$:

$$\left(x+\sqrt{\tau}0\right)^{-1}=\frac{1}{2}\delta(x)+a_\tau^{-1}c_\tau^{-1}\frac{\operatorname{sign}_\tau x}{|x|}, \tag{1}$$

$$\left(x-\sqrt{\tau}0\right)=\frac{1}{2}\delta(x)-a_\tau^{-1}c_\tau^{-1}\frac{\operatorname{sign}_\tau x}{|x|}. \tag{2}$$

Коэффициент c_τ был вычислен в п. 7.

Функцию $f(x)$ *будем называть граничной к функции, аналитической в верхней полуплоскости, если ее свертка с* $(x-\sqrt{\tau}\,0)^{-1}$ *равна тождественно нулю*:

$$\int\left(t-\sqrt{\tau}\,0\right)^{-1}f(x-t)\,dt=0$$

(или, что эквивалентно, если ее преобразование Фурье сосредоточено на «полупрямой» $\operatorname{sign}_\tau u=1$).

Аналогично вводится понятие функции, граничной к аналитической в нижней полуплоскости.

9. Преобразование Меллина. Преобразование Меллина функции $f(x)$ определим формулой

$$F(\pi)=\int\pi(x)f(x)\,d^*x, \tag{1}$$

где π пробегает унитарные мультипликативные характеры *), $d^*x = |x|^{-1} dx$.

Таким образом, преобразование Меллина можно рассматривать как преобразование Фурье на мультипликативной группе K^* поля K.

Преобразование Меллина определено для любой функции $f(x)$, для которой

$$\int |f(x)|^2 d^*x < \infty.$$

Интеграл (1) нужно понимать в смысле среднего квадратичного значения.

Имеют место формула обращения

$$f(x) = c \int \pi^{-1}(x) F(\pi) d\pi \tag{2}$$

и формула Планшереля

$$\int |f(x)|^2 d^*x = c \int |F(\pi)|^2 d\pi. \tag{3}$$

Интегрирование здесь ведется по инвариантной мере $d\pi$ на группе характеров; c — положительная постоянная, зависящая от нормировки $d\pi$. Будем дальше нормировать меру $d\pi$ так, чтобы было $c = 1$.

При изучении преобразования Меллина нам следует в качестве пространства основных функций взять не пространство S, а другое пространство S^*, которое сейчас будет определено.

Мы обозначим через S^* совокупность функций $f(x)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) Функция $f(x)$ финитна на K^*; иными словами, найдутся такие положительные числа a и b, $a > b$, что $f(x) = 0$ при $|x| > a$ и при $|x| < b$.

2) Найдется столь малая открытая подгруппа группы K^*, что функция $f(x)$ постоянна на классах смежности по этой подгруппе. Иными словами,

$$f(xa) = f(x), \tag{4}$$

если норма $|1 - a|$ достаточно мала.

---

*) То есть $|\pi(x)| = 1$.

Топология в S^* вводится естественным образом.

Нетрудно убедиться, что S^* состоит из тех и только тех функций $f(x)$, что

$$f(x) \in S \quad \text{и} \quad f(x^{-1}) \in S.$$

Теперь определим преобразование Меллина обобщенной функции. За основу для этого определения примем формулу Планшереля (3). Если обозначить

$$(\varphi(x),\ f(x)) = \int \varphi(x) f(x)\, d^*x,$$

$$(\Phi(\pi),\ F(\pi)) = \int \Phi(\pi) F(\pi)\, d\pi,$$

то формулу Планшереля можно переписать в виде

$$(\varphi(x),\ \overline{f(x)}) = (\Phi(\pi),\ \overline{F(\pi)}). \tag{5}$$

Заметим, что преобразованием Меллина функции $\overline{f(x^{-1})}$ будет функция $\overline{F(\pi)}$. Следовательно, заменяя в (5) функцию $f(x)$ на $\overline{f(x^{-1})}$, мы получим

$$(\varphi(x),\ f(x^{-1})) = (\Phi(\pi),\ F(\pi)). \tag{6}$$

Формула (6) определяет преобразование Меллина функции $\Phi(\pi)$ как функционал в пространстве функций $F(\pi)$ — преобразований Меллина основных функций. Эту формулу мы примем в качестве определения преобразования Меллина обобщенной функции.

Определение обобщенной функции $\Gamma(\pi)$. Обобщенной гамма-функцией будем называть преобразование Меллина обобщенной функции $\chi(x)$. Таким образом, формально функция $\Gamma(\pi)$ может быть записана в виде интеграла

$$\Gamma(\pi) = \int \pi(x)\chi(x)\,|x|^{-1}\,dx. \tag{7}$$

Определение обобщенной функции Бесселя $J(\pi;\ u)$. Обобщенной функцией Бесселя $J(\pi;\ u)$ будем называть преобразование Меллина обобщенной функции $\chi(u(x+x^{-1}))$, т. е.

$$J(\pi;\ u) = \int \pi(x)\chi(u(x+x^{-1}))\,|x|^{-1}\,dx. \tag{8}$$

Напишем другое интегральное представление функции $J(\pi; u)$. Мы знаем, что $\chi(t)$ является обратным преобразованием Меллина функции $\Gamma(\pi)$, т. е.

$$\chi(t) = \int \Gamma(\pi_1)\, \pi_1^{-1}(t)\, d\pi_1.$$

Отсюда следует, что

$$\chi(ux) = \int \Gamma(\pi_1)\, \pi_1^{-1}(u)\, \pi_1^{-1}(x)\, d\pi_1,$$

$$\chi(ux^{-1}) = \int \Gamma(\pi_2)\, \pi_2^{-1}(u)\, \pi_2(x)\, d\pi_2,$$

а потому

$$\chi(u(x+x^{-1})) = \int \Gamma(\pi_1)\, \Gamma(\pi_2)\, \pi_1^{-1}\pi_2^{-1}(u)\, \pi_1^{-1}\pi_2(x)\, d\pi_1\, d\pi_2.$$

Подставляя это выражение в формулу (8) для функции $J(\pi; u)$ и интегрируя по x и по π_1, мы получаем

$$J(\pi; u) = \int \Gamma(\pi'^{-1})\, \Gamma(\pi\pi'^{-1})\, \pi^{-1}\pi'^2(u)\, d\pi'. \tag{9}$$

10. Соотношение между Г-функцией, связанной с основным полем K, и Г-функцией, связанной с квадратичным расширением $K(\sqrt{\tau})$ поля K. Рассмотрим, наряду с Г-функцией, связанной с полем K, Г-функцию $\Gamma_\tau(\pi)$, связанную с полем $K(\sqrt{\tau})$:

$$\Gamma_\tau(\pi) = \int\limits_{K(\sqrt{\tau})} \chi_\tau(t)\, \pi(t)\, d^*t, \tag{1}$$

где π пробегает множество мультипликативных характеров на $K(\sqrt{\tau})$. Будем предполагать, что аддитивный характер $\chi_\tau(t)$ на $K(\sqrt{\pi})$ задается следующей формулой:

$$\chi_\tau(t) = \chi(t+\bar{t}), \tag{2}$$

где χ — заданный аддитивный характер (ранга 0) на K. Заметим, что ранг χ_τ на $K(\sqrt{\tau})$ равен 0 в случае $\tau = \varepsilon$ и 1 в случае $\tau = \mathfrak{p}$, $\varepsilon\mathfrak{p}$.

Докажем, что *имеет место следующее соотношение*:

$$\Gamma_\tau(\pi\bar{\pi}) = |\tau|^{-1} c_\tau \Gamma(\pi)\, \Gamma(\pi\pi_\tau), \tag{3}$$

где через $\bar{\pi}(t)$ *обозначен характер* $\bar{\pi}(t) = \pi(\bar{t})$,

$$\pi_\tau(x) \equiv \operatorname{sign}_\tau x \quad \text{и} \quad c_\tau^{-1} = \frac{a_\tau}{2} \int \chi(x)\, \pi_\tau(x)\, dx.$$

Положим

$$f(\pi)=\frac{\Gamma(\pi)\,\Gamma(\pi\pi_\tau)}{\Gamma_\tau(\pi\bar{\pi})}. \tag{4}$$

Так как $\Gamma_\tau^{-1}(\pi\bar{\pi})=|\tau|\,\Gamma_\tau(\pi^{-1}\bar{\pi}^{-1}\pi_0^2)$, где $\pi_0(t)=|t\bar{t}|^{1/2}$ (см. формулу (4) п. 5), то имеем

$$f(\pi)=|\tau|\,\Gamma(\pi)\,\Gamma(\pi\pi_\tau)\,\Gamma_\tau(\pi^{-1}\bar{\pi}^{-1}\pi_0^2)=$$
$$=|\tau|\int\chi(x+y+t+\bar{t})\,\pi\left(\frac{xy}{t\bar{t}}\right)\operatorname{sign}_\tau y\,|x|^{-1}|y|^{-1}\,dx\,dy\,dt;$$

интегрирование ведется по переменным $x,\ y\in K$ и $t\in K(\sqrt{\tau})$. Заменами переменных $x=\frac{t\bar{t}}{y}s$ и $t=yt'$ интеграл приводится к виду

$$f(\pi)=|\tau|\int\chi(y(st\bar{t}+1+t+\bar{t}))\,\pi_0\pi_\tau(y)\,\pi\pi_0^{-1}(s)\,dy\,ds\,dt=$$
$$=\int\chi(y(st\bar{t}+1-s^{-1}))\,\pi_0\pi_\tau(y)\,\pi\pi_0^{-1}(s)\,dy\,ds\,dt.$$

(Переход к последнему интегралу осуществляется подстановкой: $t=t'-s^{-1}$.) Интегрируя по y, получаем

$$f(\pi)=|\tau|\,\Gamma(\pi_0^2\pi_\tau)\int\pi_0^{-2}\pi_\tau(st\bar{t}+1-s^{-1})\,\pi\pi_0^{-1}(s)\,dt\,ds=$$
$$=|\tau|\,\Gamma(\pi_0^2\pi_\tau)\int\pi_0^{-2}\pi_\tau(t\bar{t}+s-1)\,\pi\pi_0^{-1}\pi_\tau(s)\,dt\,ds. \tag{5}$$

(Замена переменной $t=s^{-1}t'$.)

Вычислим отдельно интеграл

$$\varphi(x)=\int\pi_0^{-2}\pi_\tau(t\bar{t}+x)\,dt.$$

Переходя от $\varphi(x)$ к преобразованию Фурье, получаем

$$\tilde{\varphi}(u)=\int\chi(ux)\,\pi_0^{-2}\pi_\tau(t\bar{t}+x)\,dt\,dx=$$
$$=\int\chi(ux)\,\pi_0^{-2}\pi_\tau(x)\,dx\int\chi(-ut\bar{t})\,dt=$$
$$=\Gamma(\pi_0^{-1}\pi_\tau)\,\pi_0\pi_\tau(u)\cdot\left[c_\tau^{-1}\pi_0^{-1}\pi_\tau(-u)+\frac{a_\tau}{2}\delta(u)\right]$$

(см. формулу (2) п. 7).

Таким образом, имеем

$$\tilde{\varphi}(u) = c_\tau^{-1}\Gamma\left(\pi_0^{-1}\pi_\tau\right)\pi_\tau(-1),$$

а потому

$$\varphi(x) = c_\tau^{-1}\Gamma\left(\pi_0^{-1}\pi_\tau\right)\pi_\tau(-1)\,\delta(x).$$

Итак, установлено, что

$$\int \pi_0^{-2}\pi_\tau(t\bar{t}+s-1)\,dt = c_\tau^{-1}\Gamma\left(\pi_0^{-1}\pi_\tau\right)\pi_\tau(-1)\,\delta(s-1).$$

Подставляя это выражение в формулу (5), получаем, что

$$f(\pi) = |\tau|\; c_\tau^{-1}\Gamma\left(\pi_0^{-1}\pi_\tau\right)\Gamma\left(\pi_0^2\pi_\tau\right)\pi_\tau(-1).$$

Наконец, замечая, что

$$\Gamma\left(\pi_0^{-1}\pi_\tau\right) = \Gamma\left(\pi_0\pi_\tau\right), \quad \Gamma\left(\pi_0^2\pi_\tau\right) = \Gamma^{-1}\left(\pi_0\pi_\tau\right)\pi_\tau(-1),$$

получаем окончательно: $f(\pi) = |\tau|\,c_\tau^{-1}$, т. е.

$$\Gamma_\tau(\pi\bar{\pi}) = |\tau|^{-1}\,c_\tau\;\Gamma(\pi)\,\Gamma\left(\pi\pi_\tau\right).$$

§ 3. Неприводимые представления группы матриц второго порядка с элементами из локально компактного поля (непрерывная серия)

В этом и в следующих параграфах будут изучены представления группы G матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, элементы которых α, β, γ, δ принадлежат некоторому непрерывному локально компактному полю. В § 3 будет дано описание непрерывной серии неприводимых унитарных представлений группы G. Другие (дискретные) серии неприводимых унитарных представлений группы G будут рассмотрены в § 4. В § 5 мы вычислим следы (характеры) неприводимых представлений группы G, а в § 6 получим разложение функции $f(g)$ на группе G в интеграл Фурье (теорема Планшереля).

Часто вместо группы G рассматривают родственные ей группы: 1) фактор-группу $G_1 = G/\mathfrak{Z}$ группы G по ее центру $\mathfrak{Z}$ ($\mathfrak{Z}$ состоит из двух элементов e, $-e$, где e — единичная матрица); 2) группу G_2 всех дробно-линейных преобразований $x' = \dfrac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}$.

Легко показать, что группа G_2 дробно-линейных преобразований изоморфна группе всех автоморфизмов группы G, а G_1 изоморфна группе всех внутренних автоморфизмов группы G. Тем самым G_1 является подгруппой (и даже нормальным делителем) группы G_2. Без труда доказывается, что

$$G_2/G_1 \cong K^*/(K^*)^2,$$

где K^* — мультипликативная группа поля K, $(K^*)^2$ — подгруппа всех квадратов. Таким образом, $G_2 = G_1$, когда K — поле комплексных чисел, $G_2 : G_1 = 2$, когда K — поле вещественных чисел, $G_2 : G_1 = 4$, когда K — несвязное поле *).

Все излагаемые ниже результаты переносятся без каких-либо существенных изменений на группы G_1 и G_2.

1. Непрерывная серия унитарных представлений группы G. Начнем с описания непрерывной серии представлений группы G. Для случая поля комплексных чисел эта серия представлений была описана Гельфандом и Наймарком. Данная ими конструкция переносится непосредственно на случай любого непрерывного локально компактного поля K.

Представление непрерывной серии задается унитарным мультипликативным характером $\pi(x)$ на K.

Представление строится в пространстве комплекснозначных функций $\varphi(x)$ на K, для которых

$$(\varphi, \varphi) = \int |\varphi(x)|^2\, dx < \infty.$$

Оператор представления T_π, отвечающий матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, имеет следующий вид:

$$T_\pi(g)\,\varphi(x) = \varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) \pi(\beta x + \delta)\, |\beta x + \delta|^{-1}. \qquad (1)$$

То, что операторы $T_\pi(g)$ образуют представление, т. е. $T_\pi(g_1 g_2) = T_\pi(g_1)\, T_\pi(g_2)$, устанавливается непосредственной проверкой.

Аналогично строятся представления и в случае группы матриц с элементами из конечного поля K_q порядка q. При описании этих представлений удобнее от функций $\varphi(x)$ перейти к однородным функциям $f(x_1, x_2)$ двух переменных. Тогда мы получаем следующее описание представлений. Каждое представление задается

*) Исключается особый случай, когда характеристика связанного с K конечного поля O/P равна двум (см. § 1, п. 5).

мультипликативным характером $\pi(t)$ на K_q. Оно строится в пространстве функций $f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ на K_q, удовлетворяющих условию однородности

$$f(tx_1, tx_2) = \pi(t) f(x_1, x_2).$$

Оператор представления $T_\pi(g)$ имеет вид

$$T_\pi(g) f(x_1, x_2) = f(\alpha x_1 + \gamma x_2, \beta x_1 + \delta x_2). \tag{2}$$

Эти представления неприводимы, за исключением случая, когда $\pi \equiv 1$ (в этом случае отщепляется одномерное представление), и случая, когда $\pi(t)$ принимает только значения ± 1 (в этом случае представление распадается на два представления одинаковой размерности). Как и в случае произвольного непрерывного локально компактного поля K, представления $T_\pi(g)$ и $T_{\pi^{-1}}(g)$ оказываются эквивалентными. Следы представлений $T_\pi(g)$ впервые сосчитал Фробениус.

Кроме представлений (2), группа матриц над конечным полем K обладает еще «аналитической» серией представлений. Эта серия будет указана в § 4.

Докажем, что операторы $T_\pi(g)$ унитарны, т. е.

$$(T_\pi(g)\varphi, T_\pi(g)\varphi) = (\varphi, \varphi). \tag{3}$$

В самом деле, имеем

$$(T_\pi(g)\varphi, T_\pi(g)\varphi) = \int \left|\varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)\right|^2 |\beta x + \delta|^{-2}\, dx.$$

Сделаем замену переменных $x' = \dfrac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}$ и воспользуемся равенством $dx' = |\beta x + \delta|^{-2}\, dx$. Мы получим сразу равенство (3).

Дадим вывод формулы $dx' = |\beta x + \delta|^{-2}\, dx$. Положим $dx' = a(x, g)\, dx$. Из определения функции $a(x, g)$ непосредственно следует функциональное соотношение

$$a(x, g_1 g_2) = a(x, g_1)\, a(x g_1, g_2). \tag{4}$$

(Здесь xg — результат применения к x дробно-линейного преобразования, отвечающего g.) Этому же соотношению (3) удовлетворяет, как легко видеть, и функция $|\beta x + \delta|^{-2}$.

Заметим теперь, что любую матрицу g можно представить как произведение матриц следующих типов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Поэтому, в силу соотношения (4), функция $a(x, g)$ однозначно определена своими значениями на матрицах g вида (5). Итак, нам достаточно убедиться, что

$$a(x, g) = |\beta x + \delta|^{-2} \tag{6}$$

для матриц g вида (5). Но для этих матриц равенство (6) очевидно. В самом деле, если $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, то $x' = x + \gamma$, а потому $dx' = dx$; если $g = \begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, то $x' = \delta^{-2}x$, а потому $dx' = |\delta|^{-2}dx$. Наконец, если $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, то $x' = -\frac{1}{x}$; так как мультипликативно-инвариантная мера $d^*x = |x|^{-1}dx$ сохраняется при этом преобразовании, то имеем $|x'|^{-1}dx' = |x|^{-1}dx$, откуда $dx' = |x|^{-2}dx$.

2. Другие реализации представлений непрерывной серии. Другую реализацию представлений непрерывной серии мы получим, перейдя от функций $\varphi(x)$ к их преобразованиям Фурье

$$\tilde{\varphi}(u) = \int \varphi(x)\chi(-ux)\,dx. \tag{1}$$

Найдем выражение для оператора $T_\pi(g)$ в этой реализации. Оператор $T_\pi(g)$ действует на функцию $\tilde{\varphi}(u)$ по следующей формуле:

$$T_\pi(g)\tilde{\varphi}(u) = \int [T_\pi(g)\varphi(x)]\chi(-ux)\,dx =$$
$$= \int \varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)\pi(\beta x + \delta)|\beta x + \delta|^{-1}\chi(-ux)\,dx. \tag{2}$$

Нам остается выразить правую часть равенства (2) снова через функцию $\tilde{\varphi}(u)$.

По формуле обратного преобразования Фурье имеем

$$\varphi(x) = \int \tilde{\varphi}(v)\chi(vx)\,dv.$$

Следовательно,

$$T_\pi(g)\tilde{\varphi}(u) =$$
$$= \int \chi\left(-ux + v\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)\pi(\beta x + \delta)|\beta x + \delta|^{-1}\tilde{\varphi}(v)\,dv\,dx.$$

Эту реализацию представления непрерывной серии будем дальше называть χ-реализацией.

Итак, *в χ-реализации представление непрерывной серии строится в пространстве функций* $\varphi(u)$, *для которых*

$$(\varphi, \varphi) = \int |\varphi(u)|^2 du < \infty.$$

Оператор представления $T_\pi(g)$, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, *задается формулой*

$$T_\pi(g)\varphi(u) = \int K_\pi(g \mid u, v)\varphi(v)\,dv, \tag{3}$$

где

$$K_\pi(g \mid u, v) = \\ = \int \chi\left(-ux + v\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)\pi(\beta x + \delta)\,|\beta x + \delta|^{-1}\,dx. \tag{4}$$

Рассмотрим подробнее выражение (4). Предположим сначала, что $\beta \neq 0$. В этом случае формуле (4) удобно придать несколько иной вид, сделав замену переменной $\beta x + \delta = t$. После элементарного преобразования мы получим

$$K_\pi(g \mid u, v) = \\ = |\beta|^{-1}\chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right)\int \chi\left(-\frac{1}{\beta}(ut + vt^{-1})\right)\pi(t)\,|t|^{-1}dt. \tag{5}$$

Отметим особенность полученной формулы. Мы видим, что $K_\pi(g \mid u, v)$ является произведением двух функций — функции $|\beta|^{-1}\chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right)$, одной и той же для всех представлений серии, и бесселевой функции

$$\int \chi\left(-\frac{1}{\beta}(ut + vt^{-1})\right)\pi(t)\,|t|^{-1}\,dt,$$

несущественно зависящей от g.

Теперь рассмотрим особый случай, когда $\beta = 0$. В этом случае имеем

$$K_\pi(g \mid u, v) = \chi\left(\frac{\gamma}{\delta}v\right)\pi(\delta)\,|\delta|^{-1}\int \chi\left(\left(-u + \frac{\alpha}{\delta}v\right)x\right)dx = \\ = \chi\left(\frac{\gamma}{\delta}v\right)\pi(\delta)\,|\delta|^{-1}\delta\left(-u + \frac{\alpha}{\delta}v\right).$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $\alpha = \delta^{-1}$, мы можем эту формулу переписать еще и так:

$$K_\pi(g \mid u, v) = \pi(\delta)\,|\delta|\,\chi(\delta\gamma u)\,\delta(v - \delta^2 u). \tag{6}$$

Итак, оператор $T_\pi(g)$, отвечающий матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, имеет в χ-реализации следующий вид:

$$T_\pi(g)\,\varphi(u) = \pi(\delta)\,|\delta|\,\chi(\delta\gamma u)\,\varphi(\delta^2 u). \tag{7}$$

Имеется еще одна удобная реализация представлений непрерывной серии, которую мы будем называть π-*реализацией*. Эту реализацию мы получим, перейдя от функций $\varphi(x)$ к их преобразованиям Меллина

$$F(\pi_1) = \int \varphi(x)\,\pi_1(x)\,|x|^{-\frac{1}{2}}\,dx, \tag{8}$$

где π_1 пробегает унитарные мультипликативные характеры. Из формулы обращения для преобразования Меллина (см. § 2, п. 9) следует, что

$$\int |\varphi(x)|^2\,dx = \int |F(\pi_1)|^2\,d\pi_1.$$

Найдем выражение для оператора $T_\pi(g)$ в π-реализации. По определению,

$$T_\pi(g)\,F(\pi_1) = \int [T_\pi(g)\,\varphi(x)]\,\pi_1(x)\,|x|^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$
$$= \int \varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)\pi(\beta x + \delta)\,|\beta x + \delta|^{-1}\,\pi_1(x)\,|x|^{-\frac{1}{2}}\,dx. \tag{9}$$

Остается выразить правую часть равенства (9) снова через функцию $F(\pi_1)$.

По формуле обращения для преобразования Меллина имеем

$$\varphi(x) = \int F(\pi_2)\,\pi_2^{-1}(x)\,|x|^{-\frac{1}{2}}\,d\pi_2.$$

Следовательно,

$$T_\pi(g)\,F(\pi_1) = \int \pi_2^{-1}\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)\left|\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right|^{-\frac{1}{2}}\pi(\beta x + \delta)\,\times$$
$$\times\,|\beta x + \delta|^{-1}\,\pi_1(x)\,|x|^{-\frac{1}{2}}\,F(\pi_2)\,dx\,d\pi_2.$$

Итак, *в π-реализации представление непрерывной серии строится в пространстве функций $F(\pi_1)$ на группе мультипликативных характеров π_1, для которых*

$$(F, F) = \int |F(\pi_1)|^2 d\pi_1 < \infty.$$

Оператор представления $T_\pi(g)$, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, задается формулой

$$T_\pi(g) F(\pi_1) = \int K_\pi(g \mid \pi_1, \pi_2) F(\pi_2) d\pi_2, \tag{10}$$

где

$$K_\pi(g \mid \pi_1, \pi_2) =$$
$$= \int \pi\pi_2(\beta x + \delta) |\beta x + \delta|^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \pi_2^{-1}(\alpha x + \gamma) |\alpha x + \gamma|^{-\frac{1}{2}} \pi_1(x) |x|^{-\frac{1}{2}} dx. \tag{11}$$

Выражение (11), задающее матричный элемент оператора $T_\pi(g)$ в π-представлении, уместно называть гипергеометрической функцией от π, π_1, π_2. В случае поля вещественных чисел $K_\pi(g \mid \pi_1, \pi_2)$ выражается непосредственно через гипергеометрическую функцию Гаусса.

Заметим, что если один из элементов матрицы g равен нулю, то гипергеометрическая функция (11) вырождается в B-функцию. Например, если $\alpha = 0$, то имеем

$$K_\pi(g \mid \pi_1, \pi_2) =$$
$$= \pi_2^{-1}(\gamma) |\gamma|^{-\frac{1}{2}} \int \pi\pi_2(\beta x + \delta) |\beta x + \delta|^{-\frac{1}{2}} \pi_1(x) |x|^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Наиболее простой вид имеют формулы для операторов представления, отвечающих матрицам

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}, \quad z \neq 0, \text{ и } \zeta = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta \neq 0.$$

Именно, на основании формул (10), (11) мы получаем, после элементарных преобразований, что

$$T_\pi(\delta) F(\pi_1) = \pi\pi_1^2(\delta) F(\pi_1), \tag{12}$$

$$T_\pi(z) F(\pi_1) = \int \frac{\Gamma(\pi_1\pi_0)}{\Gamma(\pi_2\pi_0)} \Gamma(\pi_1^{-1}\pi_2)\, \pi_1\pi_2^{-1}(z) F(\pi_2)\, d\pi_2, \tag{13}$$

$$T_\pi(\zeta) F(\pi_1) = \int \frac{\Gamma(\pi\pi_2\pi_0)}{\Gamma(\pi\pi_1\pi_0)} \Gamma(\pi_1\pi_2^{-1}) \pi_1^{-1}\pi_2(-\zeta) F(\pi_2)\, d\pi_2. \tag{14}$$

Удобно перейти от представления $T_\pi(g)$ к эквивалентному представлению $T'_\pi(g) = A^{-1}T_\pi(g)A$, где A — оператор умножения на функцию $\Gamma(\pi_1\pi_0)$. Очевидно, что ядра операторов $T'_\pi(g)$ получаются из ядер операторов $T_\pi(g)$ умножением на функцию $\frac{\Gamma(\pi_2\pi_0)}{\Gamma(\pi_1\pi_0)}$. Таким образом, мы получаем

$$T'_\pi(\delta) F(\pi_1) = \pi\pi_1^2(\delta) F(\pi_1), \tag{15}$$

$$T'_\pi(z) F(\pi_1) = \int \Gamma(\pi_1^{-1}\pi_2)\, \pi_1\pi_2^{-1}(z) F(\pi_2)\, d\pi_2, \tag{16}$$

$$T'_\pi(\zeta) F(\pi_1) =$$

$$= \int \frac{\Gamma(\pi_2\pi_0)\,\Gamma(\pi\pi_2\pi_0)}{\Gamma(\pi_1\pi_0)\,\Gamma(\pi\pi_1\pi_0)} \Gamma(\pi_1\pi_2^{-1})\, \pi_1^{-1}\pi_2(-\zeta) F(\pi_2)\, d\pi_2. \tag{17}$$

Такая реализация представления удобна тем, что в ней оператор $T'_\pi(z)$ не зависит от «номера» представления. Таким образом, поскольку матрицы z и ζ порождают всю группу G, представление $T'_\pi(g)$ полностью определяется формулой для оператора $T'_\pi(\zeta)$. В этой формуле от номера представления зависит только множитель

$$a(\pi \mid \pi_1, \pi_2) = \frac{\Gamma(\pi_2\pi_0)\,\Gamma(\pi\pi_2\pi_0)}{\Gamma(\pi_1\pi_0)\,\Gamma(\pi\pi_1\pi_0)},$$

стоящий под знаком интеграла, который и задает, таким образом, наше представление.

В § 4, п. 5 будет показано, что аналогичные формулы имеют место и для представлений дискретной серии.

3. Эквивалентность представлений непрерывной серии. Покажем, что *представления непрерывной серии* $T_\pi(g)$ *и* $T_{\pi^{-1}}(g)$ *эквивалентны.*

Для доказательства рассмотрим операторы $T_\pi(g)$ в χ-реализации. Ядро $K_\pi(g|u, v)$ оператора $T_\pi(g)$ задается следующей формулой:

$$K_\pi(g|u, v) = \\ = |\beta|^{-1}\chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right)\int \chi\left(-\frac{1}{\beta}(ut + vt^{-1})\right)\pi(t)|t|^{-1}\,dt.$$

Сделаем под интегралом замену переменной $t = vu^{-1}t'^{-1}$. Мы получим

$$K_\pi(g|u, v) = \\ = \frac{\pi(v)}{\pi(u)}|\beta|^{-1}\chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right)\int \chi\left(-\frac{1}{\beta}(ut + vt^{-1})\right)\pi^{-1}(t)|t|^{-1}\,dt,$$

т. е.

$$K_\pi(g|u, v) = \frac{\pi(v)}{\pi(u)} K_{\pi^{-1}}(g|u, v).$$

Тем самым доказано, что

$$T_\pi(g) = A^{-1}T_{\pi^{-1}}(g)\,A,$$

где A — оператор умножения на $\pi(u)$:

$$A\varphi(u) = \pi(u)\,\varphi(u).$$

Следовательно, представления $T_\pi(g)$ и $T_{\pi^{-1}}(g)$ эквивалентны.

В § 5 мы увидим, что в непрерывной серии не существует других пар эквивалентных представлений.

4. Неприводимость представлений непрерывной серии. Покажем, что представления $T_\pi(g)$ непрерывной серии неприводимы, за исключением нескольких особых значений π.

Напомним, что унитарное представление $T(g)$ называется неприводимым, если пространство представления не содержит инвариантного подпространства, отличного от нулевого. Эквивалентное определение: унитарное представление $T(g)$ называется неприводимым, если любой ограниченный оператор в пространстве представления, перестановочный со всеми операторами $T(g)$, кратен единичному оператору.

Имеют место следующие утверждения.

1°. *В случае поля комплексных чисел все представления $T_\pi(g)$ неприводимы.*

2°. *В случае поля вещественных чисел неприводимы все представления $T_\pi(g)$, за исключением особого случая, когда $\pi(x) = \operatorname{sign} x$. В особом случае $\pi(x) = \operatorname{sign} x$, представление $T_\pi(g)$ распадается на два неприводимых представления.*

3°. *В случае несвязного поля неприводимы все представления $T_\pi(g)$, за исключением случаев, когда $\pi(x) = \operatorname{sign}_\tau x$, $\tau = \mathfrak{p}$, $\varepsilon\mathfrak{p}$, ε* (см. § 1, п. 7). *В каждом из этих особых случаев представление распадается на два неприводимых представления.*

Приведем доказательство только для случая несвязного поля; для связных полей доказательство аналогично *).

Будем рассматривать представление $T_\pi(g)$ в χ-реализации. Наша задача — описать все ограниченные операторы A, перестановочные с операторами $T_\pi(g)$:

$$AT_\pi(g) = T_\pi(g)A.$$

Сначала посмотрим, что дает перестановочность A с операторами $T_\pi(g)$, где $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$. Эти операторы имеют вид

$$T_\pi(g)\varphi(u) = \chi(\gamma u)\varphi(u). \tag{1}$$

Значит, оператор A перестановочен с операторами умножения на $\chi(\gamma u)$, а потому он перестановочен и с любым оператором умножения на ограниченную функцию. Отсюда следует, что сам оператор A является оператором умножения на ограниченную функцию $a(u)$:

$$A\varphi(u) = a(u)\varphi(u).$$

Теперь посмотрим, что дает перестановочность A с операторами $T_\pi(g)$, где $g = \begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$. Эти операторы имеют вид

$$T_\pi(g)\varphi(u) = \pi(\delta)|\delta|\varphi(\delta^2 u), \tag{2}$$

*) Другое доказательство неприводимости представлений для случая поля комплексных и поля вещественных чисел см. в вып. 5 «Обобщенных функций».

Условие перестановочности A с операторами $T_\pi(g)$ записывается в виде

$$a(\delta^2 u) = a(u)$$

для любого $\delta \neq 0$. Таким образом, функция $a(u)$ постоянна на каждом классе смежности $K^*/(K^*)^2$ мультипликативной группы поля K по подгруппе квадратов. Мы покажем, что на самом деле в неособых случаях функция $a(u)$ постоянна на всем K, а в особых случаях она может принимать только два различных значения. Этим и будет доказана теорема.

Запишем условие перестановочности оператора A с оператором $T_\pi(s)$, где $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Это условие имеет вид

$$K_\pi(s|u, v)\, a(v) = a(u)\, K_\pi(s|u, v), \tag{3}$$

где

$$K_\pi(s|u, v) = \int \chi(ut + vt^{-1})\, \pi(t)\, d^*t. \tag{4}$$

Пусть $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ — два различных класса смежности $K^*/(K^*)^2$. Если мы покажем, что $K_\pi(s|u, v) \not\equiv 0$, когда $u \in K^{(1)}$, $v \in K^{(2)}$, то из соотношения (3) будет следовать, что $a(u)$ принимает одинаковые значения на $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$.

Итак, пусть $u \in K^{(1)}$, $v \in K^{(2)}$. Предположим, что $|u|$, $|v|$ настолько малы, что $\chi(ut) \equiv 1$, $\chi(vt) \equiv 1$ при $|t| \leqslant 1$. Тогда выражение для $K_\pi(s|u, v)$ может быть записано в следующем виде:

$$K_\pi(s|u, v) = \int\limits_{|t|<1} \chi(vt^{-1})\, \pi(t)\, d^*t + \\ + \int\limits_{|t|>1} \chi(ut)\, \pi(t)\, d^*t + \int\limits_{|t|=1} \pi(t)\, d^*t. \tag{5}$$

Разберем сначала случай, когда $\pi(t) \equiv 1$. В этом случае, после замены переменных, получаем

$$K_\pi(s|u, v) = \int\limits_{|t|>|v|} \chi(t)\, d^*t + \int\limits_{|t|>|u|} \chi(t)\, d^*t + (1 - q^{-1}).$$

Поскольку $\chi(t) \equiv 1$, когда $|t|$ достаточно мало, то написанное выражение заведомо не постоянно, а значит,

$K_\pi(s\,|\,u,\ v)\not\equiv 0$. Тем самым доказано, что в случае $\pi\equiv 1$ функция $a(u)$ есть константа, а потому представление $T_\pi(g)$ неприводимо.

Пусть теперь $\pi(t)\not\equiv 1$. В этом случае имеет место равенство

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1} \chi(vt^{-1})\,\pi(t)\,d^*t + \\ + \int\limits_{|t|\leqslant 1} \chi(ut)\,\pi(t)\,d^*t - \int\limits_{|t|=1} \pi(t)\,d^*t = \int \pi(t)\,d^*t = 0.$$

Сложив его с равенством (5), мы получим

$$K_\pi(s\,|\,u,\ v) = \int \chi(vt^{-1})\,\pi(t)\,d^*t + \int \chi(ut)\,\pi(t)\,d^*t,$$

где интегралы берутся по всему K. Заменой переменных получаем

$$K_\pi(s\,|\,u,\ v) = \Gamma(\pi^{-1})\,\pi(v) + \Gamma(\pi)\,\pi^{-1}(u).$$

Здесь коэффициенты $\Gamma(\pi)$, $\Gamma(\pi^{-1})$ отличны от 0. Предположим, что $\pi(u)$ не постоянно на $(K^*)^2$. Тогда $\pi(v)$ не постоянно, когда v пробегает какой-либо класс смежности $K^*/(K^*)^2$, а значит, $K_\pi(s\,|\,u,\ v)\not\equiv 0$. Этим доказано, что $a(u) = \mathrm{const}$, а потому представления $T_\pi(g)$ неприводимы, если $\pi(t)\not\equiv 1$ при $t\in(K^*)^2$.

Остается рассмотреть особые случаи, когда $\pi(t)\equiv 1$ при $t\in(K^*)^2$. Такие характеры π имеют вид $\pi_\tau(t) = \mathrm{sign}_\tau t$, где $\tau = \mathfrak{p},\ \varepsilon\mathfrak{p},\ \varepsilon$ (случай $\pi\equiv 1$ был рассмотрен нами раньше).

В этих случаях имеем, поскольку $\pi_\tau = \pi_\tau^{-1}$,

$$K_\pi(s\,|\,u,\ v) = \Gamma(\pi_\tau)\,[\mathrm{sign}_\tau u + \mathrm{sign}_\tau v].$$

Значит, если $\mathrm{sign}_\tau u = \mathrm{sign}_\tau v$, то $K_\pi(s\,|\,u,\ v)\neq 0$.

Этим доказано, что в случае $\pi(t) = \mathrm{sign}_\tau t$ функция $a(v)$ постоянна на множестве элементов v с одним и тем же значением $\mathrm{sign}_\tau v$, т. е. она принимает не более двух различных значений. Значит, представления $T_\pi(g)$, $\pi(t) = \mathrm{sign}_\tau t$, если и распадаются, то не более чем на два неприводимых представления. То, что эти представления и в самом деле распадаются на два представления, мы покажем в п. 5.

5. Разложение представлений $T_{\pi_\tau}(g)$, $\pi_\tau(t) = \operatorname{sign}_\tau t$ на неприводимые представления. Разложим пространство функций $\varphi(u)$ в прямую сумму двух подпространств: подпространства H^+ функций $\varphi(u)$, равных нулю при $\operatorname{sign}_\tau u = -1$, и подпространства H^- функций $\varphi(u)$, равных нулю при $\operatorname{sign}_\tau u = 1$. Здесь будет доказано, что *эти подпространства H^+, H^- инвариантны относительно операторов $T_{\pi_\tau}(g)$, $\pi_\tau(t) = \operatorname{sign}_\tau t$.*

Прежде всего напомним, что любую матрицу g можно представить в виде произведения матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ и матрицы $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому достаточно убедиться, что подпространства H^+, H^- инвариантны относительно операторов, отвечающих только этим матрицам.

Очевидно, что операторы $T_{\pi_\tau}(g)$, отвечающие матрицам $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, сохраняют пространства H^+ и H^{-1} (поскольку первые из них сводятся к умножению $\varphi(u)$ на функцию $\chi(\gamma u)$, а вторые переводят $\varphi(u)$ в $\pi(\delta)|\delta|\varphi(\delta^2 u)$, см. п. 4, формулы (1) и (2)). Поэтому остается доказать только инвариантность подпространств H^+, H^- относительно оператора $T_{\pi_\tau}(s)$:

$$T_{\pi_\tau}(s)\varphi(u) = \int \chi(ut + vt^{-1}) \operatorname{sign}_\tau t\, \varphi(v)\, d^*t\, dv.$$

Для доказательства перейдем от функций $\varphi(u)$ к их преобразованиям Меллина

$$F(\pi) = \int \varphi(u)|u|^{\frac{1}{2}} \pi(u)\, d^*u.$$

Запишем, как действует оператор $T_{\pi_\tau}(g)$ на функции $F(\pi)$. Имеем

$$T_{\pi_\tau}(s) F(\pi) = \int \chi(ut + vt^{-1}) \operatorname{sign}_\tau t\, \varphi(v)|u|^{\frac{1}{2}} \pi(u)\, d^*t\, dv\, d^*u.$$

Интегрируя сначала по u, а затем по t, получаем отсюда

$$T_{\pi_\tau}(s)\,F(\pi) = \Gamma(\pi\pi_1)\,\Gamma(\pi\pi_1\pi_\tau)\int \pi^{-1}\pi_1^{-1}\pi_\tau(v)\,\varphi(v)\,dv,$$

где $\pi_1(v) = |v|^{\frac{1}{2}}$. Подставим в правую часть вместо функции $\varphi(v)$ ее выражение через преобразование Меллина $F(\pi)$:

$$\varphi(v) = \pi_1^{-1}(v)\int \pi'^{-1}(v)\,F(\pi')\,d\pi'.$$

После интегрирования по v и по π' мы получим следующую формулу для оператора $T_{\pi_\tau}(s)$:

$$T_{\pi_\tau}(s)\,F(\pi) = \Gamma(\pi\pi_1)\,\Gamma(\pi\pi_1\pi_\tau)\,F(\pi^{-1}\pi_\tau). \tag{1}$$

Покажем, что оператор $T_{\pi_\tau}(s)$, определенный формулой (1), действительно сохраняет подпространства H^+, H^-. Для этого запишем условие принадлежности функции $F(\pi)$ подпространству H^+. Условие, что $\varphi(u)$ принадлежит подпространству H^+, записывается так:

$$\varphi(u)\,\pi_\tau(u) = \varphi(u),$$

где $\pi_\tau(u) = \operatorname{sign}_\tau u$. Очевидно, что в преобразовании Меллина это условие запишется так:

$$F(\pi\pi_\tau) = F(\pi). \tag{2}$$

Пусть теперь функция $F(\pi)$ принадлежит H^+, т. е. удовлетворяет условию (2), и пусть $F_1(\pi) = T_{\pi_\tau}(s)\,F(\pi)$. Тогда, принимая во внимание, что $\pi_\tau^2 = 1$, мы получаем из формулы (1):

$$\begin{aligned} F_1(\pi\pi_\tau) &= \Gamma(\pi\pi_1\pi_\tau)\,\Gamma(\pi\pi_1)\,F(\pi^{-1}) = \\ &= \Gamma(\pi\pi_1\pi_\tau)\,\Gamma(\pi\pi_1)\,F(\pi^{-1}\pi_\tau) = F_1(\pi). \end{aligned}$$

Значит, вместе с $F(\pi)$ функция $F_1(\pi) = T_{\pi_\tau}(s)\,F(\pi)$ также принадлежит подпространству H^+. Тем самым инвариантность подпространства H^+ доказана.

6. Квазирегулярное представление группы G и его разложение на неприводимые представления. *Квазирегулярным представлением* группы G мы назовем представление в пространстве функций $f(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in K$, для которых

$$(f, f) = \int |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < \infty.$$

Оператор представления $T(g)$, отвечающий матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, задается формулой

$$T(g) f(x_1, x_2) = f(\alpha x_1 + \gamma x_2, \beta x_1 + \delta x_2). \tag{1}$$

Очевидно, что $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$ для любых g_1, g_2 из G, и

$$(T(g) f, T(g) f) = (f, f).$$

Таким образом, операторы $T(g)$ образуют унитарное представление группы G.

Мы получим здесь разложение представления $T(g)$ на неприводимые представления основной серии.

Назовем функцию $f(x_1, x_2)$ однородной функцией веса π, где π — мультипликативный характер на K, если выполняется условие

$$f(tx_1, tx_2) = \pi(t) |t|^{-1} f(x_1, x_2) \tag{2}$$

для любого $t \neq 0$.

Каждая функция $f(x_1, x_2)$ может быть разложена на однородные функции. В самом деле, сопоставим каждому мультипликативному характеру π функцию

$$f_\pi(x_1, x_2) = \int f(tx_1, tx_2) \pi^{-1}(t)\, dt. \tag{3}$$

Очевидно, что функция $f_\pi(x_1, x_2)$ является однородной функцией веса π.

По формуле обратного преобразования Меллина мы имеем

$$f(tx_1, tx_2) = |t|^{-1} \int f_\pi(x_1, x_2) \pi(t)\, d\pi, \tag{4}$$

где $d\pi$ — подходящим образом нормированная инвариантная мера на группе характеров. Из формулы (4) при $t = 1$ мы получаем искомое разложение функции $f(x_1, x_2)$ на однородные функции

$$f(x_1, x_2) = \int f_\pi(x_1, x_2)\, d\pi. \tag{5}$$

Функции $f_\pi(x_1, x_2)$, будучи однородными, однозначно определяются своими значениями на прямой $x_2 = 1$. Мы положим

$$\varphi_\pi(x) = f_\pi(x, 1). \tag{6}$$

Покажем, что *справедлива следующая формула Планшереля*:

$$\int |f(x_1, x_2)|^2\, dx_1\, dx_2 = \int |\varphi_\pi(x)|^2\, dx\, d\pi. \tag{7}$$

В самом деле, по формуле Планшереля для преобразования Меллина имеем на основании (4)

$$\int |f(tx_1, tx_2)|^2 |t|\, dt = \int |f_\pi(x_1, x_2)|^2\, d\pi.$$

Подставляя сюда $x_2 = 1$, получаем

$$\int |f(tx, t)|^2 |t|\, dt = \int |\varphi_\pi(x)|^2\, d\pi. \tag{8}$$

Интегрируя обе части равенства (8) по x, получаем формулу Планшереля (7).

Посмотрим, как действует оператор $T(g)$ на функции $\varphi_\pi(x)$. Имеем

$$T(g)\varphi_\pi(x) = T(g) f_\pi(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1 = x\\ x_2 = 1}} =$$

$$= f_\pi(\alpha x + \gamma, \beta x + \delta) = f_\pi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}, 1\right)\pi(\beta x + \delta)\,|\beta x + \delta|^{-1}.$$

Таким образом,

$$T(g)\varphi_\pi(x) = \varphi_\pi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)\pi(\beta x + \delta)\,|\beta x + \delta|^{-1}.$$

Мы видим, что функции $\varphi_\pi(x)$ преобразуются по представлению непрерывной серии, отвечающему характеру π.

Тем самым формулы (5), (7) задают нам разложение квазирегулярного представления группы G на неприводимые унитарные представления непрерывной серии.

7. Дополнительная серия неприводимых унитарных представлений группы G. Здесь будет дано описание еще одной серии неприводимых унитарных представлений группы G, которая определяется по аналогии со случаем поля комплексных и поля вещественных чисел (см. вып. 5 «Обобщенных функций»).

Каждое представление этой серии задается вещественным числом $\rho \neq 0$, принадлежащим интервалу $-1 < \rho < 1$. Оно строится в пространстве функций $\varphi(x)$ на K, для которых

$$(\varphi, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\pi_\rho)} \int |x_1 - x_2|^{\rho-1} \varphi(x_1) \overline{\varphi(x_2)}\, dx_1\, dx_2 < \infty.$$

Здесь через π_ρ обозначен характер $\pi_\rho(x) = |x|^\rho$,

$$\Gamma(\pi_\rho) = \int \chi(x) |x|^{\rho-1} dx. \tag{1}$$

Оператор представления $T_\rho(g)$, отвечающий матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, задается следующей формулой:

$$T_\rho(g)\varphi(x) = \varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) |\beta x + \delta|^{-\rho-1}. \tag{2}$$

Легко непосредственно убедиться, что

$$T_\rho(g_1 g_2) = T_\rho(g_1) T_\rho(g_2)$$

для любых матриц g_1, g_2 из G и что

$$(T_\rho(g)\varphi, T_\rho(g)\varphi) = (\varphi, \varphi).$$

Таким образом, операторы $T_\rho(g)$ задают унитарное представление группы G.

Построенную серию представлений мы будем называть *дополнительной серией*.

Можно доказать, что представления $T_\rho(g)$ и $T_{-\rho}(g)$ эквивалентны (доказательство для случая поля вещественных и поля комплексных чисел см. в вып. 5 «Обобщенных функций»; для несвязных полей доказательство аналогично). Поэтому мы можем дальше предполагать, что $0 < \rho < 1$.

Другую реализацию представлений дополнительной серии мы получим, перейдя от функций $\varphi(x)$ к их преобразованиям Фурье

$$\tilde{\varphi}(u) = \int \varphi(x) \chi(-ux)\, dx.$$

Формула для оператора $T_\rho(g)$ в этой реализации имеет следующий вид:

$$T_\rho(g)\varphi(u) = \int K_\rho(g \mid u, v)\varphi(v)\, dv, \tag{3}$$

где

$$K_\rho(g \mid u, v) = \int \chi\left(-ux + v\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) |\beta x + \delta|^{-\rho-1}\, dx. \tag{4}$$

Выражение для ядра $K_\rho(g \mid u, v)$ можно записать в несколько иной форме. Именно,

$$K_\rho(g \mid u, v) =$$
$$= |\beta|^{-1}\chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \int \chi\left(-\frac{1}{\beta}(ut + vt^{-1})\right) |t|^{-\rho-1}\, dt,$$

если $\beta \neq 0$

$$K_\rho(g \mid u, v) = |\delta|^{-\rho+1}\chi(\delta\gamma u)\,\delta(\delta^2 u - v),$$

если $\beta = 0$.

Найдем выражение для скалярного произведения (φ, φ) в новой реализации. Заметим, что преобразование Фурье переводит свертку функций в произведение. Поскольку преобразование Фурье функции $|x|^{\rho-1}$ есть

$$\widetilde{|x|^{\rho-1}} = \Gamma(\pi_\rho)|u|^{-\rho},$$

где $\pi_\rho(x) = |x|^\rho$, то имеем

$$(\varphi, \varphi) = \int |u|^{-\rho} |\varphi(u)|^2\, du. \tag{5}$$

Итак, представление $T_\rho(g)$ дополнительной серии $(0 < \rho < 1)$ может быть реализовано в пространстве функций $\varphi(u)$ на K со скалярным произведением (5). Оператор представления в этой реализации задается формулами (3), (4).

Все представления дополнительной серии неприводимы.

Доказательство этого ведется дословно так же, как и в случае основной непрерывной серии (см. п. 4).

8. Особое представление группы G. В п. 7 мы построили дополнительную серию неприводимых унитарных представлений $T_\rho(g)$, где $0<\rho<1$. Посмотрим, какие представления получаются в предельном случае, когда $\rho=0$ или $\rho=1$.

Очевидно, что при $\rho=0$ мы получаем представление основной непрерывной серии, отвечающее характеру $\pi\equiv 1$.

Мы увидим сейчас, что при $\rho=1$ возникает новое представление группы G.

Итак, мы рассматриваем представление

$$T_1(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)|\beta x+\delta|^{-2}. \tag{1}$$

Выясним, как следует определить пространство функций $\varphi(x)$, чтобы операторы $T_1(g)$ были унитарными операторами в этом пространстве.

Заметим, что формула скалярного произведения

$$(\varphi,\ \varphi)=\frac{1}{\Gamma(\pi_\rho)}\int|x_1-x_2|^{\rho-1}\varphi(x_1)\overline{\varphi(x_2)}\,dx_1\,dx_2 \tag{2}$$

теряет смысл при $\rho=1$, поскольку $\Gamma(\pi_\rho)|_{\rho=1}=0$. Поэтому наложим на функции $\varphi(x)$ дополнительное условие

$$\int\varphi(x)\,dx=0. \tag{3}$$

Для таких функций имеем

$$\int|x_1-x_2|^{\rho-1}\varphi(x_1)\overline{\varphi(x_2)}\,dx_1\,dx_2|_{\rho=1}=0,$$

а выражение (2) стремится при $\rho\to 1$ к конечному пределу

$$(\varphi,\ \varphi)=c\int\ln|x_1-x_2|\,\varphi(x_1)\,\overline{\varphi(x_2)}\,dx_1\,dx_2\ ^{*)}. \tag{4}$$

---

*) $\ln|x|$ есть присоединенная однородная функция степени однородности $\pi\equiv 1$.

Покажем, что функции $\varphi(x)$, удовлетворяющие условию (3), образуют инвариантное пространство относительно операторов $T_{\mathrm{I}}(g)$. В самом деле, имеем

$$\int T_{\mathrm{I}}(g)\varphi(x)\,dx = \int \varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)|\beta x+\delta|^{-2}\,dx = \int \varphi(x)\,dx.$$

Следовательно, если $\int \varphi(x)\,dx = 0$, то и

$$\int T_{\mathrm{I}}(g)\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Итак, мы получили представление в пространстве функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int \varphi(x)\,dx = 0,$$

$$(\varphi,\ \varphi) = \int \ln|x_1 - x_2|\,\varphi(x_1)\,\overline{\varphi(x_2)}\,dx_1\,dx_2 < \infty.$$

Оператор представления $T_{\mathrm{I}}(g)$ задается следующей формулой:

$$T_{\mathrm{I}}(g)\,\varphi(x) = \varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)|\beta x+\delta|^{-2}.$$

Это представление $T_{\mathrm{I}}(g)$ будем называть *особым представлением* *).

Если от функций $\varphi(x)$ перейти к их преобразованиям Фурье $\tilde{\varphi}(u) = \int \varphi(x)\,\chi(-ux)\,dx$, то мы получим другую реализацию особого представления. В этой реализации особое представление строится в пространстве функций $\varphi(u)$, для которых

$$(\varphi,\ \varphi) = \int |u|^{-1}\,|\varphi(u)|^2\,du < \infty$$

(и тем самым $\varphi(0) = 0$). Оператор представления $T_{\mathrm{I}}(g)$ имеет вид

$$T_1(g)\,\varphi(u) = \int K_1(g\,|\,u,\ v)\,\varphi(v)\,dv,$$

---

*) В случае связного поля представление $T_1(g)$ является одним из представлений непрерывной или дискретной серии. Поэтому термин «особое представление» будет относиться только к несвязным полям.

где

$$K_{\mathrm{I}}(g \mid u,\ v) = \int \chi\left(-ux + v\,\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right) |\beta x + \delta|^{-2}\, dx.$$

9. Представления в пространствах $\mathscr{D}_\pi$. В этом пункте будет дано краткое описание неунитарных представлений группы G *).

Каждому мультипликативному характеру $\pi(x)$ поля K (здесь уже не требуется, чтобы было $|\pi(x)| \equiv 1$) мы сопоставим функциональное пространство $\mathscr{D}_\pi$. Это пространство состоит из функций $f(x_1,\ x_2)$, $x_1,\ x_2 \in K$, удовлетворяющих следующим двум требованиям:

1. В случае связного поля K функции $f(x_1,\ x_2)$ непрерывны и бесконечно дифференцируемы всюду, кроме точки (0, 0). Если K несвязно, то для матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, достаточно близких к единичной,

$$f(\alpha x_1 + \gamma x_2,\ \beta x_1 + \delta x_2) \equiv f(x_1,\ x_2). \qquad (1)$$

2. Функции $f(x_1,\ x_2)$ являются однородными функциями веса π, т. е.

$$f(tx_1,\ tx_2) = \pi(t)\,|t|^{-1} f(x_1,\ x_2) \qquad (2)$$

для любого $t \neq 0$.

В пространстве $\mathscr{D}_\pi$ можно ввести естественным образом топологию, относительно которой оно оказывается полным пространством.

Зададим представление группы G в пространстве $\mathscr{D}_\pi$. Если $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, то соответствующий оператор представления $T_\pi(g)$ определим по формуле

$$T_\pi(g) f(x_1,\ x_2) = f(\alpha x_1 + \gamma x_2,\ \beta x_1 + \delta x_2). \qquad (3)$$

Возникает вопрос о неприводимости и эквивалентности представлений $T_\pi(g)$**). Для случая поля комплексных и поля

*) Подробно об этих представлениях для случая связного поля K см. в вып. 5 «Обобщенных функций».

**) По поводу определений неприводимости и эквивалентности в пространствах $\mathscr{D}_\pi$ см. там же.

вещественных чисел этот вопрос подробно рассматривался в вып. 5 «Обобщенных функций». Здесь мы сформулируем без доказательств аналогичные результаты для случая несвязного поля.

Назовем *особыми точками* в группе мультипликативных характеров π характеры $\pi(x)=|x|$ и $\pi(x)=|x|^{-1}$.

1°. Два представления $T_{\pi_1}(g)$ и $T_{\pi_2}(g)$, где π_1 — неособая точка, эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $\pi_1=\pi_2$, либо $\pi_1=\pi_2^{-1}$.

2°. В неособых точках π представления $T_\pi(g)$ неприводимы, за исключением случаев, когда $\pi(x)=\operatorname{sign}_\tau x$. В случае $\pi(x)=\operatorname{sign}_\tau x$ представление $T_\pi(g)$ распадается в прямую сумму двух неприводимых представлений.

3°. Пусть $\pi(x)=|x|$. Тогда в пространстве $\mathscr{D}_\pi$ имеется одномерное инвариантное подпространство $\mathscr{E}_\pi$. Оно состоит из функций $f(x_1, x_2)=\text{const}$. В пространстве $\mathscr{D}_{\pi^{-1}}$ также имеется инвариантное подпространство $\mathscr{F}_{\pi^{-1}}$, состоящее из функций $f(x_1, x_2)$ таких, что

$$\int f(x, 1)\,dx=0.$$

Очевидно, что фактор-пространство $\mathscr{D}_{\pi^{-1}}/\mathscr{F}_{\pi^{-1}}$ одномерно и, следовательно, $\mathscr{D}_{\pi^{-1}}/\mathscr{F}_{\pi^{-1}}\cong\mathscr{E}_\pi$. Можно показать, что $\mathscr{D}_\pi/\mathscr{E}_\pi\cong\mathscr{F}_{\pi^{-1}}$, т. е. представление в подпространстве $\mathscr{F}_{\pi^{-1}}$ эквивалентно представлению в фактор-пространстве $\mathscr{D}_\pi/\mathscr{E}_\pi$.

Теперь выясним, при каких π в пространстве $\mathscr{D}_\pi$ можно ввести скалярное произведение, инвариантное относительно операторов представления. В тех случаях, когда это возможно, мы можем пополнить $\mathscr{D}_\pi$ относительно этого скалярного произведения и получить унитарное представление группы G. Для связных полей этот вопрос был исследован в вып. 5 «Обобщенных функций». Сформулируем без доказательства аналогичные результаты для несвязных полей.

Инвариантное скалярное произведение в пространстве $\mathscr{D}_\pi$ существует тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1°. $|\pi(x)| \equiv 1$; соответствующие унитарные представления группы G — это представления основной непрерывной серии, рассмотренные в п. 1.

2°. $\pi(x) = |x|^{\rho}$, где ρ — вещественное число, $0 < |\rho| < 1$; соответствующие унитарные представления группы G — это представления дополнительной серии, рассмотренные в п. 7.

Кроме того, при $\pi(x) = |x|^{-1}$ инвариантное скалярное произведение существует в подпространстве $\mathcal{F}_{\pi}$ функций из $\mathcal{D}_{\pi}$, удовлетворяющих условию

$$\int f(x, 1)\,dx = 0,$$

соответствующее унитарное представление группы G — это особое представление, рассмотренное в п. 8.

Отметим, что при описании всех неприводимых представлений группы G между случаем связного поля K и случаем несвязного поля K имеется одно существенное различие. Именно, в случае связного поля нам достаточно рассмотреть пространства $\mathcal{D}_{\pi}$, а также все их инвариантные подпространства и фактор-пространства (в тех случаях, когда $\mathcal{D}_{\pi}$ приводимы). Можно показать (см вып. 5), что при этом получаются все с точностью до эквивалентности неприводимые представления группы G. В случае несвязного поля K это не так: представления дискретной серии, которые будут построены в § 4, не эквивалентны представлениям в пространствах $\mathcal{D}_{\pi}$.

10. Сферические функции. Назовем неприводимое представление группы G представлением класса I, если в пространстве представления существует вектор, инвариантный относительно подгруппы U целочисленных матриц (т. е. матриц, все элементы которых являются ц е л ы м и $\mathfrak{p}$-адическими числами).

Выясним, какие из представлений непрерывной серии принадлежат классу I. Как мы знаем, представление непрерывной серии $T_{\pi}(g)$ может быть реализовано в пространстве функций $f(x) = f(x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию однородности

$$f(tx) = \pi(t)\,|t|^{-1} f(x)$$

для любого $t \neq 0$.

Будем искать в этом пространстве функцию, инвариантную относительно операторов $T(u)$ и $u \in U$.

Назовем нормой $|x|$ вектора $x=(x_1, x_2)$ максимум норм его координат:

$$|x| = \max(|x_1|, |x_2|). \tag{1}$$

Легко убедиться, что любые два вектора x', x'', нормы которых совпадают, могут быть переведены друг в друга некоторым преобразованием из U. Отсюда непосредственно следует, что любая функция, инвариантная относительно компактной подгруппы U, имеет вид

$$f = F(|x|).$$

На основании условия однородности получаем, что

$$f = C\pi(|x|)|x|^{-1} = C|x|^{s-1}.$$

Отсюда заключаем: вектором, инвариантным относительно подгруппы U целочисленных матриц, обладают те и только те неприводимые представления непрерывной серии, которые отвечают характеру

$$\pi(x) = |x|^s.$$

Этот вектор определен однозначно, с точностью до постоянного множителя и имеет следующий вид:

$$f_0 = \sqrt{\frac{q}{1+q}}\,|x|^{s-1},$$

где $|x|$ — норма вектора $x=(x_1, x_2)$, определяемая равенством (1). Множитель $\sqrt{\frac{q}{1+q}}$ подобран из условия, что $\|f_0\| = 1$.

Элементарной сферической функцией на группе G, отвечающей неприводимому представлению класса I, назовем функцию $\varphi(g)$ на группе G, определяемую следующей формулой:

$$\varphi(g) = (T(g)f_0, f_0),$$

где f_0 — вектор в пространстве представления, инвариантный относительно подгруппы U и такой, что $\|f_0\| = 1$, а скобки обозначают скалярное произведение.

Из определения непосредственно следует, что функция $\varphi(g)$ постоянна на двусторонних классах смежности по подгруппе U, т. е.

$$\varphi(u_1 g u_2) = \varphi(g) \quad \text{для любых} \quad u_1, \ u_2 \in U.$$

Можно показать, что любая матрица $g \in G$ представима в следующем виде:

$$g = u_1 \delta u_2,$$

где u_1, $u_2 \in U$, а δ — диагональная матрица вида

$$\delta = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}^{-n} & 0 \\ 0 & \mathfrak{p}^{n} \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0.$$

Таким образом, сферическая функция $\varphi(g)$ полностью определяется своими значениями на матрицах δ.

Вычислим $\varphi(\delta)$. Пусть для определенности $T(g)$ — представление основной серии, т. е. $s = i\rho$ — мнимое число. В этом случае скалярное произведение задается следующей формулой:

$$(f_1, f_2) = \int f_1(t, 1) \overline{f_2(t, 1)} \, dt.$$

Таким образом, имеем

$$\varphi(\delta) = \frac{q}{q+1} \int [\max(q^n |t|, q^{-n})]^{s-1} [\max(|t|, 1)]^{-s-1} \, dt.$$

Разобьем этот интеграл на три интеграла — интеграл по области, где $|t| \leqslant q^{-2n}$, интеграл по области, где $q^{-2n} < |t| \leqslant 1$, и интеграл по области, где $|t| > 1$. Мы получим

$$\frac{q+1}{q} \varphi(\delta) = q^{-n(s-1)} \int\limits_{|t| \leqslant q^{-2n}} dt + q^{n(s-1)} \int\limits_{q^{-2n} < |t| \leqslant 1} |t|^{s-1} \, dt + $$
$$+ q^{n(s-1)} \int\limits_{|t| > 1} |t|^{-2} \, dt.$$

Все интегралы, входящие в это выражение, легко вычисляются. Именно,

$$\int\limits_{|t|\leqslant q^{-2n}} dt = q^{-2n}; \qquad \int\limits_{|t|>1} |t|^{-2}\, dt = q^{-1},$$

$$\int\limits_{q^{-2n}<|t|\leqslant 1} |t|^{s-1}\, dt =$$

$$= (1-q^{-1})(1+q^{-s}+q^{-2s}+\ldots+q^{-(2n-1)s}) =$$

$$= (1-q^{-1})\frac{1-q^{-2ns}}{1-q^{-s}}.$$

В результате получаем

$$\frac{q+1}{q}\varphi(\delta) = q^{-ns-n} + (1-q^{-1})\, q^{-n}\frac{q^{ns}-q^{-ns}}{1-q^{-s}} + q^{ns-n-1}.$$

После элементарных преобразований получаем следующую окончательную формулу для сферической функции:

$$\varphi(\delta) = q^{-n}\frac{q^{1/2}\left(q^{(n+1/2)s}-q^{-(n+1/2)s}\right)-q^{-1/2}\left(q^{(n-1/2)s}-q^{-(n-1/2)s}\right)}{\left(q^{s/2}-q^{-s/2}\right)\left(q^{1/2}+q^{-1/2}\right)}.$$

11. Оператор орисферического автоморфизма. Следуя главе I, будем называть орисферическими подгруппами группы G подгруппу Z матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$, а также все подгруппы, сопряженные с Z. Орисферами в однородном пространстве относительно X группы G назовем орбиты орисферических подгрупп. Таким образом, любая орисфера на X состоит из точек вида

$$x_z = x_0 g_1 z g_2, \tag{1}$$

где x_0 — фиксированная точка в X, g_1, g_2 — фиксированные элементы группы G, а z пробегает подгруппу Z.

Из определения следует, что любое транзитивное семейство орисфер на X либо совпадает с пространством классов смежности $\Omega = Z \setminus G$, либо получается из Ω дополнительными отождествлениями точек. Условимся называть Ω *пространством орисфер*. Это пространство Ω

изоморфно двумерному аффинному пространству над K, из которого выброшено начало координат.

Найдем все орисферы в пространстве Ω. Будем задавать орисферы формулой (1), где x_0 — точка пространства Ω, отвечающая единичному классу. Рассмотрим матрицу

$$g_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

в формуле (1). Покажем, что *если* $\beta = 0$, *то орисфера* (1) *вырождается в точку*. В самом деле, в этом случае имеем $g_1 z = z' g_1$, где $z' \in Z$. Следовательно, поскольку $x_0 z = x_0$, то $x_z = x_0 g_1 g_2$ для любого z.

Пусть теперь $\beta \neq 0$. В этом случае матрицу g_1 можно представить в виде

$$g_1 = z_1 s \delta z_2,$$

где z_1, $z_2 \in Z$, δ — диагональная матрица и

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом, уравнение орисферы (1) принимает следующий вид:

$$x_z = x_0 s z \delta g_2. \tag{3}$$

Итак, мы видим, что *невырожденные орисферы в пространстве* Ω *образуют однородное семейство*. Именно, все они получаются групповыми сдвигами из орисферы $x_z = x_0 s z$.

Если перейти в (3) к координатной записи, приняв во внимание, что $x_0 = (1, 0)$, то мы получим следующее уравнение орисферы:

$$x_1 = \alpha z + \gamma, \quad x_2 = \beta z + \delta, \quad z \in K, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{4}$$

Таким образом, *орисферами в пространстве* Ω *точек* $x = (x_1, x_2)$, $x \neq 0$ *являются всевозможные прямые, не проходящие через начало координат.*

Пусть $\varphi(x)$ — основная функция в пространстве Ω. Сопоставим ей интегралы функции $\varphi(x)$ по всевозможным орисферам (т. е. прямым) в пространстве Ω:

$$\psi(g) = \int_Z \varphi(x_0 s z g)\, dz. \tag{5}$$

Заметим, что $\psi(zg) = \psi(g)$ для любого $z \in Z$. Таким образом, ψ можно рассматривать как функцию в пространстве $\Omega = Z \setminus G$ и писать $\psi(x)$ вместо $\psi(g)$.

Итак, отображение

$$B\colon \qquad \varphi(x) \to \psi(x) \tag{6}$$

переводит функции на Ω снова в функции на Ω. Это отображение B назовем *орисферическим автоморфизмом*.

В координатной записи оператор B задается, как нетрудно видеть, следующей формулой:

$$B\varphi(x_1, x_2) = \int_K \varphi(x_1 z + y_1, x_2 z + y_2)\, dz, \tag{7}$$

где y_1, y_2 — произвольные элементы из K, связанные с x_1, x_2 соотношением

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1.$$

Например, при $x_1 \neq 0$ формулу (7) можно записать в виде

$$B\varphi(x_1, x_2) = \int_K \varphi(x_1 z, x_2 z + x_1^{-1})\, dz. \tag{8}$$

Укажем основные свойства оператора B.

1. *Оператор B перестановочен с операторами группового сдвига $f(x) \to f(xg)$.*

Это непосредственно следует из формулы (5).

2. *Оператор B переводит однородные функции веса π *) в однородные функции веса π^{-1}.*

Это непосредственно следует из формулы (8).

Из свойства 2 оператора B следует, что оператор B^2 *переводит в себя каждое пространство $\mathcal{D}_\pi$ однородных функций*. Поскольку пространство $\mathcal{D}_\pi$ неприводимо,

---

*) То есть функции, удовлетворяющие соотношению

$$\varphi(tx) = \pi(t)\,|t|^{-1}\varphi(x), \quad t \in K.$$

а оператор B^2 перестановочен с операторами представления, то этот оператор на каждом пространстве $\mathscr{D}_\pi$ кратен единичному оператору:

$$B^2\varphi_\pi = \lambda(\pi)\varphi_\pi$$

для любой функции $\varphi_\pi \in \mathscr{D}_\pi$.

Наша основная задача — вычислить множитель пропорциональности $\lambda(\pi)$. В этом пункте множитель $\lambda(\pi)$ будет сосчитан для поля вещественных чисел и для несвязного поля (см. формулы (15), (30)).

Введем две однородные функции веса π. Для их построения продолжим характер π до мультипликативного характера на квадратичном расширении $K(\sqrt{\varepsilon})$ поля K. Полученный характер по-прежнему будем обозначать через π. Положим

$$\varphi_\pi^{(1)}(x, y) = \pi(x+\sqrt{\varepsilon}\, y)\,|x+\sqrt{\varepsilon}\, y|^{-1},$$
$$\varphi_\pi^{(2)}(x, y) = \pi(x-\sqrt{\varepsilon}\, y)\,|x-\sqrt{\varepsilon}\, y|^{-1},$$

где $x, y \in K$.

Вычислим $B\varphi_\pi^{(1)}$ и $B\varphi_\pi^{(2)}$.

Сначала рассмотрим случай поля K вещественных чисел. В этом случае имеем ($\sqrt{\varepsilon} = i$):

$$B\varphi_\pi^{(1)}(x, y) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(xz + i(yz + x^{-1}))\,|xz + i(yz + x^{-1})|^{-1}\, dz.$$

Преобразуем этот интеграл. Имеем

$$xz + i(yz + x^{-1}) = (x+iy)\left(z + \frac{i + x^{-1}y}{x^2+y^2}\right) = \\ = (x-iy)^{-1}\left[(x^2+y^2)\left(z + \frac{x^{-1}y}{x^2+y^2}\right) + i\right].$$

Следовательно, после подходящей замены переменной получаем

$$B\varphi_\pi^{(1)}(x, y) = \pi^{-1}(x-iy)\,|x-iy|^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(z+i)\,|z+i|^{-1}\, dz.$$

Итак,

$$B\varphi_{\pi}^{(1)}(x,\ y)=\lambda^{(1)}(\pi)\,\varphi_{\pi^{-1}}^{(2)}(x,\ y), \tag{9}$$

где

$$\lambda^{(1)}(\pi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(z+i)\,|z+i|^{-1}\,dz. \tag{10}$$

Интеграл (10) может быть непосредственно выражен через классическую B-функцию. Именно, пусть

$$\pi(x)=|x|^{s}\operatorname{sign}^{\nu}x, \quad \nu=0,\ 1.$$

Зададим расширение характера π на поле комплексных чисел следующей формулой:

$$\pi(z)=|z|^{s}e^{\nu\arg z}. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что тогда

$$\lambda^{(1)}(\pi)=\begin{cases} B\left(-\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\right), & \text{когда} \quad \nu=0,\\ iB\left(-\frac{s-1}{2},\ \frac{1}{2}\right), & \text{когда} \quad \nu=1. \end{cases} \tag{12}$$

Аналогично мы получаем, что

$$B\varphi_{\pi}^{(2)}(x,\ y)=\lambda^{(2)}(\pi)\,\varphi_{\pi^{-1}}^{(1)}(x,\ y), \tag{13}$$

где

$$\lambda^{(2)}(\pi)=(-1)^{\nu}\,\lambda^{(1)}(\pi).$$

Из этих формул следует, что

$$B^{2}\varphi_{\pi}^{(1)}=\lambda(\pi)\,\varphi_{\pi}^{(1)}, \quad B^{2}\varphi_{\pi}^{(2)}=\lambda(\pi)\,\varphi_{\pi}^{(2)}, \tag{14}$$

где

$$\lambda(\pi)=\lambda^{(1)}(\pi)\,\lambda^{(2)}\left(\pi^{-1}\right)=\begin{cases} -\frac{2\pi}{s}\operatorname{ctg}\frac{\pi s}{2}, & \text{когда} \quad \nu=0,\\ \frac{2\pi}{s}\operatorname{tg}\frac{\pi s}{2}, & \text{когда} \quad \nu=1. \end{cases} \tag{15}$$

Теперь рассмотрим случай несвязного поля K.

В этом случае имеем

$$B\varphi_\pi^{(1)}(x, y) =$$
$$= \int_K \pi\left(xz + \sqrt{\varepsilon}\,(yz + x^{-1})\right) \left| xz + \sqrt{\varepsilon}\,(yz + x^{-1}) \right|^{-1} dz.$$

Рассуждая так же, как и в случае поля вещественных чисел, мы получаем

$$B\varphi_\pi^{(1)}(x, y) = \lambda^{(1)}(\pi)\, \varphi_{\pi^{-1}}^{(2)}(x, y), \tag{16}$$

где

$$\lambda^{(1)}(\pi) = \int_K \pi\left(z + \sqrt{\varepsilon}\right) \left| z + \sqrt{\varepsilon} \right|^{-1} dz. \tag{17}$$

Остается вычислить интеграл (17).

Характер $\pi(x)$ задается следующей формулой:

$$\pi(x) = |x|^s \theta(x), \tag{18}$$

где s — комплексное число и $\theta(\mathfrak{p}) = 1$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\theta(x) \equiv 1$. В этом случае имеем

$$\lambda^{(1)}(\pi) = \int_{|x| > 1} |x|^{s-1} dx + \int_{|x| \leqslant 1} dx = \frac{1 - q^{s-1}}{1 - q^s}. \tag{19}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\theta \not\equiv 1$. Пусть ранг характера θ в поле K равен n.

Напомним, что рангом называется наименьшее натуральное число n, для которого

$$\theta(1 + \mathfrak{p}^n x) \equiv 1, \quad |x| \leqslant 1.$$

Отметим, что ранг характера θ, рассматриваемого как характер на K, совпадает с рангом θ, рассматриваемого как характер на $K(\sqrt{\varepsilon})$.

Покажем сначала, что

$$I_k = \int_{|z| = q^k} \pi\left(z + \sqrt{\varepsilon}\right) \left| z + \sqrt{\varepsilon} \right|^{-1} dz = 0 \quad \text{при} \quad k > 0.$$

В самом деле, имеем

$$I_k = q^{sk} \int\limits_{|t|=1} \theta(\mathfrak{p}^{-k}t + \sqrt{\varepsilon})\,dt = p^{sk} \int\limits_{|t|=1} \theta(t + \mathfrak{p}^k\sqrt{\varepsilon})\,dt.$$

Отсюда следует, что для любого $x \in K$, $|x| \leqslant 1$ имеем

$$I_k\theta(1+\mathfrak{p}^{n-1}x) = q^{sk} \int\limits_{|t|=1} \theta(t(1+\mathfrak{p}^{n-1}x) + \mathfrak{p}^k\sqrt{\varepsilon})\,dt =$$

$$= q^{sk} \int\limits_{|t|=1} \theta(t + \mathfrak{p}^k\sqrt{\varepsilon}) = I_k.$$

Но $\theta(1+\mathfrak{p}^{n-1}x) \not\equiv 1$. Следовательно, $I_k = 0$. В силу доказанного, мы получаем следующее выражение для $\lambda^{(1)}(\pi)$:

$$\lambda^{(1)}(\pi) = \int\limits_{|z| \leqslant 1} \theta(z + \sqrt{\varepsilon})\,dz = q^{-n} \sum_{z \in O/\mathfrak{p}^n O} \theta(z + \sqrt{\varepsilon}). \tag{20}$$

На основании этой формулы можно доказать, что

$$|\lambda^{(1)}(\pi)|^2 = q^{-n}. \tag{21}$$

Доказательство. Имеем

$$|\lambda^{(1)}(\pi)|^2 = q^{-2n} \sum_{z,\, u \in O/\mathfrak{p}^n O} \theta\left(\frac{z+\sqrt{\varepsilon}}{u+\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

(z и u пробегают по одному представителю из каждого класса смежности $O/\mathfrak{p}^n O$.) Выделим в этой сумме слагаемые с $z = u$. Мы получим, что

$$|\lambda^{(1)}(\pi)|^2 = q^{-n} + q^{-2n} \sum_{z \neq u} \theta\left(\frac{z+\sqrt{\varepsilon}}{u+\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Покажем, что второе слагаемое равно нулю. Для этого рассмотрим множество значений по $\operatorname{mod} \mathfrak{p}^n$, которое пробегает $\dfrac{z+\sqrt{\varepsilon}}{u+\sqrt{\varepsilon}}$ в последней сумме. Нетрудно убедиться, что это множество сохраняется при умножении на элементы вида $x_s = 1 + \mathfrak{p}^{n-1}s$, $|s| \leqslant 1$. Следовательно,

$$\sum_{z \neq u} \theta\left(\frac{z+\sqrt{\varepsilon}}{u+\sqrt{\varepsilon}}\right) = \sum_{z \neq u} \theta\left(x_s \frac{z+\sqrt{\varepsilon}}{u+\sqrt{\varepsilon}}\right) = \pi(x_s) \sum_{z \neq u} \theta\left(\frac{z+\sqrt{\varepsilon}}{u+\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Так как $\theta(x_s) \not\equiv 1$, то отсюда непосредственно следует, что

$$\sum_{z \neq u} \theta\left(\frac{z+\sqrt{\varepsilon}}{u+\sqrt{\varepsilon}}\right) = 0.$$

Дадим другой вывод формулы (21), основываясь на результатах § 2, п. 6.

Введем гамма-функцию $\Gamma_\varepsilon(\pi)$ в поле $K(\sqrt{\varepsilon})$ согласно следующей формуле:

$$\Gamma_\varepsilon(\pi) = \int\limits_{K(\sqrt{\varepsilon})} \chi\left(\frac{t-\bar{t}}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) \pi(t)\, d^*t. \tag{22}$$

Докажем, что

$$\lambda^{(1)}(\pi) = \frac{\Gamma_\varepsilon(\pi\pi_0)}{\Gamma(\pi\pi_0)}, \tag{23}$$

где $\pi_0(x) = |x|$.

В самом деле, заменой $t = xy + \sqrt{\varepsilon}\, y$, где $x, y \in K$ интеграл (22) приводится к виду:

$$\Gamma_\varepsilon(\pi) = \int \chi(y)\, \pi(y)\, |y|^{-1}\, dy \cdot \int \pi(x+\sqrt{\varepsilon})\, |x+\sqrt{\varepsilon}|^{-2}\, dx.$$

Отсюда непосредственно вытекает равенство (23).

Чтобы получить из (23) формулу (21), воспользуемся следующей формулой, полученной в § 2, п. 6:

$$|\Gamma(\pi)| = q^{n\left(\operatorname{Re} s - \frac{1}{2}\right)}. \tag{24}$$

Покажем, что

$$|\Gamma_\varepsilon(\pi)| = q^{n(\operatorname{Re} s - 1)}. \tag{24'}$$

В самом деле, при переходе от поля K к полю $K(\sqrt{\varepsilon})$ число q (порядок поля вычетов O/P) заменяется на q^2, а ранг характера π сохраняется. Следовательно, на основании (24) имеем $|\Gamma_\varepsilon(\pi)| = q^{2n\left(\operatorname{Re}\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right)} = q^{n(\operatorname{Re} s - 1)}$.

Равенство (21) непосредственно следует из (23), (24) и (24').

Итак, мы получаем окончательно следующую формулу для оператора B:

Если $\pi(x) = |x|^s \theta(x)$, $\theta(\mathfrak{p}) = 1$, то

$$B\varphi_\pi^{(1)}(x, y) = \lambda^{(1)}(\pi)\, \varphi_{\pi^{-1}}^{(2)}(x, y), \tag{25}$$

где

$$\lambda^{(1)}(\pi)=\begin{cases}\dfrac{1-q^{s-1}}{1-q^{s}}, & \text{если}\quad \theta(x)\equiv 1,\\ q^{-\frac{n}{2}}\mu^{(1)}(\pi), & \text{если}\quad \theta(x)\not\equiv 1.\end{cases} \tag{26}$$

Здесь n — ранг характера θ, и

$$|\mu^{(1)}(\pi)|=1.$$

Вычисление функции $\mu^{(1)}(\pi)$ является задачей существенно более сложной. Впрочем, для наших целей знания функции $\mu^{(1)}(\pi)$ не требуется.

Аналогично, имеем

$$B\varphi_{\pi}^{(2)}(x,\ y)=\lambda^{(2)}(\pi)\,\varphi_{\pi^{-1}}^{(1)}(x,\ y). \tag{27}$$

Покажем, что функция $\lambda^{(2)}(\pi)$ связана с функцией $\lambda^{(1)}(\pi)$ следующим соотношением:

$$\lambda^{(1)}(\pi)\,\lambda^{(2)}(\pi^{-1})=\pi(-1)\,q^{-n}. \tag{28}$$

В самом деле, по аналогии с формулой (20) имеем

$$\lambda^{(2)}(\pi^{-1})=\int\limits_{|z|\leqslant 1}\theta^{-1}(z-\sqrt{\varepsilon})\,dz=$$

$$=\theta(-1)\int\limits_{|z|\leqslant 1}\theta^{-1}(z+\sqrt{\varepsilon})\,dz=\theta(-1)\,\overline{\lambda^{(1)}(\pi)}.$$

Следовательно,

$$\lambda^{(1)}(\pi)\,\lambda^{(2)}(\pi^{-1})=\theta(-1)\,|\lambda^{(1)}(\pi)|^{2}=\theta(-1)\,q^{-n}.$$

На основании полученных формул имеем

$$B^{2}\varphi_{\pi}^{(1)}=\lambda(\pi)\,\varphi_{\pi}^{(1)},\qquad B^{2}\varphi_{\pi}^{2}=\lambda(\pi)\,\varphi_{\pi}^{(2)}, \tag{29}$$

где

$$\lambda(\pi)=\lambda^{(1)}(\pi)\,\lambda^{(2)}(\pi^{-1})=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(1-q^{s-1})(1-q^{-s-1})}{(1-q^{s})(1-q^{-s})}, & \text{если}\quad \theta\equiv 1,\\ q^{-n}\pi(-1), & \text{если ранг }\theta\text{ равен }n\neq 0,\end{cases} \tag{30}$$

т. е., согласно п. 6 § 2,

$$\lambda(\pi)=\Gamma(\pi)\,\Gamma(\pi^{-1}). \tag{31}$$

§ 4. Дискретные серии неприводимых унитарных представлений группы G

1. Описание представлений дискретной серии. Мы покажем здесь, что с каждым квадратичным расширением $K(\sqrt{\tau})$ поля K связана некоторая дискретная серия неприводимых унитарных представлений группы G. Таким образом, в случае поля вещественных чисел имеется одна, а в случае несвязного поля — три дискретные серии неприводимых унитарных представлений группы G.

Предварительно напомним формулы для операторов непрерывной серии в χ-реализации. Если $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, то соответствующий оператор представления $T_\pi(g)$ задается формулой

$$T_\pi(g)\varphi(u) = \int K_\pi(g \mid u, v)\varphi(v)\,dv,$$

где

$$K_\pi(g \mid u, v) = |\beta|^{-1}\chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right)\int \chi\left(-\frac{1}{\beta}(ut + vt^{-1})\right)\pi(t)\,d^*t,$$

если $\beta \neq 0$;

$$K_\pi(g \mid u, v) = \pi(\delta)\,|\delta|\,\chi(\delta\gamma u)\,\delta(\delta^2 u - v),$$

если $\beta = 0$.

Здесь π — мультипликативный характер на K, задающий представление.

Представления дискретной серии мы определим аналогичными формулами.

Пусть $K(\sqrt{\tau})$ — *квадратичное расширение поля* K, $\pi(t)$ — *мультипликативный характер на* $K(\sqrt{\tau})$. *Рассмотрим пространство* H *функций* $\varphi(u)$ *на* K, *для которых*

$$(\varphi, \varphi) = \int |\varphi(u)|^2\,du < \infty.$$

Сопоставим каждой матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *оператор*

$T_\pi(g)$ в H, определенный следующей формулой:

$$T_\pi(g)\varphi(u)=\int K_\pi(g\mid u,\ v)\varphi(v)\,dv, \tag{1}$$

где

$$K_\pi(g\mid u,\ v)=a_\tau c_\tau\frac{\operatorname{sign}_\tau\beta}{|\beta|}\operatorname{sign}_\tau u\;\chi\left(\frac{\delta u+\alpha v}{\beta}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{t\bar t=vu^{-1}}\chi\left(-\frac{1}{\beta}\left(ut+vt^{-1}\right)\right)\pi(t)\,d^*t, \tag{2}$$

если $\beta\neq 0$, $\operatorname{sign}_\tau u=\operatorname{sign}_\tau v$;

$$K_\pi(g\mid u,\ v)=0, \tag{3}$$

если $\operatorname{sign}_\tau u\neq\operatorname{sign}_\tau v$;

$$K_\pi(g\mid u,\ v)=\operatorname{sign}_\tau\delta\cdot\pi(\delta)\,|\delta|\,\chi(\delta\gamma u)\,\delta(\delta^2u-v), \tag{4}$$

если $\beta=0$.

Здесь d^*t обозначает меру на окружности $t\bar t=vu^{-1}$, однозначно определяемую из условий $d^*(tt_0)=d^*t$ для любого t_0 такого, что $t_0\bar t_0=1$; $\int d^*t=1$; $a_\tau=2(1+q^{-1})\times\times(1+|\tau|)^{-1}$. Коэффициент c_τ определяется по формуле

$$c_\tau^{-1}=\int\chi(t\bar t)\,dt, \tag{5}$$

где интегрирование ведется по плоскости $K(\sqrt{\tau})$. Точный смысл и значение этого интеграла были указаны в § 2 п. 7.

В пп. 3, 4 мы покажем, что *операторы $T_\pi(g)$ образуют унитарное представление группы G.*

Сделаем несколько предварительных замечаний о представлениях $T_\pi(g)$.

1°. Мы видим, что операторы $T_\pi(g)$ определяются по существу такими же формулами, что и операторы представлений непрерывной серии. Единственное важное различие в том, что интегрирование в (2) ведется не по «прямой», а по окружности $t\bar t=vu^{-1}$ на плоскости $K(\sqrt{\tau})$. Точки t этой окружности характеризуются условием, что $ut+vt^{-1}$ должно принадлежать полю K.

2°. В п. 6 будет показано, что если $\pi_1 = \pi_2$ на окружности $t\bar{t} = 1$, то представления $T_{\pi_1}(g)$ и $T_{\pi_2}(g)$ эквивалентны. Значит, представления $T_\pi(g)$ задаются фактически характерами на окружности $t\bar{t} = 1$, а потому множество этих представлений дискретно. Этим и объясняется название «дискретная серия».

3°. Представления $T_\pi(g)$ приводимы. В самом деле, пусть H^+ — подпространство функций $\varphi(u)$ таких, что $\varphi(u) = 0$ при $\operatorname{sign}_\tau u = -1$; H^- — подпространство функций таких, что $\varphi(u) = 0$ при $\operatorname{sign}_\tau u = 1$.

Из формул для операторов представления непосредственно видно, что подпространства H^+ и H^- инвариантны.

Представления в подпространствах H^+ и H^- мы будем дальше обозначать соответственно через $T_\pi^+(g)$ и $T_\pi^-(g)$. Эти представления уже неприводимы (см. п. 6).

Итак, мы видим, что *каждая дискретная серия неприводимых унитарных представлений состоит из двух половин — представлений $T_\pi^+(g)$ и представлений $T_\pi^-(g)$. Первые реализуются в подпространстве функций $\varphi(u)$ таких, что $\varphi(u) = 0$ при $\operatorname{sign}_\tau u = -1$; вторые — в дополнительном подпространстве.*

Аналогичная серия представлений возникает и в случае конечного поля K_q. Будем предполагать, что характеристика поля K_q отлична от 2. Тогда поле K_q обладает в точности одним квадратичным расширением. Связанная с этим расширением серия представлений реализуется на функциях $\varphi(u)$, где u пробегает элементы поля K_q, отличные от 0. Оператор представления имеет вид

$$T_\pi(g)\varphi(u) = \sum_{v \neq 0} K_\pi(g \mid u, v)\varphi(v),$$

где

$$K_\pi(g \mid u, v) = -\chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \sum_{t\bar{t} = vu^{-1}} \chi\left(-\frac{1}{\beta}(ut + vt^{-1})\right) \pi(t),$$

когда $\beta \neq 0$;

$$K_\pi(g \mid u, v) = \pi(\delta)\,\chi(\delta\gamma u)\,\delta(\delta^2 u - v),$$

когда $\beta = 0$. Здесь $\delta(u)$ — дельта-функция; $\delta(u) = 0$ при $u \neq 0$, $\delta(0) = 1$.

В отличие от бесконечного поля, представления $T_\pi(g)$ оказываются неприводимыми (за исключением случая, когда $\pi(x) = \pm 1$). Можно показать, что представления $T_\pi(g)$ и $T_{\pi^{-1}}(g)$ эквивалентны.

2. Непрерывная зависимость от g операторов $T_\pi(g)$. Операторы $T_\pi(g)$, отвечающие матрицам $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, мы определили различными формулами в случае, когда $\beta\neq 0$, и в особом случае, когда $\beta=0$.

Мы покажем здесь, что *формула для оператора $T_\pi(g)$ в особом случае, когда $\beta\neq 0$, получается предельным переходом из формулы для оператора $T_\pi(g)$, отвечающего матрице общего положения.* Тем самым будет установлена непрерывная зависимость от g операторов $T_\pi(g)$.

Предварительно преобразуем формулу для оператора к несколько иному виду.

Согласно п. 1, оператор $T_\pi(g)$, $\beta\neq 0$ задается следующей формулой:

$$T_\pi(g)\varphi(u)=a_\tau c_\tau\frac{\operatorname{sign}_\tau\beta}{|\beta|}\operatorname{sign}_\tau u\times$$
$$\times\int\limits_{t\bar t=vu^{-1}}\chi\left(\frac{\delta u+\alpha v}{\beta}-\frac{1}{\beta}\left(ut+vt^{-1}\right)\right)\pi(t)\varphi(v)\,d^*t\,dv,\quad (1)$$

где интегрирование по t ведется по окружности $t\bar t=vu^{-1}$. Подставляя в интеграл $v=ut\bar t$, мы можем эту формулу переписать в следующем виде:

$$T_\pi(g)\varphi(u)=c_\tau\frac{\operatorname{sign}_\tau\beta}{|\beta|}|u|\operatorname{sign}_\tau u\times$$
$$\times\int\chi\left(\frac{u}{\beta}(\delta+\alpha t\bar t-t-\bar t)\right)\pi(t)\varphi(ut\bar t)\,dt,\quad (2)$$

где интегрирование ведется по всей плоскости $K\left(\sqrt{\tau}\right)$. Сделаем замену переменной: $t=\beta t'+\delta$. После элементарных преобразований мы получим

$$T_\pi(g)\varphi(u)=c_\tau\,|\beta|\operatorname{sign}_\tau\beta\,|u|\operatorname{sign}_\tau u\,\chi(\delta\gamma u)\times$$
$$\times\int\chi\left[(\alpha\beta t\bar t+\gamma\beta(t+\bar t))u\right]\pi(\beta t+\delta)\varphi(u(\beta t+\delta)(\beta\bar t+\delta))\,dt.$$
$$(3)$$

Посмотрим, во что перейдет в пределе это выражение при $\beta\to 0$. Будем предполагать, что $\operatorname{sign}_\tau\beta$ остается постоянным. Пусть β_0 — фиксированный элемент такой, что $\operatorname{sign}_\tau\beta_0=\operatorname{sign}_\tau\beta$. Тогда имеем

$$\beta=\beta_0\sigma\bar\sigma,$$

где σ — элемент из $K(\sqrt{\tau})$. Сделаем в интеграле (3) замену переменной $t=\bar{\sigma}^{-1}t'$. Мы получим

$$T_\pi(g)\varphi(u)=c_\tau\,|\beta_0|\operatorname{sign}_\tau\beta_0|u|\operatorname{sign}_\tau u\cdot\chi(\delta\gamma u)\times$$
$$\times\int\chi\left[u\left(\alpha\beta_0 t\bar{t}+\gamma\beta_0(\sigma t+\overline{\sigma t})\right)\right]\pi(\beta_0\sigma t+\delta)\times$$
$$\times\varphi\left(u(\beta_0\sigma t+\delta)(\beta_0\overline{\sigma t}+\delta)\right)dt. \qquad (4)$$

Нас интересует предел этого выражения при $\sigma\to 0$. Совершим формально предельный переход под знаком интеграла. Тогда получим

$$T_\pi(g)\varphi(u)=c_\tau\,|\beta_0|\operatorname{sign}_\tau\beta_0|u|\operatorname{sign}_\tau u\cdot\chi(\delta\gamma u)\times$$
$$\times\pi(\delta)\,\varphi(\delta^2 u)\int\chi(u\alpha\beta_0 t\bar{t})\,dt. \qquad (5)$$

Однако

$$\int\chi(u\alpha\beta_0 t\bar{t})\,dt=c_\tau^{-1}\frac{\operatorname{sign}_\tau(u\alpha\beta_0)}{|u\alpha\beta_0|}+\frac{a_\tau}{2}\delta(\alpha\beta_0 u)$$

(см. § 2, п. 7). Подставляя это выражение в (5) и принимая во внимание, что у предельной матрицы $\alpha=\delta^{-1}$, получаем

$$T_\pi(g)\varphi(u)=\operatorname{sign}_\tau\delta\cdot\pi(\delta)|\delta|\chi(\delta\gamma u)\varphi(\delta^2 u),$$

т. е.

$$T_\pi(g)\varphi(u)=\operatorname{sign}_\tau\delta\cdot\pi(\delta)|\delta|\chi(\delta\gamma u)\int\delta(\delta^2 u-v)\varphi(v)\,dv.$$

Мы получили в точности формулу (4) п. 1 для оператора $T_\pi(g)$, отвечающего матрице $g=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$.

Предельный переход при $\sigma\to 0$ был совершен нами не вполне строго. Чтобы сделать рассуждение строгим, вместо операторов $T_\pi(g)$ нужно было бы ввести вспомогательные операторы, добавив под интегралом (4) множитель $|u(\alpha\beta_0 t\bar{t}+\gamma\beta_0(\sigma t+\overline{\sigma t}))|^\lambda$ (λ — комплексное число). Разобьем полученный интеграл на два слагаемых — интеграл по области $|t|<1$ и интеграл по области $|t|\geqslant 1$. Тогда, как легко видеть, для каждого из этих интегралов найдется область значений λ, при которых он сходится абсолютно и равномерно по σ, когда $\sigma\to 0$; тем самым возможен предельный переход при $\sigma\to 0$ под знаком интеграла. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этой обычной технике обобщенных функций.

3. Доказательство соотношения $T_\pi(g_1g_2)=T_\pi(g_1)\times\times T_\pi(g_2)$. Докажем, что операторы $T_\pi(g)$ действительно образуют представление группы G, т. е.

$$T_\pi(g_1g_2)=T_\pi(g_1)\,T_\pi(g_2) \tag{1}$$

для любых матриц g_1, g_2 из G.

Операторы $T_\pi(g_1)$, $T_\pi(g_2)$, $T_\pi(g_1g_2)$ задаются соответственно ядрами $K_\pi(g_1|u,\ v)$, $K_\pi(g_2|u,\ v)$ и $K_\pi(g_1g_2|u,\ v)$. Таким образом, мы должны доказать, что

$$\int K_\pi(g_1\,|\,u,\ w)\,K_\pi(g_2\,|\,w,\ v)\,dw=K_\pi(g_1g_2\,|\,u,\ v). \tag{2}$$

Пусть

$$g_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix},\qquad g_2=\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix},\qquad g_1g_2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.$$

Нам достаточно рассмотреть случаи, когда $\beta_1\neq 0$, $\beta_2\neq 0$, $\beta\neq 0$. Соотношение (1) для особого случая, когда хотя бы один из элементов β_1, β_2, β равен нулю, можно затем получить предельным переходом.

Подставляя в (2) выражения для ядер из п. 1, мы получим

$$\begin{aligned}\mathcal{J}\equiv\int K_\pi(g_1|u,\ w)\,K_\pi(g_2\,|w,\ v)\,dw= \\ =a_\tau^2c_\tau^2\operatorname{sign}_\tau(\beta_1\beta_2)\,|\,\beta_1\beta_2\,|^{-1}\chi\left(\frac{\delta_1u}{\beta_1}+\frac{\alpha_2v}{\beta_2}\right)\times \\ \times\int\int\limits_{t\bar t=\frac{w}{u}}\int\limits_{s\bar s=\frac{v}{w}}\chi\left(-\frac{u}{\beta_1}(t+\bar t)-\frac{w}{\beta_2}(s+\bar s)+\frac{\alpha_1w}{\beta_1}+\frac{\delta_2w}{\beta_2}\right)\times \\ \times\pi(ts)\,d^*s\,d^*t\,dw.\end{aligned} \tag{3}$$

Сделаем замену переменной $s=t^{-1}\sigma$. Мы получим

$$\begin{aligned}\mathcal{J}=a_\tau^2c_\tau^2\operatorname{sign}_\tau(\beta_1\beta_2)\,|\,\beta_1\beta_2\,|^{-1}\chi\left(\frac{\delta_1u}{\beta_1}+\frac{\alpha_2v}{\beta_2}\right)\times \\ \times\int\limits_{\sigma\bar\sigma=\frac{v}{u}}\int\int\limits_{t\bar t=\frac{w}{u}}\chi\left(-\frac{u}{\beta_1}(t+\bar t)-\frac{u}{\beta_2}(\sigma\bar t+\bar\sigma t)+\frac{\beta}{\beta_1\beta_2}w\right)\times \\ \times\pi(\sigma)\,d^*t\,dw\,d^*\sigma.\end{aligned} \tag{4}$$

Займемся отдельно вычислением внутреннего интеграла

$$I=\int \int\limits_{t\bar{t}=\frac{w}{u}} \chi\left(-\frac{u}{\beta_1}(t+\bar{t})-\frac{u}{\beta_2}(\sigma\bar{t}+\bar{\sigma}t)+\frac{\beta}{\beta_1\beta_2}w\right)d^*t\,dw.$$

Подставляя в интеграл $w=ut\bar{t}$, мы можем его переписать как интеграл по плоскости $K(\sqrt{\tau})$:

$$I=a_\tau^{-1}|u|\int\chi\left(-u(\bar{a}t+a\bar{t})+u\frac{\beta}{\beta_1\beta_2}t\bar{t}\right)dt,$$

где обозначено $a=\frac{1}{\beta_1}+\frac{\sigma}{\beta_2}$.

Сделаем в интеграле подстановку $t=t'+\frac{\beta_1\beta_2}{\beta}a$. Мы получим

$$I=a_\tau^{-1}|u|\chi\left(-u\frac{\beta_1\beta_2}{\beta},a\bar{a}\right)\int\chi\left(u\frac{\beta}{\beta_1\beta_2}t\bar{t}\right)dt.$$

Однако

$$\int\chi\left(u\frac{\beta}{\beta_1\beta_2}t\bar{t}\right)dt=c_\tau^{-1}\operatorname{sign}_\tau\left(\frac{u\beta}{\beta_1\beta_2}\right)\left|\frac{u\beta}{\beta_1\beta_2}\right|^{-1}+\frac{a_\tau}{2}\delta\left(\frac{\beta}{\beta_1\beta_2}u\right).$$

Следовательно,

$$I=a_\tau^{-1}c_\tau^{-1}\operatorname{sign}_\tau\left(\frac{u\beta}{\beta_1\beta_2}\right)\left|\frac{\beta_1\beta_2}{\beta}\right|\chi\left(-u\frac{\beta_1\beta_2}{\beta}a\bar{a}\right)=$$
$$=a_\tau^{-1}c_\tau^{-1}\operatorname{sign}_\tau\left(\frac{u\beta}{\beta_1\beta_2}\right)\left|\frac{\beta_1\beta_2}{\beta}\right|\chi\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1\beta}u-\frac{u}{\beta}(\sigma-\bar{\sigma})-\frac{\beta_1}{\beta_2\beta}v\right).$$

Подставим это выражение в (4) и воспользуемся легко проверяемыми соотношениями

$$\frac{\delta_1}{\beta_1}-\frac{\beta_2}{\beta_1\beta}=\frac{\delta}{\beta},\quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}-\frac{\beta}{\beta_2\beta}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Мы получим

$$\mathcal{I}=a_\tau c_\tau\frac{\operatorname{sign}_\tau\beta}{|\beta|}\operatorname{sign}_\tau u\cdot\chi\left(\frac{\delta u+\alpha v}{\beta}\right)\times$$
$$\times\int\limits_{\sigma\bar{\sigma}=\frac{v}{u}}\chi\left(-\frac{u}{\beta}(\sigma+\bar{\sigma})\right)\pi(\sigma)\,d^*\sigma=K_\pi(g_1g_2\mid u,\,v).$$

Тем самым соотношение (2) доказано.

В нашем рассуждении имелась некоторая нестрогость, поскольку мы вычисляли интеграл (2), который в обычном смысле расходится. Этой нестрогости можно избежать, если рассматривать вместо ядер $K_\pi(g\,|\,u, v)$ вспомогательные ядра $K_\pi(g\,|\,u, v\,|\,\lambda) = K_\pi(g\,|\,u, v)\,|\,v\,|^\lambda$, λ — комплексное число. Составим интеграл

$$\mathcal{J}_\lambda = \int K_\pi(g_1\,|\,u, w\,|\,\lambda)\,K_\pi(g_2\,|\,w, v\,|\,\lambda)\,dw.$$

Разобьем его на два интеграла — интеграл по области $|\,w\,| < 1$ и интеграл по области $|\,w\,| \geqslant 1$. Легко убедиться, что каждый из этих интегралов сходится в некоторой области значений λ и является в этой области аналитической функцией от λ. Тем самым интеграл $\mathcal{J}_\lambda$ определен как аналитическая функция от λ. Можно показать, что в точке $\lambda = 0$ функция $\mathcal{J}_\lambda$ регулярна и что $\mathcal{J}_0 = K_\pi(g_1 g_2\,|\,u, v)$.

4. Унитарность операторов $T_\pi(g)$. Докажем, что *операторы $T_\pi(g)$ представлений дискретной серии унитарны, т. е.*

$$T_\pi^*(g) = T_\pi^{-1}(g),$$

где звездочкой обозначен сопряженный оператор.

В самом деле, оператор $T_\pi^*(g)$ задается ядром

$$\overline{K_\pi(g\,|\,v, u)} = a_\tau \bar{c}_\tau\,\frac{\overline{\operatorname{sign}_\tau\beta}}{|\beta|}\operatorname{sign}_\tau v\cdot\chi\left(-\frac{\delta v + \alpha u}{\beta}\right)\times$$
$$\times\int\chi\left(\frac{1}{\beta}\left(vt + ut^{-1}\right)\right)\pi^{-1}(t)\,d^*t = a_\tau c_\tau\,\frac{\operatorname{sign}_\tau(-\beta)}{|-\beta|}\times$$
$$\times\operatorname{sign}_\tau u\cdot\chi\left(\frac{\alpha u + \delta v}{-\beta}\right)\int\chi\left(-\frac{1}{-\beta}\left(ut + vt^{-1}\right)\right)\pi(t)\,d^*t\ ^{*)}.$$

Мы видим, что $\overline{K_\pi(g\,|\,v, u)} = K_\pi(g^{-1}\,|\,u, v)$, т. е. $T_\pi^*(g) = T_\pi(g^{-1})$.

С другой стороны, поскольку операторы $T_\pi(g)$ образуют представление, имеем $T_\pi(g^{-1}) = T_\pi^{-1}(g)$. Следовательно, $T_\pi^*(g) = T_\pi^{-1}(g)$, что и требовалось доказать.

5. π-реализация представлений дискретной серии. В этом и в следующем пунктах будут даны две другие реализации представлений дискретной серии. π-реализацию пред-

---

*) Использовано соотношение $\bar{c}_\tau = c_\tau \operatorname{sign}_\tau(-1)$, см. § 2, п. 7.

ставления мы получим, перейдя от функций $\varphi(u)$ к их преобразованиям Меллина:

$$F(\pi_1)=\int \varphi(u)\,\pi_1^{-1}(u)\,|u|^{-1/2}\,du. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что ядра $\tilde{K}_\pi(g\mid\pi_1,\pi_2)$ операторов $T_\pi(g)$ в π-реализации выражаются через их ядра $K_\pi(g\mid u,v)$ в первоначальной реализации представления следующей формулой:

$$\tilde{K}_\pi(g\mid\pi_1,\pi_2)=\int K_\pi(g\mid u,v)\,\pi_1^{-1}(u)\,|u|^{-1/2}\pi_2(v)\,|v|^{-1/2}\,du\,dv. \tag{2}$$

Найдем в π-реализации формулы для операторов представления, отвечающих матрицам

$$\delta=\begin{pmatrix}\delta^{-1} & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ z & 1\end{pmatrix},\quad z=0$$

$$\text{и}\quad \zeta=\begin{pmatrix}1 & \zeta\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \zeta\neq 0.$$

Для этого нам понадобится, наряду с Г-функцией, связанной с полем K, Г-функция $\Gamma_\tau(\pi)$, связанная с полем $K(\sqrt{\tau})$,

$$\Gamma_\tau(\pi)=\int\limits_{K^*(\sqrt{\tau})}\chi_\tau(t)\,\pi(t)\,d^*t.$$

Здесь π пробегает множество мультипликативных характеров на $K(\sqrt{\tau})$, а $\chi_\tau(t)$ — аддитивный характер на $K(\sqrt{\tau})$, выражающийся через характер $\chi(x)$ на K по формуле

$$\chi_\tau(t)=\chi(t+\bar{t}).$$

Условимся считать, что все мультипликативные характеры на K продолжены до мультипликативных характеров на $K(\sqrt{\tau})$; последние будем обозначать теми же буквами, что и исходные. Условимся, далее, через $\bar{\pi}(t)$ обозначать характер, определенный формулой

$$\bar{\pi}(t)=\pi(\bar{t}).$$

Мы покажем, что *операторы представления, отвечающие матрицам* δ, z *и* ζ, *задаются в* π-*реализации представления следующими формулами*:

$$T_\pi(\delta) F(\pi_1) = \pi\pi_1^2\pi_\tau(\delta) F(\pi_1); \tag{3}$$

$$T_\pi(z) F(\pi_1) = \pi_1\pi_2^{-1}(z) \int \Gamma\left(\pi_1^{-1}\pi_2\right) F\left(\pi_2\right) d\pi_2; \tag{4}$$

$$T_\pi(\zeta) F(\pi_1) = \int \frac{\Gamma_\tau\left(\pi\pi_2\overline{\pi}_2\pi_0^2\right)}{\Gamma_\tau\left(\pi\pi_1\overline{\pi}_0\pi_0^2\right)} \Gamma\left(\pi_1\pi_2^{-1}\right)\pi_1^{-1}\pi_2(-\zeta) F(\pi_2)\, d\pi_2, \tag{5}$$

где $\pi_0^2(t) = |t\overline{t}|^{1/2}$.

Отметим, что эти формулы аналогичны формулам для представлений основной серии, полученным в § 3, п. 2. Именно, согласно § 3, п. 2, формула для оператора $T_\pi(z)$ представления основной серии в точности совпадает с формулой (4), а оператор $T_\pi(\zeta)$ представления основной серии задается следующей формулой:

$$T_\pi(\zeta) F(\pi_1) = \int \frac{\Gamma(\pi_2\pi_0)\,\Gamma(\pi\pi_2\pi_0)}{\Gamma(\pi_1\pi_0)\,\Gamma(\pi\pi_1\pi_0)} \Gamma\left(\pi_1\pi_2^{-1}\right)\pi_1^{-1}\pi_2(-\zeta) F(\pi_2) d\pi_2.$$

Формулы (3) и (4) легко получаются на основании формулы (4) п. 1 для ядра $K_\pi(g|u, v)$. Приведем вывод формулы (5). Ядро оператора $T_\pi(\zeta)$ задается в π-реализации представления следующей формулой:

$$\widetilde{K}_\pi(\zeta|\pi_1, \pi_2) = a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau\zeta}{|\zeta|} \times$$
$$\times \int \int\limits_{t\overline{t}=\frac{v}{u}} \chi\left(\frac{1}{\zeta}\left(u + v - u\left(t + \overline{t}\right)\right)\right) \operatorname{sign}_\tau u \cdot \pi_1^{-1}(u)\,|u|^{-1/2} \times$$
$$\times \pi_2(v)\,|v|^{-1/2}\,\pi(t)\, d^*t\, du\, dv.$$

После элементарных преобразований получаем, что

$$\widetilde{K}_\pi(\zeta\,|\,\pi_1, \pi_2) = c_\tau\pi_1^{-1}\pi_2(\zeta) \times$$
$$\times \int\int \chi\left(u(1 - t)(1 - \overline{t})\right) \operatorname{sign}_\tau u\pi_1^{-1}\pi_2(u)\, \pi\pi_2\overline{\pi}_2(t)\, du\, dt.$$

Выполняя интегрирование по u, получаем, что

$$\tilde{K}_\pi(\zeta \mid \pi_1, \pi_2) = c_\tau \pi_1^{-1}\pi_2(\zeta)\,\Gamma(\pi_1^{-1}\pi_2\pi_\tau\pi_0^2) \times$$
$$\times \int \pi\pi_2\bar{\pi}_2(t)\,\pi_1\bar{\pi}_1\pi_2^{-1}\bar{\pi}_2^{-1}(1-t)\,|(1-t)(1-\bar{t})|^{-1}\,dt,$$

где

$$\pi_\tau(x) = \operatorname{sign}_\tau x, \quad x \in K^*,$$
$$\pi_0(t) = |t\bar{t}|^{1/4}, \quad t \in K^*(\sqrt{\tau}).$$

Последний интеграл есть B-функция, связанная с полем $K(\sqrt{\tau})$, а потому он может быть выражен через функцию Γ_τ. В результате получаем

$$\tilde{K}_\pi(\zeta \mid \pi_1, \pi_2) =$$
$$= c_\tau \pi_1^{-1}\pi_2(\zeta) \times \Gamma(\pi_1^{-1}\pi_2\pi_\tau\pi_0^2)\,\frac{\Gamma_\tau(\pi\pi_2\bar{\pi}_2\pi_0^2)\,\Gamma_\tau(\pi_1\bar{\pi}_1\pi_2^{-1}\bar{\pi}_2^{-1})}{\Gamma_\tau(\pi\pi_1\bar{\pi}_1\pi_0^2)}.$$

Так как, согласно п. 10 § 2,

$$\Gamma_\tau(\pi_1\bar{\pi}_1\pi_2^{-1}\bar{\pi}_2^{-1}) = |\tau|^{-1} c_\tau \Gamma(\pi_1\pi_2^{-1}\pi_\tau)\,\Gamma(\pi_1\pi_2^{-1}) =$$
$$= |\tau|^{-1} c_\tau \pi_1\pi_2^{-1}\pi_\tau(-1)\,\frac{\Gamma(\pi_1\pi_2^{-1})}{\Gamma(\pi_1^{-1}\pi_2\pi_\tau\pi_0^2)},$$

то получаем окончательно (поскольку $|\tau|^{-1}c_\tau^2\pi_\tau(-1) = 1$):

$$\tilde{K}_\pi(\zeta \mid \pi_1, \pi_2) = \pi_1^{-1}\pi_2(-\zeta)\,\frac{\Gamma_\tau(\pi\pi_2\bar{\pi}_2\pi_0^2)}{\Gamma_\tau(\pi\pi_1\bar{\pi}_1\pi_0^2)}\,\Gamma(\pi_1\pi_2^{-1}).$$

Тем самым формула (5) для оператора $T_\pi(\zeta)$ доказана.

Выведем теперь формулу для оператора $T_\pi(s)$, где $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Имеем

$$\tilde{K}_\pi(s \mid \pi_1, \pi_2) = a_\tau c_\tau \pi_\tau(-1) \int \int_{t\bar{t} = \frac{v}{u}} \chi(u(t+\bar{t}))\,\pi(t) \times$$
$$\times \pi_1^{-1}\pi_\tau(u)\,\pi_2(v)\,|u|^{-1/2}\,|v|^{-1/2}\,d^*t\,du\,dv =$$
$$= c_\tau\pi_\tau(-1) \int \int_{K(\sqrt{\tau})} \chi(u(t+\bar{t}))\,\pi_1^{-1}\pi_2\pi_\tau(u)\,\pi\pi_2\bar{\pi}_2\pi_0^{-2}(t)\,dt\,du.$$

Заменой переменной $t = u^{-1}t'$ этот интеграл приводится к виду

$$\widetilde{K}_\pi(s \mid \pi_1, \pi_2) = c_\tau \pi_\tau(-1) \int \chi(t + \bar{t})\, \pi\pi_2\bar{\pi}_2\pi_0^{-2}(t)\, dt \times \\ \times \int \pi_1^{-1}\pi_2^{-1}\pi_\tau\pi^{-1}\pi_0^{-2}(u)\, du,$$

т. е.

$$\widetilde{K}_\pi(s \mid \pi_1, \pi_2) = c_\tau \pi_\tau(-1)\, \Gamma_\tau\left(\pi\pi_2\bar{\pi}_2\pi_0^2\right) \delta\left(\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}\pi_\tau\pi^{-1}\right), \tag{6}$$

где $\delta(\pi)$ — дельта-функция на группе мультипликативных характеров поля K.

На основании формулы (6) получаем следующее выражение для оператора $T_\pi(s)$:

$$T_\pi(s) F(\pi_1) = c_\tau \pi_\tau(-1)\, \Gamma_\tau\left(\bar{\pi}^{-1}\pi_1^{-1}\bar{\pi}_1^{-1}\pi_0^2\right) F\left(\widehat{\pi}^{-1}\pi_\tau\pi_1^{-1}\right), \tag{7}$$

где $\widehat{\pi}$ — ограничение характера $\pi(t)$ на поле K.

Попутно отметим, что операторы $T_\pi(s)$ основной серии задаются в π-представлении аналогичной формулой

$$T_\pi(s) F(\pi_1) = \Gamma\left(\pi_1^{-1}\right) \Gamma\left(\pi^{-1}\pi_1^{-1}\pi_0^2\right) F\left(\pi^{-1}\pi_1^{-1}\right).$$

6. Другая реализация представлений дискретной серии. Рассмотрим другую реализацию представлений дискретной серии. Мы получим ее, перейдя от функций $\varphi(u)$ к их преобразованиям Фурье

$$\widetilde{\varphi}(x) = \int \varphi(u)\, \chi(ux)\, du.$$

В этой реализации оператор представления $T_\pi(g)$ будет задаваться ядром

$$K'_\pi(g \mid x, y) = \int K_\pi(g \mid u, v)\, \chi(ux - vy)\, du\, dv, \tag{1}$$

где $K_\pi(g \mid u, v)$ — ядро оператора $T_\pi(g)$ в старой реализации. Найдем явное выражение для этого ядра.

Пусть $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где $\beta \neq 0$. Подставляя в (1) выражение (2) п. 1 для ядра $K_\pi(g \mid u, v)$, получаем

$$K'_\pi(g \mid u, v) = a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \int \operatorname{sign}_\tau u\, \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta} - \frac{1}{\beta}\left(ut + vt^{-1}\right)\right) \times \\ \times \pi(t)\, \chi(ux - vy)\, d^*t\, du\, dv. \tag{2}$$

Здесь интегрирование по t ведется по окружности $t\bar{t} = vu^{-1}$. Подставляя под интегралом $v = ut\bar{t}$, мы можем переписать эту формулу так:

$$K'_\pi(g \mid u, v) = c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \int |u| \operatorname{sign}_\tau u \times \\ \times \chi\left[u\left(\frac{\delta + \alpha t\bar{t}}{\beta} - \frac{1}{\beta}(t + \bar{t}) + x - t\bar{t}y\right)\right] \pi(t)\,dt\,du, \quad (3)$$

где интегрирование по t ведется по всей плоскости $K(\sqrt{\tau})$. Выполним интегрирование по u.

На основании формулы

$$\int \pi(u) \, |u|^{-1} \chi(ux)\,du = \Gamma(\pi)\,\pi^{-1}(x)$$

мы получаем

$$K'_\pi(g \mid x, y) = \\ = c_1 \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \int \frac{\operatorname{sign}_\tau \left(\frac{\delta + \alpha t\bar{t}}{\beta} - \frac{1}{\beta}(t + \bar{t}) + x - t\bar{t}y\right)}{\left|\frac{\delta + \alpha t\bar{t}}{\beta} - \frac{1}{\beta}(t + \bar{t}) + x - t\bar{t}y\right|^2} \pi(t)\,dt, \quad (4)$$

где

$$c_1 = c_\tau \int |u| \operatorname{sign}_\tau u \, \chi(u)\,du.$$

Итак, *в новой реализации представление дискретной серии строится в пространстве функций* $\varphi(x)$ *на* K, *для которых*

$$(\varphi, \varphi) = \int |\varphi(x)|^2\,dx < \infty.$$

Оператор представления $T_\pi(g)$, *отвечающий матрице* $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, *где* $\beta \neq 0$, *имеет вид*

$$T_\pi(g)\,\varphi(x) = \int K'_\pi(g \mid x, y)\,\varphi(y)\,dy, \quad (5)$$

где ядро $K'_\pi(g \mid x, y)$ *задается формулой* (4).

Формулу для ядер операторов $T_\pi(g)$, отвечающих треугольным матрицам $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, можно было бы получить из (4) путем предельного перехода. Однако удобнее получить ее непосредственно из формулы для оператора $T_\pi(g)$ в старой реализации:

$$T_\pi(g)\varphi(u) = \operatorname{sign}_\tau \delta\, \pi(\delta)\, |\delta|\, \chi(\delta\gamma u)\, \varphi(\delta^2 u).$$

Применяя преобразование Фурье, мы без труда получаем: *оператор* $T_\pi(g)$, *отвечающий матрице* $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, *имеет в новой реализации следующий вид*:

$$T_\pi(g)\varphi(x) = \operatorname{sign}_\tau \delta\, \pi(\delta)\, |\delta|\, \varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\delta}\right).$$

7. Эквивалентность представлений дискретной серии. Каждое представление дискретной серии задается мультипликативным характером $\pi(t)$ на плоскости $K(\sqrt{\tau})$, а также знаком $\operatorname{sign}_\tau u$ (поскольку оно реализуется либо в подпространстве функций $\varphi(u)$, равных нулю при $\operatorname{sign}_\tau u = -1$, либо в дополнительном подпространстве). Здесь будет выяснено, какие из представлений дискретной серии эквивалентны между собой. Именно, мы докажем, что

I. Если $\pi_1(t) \equiv \pi_2(t)$ на окружности $t\bar{t} = 1$, то представления $T^+_{\pi_1}(g)$ и $T^+_{\pi_2}(g)$ (соответственно представления $T^-_{\pi_1}(g)$ и $T^-_{\pi_2}(g)$) эквивалентны между собой *).

II. Если $\pi_1(t) = \pi_2^{-1}(t)$, то представления $T^+_{\pi_1}(g)$ и $T^+_{\pi_2}(g)$ (соответственно $T^-_{\pi_1}(g)$ и $T^-_{\pi_2}(g)$) эквивалентны между собой.

Из результатов § 5 п. 4 будет следовать обратное утверждение: если $\pi_1(t) \neq \pi_2(t)$ и $\pi_1(t) \neq \pi_2^{-1}(t)$ на окружности $t\bar{t} = 1$, то представления $T^+_{\pi_1}(g)$ и $T^+_{\pi_2}(g)$ (соответственно $T^-_{\pi_1}(g)$ и $T^-_{\pi_2}(g)$) не эквивалентны.

---

*) Напомним, что через $T^+_\pi(g)$ мы обозначаем представления, реализуемые в подпространстве функций $\varphi(u)$, равных нулю при $\operatorname{sign}_\tau u = -1$, а через $T^-_\pi(g)$ — представления, реализуемые в дополнительном подпространстве.

III. Представления $T^{+}_{\pi_1}(g)$ и $T^{-}_{\pi_2}(g)$ не эквивалентны ни при каких π_1, π_2.

Доказательство утверждения I. Ядро оператора $T^{\mp}_{\pi}(g)$ имеет вид

$$K^{+}_{\pi}(g \mid u, v) = \\ = a_{\tau} c_{\tau} \frac{\operatorname{sign}_{\tau} \beta}{|\beta|} \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \int\limits_{t\bar{t} = \frac{v}{u}} \chi\left(-\frac{1}{\beta}\left(ut + vt^{-1}\right)\right) \pi(t)\, d^{*}t. \quad (1)$$

Здесь $\operatorname{sign}_{\tau} u = \operatorname{sign}_{\tau} v = 1$. Таким образом, каждый из элементов u, v является либо квадратом элемента из K, либо имеет вид $\nu\bar{\nu}s^2$, где s — элемент из K, ν — фиксированный элемент из $K(\sqrt{\tau})$ такой, что $\nu\bar{\nu}$ не есть квадрат элемента из K.

Преобразуем формулу для $K^{+}_{\pi}(g \mid u, v)$. При этом мы рассмотрим отдельно случай, когда $\pi(-1) = 1$, и случай, когда $\pi(-1) = -1$. Пусть сначала $\pi(-1) = 1$. Если $u = s_1^2$, $v = s_2^2$, $s_1, s_2 \in K$, то заменой переменной $t = \sqrt{\frac{v}{u}}\, t'$ получаем

$$K^{*}_{\pi}(g \mid u, v) = \frac{\pi(\sqrt{v})}{\pi(\sqrt{u})} a_{\tau} c_{\tau} \frac{\operatorname{sign}_{\tau} \beta}{|\beta|} \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \times \\ \times \int \chi\left(-\frac{\sqrt{uv}}{\beta}(t + \bar{t})\right) \times \pi(t)\, d^{*}t. \quad (2)$$

Поскольку $\pi(x) = \pi(-x)$, то все сомножители в этом выражении — однозначные функции от u и v.

Аналогично имеем: если $u = \nu\bar{\nu}s_1^2$, $v = s_2^2$, s_1, $s_2 \in K$, то $\left(\text{замена переменной } t = \frac{\sqrt{v}}{\nu\sqrt{(\nu\bar{\nu})^{-1}u}}\, t'\right)$

$$K^{+}_{\pi}(g \mid u, v) = \frac{\pi(\sqrt{v})}{\pi\left(\nu\sqrt{(\nu\bar{\nu})^{-1}u}\right)} a_{\tau} c_{\tau} \frac{\operatorname{sign}_{\tau} \beta}{|\beta|} \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \times \\ \times \int\limits_{t\bar{t} = 1} \chi\left(-\frac{\sqrt{(\nu\bar{\nu})uv}}{\beta}\left(\frac{t}{\nu} + \frac{\bar{t}}{\bar{\nu}}\right)\right) \pi(t)\, d^{*}t; \quad (3)$$

если $u = s_1^2$, $v = \nu\bar{\nu} s_2^2$ $(s_1, s_2 \in K)$, то

$$K_\pi^+(g \mid u, v) = \frac{\pi\left(\nu \sqrt{(\nu\bar{\nu})^{-1} v}\right)}{\pi(\sqrt{u})} a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \times$$
$$\times \int_{t\bar{t}=1} \chi\left(-\frac{\sqrt{(\nu\bar{\nu})^{-1} uv}}{\beta}(\nu t + \bar{\nu}\bar{t})\right) \pi(t)\, d^*t. \qquad (4)$$

Наконец, если $u = \nu\bar{\nu} s_1^2$, $v = \nu\bar{\nu} s_2^2$, то

$$K_\pi^+(g \mid u, v) = \frac{\pi\left(\nu \sqrt{(\nu\bar{\nu})^{-1} v}\right)}{\pi\left(\nu \sqrt{(\nu\bar{\nu})^{-1} u}\right)} a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \times$$
$$\times \int_{t\bar{t}=1} \chi\left(-\frac{\sqrt{uv}}{\beta}(t + \bar{t})\right) \pi(t)\, d^*t. \qquad (5)$$

Рассмотрим в пространстве представления оператор A_π умножения на функцию

$$A_\pi \varphi(u) = a(u)\varphi(u), \qquad (6)$$

где $a(u) = \pi(\sqrt{u})$, когда $u = s^2$, $s \in K$, $a(u) = \pi\left(\nu\sqrt{(\nu\bar{\nu})^{-1} u}\right)$, когда $u = \nu\bar{\nu}s^2$, $s \in K$.

Перейдем от представления $T_\pi^+(g)$ к эквивалентному представлению

$$\hat{T}_\pi^+(g) = A_\pi^{-1} T_\pi^+(g) A_\pi.$$

Очевидно, что формулы для ядер операторов $\hat{T}_\pi^+(g)$ получаются из формул (2) — (5) отбрасыванием первых сомножителей. Значит, эти ядра зависят только от значений, принимаемых характером $\pi(t)$ на окружности $t\bar{t} = 1$. Этим доказано, что если $\pi_1(t) = \pi_2(t)$ на окружности $t\bar{t} = 1$, причем $\pi_1(-1) = 1$, то представления $T_{\pi_1}^+(g)$ и $T_{\pi_2}^+(g)$ эквивалентны.

Теперь рассмотрим случай, когда $\pi(-1) = -1$. Пусть $\pi_0(t)$ — фиксированный характер такой, что $\pi_0(-1) = -1$. Тогда, подобно первому случаю, мы можем преобразовать формулу для ядра оператора $T_\pi^+(g)$ к следующему виду.

Если $u = s_1^2$, $v = s_2^2$, $s_1, s_2 \in K$, то

$$K_\pi^+(g \mid u, v) = \frac{\pi\pi_0^{-1}(\sqrt{v})}{\pi\pi_0^{-1}(\sqrt{u})} a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \times$$
$$\times \pi_0\left(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}\right) \int\limits_{t\bar{t}=1} \chi\left(-\frac{u}{\beta}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}(t+\bar{t})\right) \pi(t)\, d^*t.$$

$\Bigg($Выражение $\pi_0\left(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}\right) \int\limits_{t\bar{t}=1} \chi\left(-\frac{u}{\beta}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}(t+\bar{t})\right) \pi(t)\, d^*t$ является однозначной функцией от u, v, поскольку оно не зависит от выбора знака $\sqrt{u}$ и $\sqrt{v}$.$\Bigg)$

Если $u = \nu\bar{\nu}s_1^2$, $v = s_2^2$, $s_1, s_2 \in K$, то

$$K_\pi^+(g \mid u, v) = \frac{\pi\pi_0^{-1}(\sqrt{v})}{\pi\pi_0^{-1}\left(\nu\sqrt{(\nu\bar{\nu})^{-1}u}\right)} a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \times$$
$$\times \int\limits_{t\bar{t}=1} \chi\left(-\frac{u}{\beta}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(\nu\bar{\nu})^{-1}u}}\left(\frac{t}{\nu}+\frac{\bar{t}}{\bar{\nu}}\right)\right) \pi(t)\, d^*t$$

и т. д.

Перейдем от представления $T_\pi^+(g)$ к эквивалентному представлению $\hat{T}_\pi^+(g) = A^{-1}_{\pi\pi_0^{-1}} T_\pi^+(g) A_{\pi\pi_0^{-1}}$, где оператор A_π задается формулой (6).

Ядра операторов $\hat{T}_\pi^+(g)$ зависят уже только от значений, принимаемых характером $\pi(t)$ на окружности $t\bar{t} = 1$. Значит, если $\pi_1(t) = \pi_2(t)$ на окружности $t\bar{t} = 1$, то представления $T_{\pi_1}^+(g)$ и $T_{\pi_2}^+(g)$ эквивалентны. Утверждение I доказано.

Доказательство утверждения II. Сделаем в формуле для ядра оператора $T_\pi^+(g)$

$$K_\pi^+(g \mid u, v) =$$
$$= a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \int\limits_{t\bar{t}=\frac{v}{u}} \chi\left(-\frac{1}{\beta}(ut + vt^{-1})\right) \pi(t)\, d^*t$$

замену переменной $t = vu^{-1}t'^{-1}$. Мы получим

$$K_\pi^+(g \mid u, v) = \frac{\pi(v)}{\pi(u)} a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \times \\ \times \int\limits_{t\bar{t} = \frac{v}{u}} \chi\left(-\frac{1}{\beta}(vt^{-1} + ut)\right) \pi^{-1}(t)\, d^* t,$$

т. е.

$$K_\pi^+(g \mid u, v) = \frac{\pi(v)}{\pi(u)} K_{\pi^{-1}}^+(g \mid u, v). \tag{7}$$

Из соотношения (7) непосредственно следует эквивалентность представлений $T_\pi^+(g)$ и $T_{\pi^{-1}}^+(g)$.

Доказательство утверждения III. Пусть A — ограниченный оператор, отображающий пространство представления $T_{\pi_1}^+(g)$ в пространство представления $T_{\pi_2}^-(g)$ и перестановочный с представлениями:

$$T_{\pi_2}^-(g) A = A T_{\pi_1}^+(g). \tag{8}$$

Наша задача — показать, что $A = 0$. Рассмотрим операторы $T_{\pi_1}^+(g)$, $T_{\pi_2}^-(g)$, отвечающие матрицам $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$. Эти операторы имеют вид

$$T_{\pi_1}^+(g)\varphi(u) = \chi(\gamma u)\varphi(u), \quad T_{\pi_2}^-(g)\psi(u) = \chi(\gamma u)\varphi(u).$$

Положим $\psi(u) = A\varphi(u)$. Тогда условие (8) запишется в виде

$$\chi(\gamma u)\psi(u) = A[\chi(\gamma u)\varphi(u)]$$

для любого γ из K. Отсюда непосредственно следует, что

$$f(u)\psi(u) = A[f(u)\varphi(u)] \tag{9}$$

для любой ограниченной функции $f(u)$ на K. В частности, рассмотрим функцию

$$f(u) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \operatorname{sign}_\tau u = 1, \\ 0, & \text{если} \quad \operatorname{sign}_\tau u = -1. \end{cases}$$

Так как функции $\varphi(u)$ сосредоточены в области $\operatorname{sign}_\tau u = 1$, а функции $\psi(u)$ — области $\operatorname{sign}_\tau u = -1$, то имеем: $f(u)\varphi(u) =$

$=\varphi(u)$, $f(u)\psi(u)=0$. Следовательно, равенство (9) дает $A\varphi(u)=0$, т. е. $A=0$.

Все представления дискретной серии $T_\pi^+(g)$, $T_\pi^-(g)$ неприводимы.

Доказательство этого утверждения проводится так же, как и в случае представлений непрерывной серии (см. § 3 п. 4).

8. Дискретные серии для случая поля 2-адических чисел. В предыдущем изложении всюду предполагалось, что характеристика поля вычетов O/P отлична от 2. Однако в гл. III нам понадобятся представления группы унимодулярных матриц 2-го порядка с элементами из поля Q_2 2-адических чисел.

Этот случай лишь незначительно отличается от рассмотренного выше общего случая. Именно, конструкции основной серии, дополнительной серии и особого представления переносятся на случай поля Q_2 без изменений. Небольшие изменения приходится сделать лишь при описании дискретных серий. Укажем их.

Фактор-группа $K^*/(K^*)^2$ имеет в случае $K=Q_2$ порядок 8 и может быть представлена в виде прямой суммы трех циклических групп 2-го порядка. В качестве образующих этих групп можно взять классы смежности $K^*/(K^*)^2$, содержащие числа 2, 3 и 5.

В самом деле, из рассуждений § 1, п. 5 следует, что подгруппа $A_2\subset K^*$, состоящая из элементов вида $1+8x$, $|x|\leqslant 1$, содержится в $(O^*)^2$. В то же время непосредственное вычисление показывает, что если $|x|=1$, то $x^2\in A_2$. Отсюда вытекает сделанное выше утверждение о структуре группы $K^*/(K^*)^2$.

Таким образом, поле $K=Q_2$ имеет семь различных квадратичных расширений $K(\sqrt{\tau})$, $\tau=2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$. Можно проверить, что в каждом из этих расширений подгруппа K_τ^*, состоящая из элементов вида $z\bar{z}$, $z\in K(\sqrt{\tau})$, имеет индекс 2 в K^*. Поэтому можно определить функции $\operatorname{sign}_\tau x$, которые принимают значения ± 1 и дают полный набор характеров на фактор-группе $K^*/(K^*)^2$. Конструкция дискретных серий, описанная в этом параграфе, может быть теперь перенесена на случай поля Q_2. При этом мы получим не три, а семь дискретных серий представлений.

§ 5. Следы неприводимых представлений группы G

1. Постановка задачи. Пусть $T_\pi(g)$ — представление группы G, принадлежащее непрерывной (основной или дополнительной) или дискретной серии. Сопоставим каждой финитной функции $f(g)$ на G *) оператор

$$T_\pi(f) = \int f(g) T_\pi(g)\, dg \tag{1}$$

Справедливо следующее утверждение.

Оператор $T_\pi(f)$ *имеет след, который мы обозначим через* $\operatorname{Tr} T_\pi(f)$, *причем этот след является непрерывным функционалом в пространстве финитных функций* $f(g)$. Тем самым след $\operatorname{Tr} T_\pi(g)$ оператора $T_\pi(g)$ определен как обобщенная функция на группе G:

$$(\operatorname{Tr} T_\pi(g),\ f(g)) = \operatorname{Tr} T_\pi(f).$$

Для классических групп над полем комплексных чисел этот результат был получен И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком. В дальнейшем он был доказан Годманом и Хариш Чандра для неприводимых унитарных представлений любой вещественной полупростой группы Ли.

В добавлении к этой главе мы дадим доказательство этого утверждения для группы матриц 2-го порядка с элементами из несвязного непрерывного локально-компактного поля.

Задача состоит в том, чтобы вычислить следы $\operatorname{Tr} T_\pi(g)$ операторов неприводимых представлений.

В этом параграфе следы $\operatorname{Tr} T_\pi(g)$ будут вычислены на основе единого для всех полей K метода.

Именно, мы будем вычислять след оператора $T_\pi(g)$ по формуле

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g) = \int K_\pi(g \mid u,\ u)\, du,$$

где $K_\pi(g \mid u,\ v)$ — ядро этого оператора

---

*) В случае связного поля K мы предполагаем всегда, что функция $f(g)$ бесконечно дифференцируема; в случае несвязного поля функция $f(g)$ предполагается кусочно-постоянной.

2. Следы представлений непрерывной серии. Оператор представления непрерывной серии, отвечающий матрице $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, задается следующей формулой (см. § 3, п. 1):

$$T_\pi(g)f(x)=f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)\pi(\beta x+\delta)\,|\beta x+\delta|^{-1}.$$

Таким образом, $T_\pi(g)$ можно рассматривать как интегральный оператор, ядро которого — обобщенная функция

$$K_\pi(g\mid x,\ y)=\pi(\beta x+\delta)\,|\beta x+\delta|^{-1}\delta\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}-y\right). \tag{1}$$

Вычислим след оператора $T_\pi(g)$ по формуле

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} T_\pi(g)&=\int K_\pi(g\mid x,\ x)\,dx=\\ &=\int \pi(\beta x+\delta)\,|\beta x+\delta|^{-1}\delta\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}-x\right)dx.\end{aligned} \tag{2}$$

Можно предполагать, что $\beta\neq 0$ (в противном случае мы перешли бы от матрицы g к какой-нибудь матрице ей сопряженной). Сделаем замену переменных $\beta x+\delta=t$. Мы получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} T_\pi(g)&=\int \delta\left(\alpha+\delta-t-t^{-1}\right)\pi(t)\,|t|^{-1}\,dt=\\ &=\int \delta\left(\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}\right)\pi(t)\,|t|^{-1}\,dt,\end{aligned} \tag{3}$$

где λ_g, λ_g^{-1} — собственные значения матрицы g. Из формулы (3) видно, что $\operatorname{Tr} T_\pi(g)$ *сосредоточен на матрицах g, собственные значения которых λ_g, λ_g^{-1} принадлежат полю K*. В самом деле, выражение $\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}$, стоящее под знаком δ-функции, обращается в нуль только при $t=\lambda_g$ и $t=\lambda_g^{-1}$.

Интеграл (3) легко вычислить. Для этого достаточно воспользоваться следующим свойством δ-функции:

$$\delta((t-a)(t-b))=\frac{1}{|a-b|}(\delta(t-a)+\delta(t-b)) \tag{4}$$

(при условии, что $a \neq b$) *). Пусть λ_g, λ_g^{-1} принадлежат K, причем $\lambda_g \neq \lambda_g^{-1}$. Тогда имеем

$$|t|^{-1}\delta(\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1})=\delta((t-\lambda_g)(t-\lambda_g^{-1}))= \\ =\frac{1}{|\lambda_g-\lambda_g^{-1}|}(\delta(t-\lambda_g)+\delta(t-\lambda_g^{-1})).$$

Подставляя это выражение в формулу (3), мы получим

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g)=\frac{\pi(\lambda_g)+\pi(\lambda_g^{-1})}{|\lambda_g-\lambda_g^{-1}|}. \tag{5}$$

Итак, *след оператора* $T_\pi(g)$ *представления непрерывной серии выражается формулой* (5), *если собственные значения* λ_g, λ_g^{-1} *матрицы* g *принадлежат полю* K;

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g)=0,$$

если λ_g, λ_g^{-1} *не принадлежат* K.

Из формулы (5) следует, что следы $\operatorname{Tr} T_{\pi_1}(g)$, $\operatorname{Tr} T_{\pi_2}(g)$ двух представлений непрерывной серии совпадают тогда и только тогда, когда либо $\pi_1=\pi_2$, либо $\pi_1=\pi_2^{-1}$. Отсюда заключаем: *если* $\pi_1\neq\pi_2$ *и* $\pi_1\neq\pi_2^{-1}$, *то представления* $T_{\pi_1}(g)$ *и* $T_{\pi_2}(g)$ *непрерывной серии не эквивалентны.*

3. След особого представления. Рассуждения п. 2 и формула для следа остаются справедливыми и для представлений дополнительной серии, а также для неунитарных представлений в пространствах $\mathscr{D}_\pi$ (см. § 3, п. 8).

Воспользуемся этим фактом для того, чтобы вычислить след особого представления $T_0(g)$ в случае несвязного поля.

Напомним, как строится особое представление. Мы рассматриваем пространство $\mathscr{D}_\pi$, $\pi(x)=|x|^{-1}$ функций $f(x_1, x_2)$, удовлетворяющих следующему условию однородности:

$$f(tx_1, tx_2)=|t|^{-2}f(x_1, x_2) \tag{1}$$

для любого $t\neq 0$. Оператор представления $T_\pi(g)$ в пространстве $\mathscr{D}_\pi$ задается формулой

$$T_\pi(g)f(x_1, x_2)=f(\alpha x_1+\gamma x_2, \beta x_1+\delta x_2). \tag{2}$$

*) Доказательство соотношения (4) для поля вещественных чисел см. в вып. 1. Читателю рекомендуется в качестве несложного упражнения по анализу в несвязных полях доказать (4) для случая несвязного поля.

Если от однородных функций двух переменных $f(x_1, x_2)$ перейти к функциям одного переменного $\varphi(x) = f(x, 1)$, то мы получаем другую реализацию пространства $\mathscr{D}_\pi$. В этой реализации оператор представления имеет вид

$$T_\pi(g)\varphi(x) = \varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)|\beta x + \delta|^{-2}. \qquad (3)$$

В пространстве $\mathscr{D}_\pi$ имеется инвариантное подпространство $\mathscr{F}_\pi$, состоящее из функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int \varphi(x)\,dx = 0.$$

Особое представление группы G и есть представление в подпространстве $\mathscr{F}_\pi$ *).

Очевидно, что фактор-пространство $\mathscr{D}_\pi/\mathscr{F}_\pi$ одномерно, и в нем действует единичное представление группы. Таким образом, матрица оператора $T_\pi(g)$ в пространстве $\mathscr{D}_\pi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & T_0(g) \end{pmatrix},$$

где $T_0(g)$ — оператор особого представления.

Отсюда следует, что след оператора $T_0(g)$ особого представления мы получим, вычитая след единичного представления $\operatorname{Tr} T(g) \equiv 1$ из следа оператора $T_\pi(g)$, $\pi(x) = |x|^{-1}$, определяемого формулой (5) п. 2. В результате мы получаем: *след оператора $T_0(g)$ особого представления выражается следующей формулой*:

$$\operatorname{Tr} T_0(g) = \frac{|\lambda_g| + |\lambda_g^{-1}|}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|} - 1, \qquad (4)$$

если собственные значения λ_g, λ_g^{-1} матрицы g принадлежат K;

$$\operatorname{Tr} T_0(g) = -1,$$

если λ_g, λ_g^{-1} не принадлежат K.

---

*) Точнее, не в самом пространстве $\mathscr{F}_\pi$, а в его пополнении относительно инвариантного скалярного произведения.

4. Следы представлений дискретных серий. Напомним, что операторы $T_\pi^+(g)$, $T_\pi^-(g)$ представлений дискретной серии задаются следующими формулами:

$$T_\pi^+(g)\varphi(u) = \int K_\pi(g \mid u, v)\varphi(v)\,dv, \quad \operatorname{sign}_\tau u = \operatorname{sign}_\tau v = 1,$$

$$T_\pi^-(g)\varphi(u) = \int K_\pi(g \mid u, v)\varphi(v)\,dv, \operatorname{sign}_\tau u = \operatorname{sign}_\tau v = -1,$$

где

$$K_\pi(g \mid u, v) = a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \operatorname{sign}_\tau u \cdot \chi\left(\frac{\delta u + \alpha v}{\beta}\right) \times \\ \times \int\limits_{t\bar{t} = vu^{-1}} \chi\left(-\frac{1}{\beta}\left(ut + vt^{-1}\right)\right)\pi(t)\,d^*t. \qquad (1)$$

Представление $T_\pi^+(g)$ реализуется в пространстве функций на «полуоси» $\operatorname{sign}_\tau u = 1$, а представление $T_\pi^-(g)$ — в пространстве функций на «полуоси» $\operatorname{sign}_\tau u = -1$.

Будем вычислять следы представлений по формуле

$$\operatorname{Tr} T_\pi^+(g) = \int\limits_{\operatorname{sign}_\tau u = 1} K_\pi(g \mid u, u)\,du = \\ = a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \int\limits_{\operatorname{sign}_\tau u = 1} \int\limits_{t\bar{t} = 1} \chi\left(\frac{u}{\beta}\left(\alpha + \delta - t - t^{-1}\right)\right)\pi(t)\,d^*t\,du, \quad (2)$$

$$\operatorname{Tr} T_\pi^-(g) = \int\limits_{\operatorname{sign}_\tau u = -1} K_\pi(g \mid u, u)\,du = \\ = -a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \int\limits_{\operatorname{sign}_\tau u = -1} \int\limits_{t\bar{t} = 1} \chi\left(\frac{u}{\beta}\left(\alpha + \delta - t - t^{-1}\right)\right)\pi(t)\,d^*t\,du. \\ (2')$$

Удобнее вычислять не сами следы представлений $T_\pi^+(g)$, $T_\pi^-(g)$, а их сумму и разность.

Сначала вычислим разность следов. Имеем

$$\operatorname{Tr} T_\pi^+(g) - \operatorname{Tr} T_\pi^-(g) = \\ = a_\tau c_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \beta}{|\beta|} \int\limits_K \int\limits_{t\bar{t} = 1} \chi\left(\frac{u}{\beta}\left(\alpha + \delta - t - t^{-1}\right)\right)\pi(t)\,d^*t\,du.$$

Так как

$$\int \chi(ux)\,du = \delta(x),$$

то получаем отсюда

$$\operatorname{Tr} T_\pi^+(g) - \operatorname{Tr} T_\pi^-(g) = \\ = a_\tau c_\tau \operatorname{sign}_\tau \beta \int\limits_{t\bar{t}=1} \delta\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right) \pi(t)\, d^*t, \qquad (3)$$

где λ_g, λ_g^{-1} — собственные значения матрицы g. Из этой формулы видно, что *разность следов* $\operatorname{Tr} T_\pi^+(g) - \operatorname{Tr} T_\pi^-(g)$ *сосредоточена только на тех матрицах* g, *собственные значения которых принадлежат окружности* $t\bar{t} = 1$ на $K(\sqrt{\tau})$.

В самом деле, выражение, стоящее под знаком δ-функции, обращается в нуль только при $t = \lambda_g$ и при $t = \lambda_g^{-1}$.

Вычислим $\operatorname{Tr} T_\pi^+(g) - \operatorname{Tr} T_\pi^-(g)$ для этих матриц.

Для этого перепишем (3) в виде интеграла по всей плоскости $K(\sqrt{\tau})$:

$$\operatorname{Tr} T_\pi^+(g) - \operatorname{Tr} T_\pi^-(g) = c_\tau \operatorname{sign}_\tau \beta \times \\ \times \int \delta\left((t - \lambda_g) + (\bar{t} - \bar{\lambda}_g)\right) \delta(1 - t\bar{t})\, \pi(t)\, dt, \qquad (4)$$

где интеграл берется по $K(\sqrt{\tau})$.

Воспользуемся следующим соотношением:

$$\delta\left((t - \lambda_g) + (\bar{t} - \bar{\lambda}_g)\right) \delta(1 - t\bar{t}) = \frac{1}{|\tau|^{1/2} \left|\lambda_g - \lambda_g^{-1}\right|} \times \\ \times \left(\delta_\tau(t - \lambda_g) + \delta_\tau(\bar{t} - \bar{\lambda}_g)\right), \qquad (5)$$

где $\delta_\tau(t)$ есть δ-функция на плоскости $K(\sqrt{\tau})$:

$$\delta_\tau\left(x + \sqrt{\tau} y\right) = \delta(x)\,\delta(y).$$

В самом деле, положим $t=x+\sqrt{\tau}\,y$, $\lambda_g=\alpha+\sqrt{\tau}\beta$, $\alpha^2-\tau\beta^2=1$. Тогда имеем

$$\delta\left((t-\lambda_g)+(\bar t-\bar\lambda_g)\right)\delta(1-t\bar t)=$$
$$=\delta(x-\alpha)\,\delta(1-x^2+\tau y^2)=\delta(x-\alpha)\,\delta(\tau(y^2-\beta^2))=$$
$$=\frac{1}{|\tau|\,|\beta|}\,\delta(x-\alpha)\left(\delta(y-\beta)+\delta(y+\beta)\right).$$

Отсюда непосредственно следует (5).

Подставляя (5) в формулу (4), получим

$$\operatorname{Tr}T_\pi^+(g)-\operatorname{Tr}T_\pi^-(g)=c_\tau|\tau|^{-1/2}\operatorname{sign}_\tau\beta\,\frac{\pi(\lambda_g)+\pi\left(\lambda_g^{-1}\right)}{\left|\lambda_g-\lambda_g^{-1}\right|}. \tag{6}$$

Итак, *разность следов представлений* $T_\pi^+(g)$, $T_\pi^-(g)$ *дискретной серии, отвечающей квадратичному расширению* $K(\sqrt{\tau})$ *поля* K, *выражается формулой* (6), *если собственные значения* λ_g, λ_g^{-1} *матрицы* g *принадлежат окружности* $t\bar t=1$ *на* $K(\sqrt{\tau})$;

$$\operatorname{Tr}T_\pi^+(g)-\operatorname{Tr}T_\pi^-(g)=0,$$

если λ_g, λ_g^{-1} *не принадлежат этой окружности.*

Теперь вычислим след суммы $T_\pi(g)=T_\pi^+(g)\oplus T_\pi^{-1}(g)$ представлений $T_\pi^+(g)$ и $T_\pi^-(g)$.

Имеем

$$\operatorname{Tr}T_\pi(g)=a_\tau c_\tau\frac{\operatorname{sign}_\tau\beta}{|\beta|}\int_K\int_{t\bar t=1}\operatorname{sign}_\tau u\times$$
$$\times\chi\left(\frac{u}{\beta}\left(\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}\right)\right)\pi(t)\,d^*t\,du.$$

Воспользуемся формулой

$$\int\operatorname{sign}_\tau u\cdot\chi(ux)\,du=2a_\tau^{-1}c_\tau^{-1}\frac{\operatorname{sign}_\tau x}{|x|}$$

(см. § 2, п. 7). Мы получим, что *след суммы* $T_\pi(g)=T_\pi^+(g)\oplus T_g^-(g)$ *представлений дискретной серии* *выражается следующей формулой* *):

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g) = \operatorname{Tr} T_\pi^+(g) + \operatorname{Tr} T_\pi^-(g) =$$
$$= 2 \int\limits_{t\bar{t}=1} \frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right)}{\left|\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right|} \pi(t)\, d^*t. \qquad (7)$$

Полученная формула аналогична формуле следов представлений непрерывной серии:

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g) = \int\limits_K \delta\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right) \pi(t)\, d^*t$$

(см. п. 2).

Часто полезно рассматривать не сами следы $\operatorname{Tr} T_\pi(g)$, а их преобразования Меллина по π, которые мы будем обозначать через $S(g;\, t)$. Эти преобразования Меллина имеют следующий вид. Для представлений непрерывной серии

$$S(g;\, t) = \delta\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right), \text{ где } t \in K.$$

Для представлений дискретной серии, отвечающей квадратичному расширению $K(\sqrt{\tau})$ поля K,

$$S(g;\, t) = 2\frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right)}{\left|\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right|},$$

где t — точка окружности $t\bar{t} = 1$ на плоскости $K(\sqrt{\tau})$.

Перепишем подробнее формулу (7) для случая поля вещественных чисел. В этом случае имеем $t = e^{i\varphi}$, $d^*t = \frac{1}{2\pi}\, d\varphi$,

---

*) Интеграл (7) сходится, если λ_g, λ_g^{-1} не принадлежат окружности $t\bar{t} = 1$. Если же λ_g, λ_g^{-1} принадлежат этой окружности, то интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения, а именно, как значение аналитической функции от ν:

$$f(\nu) = 2 \int\limits_{t\bar{t}=1} \frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right)}{\left|\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right|^\nu} \pi(t)\, d^*t$$

в точке $\nu = 1$.

$\pi(t) = e^{in\varphi}$ и формула (7) легко преобразуется к следующему виду:

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_C \frac{\zeta^n\, d\zeta}{(\zeta - \lambda_g)(\zeta - \lambda_g^{-1})}, \tag{8}$$

где интегрирование ведется по единичной окружности C: $\zeta\bar{\zeta} = 1$. Этот интеграл легко вычисляется (окончательную формулу см. в п. 5). Отметим, что интеграл (8) оказывается отличным от нуля как для комплексных, так и для вещественных λ_g.

Иной результат имеет место в случае несвязного поля K. Именно, *пусть собственные значения* λ_g, λ_g^{-1} *матрицы* g *не принадлежат окружности* $t\bar{t} = 1$ *на* $K(\sqrt{\tau})$. *Тогда*

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g) = 0$$

для всех π, *кроме, быть может, конечного множества характеров* π (*зависящего от* g).

Доказательство. Разложим $\lambda_g + \lambda_g^{-1}$ в ряд (см. § 1, п. 3)

$$x \equiv \lambda_g + \lambda_g^{-1} = \sum_{i=k}^{\infty} a_i \mathfrak{p}^i.$$

Если $|x| > 1$, то

$$\operatorname{sign}_\tau(x - t - t^{-1}) = \operatorname{sign}_\tau x, \quad |x - t - t^{-1}| = |x|$$

для любого t на окружности $t\bar{t} = 1$. Следовательно,

$$\operatorname{Tr} T_\pi(g) = 2\,\frac{\operatorname{sign}_\tau x}{|x|} \int\limits_{t\bar{t}=1} \pi(t)\, d^*t = 0.$$

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $|x| \leqslant 1$, т. е. когда $k \geqslant 0$ *).

По условию, для любого t на окружности $t\bar{t} = 1$ имеем $t + t^{-1} \neq \lambda_g + \lambda_g^{-1}$. Поэтому можно указать натуральное число m, обладающее следующим свойством: если $t + t^{-1} = b_0 + b_1\mathfrak{p} + \ldots$, где t — произвольная точка окружности $t\bar{t} = 1$, то $b_i \neq a_i$ по крайней мере для одного индекса $i < m$.

---

*) Отметим, что если -1 не является квадратом в K, то всегда $|\lambda_g + \lambda_g^{-1}| \geqslant 1$.

Разобьем окружность $t\bar{t}=1$ на конечное число подмножеств $A_{b_0,\ldots,b_{m-1}}$; подмножество $A_{b_0,\ldots,b_{m-1}}$ состоит из всех точек t окружности, у которых $t+t^{-1}$ имеет заданные первые m членов разложения: $b_0+\ldots+b_{m-1}\mathfrak{p}^{m-1}$.

Легко видеть, что $\operatorname{sign}_\tau(\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1})$ и $|\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}|$ постоянны на каждом из этих подмножеств. Поэтому нам остается рассмотреть интегралы

$$I_{b_0,\ldots,b_{m-1}}=\int\limits_{A_{b_0,\ldots,b_{m-1}}}\pi(t)\,d^*t$$

и убедиться, что они равны нулю для всех π, кроме конечного множества.

Рассмотрим на окружности $t\bar{t}=1$ множество A_m точек t вида $t=1+\mathfrak{p}^m s$, где $|s|\leqslant 1$. Нетрудно видеть, что A_m — подгруппа конечного индекса группы всех точек окружности. Поэтому имеется лишь конечное число характеров на окружности, равных тождественно единице на A_m.

Пусть характер π не равен тождественно единице на A_m. Покажем, что для него $I_{b_0,\ldots,b_{m-1}}=0$. В самом деле, пусть $\pi(t_0)\neq 1$ для некоторого $t_0\in A_m$. Поскольку преобразование $t\to tt_0$ сохраняет множество $A_{b_0,\ldots,b_{m-1}}$, то имеем

$$\pi(t_0)I_{b_0,\ldots,b_{m-1}}=\int\limits_{A_{b_0,\ldots,b_{m-1}}}\pi(tt_0)\,d^*t=$$

$$=\int\limits_{A_{b_0,\ldots,b_{m-1}}}\pi(t)\,d^*t=I_{b_0,\ldots,b_{m-1}}.$$

Следовательно, $I_{b_0,\ldots,b_{m-1}}=0$. Утверждение доказано.

В этом параграфе мы провели вычисление следов неприводимых представлений, не давая подробных доказательств. Однако не составляет труда дать строгое обоснование всех проводимых выкладок.

Остановимся, например, на выводе формулы следа суммы $T_\pi(g)=T_\pi^+(g)\oplus T_\pi^-(g)$ двух представлений дискретной серии. Поле K будем предполагать несвязным.

Пусть S — пространство финитных кусочно-постоянных функций на G. Для любой функции $f\in S$ оператор

$$T_\pi(f)=\int f(g)\,T_\pi(g)\,dg$$

является вполне непрерывным (положительным, если f — функция вида $\varphi * \varphi^*$) и имеет след. Нам нужно доказать, что след оператора $T_\pi(f)$ выражается формулой

$$\operatorname{Tr} T_\pi(f) = 2 \int\limits_G \int\limits_{t\bar{t}=1} f(g) \frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right)}{\left|\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right|} \pi(t)\, d^*t\, dg. \tag{9}$$

Поскольку ядро оператора $T_\pi(f)$ есть

$$\int f(g) K_\pi(g \mid u, v)\, dg,$$

то

$$\operatorname{Tr} T_\pi(f) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{|u| \leqslant q^k} \int\limits_G f(g) K_\pi(g \mid u, u)\, dg\, du =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_G \int\limits_{|u| \leqslant q^k} f(g) K_\pi(g \mid u, u)\, du\, dg.$$

(Перестановка порядка интегрирования допустима, поскольку интегрирование по G и по u ведется по компактной области.)

Подставляя сюда явное выражение для $K_\pi(g \mid u, u)$ и интегрируя по u, получим

$$\operatorname{Tr} T_\pi(f) = a_\tau c_\tau \lim_{k\to\infty} \int\limits_G f(g)\, \Gamma^{(k+s)}(\pi_\tau) \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right)}{\left|\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right|} \pi(t)\, d^*t\, dg, \tag{10}$$

где $\pi_\tau(x) = |x| \operatorname{sign}_\tau x$, а $\Gamma^{(n)}(\pi_\tau)$ — неполная Г-функция:

$$\Gamma^{(n)}(\pi_\tau) = \int\limits_{|x| \leqslant q^n} \chi(x) \operatorname{sign}_\tau x\, dx.$$

Число s определяется по формуле $\left|\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right| = q^s$.

Легко убедиться, что пределом при $k \to \infty$ последовательности обобщенных функций *)

$$\varphi_k(g) = \int \Gamma^{(k+s)}(\pi_\tau) \frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right)}{\left|\lambda_g + \lambda_g^{-1} - t - t^{-1}\right|} \pi(t)\, d^*t$$

*) Существование предела последовательности $\varphi_n(g)$ вытекает из существования следа $\operatorname{Tr} T_\pi(g)$, как обобщенной функции в пространстве S. Впрочем, нетрудно доказать существование этого предела и непосредственно.

является обобщенная функция

$$\Gamma(\pi_\tau)\int \frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}\right)}{\left|\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}\right|}\,\pi(t)\,d^*t.$$

Таким образом, переходя в (10) к пределу и учитывая, что $a_\tau c_\tau = 2\Gamma^{-1}(\pi_\tau)$, получаем требуемую формулу (9).

5. Следы представлений дискретной серии в случае поля вещественных чисел. В случае поля вещественных чисел характер на единичной окружности задается формулой

$$\pi(t)=e^{in\varphi},\qquad t=e^{i\varphi},\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi. \tag{1}$$

Таким образом, представление дискретной серии задается целым числом n. Это число будем дальше предполагать положительным (при отрицательных n получаются эквивалентные представления). Будем дальше обозначать операторы представлений через $T_n^+(g)$ и $T_n^-(g)$.

Формула (6) п. 4 дает нам:

$$\operatorname{Tr} T_n^+(g)-\operatorname{Tr} T_n^-(g)=-i\operatorname{sign}\beta\,\frac{\lambda_g^n+\lambda_g^{-n}}{\left|\lambda_g-\lambda_g^{-1}\right|}, \tag{2}$$

если λ_g, λ_g^{-1} — комплексные числа;

$$\operatorname{Tr} T_n^+(g)-\operatorname{Tr} T_n^-(g)=0, \tag{3}$$

если λ_g, λ_g^{-1} — вещественные числа.

С другой стороны, согласно формуле (8) п. 4 мы имеем

$$\operatorname{Tr} T_n^+(g)+\operatorname{Tr} T_n^-(g)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_C \frac{\zeta^n\,d\zeta}{(\zeta-\lambda_g)(\zeta-\lambda_g^{-1})}=$$

$$=\frac{2}{\lambda_g-\lambda_g^{-1}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\zeta^n\,d\zeta}{\zeta-\lambda_g^{-1}}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\zeta^n\,d\zeta}{\zeta-\lambda_g}\right), \tag{4}$$

где интегрирование ведется по единичной окружности C: $\zeta\bar\zeta=1$.

В случае, когда λ_g и λ_g^{-1} — вещественные числа, одно из них лежит внутри окружности C, а другое вне ее. В этом случае по формуле Коши мы получаем, что

$$\operatorname{Tr} T_n^+(g)+\operatorname{Tr} T_n^-(g)=\frac{2\lambda_g^{-n}}{\lambda_g-\lambda_g^{-1}}, \tag{5}$$

где λ_g — наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы g.

В случае, когда λ_g, λ_g^{-1} — комплексные числа и, значит, лежат на единичной окружности, интегралы в (4) расходятся и их следует понимать в смысле регуляризованных значений.

Не приводя доказательств, укажем эту регуляризацию. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\zeta^n\,d\zeta}{\zeta-\lambda}=\begin{cases}\lambda^n, & \text{когда } |\lambda|<1,\\ 0, & \text{когда } |\lambda|>1.\end{cases}$$

Естественно, что на предельном множестве $|\lambda|=1$ значение этого интеграла следует определить по формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\zeta^n\,d\zeta}{\zeta-\lambda}=\frac{1}{2}\lambda^n.$$

Таким образом, мы получаем

$$\operatorname{Tr} T_n^+(g)+\operatorname{Tr} T_n^-(g)=-\frac{\lambda_g^n-\lambda_g^{-n}}{\lambda_g-\lambda_g^{-1}}, \tag{6}$$

когда λ_g, λ_g^{-1} — комплексные числа.

Итак, мы получили явные формулы для $\operatorname{Tr} T_n^+(g)-\operatorname{Tr} T_n^-(g)$ и для $\operatorname{Tr} T_n^+(g)+\operatorname{Tr} T_n^-(g)$. Напишем формулы для $\operatorname{Tr} T_n^+(g)$ и $\operatorname{Tr} T_n^-(g)$, которые из них непосредственно следуют.

На множестве матриц g с вещественными собственными значениями имеем

$$\operatorname{Tr} T_n^+(g)=\operatorname{Tr} T_n^-(g)=\frac{\lambda_g^{-n}}{\lambda_g-\lambda_g^{-1}}, \tag{7}$$

где λ_g — наибольшее по абсолютной величине собственное значение.

На множестве матриц g с комплексными собственными значениями имеем

$$\operatorname{Tr} T_n^+(g)=\frac{e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}, \tag{8}$$

$$\operatorname{Tr} T_n^-(g)=\frac{e^{in\varphi}}{e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}}, \tag{9}$$

где φ определяется из условия, что матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

сопряжена с матрицей g.

§ 6. Формула обращения и формула Планшереля на группе G

1. Постановка задачи. Пусть $f(g)$ — финитная функция на группе G *). Каждому унитарному представлению $T_\pi(g)$ непрерывной или дискретной серии группы G мы сопоставим оператор

$$T_\pi(f) = \int f(g)\,T_\pi(g)\,dg. \tag{1}$$

Операторную функцию $T_\pi(f)$, определенную на множестве представлений $T_\pi(g)$ непрерывной и дискретных серий группы, будем называть *преобразованием Фурье* функции $f(g)$. Задача состоит в том, чтобы получить обращение формулы (1), т. е. выразить функцию $f(g)$ через ее преобразование Фурье.

Эту задачу удобнее сформулировать в терминах обобщенных функций: *разложить δ-функцию $\delta(g)$ на группе G **) по следам представлений непрерывной и дискретных серий.* Иными словами, найти такую функцию $\mu(\pi)$ на множестве представлений, что

$$\delta(g) = \int \mu(\pi)\,\mathrm{Tr}\,T_\pi(g)\,d\pi. \tag{2}$$

(Интеграл берется по множеству представлений непрерывной и дискретных серий.)

Заметим, что представления $T_\pi(g)$ и $T_{\pi^{-1}}(g)$ эквивалентны, а потому $\mathrm{Tr}\,T_\pi(g) = \mathrm{Tr}\,T_{\pi^{-1}}(g)$. Ввиду этого функция $\mu(\pi)$ в формуле (2) определяется не однозначно.

---

*) В случае связного поля предполагается, что функция $f(g)$ бесконечно дифференцируема; в случае несвязного поля предполагается, что $f(g)$ постоянна в достаточно малых областях на G.

**) Обобщенная функция $\delta(g)$ определяется так: $(\delta(g), f(g)) = f(e)$, где e — единица группы.

Естественно наложить на искомую функцию $\mu(\pi)$ дополнительное условие:

$$\mu(\pi) = \mu(\pi^{-1}).$$

Из формулы (2) непосредственно следуют искомая формула обращения для функции $f(g)$ на группе G и формула順 Планшереля. Именно, *пусть $f(g)$ — финитная функция на группе, принадлежащая пространству основных функций. Тогда из* (2) *следует формула обращения*

$$f(g_0) = \int \mu(\pi) \operatorname{Tr}\left(T_\pi(f) T_\pi^{-1}(g_0)\right) d\pi \tag{3}$$

и формула Планшереля

$$\int |f(g)|^2 = \int \mu(\pi) \operatorname{Tr}\left(T_\pi(f) T_\pi^*(f)\right) d\pi, \tag{4}$$

где T^* обозначает сопряженный оператор.

В самом деле, умножая обе части равенства (2) на $f(gg_0)$ и интегрируя по g, получаем

$$f(g_0) = \int \mu(\pi) \operatorname{Tr}\left(\int f(gg_0) T_\pi(g)\, dg\right) d\pi.$$

После замены переменных $gg_0 = g_1$ получаем в точности формулу (3).

Чтобы получить формулу Планшереля, применим (3) к функции

$$F(g) = \int f(g_1) \overline{f(g_1 g^{-1})}\, dg_1.$$

Мы получим при $g = e$

$$F(e) = \int \mu(\pi) \operatorname{Tr} T_\pi(F)\, d\pi. \tag{5}$$

Легко убедиться, что

$$T_\pi(F) = T_\pi(f) \cdot T_\pi^*(f). \tag{6}$$

С другой стороны, имеем

$$F(e) = \int |f(g)|^2\, dg. \tag{7}$$

Подставляя в (5) выражения (6) и (7), получим искомую формулу Планшереля.

Итак, наша основная задача в том, чтобы найти разложение функции $\delta(g)$ по следам неприводимых представлений

$$\delta(g) = \int \mu(\pi) \operatorname{Tr} T_\pi(g)\, d\pi. \tag{8}$$

Эта задача будет решена в п. 2 для несвязного поля и в п. 5 для связного поля.

Дадим другую запись формулы (8), перейдя от функций $\mu(\pi)$ и $\operatorname{Tr} T_\pi(g)$ к их преобразованиям Меллина. Именно, для представлений $T_\pi(g)$ непрерывной серии положим

$$S(g;\ t) = \int \operatorname{Tr} T_\pi(g)\, \pi(t)\, d\pi, \tag{9}$$

$$\varphi(t) = \int \mu(\pi)\, \pi(t)\, d\pi, \tag{10}$$

где $t \in K$, а интеграл берется по группе мультипликативных характеров на K.

Для представлений $T_{\pi_\tau}(g)$ дискретной серии, отвечающей расширению $K(\sqrt{\tau})$ поля K, положим

$$S_\tau(g;\ t) = \int \operatorname{Tr} T_{\pi_\tau}(g)\, \pi(t)\, d\pi_\tau, \tag{9'}$$

$$\varphi_\tau(t) = \int \mu(\pi_\tau)\, \pi_\tau(t), \tag{10'}$$

где t — точка окружности $t\bar{t} = 1$ на плоскости $K(\sqrt{\tau})$, а интеграл берется по группе характеров π_τ на $t\bar{t} = 1$.

Тогда формула (8) приведется к виду

$$\delta(g) = \int \varphi(t)\, S(g;\ t)\, d^*t + \sum_\tau \int\limits_{t\bar{t}=1} \varphi_\tau(t)\, S_\tau(g;\ t)\, d^*t + {} \\ + a \operatorname{Tr} T_0(g). \tag{11}$$

Здесь сумма берется по множеству дискретных серий группы G (таким образом, в случае несвязного поля она состоит из трех слагаемых: $\tau = \mathfrak{p}$, $\varepsilon\mathfrak{p}$, ε).

Последнее слагаемое в формуле (11) есть след особого представления группы G (см. § 3, п. 7); оно имеется только в случае несвязного поля K.

Следы представлений непрерывной и дискретных серий, а также их преобразования Меллина были найдены в § 5.

Подставляя в (11) выражения для $S(g;\, t)$ и $S_\tau(g;\, t)$ (см. § 5, п. 4), мы получаем формулу обращения в следующем виде:

$$\delta(g) = \theta(g)\,\frac{\varphi(\lambda_g)+\varphi(\lambda_g^{-1})}{|\lambda_g-\lambda_g^{-1}|} + a\left[\theta(g)\,\frac{|\lambda_g|+|\lambda_g^{-1}|}{\lambda_g-\lambda_g^{-1}} - 1\right] + \\ + 2\sum_\tau \int_{t\bar t=1} \varphi(t)\,\frac{\operatorname{sign}_\tau(\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1})}{|\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}|}\,d^*t, \qquad (12)$$

где λ_g, λ_g^{-1} — собственные значения матрицы g; $\theta(g)=1$, если λ_g, $\lambda_g^{-1}\in K$, в остальных случаях $\theta(g)=0$.

Функции $\varphi(t)$, $\varphi_\tau(t)$ и коэффициент a нам пока неизвестны. Задача состоит в том, чтобы их найти.

2. Формула обращения для случая несвязного поля. Пусть элементы матриц группы G принадлежат несвязному полю K. Обозначим через $T_\pi(g)$ представления непрерывной серии группы G, через $T_0(g)$ — ее особое представление (см. § 3, пп. 1 и 8), через $T_{\pi_\tau}(g)$ — представления дискретной серии, отвечающей расширению $K(\sqrt{\tau})$ поля K ($\tau=\mathfrak{p}$, $\varepsilon\mathfrak{p}$, ε). Здесь будет получена следующая формула обращения:

$$c\delta(g) = \int \mu(\pi)\operatorname{Tr} T_\pi(g)\,d\pi + 2\operatorname{Tr} \mathrm{T}_0(g) + \\ + \sum_\tau \int \mu(\pi_\tau)\operatorname{Tr} T_{\pi_\tau}(g)\,d\pi_\tau, \qquad (1)$$

где

$$\mu(\pi) = -\int_K \pi(t)\,|1-t|^{-2}\,dt, \qquad (2)$$

$$\mu(\pi_\varepsilon) = -\int_{t\bar t=1} \pi(t)\,|1-t|^{-2}\,d^*t, \qquad (2')$$

$$\mu(\pi_\tau) = -\int_{t\bar t=1,\ |1-t|<1} \pi(t)\left[|1-t|^{-2}+1\right]d^*t, \qquad (2'')$$

$$\tau=\mathfrak{p},\ \varepsilon\mathfrak{p}\,^{*}),$$

*) Норма $|t|$ в расширении поля K определяется формулой $|t|=|t\bar t|^{1/2}$.

$c=\frac{2(q+1)}{q^2}$. (Вычисление постоянной c будет проведено в п. 4.) Интегралы $(2')$ и $(2'')$ берутся по окружностям $t\bar{t}=1$ соответственно в $K(\sqrt{\varepsilon})$ и $K(\sqrt{\tau})$, $\tau=\mathfrak{p}$, $\varepsilon\mathfrak{p}$.

Заметим, что все интегралы (2) — (2″) расходятся, а потому их следует понимать в смысле регуляризованного значения. Например, $\mu(\pi)$ есть значение аналитической функции от ν, $\varphi(\nu)=-\int\pi(t)|1-t|^{\nu}\,dt$ при $\nu=-2$ (см. § 2, п. 6).

Прежде всего, мы подставим в формулу (1) выражения для следов представлений и перейдем к преобразованиям Меллина по π (см. п. 1). В результате формула примет вид

$$\begin{aligned}
c\delta(g)=&-\theta(g)\frac{2|\lambda_g|}{|\lambda_g-\lambda_g^{-1}|\,|1-\lambda_g|^2}+\\
&+2\left(\theta(g)\frac{|\lambda_g|+|\lambda_g^{-1}|}{|\lambda_g-\lambda_g^{-1}|}-1\right)-\\
&-2\int\limits_{t\bar{t}=1}\frac{\operatorname{sign}_\varepsilon\left(\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}\right)}{|\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}|\,|1-t|^2}\,d^*t-\\
&-2\sum_{\tau=\mathfrak{p},\ \varepsilon\mathfrak{p}}\ \int\limits_{\substack{|1-t|<1\\ t\bar{t}=1}}\frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}\right)}{|\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}|\,|1-t|^2}\,d^*t-\\
&-2\sum_{\tau=\mathfrak{p},\ \varepsilon\mathfrak{p}}\ \int\limits_{t\bar{t}=1,\ |1-t|<1}\frac{\operatorname{sign}_\tau\left(\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}\right)}{|\lambda_g+\lambda_g^{-1}-t-t^{-1}|}\,d^*t. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Здесь λ_g, λ_g^{-1} — собственные значения матрицы g; $\theta(g)=1$, если λ_g, $\lambda_g^{-1}\in K$, $\theta(g)=0$ в остальных случаях.

Вывод формулы (3) будет проведен в два этапа. Сначала мы убедимся, что выражение в правой части равенства (3) — для краткости обозначим его через $I(g)$ — равно нулю при $\lambda_g\neq\pm1$. Затем мы покажем, что $I(g)$ равно нулю вообще для всех $g\neq e$, т. е. функция $I(g)$ сосредоточена в точке $g=e$. Отсюда будет непосредственно следовать, что $I(g)=c\delta(g)$. Коэффициент c будет вычислен в п. 4.

В том, что $I(g)=0$ при $\lambda_g\neq\pm1$, можно убедиться непосредственно, вычисляя входящие в формулу (3) интегралы. При этом нужно рассмотреть отдельно следующие возможные случаи:

$$
\begin{array}{lllll}
1) & \lambda_g \in K, & |\lambda_g| \neq 1, & & \\
2) & \lambda_g \in K, & |\lambda_g| = 1, & |\lambda_g - 1| = |\lambda_g + 1| = 1, & \\
3) & \lambda_g \in K, & |\lambda_g| = 1, & |\lambda_g - 1| < 1, & \\
4) & \lambda_g \in K, & |\lambda_g| = 1, & |\lambda_g + 1| < 1, & \\
5) & \lambda_g \in K(\sqrt{\tau}), & \tau = \mathfrak{p},\ \varepsilon\mathfrak{p}, & |\lambda_g - 1| < 1, & \\
6) & \lambda_g \in K(\sqrt{\tau}), & \tau = \mathfrak{p},\ \varepsilon\mathfrak{p}, & |\lambda_g + 1| < 1, & \\
7) & \lambda_g \in K(\sqrt{\varepsilon}), & |\lambda_g - 1| < 1, & & \\
8) & \lambda_g \in K(\sqrt{\varepsilon}), & |\lambda_g + 1| < 1, & & \\
9) & \lambda_g \in K(\sqrt{\varepsilon}), & |\lambda_g - 1| = |\lambda_g + 1| = 1. & &
\end{array}
$$

Ниже дается таблица значений интегралов, встречающихся в формуле (3). Вычисление некоторых из этих интегралов приведено в п. 3. Подробная проверка того, что $I(g) = 0$ при $\lambda_g \neq \pm 1$, предоставляется читателю.

Сводка формул. Обозначения: λ, λ^{-1} — собственные значения матрицы g; $\nu = \lambda + \lambda^{-1} - 2$; q — порядок конечного поля вычетов O/P, связанного с полем K (см. § 1, п. 3); $\left(\frac{a}{q}\right)$ — символ Лежандра ($a \neq 0$ — элемент конечного поля F порядка q) : $\left(\frac{a}{q}\right) = 1$, если a есть квадрат элемента из F; $\left(\frac{a}{q}\right) = -1$, если a не является квадратом. Известно, что $\left(\frac{-1}{q}\right) = 1$, если $q \equiv 1 \pmod 4$; $\left(\frac{-1}{q}\right) = -1$, если $q \equiv 3 \pmod 4$.

I. Значения интеграла

$$I_\tau^{(1)}(\lambda) = \int\limits_{t\bar{t}=1,\ |1-t|<1} \frac{\operatorname{sign}_\tau(\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1})}{|\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1}|\,|1-t|^2}\, d^*t.$$

Если $|\nu| \geqslant 1$, то

$$I_\tau^{(1)}(\lambda) = c'_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \nu}{|\nu|},$$

где $c'_\tau = -\frac{1}{2}$ при $\tau = \mathfrak{p}$, $\varepsilon\mathfrak{p}$; $c'_\varepsilon = -\frac{q}{q+1}$.

Если $|\nu| < 1$, то значения $I_\tau^{(1)}(\lambda)$ приводятся ниже:

а) $\lambda \in K$

$$I_\mathfrak{p}^{(1)}(\lambda) = I_{\varepsilon\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda) = -\frac{q^2+1}{2(q^2+q+1)}|\nu|^{-3/2} - \frac{q}{2(q^2+q+1)},$$

$$I_\varepsilon^{(1)}(\lambda) = -\frac{q}{q^2+q+1}|\nu|^{-3/2} - \frac{q^3}{(q+1)(q^2+q+1)}.$$

б) λ — точка окружности $t\bar{t} = 1$ на $K(\sqrt{\mathfrak{p}})$

$$I_\mathfrak{p}^{(1)}(\lambda) = -\frac{1}{2\sqrt{q}}\left(\frac{q^2+q}{q^2+q+1} + \left(\frac{-1}{q}\right)(q+1)\right)|\nu|^{-3/2} - \frac{q}{2(q^2+q+1)},$$

$$I_{\varepsilon\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda) = -\frac{1}{2\sqrt{q}}\left(\frac{q^2+q}{q^2+q+1} - \left(\frac{-1}{q}\right)(q+1)\right)|\nu|^{-3/2} - \frac{q}{2(q^2+q+1)},$$

$$I_\varepsilon^{(1)}(\lambda) = \frac{q^2+q}{\sqrt{q}(q^2+q+1)}|\nu|^{-3/2} - \frac{q^3}{(q+1)(q^2+q+1)}.$$

в) λ — точка окружности $t\bar{t} = 1$ на $K(\sqrt{\varepsilon\mathfrak{p}})$

$$I_\mathfrak{p}^{(1)}(\lambda) = -\frac{1}{2\sqrt{q}}\left(\frac{q^2+q}{q^2+q+1} - \left(\frac{-1}{q}\right)(q+1)\right)|\nu|^{-3/2} - \frac{q}{2(q^2+q+1)},$$

$$I_{\varepsilon\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda) = -\frac{1}{2\sqrt{q}}\left(\frac{q^2+q}{q^2+q+1} + \left(\frac{-1}{q}\right)(q+1)\right)|\nu|^{-3/2} - \frac{q}{2(q^2+q+1)},$$

$$I_\varepsilon^{(1)}(\lambda) = \frac{q^2+q}{\sqrt{q}(q^2+q+1)}|\nu|^{-3/2} - \frac{q^3}{(q+1)(q^2+q+1)}.$$

г) λ — точка окружности $t\bar{t} = 1$ на $K(\sqrt{\varepsilon})$

$$I_\mathfrak{p}^{(1)}(\lambda) = I_{\varepsilon\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda) = \frac{(q+1)^2}{2(q^2+q+1)}|\nu|^{-3/2} - \frac{q}{2(q^2+q+1)},$$

$$I_\varepsilon^{(1)}(\lambda) = -\frac{(q+1)^2}{q^2+q+1}|\nu|^{-3/2} - \frac{q^3}{(q+1)(q^2+q+1)}.$$

II. Значения интеграла

$$I_\tau^{(2)}(\lambda) = \int\limits_{t\bar{t}=1,\ |1-t|<1} \frac{\operatorname{sign}_\tau(\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1})}{|\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1}|}\, d^*t.$$

Если $|\nu| \geqslant 1$, то

$$I_\tau^{(2)}(\lambda) = c''_\tau \frac{\operatorname{sign}_\tau \nu}{|\nu|},$$

где $c''_\tau = \frac{1}{2}$ при $\tau = \mathfrak{p}, \varepsilon\mathfrak{p}$; $c''_\varepsilon = \frac{1}{q+1}$.

Если $|\nu| < 1$, то значения $I_\tau^{(2)}(\lambda)$ приводятся ниже:

а) $\lambda \in K$

$$I_\mathfrak{p}^{(2)}(\lambda) = I_{\varepsilon\mathfrak{p}}^{(2)}(\lambda) = |\nu|^{-1/2} - \frac{1}{2}, \quad I_\varepsilon^{(2)}(\lambda) = |\nu|^{-1/2} - \frac{q}{q+1}.$$

б) λ — точка окружности $t\bar{t} = 1$ на $K(\sqrt{\tau})$, $\tau = \mathfrak{p}, \varepsilon\mathfrak{p}, \varepsilon$

$$I_\mathfrak{p}^{(2)}(\lambda) = I_{\varepsilon\mathfrak{p}}^{(2)}(\lambda) = -\frac{1}{2}, \quad I_\varepsilon^{(2)}(\lambda) = -\frac{q}{q+1}.$$

III. Значения интеграла

$$I_\varepsilon^\beta(\lambda) = \int\limits_{A_\beta} \frac{\operatorname{sign}_\varepsilon(\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1})}{|\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1}|}\, d^*t,$$

где интеграл берется по компоненте A_β окружности $t\bar{t} = 1$ на $K(\sqrt{\varepsilon})$, определяемой условием $|t - \beta| < 1$. Здесь β — точка окружности такая, что $|\beta + 1| = |\beta - 1| = 1$:

$$I_\varepsilon^\beta(\lambda) = \frac{1}{q+1} \frac{\operatorname{sign}_\varepsilon \nu}{|\nu|}, \quad \text{если} \quad |\lambda| \neq 1,$$

$I_\varepsilon^\beta(\lambda) = -\frac{q-1}{2(q+1)}$, если λ — точка окружности $t\bar{t} = 1$ на $K(\sqrt{\varepsilon})$ и либо $|\lambda - \beta| < 1$, либо $|\lambda - \bar{\beta}| < 1$,

$I_\varepsilon^\beta(\lambda) = \frac{1}{q+1}$ — во всех остальных случаях.

Теперь нам нужно убедиться, что $I(g) = 0$ для всех матриц $g \neq e$.

Заметим, что интегралы, входящие в формулу (3), приводятся к одному из видов $a|\nu|^{-3/2} + b$, $a|\nu|^{-1/2} + b$, $a|\nu'|^{-1/2} + b$, где $\nu = \lambda_g + \lambda_g^{-1} - 2$, $\nu' = \lambda_g + \lambda_g^{-1} + 2$ (см. сводку формул). При этом все они взаимно сокращаются. Случаи $\lambda_g = 1$ и $\lambda_g = -1$ являются особыми, поскольку в этих случаях соответственно $\nu = 0$ и $\nu' = 0$. Они требуют поэтому самостоятельного исследования. Покажем, что функции $|\nu|^{-3/2}$, $|\nu|^{-1/2}$, $|\nu'|^{-1/2}$, рассматриваемые как обобщенные функции на группе, не имеют особенности при $g \neq e$. Иными словами, функционалы $(|\nu|^{-3/2}, f)$, $(|\nu|^{-1/2}, f)$, $(|\nu'|^{-1/2}, f)$ непрерывны в подпространстве финитных функций f на группе G, равных нулю в окрестности точки e *). Отсюда будет сразу следовать, что обобщенная функция $I(g)$ сосредоточена в точке e.

Нетрудно убедиться, что интегралы

$$\left(|\nu|^{-1/2}, f\right)=\int|\nu|^{-1/2} f(g) dg \text{ и } \left(|\nu'|^{-1/2}, f\right)=\int|\nu'|^{-1/2} f(g) dg$$

сходятся в обычном смысле для любой финитной функции $f(g)$. Поэтому нам достаточно заняться интегралом

$$\left(|\nu|^{-3/2}, f\right)=\int|\nu|^{-3/2} f(g) dg.$$

Этот интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения: $\left(|\nu|^{-3/2}, f\right)$ — значение аналитической функции от s,

$$\varphi(s)=\int|\nu|^{s} f(g) dg \tag{4}$$

при $s=-\frac{3}{2}$. Наша цель — показать, что если $f(g)=0$ в окрестности точки $g=e$, то функция $\varphi(s)$ не имеет особенности при $s=-\frac{3}{2}$. Покажем это.

Не нарушая общности, можно предполагать, что функция $f(g)$ сосредоточена в достаточно малой окрестности матрицы $g_0 \neq e$ с собственными значениями $\lambda_g=\lambda_g^{-1}=1$.

Введем в этой окрестности систему координат. Заметим, что у матриц $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, принадлежащих этой окрестности, хотя бы один из элементов β, γ отличен от нуля. Пусть, например, $\gamma \neq 0$. Тогда в качестве координат в окрестности матрицы g_0 можно принять γ, α и $\nu=\alpha+\delta-2$. В этих координатах формула (4) для $\varphi(s)$ примет вид

$$\varphi(s)=\int|\nu|^{s} f(\nu, \alpha, \gamma) \frac{d\alpha\, d\gamma}{|\gamma|} d\nu.$$

Но мы знаем из § 1, п. 3, что единственной особенностью обобщенной функции $|\nu|^{s}$ является полюс в точке $s=-1$. Следовательно, функция $\varphi(s)$ не имеет особенности при $s=-\frac{3}{2}$.

*) Напомним, говоря о финитных функциях мы предполагаем дополнительно, что эти функции «кусочно постоянны», т. е. постоянны в достаточно малой окрестности любой точки g.

Итак, мы доказали, что обобщенная функция $I(g)$ — правая часть равенства (3) — сосредоточена в точке $g = e$. Отсюда следует, что $I(g) = c\delta(g)$, где c — некоторая постоянная (см. § 2, п. 2). Формула обращения (1) доказана.

3. Вычисление некоторых интегралов. Покажем, как вычислить интегралы, приведенные в сводке формул, п. 2. В виде примера сосчитаем интеграл

$$I_{\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda) = \int\limits_{t\bar{t}=1,\ |t-1|<1} \frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1})}{|\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1}|\,|1-t|^2}\, d^*t. \tag{1}$$

Заметим, что если $|\lambda + \lambda^{-1} - 2| \geqslant 1$, то для любого t, $t\bar{t} = 1$, $|1-t| < 1$, имеем $\operatorname{sign}_{\tau}(\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1}) = \operatorname{sign}_{\tau}(\lambda + \lambda^{-1} - 2)$, $|\lambda + \lambda^{-1} - t - t^{-1}| = |\lambda + \lambda^{-1} - 2|$, а потому интеграл (1) существенно упрощается:

$$I_{\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda) = \frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(\lambda + \lambda^{-1} - 2)}{|\lambda + \lambda^{-1} - 2|} \int \frac{d^*t}{|1-t|^2}.$$

Мы разберем подробно более сложный случай, когда $|\lambda + \lambda^{-1} - 2| < 1$; в этом случае имеем $|\lambda| = 1$ и $|\lambda - 1| < 1$. Пусть для определенности λ принадлежит окружности $t\bar{t} = 1$ в $K(\sqrt{\mathfrak{p}})$. (Для других возможных случаев интеграл вычисляется аналогично.) Согласно § 1, п. 8, элементы окружности $t\bar{t} = 1$, $|1-t| < 1$ в $K(\sqrt{\mathfrak{p}})$ имеют следующее параметрическое представление:

$$t = \frac{1 + \sqrt{\mathfrak{p}}\,x}{1 - \sqrt{\mathfrak{p}}\,x} = \frac{1 + \mathfrak{p}x^2}{1 - \mathfrak{p}x^2} + \sqrt{\mathfrak{p}}\,\frac{2x}{1 - \mathfrak{p}x^2},$$

где x пробегает все целые элементы из K (т. е. $|x| \leqslant 1$). Легко убедиться, что при этом $d^*t = \frac{1}{2}\,dx$, где dx — инвариантная мера на K^+ *).

---

*) Преобразование $t = \dfrac{1 + \sqrt{\mathfrak{p}}\,x}{1 - \sqrt{\mathfrak{p}}\,x}$ является аналогом преобразования Кэли для поля вещественных чисел. Отметим, что, когда x пробегает область $|x| > 1$, точка t пробегает другую компоненту окружности $t\bar{t} = 1$: $|1 + t| < 1$.

Нормировочный множитель $\frac{1}{2}$ в формуле для меры появляется в связи с тем, что $\int\limits_{|x| \leqslant 1} dx = 1$, между тем как $\int\limits_{t\bar{t}=1,\ |1-t|<1} d^*t = \frac{1}{2}$.

В том же виде можно представить и λ:

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{\mathfrak{p}}\,x_0}{1-\sqrt{\mathfrak{p}}\,x_0}.$$

Подставим эти выражения в интеграл (1), перейдя тем самым от переменного t к переменному x. Мы получим

$$I_{\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_{|x|\leqslant 1} \frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}\left(2\frac{1+\mathfrak{p}x_0^2}{1-\mathfrak{p}x_0^2} - 2\frac{1+\mathfrak{p}x^2}{1-\mathfrak{p}x^2}\right)}{\left|2\frac{1+\mathfrak{p}x_0^2}{1-\mathfrak{p}x_0^2} - 2\frac{1+\mathfrak{p}x^2}{1-\mathfrak{p}x^2}\right| \cdot \left|\frac{2\sqrt{\mathfrak{p}}\,x}{1-\sqrt{\mathfrak{p}}\,x}\right|^2}\,dx.$$

Полученное выражение можно существенно упростить, поскольку функции $\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}} x$ и $|x|$ зависят только от первых членов разложения элемента x. Мы получаем

$$I_{\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_{|x|\leqslant 1} \frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}x_0^2 - \mathfrak{p}x^2)}{|\mathfrak{p}x_0^2 - \mathfrak{p}x^2|\,|\mathfrak{p}x^2|}\,dx. \tag{2}$$

Будем вычислять этот интеграл. Прежде всего, прибавим к $I_{\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda)$ и вычтем из $I_{\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda)$ интеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|x|>q^k} \frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}x_0^2 - \mathfrak{p}x^2)}{|\mathfrak{p}x_0^2 - \mathfrak{p}x^2|\,|\mathfrak{p}x^2|}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{|\mathfrak{p}x^2|^2}.$$

Мы получим после элементарных преобразований

$$I_{\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda) = \frac{q^2}{2}|x_0|^{-3}\int\limits_K \frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}x^2)}{|1-x^2|\,|x^2|}\,dx - \frac{q^2}{2}\int\limits_{|x|>1}\frac{dx}{|x|^4}. \tag{3}$$

Второй интеграл легко вычисляется:

$$\int\limits_{|x|>1}\frac{dx}{|x|^4} = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{|x|=q^k}\frac{dx}{|x|^4} = \left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{k=1}^{\infty} q^{-3k} = \frac{1}{q(q^2+q+1)}.$$

Займемся вычислением первого интеграла в (3).

Разобьем его сначала на три слагаемых:

$$I \equiv \int\limits_K \frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}x^2)}{|1-x^2|\,|x^2|}\,dx = \int\limits_{|x|>1}\frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}x^2)}{|1-x^2|\,|x^2|}\,dx +$$
$$+\int\limits_{|x|<1}\frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}x^2)}{|1-x^2|\,|x^2|}\,dx + \int\limits_{|x|=1}\frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}x^2)}{|1-x^2|\,|x^2|}\,dx. \tag{4}$$

Отсюда получаем

$$I=\int\limits_{|x>1|}\frac{dx}{|x|^4}+\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}\int\limits_{|x|<1}\frac{dx}{|x|^2}+\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}\int\limits_{|x|=1}\frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(1-x^2)}{|1-x^2|}\,dx=$$

$$=\frac{1}{q(q^2+q+1)}-\left(\frac{-1}{q}\right)+\left(\frac{-1}{q}\right)\int\limits_{|x|=1}\frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(1-x^2)}{|1-x^2|}\,dx\,^{*}). \quad (5)$$

Последний интеграл можно сосчитать, разбивая множество элементов x, $|x|=1$ на классы вычетов по модулю $\mathfrak{p}$. Мы получим

$$\int\limits_{|x|=1}\frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(1-x^2)}{|1-x^2|}\,dx=\frac{1}{q}\sum_{a\neq 0,\ \pm 1}\left(\frac{1-a^2}{q}\right)+$$

$$+\int\limits_{|x|=1,\ |1-x|<1}\frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(1-x^2)}{|1-x^2|}\,dx+\int\limits_{|x|=1,\ |1+x|<1}\frac{\operatorname{sign}_{\mathfrak{p}}(1-x^2)}{|1-x^2|}\,dx. \quad (6)$$

Здесь сумма берется по элементам a конечного поля O/P порядка q, отличным от 0 и ± 1. Несложной выкладкой можно убедиться, что

$$\frac{1}{q}\sum_{a\neq 0,\ \pm 1}\left(\frac{1-a^2}{q}\right)=-\frac{1}{q}\left[1+\left(\frac{-1}{q}\right)\right].$$

С другой стороны, легко показать, что каждый из интегралов в (6) равен нулю. Таким образом, мы получаем

$$I=\frac{1}{q(q^2+q+1)}-\left(\frac{-1}{q}\right)-\frac{1}{q}\left[1+\left(\frac{-1}{q}\right)\right].$$

Подставив это выражение в формулу для (3) для $I_{\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda)$, получим окончательно

$$I_{\mathfrak{p}}^{(1)}(\lambda)=-\frac{q}{2}\left(\frac{q^2+q}{q^2+q+1}+\left(\frac{-1}{q}\right)(q+1)\right)|x_0|^{-3}-\frac{q}{2(q^2+q+1)}.$$

Чтобы получить точное совпадение этой формулы с формулой таблицы (стр. 284, случай б), остается заметить, что

$$x_0=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\,\frac{\lambda-1}{\lambda+1},\ \text{а потому}\ |x_0|=q^{1/2}|\lambda-1|=q^{1/2}|\lambda+\lambda^{-1}-2|^{1/2}.$$

---

*) Интеграл $\int\limits_{|x|<1}|x|^{-2}\,dx$ понимается здесь в смысле регуляризованного значения — как значение аналитической функции от s, $\varphi(s)=\int\limits_{|x|<1}|x|^{-s}\,dx$ при $s=2$; $\left(\frac{a}{q}\right)$ — символ Лежандра (см. стр. 283).

4. Вычисление постоянной c в формуле обращения. Чтобы вычислить постоянную c в формуле обращения п. 2, нам нужно эту формулу применить к какой-либо фиксированной функции $f(g)$ на группе G.

Пусть U — подгруппа матриц из G, элементы которых являются целыми элементами поля K. Очевидно, что подгруппа U компактна и что она является открытым множеством в G.

Рассмотрим функцию $f(g)$, равную единице на U и равную нулю вне подгруппы U. Применим формулу обращения к этой функции $f(g)$.

Можно показать, что $\operatorname{Tr} T_\pi(f) \neq 0$ только для представлений непрерывной серии, отвечающих характерам $\pi(t) = |t|^{i\rho}$. Следовательно, в формулу обращения для функции $f(g)$ входят только слагаемые, отвечающие этим представлениям. В результате мы получаем

$$c = \int_U \int \mu(\pi_\rho) \operatorname{Tr} T_{\pi_\rho}(g)\, d\pi_\rho\, dg, \tag{1}$$

где $\pi_\rho(t) = |t|^{i\rho}$,

$$\mu(\pi_\rho) = -\int_K |t|^{i\rho} |1-t|^{-2}\, dt, \tag{2}$$

Вычислим интеграл (1). Напомним, что

$$\operatorname{Tr} T_{\pi_\rho}(g) = \theta(g) \frac{|\lambda_g|^{i\rho} + |\lambda_g|^{-i\rho}}{|\lambda_g - \lambda_g^{-1}|},$$

где λ_g, λ_g^{-1} — собственные значения матрицы g; $\theta(g) = 1$, если λ_g, λ_g^{-1} принадлежат K, $\theta(g) = 0$, если λ_g, λ_g^{-1} не принадлежат K. Поскольку для матриц g, принадлежащих компактной подгруппе U, $|\lambda_g| = 1$, то имеем

$$\int_U \operatorname{Tr} T_{\pi_\rho}(g)\, dg = 2 \int_U \theta(g) |\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^{-1}\, dg.$$

Мы видим, что этот интеграл не зависит от π_ρ. Следовательно,

$$c = -2 \int_U \theta(g) |\lambda_g - \lambda_g^{-1}|^{-1}\, dg \int_K |t|^{i\rho} |1-t|^{-2}\, dt\, d\pi_\rho. \tag{3}$$

Второй интеграл в (3) легко вычисляется:

$$\int_K |t|^{i\rho} |1-t|^{-2}\, dt\, d\pi_\rho = \frac{q}{q-1} \int_{|t|=1} |1-t|^{-2}\, dt = -\frac{2}{q-1} \text{*)}.$$

---

*) Множитель $q(q-1)^{-1}$ возникает вследствие выбранной нормировки $d\pi_\rho$. Именно, мы требуем, чтобы было

$$\int \pi_\rho(t) |t|^{-1}\, dt\, d\pi_\rho = 1$$

(ср. § 2, п. 9).

Первого интеграла мы вычислять здесь не будем, а дадим только окончательный ответ *):

$$\int_U \theta(g)\,|\lambda_g-\lambda_g^{-1}|^{-1}\,dg=\frac{(q+1)(q-1)}{2q^2}.$$

Итак, мы получаем следующее значение постоянной c:

$$c=\frac{2(q+1)}{q^2}.$$

5. Формулы обращения для связных полей. Рассмотрим теперь случай связного поля K, т. е. случай, когда K есть поле комплексных либо поле вещественных чисел. Можно показать, что формула обращения для случая связного поля аналогична формуле обращения для несвязного поля.

Именно, *если G — группа комплексных матриц, то формула обращения имеет вид*

$$\delta(g)=\int\mu(\pi)\operatorname{Tr}T_\pi(g)\,d\pi, \tag{1}$$

где

$$\mu(\pi)=c\int\pi(t)\,|1-t|^{-2}\,dt. \tag{2}$$

Интегрирование в (2) ведется в комплексной плоскости t; интеграл (2) нужно понимать в смысле регулированного значения (см. § 2, п. 9) **).

Если G — группа вещественных матриц, то формула обращения имеет вид

$$\delta(g)=\int\mu(\pi)\operatorname{Tr}T_\pi(g)\,d\pi+\sum_n\mu(\pi_n)\operatorname{Tr}T_{\pi_n}(g), \tag{3}$$

---

*) Этот интеграл можно вычислить, представив матрицу g из U в виде $g=z^{-1}\delta\zeta z$, где $z=\begin{pmatrix}1&0\\z&1\end{pmatrix}$, $\delta=\begin{pmatrix}\lambda^{-1}&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$, $\zeta=\begin{pmatrix}1&\zeta\\0&1\end{pmatrix}$, и приняв элементы z, ζ, λ в качестве параметров матрицы g. При этом оказывается, что $dg=|\lambda_g-\lambda_g^{-1}|\,d\lambda\,d\zeta\,dz$.

**) Напомним, что в принятых в работе обозначениях $|z|$ обозначает квадрат модуля комплексного числа z.

где

$$\mu(\pi) = c \int_{-\infty}^{\infty} \pi(t) \, |1 - t|^{-2} \, dt. \tag{4}$$

$$\mu(\pi_n) = c \int_{t\bar{t}=1} \pi_n(t) \, |1 - t|^{-2} \, d^*t. \tag{5}$$

Здесь $\pi(t)$ — мультипликативные характеры группы вещественных чисел, $T_\pi(g)$ — соответствующие представления непрерывной серии; $\pi_n(t)$ — характеры группы вращений окружности, $T_{\pi_n}(g)$ — соответствующие представления дискретной серии; d^*t — мера на окружности $t\bar{t} = 1$, нормированная условием $\int d^*t = 1$.

Вывод формул обращения (1), (3) может быть проведен так же, как и в случае несвязного поля. Именно, интегралы, входящие в формулы, можно вычислить в явном виде. При этом мы убедимся, что выражение $I(g)$, стоящее в правой части формулы (1) (соответственно формулы (3)), есть функция, сосредоточенная в точке $g = e$. После этого нетрудно уже показать, что $I(g) = c\delta(g)$. Подробный вывод формул (1) и (3) мы опускаем.

Заметим, что вычисление интеграла для $\mu(\pi)$ в случае поля комплексных чисел и в случае поля вещественных чисел приводит к существенно различным выражениям. Именно, в случае поля комплексных чисел любой характер $\pi(t)$ имеет вид

$$\pi(t) = t^{\frac{n+i\rho}{2}} \bar{t}^{\frac{-n+i\rho}{2}},$$

где n — целое, ρ — вещественное число. Вычисляя интеграл (2), мы получаем

$$\mu(\pi) = c(\rho^2 + n^2).$$

Теперь рассмотрим поле вещественных чисел. На вещественной прямой имеется два типа мультипликативных характеров: характеры

$$\pi(t) = |t|^{i\rho},$$

где ρ — вещественное число, и характеры

$$\pi(t) = |t|^{i\rho} \operatorname{sign} t.$$

Вычисляя интеграл (4), мы получим, что

$$\mu(\pi) = c\pi\rho \operatorname{th} \frac{\pi\rho}{2}$$

для характера первого типа и

$$\mu(\pi) = c\pi\rho \operatorname{cth} \frac{\pi\rho}{2}$$

для характера второго типа.

На окружности $t\bar{t} = 1$ характеры $\pi_n(t)$ имеют вид

$$\pi_n(t) = e^{in \arg t}.$$

Вычисляя интеграл (5), мы получим, что

$$\mu(\pi_n) = c\,|\,n\,|.$$

ДОБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ II

1. Некоторые факты теории колец операторов в гильбертовом пространстве. Мы ограничиваемся здесь лишь формулировкой результатов. Их доказательство можно найти, например, в книге J. Dixmier «Algebres d'operateurs dans l'espace hilbertienn (Algebres de von Neumann)», Paris, Gauthier — Villar, 1957, а также в книге М. А. Наймарка «Нормированные кольца», Москва, 1956.

Алгеброй Неймана называется кольцо R операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющее следующим условиям:

1) R содержит единичный оператор;

2) если $A \in R$, то $A^* \in R$, где A^* — сопряженный к A оператор;

3) R замкнуто в слабой операторной топологии.

Для каждого множества S операторов в гильбертовом пространстве через S' обозначаются совокупность всех операторов, перестановочных с операторами из S. Легко проверяется, что если S вместе с каждым оператором содержит сопряженный оператор, то S' — алгебра Неймана. Если исходное множество S является алгеброй Неймана, то имеет место равенство $(S')' = S$.

Алгебра Неймана R называется *фактором*, если $R \cap R'$ состоит только из скалярных операторов. Всякая алгебра Неймана может быть каноническим образом реализована как прямая сумма (быть может, непрерывная) факторов.

Если гильбертово пространство H конечномерно, то все факторы могут быть получены следующей конструкцией. Представим H в виде тензорного произведения двух пространств H_1 и H_2: $H = H_1 \otimes H_2$. В качестве R рассмотрим совокупность всех операторов вида $A \otimes 1$. Тогда R' состоит из операторов вида $1 \otimes B$ и пересечение $R \cap R'$ очевидно содержит лишь скалярные операторы. Эта конструкция применима, разумеется, и к бесконечномерным пространствам. Но в бесконечномерном пространстве уже не все факторы получаются таким образом. Те факторы, которые можно так получить, называются факторами типа I.

Обычно классификация факторов делается в зависимости от строения множества проекционных операторов в факторе. Факторы типа I выделяются тем свойством, что в этом множестве есть минимальные элементы (соответствующие операторам вида $P \otimes 1$, где P — проекционный оператор ранга 1).

В факторах типа II нет минимальных проекторов, но есть так называемые конечные проекторы, т. е. проекторы, не сопряженные своей правильной части.

В факторах типа III нет ни минимальных, ни конечных проекторов.

Представление T группы G называется фактор-представлением, если кольцо, порожденное всеми операторами $T(g)$, $g \in G$, является фактором. Говорят, что группа G принадлежит типу I, если всякое ее фактор-представление порождает фактор типа I и, следовательно, кратно неприводимому представлению.

Пусть даны две группы G_1 и G_2 и неприводимое представление T прямого произведения $G = G_1 \times G_2$. Обозначим через R_i кольцо, порожденное операторами $T(g)$, $g \in G_i \subset G$. Тогда $R_1' \cap R_2' = \{\lambda E\}$ в силу неприводимости T. Кроме того, $R_1 \subset R_2'$, так как элементы G_1 и G_2 коммутируют. Отсюда следует, что $R_1 \cap R_1' \subset R_2' \cap R_1' = \{\lambda E\}$. Значит, R_1 — фактор. То же самое верно и для R_2.

Если хотя бы одна из групп G_1, G_2 принадлежит типу I, то ограничение T на эту группу кратно неприводимому представлению. В этом случае легко показать, что представление T имеет вид $T_1 \otimes T_2$, где T_i — представление группы G_i.

В общем случае это утверждение неверно. Один из простейших примеров можно построить так. Пусть G — счетная дискретная группа, у которой каждый класс сопряженных элементов, кроме единичного, бесконечен. (Примером такой группы является группа рациональных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или группа перестановок счетного множества, передвигающих лишь конечное число точек.) Рассмотрим представление T группы $G \times G$ в пространстве $L^2(G)$, заданное формулой: $T(g_1, g_2) f(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$. Это представление неприводимо, но не может быть записано в виде $T_1 \otimes T_2$, где T_i — представления группы G. Ограничение T на G не кратно неприводимому представлению и является фактором типа II.

Предположим теперь, что неприводимое представление T группы $G = G_1 \times G_2$ обладает следующим свойством.

(A) Существует функция $\varphi \in L_1(G_1 \times G_2)$ вида $\varphi(g_1, g_2) = \varphi_1(g_1)\varphi_2(g_2)$, для которой оператор

$$T(\varphi) = \int \varphi(g_1, g_2) T(g_1, g_2)\, dg_1\, dg_2$$

является ненулевым вполне непрерывным оператором. Мы покажем, что в этом случае представление T является тензорным произведением неприводимых представлений групп G_1 и G_2.

Прежде всего, заметим, что вместе с функцией φ условию (A) удовлетворяет функция $\psi = \varphi * \varphi^*$ *). Она также имеет вид $\psi_1(g_1)\psi_2(g_2)$, где $\psi_i = \varphi_i * \varphi_i^*$. Операторы $A_i = \int \psi_i(g) T(g)\, dg$ неотрицательны, перестановочны между собой и произведение их — вполне непрерывный оператор. Отсюда без труда выводится, что каждый из операторов A_i имеет чисто точечный спектр. Далее, если H_i — собственное подпространство для A_i, отвечающее ненулевому собственному значению, то пересечение $H_1 \cap H_2$ конечномерно, так как все векторы из этого пересечения являются собственными для оператора $A_1 A_2$ с ненулевым собственным значением. Проекционный оператор P_i на подпространство H_i принадлежит фактору R_i, порожденному операторами $T(g)$, $g \in G_i$. Хорошо известно (см., например, «Нормированные кольца», гл. II, § 3), что любой фактор R обладает следующим свойством: если операторы X и Y лежат в R и R' соответственно,

---

*) Мы используем стандартные обозначения для операций умножения и инволюции в групповом кольце группы G. См., например, цитированную выше книгу М. А. Наймарка.

то произведение XY равно нулю тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю.

Рассмотрим теперь среди всех ненулевых проекционных операторов в R_2 такой оператор P, для которого ранг произведения P_1P принимает наименьшее значение. (Существование такого оператора P обеспечивается тем, что ранг P_1P_2 конечен.) Покажем, что P — минимальный проектор в R_2. В самом деле, если бы P можно было представить в виде $P'+P''$, где P' и P'' — ортогональные проекторы из R_2, то хотя бы один из операторов P_1P', P_1P'' имел ранг меньше, чем P_1P, что невозможно. Итак, фактор R_2 принадлежит типу I. Как мы видели выше, отсюда вытекает, что представление T имеет вид $T_1 \otimes T_2$, где T_i — неприводимое представление группы G_i.

2. Связь между унитарными представлениями группы $\widetilde{G}$ всех невырожденных матриц 2-го порядка и подгруппы матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В этом и в следующих пунктах устанавливаются некоторые свойства неприводимых унитарных представлений группы матриц 2-го порядка с элементами из несвязного непрерывного поля K. При этом удобнее вместо группы G унимодулярных матриц рассматривать группу $\widetilde{G}$ всех невырожденных матриц. Переход от группы $\widetilde{G}$ к группе G не представляет труда (см. п. 5).

Рассмотрим в группе $\widetilde{G}$ всех невырожденных матриц 2-го порядка с элементами из несвязного непрерывного поля K подгруппу G_0 матриц вида $g_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Цель этого пункта — доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Всякое унитарное неприводимое представление $T(g)$ группы G остается неприводимым при ограничении на подгруппу G_0.*

Перечислим унитарные неприводимые представления группы G_0. Все они, кроме одного, одномерны и имеют вид $V(g_{a,b}) = \pi(a)$, где π — мультипликативный характер поля K. Единственное бесконечномерное неприводимое представление реализуется в пространстве $L^2(K^*, d^*x)$ и имеет вид

$$U(g_{a,b})\varphi(x) = \chi(bx)\varphi(ax),$$

где χ — фиксированный нетривиальный аддитивный характер K.

Доказательство того, что неприводимые унитарные представления G_0 исчерпываются приведенными выше, проводится стандартным приемом теории индуцированных представлений, и мы его опустим.

Лемма. *Ограничение T на G_0 кратно неприводимому представлению.*

Доказательство. Ограничение T на G_0, как и всякое унитарное представление, можно реализовать в виде прямого интеграла неприводимых представлений.

Предположим сначала, что в этом разложении одномерные представления составляют множество положительной меры. Так как при одномерных представлениях элементы подгруппы $N = \{g_{1,b}\}$ переходят в единичный оператор, то в пространстве H представления T существует вектор ξ, инвариантный относительно $T(g)$, $g \in N$. Будем считать, что $\|\xi\| = 1$.

Рассмотрим функцию $F_\xi(g) = (T(g)\xi, \xi)$. Очевидно, это непрерывная положительно определенная функция на G, постоянная на двусторонних классах смежности по N. Так как матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ при $\gamma \neq 0$ принадлежат одному классу смежности, мы получаем

$$F_\xi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) = F_\xi\left(\begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\gamma \to 0$, получим

$$F_\xi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\right) = F_\xi\left(\begin{pmatrix} \alpha\delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

В частности, при $\delta = \alpha^{-1}$ мы получаем $F_\xi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\right) = 1$. Отсюда вытекает, что вектор ξ инвариантен относительно подгруппы K матриц вида $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$. В самом деле, для таких матриц g можно написать

$$\|T(g)\xi - \xi\|^2 = (T(g)\xi - \xi,\ T(g)\xi - \xi) = 2 - 2\,\mathrm{Re}\,F_\xi(g) = 0.$$

Но тогда функция $F_\xi(g)$ должна быть постоянна на двусторонних классах смежности по подгруппе K. Легко проверить, что при $\gamma \neq 0$, $x \neq 0$ матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ \gamma x^2 & 1 \end{pmatrix}$ лежат в одном классе смежности. Поэтому

$$F_\xi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) = F_\xi\left(\begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ \gamma x^2 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Переходя здесь к пределу при $x \to 0$, получим

$$F_\xi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) = F_\xi\left(\begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

В частности, для всякой унимодулярной матрицы g справедливо равенство $F_\xi(g) = 1$. Как и выше, отсюда вытекает, что $T(g)\xi = \xi$ для всякой унимодулярной матрицы g.

Обозначим через H_0 подпространство в H, состоящее из векторов, инвариантных относительно унимодулярной подгруппы. Несложное вычисление показывает, что пространство H_0 инвариантно относительно всех операторов $T(g)$, $g \in \widetilde{G}$. В силу неприводимости пространства H должно быть $H_0 = H$. Мы получили, что представление T тривиально на подгруппе G унимодулярных матриц и поэтому его можно рассматривать как представление фактор-группы $\widetilde{G}/G$. Так как эта группа коммутативна, представление T должно быть одномерным. Для одномерных же представлений наша лемма и теорема I тривиальным образом верны.

Рассмотрим теперь второй случай, когда одномерные представления G_0 не входят в разложение представления T. Но у группы G_0 имеется единственное неодномерное представление U. Поэтому в этом случае ограничение представления T на G_0 кратно представлению U. Лемма доказана.

Из приведенных рассуждений вытекает справедливость следующего более общего утверждения:

если T — фактор-представление группы $\widetilde{G}$, то его ограничение на G_0 кратно неприводимому представлению.

В самом деле, единственное место в нашем рассуждении, где использовалась неприводимость T, это доказательство равенства $H_0 = H$. В случае фактор-представления это равенство доказывается так. Обозначим через P оператор проектирования на подпространство H_0. Как мы отмечали выше, оператор P перестановочен со всеми операторами $T(g)$, а значит, и со всеми операторами из слабозамкнутого кольца R, порожденного $T(g)$. Без труда проверяется, что P перестановочен и со всеми операторами из кольца R', состоящего из операторов, перестановочных с элементами из R. Поэтому $P \in R \cap R'$. Но по определению фактор-представления кольца R и R' являются факторами, т. е. пересечение $R \cap R'$ состоит только из скалярных операторов. Поэтому $P = E$ и $H_0 = H$.

Нам будет удобно перейти к другой реализации представления U, рассматривая вместо функций на K^* их преобразования Фурье на двойственной группе Π.

В этой реализации операторы представления имеют вид

$$U(g_{a,b})\,\varphi(\pi_1) = \int \pi_1\pi_2^{-1}(b)\,\Gamma\left(\pi_2\pi_1^{-1}\right)\pi_2(a)\,\varphi\left(\pi_2\right)d\pi_2 \quad \text{при} \quad b \neq 0,$$

$$U(g_{a,0})\,\varphi(\pi) = \pi(a)\,\varphi(\pi). \tag{1}$$

Из леммы следует, что ограничение T на G_0 задается теми же формулами, только вместо обычных функций нужно рассматривать вектор-функции со значениями в некотором гильбертовом пространстве L.

Кроме того, для g из центра $\widetilde{G}$ операторы $T(g)$ перестановочны со всеми операторами представления и потому кратны единичному оператору. Отсюда следует, что если $d_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, то $T(d_\lambda) = \pi_0(\lambda)\,E$, где π_0 — фиксированный характер на K^*. Обозначим через s матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из тождества $sg_{a,0}s^{-1} = g_{a^{-1},0}\,d_a$ вытекает, что оператор $T(s)$ имеет вид

$$T(s)\,\varphi(\pi) = s(\pi)\,\varphi(\pi_0\pi^{-1}),$$

где $s(\pi)$ — функция на Π, значения которой — унитарные операторы в L.

Заметим теперь, что из неприводимости $T(g)$ следует неприводимость совокупности операторов $s(\pi)$ в L. В самом деле, если L_1 — подпространство в L инвариантное относительно всех (или даже почти всех) $s(\pi)$, то подпространство $H_1 \subset H$, состоящее из вектор-функций со значениями в L_1, инвариантно относительно $T(g)$, $g \in G_0$, и относительно $T(s)$. Но подгруппа G_0 и элемент s порождают всю группу $\widetilde{G}$. Поэтому H_1 инвариантно относительно всех $T(g)$, что противоречит неприводимости H.

Для доказательства теоремы 1 достаточно теперь показать, что операторы $s(\pi)$ перестановочны между собой. Тогда совокупность $s(\pi)$ будет неприводимой лишь в случае, когда L одномерно и, следовательно, ограничение $T(g)$ на G_0 совпадает с U. Тождество $sg_{1,1}s = g_{1,-1}sg_{1,-1}$ приводит к следующему условию на $s(\pi)$:

$$s(\pi_1)\Gamma(\pi_1\pi_2\pi_0^{-1})s(\pi_2) =$$
$$= \pi_1(-1)\pi_2(-1)\int \Gamma(\pi\pi_1^{-1})s(\pi)\Gamma(\pi\pi_2^{-1})\,d\pi, \tag{2}$$

из которого непосредственно вытекает перестановочность $s(\pi_1)$ и $s(\pi_2)$ для почти всех пар (π_1, π_2). Теорема 1 доказана.

3. Теорема о полной непрерывности оператора T_φ. В этом пункте мы покажем, что группа $\tilde{G}$ принадлежит типу I, т. е. все унитарные фактор-представления группы $\tilde{G}$ кратны неприводимому представлению.

Для этого мы докажем более сильное утверждение.

Теорема 2. *Если $T(g)$ — неприводимое унитарное представление группы $\tilde{G}$, φ — суммируемая функция на $\tilde{G}$, то оператор*

$$T_\varphi = \int \varphi(g)T(g)\,dg$$

вполне непрерывен *).

Доказательство. Пусть $\varphi'_{k,\theta}$ — обобщенная функция на $\tilde{G}$, заданная формулой $(\varphi'_{k,\theta}, f) = q^k \int f(g_{a,b})\theta^{-1}(a)\,d^*a\,db$, где θ — мультипликативный характер, а интеграл берется по множеству $g_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|a| = 1$, $|b| \leqslant q^{-k}$. Положим $\varphi_{k,\theta} = \varphi'_{k,\theta} - \varphi'_{k-1,\theta}$. Нетрудно проверить, что оператор $U_{\varphi_{k,\theta}}$ является проектором на одномерное подпространство в $L^2(K^*)$, порожденное функцией

$$e_{k,\theta}(x) = \begin{cases} \theta(y) & \text{при } |x| = q^{-k}, \\ 0 & \text{при } |x| \neq q^{-k}. \end{cases}$$

*) Группы, для которых справедливо это утверждение, называют CCR-группами, следуя Капланскому, который впервые выделил этот класс групп и доказал, что все они принадлежат типу I.

Очевидно, совокупность функций $e_{k,\theta}$ образует ортогональный базис в $L^2(K^*)$.

Пусть теперь M — совокупность всех функций $\varphi \in L^1(\widetilde{G})$, для которых оператор T_φ имеет конечный ранг. Ясно, что M — двусторонний идеал в $L^1(\widetilde{G})$, содержащий все функции вида $\varphi_{k,\theta} * f$, $f \in L^1(\widetilde{G})$. Если $u \in L^\infty(\widetilde{G})$ — функционал на $L^1(\widetilde{G})$, равный нулю на M, то функция u и все ее сдвиги обладают свойством $u * \varphi_{k,\theta} = 0$. Отсюда $u = \text{const}$ и замыкание M содержит все функции на $L^1(\widetilde{G})$, интеграл которых равен нулю.

С другой стороны, в M есть функции с отличным от нуля интегралом, например, характеристическая функция подгруппы U (см. следующий пункт). Поэтому $\overline{M} = L^1(\widetilde{G})$. Мы доказали, что каждая функция $\varphi \in L^1(\widetilde{G})$ может быть аппроксимирована по норме $L^1(\widetilde{G})$ функциями из M. Значит, оператор T_φ может быть аппроксимирован (в смысле топологии, определяемой нормой оператора) операторами конечного ранга и, следовательно, вполне непрерывен.

Теорема доказана.

4. Разложение неприводимого представления группы $\widetilde{G}$ по представлениям ее максимальной компактной подгруппы. Теорема о существовании следа. Целью этого пункта является доказательство следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть $T(g)$ — унитарное неприводимое представление группы $\widetilde{G}$. В разложении ограничения $T(g)$ на максимальную компактную подгруппу $U \subset \widetilde{G}$ каждая неприводимая компонента имеет конечную кратность.*

Доказательство. Воспользуемся результатами, полученными при доказательстве теоремы 1. Мы видели, что оператор представления $T(s)$, отвечающий матрице $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, имеет в π-реализации следующий вид:

$$T(s)\varphi(\pi) = s(\pi)\varphi(\pi_0\pi^{-1}), \tag{1}$$

где π пробегает группу характеров Π, двойственную K^*. При этом функция $s(\pi)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$s(\pi_1)\Gamma(\pi_1\pi_2\pi_0^{-1})s(\pi_2)=$$
$$=\pi_1\pi_2(-1)\int\Gamma(\pi\pi_1^{-1})s(\pi)\Gamma(\pi\pi_2^{-1})\,d\pi. \qquad (2)$$

Разложим функцию $s(\pi)$ в ряд Лорана и найдем соотношения для коэффициентов разложения.

Напомним, что, согласно § 2, п. 6, каждый характер задается комплексным числом λ, $|\lambda|=1$, и характером $\theta(y)$, определенным на группе O^* элементов с нормой 1. Он выражается следующей формулой: если $x=\mathfrak{p}^k y$, $|y|=1$, то

$$\pi(x)=\lambda^k\theta(y).$$

Подставим в (2) разложения функций $s(\pi)=s(\lambda, \theta)$ и $\Gamma(\pi)$ в ряд Лорана

$$s(\pi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda^k s_k(\theta), \qquad \Gamma(\pi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda^k\Gamma_k(\theta).$$

Мы получим следующее соотношение для коэффициентов $s_k(\theta)$:

$$(1-q^{-1})\sum_m s_{k+m}(\theta_1)\Gamma_{-m}(\theta_1\theta_2\theta_0^{-1})\lambda_0^m s_{l+m}(\theta_2)=$$
$$=\theta_1\theta_2(-1)\sum_\theta\Gamma_{-k}(\theta\theta_1^{-1})s_{k+l}(\theta)\Gamma_{-l}(\theta\theta_2^{-1})\;^{*)}. \qquad (3)$$

Исследуем это условие, учитывая следующие формулы для коэффициентов $\Gamma_k(\theta)$, полученные в п. 6 § 2.

Если ранг характера θ равен $m>0$, то $\Gamma_k(\theta)=0$ для всех $k\neq -m$;

$$|\Gamma_{-m}(\theta)|=q^{-m/2}.$$

Если ранг характера θ равен 0, т. е. $\theta(x)\equiv 1$, то

$$\Gamma_k(\theta)=\begin{cases} 0 & \text{при } k<-1,\\ -q^{-1} & \text{при } k=-1,\\ 1-q^{-1} & \text{при } k>-1.\end{cases}$$

Во-первых, рассматривая (3) при фиксированных θ_1, θ_2, l и достаточно больших положительных k, мы видим, что правая часть равна нулю, а в левой части при $\theta_1\theta_2\neq\theta_0$,

---

*) Здесь всюду через (λ_0, θ_0) обозначены компоненты характера π_0.

сумма сводится к одному члену, в котором m равно рангу *) $\theta_1\theta_2\theta_0^{-1}$. Отсюда легко вывести, что при каждом θ коэффициенты $s_k(\theta)$ обращаются в нуль при достаточно больших положительных k.

Во-вторых, если $k \leqslant 0$, $l \leqslant 0$, $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1\theta_2 \neq \theta_0$, то из (3) вытекает равенство $s_{k+m}(\theta_1)\, s_{l+m}(\theta_2) = 0$, где m — ранг характера $\theta_1\theta_2\theta_0^{-1}$. Предположим, что для некоторого θ_1 и некоторого $n \leqslant 0$ коэффициент $s_n(\theta_1)$ отличен от нуля. Тогда, полагая $k = n - m$, получаем, что для всех θ_2, отличных от θ_1 и $\theta_0\theta_1^{-1}$, коэффициенты $s_{l+m}(\theta_2)$ равны нулю при $l \leqslant 0$. Мы доказали, таким образом, что для всех θ, кроме, быть может, одной пары θ_1, $\theta_0\theta_1^{-1}$, среди коэффициентов $s_k(\theta)$ лишь конечное число отлично от нуля. Наконец, для «исключительных» характеров θ_1 и $\theta_0\theta_1^{-1}$ из (3) нетрудно получить рекуррентные соотношения между $s_k(\theta)$, из которых следует, что $|s_k(\theta)|$ убывает при $k \to -\infty$ как геометрическая прогрессия **).

Из всего сказанного следует, что *функция* $s(\pi) = s(\lambda, \theta)$ *при каждом* θ *бесконечно дифференцируема по* λ.

Теперь мы в состоянии доказать теорему 3. Заметим сначала, что все максимальные компактные подгруппы в группе $\widetilde{G}$ сопряжены группе U, состоящей из таких матриц g, для которых матричные элементы g и g^{-1} принадлежат O. В группе U имеется семейство нормальных делителей U_n, состоящих из матриц, сравнимых с единичной матрицей по модулю $\mathfrak{p}^n$.

Очевидно, что как сама группа U, так и подгруппы U_n являются открытыми подмножествами в $\widetilde{G}$ и образуют в $\widetilde{G}$ полную систему окрестностей единичного элемента.

Легко убедиться, что каждое неприводимое представление группы U тривиально на U_n при достаточно большом n.

Обозначим через H_n подпространство в H, состоящее из векторов, инвариантных относительно операторов $T(g)$, $g \in U_n$. Теорема 3 равносильна утверждению о том, что все пространства H_n конечномерны.

Найдем сначала пространство $H_n^0 \subset H_n$, состоящее из векторов, инвариантных относительно $T(g)$, $g \in U_n \cap G_0$.

*) Определение ранга см. в § 2, п. 6.

**) См. ниже п. 6.

Это проще всего сделать, используя первоначальную реализацию представления U. Мы сформулируем только окончательный результат.

Пространство H_n^0 *состоит из функций* $\varphi(\pi) = \sum \varphi_k(\theta)\lambda^k$, *удовлетворяющих условию* $\varphi_k(\theta) = 0$, *если* (*ранг* θ) $> n$ *или* $k < -n$.

Так как $sU_ns^{-1} = U_n$, то H_n инвариантно относительно $T(s)$. Поэтому, если $\varphi(\pi) \in H_n$, то функции $\varphi(\pi)$ и $T(s)\varphi(\pi) = s(\pi)\varphi(\pi_0\pi^{-1})$ одновременно удовлетворяют сформулированному выше условию. Конечномерность пространства H_n следует теперь из бесконечной дифференцируемости по λ функции $s(\pi) = s(\lambda, \theta)$ и из следующего легко проверяемого предложения.

Пусть $s(\lambda)$ — *бесконечно дифференцируемая функция на единичной окружности* Λ *и* $|s(\lambda)| \equiv 1$. *В пространстве* $L^2(\Lambda)$ *существует лишь конечное число линейно независимых функций* $\varphi(\lambda)$, *удовлетворяющих условиям*: 1) *функция* $\varphi(\lambda)$ *ортогональна* λ^k *при* $k < -n$; 2) *функция* $s(\lambda)\varphi(\lambda)$ *ортогональна* λ^k *при* $k > n$.

Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы 3 максимальность компактной подгруппы нигде не использовалась. Фактически требовалось лишь, чтобы компактная подгруппа U содержала все подгруппы U_n, начиная с достаточно большого номера n, т. е. чтобы она была открытой компактной подгруппой в $\tilde{G}$. Итак, *утверждение теоремы* 3 *остается справедливым для любой открытой компактной подгруппы* U *группы* $\tilde{G}$, *в частности, для любой из подгрупп* U_n.

Следствие. *Если функция* φ *принадлежит пространству* S *финитных кусочно постоянных функций на* $\tilde{G}$, *то оператор* $T_\varphi = \int \varphi(g)T(g)\,dg$ *имеет конечный ранг.*

Доказательство. Для каждой функции φ из S найдется такое n, что φ постоянна на двусторонних классах смежности по U_n. Отсюда следует, что для любого x из пространства представления H и любого $g \in U_n$ мы имеем

$$T(g)T_\varphi = T_\varphi.$$

Мы видим, что область значений оператора T_φ лежит в пространстве H_n, состоящем из векторов, инвариантных относительно U_n. Конечномерность пространства H_n была установлена в доказательстве теоремы 3.

Из доказанного следует, что оператор T_φ имеет след, причем этот след является линейным функционалом в пространстве S. Этот факт можно еще сформулировать следующим образом.

Каково бы ни было неприводимое унитарное представление $T(g)$ группы $\widetilde{G}$, след $\operatorname{Tr} T(g)$ *оператора $T(g)$ существует как обобщенная функция в пространстве S.*

5. Представления унимодулярной группы. Покажем, каким образом перенести доказанные выше теоремы 2 и 3 с полной матричной группы $\widetilde{G}$ на группу G матриц с определителем 1. При этом мы ограничимся случаем, когда группа $W=K^*/(K^*)^2$ конечна. В § 1 было показано, что если конечное поле $L=O/P$ имеет характеристику, отличную от 2, то группа W имеет порядок 4.

Если поле L имеет характеристику 2, а поле K — характеристику 0 (как, например, в важном для дальнейшего случая поля 2-адических чисел), то группа W также конечна. В самом деле, ряд

$$(1-x)^{1/2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

сходится при $\left|\frac{x}{4}\right|<1$. Поэтому подгруппа $(K^*)^2$ содержит O_n^* при достаточно большом n. Кроме того, в $(K^*)^2$ входят все четные степени образующей $\mathfrak{p}$. Значит, порядок W не превосходит порядка конечной группы $Z_2\times O^*/O_n^*$.

Если же поле K имеет характеристику 2, то группа W бесконечна (она изоморфна в этом случае произведению счетного числа групп Z_2). Этот случай мы исключаем из рассмотрения, хотя тот факт, что группа G принадлежит типу I, можно доказать и в этом случае.

Пусть $\widehat{G}$ — множество всех неприводимых представлений G, рассматриваемых с точностью до эквивалентности. Группа $\widetilde{G}$ действует в $\widehat{G}$ следующим образом. Если $T\in\widehat{G}$, $g\in\widetilde{G}$, то положим $T^{(g)}(g_1) = T(gg_1g^{-1})$. Ясно, что $T^{(g)}$ также является неприводимым унитарным представлением группы G. Рассмотрим стационарную подгруппу точки $T \in \widehat{G}$. Ясно, что эта подгруппа содержит G, так как если $g \in G$, то $T^{(g)}(g_1) = T(g)T(g_1)T^{-1}(g)$, откуда видно, что T и $T^{(g)}$ эквивалентны. Далее, все матрицы вида $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ также принадлежат стационарной подгруппе, так как для таких g представление $T^{(g)}$ просто совпадает с T.

Поэтому стационарная подгруппа содержит все матрицы из $\widetilde{G}$, определитель которых принадлежит группе $(K^*)^2$. Так как мы предположили, что группа $K^*/(K^*)^2$ конечна, то орбита точки T под действием $\widetilde{G}$ состоит из конечного числа точек $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_k$ — пространства, в которых действуют эти представления. Тогда в прямой сумме $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_k$ можно задать неприводимое представление T' группы $\widetilde{G}$, ограничение которого на G оставляет каждое H_i инвариантным и совпадает в этом подпространстве с представлением T_i.

Справедливость теорем 2 и 3 для представления T без труда выводится из справедливости этих теорем для представления T'.

6. Классификация всех неприводимых представлений групп G и $\widetilde{G}$. Условие (3), полученное в п. 4, позволяет дать полную классификацию всех неприводимых унитарных представлений групп $\widetilde{G}$ и G. А именно:

Теорема 4. *Представления основной, дополнительной и дискретных серий, а также особое и единичное представления исчерпывают совокупность всех неприводимых унитарных представлений группы G.*

Нам будет удобно доказывать аналогичную теорему для группы $\widetilde{G}$. Приведем формулы для представлений этой группы. Через g обозначается матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \widetilde{G}$.

1. Непрерывная серия состоит из представлений T_{π_1, π_2}, где π_1, π_2—унитарные мультипликативные характеры поля K.

Пространство представления — $L^2(K, dx)$ (ср. § 3, п. 1)

$$T_{\pi_1, \pi_2}(g) f(x) = \pi_1(\beta x + \delta) \pi_2\left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta x + \delta}\right) \frac{|\alpha\delta - \beta\gamma|^{\frac{1}{2}}}{|\beta x + \delta|} f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right).$$

2. Дополнительная серия состоит из представлений $V_{\pi_0, \rho}$, где π_0 — унитарный мультипликативный характер поля K, ρ — вещественное число из интервала (0, 1). Пространство представления состоит из функций на K со скалярным произведением (ср. § 3, п. 7)

$$(f_1, f_2) = \int f_1(x) \overline{f_2(y)} |x - y|^{-2\rho} dx\, dy.$$

Операторы представления действуют по формуле

$$V_{\pi_0, \rho}(g) f(x) = \pi_0(\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{|\alpha\delta - \beta\gamma|^{1-\rho}}{|\beta x + \delta|^{2-2\rho}} f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right).$$

3. Особая серия состоит из представлений S_{π_0}, где π_0 — унитарный мультипликативный характер K. Представления этой серии действуют в пространстве функций на K, для которых $\int\limits_K f(x)\, dx = 0$, скалярное произведение задается формулой (ср. § 3, п. 8)

$$(f_1, f_2) = \int f_1(x) \overline{f_2(y)} \ln|x - y| dx\, dy.$$

Операторы представления имеют вид

$$S_{\pi_0} f(x) = \pi_0(\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{|\alpha\delta - \beta\gamma|}{|\beta x + \delta|^2} f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right).$$

4. Дискретная серия состоит из представлений $U_{\pi, \Pi}$, где π_0, Π — унитарные мультипликативные характеры полей K и $K(\sqrt{\tau})$ соответственно. Представление действует в пространстве $L^2(K, dx)$ по формуле (ср. § 4, п. 1)

$$U_{\pi_0, \Pi}(g) f(x) = \begin{cases} \int K(g \mid x, y) f(y)\, dy, & \text{если } \beta \neq 0; \\ \pi_0(\alpha\delta) \operatorname{sign}_\tau(\alpha) \Pi(\alpha^{-1}) \left|\frac{\delta}{\alpha}\right|^{\frac{1}{2}} \chi\left(\frac{\gamma x}{\alpha}\right) \varphi\left(\frac{\delta x}{\alpha}\right), & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

Ядро $K(g \mid x, y)$ отлично от нуля лишь при $\operatorname{sign}_\tau(xy\Delta) = 1$ и имеет вид

$$K(g \mid x, y) = a_\tau c_\tau \pi_0(\Delta) \mid \Delta \mid^{1/2} \frac{\operatorname{sing}_\tau \beta x \Delta}{\mid \beta \mid} \times$$
$$\times \chi\left(\frac{\delta x + \alpha y}{\beta}\right) \int_{t\bar{t} = \frac{y}{\Delta x}} \chi\left(\frac{x\,\Delta t + y t^{-1}}{-\beta}\right) \Pi(t)\, d^*t,$$

где положено $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$.

5. Вырожденная серия состоит из одномерных представлений

$$W_{\pi_0}(g) = \pi_0(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

здесь π_0 — унитарный мультипликативный характер поля K.

Теорема 4′. *Перечисленными выше представлениями исчерпывается совокупность всех неприводимых унитарных представлений группы $\tilde{G}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала конечномерное представление T группы $\tilde{G}$. Операторы $P_n = \int_{U_n} T(g)\, dg$ являются, очевидно, самосопряженными проекционными операторами в пространстве H представления T. Кроме того, так как подгруппы U_n *) составляют полную систему окрестностей единицы в $\tilde{G}$, последовательность $\{P_n\}$ сильно сходится к единичному оператору.

В конечномерном пространстве это возможно лишь, если, начиная с некоторого n, имеет место равенство $P_n = E$. Но это значит, что все векторы из H инвариантны относительно U_n. Ядро представления T является нормальным делителем в $\tilde{G}$ и содержит подгруппу U_n. Отсюда вытекает, что ядро T содержит целиком подгруппу G. Значит, T является фактически представлением фактор-группы $\tilde{G}/G$.

Эта последняя группа коммутативна и изоморфна мультипликативной группе поля K. Таким образом, все конечномерные унитарные неприводимые представления группы $\tilde{G}$ исчерпываются указанными выше представлениями W_{π_0}, составляющими вырожденную серию.

---

*) Напомним, что U_n состоит из всех матриц, сравниваемых с E по модулю $\mathfrak{p}^n O$.

Пусть теперь представление T бесконечномерно и неприводимо. Как мы видели в п. 2, ограничение T на G_0 также неприводимо и совпадает с некоторым фиксированным представлением G_0, заданным формулами (1).

Так как группа $\widetilde{G}$ порождается подгруппой G_0 и матрицей $s=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, то для задания представления T достаточно указать оператор $T(s)$. Этот оператор, как показано в п. 2, имеет вид

$$T(s)\varphi(\pi)=s(\pi)\varphi(\pi_0\pi^{-1}),$$

где $s(\pi)$ — функция на множестве Π унитарных мультипликативных характеров поля K, принимающая комплексные значения, по модулю равные 1. Характер π_0 в этой формуле определяется равенством $T(d_\lambda)=\pi_0(\lambda)E$, где $d_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

Приведем явные выражения для функций $s(\pi)$, соответствующих перечисленным выше сериям представлений *). Символом $\pi_{(\rho)}$ мы будем обозначать неунитарный характер $\pi_{(\rho)}(x)=|x|^\rho$.

1. $T=T_{\pi_1,\pi_2}$ — представление основной серии
$$s(\pi)=\pi_1\pi_2(-1)\,\Gamma\left(\pi^{-1}\pi_1\pi_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\Gamma\left(\pi^{-1}\pi_2\pi_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right).$$

2. $T=V_{\pi_0,\rho}$ — представление дополнительной серии
$$s(\pi)=\Gamma(\pi^{-1}\pi_0\pi_{(\rho)})\,\Gamma(\pi^{-1}\pi_0\pi_{(1-\rho)}).$$

3. $T=S_{\pi_0}$ — представление особой серии
$$s(\pi)=\Gamma(\pi^{-1}\pi_0)\,\Gamma(\pi^{-1}\pi_0\pi_{(1)}).$$

4. $T=U_{\pi_0,\Pi}$ — представление дискретной серии
$$s(\pi)=c\Gamma_\tau(\pi_\tau),$$

где Γ_τ — гамма-функция поля $K(\sqrt{\tau})$, а π_τ — неунитарный мультипликативный характер этого поля, заданный формулой

$$\pi(z)=\Pi^{-1}(z)\,\pi_0\pi^{-1}\pi_{\left(\frac{1}{2}\right)}(z\bar{z}).$$

---

*) Отметим, что из этих формул непосредственно видна эквивалентность представлений T_{π_1,π_2} и T_{π_2,π_1} и эквивалентность представлений $V_{\pi_0,\rho}$ и $V_{\pi_0,1-\rho}$.

Для доказательства теоремы 4 достаточно проверить, что функциональное уравнение (2), выведенное в п. 2, не имеет других решений, кроме перечисленных выше. Мы сделаем это следующим образом.

Сначала будут явно найдены все решения этого уравнения, которые при разложении в ряд Лорана,

$$s(\pi)=s(\lambda,\ \theta)=\sum_k s_k(\theta)\lambda^k \tag{1}$$

имеют хотя бы один ненулевой коэффициент при неположительной степени λ. Оказывается, что все такие решения связаны с представлениями основной, дополнительной и особой серии. Остальные решения не удается выписать в явном виде, но можно показать, что для представлений, соответствующих этим решениям, матричные элементы имеют суммируемый квадрат на подгруппе G. Отсюда следует, что соответствующие представления входят дискретным слагаемым в разложение $L^2(G)$ на неприводимые компоненты. Так как в § 6 была получена формула Планшереля, дающая разложение $L^2(G)$ по представлениям основной и дискретной серий, мы видим, что оставшиеся решения нашего функционального уравнения связаны с представлениями дискретных серий.

Приступим к реализации этого плана.

Напомним некоторые результаты п. 4. Основное функциональное уравнение в терминах коэффициентов ряда Лорана имеет вид

$$(1-|\mathfrak{p}|)\sum_m s_{k+m}(\theta_1)\lambda_0^m\Gamma_{-m}\left(\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_0}\right)s_{l+m}(\theta_2)=$$
$$=\theta_1\theta_2(-1)\sum_\theta \Gamma_{-k}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)s_{k+l}\Gamma_{-l}\left(\frac{\theta}{\theta_2}\right). \tag{2}$$

Коэффициенты $s_k(\theta)$ обладают следующими свойствами. Для каждого θ существует такой номер $\rho(\theta)$, что $s_k(\theta)=0$ при $k>\rho(\theta)$. Если среди коэффициентов $s_k(\theta)$ только конечное число отлично от нуля, то $s(\lambda,\ \theta)=s_{\rho(\theta)}(\theta)\cdot\lambda^{\rho(\theta)}$ (т. е. только один коэффициент отличен от нуля; это легко вытекает из того, что $|s(\lambda,\ \theta)|=1$ при $|\lambda|=1$).

Введем обозначение $\theta^*=\theta_0\theta^{-1}$. Тогда $s_k(\theta^*)=\overline{s_k(\theta)}$.

Назовем характер θ исключительным, если среди коэффициентов $s_k(\theta)$, $k \leqslant 0$, есть хотя бы один отличный от нуля. Было показано, что существует не более двух исключительных характеров. Разберем отдельно 3 случая.

1-й случай. Существует два различных исключительных характера θ_1 и θ_1^*. Пусть $s_{-n}(\theta_1) \neq 0$, $n \geqslant 0$. Пусть θ_2 — произвольный характер, отличный от θ_1^*. Обозначим через r^* ранг характера $\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_0} = \frac{\theta_1}{\theta_1^*}$. Тогда сумма в левой части равенства (2) сведется к одному члену

$$s_{k+r^*}(\theta_1)\,\Gamma_{-r^*}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1^*}\right)\lambda_0^{r^*} s_{l+r^*}(\theta_2).$$

Положим теперь $k = -n - r^*$. Тогда сумма справа также сведется к одному члену, так как $\Gamma_{n+r^*}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)$ отлично от нуля лишь при $\theta = \theta_1$. Мы получили равенство

$$(1 - |\mathfrak{p}|)\, s_{-n}(\theta_1)\,\Gamma_{-r^*}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)\lambda_0^{r^*} s_{l+r}(\theta_2) = \\ = \theta_1\theta_2(-1)\,\Gamma_{n+r^*}(1)\, s_{l-n-r^*}(\theta_1)\,\Gamma_{-l}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right). \tag{3}$$

Так как $\Gamma_{n+r^*}(1) = 1 - |\mathfrak{p}|$, то отсюда

$$s_{l+r^*}(\theta_2) = \frac{\theta_1\theta_2(-1)\, s_{l-n-r^*}(\theta_1)\,\Gamma_{-l}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)}{s_{-n}(\theta_1)\,\Gamma_{-r^*}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)\lambda_0^{r^*}}. \tag{4}$$

В частности, если $\theta_2 \neq \theta_1$, то $s_{l+r^*}(\theta_2)$ отлично от нуля, лишь когда l равно рангу характера $\frac{\theta_1}{\theta_2}$, который мы обозначим через r.

Окончательно: если θ — характер, отличный от θ_1 и θ_1^*, то

$$s(\lambda, \theta) = \theta\theta_1(-1)\,\frac{s_{r-r^*-n}(\theta_1)\,\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)}{s_{-n}(\theta_1)\,\Gamma_{-r^*}\left(\frac{\theta}{\theta_1^*}\right)\lambda_0^{r^*}}\,\lambda^{r+r^*}. \tag{5}$$

Положим теперь в равенстве (2) $\theta_2 = \theta_1$ и обозначим через r_0 ранг характера $\frac{\theta_1}{\theta_1^*}$. Если хотя бы одно из чисел k, l неположительно, то сумма в правой части сводится к одному слагаемому, в котором $\theta = \theta_1$, и мы получаем равенства

$$(1-|\mathfrak{p}|)\, s_{k+r_0}(\theta_1)\, \lambda_0^{r_0} \Gamma_{-r_0}\left(\frac{\theta_1}{\theta_1^*}\right) s_{l+r_0}(\theta_1) = \Gamma_{-k}(1)\, s_{k+l}(\theta_1)\, \Gamma_{-l}(1).$$

Это уравнение после замены $s_k(\theta_1) = \sigma_{2r_0-k} \dfrac{1-|\mathfrak{p}|}{\Gamma_{-r_0}\left(\frac{\theta_1}{\theta_1^*}\right) \lambda_0^{r_0}}$ переходит в соотношение

$$\sigma_k \sigma_l = \begin{cases} \sigma_{k+l} & \text{при} \quad k \geqslant r_0, \quad l \geqslant r_0, \\ \dfrac{|\mathfrak{p}|}{1-|\mathfrak{p}|} & \text{при} \quad k = r_0 - 1, \quad l \geqslant r_0, \\ 0 & \text{при} \quad k < r_0 - 1, \quad l \geqslant r_0. \end{cases}$$

Отсюда величины σ_k без труда находятся. Мы приведем лишь окончательный результат. Существует такое комплексное число τ, что $\sigma_k = \dfrac{\Gamma_{k-r_0}(1)\, \tau^k}{1-|\mathfrak{p}|}$. Для $s_k(\theta_1)$ отсюда получается выражение *)

$$s_k(\theta_1) = \frac{\Gamma_{r_0-k}(1)\, \tau^{2\tau_0-k}}{\lambda_0^{r_0} \Gamma_{-r_0}\left(\frac{\theta_1}{\theta_1^*}\right)} = \theta_0(-1) \frac{\Gamma_{r_0-k}(1)\, \tau^{2r_0-k} \Gamma_{-r_0}\left(\frac{\theta_1^*}{\theta_1}\right)}{\lambda_0^{r_0} |\mathfrak{p}|^{r_0}}, \tag{6}$$

откуда

$$s(\lambda, \theta_1) = \sum_k \theta_0(-1) \frac{\Gamma_{r_0-k}(1)\, \lambda^k \tau^{2r_0-k} \Gamma_{-r_0}\left(\frac{\theta_1^*}{\theta_1}\right)}{\lambda_0^{r_0} |\mathfrak{p}|^{r_0}} =$$

$$= \sum_k \theta_0(-1)\, \Gamma_{r_0-k}(1) \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{r_0-k} \Gamma_{-r_0}\left(\frac{\lambda_0 |\mathfrak{p}|^{1/2}}{\tau\lambda}\right)^{-r_0}. \tag{7}$$

*) Здесь и далее мы пользуемся тождеством $\overline{\Gamma_k(\theta)} = \theta(-1)\, \Gamma_k(\theta^{-1})$ (см. § 2, п. 6).

Подставляя указанное в (6) значение $s_k(1)$ в формулу (5), мы получим, что при θ, отличном от θ_1 и θ_1^*,

$$s(\lambda,\ \theta)=\theta\theta_1(-1)\,\frac{\tau^{r^*-r}\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)\lambda^{r+r^*}}{\Gamma_{-r^*}\left(\frac{\theta}{\theta_1^*}\right)\lambda_0^{r^*}}=$$

$$=\theta_0(-1)\,\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{-r}\Gamma_{-r^*}\left(\frac{\theta_1^*}{\theta}\right)\left(\frac{\lambda_0|\mathfrak{p}|}{\tau\lambda}\right)^{-r^*}. \qquad (8)$$

Отметим, что равенство $|s(\lambda,\ \theta)|=1$ равносильно условию $|\tau|=|\mathfrak{p}|^{1/2}$.

Сравним теперь полученнные формулы (7), (8) с приведенным выше выражением

$$s(\pi)=\pi_1\pi_2(-1)\,\Gamma\left(\pi^{-1}\pi_1\pi_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\Gamma\left(\pi^{-1}\pi_2\pi_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \qquad (9)$$

для функции $s(\pi)$, соответствующей представлению $T_{\pi_1,\ \pi_2}$.

Обозначим через π_1 и π_2 характеры с координатами $\left(\tau|\mathfrak{p}|^{-1/2},\ \theta_1\right)$ и $\left(\frac{\lambda_0|\mathfrak{p}|^{1/2}}{\tau},\ \theta_1^*\right)$ соответственно. Без труда проверяется, что при этих π_1 и π_2 формула (9), переписанная в координатах $(\lambda,\ \theta)$, превращается в формулу (7) и (8).

Таким образом, мы доказали, что все решения функционального уравнения $(*)$, обладающие двумя исключительными характерами, связаны с представлениями основной серии.

2-й случай. Существует только один исключительный характер $\theta_1=\theta_1^*$. Мы можем считать, что $\theta_1\equiv 1$. В самом деле, без труда проверяется, что функция $\tilde{s}(\pi)=s(\pi\tilde{\pi})$ удовлетворяет функциональному уравнению вида (2), в котором π_0 заменено на $\pi_0\tilde{\pi}^{-2}$. Если для функции $s(\pi)$ исключительным характером был θ, то для $\tilde{s}(\pi)$ исключительным характером будет $\theta\tilde{\theta}^{-1}$. Это же рассуждение показывает, что мы можем ограничиться рассмотрением случая $\lambda_0=1$.

Основное уравнение (2) после подстановки $\theta_1\equiv 1$ будет иметь вид

$$(1-|\mathfrak{p}|)\sum_r s_{k+r}(1)\,\Gamma_{-r}(\theta_2)\,s_{l+r}(\theta_2)=$$

$$=\theta_2(-1)\sum_\theta \Gamma_{-k}(\theta)\,s_{k+l}(\theta)\,\Gamma_{-l}\left(\frac{\theta}{\theta_2}\right). \qquad (10)$$

В частности, если $k \leqslant 0$, и ранг θ_2 равен $r_2 \neq 0$, то мы получаем

$$s_{k+r_2}(1)\,\Gamma_{-r_2}(\theta_2)\,s_{l+r_2}(\theta_2) = \theta_2(-1)\,s_{k+l}(1)\,\Gamma_{-l}(\theta_2^{-1}).$$

Правая часть этого равенства может быть отлична от нуля лишь при $l =$ рангу $\theta_2^{-1} = r_2$. Выбирая неположительное k так, чтобы $s_{k-r_2}(1) \neq 0$ и полагая $l = r_2$, мы получим

$$s_{2r_2}(\theta_2) = \frac{\theta_2(-1)\,\Gamma_{-r_2}(\theta_2^{-1})}{\Gamma_{-r_2}(\theta_2)}.$$

Итак, мы нашли коэффициенты $s_k(\theta)$ при $\theta \neq 1$. Положим теперь в равенстве (10) $k > 0$, $l = r_2$ и выделим в левой части слагаемое, соответствующее $\theta = 1$:

$$\begin{aligned}(1 - |\mathfrak{p}|)\,s_{k+r_2}(1)\,\Gamma_{-r_2}(\theta_2)\,s_{2r_2}(\theta_2) = \\ = \theta_2(-1)\,\Gamma_{-k}(1)\,s_{k+r_2}(1)\,\Gamma_{-r_2}(\theta_2^{-1}) + \\ + \theta_2(-1)\sum_{\theta\neq 1}\Gamma_{-k}(\theta)\,s_{k+r_2}(\theta)\,\Gamma_{-r_2}\left(\frac{\theta}{\theta_2}\right).\end{aligned}$$

Подставляя сюда найденное выше значение $s_{2r_2}(\theta_2)$, мы получим

$$\begin{aligned}s_{k+r_2}(1)\,\Gamma_{-r_2}(\theta_2^{-1})(1 - |\mathfrak{p}| - \Gamma_{-k}(1)) = \\ = \sum_{\theta\neq 1}\Gamma_{-k}(\theta)\,s_{k+r_2}(\theta)\,\Gamma_{-r_2}\left(\frac{\theta}{\theta_2}\right).\end{aligned}$$

Так как $k > 0$ коэффициент при $s_{k+r_2}(1)$ в левой части отличен от нуля. Выпишем условия, при которых может быть отлично от нуля хотя бы одно слагаемое в правой части:

$$k = \text{ранг}\ \theta;\quad k + r_2 = 2\ (\text{ранг}\ \theta),\quad r_2 = \left(\text{ранг}\ \frac{\theta}{\theta_2}\right).$$

Отсюда следует, что $k =$ ранг $\theta = r_2 =$ ранг $\left(\frac{\theta}{\theta_2}\right)$. Итак, $s_{k+r_2}(1)$ может быть отлично от нуля лишь при $k = r_2$. Поэтому при $n > 2$ $s_n(1) = 0$, ибо любое $n > 2$ можно представить в виде $n = k + r_2$, $k \neq r_2$. При $n = 2$ выражение в правой части можно явно просуммировать, и мы получим

$$s_2(1) = \sum_{\theta\neq 1}\theta(-1)\frac{\Gamma_{-1}(\theta)\,\Gamma_{-1}\left(\frac{\theta}{\theta_2}\right)}{\Gamma_{-1}(\theta_2^{-1})} = |\mathfrak{p}|.$$

Отметим, что все найденные нами до сих пор коэффициенты определены однозначно и не зависят от рассматриваемого представления.

Чтобы определить оставшиеся коэффициенты $s_k(\theta)$, $k < 2$, положим в основном равенстве (2) $\theta_1 = \theta_2 = 1$ и предположим, что хотя бы одно из чисел k, l неположительно. Мы получим уравнение

$$(1 - |\mathfrak{p}|) \sum_r s_{k+r}(1) \Gamma_{-r}(1) s_{l+r}(1) = \Gamma_{-k}(1) s_{k+l}(1) \Gamma_{-l}(1)$$

или

$$-\frac{|\mathfrak{p}|}{1 - |\mathfrak{p}|} s_{k+1}^{(1)} s_{l+1}^{(1)} + \sum_{r \leqslant 0} s_{k+r}(1) s_{l+r}(1) = \\ = \frac{\Gamma_{-k}(1) \Gamma_{-l}(1)}{1 - |\mathfrak{p}|} s_{k+l}(1).$$

Но, в силу условия $|s(\lambda, \theta)| = 1$, коэффициенты $s_k(\theta)$ удовлетворяют соотношениям: $\sum\limits_r s_{k+r}(\theta) s_{l+r}(\theta) = \delta_{kl}$. Отсюда

$$\frac{|\mathfrak{p}|}{-1 + |\mathfrak{p}|} s_{k+1}(1) s_{l+1}(1) - \sum_{r > 0} s_{k+r}(1) s_{l+r}(1) + \delta_{kl} = \\ = \frac{\Gamma_{-k}(1) \Gamma_{-l}(1)}{1 - |\mathfrak{p}|} s_{k+l}(1).$$

Положим здесь $l = 0$ и учтем, что $s_r(1) = 0$ при $r > 2$

$$\frac{|\mathfrak{p}|}{-1 + |\mathfrak{p}|} s_{k+1}(1) s_1(1) - s_{k+1}(1) s_1(1) - \\ - s_{k+2}(1) s_2(1) + \delta_{k0} = \frac{\Gamma_{-k}(1)}{1 - |\mathfrak{p}|} s_k(1).$$

В частности, при $k = 0$ мы получаем

$$s_0(1) + \frac{s_1^2(1)}{1 - |\mathfrak{p}|} = 1 - |\mathfrak{p}|^2,$$

а при $k < 0$:

$$s_k(1) + s_{k+1}(1) \cdot \frac{s_1(1)}{1 - |\mathfrak{p}|} + s_{k+2}(1) |\mathfrak{p}| = 0.$$

Мы получили рекуррентное уравнение для $s_k(1)$, общее решение которого имеет вид

$$s_k(1) = A\tau_1^k + B\tau_2^k \quad \text{при} \quad k \leqslant 1,$$

где τ_1, τ_2 — два комплексных числа, связанных условием $\tau_1\tau_2 = |\mathfrak{p}|^{-1}$.

Отсюда

$$s(\lambda, 1) = \sum_k s_k(1)\lambda^k = |\mathfrak{p}|\lambda^2 + \sum_{k \leqslant 1}\left(A\tau_1^k\lambda^k + B\tau_2^k\lambda^k\right) =$$
$$= |\mathfrak{p}|\lambda^2 + \frac{A\lambda\tau_1}{1-\lambda^{-1}\tau_1^{-1}} + \frac{B\lambda\tau_2}{1-\lambda^{-1}\tau_2^{-1}} =$$
$$= \frac{(1-\lambda\alpha)(1-\lambda\beta)}{\left(1-\lambda^{-1}\tau_1^{-1}\right)\left(1-\lambda^{-1}\tau_2^{-1}\right)},$$

где α и β — два комплексных числа, зависящие от A, B, τ_1 и τ_2. Условие $|s(\lambda, 1)| = 1$ выполняется лишь, когда $\alpha = \bar{\tau}_1^{-1}$, $\beta = \bar{\tau}_2^{-1}$ или $\alpha = \bar{\tau}_2^{-1}$, $\beta = \bar{\tau}_1^{-1}$. В этом случае мы получаем $s(\lambda, 1) = \dfrac{\left(1-\lambda\bar{\tau}_1^{-1}\right)\left(1-\lambda\bar{\tau}_2^{-1}\right)}{\left(1-\lambda^{-1}\tau_1^{-1}\right)\left(1-\lambda^{-1}\tau_2^{-1}\right)}$.

Пусть $|\tau_1| = |\mathfrak{p}|^{\rho}$; обозначим через π_0 характер с координатами $\left(\dfrac{\tau_1}{|\tau_1|}, 1\right)$. Тогда найденная нами функция $s(\pi)$ может быть записана в виде

$$s(\pi) = \Gamma\left(\pi^{-1}\pi_0\pi_{(\rho)}\right)\Gamma\left(\pi^{-1}\pi_0\pi_{(1-\rho)}\right).$$

Мы видим, что представление, соответствующее этой функции, принадлежит дополнительной или особой серии.

3-й случай: исключительных характеров нет.

Покажем, что в этом случае матричные элементы представления суммируемы на G. Выберем в пространстве представления T (в π-реализации) базис из функций $e_{k,\theta}$:

$$e_{k,\theta}(\lambda, \theta_1) = \begin{cases} \lambda^k & \text{при} \quad \theta_1 = \theta, \\ 0 & \text{при} \quad \theta_1 \neq \theta. \end{cases}$$

Операторы представления в этом базисе имеют вид

$$T\left(g_{a,0}\right)e_{k,\theta} = \theta(\alpha)\, e_{k-n,\theta} \quad \text{при} \quad a = \alpha|\mathfrak{p}|^n, \ \alpha \in O^*;$$
$$T\left(g_{1,b}\right)e_{k,\theta} = (1-|\mathfrak{p}|)^{-1}\sum_{\theta'}\Gamma_{m+k}\left(\frac{\theta}{\theta'}\right)\frac{\theta}{\theta'}(\beta)\, e_{k,\theta'},$$
$$\text{при} \quad b = \beta|\mathfrak{p}|^n, \ \beta \in O^*; \qquad (11)$$
$$T(s)\, e_{k,\theta} = \sum_i s_i(\theta^*)\lambda_0^k e_{i-k,\theta^*}.$$

Почти каждый элемент группы G можно записать в виде

$$g = g_{a,0}^{-1} g_{1,b_1}^{-1} s g_{1,b_2} g_{a,0}.$$

Инвариантная мера на G в параметрах a, b_1, b_2 имеет вид $d\mu(g) = d^*a\, db_1\, db_2$.

Рассмотрим область $D(n, m_1, m_2)$ на группе G, задаваемую условиями

$$a = \mathfrak{p}^n \alpha, \quad b_1 = \mathfrak{p}^{m_1}\beta_1, \quad b_2 = \mathfrak{p}^{m_2}\beta_2, \quad \text{где } \alpha, \beta_1, \beta_2 \in O^*.$$

Пользуясь формулами (11), можно написать следующее выражение для матричных элементов оператора $T(g)$, при $g \in D(n, m_1, m_2)$:

$$\begin{aligned}(T(g)\, e_{k_1, \theta_1}, e_{k_2, \theta_2}) &= \varphi(a, b_1, b_2) = \\ &= (1 - |\mathfrak{p}|)^{-2} \sum_{\theta} \theta_0(\beta_2)\, \theta_2(\alpha\beta_2^{-1})\, \theta_1(-\alpha^{-1}\beta_1)\, \lambda_0^{k_2 - n} \times \\ &\times \Gamma_{m_1+k_1-n}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right) \Gamma_{m_2+k_2-n}\left(\frac{\theta}{\theta_2^*}\right) \theta^{-1}(-\beta_1\beta_2)\, s_{k_1+k_2-2n}(\theta). \quad (12)\end{aligned}$$

Исследуем, при каких условиях на n, m_1, m_2 это выражение может быть отлично от нуля.

Пусть сначала n фиксировано. Существует лишь конечное число характеров θ, для которых $s_{k_1+k_2-2n}(\theta) \neq 0$.

В самом деле, рассуждения, уже использованные в случаях 1 и 2, показывают, что для всех θ, кроме, может быть, конечного числа, справедливо равенство

$$s(\lambda, \theta) = s_{\rho(\theta)}(\theta) \cdot \lambda^{\rho(\theta)}, \quad \text{где } \rho(\theta) = 2 \cdot (\text{ранг } \theta). \quad (13)$$

Наше утверждение вытекает теперь из того, что число характеров данного ранга конечно.

Далее, так как ранг θ ограничен, а ранги θ_1 и θ_2 фиксированы, то при достаточно больших по модулю отрицательных m_1 или m_2 коэффициенты Γ-функции, входящие в правую часть равенства (12), равны нулю. Это значит, что при каждом фиксированном n область группы, на которой наш матричный элемент отличен от нуля, имеет конечный объем. Для всех достаточно больших положительных n можно воспользоваться равенством (13) и получить более точную оценку, показывающую, что этот объем ограничен константой, не зависящей от n.

До сих пор мы нигде не использовали факт отсутствия исключительных характеров.

Примем теперь этот факт во внимание. Прежде всего, из него вытекает (по определению исключительных характеров), что $s_k(\theta)=0$ при $k\leqslant 0$.

Это значит, что при $n\leqslant\frac{k_1+k_2}{2}$ наш матричный элемент φ обращается в нуль.

При исследовании суммируемости φ мы можем, следовательно, рассматривать только область $n>N$, где N — достаточно большое положительное число. При этом мы можем пользоваться равенствами (13) и считать, что ранг θ больше рангов θ_1 и $\overset{*}{\theta}_2$. Отсюда следует, что правая часть равенства (12) отлична от нуля лишь при $m_1=\frac{k_2-k_1}{2}$, $m_2=\frac{k_1-k_2}{2}$ и имеет вид

$$\varphi_n(\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2)=(1-|\mathfrak{p}|)^{-2}\theta_0(\beta_1)\,\theta_1(-\alpha^{-1}\beta_1)\,\theta_2(\alpha\beta_2)\,\lambda_0^{k_2-n}\times$$
$$\times\sum_{\theta}\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta}{\theta_2^*}\right)\theta(-\beta_1^{-1}\beta_2^{-1})\,s_{2r}(\theta),$$

где сумма ведется по всем характерам ранга $r=\frac{k_1+k_2}{2}+n$.

Тогда

$$|\varphi_n(\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2)|^2=(1-|\mathfrak{p}|)^{-4}\sum_{\theta,\,\theta'}\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta}{\theta_2^*}\right)s_{2r}(\theta)\times$$
$$\times\overline{\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta'}{\theta_1}\right)\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta'}{\theta_2^*}\right)s_{2r}(\theta')^{-1}}\,\theta\theta'(-\beta_1\beta_2).$$

Поэтому интеграл $|\varphi(g)|^2$ по области $\bigcup\limits_{m_1,\,m_2}D(n,\ m_1,\ m_2)$ равен

$$\int|\varphi_n(\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2)|^2\,d\beta_1\,d\beta_2=$$
$$=(1-|\mathfrak{p}|)^{-4}\sum_{\theta}\left|\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)\Gamma_{-r}\left(\frac{\theta}{\theta_2^*}\right)s_{2r}(\theta)\right|^2.$$

Вспоминая, что $|s_{2r}(\theta)| = 1$, $|\Gamma_{-r}(\theta)| = |\mathfrak{p}|^{r/2}$ и что число характеров ранга r равно $|\mathfrak{p}|^{-r}(1 - |\mathfrak{p}|)$, мы получаем искомую оценку

$$\int_G |\varphi(g)|^2 \, dg =$$

$$= \int |\varphi(a, b_1, b_2)|^2 \, d^*a \, db_1 \, db_2 < C_1 + C_2 \sum_{n=N}^{\infty} |\mathfrak{p}|^n < \infty.$$

Доказательство теоремы 4′ закончено.

Отметим, что несложными дополнительными рассуждениями можно показать, что $\varphi(g) \in L^p(G)$ при любом $p \geqslant 1$.

ГЛАВА III

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП АДЕЛЕЙ

§ 1. Адели и идели

1. Группа характеров аддитивной группы рациональных чисел. Чтобы лучше понять, как устроена группа характеров аддитивной группы рациональных чисел, рассмотрим сначала существенно более простую задачу. Именно, выясним, как устроена группа характеров группы $Q^{(p)}$ всех дробей вида $\frac{a}{p^n}$, где p — фиксированное простое число, а a и n — любые целые числа.

Пусть $\chi\left(\frac{a}{p^n}\right)$ — произвольный характер на $Q^{(p)}$. Так как

$$\chi\left(\frac{a}{p^n}\right)=\left[\chi\left(\frac{1}{p^n}\right)\right]^a, \tag{1}$$

то для задания характера χ достаточно знать числа $\chi(1)$, $\chi\left(\frac{1}{p}\right)$, ..., $\chi\left(\frac{1}{p^n}\right)$, ... Эти числа связаны между собой следующими соотношениями:

$$\left[\chi\left(\frac{1}{p^{n+1}}\right)\right]^p=\chi\left(\frac{1}{p^n}\right), \qquad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{2}$$

Обратно, любой набор чисел $\chi\left(\frac{1}{p^n}\right)$, $n=0, 1, \ldots$, удовлетворяющих соотношениям (2), и таких, что $\left|\chi\left(\frac{1}{p^n}\right)\right|=1$, задает характер χ на $Q^{(p)}$. Этот характер определяется формулой (1).

Так как $\left|\chi\left(\frac{1}{p^n}\right)\right| = 1$, то

$$\chi\left(\frac{1}{p^n}\right) = \exp 2\pi i \frac{\alpha_n}{p^n}, \tag{3}$$

где α_n — вещественное число, определенное по $\bmod p^n$. Соотношения (2) эквивалентны следующим соотношениям для чисел α_n

$$\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{p^n}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_n = -\alpha + \beta_n,$$

где $\alpha = -\alpha_0$, а β_n — целые числа, определенные по $\bmod p^n$ и удовлетворяющие соотношению

$$\beta_{n+1} \equiv \beta_n \pmod{p^n}. \tag{4}$$

Из соотношений (4) следует, что числа β_n являются отрезками p-адического ряда

$$\beta = a_1 + a_2 p + a_3 p^2 + \ldots, \quad 0 \leqslant a_k < p.$$

Таким образом,

$$\chi\left(\frac{1}{p^n}\right) = \exp 2\pi i \frac{-\alpha + \beta}{p^n}.$$

Но тогда для любой рациональной дроби вида $\frac{a}{p^n}$ мы получаем, согласно (1),

$$\chi\left(\frac{a}{p^n}\right) = \exp 2\pi i (-\alpha + \beta) \frac{a}{p^n}. \tag{5}$$

Итак, любой характер $\chi\left(\frac{a}{p^n}\right)$ группы $Q^{(p)}$ задается парой чисел — вещественным числом α, определенным по $\bmod 1$, и целым p-адическим числом β.

Нетрудно убедиться, что $\chi\left(\frac{a}{p^n}\right) \equiv 1$ тогда и только тогда, когда α является рациональным числом, знаменатель которого не делится на p, и $\beta = \alpha$ (β — p-адическое представление рационального числа α).

Таким образом, группа характеров аддитивной группы всех дробей вида $\frac{a}{p^n}$ строится следующим образом. Рассматривается аддитивная группа, элементами которой являются пары (α, β), где α — вещественное число, определенное по mod 1, β — целое p-адическое число. Эта группа факторизуется по подгруппе элементов вида (r, r), где r пробегает все рациональные числа, знаменатели которых не делятся на p.

Структура группы характеров аддитивной группы Q всех рациональных чисел оказывается существенно сложнее. Эта группа характеров будет подробно изучена в следующих пунктах. Здесь мы ограничимся лишь формулировкой окончательного результата.

Каждый характер группы Q задается бесконечной последовательностью

$$a = (a_\infty, a_2, \ldots, a_p, \ldots), \tag{6}$$

в которой a_∞ — вещественное число, a_p — p-адическое число ($p = 2, 3, \ldots$), причем все a_p, начиная с достаточно большого p, являются целыми p-адическими числами. Такие последовательности называются аделями.

Характер $\chi_a(r)$, отвечающий аделю a, задается следующей формулой:

$$\chi_a(r) = \exp 2\pi i(-a_\infty r + a_2 r + \ldots + a_p r + \ldots). \tag{7}$$

Эту формулу нужно понимать в следующем смысле. Так как к выражению в скобке можно прибавлять любое целое число, то мы вправе отбросить целые части у всех p-адических чисел $a_p r$. После такого отбрасывания сумма, стоящая в скобке, превратится в сумму рациональных чисел. Легко убедиться, что при этом лишь конечное число слагаемых будут отличными от нуля.

Множество аделей образует аддитивную группу A, если операцию сложения определить покомпонентно. Очевидно, что при сложении двух аделей соответствующие им характеры перемножаются. Таким образом, отображение

$$a \to \chi_a(r)$$

является гомоморфизмом группы аделей A на группу Q' характеров группы Q.

Выясним, из чего состоит ядро этого гомоморфизма. Оказывается, что $\chi_a(r) \equiv 1$ тогда и только тогда, когда a имеет следующий вид:

$$a = (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots),$$

где α пробегает рациональные числа. Такие последовательности a называются *главными* аделями. Очевидно, что подгруппа главных аделей изоморфна аддитивной группе Q рациональных чисел; эту подгруппу условимся также обозначать буквой Q.

Итак, имеет место изоморфизм

$$Q' = A/Q$$

группы характеров Q' и фактор-группы A/Q группы аделей по подгруппе главных аделей. Все группы рассматриваются здесь пока как абстрактные. Можно, однако, показать, что при естественном задании топологии в группе аделей имеет место изоморфизм и топологических групп. Подробное доказательство всех приведенных здесь утверждений будет дано в п. 6.

2. Определение аделей и иделей. Сформулируем еще раз определение аделей. Рассмотрим совокупность A всех последовательностей вида

$$a = (a_\infty, a_2, \ldots, a_p, \ldots),$$

где a_∞ — вещественное число, a_p — p-адическое число, причем все a_p, начиная с некоторого p (своего для каждого a), являются *целыми* p-адическими числами. Совокупность всех таких последовательностей образует кольцо, если операции сложения и умножения определить покомпонентно. Это кольцо называется *кольцом аделей*, а аддитивная группа этого кольца — *группой аделей*.

Элементы кольца аделей A, для которых существует обратный элемент, называются *иделями*. Совокупность A^* всех иделей образует группу по умножению, называемую *группой иделей*.

Таким образом, элементами группы иделей являются последовательности

$$\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots),$$

где $\lambda_p \neq 0$ и $|\lambda_p|_p = 1$ для всех p, кроме конечного числа ($|x|_p$ есть p-адическая норма).

В группу аделей A вводится топология следующим образом. Рассматривается подгруппа A^0 аделей $a = (a_\infty, a_2, \ldots$ $\ldots, a_p, \ldots)$, где все a_p являются целыми p-адическими числами. В A^0 вводится топология тихоновского произведения топологических пространств $R, O_2, \ldots, O_p, \ldots$, где O_p — подгруппа целых p-адических чисел. Эта подгруппа A^0 объявляется открытым множеством в A.

Таким образом, последовательность аделей $a^{(n)} = \left(a_\infty^n, a_2^{(n)}, \ldots, a_p^{(n)}, \ldots\right)$ считается сходящейся к аделю $a = \left(a_\infty, a_2, \ldots \ldots, a_p, \ldots\right)$, если она сходится к a покомпонентно и если найдется такое N, что при $n \geqslant N$ числа $a_p - a_p^{(n)}$ являются целыми p-адическими.

Полученная топологическая группа A локально-компактна — это непосредственно следует из компактности групп O_p.

Аналогично вводится топология и в группе иделей A^*.

3. Другая конструкция группы аделей. Пусть Q — аддитивная группа рациональных чисел. Введем в Q топологию, объявив окрестностями нуля всевозможные подгруппы группы Q. Будет доказано, что *пополнение $\overline{Q}$ группы Q относительно введенной топологии изоморфно группе всех аделей вида*

$$(0, a_2, \ldots, a_p, \ldots).$$

Таким образом, группа аделей A является прямым произведением

$$A = A_\infty \times \overline{Q}$$

группы вещественных чисел A_∞ и группы $\overline{Q}$.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу B аделей вида $(0, a_2, \ldots, a_p, \ldots)$. Сопоставим каждому рациональному числу r последовательность $(0, r, \ldots, r, \ldots)$. Эта последовательность является элементом из B, поскольку $|r|_p = 1$ для достаточно больших p (именно, для тех p, которые не входят сомножителями в r). Таким образом, соответствие

$$r \to (0, r, \ldots, r, \ldots)$$

является изоморфным вложением группы Q в группу B.

Покажем, что это вложение индуцирует в Q топологию, совпадающую с исходной.

В самом деле, рассмотрим в B открытые подгруппы $U_{p,n}$, состоящие из аделей $(0, a_2, \ldots, a_p, \ldots)$, таких, что $|a_q|_q \leqslant q^{-n}$ при $q \leqslant p$ и $|a_q|_q \leqslant 1$ при $q > p$. Очевидно, что $U_{p,n}$ образуют в B полную систему окрестностей нуля. Пересечение $U_{p,n} \cap Q$ состоит из целых чисел вида $(2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p)^n k$, где k пробегает все целые числа: иными словами, $U_{p,n} \cap Q$ является циклической подгруппой группы Q. Эти подгруппы являются открытыми множествами в исходной топологии группы Q. При этом они образуют полную систему окрестностей нуля в Q, так как любая подгруппа группы Q содержит подгруппу такого вида. Тем самым установлено, что топология группы B индуцирует в $Q \subset B$ исходную топологию.

Остается доказать, что множество элементов группы Q всюду плотно в B, т. е. что для любого элемента

$$a = (0, a_2, \ldots, a_p, \ldots)$$

из B существует последовательность элементов из Q, сходящаяся к a.

Для любого простого числа p и натурального числа n обозначим через $b_{q,p,n}$ дробную часть q-адического числа $(p!)^{-n} a_q$. Положим

$$c_{p,n} = \sum_q b_{q,p,n}.$$

(Очевидно, что в этой сумме лишь конечное число членов отлично от нуля.) Тогда имеем для любого простого числа q

$$|(p!)^{-n} a_q - c_{p,n}|_q \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что

$$|a_q - (p!)^n c_{p,n}|_q \leqslant q^{-n} \quad \text{при} \quad q \leqslant p,$$
$$|a_q - (p!)^n c_{p,n}| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad q > p.$$

Это означает, что последовательность рациональных чисел $(p!)^n c_{p,n}$ сходится при $p\to\infty$, $n\to\infty$ к аделю a.

4. Изоморфизмы $Q\to A$ и $Q^*\to A^*$. Покажем, что кольцо рациональных чисел Q изоморфно вкладывается в кольцо аделей A.

Действительно, поле Q изоморфно вкладывается как в поле рациональных чисел R, так и в поле p-адических чисел Q_p. Сопоставим каждому рациональному числу последовательность

$$(r,\ r,\ \ldots,\ r,\ \ldots).$$

Эти последовательности являются аделями, поскольку при $r\neq 0$ имеем $|r|_p=1$ для достаточно больших p. Их называют главными аделями.

Покажем, что *кольцо главных аделей Q дискретно в A*.

Доказательство. Предположим противное, что кольцо Q не дискретно в A. Тогда найдется последовательность главных аделей $r_n=(r_n,\ r_n,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots)$, сходящихся к нулю. Из определения топологии в A отсюда следует, что, начиная с достаточно большого n, числа r_n являются целыми p-адическими для любого p. Но это означает, что r_n — целые числа, а потому последовательность r_n не сходится к нулю в топологии поля R. Тем самым мы пришли к противоречию.

Найдем фундаментальную область аддитивной группы кольца A относительно подгруппы главных аделей Q.

Рассмотрим множество F аделей

$$a=(a_\infty,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \ldots),$$

где $0\leqslant a_\infty<1$ и $|a_p|_p\leqslant 1$; покажем, что оно является искомой фундаментальной областью.

Пусть $a=(a_\infty,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \ldots)$ — произвольный адель. Обозначим через α сумму дробных долей p-адических чисел $a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \ldots$ В силу определения аделей, эта сумма содержит лишь конечное число слагаемых, отличных от нуля, и является, таким образом, рациональным числом. Подберем теперь целое число n такое, что $0\leqslant a_\infty-\alpha-n<1$ и рассмотрим главный адель

$$r=(r,\ r,\ \ldots,\ r,\ \ldots),$$

где $r=\alpha+n$. Очевидно, что $a-r\in F$.

Тем самым доказано, что группа A является объединением множеств $r+F$, где r пробегает главные адели. Остается показать, что эти множества попарно не пересекаются.

Пусть $r \neq 0$; покажем, что тогда множества $r+F$ и F не имеют общих элементов. В самом деле, если r — целое число, то $r+a_\infty$, где $a \in F$, не принадлежит полуинтервалу $0 \leqslant x < 1$; значит, $r+a$ не принадлежит F. Если же r не целое, то $|r|_p > 1$ хотя бы для одного p, а потому и $|r+a_p|_p > 1$, где $a \in F$; следовательно, и в этом случае $r+a$ не принадлежит F.

Итак, доказано, что множество F является фундаментальной областью.

Отметим, что это множество компактно. Отсюда следует, что *фактор-группа A/Q группы аделей по подгруппе главных аделей компактна*. В п. 6 мы покажем, что эта фактор-группа изоморфна группе характеров группы Q.

Перейдем теперь к группе иделей. Мультипликативная группа рациональных чисел Q^* изоморфно вкладывается в группу иделей A^*. Именно, каждому рациональному числу $r \neq 0$ сопоставляется последовательность

$$(r, r, \ldots, r, \ldots).$$

Эти последовательности являются иделями, поскольку $|r|_p = 1$ для всех p, не входящих в разложение числа r на простые сомножители. Их называют **главными иделями**.

Отметим, что множество Q^* главных иделей получается из множества Q главных аделей отбрасыванием нулевого аделя $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Как и в случае аделей, легко убедиться, что подгруппа главных иделей Q^* дискретна в группе всех иделей A^*.

5. Группа аддитивных характеров кольца аделей A. Сначала введем важное понятие самодуального кольца.

Пусть L — коммутативное топологическое кольцо с единицей. Рассмотрим множество L' всех аддитивных характеров кольца L, т. е. таких непрерывных функций $\chi(x)$ на L, что

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$$

для любых x и y, из L и $|\chi(x)| \equiv 1$.

В множестве L' естественным образом вводятся структура топологического пространства и операция умножения характеров, превращающие L' в топологическую группу. Кроме того, в L' естественным образом определяется операция умножения на элементы из исходного кольца L: произведением $a \cdot \chi$ элемента $a \in L$ на характер $\chi(x)$ называется характер $\chi_a(x) \equiv \chi(ax)$.

Очевидно, что эта операция умножения непрерывна относительно a и χ и удовлетворяет следующим условиям:

$$a \cdot (\chi_1\chi_2) = (a \cdot \chi_1)(a \cdot \chi_2),$$
$$(a + b)\chi = (a \cdot \chi)(b \cdot \chi),$$
$$(ab)\chi = a \cdot (b \cdot \chi),$$
$$1 \cdot \chi = \chi.$$

Таким образом, множество характеров L' является L-модулем.

Кольцо L называется самодуальным, если L-модуль всех аддитивных характеров на L изоморфен исходному кольцу L.

Эквивалентное определение: *кольцо L называется самодуальным, если любой аддитивный характер $\chi(x)$ имеет вид*

$$\chi(x) = \chi_0(ax), \qquad a \in L,$$

где χ_0 — некоторый фиксированный характер.

Примеры самодуальных колец нам уже хорошо известны: таковыми являются все непрерывные локально-компактные поля. С другой стороны, бесконечные дискретные поля, в частности, поле Q рациональных чисел не являются самодуальными (поскольку множество их аддитивных характеров компактно).

Мы докажем здесь, что *кольцо аделей A является самодуальным кольцом.*

Для доказательства введем аддитивный характер $\chi_0(x)$ на A, играющий в дальнейшем фундаментальную роль.

Рассмотрим функцию $\sigma(a)$ на A со значениями в группе вещественных чисел, определенных по mod 1, определяемую следующей формулой:

$$\sigma(a) \equiv -a_\infty + a_2 + \ldots + a_p + \ldots \pmod 1. \qquad (1)$$

Иными словами, $\sigma(a)+a_\infty$ означает сумму дробных долей p-адических чисел a_p (отметим, что дробная доля p-адического числа a_p является обычным рациональным числом). Так как все числа a_p, начиная с достаточно большого p, являются целыми p-адическими числами, то в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля и, значит, сумма всегда имеет смысл.

Установим некоторые свойства введенной функции $\sigma(a)$. Прежде всего, из определения непосредственно следует, что

$$\sigma(a+a')=\sigma(a)+\sigma(a') \tag{2}$$

для любых $a, a' \in A$.

Далее, очевидно, что на каждом подкольце Q_p кольца A (т. е. на подкольце аделей вида $(0, \ldots, 0, a_p, 0, \ldots)$) $\sigma(a_p)=0$ тогда и только тогда, когда a_p — целое p-адическое число.

Докажем наконец, что *если a — главный адель*, то $\sigma(a)=0$.

В самом деле, пусть a — главный адель, т. е. $a = (r, r, \ldots, r, \ldots)$, где r — рациональное число. Это число всегда можно представить в виде суммы

$$r=\frac{\alpha_2}{2^{n_2}}+\frac{\alpha_3}{3^{n_3}}+\ldots+\frac{\alpha_p}{p^{n_p}}+\ldots,$$

где α_p — целые числа; число отличных от нуля слагаемых в этой сумме является конечным. Таким образом, дробная часть числа r, рассматриваемого как p-адическое число, есть $\frac{\alpha_p}{p^{n_p}}$ по $\operatorname{mod} 1$, а потому

$$\sigma(a)\equiv -r+\frac{\alpha_2}{2^{n_2}}+\ldots+\frac{\alpha_p}{p^{n_p}}+\ldots \pmod 1,$$

т. е. $\sigma(a)=0$.

Введем функцию $\chi_0(a)$ на A согласно следующей формуле:

$$\chi_0(a)=\exp 2\pi i\sigma(a)\equiv\exp 2\pi i(-a_\infty+a_2+\ldots+a_p+\ldots). \tag{3}$$

В силу доказанного выше, $\chi_0(a)$ является аддитивным характером на A и удовлетворяет следующим условиям:

1) на каждом подкольце Q_p кольца A $\chi_0(a_p)=1$ тогда и только тогда, когда a_p — целое p-адическое число;

2) $\chi_0(a)\equiv 1$ на подкольце Q главных аделей.

Переходим к доказательству утверждения, что A является самодуальным кольцом. Именно, будет показано, что любой аддитивный характер $\chi(a)$ на A имеет вид

$$\chi(a)=\chi_0(ba),$$

где $b\in A$.

Предварительно заметим, что любой характер $\chi(a)$ на A может быть записан в виде сходящегося бесконечного произведения

$$\chi(a)=\chi(a_\infty)\chi(a_2)\ldots\chi(a_p),\ldots, \tag{4}$$

где $\chi(a_p)$ — ограничение характера χ на подгруппу Q_p.

В самом деле, имеем $a=\lim\limits_{p\to\infty} a^{(p)}$, где $a^{(p)}=(a_\infty, a_2, \ldots$ $\ldots, a_p, 0, 0, \ldots)$. Следовательно, ввиду непрерывности функции $\chi(a)$,

$$\chi(a)=\lim_{p\to\infty}\chi(a^{(p)})=\lim_{p\to\infty}[\chi(a_\infty)\chi(a_2)\ldots\chi(a_p)].$$

Итак, пусть $\chi(a)$ — произвольный характер на A. Представим его в виде (4). Так как $\chi_0(a_p)\not\equiv 1$ на Q_p, то в силу доказанного уже в гл. II, характер $\chi(a_p)$ на Q_p можно представить в виде

$$\chi(a_p)=\chi_0(b_pa_p), \tag{5}$$

где $b_p\in Q_p$; при этом элемент b_p однозначно определяется характером χ_0. Таким образом, имеем

$$\chi(a)=\chi_0(b_\infty a_\infty)\chi_0(b_2a_2)\ldots\chi_0(b_pa_p)\ldots \tag{6}$$

Покажем, что

$$b=(b_\infty, b_2, \ldots, b_p, \ldots)$$

есть адель; тем самым будет доказано, что $\chi(a)=\chi_0(ba)$. В самом деле, предположим, что b не является аделем. Это означает, что существует бесконечная последовательность чисел $b_{p_1}, b_{p_2}, \ldots, b_{p_k}, \ldots$, не являющихся целыми p-адическими. В силу свойства характера χ_0, мы имеем

$$\chi_0(b_{p_k}a_{p_k})\not\equiv 1,$$

когда a_{p_k} пробегает целые p_k-адические числа. Поэтому можно выбрать такое целое p_k-адическое число a_{p_k}, что

$$\left|\chi_0\left(b_{p_k}a_{p_k}\right)-1\right|>\varepsilon,$$

где ε — фиксированное число, одно и то же для всех p_k $\left(\text{например, можно принять } \varepsilon=\frac{1}{2}\right)$.

Ясно, что в этом случае бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}\chi_0\left(b_{p_k}a_{p_k}\right)$$

не является сходящимся, что противоречит формуле (6). Утверждение доказано.

6. Характеры группы A/Q. Докажем теперь, что *группа характеров фактор-группы A/Q, где Q — подгруппа главных аделей, изоморфна аддитивной группе рациональных чисел.*

В силу теоремы двойственности Понтрягина, отсюда будет следовать, что, обратно, группа характеров аддитивной группы рациональных чисел изоморфна группе A/Q. Этот важный факт был уже сформулирован без доказательства в п. 1.

Для доказательства заметим, что группа характеров фактор-группы A/Q изоморфна подгруппе всех характеров $\chi(a)$ на A таких, что

$$\chi(a)\equiv 1 \text{ для любого } a\in Q.$$

В силу п. 5, любой характер $\chi(a)$ имеет вид

$$\chi(a)=\chi_0(ba),$$

где $b\in A$ и

$$\chi_0(a)=\exp 2\pi i(-a_\infty+a_2+\ldots+a_p+\ldots).$$

Таким образом, мы должны выяснить, для каких $b\in A$ выполняется условие

$$\chi_0(ba)\equiv 1 \text{ для любого } a\in Q. \tag{1}$$

Из п. 5 мы уже знаем, что $\chi_0(a)\equiv 1$ на Q; таким образом, если $b\in Q$, то характер $\chi_0(ba)$ удовлетворяет условию (1). Нетрудно проверить, что обратное также выполнено, а именно, если $\chi_0(ba)$ удовлетворяет условию (1), то $b \in Q$.

Итак, доказано, что группа характеров группы A/Q изоморфна группе рациональных чисел.

7. Инвариантные меры в группе аделей и в группе иделей. Группа аделей A, будучи локально-компактной, обладает инвариантной мерой, которую мы обозначим через da. Эту меру будем всегда нормировать следующим условием:

$$\int_F da = 1, \tag{1}$$

где интеграл берется по компактному множеству F аделей $a = (a_\infty, a_2, \ldots, a_p, \ldots)$ таких, что $0 \leqslant a_\infty \leqslant 1$, $|a_p|_p \leqslant 1$, $p = 2, 3, \ldots$

Легко убедиться, что мера da следующим образом выражается через меры da_p на группах Q_p:

$$da = da_\infty da_2 \ldots da_p \ldots \tag{2}$$

где меры da_p нормированы условием

$$\int_0^1 da_\infty = 1, \qquad \int_{|a_p|_p \leqslant 1} da_p = 1.$$

Равенство (2) нужно понимать в следующем смысле: если $\varphi(a)$ — суммируемая функция на A вида

$$\varphi(a) = \varphi_\infty(a_\infty)\varphi_2(a_2) \ldots \varphi_p(a_p) \ldots,$$

то

$$\int \varphi(a)\,da = \int \varphi_\infty(a_\infty)\,da_\infty \int \varphi_2(a_2)\,da_2 \ldots \int \varphi_p(a_p)\,da_p \ldots$$

Аналогично, в группе иделей A^* существует инвариантная мера, которую мы обозначим через $d^*\lambda$. Будем предполагать, что эта мера нормирована следующим условием:

$$\int_{\Lambda'} d^*\lambda = 1, \tag{3}$$

где Λ' — компактное множество всех иделей вида

$$\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots),$$

$1 \leqslant \lambda_\infty \leqslant e$ (e — неперово число), $|\lambda_p|_p = 1$, $p = 2, 3, \ldots$

Легко убедиться, что мера $d^*\lambda$ следующим образом выражается через меры $d^*\lambda_p$ на мультипликативных группах Q_p^*:

$$d^*\lambda = d^*\lambda_\infty d^*\lambda_2 \ldots d^*\lambda_p \ldots, \tag{4}$$

где $d^*\lambda_\infty = \frac{d\lambda_\infty}{|\lambda_\infty|_\infty}$, $d\lambda_\infty$ — обычная мера на вещественной прямой, а меры $d^*\lambda_p$ нормированы условием $\int\limits_{|\lambda_p|_p=1} d^*\lambda_p = 1$ *).

8. Функция $|\lambda|$. Легко видеть, что любой идель λ осуществляет изоморфное отображение

$$a \to \lambda a$$

группы аделей A на себя. Поэтому, если da — инвариантная мера на A, то $d_\lambda(a) = d(\lambda a)$ также является инвариантной мерой на A, а потому она пропорциональна мере da. Множитель пропорциональности мы обозначим через $|\lambda|$.

Итак, функция $|\lambda|$ на группе иделей A^* определяется следующей формулой:

$$d(\lambda a) = |\lambda|\, da, \tag{1}$$

где da — инвариантная мера на группе аделей A.

Из определения непосредственно следует, что

$$|\lambda'\lambda''| = |\lambda'| \cdot |\lambda''| \tag{2}$$

для любых $\lambda', \lambda'' \in A^*$.

---

*) Отметим, что нормировка здесь отлична от той, которая была принята в гл. II. Там мы полагали $d^*\lambda_p = \frac{d\lambda_p}{|\lambda_p|_p}$, где $d\lambda_p$ — мера на аддитивной группе поля Q_p, нормированная условием $\int\limits_{|\lambda_p|\leqslant 1} d\lambda_p = 1$. Здесь же мы полагаем

$$d^*\lambda_p = (1 - p^{-1})^{-1} \frac{d\lambda_p}{|\lambda_p|_p}.$$

Найдем явное выражение для $|\lambda|$. Для этого воспользуемся формулой (2) п. 7, выражающей da через меры da_p

$$da = da_\infty da_2 \ldots da_p \ldots \tag{3}$$

Отсюда имеем

$$d(\lambda a) = d(\lambda_\infty a_\infty) d(\lambda_2 a_2) \ldots d(\lambda_p a_p) \ldots, \tag{4}$$

но

$$d(\lambda_p a_p) = |\lambda_p|_p da_p.$$

Следовательно, сравнивая (3) и (4), мы получаем

$$|\lambda| = |\lambda_\infty|_\infty |\lambda_2|_2 \ldots |\lambda_p|_p \ldots \tag{5}$$

Отметим, что в этом бесконечном произведении все сомножители, кроме конечного числа, равны 1.

Установим следующее важное свойство функции $|\lambda|$: *если λ — главный идель, то*

$$|\lambda| = 1.$$

В самом деле, пусть λ — главный идель, т. е.

$$\lambda = (r, r, \ldots, r, \ldots),$$

где r — рациональное число. Разложим r на простые сомножители:

$$r = 2^{n_2} 3^{n_3} \ldots p^{n_p} \ldots,$$

где n_p — целые числа, причем все n_p, кроме конечного числа, равны нулю. Тогда имеем $|r|_p = p^{-n_p}$. Следовательно, $\prod\limits_p |r_p|_p = |r|_\infty^{-1}$, а потому $|\lambda| = 1$.

9. Характеры группы иделей A^*. Условимся характеры группы иделей

$$\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots)$$

обозначать через $\pi(\lambda)$. Дадим описание этих характеров.

Пусть $\pi_p(\lambda_p)$ — ограничение характера $\pi(\lambda)$ на подгруппу Q_p^* иделей вида $(1, \ldots, 1, \lambda_p, 1, \ldots)$, $p = \infty, 2, 3, \ldots$ Покажем, что *характер $\pi(\lambda)$ выражается в виде сходящегося произведения*

$$\pi(\lambda) = \pi_\infty(\lambda_\infty) \pi_2(\lambda_2) \ldots \pi_p(\lambda_p) \ldots \tag{1}$$

В самом деле, рассмотрим последовательность иделей вида

$$\lambda^{(p)} = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, 1, 1, \ldots).$$

В силу определения топологии на A^*, эта последовательность сходится к иделю λ. Следовательно,

$$\pi(\lambda) = \lim_{p\to\infty} \pi\left(\lambda^{(p)}\right) = \lim_{p\to\infty} [\pi_\infty(\lambda_\infty)\pi_2(\lambda_2) \ldots \pi_p(\lambda_p)].$$

Итак, в силу формулы (1), характер $\pi(\lambda)$ полностью определяется набором характеров $\pi_p(\lambda_p)$, определенных на группах Q_p^*. Будем говорить, что этот характер $\pi(\lambda)$ является тензорным произведением характеров $\pi_p(\lambda_p)$.

Поставим теперь обратную задачу. Пусть нам заранее задана последовательность характеров $\pi_\infty(\lambda_\infty)$, $\pi_2(\lambda_2), \ldots$ $\ldots, \pi_p(\lambda_p), \ldots$ Спрашивается, при каком условии на эти характеры формула (1) задает характер $\pi(\lambda)$ на группе A^*, т. е. бесконечное произведение (1) является сходящимся.

Покажем, что *формула* (1) *определяет характер на группе* A^* *тогда и только тогда, когда характеры* $\pi_p(\lambda_p)$ *удовлетворяют следующему условию:*

(α) *для всех простых чисел* p, *кроме конечного их числа,*

$$\pi_p(\lambda_p) \equiv 1, \text{ когда } |\lambda_p|_p = 1.$$

В самом деле, пусть условие (α) выполнено. Рассмотрим произвольный идель $\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots)$. Из определения иделей следует, что $|\lambda_p|_p = 1$, когда p достаточно велико. Но тогда, в силу условия (α), имеем $\pi_p(\lambda_p) = 1$, когда p достаточно велико. Следовательно, в произведении (1) отлично от единицы лишь конечное число сомножителей, а потому это произведение сходится.

Обратно, предположим, что условие (α) не выполнено. Тогда существует такая последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, что

$$\pi_{p_k}\left(\lambda_{p_k}\right) \not\equiv 1, \text{ когда } |\lambda_{p_k}|_{p_k} = 1.$$

Очевидно, что в этом случае для каждого p_k найдется такое λ_{p_k}, что $|\lambda_{p_k}|_{p_k} = 1$ и $|\pi_{p_k}(\lambda_{p_k}) - 1| > \frac{1}{2}$. Но тогда произведение

$$\prod_k \pi_{p_k}(\lambda_{p_k})$$

будет расходиться.

Итак, нами получен следующий окончательный результат. *Любой характер π на A^* задается последовательностью характеров*

$$\pi = (\pi_\infty, \pi_2, \ldots, \pi_p, \ldots),$$

где π_∞ — мультипликативный характер в поле вещественных чисел, π_p — мультипликативный характер в поле p-адических чисел, причем для достаточно больших p $\pi_p(\lambda_p) = 1$, когда $|\lambda_p|_p = 1$ (и значит, $\pi_p(\lambda_p) = |\lambda_p|^{\nu_p}$, где ν_p — некоторое комплексное число).

Значение характера π на иделе

$$\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots)$$

выражается в виде следующего бесконечного произведения:

$$\pi(\lambda) = \pi_\infty(\lambda_\infty)\,\pi_2(\lambda_2) \ldots \pi_p(\lambda_p) \ldots$$

10. Характеры группы A^*/Q^*. Обозначим через Λ подгруппу всех иделей

$$\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots),$$

у которых вещественное число λ_∞ является положительным и $|\lambda_p|_p = 1$ для всех простых чисел p.

Покажем, что *группа иделей A^* разлагается в прямое произведение*

$$A^* = Q^* \times \Lambda \tag{1}$$

подгруппы главных иделей Q^* и подгруппы Λ.

Доказательство. Пусть $\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots)$ — произвольный идель. Представим числа λ_p в виде

$$\lambda_p = |\lambda_p|_p^{-1} \lambda_p'.$$

Пусть

$$q = \operatorname{sign} \lambda_\infty \prod_p |\lambda_p|_p^{-1}.$$

(В этом произведении лишь конечное число сомножителей отлично от 1, таким образом, q — рациональное число.) Обозначим той же буквой q соответствующий главный идель:

$$q = (q, q, \ldots, q, \ldots).$$

Очевидно, что $\lambda q^{-1} \in \Lambda$. Этим доказано, что группа иделей A^* является произведением подгрупп Λ и Q^*.

Остается показать, что подгруппы Λ и Q^* не имеют общих элементов, кроме единичного элемента. В самом деле, пусть главный идель $\alpha = (\alpha, \alpha, \ldots \alpha, \ldots)$ принадлежит Λ. Тогда для любого простого числа p имеем $|\alpha|_p = 1$; следовательно, $\alpha = \pm 1$. Так как, с другой стороны, должно быть $\alpha > 0$, то $\alpha = 1$. Утверждение доказано.

Из разложения $A^* = Q^* \times \Lambda$ следует, что *фактор-группа A^*/Q^* группы иделей A^* по подгруппе Q^* главных иделей изоморфна группе* Λ:

$$A^*/Q^* \cong \Lambda.$$

Таким образом, эта фактор-группа имеет весьма простую структуру: она является топологическим прямым произведением мультипликативной группы всех вещественных положительных чисел и групп $\overset{*}{O}_p$ p-адических чисел с нормой, равной 1.

Отметим, что, в отличие от случая группы аделей, фактор-группа $A^*/Q^* \cong \Lambda$ не является компактной.

Перейдем к описанию характеров группы $\Lambda \cong A^*/Q^*$. Очевидно, что *для задания характера $\pi(\lambda)$ на группе Λ достаточно задать характер на каждом из ее прямых сомножителей, именно характер $\pi_\infty(\lambda_\infty)$ на группе вещественных положительных чисел, и характеры $\theta_p(\lambda_p)$ на группах $\overset{*}{O}_p$ p-адических чисел с нормой* 1. *При этом все характеры θ_p, кроме конечного их числа, должны быть равны тождественно единице.*

Значение характера $\pi(\lambda)$ на иделе $\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_p, \ldots)$ из Λ выражается следующей формулой:

$$\pi(\lambda) = \pi_\infty(\lambda_\infty)\,\theta_2(\lambda_2)\,\ldots\,\theta_p(\lambda_p)\,\ldots \tag{2}$$

Напомним, что любой характер $\pi_\infty(\lambda_\infty)$ на группе вещественных положительных чисел имеет вид

$$\pi_\infty(\lambda_\infty) = \lambda_\infty^s,$$

где s — произвольное комплексное число (мы не налагаем здесь на характеры условия унитарности). Таким образом, формулу (2) можно переписать в следующем виде:

$$\pi(\lambda) = \lambda_\infty^s \theta(\lambda) = |\lambda|^s \theta(\lambda), \tag{3}$$

где

$$|\lambda| = |\lambda_\infty|_\infty |\lambda_2|_2 \ldots |\lambda_p|_p \ldots,$$
$$\theta(\lambda) = \theta_2(\lambda_2) \ldots \theta_p(\lambda_p).$$

Заметим, что характеры $\theta(\lambda)$ являются характерами на компактной группе иделей вида $(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots)$; следовательно, они образуют дискретное (счетное) множество. Таким образом, множество характеров π на A^*/Q^* можно рассматривать как счетный набор плоскостей комплексного переменного s («номер» плоскости задается характером θ). Это позволяет ввести понятие аналитической функции от π: мы будем говорить, что $f(\pi) = f(s, \theta)$ — аналитическая функция от π, если при любом фиксированном θ она является аналитической функцией комплексного переменного s.

Опишем теперь множество характеров на группе иделей A^*, равных тождественно единице на подгруппе главных иделей Q^*. В силу разложения

$$A^* = Q^* \times \Lambda,$$

каждый такой характер получается следующей конструкцией. Берется произвольный характер $\pi(\lambda)$ на подгруппе Λ, и затем он продолжается до характера π на группе A^* по следующей формуле:

$$\pi(\lambda) = \pi\left(\frac{\lambda}{q}\right). \tag{4}$$

Здесь $q = \operatorname{sign} \lambda_\infty \cdot \prod_p |\lambda_p|_p^{-1}$ — компонента иделя λ в подгруппе Q^*.

На основании формул (3) и (4) получаем следующий результат. *Любой характер* $\pi(\lambda)$ *на группе иделей* A^*, *равный тождественно единице на подгруппе главных иделей* Q^*, *имеет следующий вид*:

$$\pi(\lambda) = |\lambda|^s \theta(\lambda).$$

Здесь s *— произвольное комплексное число,* $|\lambda| = |\lambda_\infty|_\infty |\lambda_2|_2 \ldots |\lambda_p|_p \ldots$, *а* $\theta(\lambda) = \theta_2(\lambda_2) \ldots \theta_p(\lambda_p) \ldots$ *— произвольный характер на подгруппе иделей вида* $(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots)$, *где* $|\lambda_p|_p = 1$ *для любого* p. *Харак-*

тер $\theta(\lambda)$ *считается продолженным на всю группу* A^* *по следующей формуле*:

$$\theta(\lambda) = \theta_2(q^{-1}\lambda_2) \ldots \theta_p(q^{-1}\lambda_p) \ldots, \tag{5}$$

где

$$q = \operatorname{sign} \lambda_\infty \prod_p |\lambda_p|_p^{-1} = \frac{\lambda_\infty}{|\lambda|}. \tag{6}$$

ДОБАВЛЕНИЕ К § 1
ОБ ОДНОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ

Для любого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in A^n$ определим норму $|\xi|$ следующим образом:

$$|\xi| = \prod_p |\xi|_p, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

где

$$|\xi|_p = \max_k |\xi_k|_p.$$

Очевидно, что $|q\xi| = |\xi|$ для любого $q \in Q^*$. Как мы знаем,

$$|\xi| = 1,$$

если $n = 1$ и $\xi \in Q^*$. Если же $n > 1$ и $\xi \in Q^n$, то легко убедиться, что $|\xi| < \infty$, но, вообще говоря, $|\xi| \neq 1$.

В этом дополнении исследуется ряд, характеризующий то, насколько не выполняется соотношение $|\xi| = 1$ для $\xi \in Q^n$.

Обозначим через T совокупность векторов $\xi \in Q^n$, у которых все компоненты отличны от нуля. Рассмотрим ряд

$$D(s) = \sum_{T/Q^*} |t|^{-s}. \tag{1}$$

Покажем, что этот ряд сходится, и одновременно вычислим его.

Каждый вектор $t \in T$ с помощью умножения на $q \in Q^*$ можно привести к виду

$$t = (t_1, \ldots, t_n), \tag{2}$$

где $t_1, \ldots, t_n$ — целые числа, общий наибольший делитель которых равен 1.

Очевидно, что все векторы (2), не отличающиеся только знаком, не эквивалентны, т. е. не могут быть получены один из другого умножением на элемент $q \in Q^*$.

Таким образом, мы имеем

$$D(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(m)}{m^s}, \tag{3}$$

где $F(m)$ — число таких n-мерных векторов t с целочисленными взаимно простыми координатами, что $|t| = m$.

Нетрудно убедиться, что $F(m) \leqslant nm^{n-1}$. Следовательно, ряд для $D(s)$ сходится при $\operatorname{Re} s > n$.

Обозначим через $F_+(m)$ число $(n-1)$-мерных векторов с положительными координатами, не превосходящими m и такими, что их общий наибольший делитель взаимно прост с m. Нетрудно видеть, что

$$F(m) = 2^{n-1} F_+(m), \tag{4}$$

$$\sum_d F_+\left(\frac{m}{d}\right) = m^{n+1}, \tag{5}$$

где сумма берется по всем делителям числа m.

Из (5) следует, что

$$\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_+(m)}{m^s}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{n+1}}{m^s} = \zeta(s-n+1), \tag{6}$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Из (4) и (6) следует, что

$$D(s) = 2^{n-1} \frac{\zeta(s-n+1)}{\zeta(s)}. \tag{7}$$

§ 2. Анализ на группе аделей

1. Функции Шварца — Брюа. В этом пункте будет введено важное для дальнейшего пространство функций на группе аделей A. Это пространство, как мы увидим в следующем пункте, инвариантно относительно преобразования Фурье.

Рассмотрим на группе аделей A функции $\varphi(a)$, представимые в виде бесконечного произведения

$$\varphi(a) = \prod_p \varphi_p(a_p), \tag{1}$$

где множители $\varphi_p(a_p)$ удовлетворяют следующим условиям.

1) $\varphi_\infty(a_\infty)$ — бесконечно дифференцируемая функция на R (т. е. на аддитивной группе вещественных чисел), убывающая при $|a_\infty| \to \infty$ быстрее любой степени $|a_\infty|$.

2) $\varphi_p(a_p)$, $p = 2, 3$, финитна и кусочно постоянна, т. е. постоянна на классах смежности группы p-адических чисел Q_p по некоторой достаточно малой ее открытой подгруппе.

3) Для всех p, кроме конечного числа, $\varphi_p(a_p) = 1$, когда a_p — целое p-адическое число, и $\varphi_p(a_p) = 0$, когда a_p — не целое.

В силу условия 3), для любого $a \in A$ все множители в бесконечном произведении (1), начиная с некоторого p, равны 1; таким образом, это произведение сходится. Отсюда легко следует, что функция $\varphi(a)$ непрерывна на A.

Заметим, что в силу того же условия 3) функция $\varphi(a)$ сосредоточена на открытой подгруппе группы A вида

$$A_\infty \times A_2 \times \ldots \times A_p \times V_p,$$

где V_p — подгруппа аделей, у которых все компоненты — целые p-адические числа, причем $a_\infty = a_2 = \ldots = a_p = 0$, p — достаточно большое число. Кроме того, эта функция постоянна на классах смежности по подгруппе V_p. Значит, ее можно рассматривать как функцию на группе

$$A^{(p)} = A_\infty \times A_2 \times \ldots \times A_p,$$

где p — достаточно большое число. То же самое относится и к любой конечной линейной комбинации функций вида (1).

Условимся функции вида (1) называть элементарными функциями на A.

Назовем *функциями Шварца—Брюа**) на A функции $\varphi(a)$, представимые как конечные линейные комбинации элементарных функций. Обозначим через $S(A)$ совокупность всех функций Шварца — Брюа на A.

*) Название введено Годманом, который, по-видимому, первым вскрыл существенную роль этих функций на группах аделей.

Нетрудно убедиться, что все функции $\varphi(a) \in S(A)$ суммируемы на A, т. е. что для любой функции $\varphi \in S(A)$

$$\int_A |\varphi(a)|\, da < \infty.$$

2. Преобразование Фурье функций Шварца — Брюа. Пусть $\chi_0(a)$ — характер на A, определенный в п. 5 § 1:

$$\chi_0(a) = \exp 2\pi i \sigma(a), \tag{1}$$

где

$$\sigma(a) \equiv -a_\infty + a_2 + \ldots + a_p + \ldots \pmod 1.$$

Определим преобразование Фурье функции $\varphi(a)$ по формуле

$$\tilde{\varphi}(b) = \int \varphi(a)\, \chi_0(ba)\, da. \tag{2}$$

Отметим, хотя это в дальнейшем и не используется, что преобразование Фурье может быть определено для любой функции $\varphi(a)$ с интегрируемым квадратом модуля; интеграл (2) следует при этом понимать в смысле среднего квадратичного значения.

По формуле обратного преобразования Фурье мы имеем

$$\varphi(a) = c \int \tilde{\varphi}(b)\, \chi_0(-ba)\, db, \tag{3}$$

иными словами,

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(-a) = c^{-1} \varphi(a). \tag{4}$$

Далее, имеет место формула Планшереля:

$$\int |\varphi(a)|^2\, da = c \int |\tilde{\varphi}(a)|^2\, da. \tag{5}$$

Здесь c — постоянная, зависящая от нормировки меры на группе A. Легко убедиться, что при той нормировке меры da, которая была введена с самого начала, мы имеем

$$c = 1.$$

Докажем, что *преобразование Фурье функции из $S(A)$ есть снова функция из $S(A)$.*

Для этого достаточно доказать, что если $\varphi(a)$ — элементарная функция, т. е. функция вида (1), где $\varphi_p(a_p)$ удовлетворяют условиям 1) — 3) п. 1, то ее преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(a)$ есть функция того же вида.

Прежде всего, очевидно, что

$$\tilde{\varphi}(b) = \prod_p \tilde{\varphi}_p(b_p),$$

где

$$\tilde{\varphi}_p(b_p) = \int \varphi_p(a_p)\chi_0(b_p a_p)\,d a_p, \quad p = \infty,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Известно, что преобразование Фурье бесконечно дифференцируемой функции $\varphi_\infty(a_\infty)$, убывающей при $|a_\infty| \to \infty$ быстрее любой степени $|a_\infty|$, есть функция того же вида. Следовательно, для $\tilde{\varphi}(b)$ выполняется условие 1).

Далее, преобразование Фурье финитной кусочно-постоянной функции $\varphi_p(a_p)$, $p = 2, 3$, есть функция того же вида (см. гл. II, § 2, п. 4). Следовательно, для $\tilde{\varphi}(b)$ выполняется условие 2).

Наконец, воспользуемся тем, что преобразование Фурье переводит в себя функцию вида

$$\varphi_p(a_p) = \begin{cases} 1 & \text{при } |a_p|_p \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |a_p|_p > 1 \end{cases} \tag{6}$$

(см. гл. II, § 2, п. 4). Отсюда следует, что $\tilde{\varphi}(b)$ удовлетворяет условию 3).

Из формулы $\tilde{\tilde{\varphi}}(-a) = \varphi(a)$ легко следует, что *преобразование Фурье отображает $S(A)$ на все пространство $S(A)$.*

3. Формула суммирования Пуассона. Пусть $\varphi(a)$ — функция Шварца — Брюа, $\tilde{\varphi}(a)$ — ее преобразование Фурье.

Здесь будет установлена следующая формула, которую принято называть *формулой суммирования*

Пуассона:

$$\sum_{\alpha\in Q}\varphi(\lambda\alpha)=\frac{1}{|\lambda|}\sum_{\alpha\in Q}\tilde{\varphi}(\lambda^{-1}\alpha), \tag{1}$$

где λ — произвольный идель, а суммирование ведется по подгруппе Q главных аделей *).

Для доказательства формулы (1) введем вспомогательную функцию на группе аделей A:

$$\Phi(a)=\sum_{\alpha\in Q}\varphi(\lambda(\alpha+a)), \tag{2}$$

где суммирование ведется по подгруппе главных аделей.

Из суммируемости функции $\varphi(a)$ непосредственно следует, что ряд (2) сходится абсолютно почти всюду и что $\Phi(a)$ — суммируемая функция на A/Q. В самом деле,

$$\int_A|\varphi(\lambda a)|\,da=\int_{A/Q}\left(\sum_{\alpha\in Q}|\varphi(\lambda(\alpha+a))|\right)da.$$

Нетрудно также убедиться, что функция $\Phi(a)$ непрерывна.

Поскольку функция $\Phi(a)$ постоянна на классах смежности по Q и суммируема на компактной группе A/Q, то она разлагается в ряд Фурье по характерам группы A, равным единице на Q. Как было показано в п. 6 § 1, эти характеры имеют вид $\chi_0(\beta a)$, где β пробегает главные адели. Итак, имеем

$$\Phi(a)=\sum_{\beta\in Q}c_\beta\chi_0(\beta a). \tag{3}$$

Коэффициенты Фурье c_β выражаются следующей формулой:

$$c_\beta=\int_{A/Q}\Phi(a)\chi_0(-\beta a)\,da. \tag{4}$$

---

*) Формула Пуассона имеет место для любой коммутативной топологической группы G с дискретной подгруппой Γ и компактной фактор-группой G/Γ. Классическая формула Пуассона соответствует случаю, когда G — группа всех вещественных чисел, а Γ — подгруппа целых чисел.

Подставляя сюда вместо функции $\Phi(a)$ ее выражение (2), мы получаем

$$c_\beta = \int\limits_{A/Q} \left(\sum_{\alpha \in Q} \varphi(\lambda(\alpha + a)) \right) \chi_0(-\beta a)\, da =$$
$$= \int\limits_{A} \varphi(\lambda a)\chi_0(-\beta a)\, da = \frac{1}{|\lambda|} \int\limits_{A} \varphi(a)\chi_0\left(-\beta\lambda^{-1}a\right) da =$$
$$= \frac{1}{|\lambda|} \tilde{\varphi}\left(-\beta\lambda^{-1}\right).$$

Итак, имеем

$$\sum_{\alpha \in Q} \varphi(\lambda(\alpha + a)) = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{\beta \in Q} \tilde{\varphi}\left(-\lambda^{-1}\beta\right)\chi_0(\beta a). \tag{5}$$

Отсюда при $a = 0$ получаем формулу Пуассона (1).

4. Преобразование Меллина функций Шварца — Брюа. Формула Тэйта. Пусть $\varphi(a)$ — функция Шварца — Брюа на группе аделей A. Поскольку группа иделей A^* естественным образом вкладывается, как подмножество, в группу аделей A, то мы можем рассматривать ограничение $\varphi(\lambda)$ функции φ на группу иделей A^*.

Пусть $\pi(\lambda)$ — характер на группе иделей A^*, равный тождественно единице на подгруппе Q^* главных иделей. *Преобразованием Меллина* функции φ будем называть функцию $\Phi(\pi)$, определяемую следующей формулой:

$$\Phi(\pi) = \int\limits_{A^*} \varphi(\lambda)\pi(\lambda)\, d^*\lambda, \tag{1}$$

где $d^*\lambda$ — инвариантная мера на группе иделей.

Выясним, для каких характеров π интеграл (1) сходится.

Напомним, что любой характер π можно представить в виде

$$\pi(\lambda) = |\lambda|^s \theta(\lambda), \tag{2}$$

где

$$|\lambda| = |\lambda_\infty|_\infty |\lambda_2|_2 \ldots |\lambda_p|_p, \ldots,$$

s — комплексное число, $|\theta(\lambda)| = 1$; число s и характер θ однозначно определяются формулами (5), (6) п. 10 § 1. Таким образом, мы можем писать

$$\Phi(\pi) \equiv \Phi(\theta, s) = \int\limits_{A^*} \varphi(\lambda)\,\theta(\lambda)\,|\lambda|^s\, d^*\lambda. \tag{3}$$

Вопрос состоит, следовательно, в том, при каких s сходится интеграл (3).

При решении этого вопроса мы можем ограничиться элементарными функциями, т. е. функциями вида

$$\varphi(\lambda) = \varphi_\infty(\lambda_\infty)\,\varphi_2(\lambda_2)\,\ldots\,\varphi_p(\lambda_p)\,\ldots$$

Поскольку

$$|\lambda| = |\lambda_\infty|_\infty\,|\lambda_2|_2\,\ldots\,|\lambda_p|_p\,\ldots$$

и

$$\theta(\lambda) = \theta_\infty(\lambda_\infty)\,\theta_2(\lambda_2)\,\ldots\,\theta_p(\lambda_p)\,\ldots,$$

то интеграл (3) можно переписать в виде бесконечного произведения интегралов:

$$\Phi(\theta, s) = \prod_p \int\limits_{Q_p^*} \varphi_p(\lambda_p)\,\theta_p(\lambda_p)\,|\lambda_p|_p^s\, d^*\lambda_p. \tag{4}$$

Очевидно, что каждый сомножитель этого произведения является абсолютно сходящимся интегралом при $\operatorname{Re} s > 0$. Спрашивается, при каких дополнительных условиях на s сходится само бесконечное произведение. Для этого заметим, что, в силу определения функций Шварца — Брюа, функции $\varphi_p(\lambda_p)$ при достаточно больших p сосредоточены на множестве целых λ_p и равны 1 на этом множестве. С другой стороны, при достаточно больших p характеры θ_p имеют следующий вид:

$$\theta_p(\lambda_p) = |\lambda_p|_p^{is_p},$$

где s_p — вещественное число.

Таким образом, при достаточно больших p мы имеем

$$\int\limits_{Q_p^*} \varphi(\lambda_p)\,\theta_p(\lambda_p)\,|\lambda_p|_p^s\,d^*\lambda_p =$$

$$= \int\limits_{|\lambda_p|_p \leqslant 1} |\lambda_p|_p^{s+is_p}\,d^*\lambda_p = 1 + \frac{p^{-(s+is_p)}}{1-p^{-(s+is_p)}} \; ^{*}). \qquad (5)$$

Легко убедиться, что бесконечное произведение

$$\prod_p \left(1 + \frac{p^{-(s+is_p)}}{1-p^{-(s+is_p)}}\right)$$

сходится, когда $\operatorname{Re} s > 1$.

Таким образом, доказано, что интеграл (3) сходится, и притом абсолютно, когда $\operatorname{Re} s > 1$.

Из формул (4) и (5) вытекает, что $\Phi(\theta, s)$ является при фиксированных φ и θ аналитической функцией от s в области $\operatorname{Re} s > 1$.

Покажем, что *функция* $\Phi(\theta, s)$ *аналитически продолжается на всю плоскость комплексного переменного* s. *Ее единственными особенностями являются простые полюсы в точках* $s=0$ *и* $s=1$. *Вычеты функции* $\Phi(\theta, s)$ *в этих полюсах соответственно равны* $-\varepsilon_\theta\varphi(0)$ *и* $\varepsilon_\theta\tilde{\varphi}(0)$, *где* $\varepsilon_\theta = 1$ *в случае, когда* $\theta \equiv 1$, *и* $\varepsilon_\theta = 0$ *в противном случае.*

Доказательство. Разобьем интеграл $\Phi(\theta, s)$ на сумму двух интегралов

$$\Phi(\theta, s) = \Phi^+(\theta, s) + \Phi^-(\theta, s), \qquad (6)$$

где

$$\Phi^+(\theta, s) = \int\limits_{|\lambda| \geqslant 1} \varphi(\lambda)\,\theta(\lambda)\,|\lambda|^s\,d^*\lambda, \qquad (7)$$

$$\Phi^-(\theta, s) = \int\limits_{|\lambda| \leqslant 1} \varphi(\lambda)\,\theta(\lambda)\,|\lambda|^s\,d^*\lambda. \qquad (8)$$

---

*) Напоминаем, что мера $d^*\lambda_p$ на Q_p^*, индуцированная мерой $d^*\lambda$, нормирована условием $\int\limits_{|\lambda_p|_p=1} d^*\lambda_p = 1$.

Выше было доказано, что интеграл $\Phi(\theta, s)$ абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$ и является аналитической функцией от s в области $\operatorname{Re} s > 1$. То же самое верно и для интегралов $\Phi^+(\theta, s)$, $\Phi^-(\theta, s)$.

Заметим теперь, что интеграл $\Phi^+(\theta, s)$ заведомо сходится и когда $\operatorname{Re} s \leqslant 1$ и является в этой области аналитической функцией от s; следовательно, $\Phi^+(\theta, s)$ — целая аналитическая функция от s.

Таким образом, для доказательства теоремы нам достаточно рассмотреть только второй интеграл $\Phi^-(\theta, s)$.

Преобразуем этот интеграл. Так как $|\alpha| = 1$ для любого главного иделя α, то множество $|\lambda| \leqslant 1$ инвариантно относительно дискретной группы Q^* преобразований

$$\lambda \to \lambda\alpha,$$

где α пробегает главные идели. Обозначим через E фундаментальную область в множестве $|\lambda| \leqslant 1$ относительно дискретной группы Q^*. Тогда мы имеем

$$\Phi^-(\theta, s) = \int\limits_E \sum_{\alpha \in Q^*} \varphi(\lambda\alpha)\, \theta(\lambda)\, |\lambda|^s\, d^*\lambda. \tag{9}$$

(Здесь используется тот факт, что $\theta(\alpha) = 1$.)

Воспользуемся формулой суммирования Пуассона:

$$\sum_{\alpha \in Q} \varphi(\lambda\alpha) = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{\alpha \in Q} \tilde{\varphi}(\lambda^{-1}\alpha), \tag{10}$$

где $\tilde{\varphi}$ — преобразование Фурье функции φ. Заметим, что множество Q^* главных иделей получается из множества Q главных аделей отбрасыванием элемента 0; следовательно, формулу (10) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(0) + \sum_{\alpha \in Q^*} \varphi(\lambda\alpha) = \frac{1}{|\lambda|} \tilde{\varphi}(0) + \frac{1}{|\lambda|} \sum_{\alpha \in Q^*} \tilde{\varphi}(\lambda^{-1}\alpha). \tag{11}$$

Подставляя в (9) вместо $\sum\limits_{\alpha \in Q^*} \varphi(\lambda\alpha)$ его выражение из (11), мы получаем

$$\Phi^-(\theta, s) = \int\limits_E \sum_{\alpha \in Q^*} \tilde{\varphi}(\lambda^{-1}\alpha)\,\theta(\lambda)\,|\lambda|^{s-1}\, d^*\lambda + $$
$$+ \tilde{\varphi}(0)\int\limits_E \theta(\lambda)\,|\lambda|^{s-1}\, d^*\lambda - \varphi(0)\int\limits_E \theta(\lambda)\,|\lambda|^s\, d^*\lambda =$$
$$= \int\limits_E \sum_{\alpha \in Q^*} \tilde{\varphi}(\lambda\alpha)\,\theta^{-1}(\lambda)\,|\lambda|^{1-s}\, d^*\lambda +$$
$$+ \tilde{\varphi}(0)\int\limits_E \theta(\lambda)\,|\lambda|^{s-1}\, d^*\lambda - \varphi(0)\int\limits_E \theta(\lambda)\,|\lambda|^s\, d^*\lambda. \qquad (12)$$

Первое слагаемое в этой формуле есть $\tilde{\Phi}^+(\theta^{-1}, 1-s)$, где $\tilde{\Phi}$ — преобразование Меллина функции φ.

Вычислим теперь интеграл $\int\limits_E \theta(\lambda)\,|\lambda|^s\, d^*\lambda$ в формуле (12). Очевидно, что этот интеграл равен нулю, если $\theta(\lambda) \not\equiv 1$. Пусть теперь $\theta(\lambda) \equiv 1$. Возьмем в качестве фундаментальной области E множество иделей

$$\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots),$$

где $0 < \lambda_\infty < 1$ и $|\lambda_p|_p = 1$ (ср. п. 10). Тогда имеем

$$\int\limits_E |\lambda|^s\, d^*\lambda = \int\limits_0^1 \lambda_\infty^{s-1}\, d\lambda_\infty \int\limits_{|\lambda_2|_2=1} d^*\lambda_2 \ldots \int\limits_{|\lambda_p|_p=1} d^*\lambda_p \ldots$$

Поскольку $\int\limits_{|\lambda_p|_p=1} d^*\lambda_p = 1$, то мы получаем отсюда, что

$$\int\limits_E |\lambda|^s\, d^*\lambda = \frac{1}{s}.$$

Итак, окончательно имеем

$$\int\limits_E \theta(\lambda)\,|\lambda|^s\, d^*\lambda = \frac{\varepsilon_\theta}{s}, \qquad (13)$$

где $\varepsilon_\theta = 1$, если $\theta(\lambda) \equiv 1$, и $\varepsilon_\theta = 0$, если $\theta(\lambda) \not\equiv 1$.

Таким образом, мы получили следующее равенство:

$$\Phi^{-}(\theta, s) = \tilde{\Phi}^{+}\left(\theta^{-1}, 1-s\right) + \varepsilon_\theta\left(\frac{\tilde{\varphi}(0)}{s-1} - \frac{\varphi(0)}{s}\right), \tag{14}$$

где через $\tilde{\Phi}$ обозначено преобразование Меллина функции $\tilde{\varphi}$.

Как мы уже знаем, Φ^{+} является целой аналитической функцией от s. Таким образом, в силу (14), функция $\Phi^{-}(\theta, s)$ является аналитической функцией от s на всей комплексной плоскости s, причем ее единственными особенностями являются простые полюсы в точках $s=0$ и $s=1$. Вычеты функции Φ^{-} в этих точках равны соответственно $-\varepsilon_\theta\varphi(0)$ и $\varepsilon_\theta\tilde{\varphi}(0)$. Утверждение доказано.

Из формулы (12) вытекает следующее функциональное соотношение для функции $\Phi(\theta, s)$ (формула Тэйта):

$$\Phi(\theta, s) = \tilde{\Phi}\left(\theta^{-1}, 1-s\right), \tag{15}$$

где $\tilde{\Phi}$ — преобразование Меллина функции $\tilde{\varphi}(a)$.

В самом деле, заменяя в (14) $\varphi(a)$, θ и s соответственно на $\tilde{\varphi}(a)$, θ^{-1} и $1-s$, мы получим

$$\tilde{\Phi}^{-}\left(\theta^{-1}, 1-s\right) = \Phi^{+}(\theta, s) - \varepsilon_\theta\left(\frac{\varphi(0)}{s} - \frac{\tilde{\varphi}(0)}{s-1}\right),$$

откуда

$$\Phi^{+}(\theta, s) = \tilde{\Phi}^{-}\left(\theta^{-1}, 1-s\right) - \varepsilon_\theta\left(\frac{\tilde{\varphi}(0)}{s-1} - \frac{\varphi(0)}{s}\right). \tag{16}$$

Складывая почленно равенства (14) и (16), мы и получим формулу Тэйта (15).

Как следствие из формулы Тэйта, мы получим сейчас функциональное соотношение для дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Для этого рассмотрим функцию $\varphi(a)$ вида

$$\varphi(a) = \varphi_\infty(a_\infty)\,\varphi_2(a_2)\,\ldots\,\varphi_p(a_p), \ldots,$$

где

$$\varphi_\infty(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varphi_p(a_p) = \begin{cases} 1, & \text{когда } |a_p|_p \leqslant 1, \\ 0, & \text{когда } |a_p|_p > 1. \end{cases}$$

Известно, что $\tilde{\varphi}_\infty(x) = \varphi_\infty(x)$. С другой стороны, как было показано в гл. II, § 2, п. 4, $\tilde{\varphi}_p(a_p) = \varphi_p(a_p)$ для любого p. Следовательно,

$$\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a). \tag{17}$$

Вычислим $\Phi(\theta_0, s)$ для функции φ, где $\theta_0(\lambda) \equiv 1$. Мы имеем

$$\Phi(\theta_0, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} |x|^{s-1} dx \prod_p \int_{|\lambda_p|_p \leqslant 1} |\lambda_p|_p^s d^*\lambda_p. \tag{18}$$

Все интегралы, входящие в формулу (18), непосредственно вычисляются. Имеем

$$\int_{|\lambda_p|_p \leqslant 1} |\lambda_p|_p^s d^*\lambda_p = \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Следовательно,

$$\prod_p \int_{|\lambda_p|_p \leqslant 1} |\lambda_p|_p^s d^*\lambda_p = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} = \zeta(s),$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана. С другой стороны, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} |x|^{s-1} dx = 2^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right),$$

где $\Gamma(x)$ — классическая гамма-функция.

Таким образом,

$$\Phi(\theta_0, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s). \tag{19}$$

Следовательно, формула Тэйта (15) дает нам искомое соотношение для ζ-функций:

$$2^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = 2^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \tag{20}$$

Аналогично из формулы Тэйта можно получить и функциональное соотношение для L-функций Дирихле.

5. Пространство A^n. Рассмотрим теперь n-мерное векторное пространство над группой аделей A, т. е. пространство точек

$$y=(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}), \tag{1}$$

где

$$y^{(i)}=\left(y_\infty^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_p^{(i)}, \ldots\right) \tag{2}$$

— элементы из A. Обозначим это пространство через A^n.

Мы введем по аналогии с группой A понятие функции Шварца — Брюа на A^n и понятие преобразования Фурье на A^n. Далее, будет изучено преобразование Меллина в пространстве A^n.

Рассмотрим функции $\varphi(y)$ на A^n вида

$$\varphi(y)=\varphi_\infty(y_\infty)\varphi_2(y_2)\ \ldots\ \varphi_p(y_p), \ \ldots, \tag{3}$$

где

$$y_p=\left(y_p^{(1)}, \ldots, y_p^{(n)}\right), \qquad p=\infty, 2, 3, \ldots,$$

удовлетворяющие следующим условиям.

1) $\varphi_\infty(y_\infty)$ — бесконечно дифференцируемая функция в n-мерном пространстве R^n над полем вещественных чисел, убывающая при $|y_\infty|\to\infty$ быстрее любой степени $|y_\infty|$, где $|y_\infty|$ — норма вектора y_∞:

$$|y_\infty|=\left(|y_\infty^{(1)}|^2+\ \ldots\ +|y_\infty^{(n)}|^2\right)^{1/2}.$$

2) Функция $\varphi_p(y_p)$ финитна и кусочно-постоянна, $p=2, 3, \ldots$

3) Для всех p, кроме конечного числа, функция $\varphi_p(y_p)$ сосредоточена на множестве векторов

$$y_p=\left(y_p^{(1)}, \ldots, y_p^{(n)}\right),$$

координаты которых — целые p-адические числа, и равна на этом множестве тождественно единице.

Функции вида (3), удовлетворяющие условиям 1) — 3), назовем *элементарными функциями* на A^n. *Функциями Шварца — Брюа* на A^n будем называть функции, представимые в виде конечной линейной комбинации элементарных функций. Пространство функций Шварца — Брюа обозначим через $S(A^n)$.

Легко убедиться, что функции Шварца — Брюа непрерывны и суммируемы на A^n по мере $dy=dy^{(1)}\ \ldots\ dy^{(n)}$.

Определим преобразование Фурье функции $\varphi \in S(A^n)$ следующей формулой:

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int \varphi(y)\, \chi_0(y \cdot \xi)\, dy, \tag{4}$$

где $\xi \in A^n$,

$$y \cdot \xi = y^{(1)}\xi^{(1)} + \ldots + y^{(n)}\xi^{(n)},$$
$$dy = dy^{(1)} \ldots dy^{(n)},$$

а $\chi_0(a) = \exp 2\pi i \sigma(a)$ — характер, определенный в п. 4. Имеет место следующее утверждение.

Преобразование Фурье переводит функции из $S(A^n)$ снова в функции из $S(A^n)$; при этом оно отображает пространство $S(A^n)$ на все пространство $S(A^n)$.

Доказательство проводится почти дословно так же, как и доказательство аналогичного утверждения для функций из $S(A)$ (см. п. 2).

Приведем формулу суммирования Пуассона для пространства A^n:

$$\sum_{\alpha \in Q^n} \varphi(\lambda\alpha) = \frac{1}{|\lambda|^n} \sum_{\alpha \in Q^n} \tilde{\varphi}(\lambda^{-1}\alpha), \tag{5}$$

где λ — произвольный идель; суммирование ведется по векторам $\alpha \in A^n$, все координаты которых являются главными аделями.

Вывод этой формулы проводится дословно так же, как и в одномерном случае (см. п. 3).

Теперь введем понятие преобразования Меллина функции $\varphi \in S(A^n)$.

Преобразование Меллина функции Шварца — Брюа $\varphi(y)$ на A^n определим следующей формулой:

$$\Phi(y;\, \pi) = \int_{A^*} \varphi(\lambda y)\, \pi(\lambda)\, d^*\lambda, \quad y \neq 0, \tag{6}$$

где $\pi(\lambda)$ — характер на группе иделей A^*, равный тождественно единице на подгруппе Q^* главных иделей, $d^*\lambda$ — инвариантная мера на A^*.

Известно (см. п. 10 § 1), что характер π имеет вид

$$\pi(\lambda) = |\lambda|^s\, \theta(\lambda), \tag{7}$$

где s — комплексное число, а θ — характер, заданный первоначально на компактной подгруппе Λ группы A^* и продолженный затем на всю группу A^*.

Таким образом, функция Φ является функцией от s и от θ, причем θ пробегает дискретное множество.

Из результатов п. 10 следует, что интеграл (6) сходится при $\operatorname{Re} s > 1$ и является в этой области аналитической функцией от s. При этом функция $\Phi(y; \pi) \equiv \Phi(y; \theta, s)$ аналитически продолжается на всю плоскость комплексного переменного s. Ее единственными особенностями являются простые полюсы в точках $s = 0$ и $s = 1$. Вычеты функции Φ в этих точках соответственно равны $-\varepsilon_\theta \varphi(0)$ и $\varepsilon_\theta \int\limits_A \varphi(\lambda y)\, d\lambda$, где $\varepsilon_\theta = 1$ в случае, когда $\theta \equiv 1$, и $\varepsilon_\theta = 0$ в противном случае (интеграл берется по группе аделей A).

Теперь отметим свойства функции Φ как функции от y. Из формулы (6) непосредственно следует, что

$$\Phi(\lambda y, \pi) = \pi^{-1}(\lambda)\, \Phi(y, \pi) \tag{8}$$

для любого иделя $\lambda \in A^*$ (свойство однородности функции Φ).

Поскольку $\pi(\lambda) = 1$ на подгруппе Q^* главных иделей, то мы имеем на основании (8)

$$\Phi(\lambda y; \pi) = \Phi(y, \pi)$$

для любого главного иделя $\lambda \in Q^*$. Таким образом, функцию Φ можно рассматривать как функцию на фактор-пространстве $\Omega = Q^* \setminus A^n$, получаемом из A^n отождествлением точек y и λy, где $\lambda \in Q^*$.

ДОБАВЛЕНИЕ К § 2

КОЛЬЦА ТЭЙТА

Пусть A — некоторое коммутативное локально компактное кольцо. Обозначим через A' группу характеров аддитивной группы кольца A.

Отображение

$$\chi(a) \to \chi(ra),$$

где r — любой элемент кольца A определяет эндоморфизм группы A'.

Как уже отмечалось в § 1, A' представляет собой модуль над A. Напомним, что кольцо A называется самодуальным, если модуль A' изоморфен A.

Обозначим через A^* совокупность всех элементов кольца A, имеющих обратный элемент. Вообще говоря, A^* не представляет собой замкнутого подмножества в A. Однако в A^* можно ввести топологию так, чтобы оно превратилось в топологическую группу. Именно, окрестность U элемента $a_0 \in A^*$ состоит из тех элементов $a \in A^*$, для которых $a \in V(a_0)$ и $a^{-1} \in W(a_0^{-1})$, где V и W — некоторые заданные окрестности в A соответственно a_0 и a_0^{-1}.

Нетрудно проверить, что при таком определении топологии A^* превращается в локально компактную топологическую группу, если в качестве групповой операции взять умножение элементов.

Обозначим, далее, через da меру на A, инвариантную относительно сложения, и через d^*a меру на A^*, инвариантную относительно умножения. Для любого элемента $\alpha \in A^*$ определим его норму следующим образом. Рассмотрим меру $d_\alpha(a) = d(\alpha a)$. Нетрудно видеть, что эта мера инвариантна относительно сложения и, значит, пропорциональна мере da. Положим

$$|\alpha| = \frac{d(\alpha a)}{da}. \tag{1}$$

Для элементов $\alpha \notin A^*$ норма не определяется.

Пусть Q — некоторое подкольцо кольца A. Назовем подкольцо Q унимодулярным, если норма любого его отличного от нуля элемента равна 1. Очевидно, что унимодулярное кольцо является полем и что оно дискретно.

Пусть A — самодуальное кольцо с отмеченным в нем унимодулярным подкольцом Q. Назовем пару (A, Q) **парой Тейта**, если выполнены следующие условия.

1) Подгруппа аддитивных характеров на A, равных единице на Q, изоморфна Q.

2) Группа A_1^*/Q^* компактна, где A_1^* — группа элементов с нормой, равной 1, а Q^* — мультипликативная группа поля Q.

В силу теоремы двойственности Понтрягина, из условия 1) следует, что A/Q является группой характеров группы Q. Следовательно, поскольку Q — дискретная группа, A/Q является компактной группой.

Напишем теперь формулу Пуассона. Пусть $\varphi(a)$ — такая функция на A, для которой ряд $\psi(a)=\sum_{\alpha\in Q}\varphi(a+\alpha)$ сходится абсолютно и равномерно и, кроме того, $\psi(a)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. Тогда

$$\sum_{\alpha\in Q}\varphi(a)=\sum_{\chi\in(A/Q)'}\int_A\varphi(a)\overline{\chi}(a)\,da, \tag{2}$$

где χ — пробегает все характеры группы A, равные единице на подгруппе Q. Для доказательства надо рассмотреть разложение в ряд Фурье функции $\psi(a)=\sum_{\alpha}\varphi(a+\alpha)$ (см. п. 3).

Перейдем теперь к рассмотрению преобразования Меллина. Обозначим через Π совокупность всех характеров *) группы A^*, равных 1 на $Q^*=A^*\cap Q$.

Пусть φ — некоторая функция на A. Ее преобразованием Меллина называется интеграл ($\pi\in\Pi$)

$$\Phi(\pi)=\int_{A^*}\varphi(a)\pi(a)\,d^*a. \tag{3}$$

Обозначим через L совокупность функций $\varphi(a)$ на A, обладающих следующими свойствами:

1) ряд $\psi(a)=\sum_{\alpha\in Q}\varphi(a+\alpha)$ сходится абсолютно и равномерно;

2) $\psi(a)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье по характерам (аддитивным) из A/Q;

3) интегралы $\int\varphi(a)\,|a|^s\,d^*a$ и $\int\tilde{\varphi}(a)\,|a|^s\,d^*a$ сходятся абсолютно при всех достаточно больших значениях $\operatorname{Re} s$.

При этих предположениях дословным повторением рассуждений п. 4 доказывается, что для любой функции $\varphi(a)\in L$ ее преобразование Меллина аналитически продолжается на все Π, обладает при этом единственными полюсами в точках

---

*) Здесь под характерами понимаются любые, т. е. не обязательно равные 1 по модулю решения функционального уравнения

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b),\quad a,\ b\in A^*.$$

$\pi(a) \equiv 1$ и $\pi(a) \equiv |a|$ и, кроме того, имеет место функциональное уравнение

$$\Phi(\pi, \varphi) = \Phi(\tilde{\pi}, \tilde{\varphi}), \quad \tilde{\pi}(a) = |a|\, \pi^{-1}(a).$$

§ 3. Группы аделей G_A и их представления

1. Определение группы аделей G_A. Понятие аделей и иделей, введенных Шевалле для целей алгебраической теории чисел, оказалось полезным обобщить на случай любой линейной алгебраической группы, определенной над полем рациональных чисел Q. Это обобщение, предложенное А. Вейлем, состоит в следующем.

Пусть G — линейная алгебраическая группа, определенная над полем рациональных чисел Q *).

Для задания группы G достаточно задать множество полиномиальных соотношений между элементами матриц, принадлежащих группе G. Обозначим через G_p совокупность всех p-адических матриц, принадлежащих G, и через U_p целочисленную подгруппу группы G_p (т. е. подгруппу матриц g_p таких, что элементы g_p и g_p^{-1} — целые p-адические числа). Через G_∞ обозначим совокупность всех вещественных матриц, принадлежащих группе G. Рассмотрим бесконечные последовательности

$$g = (g_\infty, g_2, \ldots, g_p, \ldots), \quad g_p \in G_p, \tag{1}$$

где все g_p, кроме конечного числа, принадлежат подгруппам U_p. Такие последовательности называются *аделями* группы G. Их совокупность образует группу G_A. (Умножение определяется покомпонентно.)

Топология в G_A вводится следующим образом. Рассматривается подгруппа G_A^0 аделей $(g_\infty, g_2, \ldots, g_p, \ldots)$, где $g_p \in U_p$ для любого простого p. В G_A^0 вводится топология тихоновского произведения топологических пространств G_∞, $U_2, \ldots, U_p, \ldots$. Эта подгруппа G_A^0 объявляется открытым множеством в группе G_A. Полученную топологическую группу G_A называют *группой аделей* данной группы G.

---

*) Определение линейной алгебраической группы см. в Добавлении к гл. I.

Группа аделей локально-компактна — это непосредственно следует из компактности групп U_p и локальной компактности группы G_∞.

Группа G_Q изоморфно вкладывается в группу аделей G_A. Действительно, поле Q вкладывается как в поле вещественных чисел R, так и в поле p-адических чисел Q_p. Поэтому G_Q вкладывается изоморфно как в G_∞, так и в G_p. Сопоставим каждому элементу $r \in G_Q$ последовательность

$$(r, r, \ldots, r, \ldots). \tag{2}$$

Легко убедиться, что такие последовательности являются аделями. (Это следует из того, что любое рациональное число является для достаточно больших p целым p-адическим числом.) Их называют **главными аделями** данной группы G.

Покажем, что *подгруппа главных аделей* $\Gamma = G_Q$ *дискретна в группе* G_A.

Доказательство. Предположим, что подгруппа G_Q не дискретна. Тогда найдется последовательность главных аделей $(r_n, r_n, \ldots, r_n, \ldots)$, сходящаяся к единичному элементу группы G_A. Из определения топологии в G_A отсюда следует, что, начиная с некоторого n, элементы матриц r_n являются целыми p-адическими числами для каждого p. Но рациональное число является целым p-адическим для любого p тогда и только тогда, когда оно есть целое число. Итак, доказано, что элементы матриц r_n являются, начиная с некоторого n, целыми числами. Отсюда следует, что последовательность попарно различных матриц r_n не может сходиться в топологии группы G_∞; тем самым мы пришли к противоречию.

2. Неприводимые унитарные представления группы аделей. В этом и в следующем пункте мы покажем, как описание всех унитарных представлений группы аделей G_A сводится к описанию унитарных представлений групп G_p, $p = \infty, 2, 3, \ldots$ Именно, мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях на группу G каждое неприводимое унитарное представление группы G_A задается следующим образом. Пусть для каждого p задано неприводимое унитарное представление $T_p(g_p)$ группы G_p в гильбертовом пространстве H_p. Будем предполагать, что при всех достаточно больших p в пространствах представлений p существует хотя бы один вектор, инвариантный относительно U_p. Такие представления T_p называются **представлениями класса 1**.

Зададим в H_p ортонормированный базис ξ_p^k, $k=1, 2, \ldots$, причем через ξ_p^1 условимся обозначать вектор, инвариантный относительно подгруппы U_p, если в H_p такой вектор существует.

Рассмотрим теперь новое гильбертово пространство H, в котором ортонормированным базисом служат формальные произведения $\xi = \bigotimes_p \xi_p^{i_p}$, причем в каждом произведении $i_p = 1$ для всех p за исключением конечного числа. Пространство H, очевидно, сепарабельно.

Оператор представления задается формулой

$$T(g)\xi = \prod_p T_p(g_p)\xi_p^{i_p}, \tag{1}$$

где

$$g = (g_\infty, g_2, \ldots, g_p, \ldots); \quad \xi = \bigotimes_p \xi_p^{i_p}.$$

Определенное таким образом представление группы условимся называть **тензорным произведением** представлений $T_p(g_p)$ группы G_p.

Отметим, что конструкция тензорного представления зависит не только от выбора последовательности унитарных представлений H_p, но также и от выбора в каждом H_p вектора, инвариантного относительно U_p. Очевидно, что способы выбора, отличающиеся лишь на конечном числе мест, приводят к эквивалентным представлениям, а способы выбора, отличающиеся на бесконечном числе мест, — к неэквивалентным представлениям. Отметим также, что для многих важных групп, например, для случая, когда G — группа Шевалле-Диксона можно доказать, что в H_p есть не более чем один вектор, инвариантный относительно подгруппы U_p. Весьма вероятно, что аналогичное утверждение справедливо для любой редуктивной линейной алгебраической группы. Однако, насколько нам известно, это до сих пор не доказано.

Указанная выше конструкция представления группы G_A в пространстве H приводит всегда к неприводимому представлению. Это доказывается с помощью стандартных приемов теории представлений, и мы не будем здесь воспроизводить доказательство этого утверждения.

Приведем еще без доказательства формулу для характера представления $T(g)$. Хорошо известно, что характер тензорного произведения двух представлений $T_1(g_1)$ и $T_2(g_2)$ равен произведению характеров $\operatorname{Tr} T_1(g_1)$ и $\operatorname{Tr} T_2(g_2)$ этих представлений. Аналогичный результат имеет место в нашей ситуации. Он состоит в том, что характер $\operatorname{Tr} T(g)$ представления $T(g)$ равен

$$\operatorname{Tr} T(g) = \prod_p \operatorname{Tr} T_p(g_p),$$

где $\operatorname{Tr} T_p(g_p)$ — характер представления $T_p(g_p)$. При этом характер $\operatorname{Tr} T(g)$ надо понимать как обобщенную функцию, т. е. как функционал на подходяще подобранном семействе функций на группе G_A.

3. Доказательство теоремы о тензорном произведении. Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема.

Предположим, что все группы G_p являются группами типа I*) *и удовлетворяют для всех p, кроме конечного числа, следующему условию:*

в каждом неприводимом представлении группы G_p имеется не более одного вектора, инвариантного относительно максимальной компактной подгруппы.

Тогда всякое неприводимое унитарное представление группы G_A является тензорным произведением (в смысле п. 2) *неприводимых унитарных представлений группы G_p, причем все T_p, кроме конечного числа, являются представлениями класса* 1.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть локально компактная топологическая группа $\mathfrak{G}$ является прямым произведением двух подгрупп,*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2,$$

причем хотя бы один из сомножителей, например $\mathfrak{G}_1$,

*) Определение группы типа I см. в Добавлении к гл. II.

является группой типа I. *Тогда любое неприводимое унитарное представление группы* $\mathfrak{G}$ *представляет собой тензорное произведение неприводимых унитарных представлений групп* $\mathfrak{G}_1$ *и* $\mathfrak{G}_2$.

Доказательство. Пусть $T(g)$ — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$, действующее в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим слабозамкнутые кольца R_1, R_2 ограниченных операторов в H, порожденных соответственно операторами $T(g_1)$, $g_1 \in \mathfrak{G}_1$, и с операторами $T(g_2)$, $g_2 \in \mathfrak{G}_2$. Пусть R_i' — кольцо ограниченных операторов, перестановочных со всеми операторами из R_i, $i = 1, 2$.

Поскольку элементы группы $\mathfrak{G}_1$ перестановочны с элементами группы $\mathfrak{G}_2$, то операторы $T(g_1)$ принадлежат R_2', а операторы $T(g_2)$ принадлежат R_1'. Отсюда следует, что $R_1 \subset R_2'$, $R_2 \subset R_1'$. Но кольца R_1', R_2' пересекаются только по операторам, кратным единичному оператору. (В самом деле, любой оператор, принадлежащий одновременно R_1' и R_2', перестановочен со всеми операторами $T(g)$ неприводимого представления группы $\mathfrak{G}$, следовательно, он кратен единичному оператору.) Поскольку $R_1 \subset R_2'$, то мы заключаем, что кольца R_1 и R_1' пересекаются только по операторам, кратным единичному оператору.

Тем самым доказано, что кольцо R операторов, порожденных операторами $T(g_1)$, $g_1 \in \mathfrak{G}_1$, является фактором. По предположению, этот фактор имеет тип I. Это значит, что пространство H является тензорным произведением H_1 и H_2: $H = H_1 \otimes H_2$, кольцо R_1 состоит из всех операторов вида $A \otimes 1$, а кольцо R_1' — из всех операторов вида $1 \otimes B$.

Отсюда ясно, что операторы представления имеют вид

$$T(g_1 g_2) = T_1(g_1) \otimes T_2(g_2).$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *топологическая группа, и* $T(g)$ — *ее унитарное представление в гильбертовом пространстве* H. *Если в* $\mathfrak{G}$ *существует последовательность компактных подгрупп* V_n, $n = 1, 2, \ldots$, *сходящаяся к единице группы, то для достаточно больших* n *в пространстве* H *существует вектор* f, *инвариантный относительно всех операторов* $T(v_n)$, $v_n \in V_n$.

Доказательство. Введем операторы

$$P_n = \int T(v_n)\, dv_n, \tag{1}$$

где интегрирование ведется по инвариантной мере dv_n на группе V_n, нормированной условием

$$\int dv_n = 1.$$

Покажем, что последовательность операторов P_n сильно сходится к единичному оператору. В самом деле, в силу определения топологии на группе $\mathfrak{G}$, последовательность

$$v_1, \ldots, v_n, \ldots,$$

где $v_n \in V_n$, сходится и притом равномерно по v_n к единице группы $\mathfrak{G}$. Отсюда следует, что последовательность операторов

$$T(v_1), \ldots, T(v_n), \ldots$$

сильно сходится и притом равномерно по v_n к единичному оператору. Именно, для любого вектора $f \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n \geqslant N$ имеет место неравенство

$$\| T(v_n) f - f \| < \varepsilon, \tag{2}$$

каково бы ни было $v_n \in V_n$.

Из неравенства (2) непосредственно следует, что

$$\| P_n f - f \| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность операторов P_n сильно сходится к единичному оператору.

Поскольку операторы P_n сильно сходятся к единичному оператору, то найдется такое n, что $P_n \neq 0$. Покажем, что тогда в пространстве H существует вектор, инвариантный относительно операторов $T(v_n)$. В самом деле, пусть $\varphi \neq 0$ — произвольный вектор вида $\varphi = P_n f$. Тогда имеем $T(v_n)\varphi = T(v_n) P_n f$. Но из определения оператора P_n непосредственно следует, что $T(v_n) P_n = P_n$ для любого $v_n \in V_n$ Следовательно, $T(v_n)\varphi = \varphi$, т. е. φ является искомым вектором, инвариантным относительно операторов $T(v_n)$. Лемма 2 доказана.

Переходим теперь к доказательству теоремы.

Пусть задано неприводимое унитарное представление $T(g)$ группы аделей G_A, действующее в гильбертовом пространстве H. Свяжем с этим представлением неприводимое представление $T_g(g_p)$ каждой из групп G_p, $p=\infty, 2, 3, \ldots$

Для этого заметим, что группа G_A распадается в прямое произведение

$$G_A = G_p \times G'_p$$

подгруппы G_p и подгруппы G'_p, состоящей из всех аделей $g=(g_\infty, g_2, \ldots)$, у которых $g_p = 1$. В силу леммы 1, представление $T(g)$ является тензорным произведением некоторого неприводимого представления $T_p(g_p)$ группы G_p и неприводимого представления группы G'_p.

Итак, с исходным представлением $T(g)$ группы аделей G_A мы связали неприводимые представления $T_p(g_p)$ подгрупп G_p, $p=\infty, 2, 3, \ldots$

Покажем, что эти представления не совсем произвольны. Именно, они удовлетворяют следующему условию: *при достаточно больших p в пространстве H_p представления $T_p(g_p)$ существует вектор f_p, инвариантный относительно операторов $T_p(u_p)$, где u_p пробегает компактную подгруппу U_p, состоящую из всех целочисленных матриц на G_p.*

Обозначим через V_p подгруппу аделей вида $v_p = (1, \ldots, 1, u_p, \ldots, u_q, \ldots)$, где $u_q \in U_q$ при $q \geqslant p$. Последовательность подгрупп V_p сходится к единичной группе, а потому, в силу леммы 2, существует такое $p=p_0$, что в пространстве H имеется вектор f, инвариантный относительно операторов $T(v_{p_0})$, $v_{p_0} \in V_{p_0}$. Пусть $p \geqslant p_0$. Разложим пространство H в тензорное произведение

$$H = H_p \otimes H'_p$$

пространства H_p, в котором действует неприводимое представление $T_p(g_p)$ группы G_p и пространства H'_p, в котором действует представление группы G'_p. Тем самым инвариантный вектор f можно однозначно записать в виде суммы

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_{p,\,i} \otimes \psi_i,$$

где $f_{p,i}$ — векторы из $\tilde{H}_p$, а ψ_i пробегают фиксированный ортогональный базис в H'_p. Так как $U_p \subset V_{p_0}$, то имеем

$$T(u_p) f = f$$

для любого $u_p \in U_p$. Но

$$T(u_p) f = \sum_{i=1}^{\infty} (T_p(u_p) f_{p,i}) \otimes \psi_i,$$

а потому

$$T_p(u_p) f_{p,i} = f_{p,i},$$

т. е. каждый из векторов $f_{p,i} \in H_p$ инвариантен относительно операторов $T_p(u_p)$. Утверждение доказано.

Неприводимые унитарные представления $T_p(g_p)$ группы G_p, обладающие хотя бы одним вектором, инвариантным относительно операторов $T_p(u_p)$, где u_p пробегает подгруппу U_p целочисленных матриц, мы условились называть **представлениями класса** I.

Итак, с каждым неприводимым унитарным представлением $T(g)$ группы аделей G_A мы связали последовательность неприводимых унитарных представлений $T_p(g_p)$ каждой из подгрупп G_p, $p = \infty, 2, 3, \ldots$ При этом все представления $T_p(g_p)$, кроме, быть может, конечного числа, принадлежат классу I. Наша задача теперь — дать описание представления $T(g)$ в терминах представлений $T_p(g_p)$.

Рассмотрим снова подгруппу V_p аделей вида $v_p = (1, \ldots, 1, u_p, \ldots, u_q, \ldots)$, где $u_q \in U_q$ при $q \geqslant p$.

Как мы уже знаем, существует такое $p = p_0$, что в пространстве H имеется вектор f, инвариантный относительно операторов $T(v_{p_0})$, $v_{p_0} \in V_{p_0}$, и, значит, все представления $T_p(g_p)$ являются при $p \geqslant p_0$ представлениями класса I.

В пространстве H_p представления $T_p(g_p)$ зададим ортонормированный базис $f_{p,1}, \ldots, f_{p,n}, \ldots$; будем предполагать, что при $p \geqslant p_0$ вектор $f_{p,1}$ является инвариантным относительно операторов $T_p(u_p)$, $u_p \in U_p$.

В силу леммы 1, для любого p пространство H можно представить как тензорное произведение

$$H = \Big(\bigotimes_{q<p} H_q \Big) \otimes H''_p, \tag{3}$$

где H''_p — пространство, в котором действует неприводимое унитарное представление $T''_p(g''_p)$ группы G''_p аделей вида

$$g = (1, \ldots, 1, g_p, \ldots).$$

Легко убедиться, что среди векторов в H, инвариантных относительно операторов $T(v_{p_0})$, имеется вектор следующего вида:

$$f = \prod_{q < p_0} f_{q1} \cdot f',$$

где f' — вектор в H''_{p_0}, инвариантный относительно операторов $T''_{p_0}(v_{p_0})$. Будем предполагать, что $\| f' \| = 1$.

Легко, далее, убедиться, что для любого $p \geqslant p_0$ вектор f' имеет, в силу разложения (3), следующий вид:

$$f' = \prod_{p_0 \leqslant q < p} f_{q,\,1} \cdot f''_p, \tag{4}$$

где $f''_p \in H''_p$. На основании (4) вектор f''_p можно записать в следующем виде:

$$f''_p = \prod_{q \geqslant p} f_{q1}.$$

Рассмотрим в пространстве H всевозможные векторы вида

$$\prod_{q < p} f_{q,\,i_q} \cdot f''_p = \prod_{q < p} f_{q,\,i_q} \cdot \prod_{q \geqslant p} f_{q1}, \tag{5}$$

где $p \geqslant p_0$; $i_q > 1$ у последнего из множителей $f_{q,\,i_q}$; вектор f''_p определяется из разложения (4). Очевидно, что эти векторы образуют ортонормированную систему в H.

Оператор представления $T(g)$, $g = (g_\infty, g_2, \ldots, g_p, \ldots)$ действует на эти векторы следующим образом:

$$T(g) \prod_{q < p} f_{q,\,i_q} \cdot f''_p = \prod_{q < p} \left(T_q(g_q) f_{q,\,i_q}\right) \left(T''_p(g''_p) f''_p\right) =$$
$$= \prod_{q < p} \left(T_q(g_q)\, f_{q,\,i_q}\right) \prod_{p \leqslant q < p'} \left(T_q(g_q) f_{q,\,i_q}\right) \left(T''_{p'}(g''_{p'}) f''_{p'}\right).$$

Здесь $g''_p = (1, \ldots, 1, g_{p'}, \ldots, g_q, \ldots)$.

Отсюда легко видеть, что вектор $T(g) \prod_{q < p} f_{q,\,i_q} \cdot f''_p$ снова является линейной комбинацией векторов вида (5). Это непосредственно вытекает из того факта, что для любого $g \in G_A$ существует такое $p' \geqslant p_0$, что $g''_{p'} \in V_{p'}$; следовательно, имеем

$$T''_{p'}(g''_{p'}) f''_{p'} = f''_{p'}.$$

Таким образом, подпространство H', натянутое на векторы (5), инвариантно относительно операторов $T(g)$. Поскольку представление $T(g)$ неприводимо, то имеем $H' = H$, т. е. векторы (5) образуют полную ортонормированную систему в пространстве H.

Формула (6) и есть искомая формула, выражающая заданное представление $T(g)$ группы аделей G_A через представления $T_p(g_p)$ групп G_p.

Замечание. Интересно выяснить, верно ли, что для заданной полупростой алгебраической группы G лишь у конечного числа групп G_p могут существовать неприводимые унитарные представления, содержащие более одного линейно независимого вектора, инвариантного относительно подгрупп U_p.

4. Критерий существования единственного инвариантного вектора. Здесь будет дано достаточное условие того, что в любом неприводимом представлении топологической группы G имеется не более одного вектора, инвариантного относительно компактной подгруппы группы G.

Пусть G — локально компактная топологическая группа, обладающая мерой dg, инвариантной как относительно правых, так и относительно левых сдвигов *) *(т. е. $d(g_1 g g_2) = dg$ для любых $g_1, g_2 \in G$). Пусть U — компактная подгруппа группы G. Предположим, что в группе G существует отображение*

$$\sigma\colon\ g \to g^\sigma,$$

обладающее следующими свойствами:

1) σ^2 *есть тождественное отображение;*

2) σ — *антиизоморфизм, т. е. σ отображает взаимно однозначно и взаимно непрерывно группу G*

*) Заметим, что из двусторонней инвариантности меры dg вытекает, что эта мера инвариантна и относительно перехода к обратному элементу, т. е. $dg^{-1} = dg$.

на себя и удовлетворяет для любых $g_1, g_2 \in G$ *следующему соотношению*:

$$(g_1 g_2)^\sigma = g_2^\sigma g_1^\sigma;$$

3) *для любого* $g \in G$ *существуют такие* $u_1, u_2 \in U$, *что*

$$g^\sigma = u_1 g u_2.$$

Как следствие из этих свойств имеем:

4) $U^\sigma = U$, *т. е.* σ *отображает компактную подгруппу* U *на себя*;

5) $d(g^\sigma) = dg$, *т. е. отображение* σ *сохраняет меру.*

Покажем, что *в каждом неприводимом унитарном представлении группы* G *существует не более одного вектора, инвариантного относительно подгруппы* U.

Доказательство. Рассмотрим совокупность R_0 непрерывных финитных функций $\varphi(g)$ на G, удовлетворяющих следующему условию:

$$\varphi(u_1 g u_2) = \varphi(g) \quad \text{для любых} \quad u_1, u_2 \in U. \tag{1}$$

Введем в R_0 естественным образом операцию сложения и определим умножение двух функций из R_0 как свертку

$$\varphi_1 * \varphi_2(g) = \int \varphi_1(g_1)\, \varphi_2(g_1^{-1} g)\, dg_1.$$

(Легко непосредственно убедиться, что свертка двух функций из R_0 есть снова функция из R_0.) Таким образом, R_0 является кольцом.

Докажем, что *кольцо* R_0 *коммутативно.*

Для этого заметим, что, в силу условия 3), функции $\varphi \in R_0$ удовлетворяют соотношению

$$\psi(g^\sigma) = \psi(g).$$

Следовательно,

$$\psi_1 * \psi_2(g) = \int \psi_1(g_1)\, \psi_2(g_1^{-1} g)\, dg_1 =$$

$$= \int \psi_1(g_1^\sigma)\, \psi_2(g^\sigma (g_1^\sigma)^{-1})\, dg_1 = \int \psi_1(g_1)\, \psi(g^\sigma g_1^{-1})\, dg_1.$$

Последний интеграл есть функция из R_0, следовательно, его значение не изменится при замене g^σ на g. Другими словами, будем иметь

$$\psi_1 * \psi_2(g) = \int \psi_1(g_1)\,\psi_2(g g_1^{-1})\,dg_1 = \int \psi_1(g_1^{-1})\,\psi_2(g g_1)\,dg_1 = \\ = \int \psi_2(g_1)\,\psi_1(g_1^{-1} g)\,dg_1.$$

Тем самым доказано, что $\psi_1 * \psi_2 = \psi_2 * \psi_1$.

Пусть теперь $T(g)$ — унитарное (не обязательно неприводимое) представление группы G. Тогда каждому элементу $\varphi \in R_0$ можно сопоставить оператор

$$T_\varphi = \int \varphi(g)\,T(g)\,dg.$$

Непосредственно проверяется, что

$$T_{\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2} = \lambda_1 T_{\varphi_1} + \lambda_2 T_{\varphi_2},$$
$$T_{\varphi_1 * \varphi_2} = T_{\varphi_1} T_{\varphi_2}$$

для любых φ_1, $\varphi_2 \in R_0$ и любых комплексных чисел λ_1, λ_2; следовательно, соответствие

$$\varphi \to T_\varphi$$

является представлением кольца R_0.

Итак, *каждому унитарному представлению* $T(g)$ *группы* G *отвечает представление коммутативного кольца* R_0.

Докажем, что *операторы* T_φ, $\varphi \in R_0$ *обладают следующим свойством:*

$$T(u_1)\,T_\varphi T(u_2) = T_\varphi \tag{2}$$

для любых u_1, $u_2 \in U$.

В самом деле, имеем, по определению,

$$T_\varphi = \int \varphi(g)\,T(g)\,dg;$$

следовательно,

$$T(u_1)\,T_\varphi T(u_2) = \int \varphi(g)\,T(u_1 g u_2)\,dg = \\ = \int \varphi(u_1^{-1} g u_2^{-1})\,T(g)\,dg = \int \varphi(g)\,T(g)\,dg = T_\varphi.$$

Обозначим теперь через $\mathfrak{M}$ подпространство таких векторов f пространства представления $T(g)$, что

$$T(u)f = f \quad \text{для любого} \quad u \in U.$$

Из соотношения (2) вытекает, что *операторы* T_φ, $\varphi \in R_0$, *переводят пространство* H *представления* $T(g)$ *в подпространство* $\mathfrak{M}$. *В частности, подпространство* $\mathfrak{M}$ *инвариантно относительно операторов* T_φ, $\varphi \in R_0$.

В самом деле, имеем, в силу (2),

$$T(u)(T_\varphi f) = T_\varphi f$$

для любого $f \in H$ и любого $u \in U$.

Нам нужно доказать, что если $T(g)$ — неприводимое представление, то размерность подпространства $\mathfrak{M}$ есть либо 0, либо 1.

Предположим противное: размерность пространства $\mathfrak{M}$ больше единицы. Так как кольцо R_0 коммутативно, то операторы T_φ, $\varphi \in R_0$, образуют коммутативную систему, поэтому в пространстве $\mathfrak{M}$ заведомо содержится собственное инвариантное подпространство $\mathfrak{M}' \neq 0$. Зафиксируем вектор $f' \neq 0$ из $\mathfrak{M}'$ и вектор $f \in \mathfrak{M}$, ортогональный подпространству $\mathfrak{M}'$.

Рассмотрим совокупность H' векторов вида $T_\psi f'$, где ψ пробегает множество всех финитных непрерывных функций на G, а $T_\psi = \int \psi(g) T(g)\, dg$. Пусть $\overline{H}'$ — замыкание этой совокупности в пространстве H.

Нетрудно видеть, что $\overline{H}'$ — линейное подпространство пространства H, инвариантное относительно операторов представления $T(g)$, причем $\overline{H}' \neq 0$.

Докажем, что *пространство* $\overline{H}'$ *ортогонально вектору* f. Отсюда будет следовать, что $\overline{H}'$ — собственное инвариантное подпространство пространства H, что противоречит неприводимости пространства H.

Поскольку $T(u)f' = f'$ и $T(u)f = f$ для любого $u \in U$, то имеем

$$(T_\varphi f',\ f) = (T(u_1)\, T_\varphi T(u_2)\, f',\ f)$$

для любых u_1, u_2. Проинтегрируем обе части этого равенства по u_1, u_2, полагая, что мера компактной подгруппы U

равна 1. Мы получим, что

$$(T_\varphi f', f) = (\hat{T} f', f),$$

где

$$\hat{T} = \int T(u_1) T_\varphi T(u_2)\, du_1\, du_2 = \int \varphi(g) T(u_1 g u_2)\, dg\, du_1\, du_2 =$$

$$= \int \varphi\left(u_1^{-1} g u_2^{-1}\right) T(g)\, dg\, du_1\, du_2.$$

Полагая

$$\hat{\varphi}(g) = \int \varphi(u_1 g u_2)\, du_1\, du_2,$$

мы имеем

$$\hat{T} = T_{\hat{\varphi}}.$$

Очевидно, что функция $\hat{\varphi}$ удовлетворяет для любых $u_1, u_2 \in U$ соотношению $\hat{\varphi}(u_1 g u_2) = \hat{\varphi}(g)$, а потому $\hat{\varphi} \in R_0$. Но тогда $\hat{T} f' \in \mathfrak{M}'$ и, следовательно, $(\hat{T} f', f) = 0$.

Тем самым доказано, что $(T_\varphi f', f) = 0$ для любой финитной функции φ. Следовательно, вектор f ортогонален пространству $\bar{H}'$. Теорема доказана.

5. Вторая теорема о тензорном произведении. Здесь будет установлен еще один критерий, при котором неприводимое унитарное представление $T(g)$ группы G_A является тензорным произведением представлений групп G_p.

Сначала введем, по аналогии с группой аделей A, понятие функции Шварца — Брюа на группе G_A.

Обозначим через S_∞ пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на группе G_∞ и через S_p пространство финитных кусочно-постоянных функций на группе G_p, $p = 2, 3, \ldots$

Рассмотрим функции на G_A, представимые в виде бесконечного произведения

$$\varphi(g) = \varphi_\infty(g_\infty) \varphi_2(g_2) \ldots \varphi_p(g_p) \ldots, \tag{1}$$

где множители $\varphi_p(g_p)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\varphi_\infty \in S_\infty$; $\varphi_p \in S_p$, $p = 2, 3, \ldots$

2) Для всех p, кроме конечного числа, функция $\varphi_p(g_p)$ сосредоточена на подгруппе U_p целочисленных матриц и равна на этой подгруппе тождественно единице.

Назовем функциями Шварца — Брюа на G_A функции $\varphi(g)$, представимые как конечные линейные комбинации функций вида (1).

Пусть теперь $T(g)$ — неприводимое унитарное представление группы G_A. Положим

$$T_\varphi = \int \varphi(g) T(g)\, dg.$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Если для любой функции Шварца — Брюа φ оператор T_φ является вполне непрерывным и имеет след, то представление $T(g)$ является тензорным произведением неприводимых унитарных представлений $T_p(g_p)$ групп G_p. При этом в пространствах представлений $T_p(g_p)$, начиная с достаточно большого p, имеется один и притом только один вектор, инвариантный относительно подгруппы U_p целочисленных матриц.

Доказательство. Первая часть утверждения, а именно, что представление $T(g)$ является тензорным произведением представлений $T_p(g_p)$ и что в пространствах представлений $T_p(g_p)$, начиная с достаточно большого p, содержится по крайней мере один вектор, инвариантный относительно подгруппы U_p, доказывается почти дословно так же, как и теорема п. 3. Единственная разница состоит в том, что доказательство опирается уже не на лемму 1, доказанную на стр. 360, а на следующую лемму, доказанную в п. 1 Добавления к гл. II (см. стр. 295).

Предположим, что неприводимое представление $T(g) \equiv T(g_1, g_2)$ группы $G = G_1 \times G_2$ обладает следующим свойством.

Существует функция φ, суммируемая на G вида $\varphi(g_1, g_2) = \varphi_1(g_1)\varphi_2(g_2)$, для которой оператор

$$T_\varphi = \int \varphi(g_1, g_2) T(g_1, g_2)\, dg_1\, dg_2$$

является ненулевым вполне непрерывным оператором.

Тогда представление $T(g)$ является тензорным произведением неприводимых представлений групп G_1 и G_2.

Нам осталось доказать, что в пространствах представлений $T_p(g_p)$, начиная с достаточно большого p, содержится в точности один вектор, инвариантный относительно подгруппы U_p.

По доказанному, найдется такое $p = p_0$, что при $p \geqslant p_0$ в пространстве представления $T_p(g_p)$ содержится по крайней мере один вектор, инвариантный относительно подгруппы U_p. Рассмотрим функцию Шварца — Брюа вида

$$\varphi(g) = \varphi_\infty(g_\infty)\varphi_2(g_2) \ldots \varphi_p(g_p) \ldots,$$

где при $p \geqslant p_0$ функция $\varphi_p(g_p)$ является характеристической функцией множества $U_p \subset G_p$.

Тогда имеем

$$T_\varphi = T_{\varphi_\infty} \otimes T_{\varphi_2} \otimes \ldots \otimes T_{\varphi_p} \otimes \ldots$$

и

$$\operatorname{Tr} T_\varphi = \prod_p \operatorname{Tr} T_{\varphi_p}, \tag{2}$$

где

$$T_{\varphi_p} = \int_{G_p} \varphi_p(g_p) T_p(g_p)\, dg_p$$

— оператор в пространстве представления $T_p(g_p)$, а $\operatorname{Tr} T_{\varphi_p}$ — след этого оператора, $p = \infty, 2, 3, \ldots$

При $p = \infty$ и при $p < p_0$ будем считать функции $\varphi_p(g_p)$ выбранными так, что $\operatorname{Tr} T_{\varphi_p} \neq 0$.

Заметим теперь, что при $p \geqslant p_0$ оператор T_{φ_p} имеет следующий вид:

$$T_{\varphi_p} = \int_{U_p} T_p(g_p)\, dg_p.$$

Значит, он является оператором проектирования на подпространство векторов, инвариантных относительно подгруппы U_n. Отсюда следует, что $\operatorname{Tr} T_{\varphi_p} = n_p$ при $p \geqslant p_0$, где n_p — число линейно независимых векторов в пространстве представления, инвариантных относительно подгруппы U_p.

Предположим, что $n_p > 1$ для бесконечного множества чисел p. Тогда произведение (2) расходится, а это противоречит условию о существовании следа у оператора T_φ. Утверждение доказано.

§ 4. Группа аделей группы унимодулярных матриц 2-го порядка

1. Постановка задачи и сводка результатов. Пусть G — группа унимодулярных матриц 2-го порядка над полем рациональных чисел Q и $\mathfrak{G} = G_A$ — ассоциированная с ней группа аделей. Обозначим через $\Gamma = G_Q$ подгруппу главных аделей группы G_A. Подгруппа Γ, как было показано в § 2, является дискретной подгруппой группы G_A. Настоящий параграф посвящен задаче о разложении представления группы G_A, порожденного однородным пространством $X = \Gamma \setminus G_A$, на неприводимые представления.

В гл. I была рассмотрена аналогичная задача для случая, когда $\mathfrak{G}$ — группа вещественных матриц 2-го порядка, а Γ — ее дискретная подгруппа. Методы, применяемые здесь, аналогичны методам гл. I. Задача, рассматриваемая здесь, и задача, рассматривавшаяся в гл. I, связаны даже более тесно. Эта связь будет выяснена в Добавлении к § 4.

Сформулируем основные результаты этого параграфа. Предварительно введем понятие орисферической подгруппы и орисферы (ср. гл. I, § 6). Подгруппа аделей вида

$$z = (z_\infty, z_2, \ldots, z_p, \ldots),$$

где $z_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ ($*$ означает любое p-адическое число), а также любая подгруппа, с ней сопряженная, называются орисферическими подгруппами.

Орисферами в однородном пространстве X называются орбиты орисферической подгруппы. Главный интерес для нас будут представлять компактные орисферы.

Нетрудно проверить, что преобразование $x \to xg$, $g \in G_A$, переводит орисферу снова в орисферу и компактную орисферу в компактную орисферу. В п. 3 будет показано, что в пространстве $X = \Gamma \setminus G_A$ множество всех компактных орисфер транзитивно, т. е. для любой пары компактных орисфер существует преобразование, переводящее одну из них в другую. Иными словами, пространство Ω всех компактных орисфер пространства X представляет собой однородное пространство. Как мы покажем ниже, в этом пространстве существует инвариантная мера.

Обозначим через H совокупность всех функций $f(x)$ на X с интегрируемым квадратом и через H^0 совокупность всех функций $f \in H$, интегралы которых равны нулю по всем компактным орисферам. Нетрудно видеть (ср. § 6 гл. I), что H^0 — инвариантное подпространство пространства H.

В п. 4 настоящего параграфа мы покажем, что пространство H^0 имеет дискретный спектр, т. е. является суммой счетного числа неприводимых представлений группы G_A, причем каждое из этих неприводимых представлений входит в H^0 с конечной кратностью. Отметим еще, что более детальное изучение представлений, входящих в H^0, представляет весьма большой интерес для теории чисел.

Изучение ортогонального дополнения H' в H к пространству H^0 производится следующим образом. Сопоставим каждой функции $f(x) \in H$ функцию $\varphi(\omega)$ на Ω, являющуюся интегралом функции $f(x)$ по орисфере ω. (Меры на всех орисферах нормированы так, чтобы мера любой компактной орисферы была равна единице.)

Обозначим, далее, через H_1 совокупность всех полученных таким образом функций $\varphi(\omega)$ на Ω. Очевидно, что H_1 непусто. Например, все константы содержатся в H_1. Обозначим через H_2 ортогональное дополнение в H_1 к константам.

В п. 11 мы покажем, что $H_2 \subset L_2(\Omega)$. Основной результат п. 11 состоит в том, что H_2 содержит все неприводимые представления, содержащиеся в $L_2(\Omega)$, причем каждое с единичной кратностью (в отличие от $L_2(\Omega)$, в которое они входят с кратностью 2). Мы покажем также, что пространство H_2 состоит из тех $f \in L_2(\Omega)$, которые переходят в себя при преобразовании Фурье.

2. Структура пространства X. В настоящем пункте мы покажем, что *пространство* $X = \Gamma \setminus G_A$ *представляет собой расслоенное пространство, базой которого является пространство* $G_Z \setminus G_\infty$ *классов смежности* *группы G_∞ по подгруппе целочисленных матриц G_Z, а слоем — группа $U = \prod_p U_p$, где U_p означает совокупность всех целочисленных p-адических матриц второго порядка с определителем единица.*

Вначале докажем следующую лемму.

Пусть g — матрица второго порядка с элементами из поля p-адических чисел и детерминантом 1. Тогда существует такая матрица γ с рациональными элементами, что

1) $\gamma g \in U_p$,

2) $\gamma \in U_q$ *при любом* $q \neq p$.

В самом деле, пусть $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Обозначим через a_n, b_n, c_n, d_n рациональные числа, сравнимые соответственно с a, b, c, d по модулю p^n, в знаменатели которых входит только степень p. Положим

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что a_n, b_n, c_n, d_n всегда можно подобрать так, чтобы матрица γ_n была унимодулярной (ср. аналогичное утверждение на стр. 155). Очевидно, что γ_n при всех n удовлетворяет условию 2) леммы, а при достаточно больших n удовлетворяет и условию 1). Доказательство леммы закончено.

Пусть $g = (g_\infty, g_2, \ldots, g_p, \ldots)$ — произвольный элемент группы G_A. Так как лишь конечное число $g_p \notin U_p$, то из доказанной леммы следует, что существует такое $\gamma \in \Gamma$, что $\gamma g = (h_\infty, h_2, \ldots, h_p, \ldots)$, где $h_p \in U_p$ при $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Иными словами, в каждом классе смежности Γg существует такой элемент $h \in \Gamma g$, что $h_p \in U_p$ при всех p, кроме $p = \infty$.

Рассмотрим, при каких условиях два элемента h указанного вида принадлежат одному и тому же классу смежности Γg группы G по Γ. Очевидно, что если $h, h' \in \Gamma g$, то $h'_\infty = \gamma h_\infty$, где γ — некоторая целочисленная матрица, так как при $p = 2, 3, 5, \ldots$ h_p и $h'_p = \gamma h_p$ — целочисленные

p-адические матрицы. Иными словами, первые координаты h_∞ этих элементов принадлежат одному и тому же классу смежности $G_Z h_\infty$ группы G_∞ по подгруппе G_Z всех целочисленных матриц.

Тем самым установлено отображение

$$X = \Gamma \setminus G_A \xrightarrow{\tau} G_Z \setminus G_\infty$$

пространства X в пространство классов смежности группы G_∞ по подгруппе G_Z. Нетрудно убедиться, что это отображение τ непрерывно.

Найдем полные прообразы элементов из $G_Z \setminus G_\infty$ при отображении τ. Очевидно, что $\tau(x) = \tau(x')$ тогда и только тогда, когда $x' = xu$, где u принадлежит подгруппе U элементов вида

$$(1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p,\ \ldots),\quad u_p \in U_p. \tag{1}$$

С другой стороны, легко проверить, что $xu = x$ лишь при $u = 1$. Значит, полный прообраз $\tau^{-1}(y)$ произвольного элемента $y \in G_Z \setminus G_\infty$ изоморфен группе U.

Итак, установлено, что X является расслоенным пространством с базой $G_Z \setminus G_\infty$ и слоями, изоморфными U.

Проверка, что полученное расслоение локально имеет структуру прямого произведения, производится тривиально. Отметим, что полученное расслоенное пространство не является, конечно, прямым произведением. Группа монодромии его, как нетрудно проверить, изоморфна группе G_Z.

Отметим без доказательства, что аналогичный результат о структуре однородного пространства $X = G_Q \setminus G_A$ справедлив и для любой линейной алгебраической группы G.

Напомним, что однородное пространство $G_Z \setminus G_\infty$ группы G_∞ имеет конечный объем (см. Добавление к гл. I). Поскольку, с другой стороны, U — компактная группа, то из полученного здесь результата непосредственно следует: *объем однородного пространства X конечен.*

3. Описание пространства $\mathfrak{Q}$ всех компактных орисфер пространства X. Напомним, что орисферами в пространстве X мы назвали орбиты орисферической подгруппы, т. е. подгруппы $gZ_A g^{-1}$, где Z_A — группа аделей вида

$$z = (z_\infty,\ z_2,\ \ldots,\ z_p,\ \ldots),$$

у которых $z_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ ($*$ означает любое p-адическое число), а g — произвольный фиксированный элемент из G_A.

Опишем пространство Ω.

Обозначим через D_Q подгруппу группы Γ, состоящую из аделей вида

$$(\delta, \delta, \ldots, \delta, \ldots),$$

где

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix},$$

λ пробегает все рациональные числа, отличные от 0. Рассмотрим подгруппу $D_Q Z_A$, порожденную подгруппами D_Q и Z_A.

В этом пункте мы докажем следующую теорему.

Пространство Ω компактных орисфер является однородным пространством со стационарной группой $D_Q Z_A$.

Доказательство разобьем на несколько этапов. Сначала рассмотрим орисферу $x_z = x_0 z$, где x_0 — точка пространства $X = \Gamma \setminus G_A$, отвечающая единичному классу, а z пробегает группу Z_A. Покажем, что *орисфера $x_z = x_0 z$ компактна.*

Поскольку стационарной подгруппой точки x_0 является группа Γ, то, очевидно, множество точек орисферы $x_z = x_0 z$ гомеоморфно пространству $Z_Q \setminus Z_A$. Нам нужно, таким образом, доказать компактность пространства $Z_Q \setminus Z_A$.

Заметим, что группа Z_A изоморфна группе A аделей

$$a = (a_\infty, a_z, \ldots, a_p, \ldots),$$

где a_∞ пробегает аддитивную группу вещественных чисел, a_p — аддитивную группу p-адических чисел, причем все a_p, начиная с некоторого p, являются целыми p-адическими числами. Таким образом, имеем

$$Z_Q \setminus Z_A \cong Q \setminus A,$$

где Q — подгруппа главных аделей группы A. Компактность пространства $Q \setminus A$ была нами уже доказана в п. 4 § 1.

Тем самым доказана компактность орисферы $x_z = x_0 z$.

Покажем теперь, что *любая компактная орисфера в X может быть получена сдвигом орисферы $x_z = x_0 z$, т. е. множество компактных орисфер транзитивно.*

Поскольку сдвиг компактной орисферы есть снова компактная орисфера, то нам достаточно рассмотреть орисферы вида $x_z = x_0 g z g^{-1}$. Итак, пусть орисфера $x_z = x_0 g z g^{-1}$ компактна. Тогда пересечение $\Gamma \cap g Z_A g^{-1}$ группы $g Z_A g^{-1}$ со стационарной подгруппой Γ точки x_0 отлично от единичной подгруппы. Итак, существует главный адель

$$\gamma = (\gamma, \gamma, \ldots, \gamma, \ldots),$$

$\gamma \neq e$, представимый в виде

$$\gamma = g z g^{-1}, \tag{1}$$

где z — некоторый элемент из Z_A.

Из разложения $\gamma = g z g^{-1}$ следует, что собственные значения рациональной матрицы γ равны 1. Но в таком случае найдется такая рациональная матрица γ_0, что $\gamma_0^{-1} \gamma \gamma_0$ есть матрица вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_0 & 1 \end{pmatrix}$. Обозначая той же буквой γ_0 главный адель $\gamma_0 = (\gamma_0, \ldots, \gamma_0, \ldots)$, имеем

$$\gamma_0^{-1} \gamma \gamma_0 = z_0 \in Z_A.$$

Итак, мы имеем

$$\gamma = \gamma_0 z_0 \gamma_0^{-1},$$

где $\gamma_0 \in \Gamma$, $z_0 \in Z \cap \Gamma = Z_Q$, а потому равенство (1) можно переписать в виде

$$\gamma_0 z_0 \gamma_0^{-1} = g z g^{-1}. \tag{2}$$

Но из равенства (2) следует, что адель $\gamma_0^{-1} g$ имеет вид

$$\gamma_0^{-1} g = k = (k_\infty, k_2, \ldots, k_p, \ldots), \tag{3}$$

где k_p — треугольные матрицы вида

$$k_p = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}. \tag{3'}$$

Итак, мы видим, что если орисфера $x_z = x_0 g z g^{-1}$ компактна, то адель g имеет следующий вид:

$$g = \gamma_0 k,$$

где $\gamma_0 \in \Gamma$, а k — адель вида (3). Но так как, очевидно,

$$k Z_A k^{-1} = Z_A,$$

то уравнение орисферы $x_z = x_0 g z g^{-1}$ можно записать в виде $x_z = x_0 \gamma_0 z \gamma_0^{-1}$ или, поскольку $x_0 \gamma_0 = x_0$, в виде $x_z = x_0 z \gamma_0^{-1}$. Тем самым доказано, что любая компактная орисфера в пространстве X может быть получена сдвигом орисферы $x_0 z$.

Итак, мы доказали, что любая компактная орисфера в пространстве $X = \Gamma \setminus G_A$ задается уравнением

$$x_z = x_0 z g,$$

где x_0 — точка пространства X, отвечающая единичному классу. Следовательно, множество Ω компактных орисфер в пространстве X является однородным пространством относительно группы G_A.

Наконец, покажем, что стационарной подгруппой орисфер $x_z = x_0 z$ является группа $D_Q Z_A$. Пусть g переводит орисферу x_z в себя. Тогда точку x_0 можно представить в виде $x_0 = x_0 z g$. Следовательно, существует такое $\gamma \in \Gamma$, что $1 = \gamma z g$, где 1 — единица группы G_A. Отсюда имеем: $g = z^{-1} \gamma^{-1}$, где $z^{-1} \in Z_A$, $\gamma^{-1} \in \Gamma$.

Не нарушая общности, можно предполагать, что z — единичный элемент. Тогда $g = \gamma_0$ есть главный адель.

Из совпадения орисфер $x_0 z$ и $x_0 z \gamma_0$ следует, что любой элемент $z \in Z_A$ представим в виде

$$z = \gamma z' \gamma_0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad z' \in Z_A.$$

Перейдем в этом равенстве от аделей к их первым компонентам, полагая

$$z_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad z'_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x' & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \gamma_0^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}.$$

Мы получим, что

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 + a_0 x & d_0 + b_0 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bx' & b \\ c + dx' & c \end{pmatrix},$$

откуда, в частности, имеем

$$c = d_0 + b_0 x.$$

Так как x пробегает все вещественные числа, а c — рациональное число, то из этого равенства следует, что $b_0 = 0$. Но тогда очевидно, что $\gamma_0 \in D_Q Z$.

Мы доказали, что $D_Q Z_A$ является стационарной подгруппой пространства орисфер Ω. Теорема доказана.

4. Выделение дискретного спектра. Рассмотрим в пространстве $L_2(X)$, $X = \Gamma \setminus G_A$, совокупность функций f, интегралы которых по любой компактной орисфере равны нулю.

Согласно п. 3, это условие на f записывается в следующем виде:

$$\int_{Z_Q \setminus Z_A} f(x_0 z g)\, dz = 0 \tag{1}$$

для любого $g \in G_A$ (x_0 обозначает точку пространства X, отвечающую единичному классу).

Обозначим пространство таких функций через H^0. Легко убедиться (ср. гл. I, § 6), что H^0 — замкнутое подпространство и что оно инвариантно относительно операторов представления группы G_A:

$$T(g) f(x) = f(xg).$$

В этом пункте будет доказано, что *пространство H^0 разлагается в сумму не более чем счетного числа инвариантных неприводимых подпространств, причем каждое из неприводимых представлений входит в H^0 с конечной кратностью.*

Как было показано в § 2 гл. I, достаточно доказать, что операторы $T_\varphi = \int_{G_A} \varphi(g) T(g)\, dg$ в пространстве H^0 вполне непрерывны для некоторого всюду плотного множества непрерывных положительно определенных функций $\varphi(g)$. В свою очередь, чтобы доказать, что положительно определенный оператор T_φ вполне непрерывен, достаточно доказать, что его след конечен. Итак, докажем, что след оператора T_φ в пространстве H^0 конечен для любой положительно определенной функции Шварца — Брюа φ *).

Согласно § 6 гл. I, пространство $G_Z \setminus G_\infty$ можно представить в виде суммы цилиндрического множества E и компактного множества F.

*) Определение функций Шварца — Брюа на G_A см. в § 3, п. 5.

Рассмотрим отображение

$$\tau:\quad X \to G_Z \setminus G_\infty,$$

определенное в п. 2. Легко видеть, что $\tau^{-1}(E)$ является цилиндрическим множеством в X, а $\tau^{-1}(F)$ — компактным множеством.

Обозначим через H_F совокупность всех функций из $L_2(X)$, равных нулю вне $\tau^{-1}(F)$, а через H_E^0 — совокупность всех функций из $L_2(X)$, равных нулю вне $\tau^{-1}(E)$, у которых равны нулю интегралы по орисферам, на которые расслаивается $\tau^{-1}(E)$.

Очевидно, что $H^0 \subset H_F + H_E^0$. Поэтому след оператора *) T_φ на H^0 не превосходит суммы следов на H_F и на H_E^0. Оператор T_φ положительно определен и является интегральным оператором (см. гл. I) с ядром $K(x_1, x_2)$, которое ограничено в любой компактной подобласти X. Поэтому его след на H_F конечен. Доказательство конечности следа оператора T_φ на H_E^0 проводится так же, как и в § 6 гл. I.

5. Пространства Y и Ω. Основной целью дальнейшего исследования будет изучение спектра представления в пространстве $L_2(X)/H^0$. Мы увидим позже, что задача о спектре пространства $L_2(X)/H^0$ может быть сведена к более простой задаче—изучению спектра представления в пространстве $L_2(\Omega)$, где $\Omega = D_Q Z_A \setminus G_A$. Эту более простую задачу мы и решим в первую очередь.

Начнем с описания пространства $Y = Z_A \setminus G_A$, которое по аналогии со случаем группы вещественных матриц второго порядка удобно называть **основным аффинным пространством** группы G_A.

Покажем, что точки пространства Y можно задавать бесконечными последовательностями

$$y = (y_\infty, y_2, \ldots, y_p, \ldots), \tag{1}$$

где $y_p = (y_p^1, y_p^2)$ — вектор двумерного аффинного пространства над полем p-адических чисел, $y_p \neq 0$, причем,

---

*) Под следом оператора T_φ на пространстве H' (которое, вообще говоря, не инвариантно относительно оператора T_φ) понимается след оператора $PT_\varphi P$, где P — оператор проектирования на подпространство H' (ср. § 6 гл. I).

начиная с достаточно большого p, числа y_p^1, y_p^2 — целые и хотя бы одно имеет норму 1.

В самом деле, сопоставим каждому элементу

$$g=(g_\infty, g_2, \ldots, g_p, \ldots)$$

из G_A последовательности

$$y=(y_\infty, y_2, \ldots, y_p, \ldots),$$

где y_p — верхняя строка матрицы g_p, $p=\infty, 2, 3, \ldots$ Очевидно, что отображение $g \to y$ есть отображение группы G_A на пространство Y всех последовательностей вида (1). Найдем стационарную подгруппу пространства Y. Зафиксируем в Y точку

$$y^0=(y_\infty^0, y_2^0, \ldots, y_p^0, \ldots),$$

где $y_p^0=(1, 0)$. Очевидно, что стационарной подгруппой точки y^0 является Z_A. Таким образом, $Y=Z_A \setminus G_A$. Утверждение доказано.

Из описания пространства Y видно, что оно естественно вкладывается в двумерное пространство A^2 над группой аделей A. При этом оно образует всюду плотное подмножество в A^2 (подобно тому, как группа иделей A^* образует всюду плотное подмножество в группе аделей A).

Покажем, что *Y является подмножеством полной меры в пространстве A^2, т. е. для любого измеримого множества $F \subset A^2$ меры множеств F и $F \cap Y$ совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим подмножества $F^{(p_0)}$ векторов вида

$$y=(y_\infty, y_2, \ldots, y_p, \ldots),$$

где y_p при $p \leqslant p_0$ пробегает измеримое множество в Q_p^2 с мерой μ_p и $|y_p| \leqslant 1$ при $p > p_0$. Ясно, что объединение таких множеств есть все пространство A^2, а потому утверждение достаточно доказать только для этих множеств $F^{(p_0)}$.

Поскольку мера множества точек $y_p \in Q_p^2$ таких, что $|y_p| \leqslant 1$, равна 1, то мера $\mu(F^{(p_0)})$ множества $F^{(p_0)}$ равна $\mu_\infty \mu_2 \ldots \mu_{p_0}$. Вычислим теперь меру $\mu(F^{(p_0)} \cap Y)$ множества $F^{(p_0)} \cap Y$. Обозначим через $F_p^{(p_0)}$, $p > p_0$, подмножество векторов из $F^{(p_0)}$, у которых $|y_{p'}|=1$ при $p' \geqslant p$. Так как мера множества точек $y_{p'} \in Q^2_{p'}$, таких, что $|y_{p'}|=1$, равна $1-\frac{1}{p^2}$, то мы имеем

$$\mu\left(F_p^{(p_0)}\right) = \mu_\infty \mu_2 \ldots \mu_{p_0} \prod_{p' \geqslant p}\left(1-\frac{1}{p'^2}\right) = \\ = \mu\left(F^{(p_0)}\right) \prod_{p' \geqslant p}\left(1-\frac{1}{p'^2}\right).$$

Очевидно, что множество $F^{(p_0)} \cap Y$ является объединением множеств $F_p^{(p_0)}$, а потому

$$\mu\left(F^{(p_0)} \cap Y\right) = \lim_{p \to \infty} \mu\left(F_p^{(p_0)}\right) = \mu\left(F^{(p_0)}\right) \lim_{p \to \infty} \prod_{p' \geqslant p}\left(1-\frac{1}{p'^2}\right).$$

Из того, что произведение $\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$ сходится $\left(\text{оно равно } \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}\right)$, следует, что $\lim_{p \to \infty} \prod_{p' \geqslant p}\left(1-\frac{1}{p'^2}\right) = 1$. Таким образом, $\mu\left(F^{(p_0)} \cap Y\right) = \mu\left(F^{(p_0)}\right)$, что и требовалось доказать.

Группа G_A действует в Y следующим образом: элемент $g=(g_\infty, g_2, \ldots, g_p, \ldots)$ группы G_A переводит точку $y=(y_\infty, y_2, \ldots, y_p, \ldots)$ пространства Y в точку

$$yg = (y_\infty g_\infty, y_2 g_2, \ldots, y_p g_p, \ldots), \tag{2}$$

где $y_p g_p$ означает результат применения матрицы g_p к вектору-строке y_p.

Заметим, что (2) определяет действие группы G_A на всем пространстве A^2. Относительно G_A это пространство распадается на транзитивные части, одна из которых есть Y, а другие имеют вид aY, $a \in A$.

Теперь установим связь между пространством Y и пространством орисфер Ω.

Определим в Y действие группы иделей A^*. Именно, каждому иделю $\lambda=(\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots)$ сопоставим преобразование $y \to \lambda y$ в пространстве Y, переводящее каждую точку $y=(y_\infty, y_2, \ldots, y_p, \ldots)$ из Y в точку

$$\lambda y = (\lambda_\infty y_\infty, \lambda_2 y_2, \ldots, \lambda_p y_p, \ldots). \tag{3}$$

Из описания пространства орисфер Ω, полученного в п. 3, непосредственно следует, что

$$\Omega = Q^* \setminus Y,$$

где Q^* — подгруппа главных иделей. Таким образом, Ω как фактор-пространство пространства Y по дискретной подгруппе локально-изоморфно пространству Y.

Укажем, как определяется инвариантное интегрирование на Y и Ω. Пусть dy_p — инвариантная мера на аффинной плоскости $y_p = (y_p^1, y_p^2)$, $p = \infty, 2, 3, \ldots$ При $p = 2, 3, \ldots$ нормируем ее следующим образом:

$$\int\limits_{|y_p| \leqslant 1} dy_p = 1, \quad |y_p| = \max(|y'_p|_p, |y_p^2|_p). \tag{4}$$

Легко убедиться, что инвариантное интегрирование на Y выражается следующей формулой:

$$\int f(y)\, dy = \lim_{p \to \infty} \int f(y_\infty, y_2, \ldots, y_p, \ldots)\, dy_\infty\, dy_2 \ldots dy_p. \tag{5}$$

Таким образом, инвариантная мера dy на Y выражается следующей символической формулой:

$$dy = dy_\infty\, dy_2 \ldots dy_p \ldots \tag{6}$$

Инвариантное интегрирование на Ω определяется той же формулой, так как Ω локально-изоморфно Y.

6. Разложение представлений, порожденных пространствами Y и Ω, на неприводимые представления. В п. 5 мы показали, что в однородных пространствах Y и Ω существует инвариантная мера. Следовательно, в пространствах $L_2(Y)$ и $L_2(\Omega)$ операторы сдвига $T(g) f(x) = f(xg)$ определяют унитарное представление.

Наша задача в том, чтобы разложить эти представления на неприводимые.

Рассмотрим вначале пространство $L_2(Y)$. Рассмотрим множество Π всех характеров π группы иделей A^* (это множество было описано в п. 9 § 1 настоящей главы). Положим

$$\varphi_\pi(y) = \int\limits_{A^*} f(\lambda y)\, \pi^{-1}(\lambda) |\lambda|\, d^*\lambda, \tag{1}$$

где $d^*\lambda$ — инвариантная мера на группе A^* всех иделей (см. п. 7 § 1) *), $f(y) \in L_2(Y)$.

Нетрудно видеть, что функция φ_π удовлетворяет следующему условию однородности:

$$\varphi_\pi(\lambda y) = \pi(\lambda) |\lambda|^{-1} \varphi_\pi(y), \quad \lambda \in A^*. \tag{2}$$

Во множестве функций, удовлетворяющих условию (2), тем же способом, как для группы матриц 2-го порядка над полем, можно определить строение гильбертова пространства. С этой целью выберем в Y подмножество T, обладающее следующим свойством: каждая точка $y \in Y$ однозначно представима в виде

$$y = \lambda t, \quad \lambda \in A^*, \quad t \in T. \tag{3}$$

Зададим в T меру dt так, чтобы было

$$dy = |\lambda|^2 d^*\lambda\, dt. \tag{4}$$

Во множестве функций на Y, удовлетворяющих условию (2), определим скалярное произведение

$$(\varphi_\pi, \psi_\pi) = \int_T \varphi_\pi(t) \overline{\psi_\pi(t)}\, dt. \tag{5}$$

Обозначим полученное гильбертово пространство через H_π. Непосредственно проверяется, что скалярное произведение (5) инвариантно относительно операторов $T_\pi(g)$:

$$T_\pi(g) \varphi_\pi(y) = \varphi_\pi(yg). \tag{6}$$

Таким образом, представление $T_\pi(g)$ унитарно в пространстве H_π.

Из результатов § 3 следует, что *это представление неприводимо*. В самом деле, пусть

$$\pi = (\pi_\infty, \pi_2, \ldots, \pi_p, \ldots).$$

Тогда наше представление является, в смысле § 3, тензорным произведением унитарных представлений $T_{\pi_p}(g_p)$ групп G_p, $p = \infty, 2, 3, \ldots$, определяемых следующим образом. Представление $T_{\pi_p}(g_p)$ задается в пространстве функций

*) Напоминаем, что $|\lambda| = |\lambda_\infty|_\infty |\lambda_2|_2 \ldots |\lambda_p|_p \ldots$

$\varphi_{\pi_p}(y_p)$, $y_p=(y_p^1, y_p^2)$, удовлетворяющих условию однородности:

$$\varphi_{\pi_p}(\lambda_p y_p)=\pi_p(\lambda_p)\,|\lambda_p|_p^{-1}\,\varphi_{\pi_p}(y_p).$$

Оператор представления $T_{\pi_p}(g_p)$ группы G_p задается по формуле

$$T_{\pi_p}(g_p)\,\varphi_{\pi_p}(y_p)=\varphi_{\pi_p}(y_p g_p).$$

Известно (см. гл. II), что такие представления группы G_p неприводимы. Следовательно, представление $T_\pi(g)$ группы G_A, будучи тензорным произведением неприводимых представлений групп G_p, само неприводимо *).

Будем называть представление $T_\pi(g)$ группы G_A *представлением основной серии*, отвечающим характеру π.

Отметим, что в силу условия однородности (2), пространство представления H_π можно реализовать как пространство функций $\varphi_\pi(t)$, $t\in T$, удовлетворяющих условию

$$\|\varphi_\pi\|^2=\int_T |\varphi_\pi(t)|^2\,dt<\infty.$$

При этом оператор представления $T_\pi(g)$ задается следующей формулой:

$$T_\pi(g)\,\varphi_\pi(t)=\pi(\lambda')\,|\lambda'|^{-1}\,\varphi_\pi(t'),$$

где $\lambda'\in A^*$ и $t'\in T$ определяются из соотношения $tg=\lambda' t'$.

Окончательный результат следующий.

Разложение представления группы G_A в $L_2(Y)$:

$$T(g)\,f(y)=f(yg) \tag{7}$$

на неприводимые представления осуществляется следующими формулами:

$$f(y)=\int_\Pi \varphi_\pi(y)\,d\pi, \tag{8}$$

*) Точнее, представление T_{π_p} неприводимо только если $\pi_p\neq \mathrm{sign}_\tau$. Однако совокупность тех $\pi\in\Pi$, для которых $\pi_p=\mathrm{sign}_\tau$ хотя бы для одного p, имеем меру нуль.

где

$$\varphi_\pi(y) = \int\limits_{A^*} f(\lambda y)\,\pi^{-1}(\lambda)\,|\lambda|\,d^*\lambda. \tag{9}$$

При этом имеет место формула Планшереля

$$\int\limits_{Y} |f(y)|^2\,dy = \int\limits_{\Pi} \|\varphi_\pi\|^2\,d\pi, \tag{10}$$

где $d\pi$ — мера на множестве Π всех характеров группы иделей A^*, нормированная так, чтобы имело место соотношение

$$\int\limits_{\Pi}\int\limits_{A^*} u(\lambda)\,\pi(\lambda)\,d^*\lambda\,d\pi = u(1).$$

Когда функция $f(y)$ преобразуется по формуле (7), ее компонента $\varphi_\pi(t)$ преобразуется по формуле

$$T_\pi(g)\,\varphi_\pi(t) = \pi(\lambda')\,|\lambda'|^{-1}\,\varphi_\pi(t'), \tag{11}$$

где $\lambda' \in A^*$ и $t' \in T$ определяются из соотношения $tg = \lambda' t'$. Таким образом, в пространстве функций $\varphi_\pi(t)$ действует неприводимое унитарное представление основной серии, отвечающее характеру π.

Доказательство. Разложение (8) непосредственно следует (по формуле обратного преобразования Фурье) из определения функции $\varphi_\pi(y)$ (формула (9)). Отсюда же по формуле Планшереля для преобразования Фурье следует, что

$$\int\limits_{A^*} |f(\lambda t)|^2\,|\lambda|^2\,d^*\lambda = \int\limits_{\Pi} |\varphi_\pi(t)|^2\,d\pi.$$

Если обе части этого равенства проинтегрировать по t, то мы получим непосредственно формулу Планшереля (10). Остается показать, что функции $\varphi_\pi(t)$ преобразуются по формуле (11). Для этого заметим, что когда функции $f(y)$ преобразуются по формуле $T(g)\,f(y) = f(yg)$, функция $\varphi_\pi(y)$ преобразуется по такой же формуле

$$T(g)\,\varphi_\pi(y) = \varphi_\pi(yg).$$

С другой стороны, функция $\varphi_\pi(y)$ удовлетворяет следующему условию однородности:

$$\varphi_\pi(\lambda y) = \pi(\lambda)\,|\lambda|^{-1}\,\varphi_\pi(y).$$

Поэтому, если перейти от функций $\varphi_\pi(y)$ к их значениям $\varphi_\pi(t)$ на T, то формула для $T(g)$ примет искомый вид (11). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу о разложении представления в $L_2(\Omega)$ на неприводимые представления.

Заметим вначале, что функции из Ω можно рассматривать как функции на Y, инвариантные относительно преобразований

$$f(y) \to f(\lambda y), \quad \lambda \in Q^*,$$

где Q^* означает совокупность всех главных иделей.

Обозначим через Π^* множество всех характеров группы A^*/Q^*. Имеет место следующая теорема.

Разложение представления группы G_A в $L_2(\Omega)$ на неприводимые представления осуществляется следующими формулами:

$$f(y) = \int_{\Pi^*} \varphi_\pi(y)\, d\pi, \tag{12}$$

где

$$\varphi_\pi(y) = \int_{A^*/Q^*} f(\lambda y)\, \pi^{-1}(\lambda) |\lambda|\, d^*\lambda. \tag{13}$$

Имеет место формула Планшереля

$$\int_{Q^* \setminus Y} |f(y)|^2\, dy = \int_{\Pi^*} \|\varphi_\pi\|^2\, d\pi, \tag{14}$$

где $d\pi$ — мера на множестве Π^* всех характеров группы A^*/Q^*, нормированная так, что имеет место соотношение:

$$\int_{\Pi^*} \int_{A^*/Q^*} u(\lambda)\, \pi(\lambda)\, d\lambda^*\, d\pi = u(1).$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Выясним теперь, с какой кратностью каждое представление основной серии входит в $L_2(Y)$ и в $L_2(\Omega)$. Иными словами, нам нужно выяснить, какие представления $T_\pi(g)$, входящие в разложение $L_2(Y)$ и $L_2(\Omega)$, между собой эквивалентны.

Пусть $T_\pi(g)$, $T_{\pi'}(g)$ — два неприводимых представления группы G_A, отвечающие соответственно характерам

$$\pi = (\pi_\infty, \pi_2, \ldots, \pi_p, \ldots) \text{ и } \pi' = (\pi'_\infty, \pi'_2, \ldots, \pi'_p, \ldots). \tag{15}$$

Согласно § 3, эти представления эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие представления

$$T_{\pi_p}(g_p) \quad \text{и} \quad T_{\pi'_p}(g_p) \tag{16}$$

групп G_p, $p = \infty, 2, 3, \ldots$

С другой стороны, представления (16) группы G_p эквивалентны тогда и только тогда, когда $\pi'_p = \pi_p^{\varepsilon_p}$, где $\varepsilon_p = \pm 1$.

Итак, два представления $T_\pi(g)$ и $T_{\pi'}(g)$ группы G_A эквивалентны тогда и только тогда, когда $\pi'_p = \pi_p^{\varepsilon_p}$, $\varepsilon_p = \pm 1$, $p = \infty, 2, 3, \ldots$

Отсюда мы сразу заключаем, что *каждое представление $T_\pi(g)$ входит в $L_2(Y)$ с бесконечной кратностью.*

Иная картина имеет место в случае пространства $L_2(\Omega)$. Это пространство, как мы уже знаем, разлагается на представления $T_\pi(g)$, где π пробегает множество характеров, равных единице на подгруппе главных иделей.

Мы покажем, что *два таких характера π и π' задают эквивалентные представления тогда и только тогда, когда $\pi' = \pi^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$. Отсюда будет следовать, что каждое представление $T_\pi(g)$ входит в $L_2(\Omega)$ с кратностью 2.*

Итак, пусть два характера π и π', равных единице на группе главных иделей, задают эквивалентные представления. Характер π имеет, как известно, следующий вид:

$$\pi(\lambda) = \pi_\infty(\lambda_\infty)\,\pi_2(\lambda_2)\ldots\pi_p(\lambda_p)\ldots,$$

где

$$\pi_\infty(\lambda_\infty) = |\lambda_\infty|_\infty^s \operatorname{sign}^\nu \lambda_\infty,$$

$$\pi_p(\lambda_p) = |\lambda_p|_p^{s_p}\,\theta_p(\lambda_p), \quad \theta_p(p) = 1, \quad p = 2, 3, 5, \ldots$$

Здесь s, s_p — мнимые числа, $\nu = 0, 1$. При этом лишь конечное число характеров θ_p отлично от единицы Аналогично,

$$\pi'(\lambda) = \pi'_\infty(\lambda_\infty)\,\pi'_2(\lambda_2)\ldots\pi'_p(\lambda_p)\ldots,$$

где

$$\pi'_\infty(\lambda_\infty) = |\lambda_\infty|_\infty^{s'} \operatorname{sign}^{\nu'} \lambda_\infty,$$

$$\pi'_p(\lambda_p) = |\lambda_p|^{s'_p}\,\theta'_p(\lambda_p), \quad \theta'_p(p) = 1.$$

Условие, что характерам π и π' отвечают эквивалентные представления, дает

$$s' = \pm s, \quad \nu' = \nu,$$
$$s'_p = \varepsilon_p s_p, \quad \theta'_p = \theta_p^{\varepsilon_p}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_p = \pm 1, \; p = 2, 3, \ldots$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $s' = s$. Нам нужно доказать, что тогда $\pi' = \pi$.

Поскольку характер π равен единице на подгруппе главных аделей, то $\pi(p) = 1$ для любого простого числа p, т. е.

$$p^{s-s_p}\theta_2(p) \ldots \theta_p(p) \ldots = 1. \tag{17}$$

Заметим, что каждый из характеров θ_p имеет конечный порядок, и что среди них имеется лишь конечное число отличных от единицы. Следовательно, существует такое целое n, что $\theta_p^n = 1$ для любого p. Но тогда из равенства (17) следует, что

$$p^{n(s-s_p)} = 1,$$

откуда

$$s - s_p = \frac{2\pi i}{n} k \ln p, \tag{18}$$

где k — некоторое целое число.

Аналогично мы получаем

$$s - \varepsilon_p s_p = \frac{2\pi i}{n} k' \ln p. \tag{19}$$

Если $\varepsilon_p = -1$, то из равенств (18) и (19) мы получаем

$$s = \frac{\pi i}{n} k'' \ln p, \tag{20}$$

где k'' — целое число.

Из равенства (20) следует, что $\varepsilon_p = -1$ не более чем для одного простого p. В самом деле, если бы было $\varepsilon_p = -1$ и $\varepsilon_q = -1$, $q \neq p$, то мы имели бы $\frac{\ln p}{\ln q} = r$, где r — некоторое рациональное число, что невозможно.

Итак, либо $\varepsilon_p = 1$ для всех p, либо $\varepsilon_p = 1$ для всех p, кроме некоторого $p = p_0$. В первом случае мы имеем $\pi' = \pi$. Во втором случае мы имеем $\pi'(\lambda) = \pi(\lambda)\pi_{p_0}^{-2}(\lambda_{p_0})$. Но тогда, поскольку $\pi(\lambda) = \pi'(\lambda) = 1$ на подгруппе главных иделей,

$\pi^2_{p_0}(r)=1$ для любого рационального числа $r\neq 0$. Так как рациональные числа образуют всюду плотное множество в мультипликативной группе p-адических чисел, отсюда следует, что $\pi^2_p\equiv 1$. Следовательно, и в этом случае имеем $\pi(\lambda)=\pi'(\lambda)$. Утверждение доказано.

7. Функции Шварца — Брюа в пространствах Y и Ω. В п. 1 § 2 было введено понятие функции Шварца — Брюа в n-мерном векторном пространстве A^n над группой аделей A. Именно, функцией Шварца—Брюа на A^n называются конечные линейные комбинации функций вида

$$\varphi(y)=\varphi_\infty(y_\infty)\varphi_2(y_2)\,\ldots\,\varphi_p(y_p)\,\ldots,$$

где $\varphi_\infty(y_\infty)$ — бесконечно дифференцируемая, быстро убывающая функция в n-мерном векторном пространстве R^n над полем вещественных чисел, $\varphi_p(y_p)$ — финитная, кусочно-постоянная функция в n-мерном пространстве Q_p^n над полем p-адических чисел, причем все функции $\varphi_p(y_p)$, кроме конечного числа, имеют следующий вид:

$$\varphi_p(y_p)=\begin{cases}1, & \text{когда } |y_p|\leqslant 1,\\ 0, & \text{когда } |y_p|>1.\end{cases}$$

Основное аффинное пространство Y естественным образом вкладывается в пространство A^2. Оно состоит из всех элементов $y\in A^2$, у которых $y_p\neq 0$, причем $|y_p|=1$, начиная с достаточно большого p.

Поэтому каждой функции φ Шварца — Брюа на A^2 можно сопоставить функцию на Y — ее ограничение на $Y\subset A^2$. Это ограничение функции φ мы и назовем функцией Шварца — Брюа на Y.

Легко убедиться, что если функция Шварца—Брюа на A^2 не равна тождественно нулю, то она не равна тождественно нулю и на Y. Следовательно, соответствие, сопоставляющее функциям Шварца — Брюа на A^2 функции Шварца — Брюа на Y, является взаимно однозначным. Иными словами, *каждая функция Шварца — Брюа на Y однозначно продолжается до функции Шварца — Брюа на A^2.*

Рассмотрим теперь функции вида

$$\psi(y)=\sum_{\lambda\in Q^*}\varphi(\lambda y), \tag{1}$$

где $\varphi(y)$ — функция Шварца — Брюа на Y. Нетрудно проверить, что ряд (1) сходится и что функция $\psi(y)$ непрерывна на Y. Поскольку, очевидно,

$$\psi(\lambda y)=\psi(y)$$

для любого $\lambda \in Q^*$, то $\psi(y)$ можно рассматривать как функцию на $\Omega = Q^* \setminus Y$.

Функциями Шварца — Брюа на Ω будем называть функции $\psi(y)$, представимые в виде (1), где φ — функция Шварца — Брюа на Y.

Справедливо следующее утверждение, проверка которого предоставляется читателю.

Функции Шварца — Брюа на Y принадлежат пространству $L_2(Y)$ и образуют в нем всюду плотное множество. Аналогично, функции Шварца — Брюа на Ω принадлежат пространству $L_2(\Omega)$ и образуют в нем всюду плотное множество.

8. Преобразование Фурье в пространствах $L_2(Y)$ и $L_2(\Omega)$. В п. 5 § 2 было определено преобразование Фурье в n-мерном пространстве A^n над кольцом аделей A. Для случая двумерного пространства A^2 нам будет здесь удобно несколько изменить это определение. Именно, *преобразованием Фурье функции* $\varphi(y)=\varphi(y^{(1)}, y^{(2)})$ *из* $L_2(A^2)$ *будем называть функцию* $\tilde{\varphi}(y^{(1)}, y^{(2)})$, *определенную следующей формулой*:

$$\tilde{\varphi}(y^{(1)}, y^{(2)}) = \int \varphi(z^{(1)}, z^{(2)})\,\chi_0(z^{(1)}y^{(2)} - z^{(2)}y^{(1)})\,dz^{(1)}\,dz^{(2)}. \tag{1}$$

Здесь $\chi_0(t)$—аддитивный характер на A, описанный в п. 5 § 1.

В п. 5 § 2 преобразование Фурье было определено другой формулой

$$\tilde{\varphi}(y^{(1)}, y^{(2)}) = \int \varphi(z^{(1)}, z^{(2)})\,\chi_0(z^{(1)}y^{(1)} + z^{(2)}y^{(2)})\,dz^{(1)}\,dz^{(2)}.$$

Ясно, что указанные там основные свойства преобразования Фурье сохраняются и при новом определении.

Удобство нового определения преобразования Фурье в том, что это преобразование перестановочно с операторами группового сдвига, т. е.

$$\tilde{\varphi}(yg) = \widetilde{\varphi(yg)} \tag{2}$$

(в то время как обычное преобразование Фурье ведет себя более сложным образом: $\tilde{\varphi}(yg) = \overline{\varphi(yg'^{-1})}$, где g' — матрица, транспонированная к g).

Отметим также, что при новом определении преобразования Фурье мы имеем

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(y) = \varphi(y), \tag{3}$$

т. е. квадрат оператора преобразования Фурье равен единичному оператору (в то время как для обычного преобразования Фурье $\tilde{\tilde{\varphi}}(y) = \varphi(-y)$).

Исходя из этого определения, введем преобразование Фурье в пространствах $L_2(Y)$ и $L_2(\Omega)$.

Как было установлено в п. 5, Y является подмножеством полной меры в пространстве A^2, а потому пространства $L_2(Y)$ и $L_2(A^2)$ фактически не различаются между собой. Тем самым данное выше определение преобразования Фурье для функций из $L_2(A^2)$ автоматически переносится на функции из $L_2(Y)$.

Теперь перейдем к пространству $L_2(\Omega)$. Пусть $\psi(y)$ — функция Шварца — Брюа на Ω. Согласно определению

$$\psi(y) = \sum_{\lambda \in Q^*} \varphi(\lambda y), \tag{4}$$

где $\varphi(y)$ — функция Шварца — Брюа на Y.

Определим преобразование Фурье $\tilde{\psi}$ функции Шварца — Брюа ψ следующей формулой:

$$\tilde{\psi}(y) = \sum_{\lambda \in Q^*} \tilde{\varphi}(\lambda y), \tag{5}$$

где $\tilde{\varphi}$ — преобразование Фурье функции Шварца — Брюа на Y.

Легко убедиться, что если $\sum\limits_{\lambda \in Q^*} \varphi(\lambda y) = 0$, то и $\sum\limits_{\lambda \in Q^*} \tilde{\varphi}(\lambda y) = 0$. Отсюда следует, что преобразование Фурье функции ψ на Ω определено однозначно, независимо от способа представления функции ψ в виде (4).

Преобразование Фурье функций на Ω, определенное вначале только для функций Шварца — Брюа, может быть теперь продолжено до унитарного преобразования на всем пространстве $L_2(\Omega)$.

Чтобы в этом убедиться, нам достаточно доказать, что преобразование Фурье функций Шварца — Брюа сохраняет норму. Покажем это.

Представим функцию Шварца—Брюа на Ω в виде $\psi(y) = \sum_{\lambda\in Q^*} \varphi(\lambda y)$, где $\varphi(y)$ — функция Шварца — Брюа на Y. Тогда, обозначая через E фундаментальную область в Y относительно Q^*, мы имеем

$$\begin{aligned}\|\psi\|_\Omega^2 &= \int_E |\psi(y)|^2\,dy = \\ &= \int_E \sum_{\lambda\in Q^*} \sum_{\mu\in Q^*} \varphi(\lambda y)\overline{\varphi(\mu y)}\,dy = \\ &= \sum_{\mu\in Q^*} \sum_{\lambda\in Q^*} \int_{\lambda E} \varphi(y)\overline{\varphi(\mu y)}\,dy.\end{aligned}$$

Поскольку интегрирование по λE и суммирование по λ сводится к интегрированию по всему пространству Y, то мы получаем отсюда, что

$$\|\psi\|_\Omega^2 = \sum_{\mu\in Q^*} \int_Y \varphi(y)\overline{\varphi(\mu y)}\,dy. \tag{6}$$

Аналогично имеем

$$\|\tilde\psi\|_\Omega^2 = \sum_{\mu\in Q^*} \int_Y \tilde\varphi(y)\overline{\tilde\varphi(\mu y)}\,dy, \tag{7}$$

где $\tilde\varphi$ — преобразование Фурье функции φ на Y. Но так как $\overline{\varphi(\mu y)} = \tilde\varphi(\mu^{-1}y)$, то в силу формулы Планшереля на Y, мы имеем

$$\int_Y \varphi(y)\overline{\varphi(\mu y)}\,dy = \int \tilde\varphi(y)\,\overline{\tilde\varphi(\mu^{-1}y)}\,dy.$$

Следовательно, правые части равенств (6) и (7) совпадают. Итак, доказано, что $\|\psi\|_\Omega = \|\tilde\psi\|_\Omega$.

Обозначим оператор преобразования Фурье на $L_2(\Omega)$ через F. Мы доказали, что F — унитарный оператор.

С другой стороны, как мы знаем,

$$F^2 = E, \tag{8}$$

где E — единичный оператор.

Из унитарности оператора F и равенства (8) следует, что F — самосопряженный оператор.

9. Орисферический автоморфизм в пространстве Ω и его связь с преобразованием Фурье. Пусть $\varphi(y)$ — функция Шварца — Брюа в пространстве Ω. Как и раньше, будем считать ее продолженной на пространство Y.

Орисферическим автоморфизмом в пространстве функций $\varphi(y)$ назовем оператор B, определенный следующей формулой:

$$(B\varphi)(g) = \int_{Z_A} \varphi(y_0 szg)\, dz, \tag{1}$$

где $y_0 = (1,\ 0)$, $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что функция $B\varphi$ постоянна на классах смежности $D_Q Z_A \diagdown G_A$, а потому ее можно рассматривать как функцию в пространстве $\Omega = D_Q Z_A \diagdown G_A$.

Орисферический автоморфизм имеет простой геометрический смысл. Именно, если в формуле (1) перейти к координатной записи, то она примет следующий вид:

$$(B\varphi)(g) = \int_A \varphi(y^{(1)}t + z^{(1)},\ y^{(2)}t + z^{(2)})\, dt, \tag{2}$$

где $g = \begin{pmatrix} y^{(1)} & y^{(2)} \\ z^{(1)} & z^{(2)} \end{pmatrix}$.

Итак, орисферический автоморфизм состоит в том, что функции φ сопоставляются ее интегралы по всевозможным прямым. Поскольку точка пространства Y задается верхней строкой $(y^{(1)},\ y^{(2)})$ матрицы g, то формулу (2) можно переписать в следующем виде:

$$B\varphi(y^{(1)},\ y^{(2)}) = \int_A \varphi(y^{(1)}t + z^{(1)},\ y^{(2)}t + z^{(2)})\, dt, \tag{3}$$

где $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ — произвольные элементы кольца A, связанные с $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ соотношением

$$y^{(1)}z^{(2)} - y^{(2)}z^{(1)} = 1. \tag{4}$$

(От их выбора интеграл (3) не зависит.)

Из формулы (1) непосредственно следует, что оператор орисферического автоморфизма B перестановочен с операторами группового сдвига. Напомним, что тем же свойством обладает и оператор преобразования Фурье F.

Задача этого пункта — показать, что *при некоторых дополнительных условиях на функцию* φ *операторы* B *и* F *совпадают, т. е.*

$$B\varphi(y) = F\varphi(y) \tag{5}$$

или, в более подробной записи,

$$\int_A \varphi(y^{(1)}t + z^{(1)},\ y^{(2)}t + z^{(2)})\,dt =$$
$$= \int \varphi(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})\,\chi_0(\zeta^{(1)}y^{(2)} - \zeta^{(2)}y^{(1)})\,d\zeta^{(1)}\,d\zeta^{(2)}, \tag{6}$$

где $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ *связаны с* $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ *соотношением* (4).

Итак, установим связь между операторами F и B. Поскольку группа G_A действует транзитивно в пространстве Ω, а операторы F и B перестановочны с операторами группового сдвига, то достаточно установить связь между $F\varphi(y)$ и $B\varphi(y)$ в какой-либо одной точке пространства, например, в точке $y_0 = (1, 0)$. В этой точке мы имеем

$$F\varphi(1, 0) = \int_{A^2} \varphi(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})\,\chi_0(\zeta^{(2)})\,d\zeta^{(1)}\,d\zeta^{(2)}, \tag{7}$$

$$B\varphi(1, 0) = \int_A \varphi(t, 1)\,dt. \tag{8}$$

Преобразуем выражение (7). Согласно определению, функция Шварца — Брюа на Ω представима в виде

$$\varphi(y) = \sum_{\lambda \in Q^*} f(\lambda y). \tag{9}$$

где $f(y)$ — функция Шварца — Брюа на Y. Следовательно, имеем

$$F\varphi(1,\ 0) = \sum_{\lambda \in Q^*} \int f\left(\lambda\zeta^{(1)},\ \lambda\zeta^{(2)}\right) \chi_0\left(\zeta^{(2)}\right) d\zeta^{(1)}\, d\zeta^{(2)} = \\ = \sum_{\lambda \in Q^*} \int f\left(\zeta^{(1)},\ \zeta^{(2)}\right) \chi_0\left(\lambda\zeta^{(2)}\right) d\zeta^{(1)}\, d\zeta^{(2)}.$$

Обозначая через $\hat{f}\left(z^{(1)},\ z^{(2)}\right)$ преобразование Фурье функции f по второму переменному $\zeta^{(2)}$, мы можем переписать это выражение в следующем виде:

$$F\varphi(1,\ 0) = \sum_{\lambda \in Q^*} \int \hat{f}\left(z^{(1)},\ \lambda\right) dz^{(1)}.$$

Но на основании формулы суммирования Пуассона (для функций одного переменного)

$$\sum_{\lambda \in Q^*} \hat{f}\left(z^{(1)},\ \lambda\right) = \sum_{\lambda \in Q^*} f\left(z^{(1)},\ \lambda\right) + f\left(z^{(1)},\ 0\right) - \hat{f}\left(z^{(1)},\ 0\right).$$

Следовательно,

$$F\varphi(1,\ 0) = \sum_{\lambda \in Q^*} \int f\left(z^{(1)},\ \lambda\right) dz^{(1)} + \\ + \int f\left(z^{(1)},\ 0\right) dz^{(1)} - \int \hat{f}\left(z^{(1)},\ 0\right) dz^{(1)}.$$

Выразим правую часть этого равенства через исходную функцию φ. Имеем

$$\sum_{\lambda \in Q^*} \int f\left(z^{(1)},\ \lambda\right) dz^{(1)} = \sum_{\lambda \in Q^*} \int f\left(\lambda z^{(1)},\ \lambda\right) dz^{(1)} = \\ = \int_A \varphi\left(z^{(1)},\ 1\right) dz^{(1)},$$

так как для $\lambda \in Q^*$ мы имеем $|\lambda| = 1$. Далее,

$$\int_{A^*} f\left(z^{(1)},\ 0\right) dz^{(1)} = \int_{A^*/Q^*} \sum_{\lambda \in Q^*} f(\lambda z,\ 0)\, dz = \int_{A^*/Q^*} \varphi(z,\ 0)\, dz;$$

$$\int_A \hat{f}\left(z^{(1)},\ 0\right) dz^{(1)} = \int f\left(z^{(1)},\ z^{(2)}\right) dz^{(1)}\, dz^{(2)} = \\ = \int_{A^2/Q^*} \sum_{\lambda \in Q^*} f\left(\lambda z^{(1)},\ \lambda z^{(2)}\right) dz^{(1)}\, dz^{(2)} = \int_{A^2/Q^*} \varphi\left(z^{(1)},\ z^{(2)}\right) dz^{(1)}\, dz^{(2)}.$$

Таким образом,

$$F\varphi(1,\ 0)=\int_A \varphi(z,\ 1)\,dz+\int_{A/Q^*}\varphi(z,\ 0)\,dz-\\ -\int_{A^2/Q^*}\varphi\left(z^{(1)},\ z^{(2)}\right)dz^{(1)}\,dz^{(2)}. \qquad (10)$$

Сравнивая это выражение с формулой (8), для оператора B получаем

$$F\varphi(1,\ 0)-B\varphi(1,\ 0)=\int_{A/Q^*}\varphi(z,\ 0)\,dz-\\ -\int_{A^2/Q^*}\varphi\left(z^{(1)},\ z^{(2)}\right)dz^{(1)}\,dz^{(2)}. \qquad (11)$$

Наконец, применяя формулу (11) к функции $\varphi_1(y)=\varphi(yg)$, мы получаем окончательно следующую связь между операторами F и B:

$$F\varphi(y)-B\varphi(y)=\int_{A/Q^*}\varphi(ty)\,dt-\int_{A^2/Q^*}\varphi(y)\,dy. \qquad (12)$$

Итак, имеет место следующий результат. *Операторы преобразования Фурье F и орисферического преобразования B совпадают на подмножестве $\mathfrak{M}$ функций Шварца — Брюа, удовлетворяющих следующим двум дополнительным условиям*:

1) $$\int_{Y/Q^*}\varphi(y)\,dy=0,$$

2) $$\int_{A/Q^*}\varphi(ty)\,dt=0 \quad \textit{для любого} \quad y\in Y.$$

Нетрудно проверить, что множество $\mathfrak{M}$ всюду плотно в пространстве $L_2(\Omega)$.

В этом можно убедиться, вычисляя ортогональное дополнение к множеству функций, удовлетворяющих условию 1) или условию 2). Например, в первом случае мы получим, что функции из ортогонального дополнения должны быть постоянны на Ω и, следовательно, равны нулю, так как мера Ω бесконечна.

Заметим, что оператор B переводит функции Шварца — Брюа в функции, вообще говоря, не являющиеся функциями Шварца — Брюа. Однако функции φ, удовлетворяющие дополнительно условиям 1) и 2), он переводит в функции Шварца — Брюа (поскольку этим свойством обладает оператор преобразования Фурье F).

10. Орисферическое отображение и оператор M. Рассмотрим пространство $L_2(X)$, $X = \Gamma \setminus G_A$. Сопоставим каждой функции $f(x) \in L_2(X)$ ее интегралы по компактным орисферам в X:

$$\varphi(g) = \int\limits_{Z_Q \setminus Z_A} f(x_0 z g)\, dz, \tag{1}$$

где x_0 — точка из X, отвечающая единичному классу. Соответствие

$$f(x) \to \varphi(g)$$

назовем *орисферическим отображением*.

Очевидно, что функция $\varphi(g)$ удовлетворяет для любых $\delta \in D_Q$ и $z \in Z_A$ следующему условию

$$\varphi(\delta z g) = \varphi(g).$$

Таким образом, ее можно рассматривать как функцию в пространстве орисфер Ω и писать $\varphi(y)$ вместо $\varphi(g)$.

Пусть H^0 — ядро орисферического отображения, H' — образ пространства $L_2(X)$ при орисферическом отображении. Введем в H' скалярное произведение, положив

$$H' = L_2(X) / H^0.$$

Это скалярное произведение мы обозначим через $[\psi_1, \psi_2]$.

В п. 4 было показано, что спектр представления в пространстве H^0 является дискретным конечнократным.

В этом и в следующем пункте будет изучен спектр представления в пространстве H'. С этой целью введем оператор M.

Пусть $\psi(y)$ — произвольная функция Шварца — Брюа на Ω. Эта функция задает функционал в пространстве H' по формуле

$$(\psi, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(y) \overline{\psi(y)}\, dy. \tag{2}$$

В конце этого пункта мы покажем, что (ψ, φ) — линейный непрерывный функционал в пространстве H'. Отсюда на основании теоремы Рисса будет следовать, что

$$\int_{\Omega} \varphi(y)\overline{\psi(y)}\,dy = [\varphi, M\psi], \tag{3}$$

где $M\psi \in H'$, а квадратные скобки обозначают скалярное произведение в H'.

Тем самым мы определили оператор M, отображающий функции Шварца — Брюа в пространстве Ω в функции из H'.

Отметим следующие свойства оператора M.

1. *Оператор M перестановочен с операторами представления $T(g)$, т. е.*

$$M[\psi(yg)] = (M\psi)(yg) \tag{4}$$

для любой функции Шварца — Брюа $\psi(y)$.

Это непосредственно следует из определения оператора M.

2. $$(M\psi, \psi) \geqslant 0 \tag{5}$$

для любой функции Шварца — Брюа $\psi(y)$; круглые скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Это непосредственно следует из равенства

$$(M\psi, \psi) = [M\psi, M\psi]. \tag{6}$$

3. *Функции $M\psi$, где ψ пробегает функции Шварца — Брюа на Ω, образуют в H' всюду плотное множество.*

В самом деле, предположим, что это не так. Тогда в H' существует такая функция $f \neq 0$, что $[f, M\psi] = 0$ для любой функции Шварца — Брюа ψ. Согласно определению оператора M, отсюда вытекает, что

$$(f, \psi) = 0 \tag{7}$$

для любой функции Шварца — Брюа ψ; круглые скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Но это невозможно, поскольку функции ψ образуют в $L_2(\Omega)$ всюду плотное множество.

Приведем теперь доказательство того, что функционал (ψ, φ), определенный равенством (2), действительно является непрерывным линейным функционалом. Очевидно, что это утверждение непосредственно вытекает из следующего неравенства:

$$\int_K |\varphi(y)|\, dy \leqslant c \|\varphi\|_{H'}, \tag{8}$$

где K — произвольное компактное множество в Ω, а c — постоянная, зависящая только от K. Это неравенство мы сейчас и докажем.

Предварительно заметим, что если C — компактная орисфера в пространстве X, то близкие к ней компактные орисферы с ней не пересекаются *).

Семейство компактных орисфер x_0zg на X задает многозначное отображение $X \to \Omega$, ставя в соответствие каждой точке из X проходящие через нее орисферы. Пусть K — компактное множество в Ω. Из сделанного выше замечания и из леммы Гейне — Бореля следует, что каждая точка из X имеет лишь ограниченное число образов, лежащих в K.

Разобьем K на малые части K_i, каждая из которых состоит из семейства попарно непересекающихся орисфер; пусть K_i^* — прообразы множеств K_i в пространстве X. Тогда для любого прообраза $\varphi^*(x)$ функции $\varphi(y)$ при орисферическом отображении (1) мы имеем

$$\int_K |\varphi(y)|\, dy \leqslant \sum \int_{K_i} |\varphi(y)|\, dy \leqslant \sum \int_{K_i^*} |\varphi^*(x)|\, dx \leqslant c \|\varphi^*\|_H,$$

где $c = \sum \mu(K_i^*)$.

Так как $\varphi^*(x)$ — любой прообраз, то мы можем взять по ним нижнюю грань и тем самым заменить $\|\varphi^*\|_H$ на $\|\varphi\|_{H'}$. Этим неравенство (8) доказано.

---

*) В самом деле, рассмотрим для определенности орисферу x_0z. Пусть орисферы x_0zg_n, $g_n \to e$ пересекаются с ней. Это означает, что $z_ng_n = \gamma_n z_n'$, где $\gamma_n \in \Gamma$, $z_n, z_n' \in Z_A$. Так как z_n, z_n' можно взять из компактного множества $Z_Q \setminus Z_A$, то можно считать, что $z_n \to z$, $z_n' \to z'$. Перейдя к пределу, получим, что $\gamma_n \to \gamma \in Z_Q$. В силу дискретности Γ это означает, что, начиная с некоторого n, имеем $\gamma_n \in Z_Q$, а потому $g_n \in Z_A$. Следовательно, орисфера x_0zg_n совпадает с x_0z.

11. Явное выражение для оператора M. Здесь будет показано, что *оператор M задается следующей формулой*:

$$M\psi(y) = \psi(y) + \int_{Z_A} \psi(y_0 szg)\,dz, \tag{1}$$

где $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Иными словами*

$$M = E + B,$$

где E — единичный оператор, а B — орисферический автоморфизм, определенный в п. 9.

Для вывода этой формулы преобразуем левую часть равенства

$$\int_{\Omega} \varphi(y)\overline{\psi(y)}\,dy = [\varphi, M\psi] \tag{2}$$

в интеграл по X. Мы сделаем это в два приема. Сначала перейдем от $\Omega = D_Q Z_A \setminus G_A$ к $D_Q Z_Q \setminus G_A$, а затем от $D_Q Z_Q \setminus G_A$ к X.

Итак, преобразуем сначала интеграл

$$\int_{\Omega} \varphi(y)\overline{\psi(y)}\,dy$$

в интеграл по $D_Q Z_Q \setminus G_A$.

Заменим функцию $\varphi(y)$ ее прообразом $\varphi(g)$ — функцией на G_A, принимающей на каждом классе смежности $y = D_Q Z_A g$ постоянное значение $\varphi(y)$. Точно так же мы поступим и с функцией $\psi(y)$. Тогда очевидно, что

$$\int_{\Omega} \varphi(y)\overline{\psi(y)}\,dy = \int_{D_Q Z_Q \setminus G_A} \varphi(g)\overline{\psi(g)}\,dg \tag{3}$$

(меры в Ω и в $D_Q Z_Q \setminus C_A$ нормированы так, чтобы мера пространства $Z_Q \setminus Z_A$ равнялась единице).

Поскольку $\varphi \in H'$, т. е. является образом некоторой функции $f(x) \in H$ при орисферическом отображении, имеем

$$\varphi(g) = \int_{Z_Q \setminus Z_A} f(zg)\,dz,$$

где $f(g)$ — естественное продолжение функции $f(x)$ с пространства $X = \Gamma \setminus G_A$ на группу G_A.

Так как функция $\psi(g)$ постоянна на классах смежности по $D_Q Z_A$, то, как легко убедиться,

$$\int\limits_{D_Q Z_Q \setminus G_A} \varphi(g)\overline{\psi(g)}\,dg = \int\limits_{D_Q Z_Q \setminus G_A} f(g)\overline{\psi(g)}\,dg. \tag{4}$$

Итак, на основании (3) и (4), мы получаем следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(y)\overline{\psi(y)}\,dy = \int\limits_{D_Q Z_Q \setminus G_A} f(g)\overline{\psi(g)}\,dg, \tag{5}$$

где $f(g)$ — прообраз функции $\varphi(y)$ при орисферическом отображении.

Преобразуем теперь интеграл в правой части равенства (5) в интеграл по $X = \Gamma \setminus G_A$. Заметим, что функция $f(g)$ постоянна на классах смежности $\Gamma \setminus G_A$.

Пусть F — фундаментальная область в G_A относительно подгруппы Γ. Тогда множества γF, где $\gamma \in \Gamma$, покрывают G_A без повторений. Спроектируем все эти множества на $D_Q Z_Q \setminus G_A$. Образы множеств $\gamma_1 F$ и $\gamma_2 F$ либо совпадают (если $\gamma_2^{-1}\gamma_1 \in D_Q Z_Q$), либо не пересекаются. Элементы γ_1 и γ_2, для которых образы множеств $\gamma_1 F$ и $\gamma_2 F$ совпадают, назовем эквивалентными. Мы можем тогда написать

$$\int\limits_{D_Q Z_Q \setminus G_A} f(g)\overline{\psi(g)}\,dg = \sum_{\gamma}{}' \int\limits_{\gamma F} f(g)\overline{\psi(g)}\,dg = \\ = \sum_{\gamma}{}' \int\limits_{F} f(g)\overline{\psi(\gamma g)}\,dg, \tag{6}$$

где суммирование ведется по неэквивалентным γ.

Нетрудно убедиться, что правая часть равенства (6) сходится абсолютно, а потому мы можем поменять местами суммирование и интегрирование. В результате, на основании (5) и (6), мы получаем следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(y)\overline{\psi(y)}\,dy = \int\limits_{F} f(g)\sum_{\gamma}{}' \overline{\psi(\gamma g)}\,dg. \tag{7}$$

Заметим, что $\sum\limits_{\gamma}{}' \psi(\gamma g)$ не зависит от выбора элементов γ среди эквивалентных (так как функция $\psi(g)$ постоянна на классах смежности $D_Q Z_Q \setminus G_A$) и не меняется при замене g на $\gamma_0 g$, $\gamma_0 \in \Gamma$. Следовательно, функция $\sum{}' \psi(\gamma g)$ постоянна на классах смежности $\Gamma \setminus G_A$, а потому может рассматриваться как функция, заданная на $X = \Gamma \setminus G_A$ (равно как и функция $f(g)$). Итак, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(y) \overline{\psi(y)}\, dy = \int\limits_{X} f(x) \overline{\psi_1(x)}\, dx, \tag{8}$$

где

$$\psi_1(x) = \sum_{\gamma}{}' \psi(\gamma g). \tag{9}$$

Покажем, что функция $\psi_1(x)$ ортогональна к H^0. Действительно, пусть $f(x)$ — произвольная функция из H^0 и $\varphi(y)$ — ее образ при орисферическом отображении. Тогда, по определению H^0, имеем $\varphi(y) = 0$, а потому, в силу (8),

$$\int\limits_{X} f(x) \overline{\psi_1(x)}\, dx = 0.$$

Из ортогональности ψ_1 к H^0 следует, что

$$\int f(x) \overline{\psi_1(x)}\, dx = [\varphi, \hat{\psi}_1], \tag{10}$$

где $\hat{\psi}_1$ — образ функции ψ_1 при орисферическом отображении.

Сопоставляя (8) и (10) с исходным равенством (2), мы получаем, что

$$[\varphi, M\psi] = [\varphi, \hat{\psi}_1],$$

откуда

$$M\psi = \hat{\psi}_1.$$

Итак, установлено что применение оператора M к функции $\psi(y)$ сводится к следующим операциям. Сначала по функции $\psi(y)$ строится функция

$$\psi_1(x) = \sum_{\gamma}{}' \psi(\gamma g).$$

Затем к функции $\psi_1(x)$ применяется орисферическое отображение. Таким образом, оператор M задается следующей формулой:

$$M\psi(y) = \int\limits_{Z_Q \setminus Z_A} \sum_{\gamma \in D_Q Z_Q \setminus \Gamma}' \psi(y_0 \gamma z g)\, dz; \tag{11}$$

в $\sum'$ из каждого класса смежности $D_Q Z_Q \gamma$ берется по одному представителю; g — произвольный элемент из класса смежности $D_Q Z_A \setminus G_A$, отвечающего y.

Преобразуем формулу (11). Для этого выделим в сумме $\sum'$ слагаемое, отвечающее единичному классу — $\psi(zg) = \psi(g)$. Нетрудно убедиться, что каждый из оставшихся классов смежности $D_Q Z_Q \gamma$ содержит по одному представителю вида sz', где $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $z' \in Z_Q$ *). Таким образом, мы получаем

$$M\psi(y) = \psi(y) + \int\limits_{Z_Q \setminus Z_A} \sum_{z' \in Z_Q} \psi(y_0 s z' z g)\, dz.$$

Очевидно, что суммирование по Z_Q и интегрирование по $Z_Q \setminus Z_A$ сводятся к интегрированию по всему Z_A.

Итак, мы пришли к следующей окончательной формуле для оператора M:

$$M\psi(y) = \psi(y) + \int\limits_{Z_A} \psi(y_0 s z g)\, dz,$$

т. е.

$$M = E + B,$$

где E — единичный оператор, а B — орисферический автоморфизм, определенный в п. 9.

12. Разложение пространства H' на неприводимые представления. Переходим к формулировке и доказательству

---

*) Это следует из того факта, что любую рациональную матрицу $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, у которой $b \neq 0$, можно представить в виде $\gamma = z_1 \lambda s z_2$, где $\lambda \in D_Q$, z_1, $z_2 \in Z_Q$.

основной теоремы, описывающей, как разлагается пространство H' на неприводимые представления.

Очевидно, что пространство H' содержит в качестве инвариантного подпространства одномерное пространство констант C. Константы получаются при орисферическом отображении функций, постоянных на X. Следовательно, *H' разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств*

$$H' = C + H'', \tag{1}$$

одномерного пространства C и его ортогонального дополнения H''.

Будет доказана следующая основная теорема.

Пространство H'' разлагается на те же неприводимые представления группы G_A, что и пространство $L_2(\Omega)$, но в отличие от последнего содержит каждое неприводимое представление с кратностью единица.

Перейдем к доказательству теоремы.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ функций Шварца — Брюа на Ω, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $$\int_{\Omega} \psi(y)\,dy = 0,$$

2) $$\int_{A/Q^*} \psi(ty)\,dt = 0 \text{ для любого } y \in \Omega.$$

Покажем, что *оператор M переводит функции ψ, удовлетворяющие условиям* 1) *и* 2), *в функции из H''.*

В самом деле, обозначая через 1 функцию, равную тождественно единице на Ω, имеем

$$[1,\ M\psi] = \int_{\Omega} \overline{\psi(y)}\,dy = 0.$$

Таким образом, функция $M\psi$ ортогональна в H' подпространству констант, а потому она принадлежит H''.

Легко убедиться, что *функции $M\psi$, где ψ пробегает $\mathfrak{M}$, образуют в пространстве H'' всюду плотное множество.*

Теперь покажем, что *оператор $M - E$ продолжается с подмножества $\mathfrak{M}$ функций Шварца — Брюа, удовле-*

творяющих условиям 1) *и* 2), *до унитарного самосопряженного оператора* $\overline{B}$ *на всем пространстве* $L_2(\Omega)$, *причем этот оператор удовлетворяет следующему условию*: $\overline{B}^2 = E$, *где* E — *единичный оператор.*

В самом деле, в п. 10 мы установили, что на множестве $\mathfrak{M}$ оператор M имеет вид

$$M = E + B,$$

где E — единичный оператор, а B — орисферический автоморфизм. С другой стороны, в п. 9 было установлено, что оператор B совпадает на множестве $\mathfrak{M}$ с оператором преобразования Фурье. Следовательно, оператор B продолжается до унитарного самосопряженного оператора $\overline{B}$ в пространстве $L_2(\Omega)$, удовлетворяющего условию $\overline{B}^2 = E$. Отсюда непосредственно следует наше утверждение.

Докажем теперь, что

$$H'' \subset L_2(\Omega) \tag{2}$$

причем H'' *является областью значений оператора* M, *т. е.*

$$ML_2(\Omega) = H''. \tag{3}$$

Сначала заметим, что для произвольных функций Шварца — Брюа из множества $\mathfrak{M}$ справедливо следующее равенство:

$$[M\varphi, M\psi] = \frac{1}{2}(M\varphi, M\psi), \tag{4}$$

где квадратные скобки обозначают скалярное произведение в пространстве H'', а круглые — скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

В самом деле, в силу определения оператора M, имеем $[M\varphi, M\psi] = (M\varphi, \psi)$. С другой стороны, из равенства $\overline{B}^2 = E$ следует, что пространство $L_2(\Omega)$ является прямой суммой собственных подпространств оператора M подпространства H_0, отвечающего собственному значению 0 и подпространства H_2, отвечающего собственному значению 2. Обозначая через φ', ψ' проекции векторов φ и ψ на подпространство H_2, мы имеем

$$(M\varphi, \psi) = 2(\varphi', \psi'), \quad (M\varphi, M\psi) = 4(\varphi', \psi').$$

Следовательно, $(M\varphi, M\psi) = 2(M\varphi, \psi) = 2[M\varphi, M\varphi]$.

Теперь докажем, что $H'' \subset L_2(\Omega)$. Пусть $f \in H''$. Тогда существует последовательность функций $\psi_n \in \mathfrak{M}$ такая, что

$$M\psi_n \to f \text{ в топологии } H''.$$

В силу (4), последовательность $M\psi_n$ сходится и в топологии пространства $L_2(\Omega)$.

Пусть $f' \in L_2(\Omega)$ — предел этой последовательности. Тогда для любой функции Шварца — Брюа φ мы имеем $(f, \varphi) = [f, M\varphi] = \lim\limits_{n\to\infty} [M\psi_n, M\varphi] = \lim\limits_{n\to\infty} [M\psi_n, \varphi] = (f', \varphi)$. Отсюда следует, что $f = f'$. Этим доказано, что $H'' \subset L_2(\Omega)$.

Равенство (3) непосредственно следует из того факта, что функции $\psi \in \mathfrak{M}$ образуют всюду плотное множество в пространстве $L_2(\Omega)$, а их образы $M\psi$ образуют всюду плотное множество в пространстве H''. Утверждение доказано.

Заметим, что *пространство H'' можно охарактеризовать, как собственное подпространство оператора $\overline{B} = M - E$, отвечающее собственному значению* 1.

Это непосредственно следует из равенств $H'' = ML_2(\Omega)$ и $\overline{B}^2 = E$.

Наконец, докажем, что *пространство H'' имеет однократный спектр*.

Из п. 6 мы знаем, что представление в пространстве $L_2(\Omega)$ разлагается на неприводимые представления, действующие в пространствах H_π однородных функций. При этом представления в пространствах H_π и $H_{\pi^{-1}}$, и только они, являются эквивалентными представлениями; таким образом, неприводимые представления содержатся в $L_2(\Omega)$ с кратностью 2.

Оператор $\overline{B}$, поскольку он перестановочен с операторами представления, переводит сумму эквивалентных пространств

$$H_\pi + H_{\pi^{-1}}$$

в себя. Из формулы для преобразования Фурье, с которым, как известно, совпадает $\overline{B}$, следует, что

$$\overline{B} H_\pi = H_{\pi^{-1}},$$

т. е. B переставляет пространства H_π и $H_{\pi^{-1}}$.

Отсюда следует, что оператор $M = E + \overline{B}$ переводит пространство $H_\pi + H_{\pi^{-1}}$ в подпространство H''_π функций вида $\psi_\pi + \overline{B}\psi_\pi$, $\psi_\pi \in H_\pi$, причем это подпространство эквивалентно пространствам H_π и $H_{\pi^{-1}}$. Тем самым доказано, что представление в пространстве $H'' = ML_2(\Omega)$ имеет однократный спектр. Теорема доказана.

13. Связь оператора орисферического автоморфизма B с L-функцией Дирихле. В этом пункте мы построим некоторую систему функций $\varphi_\pi \in H_\pi$, для которых будет найдено явное выражение оператора B. Получаемые формулы интересны тем, что они устанавливают связь между фактом вырождения оператора $M = E + B$ в пространствах $H_\pi + H_{\pi^{-1}}$ и функциональным уравнением для L-функции Дирихле.

Вначале напомним описание всех характеров $\pi(\lambda)$ на группе иделей, равных тождественно единице на подгруппе Q^* главных иделей.

Пусть

$$\pi = (\pi_\infty, \pi_2, \ldots, \pi_p, \ldots) —$$

характер на группе иделей

$$\lambda = (\lambda_\infty, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots),$$

т. е.

$$\pi(\lambda) = \pi_\infty(\lambda_\infty)\,\pi_2(\lambda_2)\ \ldots\ \pi_p(\lambda_p)\ \ldots$$

Входящие в это произведение характеры могут быть записаны в следующем виде:

$$\pi_\infty(\lambda_\infty) = |\lambda_\infty|_\infty^s \operatorname{sign}^\nu \lambda_\infty; \tag{1}$$

$$\pi_p(\lambda_p) = |\lambda_p|_p^{s_p} \theta_p(\lambda_p), \quad p = 2, 3, 5, \ldots \tag{1'}$$

Здесь s, s_p — любые комплексные числа; $\nu = 0, 1$; $\theta_p(\lambda_p)$ — такой унитарный характер, что

$$\theta_p(p) = 1.$$

При этом лишь конечное число характеров $\theta_p(\lambda_p)$ не равно тождественно единице.

Условие того, что характер $\pi(\lambda)$ равен тождественно единице на подгруппе главных иделей λ, эквивалентно, очевидно, следующим соотношениям:

$$\pi_\infty(-1)\pi_2(-1)\ldots\pi_q(-1)\ldots=1$$

и

$$\pi_\infty(p)\pi_2(p)\ldots\pi_q(p)\ldots=1$$

для любого простого числа p. Подставляя сюда выражения для $\pi_\infty(x)$, $\pi_2(x)$, ..., $\pi_p(x)$, ..., получим

$$\begin{aligned}\theta_2(-1)\ldots\theta_q(-1)\ldots&=\operatorname{sign}^\nu(-1);\\ p^{s-s_p}\theta_2(p)\ldots\theta_p(p)\ldots&=1.\end{aligned}\qquad(2)$$

Обозначим через $\theta(\lambda)$ унитарный характер на мультипликативной группе рациональных чисел, определенный по формуле

$$\theta(\lambda)=\theta_2(\lambda)\ldots\theta_p(\lambda)\ldots\qquad(3)$$

Тогда условия (2) можно записать в виде

$$\theta(-1)=\operatorname{sign}^\nu(-1),\quad p^{s_p}=p^s\theta(p).$$

Итак, *любой характер*

$$\pi=(\pi_\infty,\pi_2,\ldots,\pi_p,\ldots)$$

на группе иделей, равный тождественно единице на подгруппе главных иделей, имеет следующий вид:

$$\pi_\infty(\lambda_\infty)=|x_\infty|_\infty^s\operatorname{sign}^\nu\lambda_\infty,\qquad(4)$$

$$\pi_p(\lambda_p)=|x_p|^{s_p}\theta_p(\lambda_p),\quad p=2,3,\ldots,\qquad(5)$$

где $\theta_p(\lambda_p)$ — *произвольно заданные характеры такие, что* $\theta_p(p)=1$, s — *произвольное комплексное число, а показатели* ν *и* s_p *определяются из условий*

$$\operatorname{sign}^\nu(-1)=\theta(-1),\quad p^{s_p}=p^s\theta(p),$$

где

$$\theta(\lambda)=\theta_2(\lambda)\ldots\theta_p(\lambda),\ \ldots,\ \lambda\in Q^*.$$

Всюду дальше рассматриваются только такие характеры $\pi(\lambda)$.

Продолжим каждый из характеров $\pi_p(\lambda_p)$, определенных формулами (4) и (5), до характера, заданного на квадратичном расширении поля. Именно, характер

$$\pi_\infty(x_\infty) = |x_\infty|_\infty^s \operatorname{sign}^\nu x_\infty,$$

определенный на мультипликативной группе вещественных чисел, мы продолжим до характера на группе комплексных чисел согласно следующей формуле:

$$\pi_\infty(z) = |z|^s e^{\nu \arg z}.$$

Далее, характер

$$\pi_p(x_p) = |x_p|_p^{s_p} \theta_p(x_p),$$

определенный на мультипликативной группе поля p-адических чисел Q_p, мы продолжим любым способом до характера на квадратичном расширении $Q_p(\sqrt{\varepsilon_p})$ поля Q_p, где ε_p — элемент поля с нормой 1 (не являющийся квадратом в поле Q_p). Полученный характер обозначим той же буквой π_p. Будем точки основного аффинного пространства обозначать следующим образом:

$$a = ((x, y), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p), \ldots).$$

Введем функции следующего вида:

$$\varphi_\pi^{(1)}(a) = \\ = \pi_\infty(x+iy)\,|x+iy|^{-1} \prod_p \pi_p\left(x_p+\sqrt{\varepsilon_p}\,y_p\right)\left|x_p+\sqrt{\varepsilon_p}\,y_p\right|^{-1}. \tag{6}$$

$$\varphi_\pi^{(2)}(a) = \\ = \pi_\infty(x-iy)\,|x-iy|^{-1} \prod_p \pi_p\left(x_p-\sqrt{\varepsilon_p}\,y_p\right)\left|x_p-\sqrt{\varepsilon_p}\,y_p\right|^{-1}. \tag{7}$$

Наша задача — вычислить

$$B\varphi_\pi^{(1)}(a) \text{ и } B\varphi_\pi^{(2)}(a),$$

где B — оператор орисферического автоморфизма.

Очевидно, что

$$B\varphi_\pi^{(1)}(a)=B_\infty\left(\pi_\infty(x+iy)\,|x+iy|^{-1}\right)\times \\ \times\prod_p B_p\left(\pi_p\left(x_p+\sqrt{\varepsilon_p}\,y_p\right)|x_p+\sqrt{\varepsilon_p}\,y_p|^{-1}\right), \tag{8}$$

$$B\varphi_\pi^{(2)}(a)=B_\infty\left(\pi_\infty(x-iy)\,|x-iy|^{-1}\right)\times \\ \times\prod_p B_p\left(\pi_p\left(x_p-\sqrt{\varepsilon}\,y_p\right)|x_p-\sqrt{\varepsilon}\,y_p|\quad\right), \tag{9}$$

где B_p — оператор орисферического отображения, отвечающий группе матриц над полем p-адических чисел.

Формулы для операторов B_p были получены в гл. II, § 3, п. 11:

$$B_\infty\left(\pi_\infty(x+iy)\,|x+iy|^{-1}\right)=\lambda_\infty^{(1)}(\pi_\infty)\,\pi_\infty^{-1}(x-iy)\,|x-iy|^{-1},$$

где

$$\lambda_\infty^{(1)}(\pi_\infty)=\begin{cases} \mathrm{B}\left(-\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\right), & \text{когда}\quad \nu=0,\\ i\mathrm{B}\left(-\frac{s-1}{2},\ \frac{1}{2}\right), & \text{когда}\quad \nu=1\end{cases}$$

($\mathrm{B}(x,\ y)$ — классическая бэта-функция);

$$B_p\left(\pi_p\left(x_p+\sqrt{\varepsilon_p}\,y_p\right)|x_p+iy_p|^{-1}\right)= \\ =\lambda_p^{(1)}(\pi_p)\,\pi_p^{-1}\left(x_p-\sqrt{\varepsilon_p}\,y_p\right)|x_p-iy_p|^{-1},$$

где

$$\lambda_p^{(1)}(\pi_p)=\begin{cases} \dfrac{1-p^{s_p-1}}{1-p^{s_p}}, & \text{когда}\quad \theta_p(\lambda_p)\equiv 1,\\ p^{-\frac{n}{2}}\mu_p^{(1)}(\pi_p), & \text{когда}\quad \theta_p(\lambda_p)\not\equiv 1.\end{cases}$$

Здесь n — ранг характера θ_p, т. е. наименьшее натуральное число n, для которого $\theta_p(1+p^n s)\equiv 1$ при $|s|\leqslant 1$; $|\mu_p(\pi_p)|=1$.

На основании этих формул получаем, что

$$B\varphi_\pi^{(1)}=\lambda^{(1)}(\pi)\,\varphi_{\pi^{-1}}^{(2)}, \tag{10}$$

где

$$\lambda^{(1)}(\pi)=\lambda_\infty^{(1)}(\pi_\infty)\,\lambda_2^{(1)}(\pi_2)\,\ldots\,\lambda_p^{(1)}(\pi_p)\ldots$$

Аналогично, на основании формул гл. II мы получаем, что

$$B\varphi_{\pi}^{(2)} = \lambda^{(2)}(\pi)\,\varphi_{\pi^{-1}}^{(1)}, \tag{11}$$

где

$$\lambda^{(2)}(\pi) = \lambda_{\infty}^{(2)}(\pi_{\infty})\,\lambda_{2}^{(2)}(\pi_{2})\,\ldots\,\lambda_{p}^{(2)}(\pi_{p})\,\ldots,$$

причем сомножители $\lambda_p^{(2)}(\pi_p)$ связаны с $\lambda_p^{(1)}(\pi_p)$ следующими соотношениями:

$$\lambda_{\infty}^{(2)}(\pi_{\infty}) = (-1)^{\nu}\,\lambda_{\infty}^{(1)}(\pi_{\infty});$$

$$\lambda_{p}^{(1)}(\pi_{p})\,\lambda_{p}^{(2)}(\pi_{p}^{-1}) = p^{-n}\pi_{p}(-1),$$

где n — ранг характера θ_p.

Напишем явное выражение для $\lambda^{(1)}(\pi)$ и $\lambda^{(2)}(\pi)$. Мы увидим, что $\lambda^{(1)}(\pi)$ и $\lambda^{(2)}(\pi)$ выражаются через L — функцию Дирихле.

Для определенности рассмотрим случай, когда $\nu = 0$, т. е.

$$\pi_{\infty}(\lambda_{\infty}) = |\lambda_{\infty}|_{\infty}^{s}.$$

Введем следующие обозначения. Пусть A_1 — множество простых чисел p, для которых $\pi_p(x_p) = |x_p|^{s_p}$; A_2 — дополнительное множество простых чисел. Тогда имеем на основании приведенных выше формул:

$$\lambda^{(1)}(\pi) = B\left(-\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\right)\prod_{A_1}\frac{1-p^{s_p-1}}{1-p^{s_p}}\prod_{A_2} p^{-\frac{n_p}{2}}\sigma,$$

где n_p — ранг характера $\theta_p(x_p)$, $|\sigma| = 1$. Запишем это выражение в другой форме. Напомним, что

$$p^{s_p} = p^{s}\theta(p),$$

где

$$\theta(p) = \prod_{q}\theta_q(p).$$

Введем функцию $\tilde{\theta}(p)$ на множестве целых чисел $n \neq 0$, определив ее следующим образом.

Если $n=(-1)^{\varepsilon} p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ — разложение числа n на простые сомножители, то $\hat{\theta}(n)=\theta(n)$, когда $p_1, \ldots, p_s$ все принадлежат A_1, $\hat{\theta}(n)=0$ в противном случае.

Легко убедиться, что $\hat{\theta}(n)$ является периодической функцией с периодом

$$k(\hat{\theta})=\prod_{A_2} p^{n_p},$$

т. е.

$$\hat{\theta}(n+k)=\hat{\theta}(n)$$

для любого целого $n \neq 0$.

Таким образом, выражение для $\lambda^{(1)}(\pi)$ может быть записано в следующей форме:

$$\lambda^{(1)}(\pi)=\mathrm{B}\left(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}\right) \prod_p \frac{1-\hat{\theta}(p) p^{s-1}}{1-\hat{\theta}(p) p^s} k^{-\frac{1}{2}}(\hat{\theta}) \sigma,$$

где $k(\hat{\theta})$ — период характера $\hat{\theta}(n)$, $|\sigma|=1$.

Произведение

$$L(s, \hat{\theta})=\prod_p\left(1-\hat{\theta}(p) p^{-s}\right)^{-1}$$

называется L-функцией Дирихле.

Итак, *коэффициент* $\lambda^{(1)}(\pi)$ *выражается через L-функцию Дирихле согласно следующей формуле*:

$$\lambda^{(1)}(\pi)=\mathrm{B}\left(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}\right) k^{-\frac{1}{2}}(\hat{\theta}) \frac{L(-s, \hat{\theta})}{L(1-s, \hat{\theta})} \sigma .$$

Аналогично мы получаем

$$\lambda^{(2)}\left(\pi^{-1}\right)=\mathrm{B}\left(\frac{s}{2}, \frac{1}{2}\right) k^{-\frac{1}{2}}(\hat{\theta}) \frac{L(s, \bar{\hat{\theta}})}{L(1+s, \bar{\hat{\theta}})} \bar{\sigma} .$$

Как было показано в п. 12, квадрат оператора B есть единичный оператор:

$$B^2=E. \tag{12}$$

Поскольку $B \varphi_\pi^{(1)}=\lambda^{(1)}(\pi) \varphi_{\pi^{-1}}^{(2)}$ и $B \varphi_{\pi^{-1}}^{(2)}=\lambda^{(2)}\left(\pi^{-1}\right) \varphi_\pi^{(1)}$, то равенство (12) эквивалентно следующему соотношению:

$$\lambda^{(1)}(\pi) \lambda^{(2)}\left(\pi^{-1}\right)=1 .$$

Подставляя сюда явные выражения для $\lambda^{(1)}(\pi)$, $\lambda^{(2)}(\pi^{-1})$, получаем

$$\mathrm{B}\left(-\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\right)k^{-1}(\hat{\theta})\,\frac{L(-s,\ \hat{\theta})\,L(s,\ \bar{\hat{\theta}})}{L(1-s,\ \hat{\theta})\,L(1+s,\ \bar{\hat{\theta}})}=1. \quad (13)$$

Итак, установлено, что условие $B^2=E$ или, что равносильно, условие вырождения оператора $M=E+B$ на каждом пространстве $H_\pi+H_{\pi^{-1}}$ эквивалентно функциональному соотношению (13) для L-функции Дирихле.

Соотношение (13) является следствием известного функционального соотношения для L-функции Дирихле:

$$L(1-s,\ \hat{\theta})=$$
$$=\tau(\hat{\theta})(2\pi)^{-s}k^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\left(e^{\frac{\pi}{2}si}\hat{\theta}(-1)+e^{-\frac{\pi}{2}si}\right)L(s,\ \bar{\hat{\theta}}), \quad (14)$$

где

$$\tau(\hat{\theta})=\begin{cases}1, & \text{когда}\quad \hat{\theta}(-1)=1,\\ i, & \text{когда}\quad \hat{\theta}(-1)=-1.\end{cases}$$

В самом деле, в нашем случае $\hat{\theta}(-1)=1$. Поэтому из функционального соотношения (14) следует, что

$$\frac{L(-s,\ \hat{\theta})\,L(s,\ \bar{\hat{\theta}})}{L(1-s,\ \hat{\theta})\,L(1+s,\ \bar{\hat{\theta}})}k^{-1}(\theta)=\left(4\Gamma(s)\Gamma(-s)\cos^2\frac{\pi}{2}s\right)^{-1}=$$
$$=-\frac{s\sin\pi s}{4\pi\cos^2\frac{\pi}{2}s}=-\frac{1}{2}\,\frac{s\sin\frac{\pi}{2}s}{\pi\cos\frac{\pi}{2}s}. \quad (15)$$

С другой стороны, имеем

$$\mathrm{B}\left(-\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\right)=-\frac{2\pi\cos\frac{\pi s}{2}}{s\sin\frac{\pi s}{2}}. \quad (16)$$

Соотношение (13) непосредственно следует из равенств (15) и (16).

В случае, когда $\nu=1$, т. е.

$$\pi_\infty(\lambda_\infty)=|\lambda_\infty|^s\operatorname{sign}\lambda_\infty,$$

мы имеем следующие выражения для $\lambda^{(1)}(\pi)$ и $\lambda^{(2)}(\pi)$:

$$\lambda^{(1)}(\pi) = i\mathrm{B}\left(-\frac{s-1}{2}, \frac{1}{2}\right)\frac{L(-s, \hat\theta)}{L(1-s, \hat\theta)} k^{-\frac{1}{2}}(\hat\theta)\,\sigma,$$

$$\lambda^{(2)}(\pi^{-1}) = i\mathrm{B}\left(-\frac{-s-1}{2}, \frac{1}{2}\right)\frac{L(s, \bar{\hat\theta})}{L(1+s, \bar{\hat\theta})} k^{-\frac{1}{2}}(\hat\theta)\,\bar\sigma.$$

Таким образом, в этом случае равенство $B^2 = E$ оказывается эквивалентным следующему соотношению:

$$-\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}, \frac{1}{2}\right)\frac{L(-s, \hat\theta)\, L(s, \bar{\hat\theta})}{L(1-s, \hat\theta)\, L(1+s, \bar{\hat\theta})} k^{-1}(\hat\theta) = 1,$$

где $\hat\theta(-1) = -1$.

Легко убедиться, что это соотношение также является следствием соотношения (14) для L — функции Дирихле.

ДОБАВЛЕНИЕ К § 4

1. О связи между однородным пространством $G_Q \setminus G_A$ и однородными пространствами группы G_∞. Здесь будет выяснена связь между однородным пространством $G_Q \setminus G_A$ и однородными пространствами $\Gamma_m \setminus G_\infty$ группы G_∞ вещественных унимодулярных матриц 2-го порядка, где Γ_m — конгруэнцподгруппа. Напомним, что конгруэнцподгруппа Γ_m, где m — любое натуральное число, состоит из всех целочисленных унимодулярных матриц вида

$$\gamma = e + m\gamma',$$

где e — единичная матрица, γ' — целочисленная матрица.

Рассмотрим пространства $H_m = L_2(\Gamma_m \setminus G_\infty)$. По определению, эти пространства состоят из функций $f(g)$ на G_∞, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\quad f(\gamma g) = f(g)$ для любого $\gamma \in \Gamma_m$;

2) $\quad \displaystyle\int_{\Gamma_m \setminus G_\infty} |f(g)|^2\, dg < \infty.$

Очевидно, что если m делится на n, то $\Gamma_m \subset \Gamma_n$, а потому для соответствующих пространств имеет место обратное включение $H_n \subset H_m$.

Таким образом, пространства H_m образуют прямой спектр. Мы покажем, что *предел по спектру пространств* H_m *есть пространство* $L_2(X) = L_2(G_Q \setminus G_A)$.

Для доказательства установим изоморфизм пространств H_m с некоторыми подпространствами пространства $L_2(X)$, которые сейчас будут определены.

Обозначим через U^m, где m — любое натуральное число, подгруппу аделей вида

$$g = (1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p,\ \ldots),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1) $u_p \in U_p$, где U_p — подгруппа целочисленных p-адических матриц, $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$

2) если m делится на p^n, то $u_p \equiv e \pmod{p^n}$, где e — единичная матрица.

Очевидно, что подгруппы $U^{(m)}$ компактны и что среди этих подгрупп имеются сколь угодно малые (т. е. в любой окрестности единичного элемента группы G_A содержится хотя бы одна такая подгруппа).

Обозначим через $L_2^{(m)}(X)$ подпространство функций из $L_2(X)$, удовлетворяющих следующему условию:

$$f\left(gu^{(m)}\right) = f(g) \quad \text{для любого} \quad u^{(m)} \in U^{(m)}.$$

Очевидно, что если m делится на n, то $U^{(m)} \subset U^{(n)}$, а потому для соответствующих пространств $L_2^{(m)}(X)$ и $L_2^{(n)}(X)$ имеет место обратное включение:

$$L^{(n)}(X) \subset L^{(m)}(X).$$

Таким образом, пространства $L_2^{(m)}(X)$ образуют прямой спектр. Их предел по спектру совпадает со всем пространством $L_2(X)$. (Это следует непосредственно из того, что среди подгрупп $U^{(m)}$ существуют сколь угодно малые.) Мы докажем, что

$$H_m \cong L_2^{(m)}(X). \tag{1}$$

Предварительно докажем, что

$$\Gamma_m \setminus G_\infty \cong G_Q \setminus G_A / U^{(m)}. \tag{2}$$

Для доказательства изоморфизма (2) воспользуемся следующим результатом.

Для любого аделя g и любого натурального числа m существует такой главный адель γ, что $\gamma g=\tilde{g}_\infty u^{(m)}$, где $\tilde{g}_\infty\equiv(g_\infty, 1, 1, \ldots)$ и $u^{(m)}\in U^{(m)}$. (Этот результат по существу был установлен в п. 2. Правда, этим мы доказали более слабое утверждение: существует такой главный адель γ, что $\gamma g=g_\infty u^{(1)}$. Однако, несколько видоизменяя рассуждения п. 2, нетрудно получить и сформулированный здесь результат.)

Из сформулированного результата вытекает, что в каждом двустороннем классе смежности $G_Q\setminus G_A/U^{(m)}$ содержатся представители вида $\tilde{g}_\infty\equiv(g_\infty, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Покажем, что множество элементов $g_\infty\in G_\infty$, отвечающих одному и тому же двустороннему классу смежности $G_Q\setminus G_A/U^{(m)}$, образует класс смежности $\Gamma_m g_\infty$. Тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие

$$G_Q\setminus G_A/U^{(m)}\longleftrightarrow\Gamma_m\setminus G_\infty. \tag{3}$$

В самом деле, два элемента $\tilde{g}_\infty$, $\tilde{g}'_\infty$ принадлежат одному и тому же двустороннему классу тогда и только тогда, когда они связаны между собой соотношением

$$\tilde{\gamma}\tilde{g}_\infty=\tilde{g}'_\infty u^{(m)}, \tag{4}$$

где $\tilde{\gamma}=(\gamma, \ldots, \gamma, \ldots)$ — главный адель и $u^{(m)}\in U^{(m)}$. Равенство (4) означает, что

$$(1, \gamma, \ldots, \gamma, \ldots)\in U^{(m)}, \tag{5}$$

$$\gamma g_\infty=g'_\infty. \tag{6}$$

Но, как легко убедиться, условие (5) равносильно условию, что $\gamma\in\Gamma_m$. Таким образом, соотношение (4) эквивалентно условию, что $\gamma g_\infty=g'_\infty$, где $\gamma\in\Gamma_m$.

Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между точками пространств $\Gamma_m\setminus G_\infty$ и $G_Q\setminus G_A/U^{(m)}$. Нетрудно убедиться, что это соответствие является гомеоморфизмом.

Установленное соответствие индуцирует взаимно однозначное соответствие

$$\varphi_m:\ f(g_\infty)\to F(g)$$

между функциями, $f(g_\infty)$, $g_\infty\in G_\infty$, постоянными на классах смежности $\Gamma_m\setminus G_\infty$, и функциями $F(g)$, $g\in G_A$, постоянными на двусторонних классах смежности $G_Q\setminus G_A/U^{(m)}$.

Легко проверяются следующие свойства отображения φ_m.

1) Образом пространства $L_2(\Gamma_m\setminus G_\infty)$ при отображении φ_m является пространство $L_2^{(m)}(X)$.

2) φ_m является изометричным отображением $L_2(\Gamma_m\setminus G_m)$ на $L_2^{(m)}(X)$.

3) Для любых натуральных чисел m, n, где m делится на n, следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} L_2(\Gamma_n\setminus G_\infty) & \xrightarrow{\varphi_n} & L_2^{(n)}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_2(\Gamma_m\setminus G_\infty) & \xrightarrow{\varphi_m} & L_2^{(m)}(X). \end{array}$$

(Вертикальные стрелки обозначают изоморфизм вложения.)

Проверка этих свойств предоставляется читателю.

Итак, для любого m мы установили изометрическое отображение пространства $L_2(\Gamma_m\setminus G_\infty)$ на пространство $L_2^{(m)}(X)$. В силу свойства 3), предел по спектру пространств $L_2(\Gamma_n\setminus G_\infty)$ изоморфен пределу по спектру пространств $L_2^{(m)}(X)$, т. е. изоморфен пространству $L_2(X)$.

Таким образом, доказано, что прямой спектр пространств $L_2(\Gamma_m\setminus G_\infty)$ изоморфен пространству $L_2(X)$ *).

На самом деле имеет место более сильный результат. Именно, пространство $L_2(X)$ естественно рассматривать как модуль над кольцом $S(G_A)$ функций Шварца — Брюа на группе G_A. Умножение функций $f(g)\in L_2(X)$ на элементы кольца $\varphi(g)\in S(G_A)$ определяется следующей формулой:

$$\varphi(g)*f(g)=\int f(gg')\,\varphi(g')\,dg'. \tag{7}$$

*) Попутно отметим, что пространства $\Gamma_m\setminus G_\infty\cong G_Q\setminus G_A/U^{(m)}$ образуют обратный спектр, и их предел по спектру есть пространство $G_Q\setminus G_A$.

С другой стороны, каждое из пространств $L_2^{(m)}(X) \cong H_m$ является модулем над подкольцом $S_m(G_A)$ функций Шварца — Брюа, постоянных на двусторонних классах $U^{(m)} \setminus G_A / U^{(m)}$.

Легко убедиться, что *пространство* $L_2(X)$, *рассматриваемое как модуль над кольцом* $S(G_A)$ *функций Шварца — Брюа на группе* G_A, *является в естественном смысле**) *прямым спектром пространств* $L_2^{(m)}(X) \cong H_m$, *рассматриваемых как модули над подкольцами* $S_m(G_A)$ *функций Шварца — Брюа, постоянных на двусторонних классах смежности* $U^{(m)} \setminus G_A / U^{(m)}$.

В заключение выясним, как элементы кольца $S_m(G_A)$ действуют в пространстве $H_m = L_2(\Gamma_m \setminus G_\infty)$.

Заметим, что кольцо $S_m(G_A)$ является тензорным произведением двух колец:

$$S_m(G_A) = S(G_\infty) \otimes S_m(G_a),$$

где $S(G_\infty)$ — кольцо функций на группе G_∞, а $S_m(G_a)$ — кольцо функций на группе G_a аделей вида $(1, g_2, \ldots, g_p, \ldots)$, постоянных на двусторонних классах смежности $U_m \setminus G_a / U_m$.

Очевидно, что элементы $\varphi \in S(G_\infty)$ действуют в пространстве $H_m = L_2(\Gamma_m \setminus G_\infty)$ по формуле

$$\varphi(g_\infty) * f(g_\infty) = \int f(g_\infty g'_\infty)\, \varphi(g'_\infty)\, dg'_\infty.$$

---

*) Приведем общее определение прямого спектра модулей. Пусть задана совокупность колец R_m и совокупность R_m-модулей H_m, где m пробегает некоторое частично упорядоченное множество индексов (как обычно, предполагается, что для любых m_1, m_2 существует такое m, что $m \succ m_1$, $m \succ m_2$). Предположим, что каждой упорядоченной паре индексов $n \prec m$ сопоставлены мономорфизм $R_n \xrightarrow{\varphi_{nm}} R_m$ кольца R_n в кольцо R_m и мономорфизм $H_n \xrightarrow{\psi_{nm}} H_m$ пространства H_n в пространство H_m, удовлетворяющие следующим условиям:

1) Если $p \prec m \prec n$, то $\varphi_{pm}\varphi_{mn} = \varphi_{pn}$, $\psi_{pm}\psi_{mn} = \psi_{pn}$;

2) если $r \in R_n$, $h \in H_n$, то $\psi_{nm}(rh) = \varphi_{nm}(r)\,\psi_{nm}(h)$.

В силу условий 1) и 2) мономорфизмы φ_{nm} и ψ_{nm} можно интерпретировать как вложения.

Пусть H — предел по спектру пространств H_m, R — предел по спектру колец R_m. Тогда в H естественным образом вводится структура R-модуля. Полученный R-модуль H и называется прямым спектром R_m-модулей H_m.

Поэтому остается выяснить, как действуют элементы кольца $S_m(G_A)$.

Предварительно заметим, что в силу результата, сформулированного на стр. 418, любой элемент группы G_a представим в виде

$$g = \tilde{\gamma} u^{(m)}, \tag{8}$$

где $u^{(m)} \in U^{(m)}$, $\tilde{\gamma} = (1, \gamma, \ldots, \gamma, \ldots)$, γ — матрица над полем Q. При этом матрица γ определена однозначно, с точностью до умножения справа на элементы из Γ_m. Отсюда непосредственно следует, что

$$U^{(m)} \setminus G_a / U^{(m)} \cong \Gamma_m \setminus G_Q / \Gamma_m,$$

а потому кольцо $S_m(G_A)$ изоморфно кольцу $S_m(G_Q)$ функций на G_Q, постоянных на двусторонних классах смежности $\Gamma_m \setminus G_Q/\Gamma_m$ (и отличных от нуля лишь на конечном множестве таких классов).

Напишем, как действует кольцо $S_m(G_A)$ в пространстве $L_2^{(m)}(X)$. Как мы знаем, произведение функции $f \in L_2^{(m)}(X)$ на $\varphi \in S_m(G_A)$ выражается следующей формулой:

$$\varphi(g) * f(g) = \int_{G_a} f(gg')\, \varphi(g')\, dg'.$$

Подставляя сюда вместо элемента g' выражение (8), получаем

$$\varphi * f = \sum_{\gamma \in G_Q/\Gamma_m} f\left(g\tilde{\gamma} u^{(m)}\right) \varphi\left(\tilde{\gamma} u^{(m)}\right) du^{(m)} = \\ = \operatorname{mes} U^{(m)} \sum_{\gamma \in G_Q/\Gamma_m} f(g\tilde{\gamma})\, \varphi(\tilde{\gamma}). \tag{9}$$

Перейдем теперь от пространства $L_2^{(m)}(X)$ к изоморфному ему пространству $H_m = L_2(\Gamma_m \setminus G_\infty)$. Напомним, что соответствие между функциями $f(g) \in L_2^{(m)}(X)$ и функциями $F(g_\infty) \in L_2(\Gamma_m \setminus G_\infty)$ осуществляется по формуле

$$F(g_\infty) = F(\tilde{g}_\infty),$$

где $\tilde{g}_\infty = (g_\infty, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Очевидно, что при этом соответствии функции $f_\gamma(g) = f(g\tilde{\gamma})$ отвечает функция $F_1(g_\infty) = F(\gamma^{-1} g_\infty)$.

Таким образом, *в пространстве* $H_m = L_2(\Gamma_m \setminus G_\infty)$ *умножение на элементы кольца* $S_m(G_Q) \cong S_m(G_a)$ *выражается следующей формулой*:

$$\varphi * F = c_m \sum_{\gamma \in G_Q/\Gamma_m} \varphi(\gamma) F(\gamma^{-1} g_\infty), \tag{10}$$

где

$$c_m = \operatorname{mes} U^{(m)} = (\Gamma_1 : \Gamma_m)^{-1}.$$

Пусть φ_{γ_0} обозначает характеристическую функцию двустороннего класса смежности $\Gamma_m \gamma_0 \Gamma_m$. Поскольку любая функция $\varphi \in S_m(G_Q)$ является линейной комбинацией функций φ_{γ_0}, то для задания закона умножения на элементы кольца $S_m(G_Q)$ достаточно указать закон умножения на функции φ_{γ_0}. На основании общей формулы (10) мы имеем

$$\varphi_{\gamma_0} * F = c_m \sum_{\gamma \in G_Q/\Gamma_m}^{(\gamma_0)} F(\gamma^{-1} g_\infty),$$

где суммирование ведется по множеству классов $\gamma\Gamma_m$, входящих в заданный двусторонний класс $\Gamma_m \gamma_0 \Gamma_m$. Нетрудно убедиться, что это множество всегда конечно.

Оператор $F \to \varphi_{\gamma_0} * F$ называется оператором Гекке.

2. Обобщенная гипотеза Петерсона. В этом пункте нам будет удобнее вместо группы унимодулярных матриц 2-го порядка рассматривать проективную группу, т. е. полную группу матриц 2-го порядка, факторизованную по ее центру. Обозначим эту группу через G.

Выскажем гипотезу о спектре пространства $L_2(G_Q \setminus G_A)$, которую мы назовем обобщенной гипотезой Петерсона.

Рассмотрим неприводимое унитарное представление $T(g)$ группы G_A. Согласно § 3, оно является тензорным произведением

$$T(g) = T_\infty(g_\infty) \otimes T_2(g_2) \otimes \ldots \otimes T_p(g_p) \otimes \ldots$$

неприводимых унитарных представлений $T_p(g_p)$ групп G_p, причем все $T_p(g_p)$, кроме конечного числа, являются представлениями класса 1.

Гипотеза 1. *Если неприводимое унитарное представление* $T(g) = T_\infty(g_\infty) \otimes T_2(g_2) \otimes \ldots \otimes T_p(g_p) \otimes \ldots$ *принадлежит дискретной части спектра простран-*

ства $L_2(G_Q \setminus G_A)$, то среди представлений $T_p(g_p)$ лишь конечное число может принадлежать дополнительной серии.

Мы покажем здесь, что для частного случая, когда $T_\infty(g_\infty)$ — представление дискретной серии, эта гипотеза эквивалентна гипотезе Петерсона, которая будет сформулирована ниже. При этом мы воспользуемся установленной в п. 1 связью между пространствами $G_Q \setminus G_A$ и $\Gamma_m \setminus G_\infty$. (Эта связь была установлена для случая группы унимодулярных матриц, однако все сказанное там переносится без изменений на группу дробно-линейных преобразований.)

Рассмотрим автоморфные формы веса n относительно конгруэнцподгруппы Γ_m, т. е. аналитические функции $f(z)$ на полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, удовлетворяющие для любого $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ из Γ_m условию

$$f(gz)\, j^{-n}(z,\ g) = f(z),$$

где $gz = \dfrac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}$, $j(z,\ g) = \beta z + \delta$.

В § 4 главы I было доказано, что размерность пространства автоморфных форм веса n конечна и равна кратности, с которой соответствующее представление $T_n^+(g)$ дискретной серии содержится в $L_2(\Gamma_m \setminus G_\infty)$.

Сопоставим каждому двустороннему классу смежности $\Gamma_m \gamma \Gamma_m$ группы матриц с элементами из поля рациональных чисел по подгруппе Γ_m оператор $S_\gamma^{m,\,n}$ в пространстве автоморфных форм веса n относительно подгруппы Γ_m:

$$S_\gamma^{m,\,n} f(z) = \frac{1}{n_\gamma} \sum_{\gamma_i \in \Gamma_m \setminus G_a}^{(\gamma)} f(\gamma_i z)\, j^{-n}(z,\ \gamma_i), \tag{1}$$

где сумма берется по множеству классов смежности $\Gamma_m \gamma_i$, входящих в заданный двусторонний класс $\Gamma_m \gamma \Gamma_m$; n_γ — число таких классов. (Как уже отмечалось в п. 1, это множество всегда конечно.) Операторы $S_\gamma^{m,\,n}$ будем называть **операторами Гекке** в пространстве автоморфных форм. Без труда проверяется, что операторы Гекке переводят автоморфные формы снова в автоморфные формы.

В дальнейшем будем рассматривать лишь операторы Гекке отвечающие матрицам

$$\gamma_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

где p — простое число, не делящее числа m. Для краткости обозначим эти операторы через S_p.

Нетрудно убедиться, что операторы S_p являются самосопряженными и что они коммутируют между собой. Таким образом, пространство автоморфных форм может быть разложено в прямую сумму одномерных пространств, инвариантных относительно операторов S_p. Обозначим через $\lambda_p^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \lambda_p^{(s)}$ (s — размерность пространства автоморфных форм) собственные значения операторов Гекке S_p на этих подпространствах.

Гипотеза 2 (Петерсона). *Для всех простых p, за исключением, быть может, конечного числа таких p, имеет место следующая оценка для собственных значений операторов Гекке S_p:*

$$|\lambda_p^{(k)}| < 2\sqrt{p}, \qquad k = 1, \ldots, s.$$

Здесь будет установлена связь между гипотезами 1 и 2. Именно, будет показано, что *гипотеза 1 для частного случая, когда $T_\infty(g_\infty)$ — представление дискретной серии с номером n, эквивалентна гипотезе Петерсона для пространства автоморфных форм веса n.*

Для этого установим соответствие между неприводимыми представлениями $T(g)$ группы G_A, принадлежащими дискретному спектру пространства $L_2(G_Q \setminus G_A)$, и автоморфными формами.

Итак, пусть

$$T(g) = T_\infty(g_\infty) \otimes T_2(g_2) \otimes \ldots \otimes T_p(g_p) \otimes \ldots —$$

неприводимое представление группы G_A, принадлежащее дискретному спектру пространства $L_2(G_Q \setminus G_A)$; $H \subset L_2(G_Q \setminus G_A)$ — подпространство, в котором действует это представление. При этом предполагается, что $T_\infty(g_\infty)$ — представление дискретной серии с номером n.

Разберем сначала случай, когда все представления $T_2(g_2), \ldots, T_p(g_p), \ldots$ являются представлениями класса 1.

т. е. каждое из них является представлением основной или дополнительной серии.

Рассмотрим проекционный оператор

$$P_1 = \int\limits_{U^{(\mathrm{I})}} T(u)\,du,$$

где интеграл берется по подгруппе $U^{(\mathrm{I})}$ аделей вида $(1, u_2, \ldots, u_p, \ldots)$, $u_p \in U_p$ — подгруппа целочисленных p-адических матриц. Оператор P_{I} проектирует пространство $H \subset L_2(G_Q \setminus G_A)$ в некоторое подпространство $H^{(1)} \subset L_2^{(\mathrm{I})}(G_Q \setminus G_A)$ (по поводу обозначений см. п. 1). В силу изоморфизма

$$L_2^{(1)}(G_Q \setminus G_A) \cong L_2(\Gamma_1 \setminus G_\infty),$$

подпространству $H^{(1)}$ отвечает подпространство $\widetilde{H}^{(1)} \subset L_2(\Gamma_{\mathrm{I}} \setminus G_\infty)$.

Нетрудно убедиться, что $\widetilde{H}^{(1)}$ — инвариантное неприводимое подпространство пространства $L_2(\Gamma_1 \setminus G_\infty)$, рассматриваемого как модуль над кольцом $S(G_\infty) \otimes S_{\mathrm{I}}(G_Q)$, где $S_1(G_Q)$ — кольцо функций на G_Q, постоянных на двусторонних классах смежности $\Gamma_1 \setminus G_Q / \Gamma_1$. При этом действующее в $\widetilde{H}_1^{(1)}$ представление группы G_∞ принадлежит дискретной серии и имеет номер n.

В силу теоремы двойственности, пространству $\widetilde{H}^{(1)}$ можно сопоставить одномерное подпространство автоморфных форм. Это подпространство автоморфных форм обладает следующими свойствами, проверка которых предоставляется читателю:

1) оно инвариантно относительно операторов Гекке S_p;

2) собственные значения операторов S_p на этом подпространстве выражаются следующей формулой:

$$\lambda_p = \nu_p \varphi(\gamma_p), \tag{2}$$

где ν_p — число классов смежности $\Gamma_{\mathrm{I}}\gamma$, содержащихся в данном двустороннем классе $\Gamma_1\gamma_p\Gamma_{\mathrm{I}}$, $\gamma_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, а $\varphi_p(g_p)$ — элементарная сферическая функция, отвечающая представлению $T_p(g_p)$.

На основании формулы (2) нетрудно получить явное выражение для λ_p. Прежде всего, заметим, что ν_p равно индексу

$$\nu_p = \Gamma_1 : \Gamma^{(p)}$$

подгруппы $\Gamma^{(p)} = \gamma_p \Gamma_1 \gamma_p^{-1} \cap \Gamma_1$ в группе Γ_1 *). Подгруппа $\Gamma^{(p)}$ состоит из всех целочисленных матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, у которых c кратно p. Следовательно (см. Добавление к гл. I, стр. 159),

$$\nu_p = 1 + p.$$

С другой стороны, простой выкладкой, аналогично приведенной в гл. II, § 3, п. 10, для случая унимодулярной группы получаем

$$\varphi(\gamma_p) = \frac{\sqrt{p}}{p+1}\left(p^{s_p} + p^{-s_p}\right) = \frac{2\sqrt{p}}{p+1}\operatorname{ch}(s_p \ln p),$$

где s — «номер» представления $T_p(g_p)$, т. е. мнимое число в случае представления основной серии и вещественное число из интервала $-1 < s < 1$ в случае представления дополнительной серии.

Таким образом, собственное значение оператора Гекке на одномерном подпространстве автоморфных форм выражается следующей формулой:

$$\lambda_p = 2\sqrt{p}\operatorname{ch}(s_p \ln p). \tag{3}$$

Итак, каждому неприводимому представлению $T(g) = T_\infty(g_\infty) \otimes T_2(g_2) \otimes \ldots \otimes T_p(g_p) \otimes \ldots$ группы G_A, принадлежащему дискретной части спектра пространства $L_2(G_Q \setminus G_A)$, где $T_\infty(g_\infty)$ — представление дискретной серии с номером n, а $T_2(g_2), \ldots, T_p(g_p), \ldots$ — представления класса 1, мы сопоставили одномерное пространство автоморфных форм веса n относительно модулярной группы Γ_1. Это пространство инвариантно относительно операторов

*) В самом деле, имеет место взаимно однозначное соответствие $\gamma\Gamma^{(p)} \longleftrightarrow \gamma\gamma_p\Gamma_1$ между классами $\Gamma_1/\Gamma^{(p)}$ и классами смежности G_Q/Γ_1, принадлежащими двустороннему классу $\Gamma_1\gamma_p\Gamma_1$.

Гекке S_p, причем собственные значения λ_p операторов S_p выражаются через номера s_p представлений $T_p(g_p)$ по формуле (3).

Осуществляя приведенную конструкцию в обратном порядке, мы можем по заданному одномерному подпространству автоморфных форм, инвариантному относительно операторов Гекке, построить неприводимое представление $T(g) = T_\infty(g_\infty) \otimes T_2(g_2) \otimes \ldots \otimes T_p(g_p) \otimes \ldots$ группы G_A, принадлежащее дискретному спектру пространства $L_2(G_Q \setminus G_A)$, где $T_\infty(g_\infty)$ — представление дискретной серии с номером n, а $T_2(g_2), \ldots, T_p(g_p), \ldots$ — представления класса 1.

Аналогичная конструкция имеет место и в случае представлений $T(g) = T_\infty(g_\infty) \otimes T_2(g_2) \otimes \ldots \otimes T_p(g_p) \otimes \ldots$, где некоторые из представлений $T_p(g_p)$ не принадлежат классу 1. В этом случае можно всегда указать такое m, что в пространстве представления $T(g)$ существует вектор, инвариантный относительно операторов $T(u)$, $u \in U^{(m)}$. (Определение подгруппы $U^{(m)}$ см. на стр. 417.)

Тогда, повторяя предыдущую конструкцию, мы можем сопоставить этому представлению автоморфную форму относительно подгруппы Γ_m, являющуюся собственной функцией операторов Гекке S_p, где p пробегает простые числа, не делящие m. При этом собственные значения операторов S_p, отвечающие этой форме, по-прежнему выражаются формулой (3). Обратно, если задана такая автоморфная форма, то по ней однозначно строится неприводимое представление группы G_A, принадлежащее дискретному спектру пространства $L_2(G_Q \setminus G_A)$ и содержащее вектор, инвариантный относительно подгруппы $U^{(m)}$.

Из установленного соответствия между представлениями $T(g)$ и автоморфными формами и из формулы (3) для собственных значений операторов Гекке непосредственно следует эквивалентность гипотезы Петерсона и частного случая гипотезы 1. Для этого достаточно заметить, что, в силу формулы (3), неравенство

$$|\lambda_p| < 2\sqrt{p} \tag{4}$$

имеет место тогда и только тогда, когда «номер» s_p представления $T_p(g_p)$ есть мнимое число, т. е. это представление принадлежит основной серии.

Итак, гипотеза Петерсона о том, что неравенство (4) имеет место для всех простых p, кроме конечного числа, эквивалентна утверждению, что в соответствующем представлении $T(g) = T_\infty(g_\infty) \otimes T_2(g_2) \otimes \ldots \otimes T_p(g_p) \otimes \ldots$ группы G_A все представления $T_p(g_p)$, кроме конечного числа, принадлежат основной серии.

§ 5. Пространство орисфер

1. Редуктивные алгебраические группы. Пусть G — линейная алгебраическая группа, определенная над полем рациональных чисел Q. Группа G называется *редуктивной*, если она не содержит унипотентных *) связных как алгебраическое многообразие нормальных делителей, отличных от тривиального.

Если в группе G нет также и связных разрешимых нормальных делителей, отличных от тривиального, то она называется полупростой. Любая редуктивная группа является прямым произведением полупростой группы и некоторого тора, т. е. коммутативной группы матриц, приводимой к диагональному виду над полем комплексных чисел.

Приведем без доказательств некоторые основные свойства редуктивных групп. Подробно эти вопросы освещены в статьях [2], [4], [5], к которым мы и отсылаем читателя.

Обозначим через Z максимальную связную определенную над полем Q унипотентную подгруппу группы G *). Отметим, что все максимальные унипотентные подгруппы сопряжены между собой.

Пусть G' обозначает нормализатор подгруппы Z, т. е. совокупность элементов g', для которых $Zg' = g'Z$. Очевидно, что G' — алгебраическая подгруппа группы G, определенная также над Q.

Подгруппа Z является, очевидно, максимальным связным унипотентным нормальным делителем группы G'. Отсюда следует, что группу G' можно представить в виде полупрямого произведения

$$G' = DZ, \tag{1}$$

*) Группа матриц называется унипотентной, если все собственные значения матриц равны единице.

где D — редуктивная группа. При этом все элементы группы D являются полупростыми, т. е. могут быть приведены к диагональной форме.

Обозначим через N нормализатор группы D. Доказывается, что фактор-группа

$$S = N_Q/D_Q \tag{2}$$

всегда конечна. Эта фактор-группа называется группой Вейля. Каждый элемент s группы Вейля определяет некоторый автоморфизм группы D:

$$\delta \to s^{-1}\delta s.$$

Устанавливается, что имеет место следующее разложение:

$$G_Q = Z_Q N_Q Z_Q. \tag{3}$$

В некоторых работах разложение (3) называют обобщенной леммой Брюа. Это разложение для классических комплексных групп было получено И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [19], § 18 и § 34. Там же была впервые вскрыта фундаментальная роль этого разложения в теории представлений. Это разложение получило широкую известность после работы Брюа [63], обратившего внимание математиков на это разложение. Доказательство разложения (3) для вещественных полупростых групп принадлежит Хариш Чандра. Наиболее общие исследования в этом вопросе принадлежат Титсу и Борелю.

Обозначим теперь через T максимальный расщепимый над Q тор в D. Нетрудно убедиться, что тор T лежит в центре группы D и что группа Вейля S переводит этот тор в себя.

Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{T}$ — алгебра Ли подгруппы T. Сопоставим каждому $t \in \mathfrak{T}$ линейное преобразование $\operatorname{ad} t$ в пространстве $\mathfrak{G}$: $\operatorname{ad} t: \mathfrak{g} \to [t, \mathfrak{g}]$ (присоединенное представление алгебры $\mathfrak{T}$).

Алгебру $\mathfrak{G}$ можно представить в виде прямой суммы

$$\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{G}_\alpha \tag{4}$$

подпространств $\mathfrak{G}_\alpha$, на каждом из которых операторы $\operatorname{ad} t$ кратны единичному оператору, т. е.

$$[t, \mathfrak{g}_\alpha] = \alpha(t)\, \mathfrak{g}_\alpha$$

для любого $t \in \mathfrak{T}$ и любого $\mathfrak{g}_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha$. Здесь $\alpha(t)$ — линейные функции на $\mathfrak{T}$.

Подпространство $\mathfrak{G}_0$, отвечающее $\alpha(t) \equiv 0$, является алгеброй Ли группы D. Это подпространство можно представить в виде суммы

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{T} + \mathfrak{C},$$

где $\mathfrak{C}$ — дополнение алгебры $\mathfrak{T}$ в алгебре $\mathfrak{G}_0$. Таким образом, разложение (4) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T} + \mathfrak{C} + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{G}_\alpha. \tag{5}$$

Отметим, что операторы ad $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_0 \in \mathfrak{G}_0$, также переводят каждое пространство $\mathfrak{G}_\alpha$ в себя.

Нетривиальные линейные функции $\alpha(t)$, возникающие при разложении (4), принято называть корнями. Обозначим через Σ множество всех корней.

Пусть E обозначает пространство всех линейных функций, определенных над Q. Очевидно, что в пространстве E естественным образом действует группа Вейля S.

Если G — полупростая группа, то имеют место следующие предложения:

1) В E существует скалярное произведение (ξ, η), инвариантное относительно группы Вейля S.

2) Среди векторов из Σ имеется в точности n линейно независимых, где n — размерность пространства E.

3) Для любых двух корней $\alpha, \beta \in \Sigma$ отношение

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$$

является целым числом.

4) Система Σ инвариантна относительно отражений, отвечающих корням $\alpha \in \Sigma$, т. е. относительно преобразований

$$\beta \to \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

Введем в пространство E лексикографическое упорядочение. Именно, введем в E произвольным образом систему координат; будем говорить, что $\alpha > \beta$, если первая отличная от нуля координата вектора $\alpha - \beta$ есть положительное число.

Назовем корень α положительным, если $\alpha > 0$, и отрицательным, если $\alpha < 0$. Таким образом, множество всех корней распадается на корни положительные и корни отрицательные. Назовем положительный корень простым, если его нельзя представить в виде суммы других положительных корней. Справедливы следующие предложения:

5) Простые корни линейно независимы и их число равно размерности пространства E.

6) Всякий положительный корень является суммой простых корней.

7) Отражения относительно простых корней порождают всю группу Вейля.

8) Подалгебра $\mathfrak{Z} = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{G}_\alpha$, где сумма берется по всем положительным корням, является максимальной нильпотентной подалгеброй в $\mathfrak{G}$.

Условимся называть редуктивную группу G **расщепимой**, если размерность максимального расщепимого над Q тора в G равна размерности максимального расщепимого над C тора в G.

2. Пространство $L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$. Пусть G — алгебраическая редуктивная группа, определенная над полем Q рациональных чисел. Обозначим через Z ее максимальную унипотентную подгруппу и через G' нормализатор подгруппы Z в группе G. Как уже отмечалось в п. 1, этот нормализатор разлагается в полупрямое произведение $G' = DZ$ своего нормального делителя Z и редуктивной подгруппы D, все элементы которой являются полупростыми.

В этом пункте будет получено разложение представления группы G_A, порожденного пространством $\Omega = D_Q Z_A \setminus G_A$, т. е. представления в $L_2(\Omega)$, на неприводимые представления. Случай, когда G_A — группа матриц 2-го порядка над A, был уже рассмотрен в § 4.

Аналогичная задача решалась в главе I. Там было получено разложение представления группы G_∞ вещественных матриц, порожденного пространством $Z_\infty \setminus G_\infty$. Основную роль при этом играла подгруппа диагональных матриц. Именно, было установлено взаимно однозначное соответствие между характерами (т. е. одномерными представлениями) подгруппы диагональных матриц и неприводимыми представлениями группы G_∞, входящими в $L_2(Z_\infty \setminus G_\infty)$.

Мы увидим, что аналогичная ситуация имеет место и в нашем случае. Основную роль при разложении представления группы G_A в пространстве $L_2(\Omega)$ будет играть группа D_A, являющаяся аналогом группы диагональных матриц.

Сначала рассмотрим задачу о разложении представления группы D_A, порожденного пространством $D_Q \setminus D_A$, на неприводимые представления. Это представление действует в пространстве $H = L_2(D_Q \setminus D_A)$ функций $f(\delta)$, $\delta \in D_A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(\delta_Q \delta) = f(\delta)$ для любого $\delta_Q \in D_Q$;

2) $\int\limits_{D_Q \setminus D_A} |f(\delta)|^2 \, d\delta < \infty$.

Операторы представления $T(\delta)$ являются операторами сдвига:

$$T(\delta_0) f(\delta) = f(\delta \delta_0).$$

Пусть K — центр группы D. Рассмотрим характеры $\pi(k)$ на K_A, равные тождественно единице на K_Q. Сопоставим каждому характеру $\pi(k)$ пространство H_π функций $f_\pi(\delta)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f_\pi(\delta_Q \delta) = f_\pi(\delta)$ для любого $\delta_Q \in D_Q$;

2) $f_\pi(k\delta) = \pi(k) f_\pi(\delta)$ для любого $k \in K_A$;

3) $\| f_\pi \|_\pi^2 \equiv \int\limits_{D_Q \setminus D_A / K_A} | f_\pi(\delta) |^2 \, d\delta < \infty$.

Нетрудно видеть, что *пространство* $H = L_2(D_Q \setminus D_A)$ *разлагается в непрерывную прямую сумму пространств* H_π:

$$H = \int H_\pi \, d\pi. \tag{1}$$

Это разложение осуществляется следующими формулами:

$$f(\delta) = \int f_\pi(\delta) \, d\pi; \tag{2}$$

$$\| f \|^2 = \int \| f_\pi \|_\pi^2 \, d\pi, \tag{3}$$

где интегрирование ведется по инвариантной мере $d\pi$ на группе характеров π. При этом компонента f_π функции

$f \in H$ в пространстве H_π задается следующей формулой:

$$f_\pi(\delta) = \int\limits_{K_Q \setminus K_A} \overline{\pi}(k) f(k\delta)\, dk. \tag{4}$$

Остается разложить каждое из пространств H_π на неприводимые подпространства.

Из того, что все элементы группы D являются полупростыми, вытекает, что пространство $D_Q \setminus D_A / K_A$ компактно (см. § 6, п. 1). Отсюда следует, как мы докажем позднее в п. 2 § 6, что *пространство H_π разлагается в прямую сумму счетного числа инвариантных неприводимых подпространств $H_\pi^{(n)}$*:

$$H_\pi = \sum_n H_\pi^{(n)}. \tag{5}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что разложение пространства $H = L_2(D_Q \setminus D_A)$ в прямую сумму пространств $H_\pi^{(n)}$ (формулы (1) и (5)) нам известно.

Мы покажем, что это разложение индуцирует разложение пространства $\widetilde{H} = L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$ в прямую сумму инвариантных пространств $\widetilde{H}_\pi^{(n)}$: $\widetilde{H} = \int \widetilde{H}_\pi\, d\pi$; $\widetilde{H}_\pi = \sum\limits_n \widetilde{H}_\pi^{(n)}$.

Предварительно введем удобную реализацию пространства $\widetilde{H}$. Рассмотрим однородное пространство $Y = Z_A \setminus G_A$. Заметим, что при умножении каждого класса смежности $y = Z_A g$ слева, на элемент $\delta \in D_A$ этот класс переходит в другой класс смежности, который мы условимся обозначать через δg. Таким образом, элементы $\delta \in D_A$ задают в пространстве Y преобразования

$$y \to \delta y,$$

которые мы назовем **л е в ы м и с д в и г а м и**.

Очевидно, что левые сдвиги перестановочны с преобразованиями группы G_A, т. е.

$$\delta(yg) = (\delta y)\, g.$$

В терминах левых сдвигов пространство $\widetilde{H} = L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$ может быть определено как пространство функций $f(y)$ на

$Y = Z_A \setminus G_A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(\delta_Q y) = f(y)$ для любого $\delta_Q \in D_Q$;

2) $\|f\|^2 = \int\limits_{D_Q \setminus Y} |f(y)|^2\, dy < \infty$.

Теперь введем меру в пространстве $D_A \setminus Y$. Пусть dy — мера на Y, инвариантная относительно преобразований группы G_A. Тогда для любого $\delta \in D_A$ мера $d_1 y = d(\delta y)$ также является инвариантной мерой на Y, а потому она пропорциональна мере dy. Обозначим множитель пропорциональности через $\beta(\delta)$. Таким образом, имеем по определению

$$d(\delta y) \doteq \beta(\delta)\, dy. \tag{6}$$

Из определения следует, что функция $\beta(\delta)$ является характером на D_A, т. е.

$$\beta(\delta_1 \delta_2) = \beta(\delta_1)\,\beta(\delta_2) \text{ для любых } \delta_1,\ \delta_2 \in D_A.$$

Отметим, что $\beta(\delta_Q) = 1$ для любого $\delta_Q \in D_Q$.

Зададим на Y неотрицательную функцию $\rho(y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) Функции $\rho(y)$ и $\rho^{-1}(y)$ измеримы и суммируемы на любом компактном подмножестве;

2) $\rho(\delta y) = \beta(\delta)\,\rho(y)$ для любого $\delta \in D_A$.

Нетрудно убедиться, что такие функции $\rho(y)$ всегда существуют.

Зададим меру $d\tilde{y}$ в пространстве $D_A \setminus Y$ при помощи следующего интегрального соотношения:

$$\int\limits_{D_Q \setminus D_A} f(y)\,\rho^{-1}(y)\, dy = \int\limits_{D_A \setminus Y}\ \int\limits_{D_Q \setminus D_A} f(\delta y)\, d\delta\, d\tilde{y}, \tag{7}$$

где $f(y)$ — любая суммируемая функция на Y, удовлетворяющая условию $f(\delta_Q y) = f(y)$ для любого $\delta_Q \in D_Q$.

Из соотношения (7) непосредственно следует, что при групповом сдвиге $\tilde{y} \to \tilde{y}g$ в пространстве $D_A \setminus Y$ мера $d\tilde{y}$ преобразуется по следующей формуле:

$$d(\tilde{y}g) = \left[\frac{\rho(yg)}{\rho(y)}\right]^{-1} d\tilde{y}. \tag{8}$$

Таким образом, $d\tilde{y}$, вообще говоря, является не инвариантной, а квазиинвариантной мерой (инвариантной меры в пространстве Y может и не существовать).

Из интегрального соотношения (7) получаем следующее выражение для нормы $\|f(y)\|$ функции f в пространстве $\tilde{H}$:

$$\|f\|^2 = \int\limits_{D_A \setminus Y} \int\limits_{D_Q \setminus D_A} |f(\delta y)|^2 \beta(\delta) \rho(y)\, d\delta\, d\tilde{y}. \qquad (9)$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{D_A} |f(\delta y)|^2 \beta(\delta)\, d\delta < \infty$$

для почти всех $y \in Y$. Так как, кроме того,

$$f(\delta_Q \delta y) = f(\delta y) \text{ для любого } \delta_Q \in D_Q,$$

то этим доказано, что *функция* $\beta^{1/2}(\delta) f(\delta y)$, *рассматриваемая как функция от* δ, *принадлежит пространству* $H = L_2(D_Q \setminus D_A)$.

Поскольку разложение пространства H на неприводимые подпространства $H_\pi^{(n)}$ нам задано, из этого разложения сразу получается разложение пространства $\tilde{H} = L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$. Именно, обозначим через $\tilde{H}_\pi^{(n)}$ пространство функций $f(y)$, $y \in Y$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(\delta_Q y) = f(y)$ для любого $\delta_Q \in D_Q$.

2) Функция $\beta^{1/2}(\delta) f(\delta y)$, рассматриваемая как функция от $\delta \in D_A$, принадлежит для почти всех y пространству $H_\pi^{(n)}$.

3) $\displaystyle\int\limits_{D_A \setminus Y} \|\beta^{1/2}(\delta) f(\delta y)\|_\pi^2 \rho(y)\, d\tilde{y} < \infty,$

где $\| \ \|_\pi$ обозначает норму в пространстве H_π.

В пространстве $\tilde{H}_\pi^{(n)}$ естественным образом действует представление группы G_A. Будем говорить, что это представление индуцировано представлением группы D_A в пространстве $H_\pi^{(n)}$.

Из формулы (9) непосредственно следует, что пространство $H = L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$ разлагается на пространства $\tilde{H}_\pi^{(n)}$:

$$\tilde{H} = \int \tilde{H}_\pi, \text{ где } \tilde{H}_\pi = \sum_n \tilde{H}_\pi^{(n)}.$$

При этом компонента $f_\pi^{(n)}(y)$ вектора $f(y) \in \tilde{H}$ определяется следующим образом. Пусть $f_\pi^{(n)}(\delta, y)$ — компонента в пространстве $H_\pi^{(n)}$ функции $\beta^{1/2}(\delta) f(\delta y)$, рассматриваемой как функция от δ при фиксированном y. Тогда

$$f_\pi^{(n)}(y) = f_\pi^{(n)}(1, y).$$

Теперь установим, какие из представлений $\tilde{H}_\pi^{(n)}$ являются эквивалентными.

Прежде всего, заметим, что представления в пространствах $\tilde{H}_{\pi_1}^{(m)}$ и $\tilde{H}_{\pi_2}^{(n)}$ при $\pi_1 \neq \pi_2$ не эквивалентны. Это следует из того факта, что операторы представления, отвечающие элементам $k \in K_A$, задаются в пространстве $\tilde{H}_\pi^{(n)}$ следующей формулой:

$$T(k) f = \pi(k) f.$$

Отсюда очевидно, что при разных π не эквивалентны уже представления подгруппы K_A в пространствах $\tilde{H}_\pi^{(n)}$.

Таким образом, нужно выяснить лишь условия эквивалентности представлений в пространствах $\tilde{H}_\pi^{(n_1)}$ и $\tilde{H}_\pi^{(n_2)}$. Предварительно введем понятие представления общего положения.

Рассмотрим группу Вейля S группы G. Каждый элемент $s \in S$ задает автоморфизм

$$\delta \to \delta^s$$

группы D_A. Очевидно, что если $\tau(\delta)$ — некоторое представление группы D_A, то

$$\tau^s(\delta) \equiv \tau(\delta^s)$$

есть также представление группы D_A.

Назовем неприводимое представление $\tau(\delta)$ группы D_A *представлением общего положения*, если представления $\tau^s(\delta)$, $s \in S$ попарно не эквивалентны. Соответственно этому назовем представление $T_\tau(g)$ группы G_A, индуцированное неприводимым представлением общего положения $\tau(\delta)$ группы D_A, представлением общего положения.

Для расщепимых над Q редуктивных групп справедливы следующие два утверждения:

1. *Представления общего положения группы G_A являются неприводимыми представлениями.*

2. *Два представления общего положения в пространствах $\widetilde{H}_\pi^{n_1}$ и $\widetilde{H}_\pi^{n_2}$, индуцированные соответственно представлениями $\tau_1(\delta)$ и $\tau_2(\delta)$ группы D_A, эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$\tau_1 = \tau_2^s$$

для некоторого элемента $s \in S$.

Доказательства этих утверждений мы здесь проводить не будем. Это доказательство близко к стандартным рассуждениям теории представлений, см. И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк [19] и особенно Брюа [42], [43], [44].

Из утверждения 2 непосредственно следует, что *каждое представление $T_\tau(g)$ общего положения входит в $L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$ с кратностью, равной порядку группы Вейля S.*

3. Операторы B_s. Пусть снова G — редуктивная группа, определенная над полем Q, Z — ее максимальная унипотентная подгруппа, D — редуктивная подгруппа группы G такая, что DZ является нормализатором группы Z; N — нормализатор группы D.

Введем две важные для дальнейшего подгруппы $\widetilde{Z}^n$, Z^n группы Z, отвечающие любому фиксированному элементу $n \in N_Q$.

Пусть $\mathfrak{Z}$ — алгебра Ли группы Z, т. е.

$$\mathfrak{Z} = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{G}_\alpha \tag{1}$$

(суммирование ведется по множеству всех положительных корней). Положим для любого $n \in N_Q$

$$\widetilde{\mathfrak{Z}}^n = \sum_{\alpha > 0,\ \alpha^n > 0} \mathfrak{G}_\alpha, \tag{2}$$

$$\mathfrak{Z}^n = \sum_{\alpha > 0,\ \alpha^n < 0} \mathfrak{G}_\alpha, \tag{3}$$

где α^n обозначает результат применения к корню α элемента n группы N_Q, т. е. $\alpha^n(t) = \alpha(t^n)$, $t \in \mathfrak{T}$. (Первая сумма берется по множеству корней $\alpha > 0$, для которых $\alpha^n > 0$, а вторая — по множеству корней $\alpha > 0$, для которых $\alpha^n < 0$.) В частности, если $n \in D$, то $\tilde{\mathfrak{Z}}^n = \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^n = 0$.

Очевидно, что $\tilde{\mathfrak{Z}}^n$ и $\mathfrak{Z}^n$ являются непересекающимися подалгебрами алгебры $\mathfrak{Z}$, причем

$$\mathfrak{Z} = \tilde{\mathfrak{Z}}^n + \mathfrak{Z}^n. \tag{4}$$

Обозначим через $\tilde{Z}^n$ и Z^n подгруппы группы Z, отвечающие соответственно подалгебрам $\tilde{\mathfrak{Z}}^n$ и $\mathfrak{Z}^n$. В частности, при $n \in D$ имеем $\tilde{Z}^n = Z$, $Z^n = 1$.

Из (4) следует, что

$$Z = \tilde{Z}^n Z^n.$$

Именно, любой элемент z группы Z однозначно представим в виде произведения

$$z = \tilde{z}^n z^n,$$

где $\tilde{z}^n \in \tilde{Z}^n$, $z^n \in Z^n$.

Как нетрудно убедиться, подгруппу $\tilde{Z}^n$ можно определить непосредственно, без перехода к алгебре Ли, следующей формулой:

$$\tilde{Z}^n = Z \cap nZn^{-1}.$$

Отметим, что множество подгрупп $\tilde{Z}^n$ совпадает с множеством подгрупп Z^n. В самом деле, как известно, в группе Вейля существует элемент s_0, переводящий все положительные корни в корни отрицательные. Очевидно, что условие $\alpha^n < 0$ равносильно условию $\alpha^{ns_0} > 0$. Следовательно,

$$Z^n = \tilde{Z}^{ns_0}.$$

Обозначим через G_A, Z_A и т. д. соответственно группы аделей групп G, Z и т. д., а через G_Q, Z_Q и т. д. подгруппы главных аделей.

Сопоставим каждому $n \in N_Q$ оператор B_n в пространстве функций на $\Omega = D_Q Z_A \setminus G_A$, определяемый следующей формулой:

$$B_n f(y) = \int_{Z_A^n} f(y_0 n^{-1} z g)\, dz. \tag{5}$$

Здесь y_0 обозначает точку пространства Ω, отвечающую единичному классу смежности $D_Q Z_A$; интегрирование ведется по инвариантной мере на группе Z_A^n.

Нетрудно убедиться, что интеграл заведомо сходится, если $f(y)$—функция Шварца—Брюа на Ω. (Функции Шварца—Брюа определяются так же, как и в § 4.)

Будем называть операторы B_n операторами Вейля в пространстве функций на Ω.

Из определения непосредственно следует, что

$$B_{n\delta} = B_n \text{ для любого } \delta \in D_Q.$$

Таким образом, *операторы B_n фактически задаются элементами группы Вейля $S = N_Q/D_Q$*. Поэтому в дальнейшем мы будем часто писать B_s вместо B_n, понимая под s элемент группы Вейля.

Покажем, что *функция*

$$f_1(g) = B_n f(y)$$

постоянна на классах смежности $D_Q Z_A \setminus G_A$, т. е.

$$f_1(\delta z g) = f_1(g) \text{ для любых } \delta \in D_Q,\ z \in Z_A. \tag{6}$$

Таким образом, ее можно рассматривать как функцию на Ω.

Доказательство. Предварительно покажем, что

$$dz_A^n = d\left(\delta^{-1} z_A^n \delta\right) \text{ для любого } \delta \in D_Q. \tag{7}$$

В самом деле, обозначим через $\chi(\delta)$ определитель преобразования

$$z \to \delta^{-1} z \delta, \text{ где } \delta \in D_Q,\ z \in Z_Q.$$

Очевидно, что $\chi(\delta)$ — характер группы D_Q со значениями в Q^*. Как мы знаем из § 1,

$$dz_A^n = dz_\infty^n\, dz_2^n \ldots dz_p^n \ldots,$$

где dz_p^n — инвариантная мера на Z_p^n. Так как при отображении $z_p^n \to \delta^{-1} z_p^n \delta$ мера dz_p^n умножается на $|\chi(\delta)|_p$, то мера dz_A^n при отображении $z_A^n \to \delta^{-1} z_A^n \delta$ умножается на $\prod\limits_p |\chi(\delta)|_p = |\chi(\delta)| = 1$ (поскольку $\chi(\delta)$ — главный идель).

Из соотношения (7) сразу следует, что

$$f_1(\delta g) = \int\limits_{Z_A^n} f(y_0 n^{-1} z\, \delta g)\, dz = \int\limits_{Z_A^n} f(y_0 (n^{-1} \delta n)\, n^{-1} z g)\, dz = \int\limits_{Z_A^n} f(y_0 n^{-1} z g)\, dz.$$

(Мы воспользовались здесь тем, что $n^{-1} \delta n \in D_Q$, а потому $y_0 (n^{-1} \delta n) = y_0$.)

Итак, доказано, что

$$f_1(\delta g) = f_1(g) \text{ для любого } \delta \in D_Q.$$

Теперь докажем, что

$$f_1(z_0 g) = f_1(g)$$

для любого $z_0 \in Z_A$. Разложим элемент z_0 в произведение

$$z_0 = \tilde{z}_0^n z_0^n,$$

где $\tilde{z}_0^n \in \tilde{Z}_A^n$, $z_0^n \in Z_A^n$. Тогда имеем

$$f_1(z_0 g) = \int\limits_{Z_A^n} f\left(y_0 \left(n^{-1} \tilde{z}_0^n n\right) n^{-1} z_0^n z g\right) dz.$$

Заметим, что $n^{-1} \tilde{Z}_0^n n \in Z_A$, а потому $y_0 (n^{-1} \tilde{z}_0 n) = y_0$. Следовательно,

$$f_1(z_0 g) = \int\limits_{Z_A^n} f\left(y_0 n^{-1} z_0^n z g\right) dz = \int\limits_{Z_A^n} f(y_0 n^{-1} z g)\, dz = f_1(g).$$

(Мы воспользовались инвариантностью меры dz.) Соотношение (6) полностью доказано. Мы доказали, что

$$f_1(g) = B_n f(y)$$

является функцией на $\Omega = D_Q Z_A \setminus G_A$.

Итак, установлено, что *операторы Вейля* B_n, *определенные формулой*

$$B_n f(y) = \int_{Z_A^n} f(y_0 n^{-1} z g)\, dz, \tag{8}$$

переводят функции на $\Omega = D_Q Z_A \setminus G_A$ *снова в функции на* Ω.

Подчеркнем, что формула определяет оператор B_n пока только на дифференцируемых функциях в Ω, финитных или достаточно быстро убывающих.

4. Свойства операторов B_s. Прежде всего, отметим два важных свойства операторов B_s, которые непосредственно следуют из их определения.

1) *Операторы* B_s *перестановочны с операторами представления.*

2) *Оператор* B_s *переводит каждое неприводимое представление* $T_\tau(g)$, *индуцированное представлением* $\tau(\delta)$ *группы* D_A, *в эквивалентное ему представление* $T_{\tau^s}(g)$.

Далее, очевидно, что

$$B_1 = E, \tag{1}$$

где 1 — единица группы Вейля.

Введем теперь частичную упорядоченность в множестве элементов группы Вейля S. Будем говорить, что $s_1 < s_2$, если для любого корня α из $\alpha > 0$ и $\alpha^{s_2} > 0$ следует, что $\alpha^{s_1} > 0$.

Докажем, что *если* $s_1 < s_1 s_2$, *то*

$$B_{s_1 s_2} = B_{s_1} B_{s_2}. \tag{2}$$

Доказательство. В силу определения операторов B_s, имеем

$$B_{s_1} B_{s_2} f(y) = \int_{Z_A^{s_1}} \int_{Z_A^{s_2}} f\left(y_0 s_2^{-1} z^{s_2} s_1^{-1} z^{s_1} g\right) dz^{s_2}\, dz^{s_1} =$$

$$= \int_{Z_A^{s_1}} \int_{Z_A^{s_2}} f\left(y_0 (s_1 s_2)^{-1} \left(s_1 z^{s_2} s_1^{-1}\right) z^{s_1} g\right) dz^{s_2}\, dz^{s_1}. \tag{3}$$

Таким образом, если мы докажем, что

$$\left(s_1 Z^{s_2} s_1^{-1}\right) \cap Z^{s_1} = E \tag{4}$$

и

$$\left(s_1 Z^{s_2} s_1^{-1}\right) Z^{s_1} = Z^{s_1 s_2}, \tag{5}$$

то, применяя к интегралу (3) теорему Фубини, мы получим

$$B_{s_1} B_{s_2} f(y) = \int\limits_{Z_A^{s_1 s_2}} f\left(y_0 (s_1 s_2)^{-1} z^{s_1 s_2} g\right) dz^{s_1 s_2} = B_{s_1 s_2} f(y).$$

Итак, достаточно доказать соотношения (4) и (5).

Обозначим через Π_s множество корней α, принадлежащих Z^s, т. е. таких, что $\alpha > 0$ и $\alpha^s < 0$. Тогда условия (4) и (5) эквивалентны следующим:

$$(\Pi_{s_2})^{s_1^{-1}} \cap \Pi_{s_1} = \phi; \quad (\Pi_{s_2})^{s_1^{-1}} \cup \Pi_{s_1} = \Pi_{s_1 s_2}. \tag{6}$$

(Здесь $(\Pi_{s_2})^{s_1^{-1}}$ обозначает множество корней вида $\alpha^{s_1^{-1}}$, где $\alpha \in \Pi_{s_2}$.) Докажем эти соотношения.

Сначала докажем, что $(\Pi_{s_2})^{s_1^{-1}} \cap \Pi_{s_1} = 0$ для любых s_1, s_2. В самом деле, если $\alpha \in (\Pi_{s_2})^{s_1^{-1}} \cap \Pi_{s_1}$, то это означает, что $\alpha > 0$, $\alpha^{s_1} < 0$ и одновременно $\alpha^{s_1} > 0$, $\alpha^{s_1 s_2} < 0$, что невозможно.

Теперь покажем, что $\Pi_{s_1 s_2} \subset (\Pi_{s_2})^{s_1^{-1}} \cup \Pi_{s_1}$ для любых s_1, s_2. В самом деле, пусть $\alpha \in \Pi_{s_1 s_2}$, т. е. $\alpha > 0$ и $\alpha^{s_1 s_2} < 0$. Тогда либо $\alpha^{s_1} < 0$, либо $\alpha^{s_1} > 0$. В первом случае $\alpha \in \Pi_{s_1}$; во втором случае $\alpha^{s_1} \in \Pi_{s_2}$, а потому $\alpha \in (\Pi_{s_2})^{s_1^{-1}}$.

Остается доказать, что $\Pi_{s_1 s_2} \supset (\Pi_{s_2})^{s_1^{-1}} \cup \Pi_{s_1}$, если $s_1 < s_1 s_2$. Действительно, если $\alpha \in \Pi_{s_1}$, т. е. $\alpha > 0$ и $\alpha^{s_1} < 0$, то в силу условия $s_1 < s_1 s_2$ имеем $\alpha^{s_1 s_2} < 0$, а потому $\alpha \in \Pi_{s_1 s_2}$. Если же $\alpha \in (\Pi_{s_2})^{s_1^{-1}}$, т. е. $\alpha^{s_1} > 0$, $\alpha^{s_1 s_2} < 0$, то опять в силу условия $s_1 < s_1 s_2$ должно быть $\alpha > 0$ (в противном случае мы имели бы $(-\alpha) > 0$, $(-\alpha)^{s_1 s_2} > 0$, но $(-\alpha)^{s_1} < 0$ *)), следовательно, $\alpha \in \Pi_{s_1 s_2}$.

---

*) Используется тот факт, что $(-\alpha)^s = -\alpha^s$.

Итак, соотношение (3) для операторов B_s доказано.

Обозначим через s_α элемент группы Вейля, отвечающий отражению относительно простого корня α.

Покажем, что *для любого элемента s группы Вейля существует такое разложение*

$$s = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_k},$$

что

$$B_s = B_{s_{\alpha_1}} B_{s_{\alpha_2}} \ldots B_{s_{\alpha_k}}.$$

Проведем доказательство индукцией по числу положительных корней, которые s переводит в отрицательные корни. Заметим, что если s сохраняет знаки у всех корней, то $s = 1$.

Пусть s меняет знак в точности у k положительных корней. Тогда среди этих k положительных корней заведомо содержится хотя бы один простой корень α_1. Нетрудно видеть, что $s_{\alpha_1} < s$ *). Поэтому, в силу доказанного уже соотношения имеем

$$B_s = B_{s_{\alpha_1}} B_{s_{\alpha_1}^{-1} s}.$$

Элемент $s_{\alpha_1}^{-1} s$ меняет знак у меньшего чем k числа положительных корней (именно, у $k - n$ корней, где $n = 2$, если $2\alpha_1$ является корнем, и $n = 1$ в противном случае). Следовательно, в силу индуктивного предположения, существует такое разложение $s_{\alpha_1}^{-1} s = s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_k}$, что $B_{s_{\alpha_1}^{-1} s} = B_{s_{\alpha_2}} \ldots B_{s_{\alpha_n}}$. Но тогда имеем $B_s = B_{s_{\alpha_1}} B_{s_{\alpha_2}} \ldots B_{s_{\alpha_k}}$, что и требовалось доказать.

5. Основная теорема об операторах B_s. В настоящем пункте мы сформулируем основную теорему об операторах B_s. Будем дальше предполагать, что G — редуктивная расщепимая над Q группа (определение расщепимой группы см. на стр. 431).

Приведем формулировку основной теоремы:

A) *Существуют унитарные операторы $\bar{B}_s$, в пространстве $L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$, которые образуют представление группы Вейля и которые совпадают с*

*) Это непосредственно следует из того факта, что s_{α_1} изменяет знак только у корня α_1 и у корней, кратных α_1.

операторами B_s на некотором всюду плотном в $L_2(\Omega)$ множестве Φ функций Шварца — Брюа. При этом множество Φ инвариантно относительно операторов B_s.

Эта теорема представляет собой обобщение доказанного в § 4 утверждения, что $\bar{B}^2 = 1$.

В настоящем пункте мы сведем доказательство этой теоремы для любой редуктивной группы G к доказательству следующего утверждения.

В) *Существуют унитарные в $L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$ операторы $\bar{B}_{s_\alpha}$ (где s_α — отражение относительно простого корня α), удовлетворяющие соотношению $\bar{B}^2_{s_\alpha} = 1$ и совпадающие с операторами B_{s_α} на некотором всюду плотном в $L_2(\Omega)$ множестве Φ функций Шварца—Брюа; при этом Φ можно выбрать так, чтобы оно было инвариантно относительно всех B_{s_α}.*

Именно, докажем следующую лемму.

Лемма. *Если имеет место* В), *то имеет место и* А). (Отметим, что обратное утверждение вытекает тривиально.)

Доказательство. Как мы показали в п. 4, для любого $s \in S$ существует такое разложение

$$s = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_k}, \tag{1}$$

что

$$B_s = B_{s_{\alpha_1}} \ldots B_{s_{\alpha_k}}. \tag{2}$$

Положим

$$\bar{B}_s = \bar{B}_{s_{\alpha_1}} \ldots \bar{B}_{s_{\alpha_k}}. \tag{3}$$

Очевидно, что так определенные операторы $\bar{B}_s$ унитарны в $L_2(X)$ и совпадают с операторами B_s на Φ, если Φ выбрано так, чтобы оно было инвариантно относительно B_{s_α}.

Нам остается показать, что так определенные операторы $\bar{B}_s$ образуют представление группы Вейля. С этой целью воспользуемся следующим свойством группы Вейля.

Элементы s_α, где α — простой корень, являются образующими группы Вейля. Полная система соотношений между элементами s_α имеет следующий вид:

$$s^2_\alpha = 1, \tag{4}$$

$$(s_\alpha s_\beta)^k = 1, \tag{5}$$

где $k=2, 3, 4, 6$, *когда угол между векторами* α *и* β *соответственно равен* $90°$, $120°$, $135°$, $150°$. Для доказательства, что операторы $\bar{B}_s$ образуют представление группы Вейля, достаточно, очевидно, проверить (5) для соответствующих операторов B_{s_α}, предполагая что они действуют на Φ. В дальнейших рассуждениях до конца этого пункта предполагается, что операторы B_{s_α} рассматриваются только на Φ.

Рассмотрим по отдельности все возможные случаи.

1) Угол между α и β равен $90°$. В этом случае $k=2$, т. е. нам нужно доказать соотношение

$$(B_{s_\alpha}B_{s_\beta})^2=1.$$

В силу того, что $B^2_{s_\alpha}=B^2_{s_\beta}=1$, это соотношение равносильно соотношению

$$B_{s_\alpha}B_{s_\beta}=B_{s_\beta}B_{s_\alpha}, \tag{6}$$

которое мы сейчас и докажем.

Заметим, что $s_\alpha s_\beta=s_\beta s_\alpha$ меняет знак у корней α и β. Отсюда следует, что $s_\alpha < s_\alpha s_\beta$, $s_\beta < s_\beta s_\alpha$. Следовательно, в силу результата, полученного в п. 4, имеем

$$B_{s_\alpha s_\beta}=B_{s_\alpha}B_{s_\beta} \quad \text{и} \quad B_{s_\alpha s_\beta}=B_{s_\beta s_\alpha}=B_{s_\beta}B_{s_\alpha},$$

откуда $B_{s_\alpha}B_{s_\beta}=B_{s_\beta}B_{s_\alpha}$.

2) Угол между α и β равен $120°$. В этом случае $k=3$, т. е. нам нужно доказать соотношение

$$(B_{s_\alpha}B_{s_\beta})^3=1.$$

В силу того, что $B^2_{s_\alpha}=B^2_{s_\beta}=1$, это соотношение равносильно соотношению

$$B_{s_\alpha}B_{s_\beta}B_{s_\alpha}=B_{s_\beta}B_{s_\alpha}B_{s_\beta}, \tag{7}$$

которое мы и будем доказывать.

Нетрудно убедиться, что преобразование $s_\alpha s_\beta s_\alpha$ переводит корень α в корень $-\beta$, т. е. в отрицательный корень. Отсюда следует, что $s_\alpha < s_\alpha s_\beta s_\alpha$. а потому

$$B_{s_\alpha s_\beta s_\alpha}=B_{s_\alpha}B_{s_\beta s_\alpha}.$$

Далее, легко убедиться, что преобразование $s_\beta s_\alpha$ переводит корень β в корень $-\alpha-\beta$, т. е. в отрицательный корень. Отсюда следует, что $s_\beta < s_\beta s_\alpha$, а потому

$$B_{s_\beta s_\alpha} = B_{s_\beta} B_{s_\alpha}.$$

Таким образом, установлено, что $B_{s_\alpha s_\beta s_\alpha} = B_{s_\alpha} B_{s_\beta} B_{s_\alpha}$. В силу аналогичных соображений, имеем $B_{s_\alpha s_\beta s_\alpha} = B_{s_\beta s_\alpha s_\beta} = B_{s_\beta} B_{s_\alpha} B_{s_\beta}$, следовательно, $B_{s_\alpha} B_{s_\beta} B_{s_\alpha} = B_{s_\beta} B_{s_\alpha} B_{s_\beta}$, что и требовалось доказать.

3) Угол между α и β равен $135°$. В этом случае $k=4$, т. е. нам нужно доказать соотношение

$$(B_{s_\alpha} B_{s_\beta})^4 = 1.$$

В силу того, что $B^2_{s_\alpha} = B^2_{s_\beta} = 1$, это соотношение равносильно соотношению

$$B_{s_\alpha} B_{s_\beta} B_{s_\alpha} B_{s_\beta} = B_{s_\beta} B_{s_\alpha} B_{s_\beta} B_{s_\alpha}, \tag{8}$$

которое мы и будем доказывать.

Известно, что в рассматриваемом случае длины векторов α и β относятся как $\sqrt{2}$ к 1 (для определенности мы полагаем, что α — корень большей длины).

Легко проверяется, что $s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta$ переводит α в $-\alpha$, а потому $s_\alpha < s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta$; $s_\beta s_\alpha s_\beta$ переводит β в $-\alpha-\beta$, а потому $s_\beta < s_\beta s_\alpha s_\beta$; $s_\alpha s_\beta$ переводит α в $-\alpha-2\beta$, а потому $s_\alpha < s_\alpha s_\beta$. Следовательно, в силу результата п. 4, имеем

$$B_{s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta} = B_{s_\alpha} B_{s_\beta s_\alpha s_\beta} = B_{s_\alpha} B_{s_\beta} B_{s_\alpha s_\beta} = B_{s_\alpha} B_{s_\beta} B_{s_\alpha} B_{s_\beta}.$$

Аналогично убеждаемся, что $s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha$ переводит β в $-\beta$, а потому $s_\beta < s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha$; $s_\alpha s_\beta s_\alpha$ переводит α в $-\alpha-2\beta$, а потому $s_\alpha < s_\alpha s_\beta s_\alpha$; $s_\beta s_\alpha$ переводит β в $-\alpha-\beta$, а потому $s_\beta < s_\beta s_\alpha$. Следовательно, в силу результата п. 4, имеем $B_{s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta} = B_{s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha} = B_{s_\beta} B_{s_\alpha s_\beta s_\alpha} = B_{s_\beta} B_{s_\alpha} B_{s_\beta s_\alpha} = B_{s_\beta} B_{s_\alpha} B_{s_\beta} B_{s_\alpha}$. Таким образом, доказано, что

$$B_{s_\alpha} B_{s_\beta} B_{s_\alpha} B_{s_\beta} = B_{s_\beta} B_{s_\alpha} B_{s_\beta} B_{s_\alpha}.$$

4) Угол между α и β равен 150°. В этом случае $k=6$, т. е. нам нужно доказать соотношение

$$(B_{s_\alpha}B_{s_\beta})^6=1.$$

В силу того, что $B_{s_\alpha}^2=B_{s_\beta}^2=1$, это соотношение равносильно соотношению

$$B_{s_\alpha}B_{s_\beta}B_{s_\alpha}B_{s_\beta}B_{s_\alpha}B_{s_\beta}=B_{s_\beta}B_{s_\alpha}B_{s_\beta}B_{s_\alpha}B_{s_\beta}B_{s_\alpha}. \tag{9}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае длины векторов α и β относятся как $\sqrt{3}$ к 1.

Как и в предыдущих случаях, легко убедиться на основании простых геометрических рассуждений, что $s_\alpha < s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta$, $s_\beta < s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta$, $s_\alpha < s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta$, $s_\beta < s_\beta s_\alpha s_\beta$, $s_\alpha < s_\alpha s_\beta$. Следовательно, в силу результата п. 4, имеем $B_{s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta}= B_{s_\alpha}B_{s_\beta}B_{s_\alpha}B_{s_\beta}B_{s_\alpha}B_{s_\beta}$. Аналогично, имеем $B_{s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta}= B_{s_\beta}B_{s_\alpha}B_{s_\beta}B_{s_\alpha}B_{s_\beta}B_{s_\alpha}$, откуда непосредственно следует соотношение (9). Доказательство леммы закончено.

6. Сведение к рангу 1. Здесь будет показано, что доказательство теоремы B) может быть сведено к случаю групп ранга 1*).

Пусть G — произвольная редуктивная группа, $\mathfrak{G}$ — ее алгебра Ли. На протяжении этого пункта мы будем пользоваться обозначениями, введенными в п. 1 настоящего параграфа.

Обозначим через ${}^\alpha\mathfrak{Z}$, где α — простой корень, минимальную подалгебру алгебры $\mathfrak{G}$, порожденную корневыми пространствами $\mathfrak{G}_\beta$, где β пробегает все положительные корни, а также все корни, пропорциональные α.

Обозначим, далее, через $\mathfrak{G}^\alpha$ минимальную подалгебру алгебры $\mathfrak{G}$, порожденную корневыми пространствами $\mathfrak{G}_\beta$, где β пробегает корни, пропорциональные α.

Пусть ${}^\alpha Z$ и G^α — группы, соответствующие этим подалгебрам. В силу определения, G^α является простой алгебраической группой ранга 1. Поэтому ее группа Вейля состоит из двух элементов.

*) Рангом группы называется число ее простых корней.

Обозначим через Z^α максимальную унипотентную подгруппу группы G^α, очевидно, что алгебра Ли группы Z^α порождается корневыми пространствами $\mathfrak{G}_\beta$, где β пробегает положительные корни, кратные α. Обозначим через B оператор Вейля в пространстве $D_Q^\alpha Z_A^\alpha \setminus G_A^\alpha$.

Цель этого пункта — доказать, что *из справедливости теоремы* В) *для оператора B в пространстве $L_2(D_Q^\alpha Z_A^\alpha \setminus G_A^\alpha)$ вытекает справедливость теоремы* В) *для оператора B_{s_α} в пространстве $L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$.*

Сначала докажем, что *пространство $Z_A \setminus G_A$ является расслоенным пространством, базой которого является пространство ${}^\alpha Z_A \setminus G_A$, а слоем — пространство $Z_A^\alpha \setminus G_A^\alpha$.*

В самом деле, поскольку $Z_A^\alpha \supset Z_A$, то имеет место естественное отображение

$$Z_A \setminus G_A \to {}^\alpha Z_A \setminus G_A,$$

в силу которого $Z_A \setminus G_A$ получает структуру расслоенного пространства с базой ${}^\alpha Z_A \setminus G_A$ и слоем $Z_A \setminus {}^\alpha Z_A$. Остается установить изоморфизм

$$Z_A \setminus {}^\alpha Z_A \cong Z_A^\alpha \setminus G_A^\alpha.$$

Обозначим через $\tilde{Z}^\alpha$ подгруппу группы Z, дополнительную к группе Z^α (т. е. подгруппу, алгебра которой порождается корневыми пространствами $\mathfrak{G}_\beta$, где β пробегает все положительные корни, не являющиеся кратными корню α). Группа Z_A разлагается в полупрямое произведение

$$Z_A = \tilde{Z}_A^\alpha Z_A^\alpha. \tag{1}$$

С другой стороны, из определения группы ${}^\alpha Z_A$ следует, что она также разлагается в полупрямое произведение

$${}^\alpha Z_A = \tilde{Z}_A^\alpha G_A^\alpha. \tag{2}$$

Из разложений (1) и (2) непосредственно следует, что $Z_A \setminus {}^\alpha Z_A \cong Z_A^\alpha \setminus G_A^\alpha$.

Заметим теперь, что *в формуле для оператора* B_{s_α}:

$$B_{s_\alpha}\varphi(y) = \int\limits_{Z_A^Q \setminus Z_A^\alpha} \varphi\left(y_0 s_\alpha^{-1} z^\alpha g\right) dz^\alpha \tag{3}$$

интегрирование ведется по множеству точек $y_0 s_\alpha^{-1} z^\alpha g$, ***принадлежащих одному и тому же слою расслоенного пространства*** $Z_A \setminus G_A$, ***тому же, которому принадлежит сама точка*** y. В самом деле, поскольку $s_\alpha \in {}^\alpha Z_A$, то при отображении $G_A \to {}^\alpha Z_A \setminus G_A$ множество $y_0 s_\alpha^{-1} Z_A^\alpha g$ переходит в одну точку, ту же самую, в которую переходит и точка $y = y_0 g$.

Будем предполагать, что функция $\varphi(y)$ сосредоточена в достаточно малой области. Тогда в этой области можно ввести локальную систему координат (u, v), где v задает точку базы, т. е. точку пространства ${}^\alpha Z_A \setminus G_A$, а u — точку слоя, т. е. точку пространства $Z_A^\alpha \setminus G_A^\alpha$.

Из сделанного выше замечания следует, что оператор B_{s_α} действует на $\varphi(y) = \varphi(u, v)$, как на функцию только переменного $u \in Z_A^\alpha \setminus G_A^\alpha$.

Оператор B_{s_α} при этом выражается через оператор орисферического автоморфизма B, действующий в пространстве функций $\varphi(u)$. Именно,

$$B_{s_\alpha}\varphi(u, v) = B\varphi(u, v).$$

Следовательно, если доказано, что $B^2 = 1$ на некотором всюду плотном множестве Φ_0 функций на $Z_A^\alpha \setminus G_A^\alpha$, инвариантных относительно D_Q^α, то из этого вытекает, что $B_{s_\alpha}^2 = 1$ на множестве Φ_α всех функций на $Z_A \setminus G_A$, которые как функции на слоях принадлежат Φ_0. Нетрудно проверить, что пересечение по всем α так определенных множеств Φ_α содержит множество Φ функций, инвариантных относительно D_Q, которое всюду плотно в $L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$. Тем самым показано, что проверка теоремы В) сводится к рассмотрению только групп ранга 1.

Итак, мы показали, что доказательство теоремы А) для редуктивной группы G сводится к доказательству теоремы В) для ее полупростых подгрупп ранга 1.

Пользуясь этим сведением, можно доказать справедливость теоремы А) для широкого класса редуктивных групп (вопрос о том, верна ли теорема А) для всех редуктивных групп, остается пока открытым).

Теорема А) *справедлива для произвольной редуктивной расщепимой над полем Q группы G.*

(Определение расщепимой группы дано на стр. 431.)

В самом деле, пусть G^{α} — подгруппа, определенная на стр. 447. Нетрудно убедится, что в рассматриваемом случае G^{α} есть группа унимодулярных матриц 2-го порядка над Q. Таким образом, доказательство теоремы А) для группы G сводится к доказательству теоремы В) для группы унимодулярных матриц 2-го порядка над Q. Но для случая группы унимодулярных матриц 2-го порядка над Q эта теорема В) была уже доказана в § 4.

Итак, основная теорема доказана для всех расщепимых редуктивных групп; для произвольных же редуктивных групп над Q она сведена к группам ранга 1.

§ 6. Представление, порожденное однородным пространством $G_Q \setminus G_A$

1. Однородное пространство $G_Q \setminus G_A$. Пусть G — линейная алгебраическая группа, определенная над полем Q, G_A — группа ее аделей и G_Q — группа главных аделей.

Группа G_Q является дискретной подгруппой группы G_A. Доказательство этого утверждения в точности такое же, как и в случае группы унимодулярных матриц 2-го порядка (см. § 4).

Рассмотрим пространство $X = G_Q \setminus G_A$. Поскольку группа G_Q дискретна, то пространство X локально-изоморфно группе G_A. Следовательно, правоинвариантная мера на группе G_A индуцирует меру на пространстве $X = G_Q \setminus G_A$, инвариантную относительно движений группы G_A.

Следующая фундаментальная теорема, принадлежащая А. Борелю [40], выясняет вопрос, когда мера пространства X конечна.

Теорема 1. *Мера пространства X конечна тогда и только тогда, когда у группы G нет нетривиальных характеров, определенных над полем Q, т. е. морфизмов группы G в группу Q.*

Например, фактор-пространство группы иделей по главным иделям имеет бесконечную меру, а фактор-пространство группы аделей по главным аделям имеет конечную меру.

Из теоремы 1 также следует, что если G — полупростая или унипотентная группа, то фактор-пространство $X = G_Q \setminus G_A$ имеет конечную меру. Отметим теперь, что на группе G_A, а следовательно, и на X есть канонический способ нормировки *) меры. Поэтому определено число равное мере пространства X. Это число принято, по предложению А. Вейля, называть числом Тамагава группы G. Оно является очень интересной арифметической характеристикой группы G.

Основным объектом исследования в настоящем параграфе является представление, порожденное однородным пространством $X = G_Q \setminus G_A$. Структура разложения этого представления на неприводимые тесно связана с арифметическими свойствами группы G. В настоящее время полное описание разложения этого представления на неприводимые неизвестно. Есть все основания надеяться, что когда оно будет получено, то прольется свет и на многие теоретико-числовые вопросы (см., например, приложение к § 4). Настоящий параграф в основном посвящен выделению дискретной части спектра

---

*) Этот способ вкратце состоит в следующем. Пусть ω — дифференциальная форма на G, определяющая меру. Как известно, можно считать, что она определена над Q, т. е. имеет вид $\varphi(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$, где $x_1, \ldots, x_m$ — локальные координаты, а φ — рациональная функция с коэффициентами из Q. Такая форма определена однозначно с точностью до умножения на рациональное число. Форма ω индуцирует однозначно определенные меры на группах G_p $(p = \infty, 2, \ldots)$ и, следовательно, некоторую меру на группе G_A. Эта мера определена однозначно, так как если взять вместо ω форму $\omega' = \lambda\omega$, $\lambda \in Q$, то мера умножится на норму $|\lambda|$ иделя λ в некоторой степени. Поскольку $\lambda \in Q$, то $|\lambda| = 1$ (см. § 1).

представления и непрерывной части спектра максимальной размерности.

Рассмотрим теперь общую ситуацию, когда у группы G существуют нетривиальные характеры, определенные над Q. Каждый характер χ группы G индуцирует морфизм χ_A группы G_A в группу иделей A^*. Обозначим через G_A^0 подгруппу всех $g \in G_A$ таких, что норма $|\chi_A(g)|$ иделя $\chi_A(g)$ равна 1 для любого характера χ группы G.

Нетрудно видеть, что $G_Q \subset G_A^0$. В самом деле, если $g \in G_Q$, то $\chi_A(g)$ — главный идель, а потому $|\chi_A(g)| = 1$ (см. § 1). Имеет место следующая теорема (А. Борель [40]).

Теорема 2. *Фактор-пространство $X^0 = G_Q \setminus G_A^0$ имеет конечный объем.*

Во многих важных случаях пространство $X^0 = G_Q \setminus G_A^0$ оказывается компактным. Необходимые и достаточные условия компактности пространства X^0 были высказаны Годманом в качестве гипотезы и недавно были доказаны А. Борелем и независимо от него Мостоу и Тамагава. Приведем их формулировку.

Теорема 3. *Пространство $X^0 = G_Q \setminus G_A^0$ компактно тогда и только тогда, когда все унипотентные элементы группы G_Q принадлежат ее радикалу, в частности, если группа G редуктивна, то пространство X^0 компактно тогда и только тогда, когда у группы G_Q нет унипотентных элементов.*

Из теоремы 3 следует, что *если группа G унипотентна, то пространство $X = G_Q \setminus G_A$ компактно.* В самом деле, если G унипотентна, то согласно теореме 3 $X^0 = G_Q \setminus G_A^0$ компактно. Кроме того, если G унипотентна, то у нее нет нетривиальных характеров, определенных над Q, и, значит, $G_A^0 = G_A$.

2. Изучение спектра представления в случае компактного пространства $G_Q \setminus G_A / K_A$. В этом пункте мы рассмотрим простейший случай, когда все элементы группы G_Q являются полупростыми. В этом случае, согласно теореме 3 п. 1, пространство $X^0 = G_Q \setminus G_A^0$ является компактным.

Если у группы G нет нетривиальных характеров, определенных над Q, то $G_A^0 = G_A$ и, следовательно, пространство

$X = G_Q \setminus G_A$ компактно. Поэтому представление в пространстве $L_2(X)$ разлагается в прямую сумму счетного числа неприводимых представлений (см. главу I, § 2).

Изучим теперь общий случай, когда у группы G имеются нетривиальные характеры.

Пусть K — центр группы G, K_A, K_Q — соответствующие группы аделей и главных аделей. Имеет место следующее свойство редуктивных групп, которые мы приводим без доказательства:

Подгруппа $G_A^0 K_A$ имеет конечный индекс в группе G_A.

Из этого свойства и из компактности пространства G_Q / G_A^0 следует, что пространство двусторонних классов смежности $G_Q \setminus G_A / K_A$ также является компактным.

На основании этого факта мы разложим пространство H в прямой интеграл инвариантных пространств H_π, каждое из которых имеет уже дискретный спектр.

Пусть $\pi(k)$ — любой унитарный характер на K_A, равный тождественно единице на K_Q. Обозначим через H_π пространство функций $f_\pi(g)$ на G_A, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f_\pi(gk) = f_\pi(g)\pi(k)$ для любого $k \in K_A$,

2) $f_\pi(\gamma g) = f_\pi(g)$ для любого $\gamma \in G_Q$,

3) $\displaystyle\int\limits_{G_Q \setminus G_A / K_A} |f(g)\,dg| < \infty.$

Пространство H разлагается в непрерывную прямую сумму пространств H_π согласно следующим формулам:

$$f(g) = \int f_\pi(g)\,dg,$$

$$\int\limits_{G_Q \setminus G_A} |f(g)|^2\,dg = \int\limits_{\Pi} \int\limits_{G_Q \setminus G_A/K_A} |f_\pi(g)|^2\,dg\,d\pi,$$

где $f_\pi(g)$ — компонента вектора $f(g) \in H$ в пространстве H_π, определяемая формулой:

$$f_\pi(g) = \int\limits_{K_A/K_Q} f(gk)\,\bar{\pi}(k)\,dk.$$

Тем же методом, что и в главе I, § 2, доказывается, что пространство H_π представляет собой сумму счетного числа неприводимых представлений группы G_A.

Фактически при этом доказывается, что след оператора $T_\varphi = \int\limits_{G_A} \varphi(g) T(g)\, dg$ в пространстве H_π конечен, где φ — любая функция Шварца — Брюа. Отсюда вытекает, что для любого неприводимого унитарного представления, входящего в представление, порожденное пространством $G_Q \setminus G_A$, след оператора T_φ также конечен, где φ — функция Шварца — Брюа на группе G_A. Но, как было показано в § 3, п 5, из конечности следа оператора T_φ неприводимого представления группы G_A вытекает, что это неприводимое представление разлагается в тензорное произведение неприводимых представлений T_p групп G_p, причем все представления T_p, кроме конечного числа, содержат в точности по одному вектору, инвариантному относительно группы U_p.

Итак, *любое неприводимое представление группы G_A, входящее в разложение представления, порожденного пространством $G_Q \setminus G_A$, является тензорным произведением неприводимых представлений T_p групп G_p, причем все представления T_p, кроме конечного числа, обладают в точности одним вектором, инвариантным относительно подгруппы U_p целых p-адических матриц.*

Неизвестно, обладают ли этим свойством все неприводимые представления группы G_A. Есть все основания предполагать, что ответ на этот вопрос окажется утвердительным.

Неизвестно также, обладают ли этим свойством неприводимые представления группы G_A, входящие в представление, порожденное однородным пространством $X = G_Q \setminus G_A$, в том случае, когда пространство $G_Q \setminus G_A / K_A$ некомпактно. Для тех подпространств пространства $L_2(X)$, которые изучены в настоящем параграфе, ответ оказывается положительным.

3. Пространство орисфер. Пусть G — алгебраическая редуктивная группа, определенная над полем Q, такая, что пространство $G_Q \setminus G_A / K_A$ является компактным.

Согласно теореме 3 п. 1, в этом случае в группе G существуют унипотентные элементы. Обозначим через Z максимальную унипотентную подгруппу группы G.

Назовем орисферами в пространстве $X = G_Q \setminus G_A$ образы классов смежности $Z_A g$ при естественном отображении

$$G_A \to G_Q \setminus G_A \text{ *)}.$$

Таким образом, любая орисфера в X представляет собой множество точек вида

$$x_z = x_0 z g,$$

где x_0 — точка из X, отвечающая единичному классу смежности группы G_A, g — любой фиксированный элемент из G_A, а z пробегает подгруппу Z_A. Очевидно, что это множество изоморфно $Z_Q \setminus Z_A$ и, следовательно, компактно.

Поскольку движения из G_A переводят орисферы снова в орисферы, то *множество орисфер представляет собой однородное пространство группы* G_A. Будем это пространство обозначать через Ω.

Найдем стационарную группу пространства Ω.

Пусть G' — нормализатор подгруппы Z в группе G. Известно, что G' разлагается в полупрямое произведение

$$G' = DZ$$

своего нормального делителя Z и некоторой редуктивной подгруппы D. Напомним, что все элементы группы D являются полупростыми.

Покажем, что *стационарная группа пространства* Ω *есть* $D_Q Z_A$.

В самом деле, рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 3 § 4, нетрудно убедиться, что эта стационарная подгруппа порождается подгруппами Z_A и $G'_A \cap G_Q$. Так как $G'_A = D_A Z_A$, то $G'_A \cap G_Q = D_Q Z_Q$. Ясно, что подгруппа, порожденная группами Z_A и $D_Q Z_Q$, есть $D_Q Z_A$.

Итак, доказано, что

$$\Omega = D_Q Z_A \setminus G_A.$$

---

*) Более общее определение орисферы будет дано в § 7.

Наряду с однородным пространством Ω введем также однородное пространство

$$Y = Z_A \setminus G_A.$$

Условимся пространство Ω называть пространством орисфер, а пространство Y — основным аффинным пространством группы G_A.

4. Орисферическое отображение и оператор M. Рассмотрим пространство $L_2(X)$, $X = G_Q \setminus G_A$. Сопоставим каждой функции $f(x) \in L_2(X)$ ее интегралы по орисферам в

$$\varphi(g) = \int\limits_{Z_Q \setminus Z_A} f(x_0 z g)\, dz, \tag{1}$$

где x_0 — точка из X, отвечающая единичному классу. Соответствие

$$f(x) \to \varphi(g)$$

назовем орисферическим отображением.

Очевидно, что функция $\varphi(g)$ удовлетворяет для любых $\delta \in D_Q$ и $z \in Z_A$ следующему условию:

$$\varphi(\delta z g) = \varphi(g).$$

Таким образом, ее можно рассматривать как функцию в пространстве орисфер $\Omega = D_Q Z_A \setminus G_A$ и писать $\varphi(y)$, $y \in \Omega$, вместо $\varphi(g)$.

Пусть H^0 — ядро орисферического отображения, H' — образ пространства $L_2(X)$ при орисферическом отображении. Введем в H' структуру гильбертова пространства, полагая

$$H' = L_2(X)/H^0.$$

Скалярное произведение в H' будем обозначать через $[\psi_1, \psi_2]$.

Введем по аналогии со случаем группы унимодулярных матриц 2-го порядка, рассмотренным в § 4, оператор M.

Пусть $\psi(y)$ — произвольная непрерывная финитная функция на Ω. Эта функция задает функционал в пространстве H' по формуле

$$(\psi, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(y) \overline{\psi(y)}\, dy. \tag{2}$$

Как и в § 4, п. 10, легко убедиться в справедливости следующей оценки:

$$\int_K |\varphi(y)|\, dy < c(K)\, [\varphi, \varphi]^{1/2},$$

где K — любой компакт в Ω, $c(K)$ — некоторая константа. Из этой оценки непосредственно следует, что (ψ, φ) — линейный непрерывный функционал в пространстве H'. Следовательно, по теореме Рисса,

$$\int_\Omega \varphi(y)\, \overline{\psi(y)}\, dy = [\varphi, M\psi], \tag{3}$$

где $M\psi \in H'$, а квадратные скобки, напоминаем, обозначают скалярное произведение в H'.

Формула (3) служит определением оператора M. Определенный этой формулой оператор M переводит, таким образом, непрерывные финитные функции на Ω в функции из H'.

Аналогично тому, как это было сделано в п. 10 § 4, устанавливаются следующие свойства оператора M.

1. *Оператор M перестановочен с операторами представления в пространстве Ω, т. е.*

$$M(\varphi(yg)) = (M\varphi)(yg).$$

2. $(M\varphi, \varphi) \geqslant 0$ *для любой финитной непрерывной функции* $\varphi(y)$.

3. *Множество функций вида $M\varphi$, где φ пробегает непрерывные финитные функции на Ω, всюду плотно в H'.*

5. Явное выражение для оператора M. Здесь будет показано, что *оператор M задается следующей формулой*:

$$M = \sum_s B_s, \tag{1}$$

где B_s — операторы Вейля, определенные в § 5, п. 3, суммирование ведется по всем элементам группы Вейля.

Вывод этой формулы проводится так же, как и вывод аналогичной формулы в п. 11 § 4 для случая группы матриц 2-го порядка.

Дословно теми же рассуждениями, что и в п. 11 § 4, мы получаем следующее выражение для оператора M:

$$M\psi(y)=\int\limits_{Z_Q\setminus Z_A}\sum_{\gamma\in D_QZ_Q\setminus G_Q}{}' \psi(y_0\gamma zg)\,dz; \tag{2}$$

в $\sum'$ из каждого класса смежности $D_QZ_Q\gamma$ берется по одному представителю; g — произвольный элемент из класса смежности $D_QZ_Q\setminus G_A$, отвечающего y.

Преобразуем формулу (2). Для этого выберем в каждом классе смежности $D_QZ_Q\gamma$ по каноническому представителю. Мы воспользуемся при этом следующим фактом. Пусть N_Q — нормализатор подгруппы D_Q в G_Q. Тогда каждый элемент $\gamma\in G_Q$ может быть записан в виде произведения

$$\gamma=znz', \tag{3}$$

где $n\in N_Q$, z, $z'\in Z_Q$. Выберем по представителю s в каждом классе смежности N_Q/D_Q. Тогда разложение (3) принимает вид

$$\gamma=z\delta sz', \tag{4}$$

где z, $z'\in Z_Q$; $\delta\in D_Q'$. При этом элемент s, т. е. класс смежности N_Q/D_Q, однозначно определяется элементом γ.

Итак, в каждом классе смежности $D_QZ_Q\setminus G_Q$ содержится элемент вида sz, $z\in Z_Q$, причем s однозначно определяется заданием класса смежности.

Нетрудно убедиться, что элементы sz и sz' принадлежат одному и тому же классу смежности $D_QZ_Q\setminus G_Q$ тогда и только тогда, когда $zz'^{-1}\in Z_Q^s$, где $Z_Q^s=s^{-1}Z_Qs\cap Z_Q$.

Итак, выражение (2) может быть переписано в следующем виде:

$$M\psi(y)=\sum_s\int\limits_{Z_Q\setminus Z_A}\left(\sum_{z'\in Z_Q^s\setminus Z_Q}\psi(y_0sz'zg)\,dz\right)=$$
$$=\sum_s\int\limits_{Z_Q^s\setminus Z_A}\psi(y_0szg)\,dz. \tag{5}$$

Разобьем в (5) интегрирование по $Z_Q^s \setminus Z_A$ на интегрирование по $Z_Q^s \setminus Z_A^s$, где $Z_A^s = s^{-1}Z_A s \cap Z_A$, и интегрирование по $Z_A^s \setminus Z_A$. Мы получим, что

$$\int\limits_{Z_Q^s \setminus Z_A} \psi(y_0 szg)\,dz = \int\limits_{Z_A^s \setminus Z_A} \int\limits_{Z_Q^s \setminus Z_A^s} \psi(y_0 sz'zg)\,dz'\,dz.$$

Так как $\psi(y_0 sz'zg) = \psi(y_0 szg)$ для любого $z' \in Z_A^s$, т. е. подынтегральное выражение не зависит от z', то

$$\int\limits_{Z_Q^s \setminus Z_A} \psi(y_0 szg)\,dz = \int\limits_{Z_A^s \setminus Z_A} \psi(y_0 szg)\,dz = B_{s^{-1}}\psi,$$

где $B_{s^{-1}}$ — оператор Вейля (см. п. 3 § 5). Итак, формула (5) принимает вид

$$M\psi = \left(\sum_s B_s\right)\psi,$$

т. е. $M = \sum\limits_s B_s$, что и требовалось доказать.

6. Структура пространства H'. В настоящем пункте, пользуясь полученным в п. 5 выражением для оператора M через операторы B_s, мы исследуем структуру пространства H'. Напомним, что через H' мы обозначили образ $L_2(x)$ при орисферическом отображении (см. п. 4). При этом будем предполагать, что группа G расщепима (см. определение на стр. 431). Тогда для нее справедлива теорема A: в пространстве $L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$ существуют унитарные операторы $\overline{B}_s$, которые образуют представление группы Вейля S и которые совпадают с операторами B_s на некотором всюду плотном в $L_2(D_Q Z_A \setminus G_A)$ множестве функций Φ, инвариантном относительно операторов B_s.

Докажем, что *если группа G является расщепимой, то пространство*

$$H_0 = L_2(\Omega) \cap H'$$

разлагается на те же неприводимые представления, что и $L_2(\Omega)$, но, в отличие от последнего, каждое *неприводимое представление входит в разложение с единичной кратностью.*

Доказательство. Обозначим через H_0 замыкание в $L_2(\Omega)$ множества функций вида $\overline{M}\varphi$, $\overline{M}=\sum \overline{B}_s$, где $\varphi \in \Phi$ (Φ определено в формулировке теоремы A). Нетрудно проверить, что H_0 совпадает с множеством всех $f \in L_2(\Omega)$ таких, что $\overline{B}_s f = f$ при всех $s \in S$.

Заметим теперь, что, как было показано в п. 2 § 5, кратность, с которой данное неприводимое представление входит в $L_2(\Omega)$, равна порядку группы Вейля. При этом операторы $\overline{B}_s$ переводят каждое неприводимое представление в эквивалентное представление.

Рассмотрим сумму H^τ всех неприводимых подпространств, содержащихся в $L_2(\Omega)$, эквивалентных данному неприводимому пространству. В силу сказанного, каждый из операторов $\overline{B}_s$ переводит H^τ в себя и задается в H^τ матрицей, порядок которой равен порядку группы Вейля. Эти матрицы образуют регулярное представление группы Вейля (при условии, что рассматриваются только неприводимые представления группы G_A общего положения).

Ясно, что в подпространстве функций $\overline{M}\psi$, $\psi \in H^\tau$, действует единичное представление группы Вейля S. Поэтому вопрос о кратности, с которой входит в H_0 заданное неприводимое представление, сводится к вопросу о том, с какой кратностью единичное представление конечной группы S входит в регулярное представление этой группы. Как хорошо известно, эта кратность равна единице. Таким образом, мы показали, что в H_0 входят все неприводимые представления группы G_A, содержащиеся в $L_2(\Omega)$, причем каждое входит с единичной кратностью.

Покажем теперь, что $H_0 \subset H'$. Условимся, как и в предыдущем пункте, обозначать через $(,)$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, а через $[,]$ — скалярное произведение в H'. Пусть $f \in H_0$; покажем, что $f \in H$. Из того, что $f \in H_0$, вытекает, что существует такая последовательность функций $\varphi_n \in \Phi$, что

$$(f - M\varphi_n,\ f - M\varphi_n) \to 0, \quad (\varphi_n,\ \varphi_n) < C. \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$[M\varphi_n,\ M\varphi_n] = (M\varphi_n,\ \varphi_n) < C_1. \tag{2}$$

Следовательно, из последовательности $M\varphi_n$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в смысле H' к некоторой функции $f_1 \in H'$.

Не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что сама последовательность $M\varphi_n$ слабо сходится к f_1. Покажем теперь, что $f_1 = f$. Воспользуемся тем, что f_1 и f — измеримые функции, суммируемые на каждом компакте в Ω. Поэтому достаточно доказать, что

$$(f_1, \varphi) = (f, \varphi) \tag{3}$$

для любой финитной непрерывной функции φ. Мы имеем

$$\begin{aligned}(f_1, \varphi) = [f_1, M\varphi] &= \lim_{h\to\infty} [M\varphi_n, M\varphi] = \\ &= \lim_{h\to\infty} (M\varphi_n, \varphi) = (f, \varphi),\end{aligned} \tag{4}$$

так как

$$(M\varphi_n - f, M\varphi_n - f) \to 0.$$

Таким образом, мы показали, что

$$H_0 \subset H'.$$

Покажем, наконец, что пересечение с $L_2(\Omega)$ ортогонального дополнения H_1 к H_0 тривиально. Действительно, пусть $f \in H_1 \cap L_2(\Omega)$. Из того, что $f \in H_1$, вытекает, что $[f, M\varphi] = 0$ для любой функции $\varphi \in \Phi$. Следовательно,

$$(f, \varphi) = 0 \quad \text{для любой } \varphi \in \Phi. \tag{5}$$

Если $f \in L_2(\Omega)$, то, поскольку Φ всюду плотно в $L_2(\Omega)$, из (5) следует, что $f = 0$.

Из доказанного вытекает, что $H_0 = L_2(\Omega) \cap H'$.

§ 7. Дискретность спектра

1. Орисферы в пространстве $X = G_Q \setminus G_A$. Пусть Z — максимальная связная унипотентная подгруппа редуктивной группы G, T — максимальный расщепимый над Q тор группы G, который лежит в нормализаторе группы Z. Обозначим через $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{T}$ алгебры Ли групп Z и T. Пространство $\mathfrak{Z}$ можно представить в виде суммы корневых пространств $\mathfrak{Z}_\alpha$:

$$\mathfrak{Z} = \sum_\alpha \mathfrak{Z}_\alpha,$$

где α — линейные формы на $\mathfrak{T}$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — простые корни и пусть Π — некоторое подмножество множества простых корней. Обозначим через $\mathfrak{Z}^\Pi$ объединение всех корневых пространств $\mathfrak{Z}_\alpha$, соответствующих всем положительным корням $\alpha = \sum c_k \alpha_k$, у которых $\sum\limits_{\alpha_k \in \Pi} c_k > 0$. Очевидно, что $\mathfrak{Z}^\Pi$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{Z}$.

Обозначим через Z^Π подгруппу, соответствующую алгебре $\mathfrak{Z}^\Pi$. Условимся называть подгруппу Z^Π, а также любую подгруппу, сопряженную с Z^Π с помощью элемента из G_Q, орисферической группой.

Пример. Пусть G — группа всех невырожденных матриц n-го порядка. Нетрудно показать, что любая орисферическая подгруппа группы G сопряжена с подгруппой всех клеточных треугольных матриц следующего вида:

$$\begin{Vmatrix} E_{k_1} & & \\ & E_{k_2} & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & E_{k_s} \end{Vmatrix}.$$

Здесь E_{k_l} обозначает единичную матрицу порядка k_l; k_l — фиксированные натуральные числа такие, что $k_1 + \ldots + k_s = n$; выше диагонали стоят произвольные элементы, а ниже диагонали — нули.

Образы классов смежности $Z_A^\Pi g$ при естественном отображении

$$G_A \to X = G_Q \setminus G_A$$

условимся называть Π-орисферами в пространстве X или просто орисферами. Таким образом, любая орисфера в X представляет собой множество точек вида $x_0 z_A^\Pi g$, где x_0 — точка, соответствующая единичному классу, g — любой фиксированный элемент из G_A, а z_A^Π пробегает подгруппу Z_A^Π.

Заметим, что *Π-орисферы являются компактными множествами*. В самом деле, множество точек Π-орисферы гомеоморфно фактор-пространству $(G_Q \cap Z_A^\Pi) \setminus Z_Q^\Pi = Z_Q^\Pi \setminus Z_A^\Pi$. Но это фактор-пространство компактно, так как группа Z_A^Π унипотентна (см. п. 1 § 6).

Из определения очевидно, что множество всех П-орисфер при заданном П представляет собой однородное пространство группы G_A. Найдем стационарную группу этого пространства.

Предварительно найдем нормализатор N^{Π} группы Z^{Π} в группе G. Мы покажем сейчас, что N^{Π} представляет собой полупрямое произведение некоторой редуктивной группы G^{Π} и группы Z^{Π}.

Как известно (см. § 5, п. 1), алгебра Ли группы G имеет следующий вид:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T} + \mathfrak{C} + \sum \mathfrak{G}_{\alpha}.$$

Согласно определению,

$$\mathfrak{Z}^{\Pi} = \sum_{\alpha \in \Sigma_{\Pi}} \mathfrak{G}_{\alpha},$$

где α пробегает множество Σ_{Π} всех положительных корней $\alpha = \sum c_k \alpha_k$, у которых $c_k > 0$ хотя бы для одного $\alpha_k \in \Pi$.

Найдем нормализатор $\mathfrak{N}^{\Pi}$ алгебры $\mathfrak{Z}^{\Pi}$. Обозначим через $\overline{\Pi}$ множество простых корней, не принадлежащих П. Будет доказано, что

$$\mathfrak{N}^{\Pi} = \mathfrak{T} + \mathfrak{C} + \sum_{(\overline{\Pi})} \mathfrak{G}_{\alpha} + \mathfrak{Z}^{\Pi},$$

где сумма берется по всем корням α, являющимся линейными комбинациями корней из $\overline{\Pi}$.

Прежде всего очевидно, что $\mathfrak{T} + \mathfrak{C} \subset \mathfrak{N}^{\Pi}$, поскольку $[\mathfrak{T} + \mathfrak{C}, \mathfrak{G}_{\alpha}] \subset \mathfrak{G}_{\alpha}$ для любого корня α.

Покажем теперь, что если корень β является линейной комбинацией корней из $\overline{\Pi}$, то $\mathfrak{G}_{\beta} \subset \mathfrak{N}^{\Pi}$. В самом деле, из определения множества Σ_{Π} непосредственно следует, что если $\alpha \in \Sigma_{\Pi}$ и $\alpha + \beta$ — корень, то $\alpha + \beta \in \Sigma_{\Pi}$. Следовательно, поскольку $[\mathfrak{G}_{\beta}, \mathfrak{G}_{\alpha}] = 0$, если $\alpha + \beta$ — не корень, и $[\mathfrak{G}_{\beta}, \mathfrak{G}_{\alpha}] = \mathfrak{G}_{\alpha+\beta}$, если $\alpha + \beta$ — корень, то $[\mathfrak{G}_{\beta}, \mathfrak{Z}^{\Pi}] \subset \mathfrak{Z}^{\Pi}$, а потому $\mathfrak{G}_{\beta} \subset \mathfrak{N}^{\Pi}$.

Итак, установлено, что $\mathfrak{N}^{\Pi} \supset \mathfrak{T} + \mathfrak{C} + \sum_{(\overline{\Pi})} \mathfrak{G}_{\alpha} + \mathfrak{Z}^{\Pi}$. Покажем, что на самом деле имеет место равенство. Из того, что $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{N}^{\Pi}$, следует, что

$$\mathfrak{N}^{\Pi} = \mathfrak{T} + \mathfrak{C} + \sum_{\alpha} (\mathfrak{N}^{\Pi} \cap \mathfrak{G}_{\alpha}).$$

Предположим, что для некоторого корня β, не принадлежащего Σ_{Π} и не являющегося линейной комбинацией корней из $\overline{\Pi}$, пересечение $\mathfrak{N}^{\Pi} \cap \mathfrak{G}_{\beta}$, не пусто; пусть $\mathfrak{g}_{\beta} \neq 0$ — элемент из этого пересечения.

Поскольку любой положительный корень либо принадлежит Σ_{Π}, либо является линейной комбинацией корней из $\overline{\Pi}$, то $\beta < 0$. Следовательно, $-\beta > 0$, а потому $-\beta \in \Sigma_{\Pi}$, $\mathfrak{G}_{-\beta} \subset \mathfrak{Z}^{\Pi}$.

Известно, что $[\mathfrak{g}_{\beta}, \mathfrak{G}_{-\beta}] \neq 0$. Поскольку, с другой стороны, $[\mathfrak{g}_{\beta}, \mathfrak{G}_{-\beta}] \subset \mathfrak{G}$, то множество $[\mathfrak{g}_{\beta}, \mathfrak{G}_{-\beta}]$ не содержится в $\mathfrak{Z}^{\Pi}$. Этим доказано, что элемент $\mathfrak{g}_{\beta}$ не принадлежит нормализатору $\mathfrak{N}^{\Pi}$ алгебры $\mathfrak{Z}^{\Pi}$, что противоречит сделанному предположению.

Таким образом, мы доказали, что

$$\mathfrak{N}^{\Pi} = \mathfrak{T} + \mathfrak{C} + \sum_{(\overline{\Pi})} \mathfrak{G}_{\alpha} + \mathfrak{Z}^{\Pi}, \tag{1}$$

где сумма берется по всем корням, представимым в виде линейных комбинаций корней из $\overline{\Pi}$. Положим

$$\mathfrak{G}^{\Pi} = \mathfrak{T} + \mathfrak{C} + \sum_{(\overline{\Pi})} \mathfrak{G}_{\alpha}.$$

Тогда равенство (1) означает, что $\mathfrak{N}^{\Pi}$ является прямой суммой

$$\mathfrak{N}^{\Pi} = \mathfrak{G}^{\Pi} + \mathfrak{Z}^{\Pi}.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{G}^{\Pi}$ является редуктивной алгеброй, причем система ее простых корней совпадает с $\overline{\Pi}$.

Переходя от алгебр Ли к группам, мы заключаем, что нормализатор N^{Π} группы Z^{Π} является полупрямым произведением

$$N^{\Pi} = G^{\Pi} Z^{\Pi}, \tag{2}$$

где G^{Π} — редуктивная группа, алгебра Ли которой есть $\mathfrak{G}^{\Pi}$, Перейдем к отысканию стационарной группы в пространстве П-орисфер. Нетрудно убедиться, что эта стационарная группа порождается подгруппами Z_A^{Π} и N_Q^{Π}. Так как, в силу разложения (2), $N_Q^{\Pi} = G_Q^{\Pi} Z_Q^{\Pi}$, то мы заключаем:

Стационарной группой в пространстве Ω^{Π} *П-орисфер является группа* $G_Q^{\Pi} Z_A^{\Pi}$. *Таким образом,*

$$\Omega^{\Pi} = G_Q^{\Pi} Z_A^{\Pi} \setminus G_A.$$

2. Формулировка основной теоремы. *Обозначим через* $H^0(G_Q \setminus G_A)$ *пересечение ядер всех орисферических отображений, т. е. совокупность всех функций* $f(x) \in L_2(G_Q \setminus G_A)$, *интегралы которых по всем орисферам равны нулю.*

Иными словами, $H^0(G_Q \setminus G_A)$ состоит из всех функций $f(g)$ на группе G_A, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(\gamma g) = f(g)$ для любого $\gamma \in G_Q$;

2) $\displaystyle\int_{G_Q \setminus G_A} |f(g)|^2 \, dg < \infty$;

3) $\displaystyle\int_{Z_Q^{\Pi} \setminus Z_A^{\Pi}} f(zg) \, dz = 0$ для любого $g \in G_A$ и любого подмножества П простых корней.

Напомним, что все орисферы компактны; таким образом, интегрирование в 3) ведется по компактному множеству.

Очевидно, что пространство H^0 инвариантно относительно операторов $T(g)$ представления группы G_A:

$$T(g_0) f(g) = f(gg_0).$$

Основная задача этого параграфа — разложение представления в пространстве H^0 на неприводимые представления. В этом пункте будет приведена формулировка основного результата.

Предварительно разложим H^0 на подпространства H_{π}^0. Пусть K — центр группы G. Очевидно, что пространство H^0 инвариантно относительно преобразований

$$f(g) \to f(kg), \quad k \in K_A$$

и что эти преобразования перестановочны с операторами $T(g)$. Кроме того, имеем $f(kg) = f(g)$ для любого $k \in K_Q$.

Отсюда следует, что H^0 можно разложить в непрерывную прямую сумму пространств H^0_π:

$$H^0 = \int H^0_\pi \, d\pi,$$

где π пробегает множество унитарных характеров группы K_A, равных тождественно единице на подгруппе K_Q. Пространство H^0_π состоит из функций $f(g)$ на G_A, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(\gamma g) = f(g)$ для любого $\gamma \in G_Q$;

2) $f(kg) = \pi(k) f(g)$ для любого $k \in K_A$;

3) $\displaystyle\int\limits_{G_Q \setminus G_A / K_A} |f(g)|^2 \, dg < \infty$;

4) $\displaystyle\int\limits_{Z_Q^\Pi \setminus Z_A^\Pi} f(zg) \, dz = 0$ для любого $g \in G_A$ и любого подмножества Π простых корней.

Таким образом, задача о разложении представления в пространстве H^0 на неприводимые представления сводится к задаче о разложении представлений в пространствах H^0_π.

Основная теорема этого параграфа утверждает, что *пространства H^0_π разлагаются в прямую сумму счетного числа инвариантных неприводимых подпространств*. Фактически будет доказано даже больше. Именно, мы покажем, что для любой положительно определенной функции Шварца — Брюа $\varphi(g)$ на группе G_A оператор T_φ имеет след в пространстве H^0_π. Из этого результата вытекает (см. § 3), что каждое неприводимое унитарное представление группы G_A, входящее в H^0, является тензорным произведением неприводимых унитарных представлений групп G_p.

3. Зигелевские множества на группе G_A. Обозначим через Z_∞ подгруппу группы G_A, состоящую из элементов вида

$$\tilde{z} = (z_\infty, 1, \ldots). \tag{1}$$

Аналогично, обозначим через T_∞ группу элементов вида

$$\tilde{t} = (t_\infty, 1, \ldots). \tag{2}$$

Назовем *зигелевским множеством, связанным с подгруппой* Z, подмножество группы G_A вида

$$Z_\infty \widetilde{T}_\infty V, \tag{3}$$

где V — некоторое компактное множество, а $\widetilde{T}_\infty$ — полуограниченное подмножество в T_∞, т. е. такое подмножество, что $t^{-1}zt$ ограничено для любого фиксированного $z \in Z_\infty$, когда t пробегает $\widetilde{T}_\infty$.

Потребуем дополнительно, чтобы множество V было инвариантным относительно умножения слева на подгруппу $U_0 = U \cap Z_A$, т. е.

$$U_0 V = V.$$

Здесь U—подгруппа аделей вида $(1, u_2, \ldots, u_p, \ldots)$, $u_p \in U_p$.

Покажем, что при этом условии *образ зигелевского множества S в пространстве X содержит вместе с каждой точкой x хотя бы одну орисферу, через нее проходящую.*

В самом деле, пусть x — точка из X, принадлежащая образу зигелевского множества S и пусть $g = ztv$, $z \in Z_\infty$, $t \in \widetilde{T}_\infty$, $v \in V$ — один из ее прообразов в S. Рассмотрим множество $Z_\infty t U_0 v$. Это множество содержится в S, а его образ в пространстве X представляет собой орисферу в X. Это следует из того, что проекция множества $Z_\infty U_0$ на $Z_Q \setminus Z_A$ заполняет все $Z_Q \setminus Z_A$.

В настоящем пункте будет показано, на основании двух результатов А. Бореля, что *существует зигелевское множество S, образ которого при естественном отображении на $X = G_Q \setminus G_A$ совпадает со всем X*. Иными словами, будет показано, что имеет место следующее разложение:

$$G_A = G_Q Z_\infty \widetilde{T}_\infty V, \tag{4}$$

где V — некоторое компактное множество, а $\widetilde{T}_\infty$ — полуограниченное подмножество из T_∞.

Разложение (4) вытекает из следующих результатов А. Бореля. Как показано в работе [2], имеет место следующее разложение:

$$G_\infty = \bigcup_{i=1}^{n} G_Z \gamma_i Z_\infty \widetilde{T}^0_\infty V_\infty, \tag{5}$$

где V_∞ — некоторое компактное множество в G_∞. Далее, как показано в [4], существует конечное множество элементов $x_1, \ldots, x_m \in G_A$, таких, что

$$G_A = \bigcup_{k=1}^{m} G_Q x_k G_A^\infty, \tag{6}$$

где G_A^∞ означает подгруппу группы G_A, состоящую из элементов группы G_A вида

$$(g_\infty, u_2, u_3, \ldots), \; g_\infty \in G_\infty, \; u_p \in U_p.$$

Здесь U_p означает целочисленную подгруппу группы G_p.

Нетрудно видеть, что группы G_A^∞ и $g^{-1}G_A^\infty g$, где $g \in G_Q$, соизмеримы, т. е. их пересечение имеет в каждой из них конечный индекс.

Следовательно, для каждого $x \in G_A$ существует такое конечное множество элементов $x_1, \ldots, x_m$ из G_A, что

$$xG_A^\infty \subset \bigcup_{k=1}^{m} G_A^\infty x_k.$$

Следовательно, существует такое конечное множество элементов $y_1, \ldots, y_m$ из G_A, что

$$G_A = \bigcup_{k=1}^{N} G_Q G_A^\infty y_k. \tag{7}$$

Из (5) и (7) разложение (4) следует непосредственно.

В дальнейшем нам понадобятся также зигелевские множества, связанные с П-орисферами. Они определяются следующим образом. Пусть Z^Π — орисферическая подгруппа группы G, N^Π — ее нормализатор. Как мы показали в п. 1, $N^\Pi = G^\Pi Z^\Pi$, где G^Π — некоторая редуктивная группа. Обозначим через T^Π максимальный расщепимый над Q тор, лежащий в центре группы G^Π. Аналогично тому, как это было сделано для группы Z, введем группы Z_∞^Π, T_∞^Π.

Множества вида

$$Z_\infty^\Pi \widetilde{T}_\infty^\Pi V, \tag{8}$$

где $\widetilde{T}_\infty^\Pi$ — полуограниченное множество в T_∞^Π, а V — некоторое компактное множество в G_A, будем называть зигелевскими множествами, соответствующими П-орисферам.

При этом на множество V будет всегда накладываться дополнительное условие:

$$U^{\Pi} V = V,$$

где $U^{\Pi} = Z_A^{\Pi} \cap U$.

При этом условии, как и в случае зигелевских множеств, связанных с максимальными орисферическими подгруппами Z_A, справедливо следующее утверждение.

Образ зигелевского множества содержит вместе с каждой точкой x хотя бы одну Π-орисферу, через нее проходящую.

4. Правильные зигелевские множества. Пусть

$$S = Z_{\infty} \widetilde{T}_{\infty} V$$

— некоторое зигелевское множество. Напомним, что множество V предполагается инвариантным относительно умножения слева на группу $U_0 = U \cap Z_A$, где U — подгруппа аделей вида $(1, u_2, \ldots, u_p, \ldots)$, $u_p \in U_p$. При этом предположении, как было уже отмечено в п. 3, образ множества S в пространстве X содержит вместе с каждой точкой и целую орисферу, проходящую через эту точку.

Отметим, что эти орисферы, вообще говоря, между собой пересекаются.

Как нетрудно убедиться, для того, чтобы образ зигелевского множества S в пространстве X расслаивался на попарно непересекающиеся орисферы, достаточно выполнения следующего условия.

(α) *Существует такая окрестность W единицы группы G_A, что если $g_1^{-1} \gamma g_2 \in W$, где $\gamma \in G_Q$, g_1, $g_2 \in S$, то $\gamma \in \Delta$, где Δ — множество целочисленных матриц из Z_Q.*

Действительно, S расслаивается на множества вида $Z_{\infty} U_0 t_1 v_1$. Проекции этих множеств, как мы уже отмечали выше, являются орисферами. Покажем, что орисферы, соответствующие разным значениям $t_1 v_1$, по модулю U_0 не пересекаются. Действительно, пусть это не так, т. е. пусть проекции множеств $Z_{\infty} U_0 t_1 v_1$ и $Z_{\infty} U_0 t_2 v_2$ пересекаются. Это означает, что существует такое $\gamma \in G_Q$, что

$$\gamma z_1 u_1 t_1 v_1 = z_2 u_2 t_2 v_2.$$

Из (α) следует, что $\gamma \in \Delta \subset Z_\infty U_0$ и, значит, $t_1 v_1 = u t_2 v_2$, где $u \in U_0$.

Зигелевские множества, удовлетворяющие условию (α), будем называть **правильными**. Задачей этого пункта является доказательство следующего утверждения.

Рассмотрим зигелевское множество следующего вида:

$$S = Z_\infty \tilde{T}_\infty U_0 g W_0, \tag{1}$$

где g — фиксированный элемент из G_A, W_0 — компактная окрестность единицы, а $\tilde{T}_\infty$ — полуограниченное множество в T_∞.

Тогда, если окрестность W_0 достаточно мала, а элементы t множества $\tilde{T}_\infty$ удовлетворяют условию:

$$\alpha(\ln t) > c \text{ для любого простого корня } \alpha,$$

где c — достаточно большое число, то множество S является правильным зигелевским множеством.

Пусть

$$g_1 = z_1 t_1 u_1 g w_1, \quad g_2 = z_2 t_2 u_2 \delta w_2 \tag{2}$$

— два элемента из S (здесь $z_1, z_2 \in Z_\infty$, $t_1, t_2 \in \tilde{T}_\infty$, $u_1, u_2 \in U_0$, $w_1, w_2 \in W_0$) и пусть $\gamma \in G_Q$. Нам нужно доказать, что из условия

$$g_1^{-1} \gamma g_2 \in W, \tag{3}$$

т. е.

$$w_1^{-1} g^{-1} u_1^{-1} t_1^{-1} z_1^{-1} \gamma z_2 t_2 u_2 g w_2 \in W, \tag{4}$$

где W — некоторая фиксированная окрестность единицы в G_A (эта окрестность будет определена позднее), вытекает, что $\gamma \in \Delta$.

Обозначим через F_∞ фундаментальную область в группе Z_∞ относительно подгруппы целочисленных матриц из Z_∞. Как известно, эта область компактна.

Представим z_1 и z_2 в виде

$$z_1 = \delta_1 z_1', \quad z_2 = \delta_2 z_2',$$

где $\delta_1 = (\delta_1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, $\delta_2 = (\delta_2, 1, \ldots, 1, \ldots)$, δ_1 и δ_2 — целочисленные матрицы, и $z_1', z_2' \in F_\infty$.

Тогда условие (4) перепишется в виде

$$w_{\mathrm{I}}^{-1}g^{-1}u_{\mathrm{I}}^{-1}t_{\mathrm{I}}^{-1}z_1'^{-1}\left(\delta_{\mathrm{I}}^{-1}\gamma\delta_2\right)z_2't_2u_2gw_2\in W. \tag{5}$$

Из условия (5) следует, что

$$t_{\mathrm{I}}^{-1}\delta_{\mathrm{I}}^{-1}\gamma\delta_2t_2\in\left(t_{\mathrm{I}}^{-1}z_{\mathrm{I}}'t_{\mathrm{I}}\right)U_0g\left(W_0WW_0^{-1}\right)g^{-1}U_0\left(t_2^{-1}z_2't_2\right). \tag{6}$$

Рассмотрим проекцию элемента $t_{\mathrm{I}}^{-1}\delta_{\mathrm{I}}^{-1}\gamma\delta_2t_2$ на подгруппу G_a аделей вида $(1, g_2, \ldots, g_p, \ldots)$. Поскольку проекции элементов t_1, t_2, δ_1, δ_2, z_1, z_2 на подгруппу G_a равны 1, то мы получаем из (6), что

$$\gamma_a\in U_0g_a\left(W_0WW_0^{-1}\right)_a g_a^{-1}U_a. \tag{7}$$

(Значок a внизу обозначает проекцию на подгруппу G_a.)

Будем предполагать окрестности W_0 и W выбранными столь малыми, что

$$g_a\left(W_0WW_0^{-1}\right)g_a^{-1}\subset U. \tag{8}$$

Тогда из условия (7) следует, что

$$\gamma_a\in U,$$

где $\gamma_a=(1, \gamma, \ldots, \gamma, \ldots)$, а потому матрица γ является целочисленной.

Теперь рассмотрим проекцию элемента $t_{\mathrm{I}}^{-1}\delta_{\mathrm{I}}^{-1}\gamma\delta_2t_2$ на подгруппу G_∞.

Мы получим из условия (6), что

$$t_{\mathrm{I}}^{-1}\delta_{\mathrm{I}}^{-1}\delta_2t_2\in\left(t_{\mathrm{I}}^{-1}z_{\mathrm{I}}'t_1\right)g_\infty\left(W_0WW_0^{-1}\right)_\infty g_\infty^{-1}\left(t_2^{-1}z_2't_2\right). \tag{9}$$

Напомним, что элементы z_{I}', z_2' принадлежат компактному множеству. Поэтому из условия полуограниченности множества $\widetilde{T}_\infty$ вытекает, что $t_{\mathrm{I}}^{-1}z_{\mathrm{I}}'t_{\mathrm{I}}$ и $t_2^{-1}z_2't_2$ принадлежат достаточно малой окрестности единицы. Итак, условие (9) означает, что

$$t_{\mathrm{I}}^{-1}\delta_{\mathrm{I}}^{-1}\gamma\delta_2t_2\in K,$$

где K — достаточно малая окрестность единицы, а γ' является, как было уже доказано, целочисленной матрицей.

Утверждение теоремы следует теперь непосредственно из следующей леммы, Лемма. *Если элементы t_1, t_2 удовлетворяют для любого положительного корня α неравенству*

$$\alpha(\ln t) > c,$$

где c — достаточно большое число, и если K — достаточно малая окрестность единицы, то из условия

$$t_1^{-1}\gamma t_2 \in K,$$

где γ — целочисленная матрица, следует, что $\gamma \in Z$.

Доказательство. Рассмотрим присоединенное представление группы G_∞. При этом будем предполагать, что базис в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ группы G_∞ согласован с ее разбиением на корневые подпространства:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \sum_\alpha \mathfrak{G}_\alpha.$$

Можно предполагать, что именно это матричное представление группы G_∞ взято с самого начала *). Таким образом, γ есть элемент из подгруппы целочисленных матриц в присоединенном представлении.

В соответствии с разбиением $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \sum \mathfrak{G}_\alpha$, будем записывать матрицы $g \in G$ в клеточно-диагональной форме: $g = \| g_{\alpha\beta} \|$.

Нам нужно доказать, что $\gamma_{\alpha,\beta} = 0$, если $\alpha < 0$, $\beta > 0$, и что $\gamma_{\alpha\alpha}$ — единичные матрицы.

Заметим, что в выбранном базисе матрицы $t \in T$ являются клеточно-диагональными, причем их диагональные элементы имеют следующий вид:

$$t_{\alpha\alpha} = \exp(\alpha(\ln t))\, e_\alpha,$$

где e_α — единичная матрица.

Таким образом, элементы матрицы $\gamma' = t_1^{-1}\gamma t_2$ имеют вид

$$\gamma'_{\alpha\beta} = \exp[\beta(\ln t_2) - \alpha(\ln t_1)]\, \gamma_{\alpha\beta}. \tag{10}$$

---

*) Такое предположение обосновано в силу известного факта, что подгруппы целочисленных матриц в различных представлениях группы G являются соизмеримыми.

Итак, пусть $\alpha < 0$ и $\beta > 0$. Тогда, в силу условия леммы, для любых соответствующих элементов $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $\tilde{\gamma}'_{\alpha\beta}$ матриц $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\gamma'_{\alpha\beta}$ имеет место неравенство

$$|\tilde{\gamma}'_{\alpha\beta}| > \exp(2c)\,|\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}|. \tag{11}$$

Предположим, что $\gamma_{\alpha\beta} \neq 0$. Так как отличные от нуля элементы матрицы $\gamma_{\alpha\beta}$ являются целыми числами, то они ограничены по модулю снизу. Но тогда, в силу неравенства (11), элементы матрицы $\gamma'_{\alpha\beta}$ не могут быть сколь угодно малыми, что противоречит условию леммы. Итак, доказано, что $\gamma_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Теперь докажем, что $\gamma_{\alpha\alpha}$ — единичные матрицы. Заметим, что так как, в силу уже доказанного, γ является треугольной матрицей, то из целочисленности γ и γ^{-1} следует, что $\gamma_{\alpha\alpha}$ — унимодулярные матрицы. Условие (10) дает нам:

$$\gamma'_{\alpha\alpha} = \exp\left(\alpha\left(\ln\frac{t_2}{t_1}\right)\right)\gamma_{\alpha\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\det\gamma'_{\alpha\alpha} = \exp^{n_\alpha}\left(\alpha\left(\ln\frac{t_2}{t_1}\right)\right)\det\gamma_{\alpha\alpha} = \exp^{n_\alpha}\left(\alpha\left(\ln\frac{t_2}{t_1}\right)\right), \tag{12}$$

где n_α — порядок матрицы $\gamma_{\alpha\alpha}$.

Так как по условию матрицы $\gamma'_{\alpha\alpha}$ достаточно близки к единичной матрице, то, в силу (12), значение $\exp\left(\alpha\left(\ln\left(t_2 t_1^{-1}\right)\right)\right)$ достаточно близко к единице.

Следовательно, матрица

$$\gamma_{\alpha\alpha} = \exp\left(-\alpha\left(\ln\frac{t_2}{t_1}\right)\right)\gamma'_{\alpha\alpha}$$

достаточно близка к единичной матрице. На так как, кроме того, $\gamma_{\alpha\alpha}$ — целочисленная матрица, то она совпадает с единичной матрицей. Лемма доказана.

5. Правильные зигелевские множества, связанные с II-орисферами. Пусть

$$S = Z_\infty^{\mathrm{II}}\tilde{T}_\infty^{\mathrm{II}}V$$

— зигелевское множество, связанное с П-орисферами. Напомним, что по предположению, компактное множество V удовлетворяет следующему условию:

$$U^{\Pi}V = V,$$

где $U^{\Pi} = U \cap Z_A$, U — подгруппа аделей вида $(1, u_2, \ldots, u_p \ldots)$, $u_p \in U_p$. При этом предположении образ множества S в пространстве X содержит вместе с каждой точкой x и целую П-орисферу, проходящую через эту точку. Эти орисферы, вообще говоря, между собой пересекаются.

Нетрудно убедиться, что для того, чтобы образ зигелевского множества S в пространстве X расслаивался на попарно не пересекающиеся П-орисферы, достаточно выполнения следующего условия:

(α) *Существует такая окрестность единицы W в группе G_A, что если $g_1^{-1}\gamma g_2 \in W$, где $g_1, g_2 \in W$, $\gamma \in G_Q$, то $\gamma \in \Delta^{\Pi}$, где Δ^{Π} обозначает целочисленную подгруппу группы Z_Q^{Π}.*

Доказательство этого утверждения проводится так же, как и для зигелевских множеств, связанных с максимальными орисферическими подгруппами Z_A (см. п. 4).

Зигелевские множества, удовлетворяющие условию (α), будем называть правильными.

Подобно тому, как это делалось в п. 4 для случая максимальных орисферических подгрупп, устанавливается следующий результат:

Рассмотрим зигелевское множество следующего вида

$$S = Z_{\infty}^{\Pi}\tilde{T}_{\infty}^{\Pi}U^{\Pi}gW_0,$$

где g — фиксированный элемент из G_A, W_0 — компактная окрестность единицы, а $\tilde{T}_{\infty}^{\Pi}$ — полуограниченное множество в T_{∞}^{Π}.

Тогда, если окрестность W_0 достаточно мала, а элементы t множества $\tilde{T}_{\infty}^{\Pi}$ удовлетворяют условию:

$\alpha(\ln t) > c$ *для любого простого корня α, где c — достаточно большое число, то множество S является правильным зигелевским множеством.*

В этом пункте будет установлен следующий результат:

Теорема. *Пространство* $X = G_Q \setminus G_A$ *может быть покрыто проекциями конечного числа правильных зигелевских множеств.*

Доказательство. Как было доказано в п. 3, существует зигелевское множество

$$S = Z_\infty \widetilde{T}_\infty V,$$

проекция которого на $X = G_Q \setminus G_A$ совпадает с X.

Пусть Π — произвольное подмножество множества простых корней. Обозначим через $\widetilde{T}_\infty(\Pi)$ подмножество в $\widetilde{T}_\infty$, состоящее из таких t, что

$$\alpha_i(\ln t) > c, \quad \text{если} \quad \alpha_i \in \Pi;$$

$$\alpha_i(\ln t) < c, \quad \text{если} \quad \alpha_i \notin \Pi,$$

где c — достаточно большое число.

Тогда очевидно, что

$$S = \sum_{\Pi} Z_\infty T_\infty(\Pi) V.$$

Покажем, что для каждого из множеств $Z_\infty \widetilde{T}_\infty(\Pi) V$ существует зигелевское множество

$$S^\Pi = Z_\infty^\Pi \widetilde{T}_\infty^\Pi V^\Pi,$$

проекция которого на X содержит проекцию множества $Z_\infty \widetilde{T}_\infty(\Pi) V$, и такое, что

$$\alpha(\ln t) > c$$

для любого простого корня α и любого $t \in \widetilde{T}_\infty$, где c — постоянная, определенная выше.

Заметим, что элементы g и δg, где $\delta \in \Delta$, имеют одну и ту же проекцию на X. Поэтому проекция на X множества $Z_\infty \widetilde{T}_\infty(\Pi) V$ совпадает с проекцией множества $F_\infty \widetilde{T}_\infty(\Pi) V$, где F_∞ — фундаментальная область группы Z_∞ относительно подгруппы Δ целочисленных матриц. Эта область F_∞ является компактным множеством.

Разложим группу Z_∞ в полупрямое произведение

$$Z_\infty = Z_\infty^\Pi \widetilde{Z}_\infty^\Pi$$

подгруппы Z_∞^Π и дополнительной подгруппы $\widetilde{Z}_\infty^\Pi$ *). Обозначим через $\widetilde{F}_\infty^\Pi$ проекцию множества F_∞ на подгруппу $\widetilde{Z}_\infty^\Pi$. Очевидно, что $\widetilde{F}_\infty^\Pi$ — компактное множество, следовательно, ввиду полуограниченности $\widetilde{T}_\infty(\Pi)$, компактным будет и множество

$$\sum_{t \in \widetilde{T}_\infty(\Pi)} t^{-1} \widetilde{F}_\infty^\Pi t.$$

С другой стороны, легко проверить, что множество $T_\infty(\Pi)$ может быть представлено в виде произведения

$$\widetilde{T}_\infty(\Pi) = \widetilde{T}_\infty^\Pi T',$$

где T' — компактное множество, а $\alpha(\ln t) > c$ для любого простого корня α и любого $t \in T_\infty^\Pi$.

Положим

$$V^\Pi = T'\Big(\sum_{t \in \widetilde{T}_\infty(\Pi)} t^{-1} \widetilde{F}_\infty^\Pi t\Big) V$$

и покажем, что множество

$$S^\Pi = Z_\infty^\Pi \widetilde{T}_\infty^\Pi V^\Pi$$

является требуемым множеством.

В самом деле, пусть ztv — элемент из множества $Z_\infty \widetilde{T}(\Pi) V$. Как уже говорилось раньше, можно предполагать, что $z \in F_\infty$. Тогда имеем $z = z_\infty^\Pi \widetilde{z}_\infty^\Pi$, где $z_\infty^\Pi \in Z_\infty^\Pi$, $\widetilde{z}_\infty^\Pi \in \widetilde{F}_\infty^\Pi$. С другой стороны, имеем $t = t^\Pi t'$, где $t^\Pi \in \widetilde{T}_\infty^\Pi$, $t' \in T'$.

Следовательно,

$$ztv = z_\infty^\Pi t^\Pi t' \left(t^{-1} \widetilde{z}_\infty^\Pi t\right) v.$$

Из этого разложения ясно, что элемент ztv принадлежит множеству S^Π, что и требовалось доказать.

---

*) Алгебра Ли группы $\widetilde{Z}^\Pi$ порождается корневыми подпространствами $\mathfrak{G}_\alpha$, где α пробегает положительные корни, являющиеся линейными комбинациями простых корней, не входящих в Π.

Итак, мы доказали, что пространство X покрывается проекциями конечного числа зигелевских множеств

$$Z_{\infty}^{\Pi}\tilde{T}_{\infty}^{\Pi}V,$$

таких, что $\alpha(\ln t) > c$ для любого простого корня α и любого $t \in \tilde{T}_{\infty}^{\Pi}$.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что каждое из этих множеств покрывается конечным числом множеств вида $Z_{\infty}^{\Pi}\tilde{T}_{\infty}^{\Pi}g_i W$, где W — фиксированная сколь угодно малая окрестность единичного элемента. Как было установлено раньше, если константа c взята достаточно большой, а окрестность W достаточно малой, то множества $Z_{\infty}^{\Pi}\tilde{T}_{\infty}^{\Pi}g_i W$ являются правильными зигелевскими множествами. Следовательно, пространство X может быть покрыто проекциями конечного числа правильных зигелевских множеств, что и требовалось доказать.

6. Редукция основной теоремы. Вернемся к доказательству основной теоремы, которая утверждает, что для любой положительно определенной функции Шварца — Брюа $\varphi(g)$ след оператора T_φ в пространстве H_{π}^{0} конечен.

Как мы показали в п. 5, существуют такие правильные зигелевские множества S_k, проекции X_k которых на пространство X покрывают все X.

Рассмотрим подпространства $L_2(X_k)$ функций $f(x) \in L_2(X)$, сосредоточенных на X_k, и пусть P_k — оператор проектирования на $L_2(X_k)$.

Очевидно, что

$$\operatorname*{Tr}_{H_{\pi}^{0}} T_\varphi \leqslant \sum_k \operatorname*{Tr}_{P_k H_{\pi}^{0}} (P_k T_\varphi P_k).$$

Следовательно, для доказательства основной теоремы достаточно доказать, что след оператора $P_k T_\varphi P_k$ на пространстве $P_k H_{\pi}^{0}$ конечен.

Проведем дальнейшую редукцию основной теоремы.

Пусть

$$S_k = Z_{\infty}^{\Pi}\tilde{T}_{\infty}^{\Pi}V$$

— правильное зигелевское множество, проекция которого на X есть X_k.

Рассмотрим совокупность $H^0_\pi(S_k)$ всех функций $f(g)$, сосредоточенных на S_k и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(\delta g) = f(g)$ для любого $\delta \in \Delta^\Pi$;

2) $f(kg) = \pi(k) f(g)$ для любого $k \in K_A$;

3) $\int\limits_{\Delta^\Pi \diagdown S_k / K_A} |f(g)|^2 \, dg < \infty$;

4) $\int\limits_{Z_Q^{\Pi_1} \diagdown Z_A^{\Pi_1}} f(z^{\Pi_1} g) \, dz^{\Pi_1} = 0$, если $\Pi_1 \subset \Pi$.

Покажем, что

$$P_k H^0_\pi \subset H^0_\pi(S_k).$$

В самом деле, в силу отображения

$$S_k \to X_k,$$

каждой функции $f(x) \in P_k H^0_\pi$ можно поставить в соответствие функцию $f_1(g)$ на S_k, определенную по формуле

$$f_1(g) = f(x_g), \text{ где } x_g \text{ — проекция } g \text{ в } X_k.$$

Непосредственно проверяется, что $f_1(g) \in H^0_\pi(S_k)$ и что отображение

$$f(x) \to f_1(g)$$

является изометричным отображением пространства $P_k H^0_\pi$ в пространство $H^0_\pi(S_k)$. Следовательно, это отображение можно рассматривать как вложение.

В силу этого вложения, доказательство основной теоремы свелось к доказательству следующего утверждения.

След оператора T_φ в пространстве $H^0_\pi(S_k)$ конечен для любой положительно определенной функции Шварца — Брюа φ.

Доказательство этого утверждения будет проведено в следующих пунктах.

Ради простоты изложения дальнейшие рассуждения будут вестись лишь для случая, когда группа G полупростая. В этом случае группа K тривиальна, а потому H^0_π есть все пространство H^0.

Исследование для произвольной редуктивной группы отличается от исследования, проводимого ниже, лишь более громоздкими обозначениями.

Напишем формулу для ядра оператора T_φ в пространстве $H(S_k) = L_2(\Delta \setminus S_k)$. Это ядро имеет следующий вид:

$$K(g_1, g_2) = \sum_{\gamma \in G_Q} \varphi(g_1^{-1}\gamma g_2), \quad g_1, g_2 \in S_k. \tag{1}$$

Предположим, что функция φ сосредоточена в достаточно малой окрестности W единичного элемента. Так как S_k — правильное зигелевское множество, то из условия, что $g_1^{-1}\gamma g_2 \in W$, где $g_1, g_2 \in S_k$, $\gamma \in G_Q$, следует, что $\gamma \in \Delta^\Pi$, где Δ^Π — подгруппа целочисленных матриц группы Z_Q^Π. Таким образом, суммирование в (1) ведется фактически по элементам $\gamma \in \Delta^\Pi$, т. е.

$$K(g_1, g_2) = \sum_{\delta \in \Delta\Pi} \varphi(g_1^{-1}\delta g_2). \tag{2}$$

7. p-норма. Введем важное для дальнейшего понятие p-нормы. Пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция n вещественных переменных.

Назовем p-нормой функции $f(x)$, где $p = 0, 1, 2, \ldots$, следующее выражение:

$$\|f(x)\|_p = \max_{i_1, \ldots, i_k} \left(\max_x \left| \frac{\partial^{p^k} f(x)}{\partial x_{i_1}^p \ldots \partial x_{i_k}^p} \right| \right), \tag{1}$$

максимум берется по всем точкам x и по всем подмножествам $(i_1, \ldots, i_k)$ множества индексов $1, \ldots, n$.

Отметим, что введенное нами понятие p-нормы не инвариантно относительно системы координат. Поэтому при введении p-нормы необходимо фиксировать некоторую определенную систему координат.

Понятие p-нормы нам понадобится при оценке суммы модулей коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Именно, предположим, что функция $f(x)$ периодична с периодом 1 по каждому из переменных x_k и пусть c_m, $m = (m_1, \ldots, m_n)$ — ее коэффициенты Фурье:

$$c_m = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n)} dx_1 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Покажем, что тогда *имеет место следующая оценка*:

$$\sum_{m\neq 0} |c_m| \leqslant C^{(p)} \| f \|_p, \tag{3}$$

где $C^{(p)}$ — *некоторая постоянная*, $p = 2, 3, 4, \ldots$

В самом деле, рассмотрим коэффициенты Фурье $c_{m'}$, $m' = (m_1, \ldots, m_n)$, у которых $m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}$ отличны от нуля и $m_i = 0$ при $i \neq i_1, \ldots, i_k$ ($i_1, \ldots, i_k$ — фиксированное подмножество индексов). Интегрированием по частям мы получаем для этих коэффициентов $c_{m'}$ следующую оценку:

$$|c_{m'}| \leqslant C \left(m_{i_1} \ldots m_{i_k}\right)^{-p} \max \left| \frac{\partial^{pk} f(x)}{\partial x_{i_1}^p \ldots \partial x_{i_k}^p} \right|.$$

Отсюда, суммируя по всем отличным от нуля $m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}$, получаем

$$\sum_{m'} |c_{m'}| \leqslant C_1 \max_x \left| \frac{\partial^{pk} f(x)}{\partial x_{i_1}^p \ldots \partial x_{i_k}^p} \right|. \tag{4}$$

Суммируя, наконец, неравенства (4) по всем подмножествам индексов $(i_1, \ldots, i_k)$, получаем требуемую оценку (3).

8. Доказательство основной теоремы. Рассматривается оператор T_φ в пространстве $H = L_2(\Delta^{\text{П}} \setminus S_k)$, где $S_k = Z_\infty^{\text{П}} \tilde{T}_\infty^{\text{П}} V$ — правильное зигелевское множество, а φ — положительно определенная функция на G_A, сосредоточенная в достаточно малой окрестности единицы. Ядро этого оператора имеет следующий вид:

$$K(g_1, g_2) = \sum_{\delta \in \Delta^{\text{П}}} \varphi(g_1^{-1} \delta g_2). \tag{1}$$

В предыдущих пунктах мы свели доказательство основной теоремы к доказательству конечности следа оператора T_φ на подпространстве $H^0(\Delta \setminus S_k)$. Это доказательство будет начато здесь и завершено в п. 10.

Выберем в алгебре Ли $\mathfrak{Z}_\infty^{\text{П}}$ группы $Z_\infty^{\text{П}}$ некоторую систему координат, определенную над Q и совместимую с разбиением $\mathfrak{Z}_\infty^{\text{П}}$ на корневые подпространства. Воспользовавшись каноническим отображением

$$t \to \exp t$$

алгебры $\mathfrak{Z}_\infty^{\Pi}$ на Z_∞^{Π}, перенесем эту систему координат на группу Z_∞^{Π}.

Обозначим через $k_p(g)$ p-норму функции $\varphi(z;\ g) = K(zg,\ g)$, рассматриваемой как функция на Z_∞^{Π}. Мы покажем здесь, что *существует такое p, что*

$$\int\limits_{\Delta^{\Pi} \setminus S_k} k_p(g)\, dg < \infty. \tag{2}$$

Вначале оценим число отличных от нуля членов в ряду для $K(zg,\ g)$:

$$K(zg,\ g) = \sum_{\delta \in \Delta^{\Pi}} \varphi(g^{-1} z^{-1} \delta g),\quad g = z'tv. \tag{3}$$

По условию, для таких членов должно быть

$$v^{-1} t^{-1} z'^{-1} \delta z' t v \in W,$$

где W — достаточно малая окрестность единицы.

Перепишем это условие в следующем виде:

$$v^{-1}\left(t^{-1} z' t\right)^{-1}\left(t^{-1} z^{-1} \delta t\right)\left(t^{-1} z' t\right) v \in W. \tag{4}$$

Поскольку z' принадлежит ограниченному множеству, а t пробегает полуограниченное множество на торе, то $t^{-1} z' t$ принадлежит ограниченному множеству. Так как v также принадлежит ограниченному множеству, то из условия (4) имеем

$$t^{-1} z^{-1} \delta t \in W',$$

откуда

$$t^{-1} \delta t \in \left(t^{-1} z t\right) W', \tag{5}$$

где W' — некоторая достаточно малая окрестность единицы. Обозначим через $\varphi(z)$ максимум модулей матрицы z, не стоящих на диагонали. Тогда из (5) получаем следующую оценку:

$$\varphi\left(t^{-1} \delta t\right) < C \varphi(z). \tag{6}$$

(Мы пользуемся тем фактом, что ввиду полуограниченности множества элементов t, $\varphi\left(t^{-1} z t\right) < C_1 \varphi(z)$.)

Заметим, что при преобразовании $\delta \to t^{-1}\delta t$ каждый не стоящий на диагонали и отличный от нуля элемент матрицы δ умножается на $t^{-\alpha} \equiv \exp(-\alpha(\ln t))$, где α — некоторый положительный корень (свой для каждого элемента матрицы δ) Следовательно, на основании (6) мы получаем следующую оценку:

$$\varphi(\delta) < C\varphi(z)\, t^{\alpha_0}, \tag{7}$$

где $t^{\alpha_0} = \exp(\alpha_0(\ln t))$, α_0 — сумма всех положительных корней.

Очевидно, что для числа N целочисленных матриц δ, удовлетворяющих условию (7), имеет место следующая оценка:

$$N < C\varphi(z)\, t^{n\alpha_0},$$

где n — размерность группы Z^{Π}.

Итак, установлено, что число отличных от нуля членов ряда (3) не превышает $C\varphi(z)\, t^{n\alpha_0}$, где $\alpha_0 = \sum\limits_{\alpha > 0} \alpha$, а n — размерность группы Z^{Π}.

Теперь уже легко доказать сходимость ряда (2) для достаточно большого p. Для этого достаточно заметить, что p-я производная каждого члена ряда (3) не превосходит по модулю числа

$$\min_{\alpha > 0} t^{-p\alpha} \leqslant t^{-\frac{p}{a}\alpha_0},$$

где $\alpha_0 = \sum\limits_{\alpha > 0} \alpha$. a — общее число корней. Следовательно, p-я производная суммы ряда (3) не превосходит

$$C\varphi(z)\, t^{\left(n - \frac{p}{a}\right)\alpha_0}.$$

Итак, установлено, что

$$k_p(g) \leqslant C\varphi(z)\, t^{\left(n - \frac{p}{a}\right)\alpha_0}.$$

В силу этой оценки очевидно, что интеграл

$$\int\limits_{\Delta^{\Pi} \setminus S_k} k_p(g)\, dg = \int\limits_{\Delta^{\Pi} \setminus Z^{\Pi}} \int\limits_{T} \int\limits_{V} k_p(ztv)\, dz\, dt\, dv$$

сходится, если p достаточно велико.

Доказательство основной теоремы мы завершим в п. 10. Именно, в п. 9 будет сформулирована, а в п. 10 доказана основная лемма, из которой будет непосредственно вытекать конечность следа оператора, удовлетворяющего условию (2). Эта лемма относится к некоторому классу интегральных операторов на разрешимых группах.

9. Разрешимые алгебры и группы. Формулировка основной леммы. Пусть $\mathfrak{R}$ — разрешимая и расщепимая над полем Q рациональных чисел алгебраическая алгебра Ли. Как известно, $\mathfrak{R}$ допускает разложение Шевалле

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{T},$$

где $\mathfrak{Z}$ — максимальный нильпотентный идеал, а $\mathfrak{T}$ — коммутативная подалгебра; таким образом,

$$[\mathfrak{Z}, \mathfrak{T}] \subset \mathfrak{Z} \quad \text{и} \quad [\mathfrak{T}, \mathfrak{T}] = 0.$$

В нильпотентной подалгебре $\mathfrak{Z}$ можно естественным образом ввести понятие корня и корневого пространства. Именно, рассмотрим линейные функции $\alpha(t)$ на $\mathfrak{T}$ со значениями в Q. Назовем функцию $\alpha(t)$ *корнем*, если в $\mathfrak{Z}$ существует вектор $\mathfrak{z} \neq 0$ такой, что

$$[\mathfrak{z}, t] = \alpha(t)\mathfrak{z} \quad \text{для любого} \quad t \in \mathfrak{T}.$$

Очевидно, что совокупность векторов $\mathfrak{z}$, отвечающих одному и тому же корню $\alpha(t)$, образует линейное подпространство в $\mathfrak{Z}$. Это подпространство мы назовем *корневым подпространством* и обозначим через $\mathfrak{Z}_\alpha$.

Из определения следует, что

$$[\mathfrak{Z}_\alpha, \mathfrak{Z}_\beta] \subset \mathfrak{Z}_{\alpha+\beta}$$

для любых корней α, β. В частности, если $\alpha+\beta$ не является корнем, то $[\mathfrak{Z}_\alpha, \mathfrak{Z}_\beta] = 0$.

Назовем корень α алгебры $\mathfrak{Z}$ простым, если его нельзя представить в виде суммы других корней.

Будем предполагать, что множество корней α алгебры $\mathfrak{Z}$ удовлетворяет следующим условиям: 1) простые корни образуют линейно независимую систему Π_0, 2) любой корень алгебры $\mathfrak{Z}$ представим в виде суммы простых корней. Алгебры $\mathfrak{Z}$, удовлетворяющие этим условиям, назовем *правильными* алгебрами.

Кроме того, будем всегда предполагать, что число простых корней алгебры $\mathfrak{Z}$ равно размерности пространства $\mathfrak{T}$.

Перейдем теперь от алгебры $\mathfrak{R}=\mathfrak{Z}+\mathfrak{T}$ над полем Q к соответствующей ей разрешимой группе над полем вещественных чисел:

$$R=ZT,$$

где Z — унипотентный нормальный делитель в R, отвечающий $\mathfrak{Z}$, T — тор, отвечающий коммутативной подалгебре $\mathfrak{T}$.

Обозначим через Δ дискретную подгруппу группы Z, являющуюся подгруппой конечного индекса группы всех целочисленных матриц из Z.

Напомним определение полуограниченного множества на торе T. Множество $T^0\subset T$ называется полуограниченным, если для любого фиксированного $z\in Z$ множество элементов вида

$$t^{-1}zt, \qquad t\in T^0$$

является ограниченным.

Пусть

$$X=\Delta\diagdown ZT^0,$$

где T^0 — полуограниченное множество на торе, а Δ — некоторая подгруппа конечного индекса группы целочисленных матриц из Z.

Рассмотрим пространство $L_2(X)$, т. е. пространство функций $f(z, t)$, $z\in Z$, $t\in T^0$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(\delta z, t)=f(z, t)$ для любого $\delta\in\Delta$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\Delta\diagdown ZT^0} |f(z, t)|^2\,dz\,dt<\infty$.

Таким образом, пространство $L_2(X)$ является тензорным произведением

$$L_2(X)=L_2(\Delta\diagdown Z)\otimes L_2(T^0).$$

Выделим в $L_2(\Delta\diagdown Z)$ подпространство H_0 функций, интегралы которых по любой орисфере на $\Delta\diagdown Z$ равны нулю, и рассмотрим отвечающее H_0 подпространство

$$\tilde{H}_0=H_0\otimes L_2(T^0)$$

пространства $L_2(X)$.

Нашей ближайшей задачей является доказательство леммы о конечности следа оператора на $\tilde{H}_0$, которая формулируется ниже.

Назовем интегральный оператор A на $L_2(X)$ с ядром $K(z_1t,\ z_2t)$ *) *регулярным оператором*, если выполняются следующие условия.

1) A является самосопряженным положительным оператором.

2) Ядро K является бесконечно дифференцируемой функцией на $X \otimes X$.

3) Обозначим

$$k_p(z^0,\ t) = \| f(z) \|_p, \tag{1}$$

где

$$f(z) = K(zt,\ z^0t),$$

а $\| f \|_p$ — p-норма функции $f(z) \equiv f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, определенная в п. 7. Тогда найдется такое p, что

$$\int\limits_{\Delta \setminus ZT^0} k_p(z,\ t)\, dz\, dt < \infty.$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. *След регулярного оператора A на подпространстве $\tilde{H}_0$ конечен.*

(Под следом оператора A на подпространстве подразумевается след оператора PAP, где P — оператор проектирования на данное пространство.)

10. Доказательство основной леммы. Доказательство будет вестись индукцией по числу корней группы Z.

Рассмотрим какое-либо корневое подпространство $\mathfrak{Z}_m$, принадлежащее центру алгебры $\mathfrak{Z}$: $[\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}_m] = 0$. Очевидно, что $\mathfrak{Z}_m$ является подалгеброй в $\mathfrak{Z}$. Этой подалгебре $\mathfrak{Z}_m$ отвечает подгруппа Z_m, принадлежащая центру группы Z.

Пусть χ пробегает множество характеров компактной коммутативной группы $\Delta_m \setminus Z_m$; H^χ — подпространство функций $f(z)$ из $H = L_2(\Delta \setminus Z)$ таких, что

$$f(z_m z) = \chi(z_m) f(z) \text{ для любого } z_m \in Z_m.$$

---

*) Подразумевается, что $K(\delta_1 z_1 t_1,\ \delta_2 z_2 t_2) = K(z_1 t_1,\ z_2 t_2)$ для любых $\delta_1,\ \delta_2 \in \Delta$.

Очевидно, что пространство $H = L_2(\Delta \diagdown Z)$ является прямой суммой подпространств H^χ:

$$H = \sum_\chi H^\chi.$$

Выделим в H подпространство

$$H' = \sum_{\chi \neq \chi_0} H^\chi,$$

где χ_0 — характер, равный тождественно единице. Покажем, что *след оператора* A *на подпространстве* $\widetilde{H}' = H' \otimes L_2(T^0)$ *конечен.*

В самом деле, обозначим через P_χ оператор проектирования на $H^\chi \otimes L_2(T^0)$:

$$P_\chi f(z, t) = \int\limits_{\Delta_m \diagdown Z_m} \overline{\chi}(z_m) f(z_m z, t)\, dz_m.$$

Тогда имеем

$$\operatorname{Tr}_{\widetilde{H}^\chi} A = \operatorname{Tr}(P_\chi A P_\chi) = \int\limits_X \int\limits_{\Delta_m \diagdown Z_m} \overline{\chi}(z_m) K(z_m zt, zt)\, dz_m\, dz\, dt.$$

Так как

$$\operatorname{Tr}_{\widetilde{H}'} A \leqslant \sum_{\chi \neq \chi_0} \operatorname{Tr}_{\widetilde{H}^\chi} A,$$

то отсюда получаем, что

$$\operatorname{Tr}_{\widetilde{H}'} A \leqslant \sum_{\chi \neq \chi_0} \int\limits_X \int\limits_{\Delta_m \diagdown Z_m} \overline{\chi}(z_m) K(z_m zt, zt)\, dz_m\, dz\, dt. \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$\operatorname{Tr}_{\widetilde{H}'} A \leqslant \int\limits_X a(z, t)\, dz\, dt,$$

где

$$a(z, t) = \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \int\limits_{\Delta_m \diagdown Z_m} \overline{\chi}(z_m) K(z_m zt, zt)\, dz_m \right|.$$

Оценим $a(z, t)$. Пусть $\|K(z_m zt, zt)\|_p$ — p-норма функции $K(z_m zt, zt)$, рассматриваемой как функция от z_m.

Тогда на основании оценки для коэффициентов Фурье, приведенной в п. 7, мы имеем

$$a(z, t) \leqslant C \| K(z_m zt, zt) \|_p.$$

Но, как нетрудно убедиться,

$$\| K(z_m zt, zt) \|_p \leqslant k_p(z, t),$$

где $k_p(z, t)$ — функция, определенная формулой (1) п.9. Таким образом, имеем

$$a(z, t) \leqslant C k_p(z, t),$$

а потому

$$\operatorname*{Tr}_{\widetilde{H}'} A \leqslant \int\limits_X k_p(z, t)\, dz\, dt$$

для любого p. В силу предположения леммы, существует такое p, для которого $\int\limits_X k_p(z, t)\, dz\, dt < \infty$. Следовательно. конечен и $\operatorname*{Tr}_{\widetilde{H}'} A$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждения леммы: след оператора A на подпространстве $\widetilde{H}_0 = H_0 \otimes L_2(T^0)$ конечен.

Разложим $\widetilde{H}_0$ в прямую сумму подпространств $\widetilde{H}_0^\chi = H_0^\chi \otimes L_2(T^0)$, где $H_0^\chi = H^\chi \cap H_0$.

Поскольку

$$\widetilde{H}_0' \equiv \sum_{\chi \neq \chi_0} \widetilde{H}_0^\chi \subset \widetilde{H}',$$

то

$$\operatorname*{Tr}_{\widetilde{H}_0'} A \leqslant \operatorname*{Tr}_{\widetilde{H}'} A.$$

Следовательно, в силу доказанного выше, оператор A имеет конечный след на подпространстве $\widetilde{H}_0' = \sum\limits_{\chi \neq \chi_0} \widetilde{H}_0^\chi$.

Таким образом, для завершения доказательства леммы нужно лишь убедиться, что A имеет конечный след и на подпространстве

$$\widetilde{H}_0^{\chi_0} = H_0^{\chi_0} \otimes L_2(T^0).$$

Докажем это.

Заметим, что так как $\widetilde{H}_0^{\chi_0} \subset \widetilde{H}^{\chi_0}$, то

$$\operatorname*{Tr}_{\widetilde{H}_0^{\chi_0}} A = \operatorname*{Tr}_{\widetilde{H}_0^{\chi_0}} P_{\chi_0} A P_{\chi_0},$$

где P_{χ_0} — оператор проектирования на $\widetilde{H}^{\chi_0}$;

$$P_{\chi_0} f(z, t) = \int\limits_{\Delta_m | Z_m} f(z_m z, t)\, dz_m.$$

Таким образом, вместо оператора A можно рассматривать оператор $P_{\chi_0} A P_{\chi_0}$, ядро которого выражается через ядро K оператора A следующей формулой:

$$K(z_1 t_1, z_2 t_2) = \int\limits_{(\Delta_m \setminus Z_m) \times (\Delta_m \setminus Z_m)} K(z_m z_1 t_1, z'_m z_2 t_2)\, dz_m\, dz'_m. \tag{2}$$

Выясним теперь, как устроены пространства $\widetilde{H}^{\chi_0} = H^{\chi_0} \otimes L_2(T^0)$ и $\widetilde{H}_0^{\chi_0} = H_0^{\chi_0} \otimes L_2(T^0)$.

Пространство H^{χ_0} состоит из функций $f(z) \in L_2(\Delta \setminus Z)$, удовлетворяющих условию

$$f(z_m z) = f(z) \text{ для любого } z_m \in Z_m.$$

Следовательно,

$$H^{\chi_0} = L_2(\Delta' \setminus Z'),$$

где $Z' = Z_m \setminus Z$, $\Delta' = Z_m \setminus Z_m \Delta \cong \Delta_m \setminus \Delta$.

Подпространство $H_0^{\chi_0}$ есть в этой реализации пространство всех функций из $L_2(\Delta' \setminus Z')$, интегралы которых по любой орисфере на $\Delta' \setminus Z'$ равны нулю.

Заметим, что Z' является правильной группой, именно, ее простые корни те же, что и у Z. Так как общее число корней у группы Z' на один меньше чем у Z (отброшен последний корень), то, в силу индуктивного предположения, можно считать лемму доказанной для пространства $\widetilde{H}^{\chi_0}$.

Таким образом, если будет установлена регулярность оператора $P_{\chi_0} A P_{\chi_0}$ на пространстве $\widetilde{H}^{\chi_0}$, то отсюда будет уже следовать конечность его следа на подпространстве $\widetilde{H}_0^{\chi_0}$.

Справедливость условий регулярности 1) и 2) для оператора $P_{\chi_0} A P_{\chi_0}$ очевидна. Остается проверить справедливость условия 3).

Рассмотрим ядро K' оператора $P_{\chi_0}AP_{\chi_0}$, определенное формулой (2). Это ядро мы должны считать функцией на $(\Delta'\diagdown Z'T^0)\otimes(\Delta'\diagdown Z'T^0)$. Положим $f'(z)=K'(zt, z^0t)$, $z, z^0\in Z'$, $k_p'(z_0, t)=\|f'\|_p'$, где $\|f'(z)\|_p'$ обозначает p-норму функции f, рассматриваемой как функция от $z'\in Z'$. Тогда условие 3) регулярности оператора $P_{\chi_0}AP_{\chi_0}$ состоит в том, что для некоторого p

$$\int\limits_{\Delta'\diagdown Z'T^0} k_p'(z, t)\,dz\,dt<\infty.$$

Как нетрудно убедиться,

$$k_p'(z, t)\leqslant\int\limits_{\Delta_n\diagdown Z_n} k_p(z_m z, t)\,dz_m,$$

где $k_p(z, t)$ — функция, определенная формулой (1) п. 9. Следовательно,

$$\int\limits_{\Delta'\diagdown Z'T^0} k_p'(z, t)\,dz\,dt\leqslant\int\limits_{\Delta'\diagdown Z'T^0}\int\limits_{\Delta_m\diagdown Z_m} k_p(z_m z, t)\,dz_m\,dz\,dt.$$

Стоящий справа интеграл может быть переписан в виде

$$\int\limits_{\Delta\diagdown ZT^0} k_p(z, t)\,dz\,dt.$$

По условию, этот интеграл конечен для некоторого p. Следовательно, для этого p конечен и интеграл

$$\int\limits_{\Delta'\diagdown Z'T^0} k_p'(z, t)\,dz\,dt.$$

Итак, мы доказали регулярность оператора $P_{\chi_0}AP_{\chi_0}$ на пространстве $\widetilde{H}^{\chi_0}$. В силу индуктивного предположения, отсюда вытекает конечность следа этого оператора на подпространстве $\widetilde{H}_0^{\chi_0}$. Лемма доказана.

Покажем, что из доказанной леммы вытекает справедливость основной теоремы. Для этого достаточно проверить, что интегральный оператор, рассматриваемый в пункте 8, является регулярным. Условие 1), очевидно, имеет место, если функция φ положительно определена. Условие 2) имеет место, если функция φ является функцией Шварца — Брюа. Выполнение условия 3) было проверено в пункте 8.

ДОБАВЛЕНИЕ К § 7

ФУНКЦИИ НА ПРАВИЛЬНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

1. Правильные нильпотентные алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{Z}$ — нильпотентная алгебраическая алгебра Ли над полем Q рациональных чисел. Назовем $\mathfrak{Z}$ *градуированной алгеброй*, если $\mathfrak{Z}$ разлагается в прямую сумму линейных подпространств

$$\mathfrak{Z} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}} \mathfrak{Z}_\alpha,$$

где α пробегает конечное подмножество $\mathfrak{M}$ элементов некоторой абелевой группы без кручения. При этом предполагается выполненным следующее условие:

$$[\mathfrak{Z}_\alpha, \mathfrak{Z}_\beta] \subset \mathfrak{Z}_{\alpha+\beta}, \text{ если } \alpha+\beta \in \mathfrak{M},$$
$$[\mathfrak{Z}_\alpha, \mathfrak{Z}_\beta] = 0, \text{ если } \alpha+\beta \text{ не принадлежит } \mathfrak{M}.$$

Индексы $\alpha \in \mathfrak{M}$ будем называть *корнями* алгебры $\mathfrak{Z}$, а соответствующие подпространства $\mathfrak{Z}_\alpha$ — *корневыми подпространствами* алгебры $\mathfrak{Z}$.

Назовем корень α алгебры $\mathfrak{Z}$ *простым*, если он не может быть представлен в виде суммы других корней.

Скажем, что градуированная алгебра $\mathfrak{Z}$ является *правильной*, если выполняются следующие условия: 1) простые корни алгебры $\mathfrak{Z}$ линейно независимы; 2) любой корень алгебры $\mathfrak{Z}$ представим в виде суммы простых корней. Будем дальше рассматривать только правильные алгебры $\mathfrak{Z}$.

Пусть

$$\Pi_0 : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

— система простых корней алгебры $\mathfrak{Z}$. Согласно определению, любой корень α алгебры $\mathfrak{Z}$ однозначно представим в виде суммы

$$\alpha = \sum c_i \alpha_i,$$

где c_i — целые неотрицательные числа.

Сопоставим каждой паре непустых подмножеств Π', Π множества Π_0 всех простых корней, $\Pi' \subset \Pi$ подалгебру $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi'}$ алгебры $\mathfrak{Z}$, которую мы определим следующим образом.

Пусть $\mathfrak{M}_{\Pi}^{\Pi'}$ множество всех корней вида

$$\alpha = \sum_{\alpha_i \in \Pi} c_i \alpha_i, \tag{1}$$

где сумма берется по множеству простых корней из Π, причем хотя бы один корень $\alpha_i \in \Pi'$ входит в эту сумму с отличным от нуля коэффициентом. Положим

$$\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi'} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}_{\Pi}^{\Pi'}} \mathfrak{Z}_{\alpha}. \tag{2}$$

Очевидно, что $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi'}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{Z}$. Заметим, что в силу введенных обозначений, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{\Pi_0}^{\Pi_0}$. Кроме того, положим $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{0} = 0$, где индекс 0 обозначает пустое множество.

Условимся подалгебры $\mathfrak{Z}_{\Pi_0}^{\Pi}$ называть *орисферическими подалгебрами* алгебры $\mathfrak{Z}$.

Нетрудно видеть, что орисферические подалгебры являются идеалами алгебры $\mathfrak{Z}$. Отметим, что к числу орисферических подалгебр алгебры $\mathfrak{Z}$ принадлежат сама алгебра $\mathfrak{Z}$ (поскольку $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{\Pi_0}^{\Pi_0}$) и нулевая подалгебра.

Отметим, что подалгебра $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi}$ является правильной подалгеброй алгебры $\mathfrak{Z}$, системой простых корней которой является множество Π. При этом орисферическими подалгебрами алгебры $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi}$ являются алгебры $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi'}$, $\Pi' \subset \Pi$.

Без труда проверяются следующие свойства алгебр $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi}$:

1) Если $\Pi_1 \subset \Pi_2$, $\Pi_1' \subset \Pi_2'$, то

$$\mathfrak{Z}_{\Pi_1}^{\Pi_1'} \subset \mathfrak{Z}_{\Pi_2}^{\Pi_2'}. \tag{3}$$

2) Если $\Pi'' \subset \Pi' \subset \Pi$, то имеет место разложение в прямую сумму

$$\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi'} = \mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi''} + \mathfrak{Z}_{\Pi - \Pi''}^{\Pi' - \Pi''}. \tag{4}$$

где $\Pi - \Pi''$ обозначает дополнение множества Π'' в Π. В частности, любая правильная алгебра $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi} = \mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi'} + \mathfrak{Z}_{\Pi-\Pi'}^{\Pi-\Pi'}$$

любой своей орисферической подалгебры $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi'}$ и правильной подалгебры $\mathfrak{Z}_{\Pi-\Pi'}^{\Pi-\Pi'}$ $(\Pi' \subset \Pi)$.

2. Правильные нильпотентные группы Ли. Пусть $\mathfrak{Z}$ — произвольная нильпотентная правильная алгебра Ли над Q, определенная в п. 1; Π_0 — множество ее простых корней. Обозначим через Z нильпотентную алгебраическую группу над полем вещественных чисел, отвечающую алгебре $\mathfrak{Z}$. Соответственно, через $Z_{\Pi}^{\Pi'}$, $\Pi' \subset \Pi \subseteq \Pi^0$ обозначим алгебраические подгруппы над полем вещественных чисел, отвечающие подалгебрам $\mathfrak{Z}_{\Pi}^{\Pi'}$. Пусть Δ — подгруппа целочисленных матриц группы Z (или какая-либо подгруппа конечного индекса группы целочисленных матриц). Положим

$$\Delta_{\Pi}^{\Pi'} = \Delta \cap Z_{\Pi}^{\Pi'}.$$

В соответствии с терминологией п. 1 подгруппы $Z_{\Pi_0}^{\Pi}$ будем называть орисферическими подгруппами группы Z, а подгруппы Z_{Π}^{Π}, в том числе и группу $Z = Z_{\Pi_0}^{\Pi_0}$, будем называть правильными группами.

Отметим основные свойства групп $Z_{\Pi}^{\Pi'}$. Прежде всего, из результатов п. 1 непосредственно вытекает:

1) Если $\Pi_1 \subset \Pi_2$, $\Pi_1' \subset \Pi_2'$, то

$$Z_{\Pi_1}^{\Pi_1'} \subset Z_{\Pi_2}^{\Pi_2'}, \quad \Delta_{\Pi_1}^{\Pi_1'} \subset \Delta_{\Pi_2}^{\Pi_2'} \tag{1}$$

2) Если $\Pi'' \subset \Pi' \subset \Pi$, то имеют место разложения в полупрямое произведение:

$$Z_{\Pi}^{\Pi'} = Z_{\Pi}^{\Pi''} Z_{\Pi-\Pi''}^{\Pi'-\Pi''}, \quad \Delta_{\Pi}^{\Pi'} = \Delta_{\Pi}^{\Pi''} \Delta_{\Pi-\Pi''}^{\Pi'-\Pi''}, \tag{2}$$

при этом $Z_{\Pi}^{\Pi''}$ является нормальным делителем группы $Z_{\Pi}^{\Pi'}$.

Далее, нетрудно убедиться, что *пространства*

$$\Delta_{\Pi}^{\Pi'} \setminus Z_{\Pi}^{\Pi'}$$

являются компактными.

Поскольку группы $Z_{\Pi}^{\Pi'}$ нильпотентны, то в них существует инвариантная мера $dz_{\Pi}^{\Pi'}$. Будем предполагать эту меру нормированной так, что

$$\int\limits_{\Delta_{\Pi}^{\Pi'} \diagdown Z_{\Pi}^{\Pi'}} dz_{\Pi}^{\Pi'} = 1. \tag{3}$$

Нашей задачей является изучение пространства $H = L_2(\Delta \diagdown Z)$, т. е. пространства функций $f(z)$ на Z, удовлетворяющих следующим условиям:

$$1) \qquad f(\delta z) = f(z) \text{ для любого } \delta \in \Delta; \tag{4}$$

$$2) \qquad \int\limits_{\Delta \diagdown Z} |f(z)|^2 dz < \infty. \tag{5}$$

Мы получим здесь важное для теории представлений разложение пространства H в прямую сумму подпространств (см. ниже теорему).

Введем понятие орисферы в пространстве $\Delta \diagdown Z$. Назовем П-орисферами на Z классы смежности $Z_{\Pi_0}^{\Pi} z$ группы Z по орисферической подгруппе $Z_{\Pi_0}^{\Pi}$. Образы П-орисфер на Z при естественном отображении

$$Z \to \Delta \diagdown Z$$

назовем П-орисферами в пространстве $\Delta \diagdown Z$. Очевидно, что П-орисферы в пространстве $\Delta \diagdown Z$ являются компактными подмножествами.

Рассмотрим следующие подпространства пространства H. Пусть H'_{Π} — подпространство функций $f \in H$, постоянных на П-орисферах, т. е. таких, что

$$f\left(z_{\Pi_0}^{\Pi} z\right) = f(z) \text{ для любого } z_{\Pi_0}^{\Pi} \in Z_{\Pi_0}^{\Pi}. \tag{6}$$

Далее, пусть $H_{\Pi} \subset H'_{\Pi}$ — подпространство функций постоянных на П-орисферах и таких, что их интегралы по любой П′ орисфере, где $\Pi' \supset \Pi$, равны нулю:

$$\int\limits_{\Delta_{\Pi_0}^{\Pi'} \diagdown Z_{\Pi_0}^{\Pi'}} f\left(z_{\Pi}^{\Pi'} z\right) dz_{\Pi}^{\Pi'} = 0, \quad \Pi' \supset \Pi. \tag{7}$$

Заметим, что если $\Pi_1 \subset \Pi_2$, то $Z_{\Pi_0}^{\Pi_1} \subset Z_{\Pi_0}^{\Pi_2}$, а потому

$$H'_{\Pi_1} \supset H'_{\Pi_2}.$$

Приведем удобный способ описания пространств H'_{Π} и H_{Π}. Так как группа Z разлагается в полупрямое произведение

$$Z = Z_{\Pi_0}^{\Pi} Z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi_0-\Pi},$$

то, в силу условия (6), функции $f \in H'_{\Pi}$ можно рассматривать как функции на $Z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi_0-\Pi}$. Таким образом,

$$H'_{\Pi} = L_2\left(\Delta_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi_0-\Pi} \diagdown Z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi_0-\Pi}\right). \tag{8}$$

Докажем, что в этой реализации *подпространство* H_{Π} *состоит из всех функций* f, *интегралы которых по любой орисфере в* $\Delta_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi_0-\Pi} \diagdown Z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi_0-\Pi}$ *равны нулю, т. е.*

$$\int\limits_{\Delta_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi'} \diagdown Z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi'}} f\left(z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''} z\right) dz_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''} \equiv 0. \tag{9}$$

В самом деле, пусть $\Pi' \supset \Pi$, т. е. $\Pi' = \Pi + \Pi''$, где $\Pi'' \subset \Pi_0 - \Pi$, $\Pi'' \neq 0$. Тогда имеет место разложение в полупрямое произведение

$$Z_{\Pi_0}^{\Pi'} = Z_{\Pi_0}^{\Pi} Z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''}.$$

Без труда проверяется, что для любой функции $f \in H$ справедливо следующее интегральное соотношение:

$$\int\limits_{\Delta_{\Pi_0}^{\Pi'} \diagdown Z_{\Pi_0}^{\Pi'}} f\left(z_{\Pi_0}^{\Pi'}\right) dz_{\Pi_0}^{\Pi'} = \int\limits_{\Delta_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''} \diagdown Z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''}} \int\limits_{\Delta_{\Pi_0}^{\Pi} \diagdown Z_{\Pi_0}^{\Pi}} f\left(z_{\Pi_0}^{\Pi} z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''}\right) dz_{\Pi_0}^{\Pi}\, dz_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''}. \tag{10}$$

В силу этого соотношения имеем для любой функции $f \in H_{\Pi}$:

$$\int\limits_{\Delta_{\Pi_0}^{\Pi'} \diagdown Z_{\Pi_0}^{\Pi'}} f\left(z_{\Pi}^{\Pi'} z\right) dz_{\Pi_0}^{\Pi} = \int\limits_{\Delta_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''} \diagdown Z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''}} f\left(z_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''} z\right) dz_{\Pi_0-\Pi}^{\Pi''}. \tag{11}$$

Из соотношения (11) следует, что условия (7) и (9) эквивалентны.

Будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Пространства H_{Π} попарно ортогональны, и их прямая сумма есть все пространство H, т. е.*

$$H = \sum_{\Pi} H_{\Pi}$$

(*Π пробегает здесь все подмножества множества Π_0, включая само множество Π_0 и пустое множество* *)).

Предварительно введем операторы P_{Π}, сопоставляющие каждой функции $f \in H$ ее интегралы по Π-орисферам:

$$P_{\Pi} f(z) = \int\limits_{\Delta_{\Pi}^{\Pi} \diagdown Z_{\Pi_0}^{\Pi}} f\left(z_{\Pi_0}^{\Pi} z\right) dz_{\Pi_0}^{\Pi}. \tag{12}$$

Очевидно, что оператор P_{Π} является проекционным оператором, проектирующим все пространство H на подпространство H'_{Π}.

Таким образом, в терминах операторов P_{Π} подпространства H'_{Π} и H_{Π} описываются следующим образом:

H'_{Π} есть подпространство всех функций $f \in H$ таких, что $P_{\Pi} f = f$;

H_{Π} есть подпространство всех функций $f \in H$ таких, что $P_{\Pi} f = f$ и $P_{\Pi'} f \equiv 0$ при $\Pi' \supset \Pi$.

Докажем, что *операторы P_{Π} удовлетворяют следующему соотношению*:

$$P_{\Pi_1} P_{\Pi_2} = P_{\Pi_1 + \Pi_2} \tag{13}$$

для любых подмножеств Π_1, Π_2 простых корней.

Для доказательства воспользуемся следующим без труда проверяемым интегральным соотношением, аналогичным соотношению (10).

Пусть $f(z)$ — произвольная суммируемая функция на группе $Z_{\Pi_0}^{\Pi}$, постоянная на классах смежности $\Delta_{\Pi_0}^{\Pi} \diagdown Z_{\Pi_0}^{\Pi}$.

---

*) Отметим, что $H = H'_0$, а $H'_{\Pi_0} = H_{\Pi_0}$ есть одномерное пространство констант.

Тогда

$$\int\limits_{F_{\Pi_0}^{\Pi}} f(z)\,dz = \int\limits_{F_{\Pi_0-(\Pi+\Pi')}^{\Pi_0-(\Pi+\Pi')}} \int\limits_{F_{\Pi_0}^{\Pi,\,\Pi'}} f(z'z'')\,dz''\,dz', \qquad (14)$$

где обозначено

$$F_{\Pi_0}^{\Pi} = \Delta_{\Pi_0}^{\Pi} \setminus Z_{\Pi_0}^{\Pi}, \quad F_{\Pi_0}^{\Pi,\,\Pi'} = (\Delta_{\Pi_0}^{\Pi} \cap \Delta_{\Pi_0}^{\Pi'}) \setminus (Z_{\Pi_0}^{\Pi} \cap Z_{\Pi_0}^{\Pi'}).$$

Оператор $P_{\Pi_1}P_{\Pi_2}$ задается следующей формулой:

$$P_{\Pi_1}P_{\Pi_2}f(z) = \int\limits_{F_{\Pi_0}^{\Pi_1}} \int\limits_{F_{\Pi_0}^{\Pi_2}} f(z^{(2)}z^{(1)}z)\,dz^{(2)}\,dz^{(1)}. \qquad (15)$$

В силу интегрального соотношения (14), интеграл (15) можно представить в виде:

$$P_{\Pi_1}P_{\Pi_2}f(z) = \int\limits_{F_{\Pi_0-(\Pi_1+\Pi_2)}^{\Pi_0-(\Pi_1+\Pi_2)}} \int\limits_{F_{\Pi_0}^{\Pi_1,\,\Pi_2}} \int\limits_{F_{\Pi_0}^{\Pi_2}} f(z^{(2)}z'z''z)\,dz^{(2)}\,dz'\,dz''.$$

Так как $Z_{\Pi_0}^{\Pi_1} \cap Z_{\Pi_0}^{\Pi_2} \subset Z_{\Pi_0}^{\Pi_2}$, то мы вправе сделать замену переменной, положив $z^{(2)} = \widehat{z}^{(2)}z'^{-1}$. В результате такой замены получаем

$$P_{\Pi_1}P_{\Pi_2}f(z) = \int\limits_{F_{\Pi_0-(\Pi_1+\Pi_2)}^{\Pi_0-(\Pi_1+\Pi_2)}} \int\limits_{F_{\Pi_0}^{\Pi_2}} f(z^{(2)}z''z)\,dz^{(2)}\,dz'',$$

т. е., в силу интегрального соотношения (14),

$$P_{\Pi_1}P_{\Pi_2}f(z) = \int\limits_{F_{\Pi_0}^{\Pi_1+\Pi_2}} f(z'z)\,dz' = P_{\Pi_1+\Pi_2}f(z).$$

Итак, доказано, что $P_{\Pi_1}P_{\Pi_2} = P_{\Pi_1+\Pi_2}$.

На основании этого результата докажем первое утверждение теоремы, что пространства H_{Π} попарно ортогональны.

Пусть $f_1 \in H_{\Pi_1}$, $f_2 \in H_{\Pi_2}$, $\Pi_1 \neq \Pi_2$. Тогда $f_1 = P_{\Pi_1}f_1$, $f_2 = P_{\Pi_2}f_2$. Следовательно,

$$(f_1, f_2) = (P_{\Pi_1}f_1, P_{\Pi_2}f_2) = (f_1, P_{\Pi_1}P_{\Pi_2}f_2) = (f_1, P_{\Pi_1+\Pi_2}f_2).$$

Но, в силу определения пространства H_{Π_2}, имеем $P_{\Pi_1+\Pi_2}f_2 = 0$, а потому $(f_1, f_2) = 0$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем второе утверждение теоремы, а именно, что

$$\sum_{\Pi} H_{\Pi} = H.$$

Доказательство будет вестись индукцией по числу простых корней.

Из определения пространств H'_{Π} и H_{Π} следует, что

$$H = H'_0 = H_0 + \left(\bigcup_{\alpha \in \Pi_0} H'_{\{\alpha\}} \right), \tag{16}$$

где 0 обозначает пустое множество, а $\{\alpha\}$ — множество, состоящее из одного простого корня α. Таким образом, достаточно доказать, что

$$H'_{\{\alpha\}} \subset \sum H_{\Pi}.$$

Изучим пространство $H'_{\{\alpha\}}$ более подробно. Это пространство состоит из функций $f(z)$, постоянных на $\{\alpha\}$-орисферах, т. е. таких, что

$$f\left(z_{\Pi_0}^{\{\alpha\}} z\right) = f(z) \quad \text{для любого} \quad z_{\Pi_0}^{\{\alpha\}} \in Z_{\Pi_0}^{\{\alpha\}}. \tag{17}$$

Поскольку группа Z разлагается в полупрямое произведение

$$Z = Z_{\Pi_0}^{\{\alpha\}} Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi_\alpha}, \quad \text{где} \quad \Pi_\alpha = \Pi_0 - \{\alpha\},$$

то H'_α можно рассматривать как пространство функций на $\Delta_{\Pi_\alpha}^{\Pi_\alpha} \setminus Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi_\alpha}$:

$$H'_{\{\alpha\}} = L_2\left(\Delta_{\Pi_\alpha}^{\Pi_\alpha} \setminus Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi_\alpha}\right).$$

Заметим, что $Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi_\alpha}$ является правильной группой, множество простых корней которой Π_α меньше, чем множество Π_0 простых корней исходной группы Z. Следовательно, в силу индуктивного предположения, утверждение теоремы справедливо для пространства $H'_{\{\alpha\}}$.

Таким образом, имеем

$$H'_{\{\alpha\}} = \sum_{\Pi \subset \Pi_\alpha} H_{\alpha,\, \Pi}, \tag{18}$$

где $H_{\alpha,\,\Pi}$ — подпространство функций на $Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi_\alpha}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$f\left(z_{\Pi_\alpha}^{\Pi} z\right) = f(z) \quad \text{для любого} \quad z_{\Pi_\alpha}^{\Pi} \in Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi}; \tag{19}$$

$$\int\limits_{\Delta_{\Pi_\alpha}^{\Pi'} \setminus Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi'}} f\left(z_{\Pi_\alpha}^{\Pi'} z\right) dz_{\Pi_\alpha}^{\Pi'} = 0 \quad \text{при} \quad \Pi_\alpha \supseteq \Pi' \supset \Pi. \tag{20}$$

Функции $f(z)$ можно считать продолженными на всю группу Z согласно формуле (17).

Покажем, что $H_{\alpha,\,\Pi} \subset H_{\Pi + \{\alpha\}}$. В самом деле, пусть $f \in H_{\alpha,\,\Pi}$. Так как $Z_{\Pi_0}^{\Pi + \{\alpha\}} = Z_{\Pi_0}^{\{\alpha\}} Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi}$, то из соотношений (17) и (19) следует, что $f\left(z_{\Pi_0}^{\Pi + \{\alpha\}} z\right) = f(z)$ для любого $z_{\Pi_0}^{\Pi + \{\alpha\}} \in Z_{\Pi_0}^{\Pi + \{\alpha\}}$, т. е. функция f постоянна на $(\Pi + \{\alpha\})$-орисферах. Далее, пусть $\Pi' \supset \Pi + \{\alpha\}$, т. е. $\Pi' = \Pi'_1 + \{\alpha\}$, где $\Pi_\alpha \supseteq \Pi'_1 \supset \Pi$. Так как $Z_{\Pi_0}^{\Pi'} = Z_{\Pi_0}^{\{\alpha\}} Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi'_1}$, то имеем, в силу (17) и (20):

$$\int\limits_{\Delta_{\Pi_0}^{\Pi'} \setminus Z_{\Pi_0}^{\Pi'}} f\left(z_{\Pi_0}^{\Pi'} z\right) dz_{\Pi_0}^{\Pi'} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_{\Pi_0}^{\{\alpha\}} \setminus Z_{\Pi_0}^{\{\alpha\}}} \int\limits_{\Delta_{\Pi_\alpha}^{\Pi'_1} \setminus Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi'_1}} f\left(z_{\Pi_0}^{\{\alpha\}} z_{\Pi_\alpha}^{\Pi'_1} z\right) dz_{\Pi_\alpha}^{\Pi'_1} dz_{\Pi_0}^{\{\alpha\}} =$$

$$= \int\limits_{\Delta_{\Pi_\alpha}^{\Pi'_1} \setminus Z_{\Pi_\alpha}^{\Pi'_1}} f\left(z_{\Pi_\alpha}^{\Pi'_1} z\right) dz_{\Pi_\alpha}^{\Pi'_1} = 0.$$

Тем самым доказано, что $H_{\alpha,\,\Pi} \subset H_{\Pi + \{\alpha\}}$. В силу (18) и (16), мы получаем, что $\sum\limits_{\Pi} H_\Pi = H$. Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К § 1 гл. I. В § 1 излагаются в основном классические результаты. Теорема о конечности числа сторон фундаментальной области на плоскости Лобачевского и о существовании параболических вершин принадлежит Зигелю [60].

К § 2 гл. I. Понятие индуцированных представлений для конечных групп впервые было введено Фробениусом [34]; их важная роль в теории бесконечномерных представлений групп была вскрыта И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [19], [20], подробная теория индуцированных представлений была развита в работах Макки, см. его обзор [30]. Теорема о дискретности спектра индуцированного представления в случае компактного пространства $\Gamma \diagdown G$ принадлежит И. М. Гельфанду и И. И. Пятецкому-Шапиро [21]. Критерий полной непрерывности представления, приведенный на стр. 46, получен Феллом [38]. Формула следа (пп. 4 и 5) для общего случая получена И. М. Гельфандом и И. И. Пятецким-Шапиро [21]. Частный ее случай, относящийся к пространствам, на которых операторы Лапласа коммутируют, был ранее получен (в иной форме) Зельбергом [26].

К § 3 гл. I. Неприводимые унитарные представления группы вещественных матриц 2-го порядка были описаны Баргманом [39]. Пространства Ω_s (п. 5) были введены И. М. Гельфандом и И. И. Пятецким-Шапиро [21].

К § 4 гл. I. Теорема двойственности для представлений дискретной серии группы матриц 2-го порядка была доказана И. М. Гельфандом и С. В. Фоминым [25]. Теорема двойственности для представлений непрерывной серии группы матриц 2-го порядка была получена И. М. Гельфандом и И. И. Пятецким-Шапиро [21]. Общая теорема двойственности была получена И. И. Пятецким-Шапиро; опубликована там же. Свойство (A) полупростых групп Ли (п. 6) установлено Хариш-Чандра.

К § 5 гл. I. Формула следа для группы вещественных матриц 2-го порядка (другими методами) была получена Зельбергом [26] и известна в литературе под названием «формула следа Зельберга». Формула следа для группы комплексных матриц 2-го порядка (Добавление 2 к § 5) впервые была опубликована в статье И. М. Гельфанда и И. И. Пятецкого-Шапиро [21]. Теорема о непрерывной деформации (Добавление I к § 5) принадлежит И. М. Гельфанду и И. И. Пятецкому-Шапиро.

К § 6 гл. I. Результаты (для любой полупростой группы G и так называемой правильной дискретной подгруппы) принадлежат И. М. Гельфанду и И. И. Пятецкому-Шапиро [24]. Понятие орисферического отображения, его применение к теории представлений и выяснение его связи с интегральной геометрией принадлежит И. М. Гельфанду и М. И. Граеву [13]. Изложение некоторых связанных с этим вопросов дано в [17]. Дальнейшее развитие эти работы получили у Хелгасона [62]. Применение орисферического отображения к изучению представлений в пространствах $L_2(\Gamma \diagdown G)$ принадлежит И. М. Гельфанду и И. И. Пятецкому-Шапиро [22], [23],[24].

К Добавлению к гл. I. Кватернионные группы систематически изучались Эйхлером.

К § 2 гл. II. Пространства основных и обобщенных функций на локально компактной группе введены Брюа [44]. Понятия Г-функции, В-функции, функции Бесселя и гипергеометрической функции для любого локально компактного поля принадлежат И. М. Гельфанду и М. И. Граеву [16].

К § 3 гл. II. Первые работы по теории унитарных представлений матричных групп с p-адическими элементами принадлежат Маутнеру [53] и Брюа [43]. Результаты пп. 1—9 принадлежат И. М. Гельфанду и М. И. Граеву [16]. Формула для сферических функций (п. 10) была получена Маутнером [53]. Сферические функции для более общего случая изучались Сатаке [58]. Результаты п. 11 принадлежат авторам книги.

К § 4 гл. II. Результаты пп. 1—7 принадлежат И. М. Гельфанду и М И Граеву [16], а результаты п. 8 — А. А. Кириллову.

К § 5 гл. II. Формулы следов для случая несвязного поля получены И. М. Гельфандом и М. И. Граевым [16], для случая поля комплексных чисел — И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [19], для случая поля вещественных чисел — Хариш-Чандра [48].

К § 6 гл. II. Формула Планшереля для случая несвязного поля получена И. М. Гельфандом и М. И. Граевым [16], для случая поля комплексных чисел — И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [19], для случая поля вещественных чисел — Баргманом [39], см. также Хариш-Чандра [48].

К Добавлению к гл. II. Результаты принадлежат А. А. Кириллову; текст написан им же.

К § 1 гл. III. Понятие аделей и иделей принадлежит Шевалле, см. также Тэйт (диссертация), А. Вейль [9], Лэнг [51]. Добавление к § 1 принадлежит И. И. Пятецкому-Шапиро. Аналогичные результаты получены И. Сатаке́.

К § 2 гл. III. Основные результаты принадлежат Тэйту (диссертация). Понятие кольца Тэйта (Добавление к § 2) принадлежит авторам книги.

К § 3 гл. III. Понятие группы аделей произвольной группы G принадлежит Оно [54], [55], Тамагава, а для случая ортогональной группы — Кнезеру [50]. Введенное здесь понятие тензорного произведения представлений для прямого произведения групп с отмеченными подгруппами принадлежит авторам книги [18]. Первая теорема о тензорном произведении (пп. 2 и 3) принадлежит авторам книги. Вторая теорема (п. 5) получена авторами совместно с А. А. Кирилловым. Критерий существования единственного инвариантного вектора по существу получен И. М. Гельфандом [11].

К § 4 гл. III. Результаты принадлежат авторам книги [18]. Другое изложение этих результатов, оказавшееся весьма полезным авторам при написании книги, дано Годманом [47]. Результаты Добавления к § 4 принадлежат И. И. Пятецкому-Шапиро. Аналогичные результаты получены И. Сатаке.

К §§ 5 и 6 гл. III. Основные результаты принадлежат авторам книги.

К § 7 гл. III. Основная теорема принадлежит авторам книги. Основная лемма принадлежит И. М. Гельфанду и И. И. Пятецкому-Шапиро [24]. Добавление к § 7 принадлежит авторам книги.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Боревич З. И. и Шафаревич И. Р., Теория чисел, М., «Наука», 1964.

[2] Борель А., Арифметические свойства алгебраических групп, Математика (сборник переводов) **8**, № 2 (1964), 3—18.

[3] Борель А., Некоторые свойства групп аделей, связанных с алгебраическими группами, Математика (сборник переводов) **8**, № 2 (1964), 73—76.

[4] Борель А., Фундаментальные множества арифметических групп, Математика (сборник переводов) **9**, № 1 (1965), 127—139

[5] Борель А., Хариш-Чандра, Арифметические подгруппы алгебраических групп Ли, Математика (сборник переводов) **8**, № 2 (1964), 19—72.

[6] Вейль А., Редукция квадратичных форм по Минковскому и Зигелю, Математика (сборник переводов) **6**, № 5 (1962), 3—11.

[7] Вейль А., О дискретных подгруппах Ли, I и II, Математика (сборник переводов) **7**, № 1 (1963), 3—18 и 19—42.

[8] Вейль А., Алгебры с инволюцией и классические группы, Математика (сборник переводов) **7**, № 4 (1963), 31—56.

[9] Вейль А., Адели и алгебраические группы, Математика (сборник переводов) **8**, № 4 (1964), 3—74.

[10] Ганинг Р. К., Лекции о модулярных формах, Математика (сборник переводов) **8**, № 6 (1964), 3—68.

[11] Гельфанд И. М., Сферические функции на симметрических римановых пространствах, ДАН СССР **70**, № 1 (1950), 5—8.

[12] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Аналог формулы Планшереля для классических групп, Тр. Моск. матем. о-ва **4** (1955), 375—404.

[13] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, Тр. Моск. матем. о-ва **8** (1959), 321—390.

[14] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Конструкция неприводимых представлений простых алгебраических групп над конечным полем, ДАН СССР **147**, № 3 (1962).

[15] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Неприводимые унитарные представления группы матриц 2-го порядка с элементами из локально компактного поля, ДАН СССР **149**, № 3 (1963).

[16] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Представления группы матриц 2-го порядка с элементами из локально компактного поля и специальные функции на локально компактных полях, УМН **18**, вып. 4 (1963), 29—99.

[17] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений (Обобщенные функции, вып. 5), М., Физматгиз, 1962.

[18] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Представления групп аделей, ДАН СССР **156**, № 3 (1964), 487—490.

[19] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, Труды Матем. ин-та им. Стеклова **36** (1950); немецкое издание: Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen, Berlin, Akademie Verlag.

[20] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Известия АН СССР, сер. матем. **11** (1947), 411.

[21] Гельфанд И. М. и Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и теория автоморфных функций, УМН **14**, вып. 2 (1959), 171—194.

[22] Гельфанд И. М. и Пятецкий-Шапиро И. И., Унитарные представления в однородных пространствах с дискретными стационарными группами, ДАН СССР **147**, № 1 (1962), 17—20.

[23] Гельфанд И. М. и Пятецкий-Шапиро И. И., Унитарные представления в пространстве G/Γ, где G — группа вещественных матриц n-го порядка, Γ — подгруппа целочисленных матриц, ДАН СССР **147**, № 2 (1962), 275—278.

[24] Гельфанд И. М. и Пятецкий-Шапиро И. И., Автоморфные функции и теория представлений, Тр. Моск. матем. о-ва **12** (1963), 389—412.

[25] Гельфанд И. М. и Фомин С. В., Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, УМН 7, вып. 1 (47) (1952), 118—137.

[26] Зельберг А., Гармонический анализ и дискретные группы в слабосимметрических римановых пространствах; приложения к теории рядов Дирихле, Математика (сборник переводов) **1**, вып. 4 (1957), 3—28.

[27] Зельберг А., О дискретных группах в многомерных симметрических пространствах, Математика (сборник переводов) **6**, № 3 (1962), 3—16.

[28] Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., ИЛ, 1954.

[29] Кириллов А. А., О бесконечномерных унитарных представлениях группы матриц 2-го порядка с элементами из локально компактного поля, ДАН СССР **150**, № 4 (1963), 740—743.

[30] Макки Г., Бесконечномерные представления групп. Математика (сборник переводов) **6**, № 6 (1962), 3—56.

[31] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М. — Л., Гостехиздат, 1954.
[32] Сатаке И., К теории редуктивных алгебраических групп над совершенным полем, Математика (сборник переводов) **9**, № 2 (1965), 19—44.
[33] Титс Ж., Изотропные полупростые группы, Математика (сборник переводов) **9**, № 1 (1965), 140—148.
[34] Фробениус, Теория характеров и представлений групп, Харьков, 1937.
[35] Хассе Г., Лекции по теории чисел, М., ИЛ, 1953.
[36] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 2, М., ИЛ, 1958.
[37] Auslander L., Green L., Hahn F., Flows on homogeneous spaces, Princeton, N. J., 1963.
[38] Fell J. M. G., The dual spaces of C^*-algebras, Trans. of Amer. Math. Soc. **94**, № 3 (1960), 365—403.
[39] Bargmann V., Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math. **48** (1947), 568—640.
[40] Borel A., Some finiteness properties of adele groups over number fields, Publ. Math., IHES, № 16 (1963).
[41] Boseck H., Darstellungen von Matrixgruppen über topologischen Körpern. I, Math. Nachr. **24**, № **4** (1962), 229—243.
[42] Bruchat F., Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 97—205.
[43] Bruchat F., Sur les representations des groupes classiques p-adiques, I, II, Amer. J. of Math. **83** (1961), 321—338, 343—368.
[44] Bruchat F., Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des representations des groupes p-adiques, Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 43—75.
[45] Eichler M., Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermuttung für die Kongruenzzetafunktion, Arch. d. Math., **5** (1954), 355—366
[46] Gelfand J. M., Automorphic functions and theory of representations, Int. Cong. Math., Stokholm, 1962.
[47] Godement R., Analyse spectrale des fonctions modulaires, Sém. Bourbaki, 1964/65.
[48] Harish-Chandra, Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group, Proc. Nat. Acad. Sci. **38** (1952), 337—342.
[49] Harish-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956), 98—163.
[50] Kneser M., Einfach zusammenhägeend algebraische Gruppen in der Arithmetik, Int. Cong. Math., Stockholm, 1962.
[51] Lang, Theory of algebraic numbers, 1964.
[52] Maass H., Lectures on Siegel's modular functions, Tata institute, Bombay, 1954—1955.
[53] Mautner F. J., Spherical functions over p-adic fields, I. Amer. J. of Math. **80**, № 2 (1958), 441—457.
[54] Ono T., Sur une propriété arithmétique des groupes commutatifs, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 307—323.
[55] Ono T., On some arithmetic properties of linear groups, Ann. Math. **70** (1959), 266—290.

[56] Peterson H., Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, I, Math. Ann. **115** (1937), 23—67.
[57] Roelcke W., Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art., Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss., Springer-Verlag, 1956.
[58] Satake J., Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, Publ. Math., JHES, № 18 (1963).
[59] Shilling O. F. G., The theory of valuations, N. Y., 1950.
[60] Siegel C. L., Some remarks on discontinous groups, Ann. of Math. **46**, № 4 (1945), 708—718.
[61] Siegel C. L., Lectures on the analytical theory of quadratic forms, Göttingen, 1963.
[62] Helgason S., A duality in integral geometry, some generelisations of the Radon transform, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 435—446.
[63] Harish-Chandra, On a lemma of Bruchat, J. math. pures appl., Serie *g*, **35** (1956), 203—210.
[64] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Категории представлений групп и задача о классификации неприводимых представлений, ДАН СССР **146**, № 4 (1962), 757—760.

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Латинский и готический алфавиты

Греческий алфавит

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ