О Б О Б Щ Е Н Н Ы Е Ф У Н К Ц И И

ВЫПУСК 5

И. М. ГЕЛЬФАНД, М. И. ГРАЕВ,
Н. Я. ВИЛЕНКИН

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

АННОТАЦИЯ

Этот выпуск можно рассматривать как введение в новую область функционального анализа — интегральную геометрию и связанные с ней вопросы теории представлений. В нем разобран ряд задач интегральной геометрии в аффинном пространстве, в пространстве Лобачевского и в некоторых других, родственных ему пространствах. Методы интегральной геометрии применяются затем к построению гармонического анализа на группе Лоренца и в однородных пространствах, где действует эта группа.

Этот выпуск, как и предыдущие, основывается лишь на материале первого выпуска и не зависит от остальных. Книга рассчитана на студентов-математиков старших курсов, аспирантов и научных работников.

Гельфанд Израиль Моисеевич, Граев Марк Иосифович, Виленкин Наум Яковлевич.

Обобщенные функции, вып. 5. Интегральная геометрия и связанные в ней вопросы теории представлений.

М., Физматгиз, 1962 г., 656 стр. с илл.
(Серия „Обобщенные функции".)

Редактор *Ф. В. Широков.*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова.* Корректор *О. А. Сигал.*

Сдано в набор 12/X 1961 г. Подписано к печати 17/IX 1962 г. Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 20,5. Условн. печ. л. 33,62. Уч.-изд. л. 33,95. Тираж 8 500 экз. Т-04760.
Цена книги 1 р. 90 к. Заказ № 2905.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 нм. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ГРУППЕ КОМПЛЕКСНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Глава V

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Глава VI

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, СВЯЗАННЫХ С ГРУППОЙ ЛОРЕНЦА

Глава VII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга родилась из нескольких глав, первоначально написанных для вып. 4, поскольку было решено выделить теорию представлений в отдельный выпуск. Предложение выделить эти вопросы принадлежит Г. Ф. Рыбкину. Такое решение сильно способствовало цельности всего изложения, и авторы выражают Г. Ф. Рыбкину свою глубокую благодарность.

Теория представлений — это замечательный пример алгебраически-геометрических методов в функциональном анализе, когда конкретные преобразования осуществляются не над точками пространства, а над функциями, заданными в этом пространстве.

В процессе занятий теорией представлений авторам становилось все более ясным, что в основе ее лежит интегральная геометрия (см. [19]). Сущность интегральной геометрии, как мы ее здесь понимаем, состоит в переходе от функций, заданных на множестве одних геометрических объектов (например, точек линейчатой поверхности), к функциям, заданным на множестве других геометрических объектов (например, прямолинейных образующих линейчатой поверхности) *). В такой постановке задачи интегральной геометрии близки по своему направлению к классическим идеям геометрии (Плюкер, Клейн и др.), строящей новые однородные пространства из объектов старого пространства. Однако в интегральной геометрии мы рассматриваем задачи, если можно так выразиться, в современном аспекте: переход от пространства одних объектов к пространству других объектов совершается с одновременным преобразованием запаса функций. Это можно сравнить с различием между классической

*) В термин «интегральная геометрия» здесь вкладывается содержание, отличное от традиционного, сводившегося в основном к вычислению инвариантных мер в тех или иных однородных пространствах.

и квантовой механикой: преобразования классической механики — точечные, а в квантовой механике они разыгрываются в пространствах функций. (См. введение к гл. II)

Авторы осмелились посвятить целую книгу отдельным красивым задачам именно для того, чтобы подчеркнуть в них эти новые идеи, связывающие геометрию с функциональным анализом, а также наметить в функциональном анализе алгебраически-геометрическое направление, находящееся сейчас только в начале своего развития.

Книга не посвящена полному изложению теории представлений, на что понадобилось бы, по-видимому, несколько таких книг. В ней строится теория представлений группы комплексных матриц второго порядка с определителем 1. Эта группа интересна по ряду причин. Прежде всего, она является простейшей некоммутативной и некомпактной группой. Далее, она возникает как группа преобразований многих важных пространств. Именно, она локально изоморфна группе движений пространства Лобачевского, группе дробно-линейных преобразований плоскости комплексного переменного и т. д. Наконец, эта группа важна для физики, поскольку она локально изоморфна собственной группе Лоренца.

Метод изложения теории представлений, примененный в книге, не является единственным. Мы выбрали здесь наиболее естественный подход — подход с точки зрения теории обобщенных функций, использующий идеи прекрасной работы Брюа [3]. При этом подходе многие факты теории представлений, в частности связь конечномерных и бесконечномерных представлений, становятся более ясными.

Книга может читаться почти независимо от предыдущих выпусков. Предполагается лишь знакомство читателя с содержанием глав I и II выпуска 1 и отчасти с главой III этого выпуска. Для некоторых разделов этой книги (главы II, III и IV) будут нужны не сами результаты выпуска 1, а их аналоги для комплексного пространства, изложенные в Добавлении. Это добавление можно рассматривать как самостоятельное изложение теории обобщенных функций в комплексном пространстве; его можно читать независимо от выпуска 1.

Авторы заранее просят извинить их, если по своему содержанию эта книга окажется неполной. При этом они надеются, что по своей тематике книга будет полезной

для тех, кто интересуется новыми направлениями в функциональном анализе.

Книга написана так, что ее можно читать в двух планах. Читатели, интересующиеся только интегральной геометрией, могут изучить главы I, II и V, где задачи интегральной геометрии изложены независимо от остального содержания книги. Наоборот, читатели, интересующиеся только теорией представлений, могут начинать чтение книги сразу с главы III, хотя идейная сторона этих вопросов дана уже в главе II, § 2.

Главы I и II этой книги, а также Добавление написаны И. М. Гельфандом и М. И. Граевым. Остальные разделы книги написаны совместно тремя авторами. Сюда вошли в переработанном и дополненном виде главы, написанные И. М. Гельфандом и Н. Я. Виленкиным для 4-го выпуска, но не включенные туда (главы III и IV этой книги).

Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Кириллову и Ф. В. Широкову, прочитавшим рукопись книги и сделавшим ряд полезных замечаний. Особую благодарность они выражают Л. И. Копейкиной, помощь которой при окончательном оформлении рукописи существенно ускорила выход книги, и С. А. Виленкиной за большую работу по оформлению рукописи.

Авторы

ГЛАВА I

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ВЕЩЕСТВЕННОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА В ВЕЩЕСТВЕННОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Определение преобразования Радона. В этом параграфе будет изучена связь между функциями $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ в вещественном аффинном пространстве и интегралами от этих функций по всевозможным гиперплоскостям.

Сначала дадим определение интеграла по гиперплоскости в вещественном аффинном пространстве. Рассмотрим n-мерное вещественное аффинное пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Это пространство всегда будем считать ориентированным. Далее, будем предполагать, что дифференциальная форма

$$dx = dx_1 \ldots dx_n$$

задает элемент объема в этом пространстве. Тем самым в пространстве определено интегрирование функций.

Мы хотим определить интеграл функции $f(x)$ по гиперплоскости

$$(\xi, x) = p,$$

где $(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n$. Для этого мы должны ввести на гиперплоскости элемент объема — дифференциальную форму порядка $n-1$ — и задать ориентацию гиперплоскости.

Свяжем с гиперплоскостью дифференциальную форму ω, которую мы определим из соотношения

$$d(\xi, x) \cdot \omega = dx_1 \ldots dx_n \text{*)}. \tag{1}$$

*) $d(\xi, x) \cdot \omega$ понимается здесь как внешнее произведение дифференциальных форм. (Краткие сведения о дифференциальных формах см. в вып. 1, стр. 265 и след.) Всюду в дальнейшем ссылки даются на второе издание вып. 1.

Нетрудно получить выражение для формы ω в произвольной системе координат на гиперплоскости. Так, если задавать точки на гиперплоскости координатами $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, то получаем

$$\omega = \frac{(-1)^{i-1} dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n}{\xi_i} \; {}^{*)}. \tag{2}$$

Интеграл функции $f(x)$ *по гиперплоскости* $(\xi, x) = p$ *зададим формулой*

$$\check{f}(\xi, p) = \int_{(\xi, x) = p} f(x)\,\omega, \tag{3}$$

где форма ω *определена формулой* (2), *а ориентация гиперплоскости* $(\xi, x) = p$ *выбрана так, что эта гиперплоскость является границей для полупространства* $(\xi, x) < p$.

Используя символику δ-функций, мы можем записать интеграл функции $f(x)$ по гиперплоскости $(\xi, x) = p$ еще в следующей удобной форме:

$$\check{f}(\xi, p) = \int f(x)\,\delta(p - (\xi, x))\,dx, \tag{4}$$

где $dx = dx_1 \ldots dx_n$. (Интеграл берется по всему пространству **).)

Итак, функции $f(x)$ в n-мерном вещественном аффинном пространстве оказывается отнесенной функция $\check{f}(\xi, p)$, определенная по существу на множестве гиперплоскостей. Эту функцию назовем *преобразованием Радона* функции $f(x)$.

Условимся о том, преобразование Радона каких функций $f(x)$ мы будем дальше рассматривать. Вообще говоря, для того чтобы интеграл (3) сходился для почти всех значений ξ и p, достаточно потребовать, чтобы функция $f(x)$ была абсолютно

*) Заметим, что форма ω зависит не только от гиперплоскости, но и от выбора уравнения, которым эта гиперплоскость задается. Именно, если уравнение гиперплоскости $(\xi, x) = p$ заменить уравнением $(\alpha\xi, x) = \alpha p$, $\alpha \neq 0$, то ω заменится на $\alpha^{-1}\omega$.

**) См. «Обобщенные функции», вып. 1, стр. 272 и далее, где рассматривается интегрирование по произвольной гладкой поверхности $P(x) = 0$ и вводится функция $\delta(P)$.

интегрируема по всему пространству. Однако если это особо не оговорено, мы будем налагать на функцию $f(x)$ более сильные требования. Именно, будем предполагать, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и быстро убывает вместе со всеми производными *). При этом условии преобразование Радона функции $f(x)$ есть, как нетрудно видеть, бесконечно дифференцируемая функция от ξ и p.

Отметим, что, как это непосредственно следует из формулы (4), $\check{f}(\xi, p)$ есть *четная однородная функция от* ξ, p *степени однородности* -1. Это значит, что для любого вещественного числа $\alpha \neq 0$ справедливо равенство

$$\check{f}(\alpha\xi, \alpha p) = |\alpha|^{-1} \check{f}(\xi, p). \tag{5}$$

Таким образом, чтобы знать функцию $\check{f}(\xi, p)$, нам достаточно знать, например, ее значения при $p = 1$ и при всевозможных ξ. Тем самым функция $\check{f}(\xi, p)$ фактически зависит от того же числа переменных, что и исходная функция $f(x)$.

Дадим наглядную интерпретацию функции $\check{f}(\xi, p)$. Пусть $f(x)$ — плотность распределения конечной массы в пространстве. Обозначим через $M(\xi, p)$ массу полупространства $(\xi, x) < p$. Тогда имеем

$$M(\xi, p) = \int_{(\xi, x) < p} f(x)\,dx = \int f(x)\,\theta(p - (\xi, x))\,dx, \tag{6}$$

где $\theta(p) = 1$ при $p > 0$, $\theta(p) = 0$ при $p < 0$.

Известно, что $\theta'(p) = \delta(p)$. Таким образом, дифференцируя равенство (6) по p, получим

$$\frac{\partial M(\xi, p)}{\partial p} = \int f(x)\,\delta(p - (\xi, x))\,dx = \check{f}(\xi, p).$$

Итак, *если функция* $f(x)$ *задает плотность распределения конечной массы в пространстве, то преобразование Радона* $\check{f}(\xi, p)$ *функции* $f(x)$ *может быть вычислено*

*) Функция $f(x)$ называется быстро убывающей, если для любого $k > 0$

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^k f(x) = 0, \quad \text{где} \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

по формуле

$$\check{f}(\xi, p) = \frac{\partial M(\xi, p)}{\partial p},$$

где $M(\xi, p)$ — *масса полупространства* $(\xi, x) < p$.

Мы сейчас рассмотрим интересный пример преобразования Радона. Именно, выясним, каков геометрический смысл преобразования Радона характеристической функции ограниченного тела. Пусть V — ограниченное тело, $f(x)$ — его характеристическая функция, то есть $f(x) = 1$, когда x принадлежит V, и $f(x) = 0$, когда x не принадлежит V. Тогда преобразование Радона $\check{f}(\xi, p)$ функции $f(x)$ выражается следующей формулой:

$$\check{f}(\xi, p) = \frac{\partial V(\xi, p)}{\partial p},$$

где $V(\xi, p)$ — объем части тела V, лежащей в области $(\xi, x) < p$.

Будем пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ рассматривать как евклидово пространство с метрикой $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$, а гиперплоскости задавать нормальными уравнениями (то есть предполагать, что в уравнении $(\xi, x) = p$ $|\xi| \equiv (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2} = 1$). В этом случае $\check{f}(\xi, p)$ есть попросту площадь сечения тела V гиперплоскостью $(\xi, x) = p$. Мы видим, таким образом, что преобразование Радона характеристической функции ограниченного тела V можно получить из геометрических соображений, вычисляя площади сечений этого тела гиперплоскостями. В частности, для преобразования Радона $\check{f}(\xi, p)$ характеристической функции шара

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant R^2$$

мы легко получаем следующую формулу:

$$\check{f}(\xi, p) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{1}{|\xi|} \left(R^2 - \frac{p^2}{|\xi|^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \text{когда} \quad \frac{p^2}{|\xi|^2} < R^2,$$

$$\check{f}(\xi, p) = 0, \qquad \text{когда} \quad \frac{p^2}{|\xi|^2} > R^2$$

(здесь $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$).

Позже, в § 2, будет определено также преобразование Радона характеристической функции н е о г р а н и ч е н н о г о тела.

2. Связь преобразования Радона с преобразованием Фурье. Найдем связь между преобразованием Радона функции $f(x)$ и ее преобразованием Фурье

$$\tilde{f}(\xi) = \int f(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx. \tag{1}$$

Функция $\tilde{f}(\xi)$ выражается непосредственно через интегралы функции $f(x)$ по гиперплоскостям. Именно, чтобы вычислить интеграл (1), мы можем сначала провести интегрирование по гиперплоскости $(\xi, x) = p$, а затем полученное выражение проинтегрировать по p при фиксированном ξ. В результате мы получим

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{f}(\xi, p)\, e^{ip}\, dp. \tag{2}$$

Это и есть искомое выражение преобразования Фурье функции $f(x)$ через ее преобразование Радона.

Формуле (2) можно придать несколько иной вид. Заменим вектор ξ на $\alpha\xi$, где $\alpha \neq 0$, и сделаем в интеграле замену переменной $p = \alpha p_1$. В силу свойства однородности функции $\check{f}(\xi, p)$ получим

$$\tilde{f}(\alpha\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{f}(\xi, p)\, e^{i\alpha p}\, dp. \tag{3}$$

Мы видим, таким образом, что преобразование Фурье в n-мерном пространстве сводится к преобразованию Радона и последующему одномерному преобразованию Фурье.

Применяя формулу обратного преобразования Фурье, мы получаем из (3) выражение преобразования Радона функции $f(x)$ через ее преобразование Фурье

$$\check{f}(\xi, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\alpha\xi)\, e^{-i\alpha p}\, d\alpha. \tag{4}$$

Итак, *в вещественном аффинном пространстве преобразование Радона функции $f(x)$ тесно связано с ее преобразованием Фурье, а именно, одно из другого получается одномерным преобразованием Фурье.* По сравнению с преобразованием Фурье преобразование Радона имеет известное преимущество в том, что оно более геометрично.

Мы увидим позже (см. гл. II, § 3; гл. V), что аналог преобразования Радона можно определить, помимо вещественного аффинного пространства, и в других однородных пространствах. Если считать, что обычное преобразование Фурье составляется из двух преобразований — преобразования Радона и одномерного преобразования Фурье, то в то время как аналог преобразования Радона существует во многих однородных пространствах, второе преобразование типично только для евклидова пространства. Собственно говоря, аналог этого второго преобразования имеется и в других однородных пространствах, но он уже связан с представлениями групп и строится по-разному для различных пространств. (Для пространства Лобачевского и родственного ему мнимого пространства Лобачевского аналог одномерного преобразования Фурье строится в гл. VI.)

При таком более общем взгляде отчетливо выступает преимущество преобразования Радона перед преобразованием Фурье. Имеется, таким образом, определенный резон пытаться строить операционное исчисление на базе преобразования Радона. Частично это будет сделано в данной главе.

3. Элементарные свойства преобразования Радона. Выясним, что происходит с преобразованием Радона функции $f(x)$ при тех или иных операциях над этой функцией. Кроме того, мы вычислим преобразование Радона свертки двух функций. Прежде всего очевидно, что преобразование Радона линейно, то есть

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)^{\vee} = a_1 \check{f}_1 + a_2 \check{f}_2$$

для любых функций f_1, f_2 и любых чисел a_1, a_2. Лишь немногим менее очевидны следующие свойства преобразования Радона.

а) *Пусть A — невырожденное линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$:*

$$Ax = (y_1, \ldots, y_n),$$

где $y_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l$, $\det |a_{kl}| \neq 0$. *Тогда преобразование Радона функции*

$$f_A(x) = f(A^{-1}x)$$

есть

$$\check{f}_A(\xi, p) = |\det A| \, \check{f}(A'\xi, p), \tag{1}$$

где $\check{f}(\xi, p)$ — преобразование Радона функции $f(x)$, A' — линейное преобразование, сопряженное преобразованию A *).

В самом деле, преобразование Радона функции $f_A(x)$ задается формулой

$$\check{f}_A(\xi, p) = \int f(A^{-1}x)\, \delta(p - (\xi, x))\, dx.$$

Сделаем замену переменных $x = Ay$. Мы получим

$$\check{f}_A(\xi, p) = |\det A| \int f(y)\, \delta(p - (\xi, Ay))\, dy =$$
$$= |\det A| \int f(y)\, \delta(p - (A'\xi, y))\, dy = |\det A| \, \check{f}(A'\xi, p).$$

б) *Преобразование Радона функции $f_a(x) \equiv f(x + a) = f(x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)$ есть*

$$\check{f}_a(\xi, p) = \check{f}(\xi, p + (\xi, a)), \tag{2}$$

где $\check{f}(\xi, p)$ — преобразование Радона функции $f(x)$.

В самом деле, преобразование Радона функции $f_a(x) = f(x + a)$ есть

$$\check{f}_a(\xi, p) = \int f(x + a)\, \delta(p - (\xi, x))\, dx.$$

После замены переменных $x = y - a$ получаем

$$\check{f}_a(\xi, p) = \int f(y)\, \delta(p + (\xi, a) - (\xi, y))\, dy = \check{f}(\xi, p + (\xi, a)).$$

Из свойства б) мы получаем также непосредственно

в) *Преобразование Радона функции*

$$\left(a, \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

*) То есть $(\xi, Ax) = (A'\xi, x)$.

где $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные числа, есть

$$(a, \xi)\frac{\partial \check{f}(\xi, p)}{\partial p} \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k\right)\frac{\partial \check{f}(\xi, p)}{\partial p}, \tag{3}$$

где $\check{f}(\xi, p)$ — преобразование Радона функции $f(x)$.

Как следствие из свойства в) получаем, что преобразование Радона функции $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)$, где P — однородный многочлен степени k с постоянными коэффициентами, есть $P(\xi)\frac{\partial^k \check{f}(\xi, p)}{\partial p^k}$.

г) *Преобразование Радона $\check{f}_1(\xi, p)$ функции*

$$f_1(x) \equiv (a, x) f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) f(x)$$

связано с преобразованием Радона $\check{f}(\xi, p)$ функции $f(x)$ следующим образом:

$$\frac{\partial \check{f}_1(\xi, p)}{\partial p} = -\left(a, \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\check{f}(\xi, p). \tag{4}$$

В самом деле, дифференцируя по $\xi_1, \ldots, \xi_n$ равенство

$$\check{f}(\xi, p) = \int f(x)\,\delta(p - (\xi, x))\,dx,$$

мы получим

$$\left(a, \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\check{f}(\xi, p) = -\int (a, x)\, f(x)\,\delta'(p - (\xi, x))\,dx = -\frac{\partial \check{f}_1(\xi, p)}{\partial p}.$$

д) *Преобразование Радона свертки*

$$f(x) = \int f_1(y) f_2(x - y)\,dy$$

функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ есть

$$\check{f}(\xi, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}_1(\xi, t)\,\check{f}_2(\xi, p - t)\,dt, \tag{5}$$

где $\check{f}_1(\xi, t)$, $\check{f}_2(\xi, t)$ — преобразования Радона функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

В самом деле, преобразование Радона функции $f(x)$ есть, по определению,

$$\check{f}(\xi, p) = \int f_1(y) f_2(x - y)\,\delta(p - (\xi, x))\,dy\,dx.$$

Изменим здесь порядок интегрирования и перейдем от переменных x к новым переменным $x - y$. Мы получим

$$\check{f}(\xi, p) = \int f_1(y) f_2(x)\,\delta(p - (\xi, x) - (\xi, y))\,dx\,dy = \int f_1(y)\,\check{f}_2(\xi, p - (\xi, y))\,dy.$$

Сведем интегрирование по y к интегрированию по гиперплоскости $(\xi, y) = t$ и к интегрированию по t при фиксированном ξ. В результате мы получим

$$\check{f}(\xi, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}_1(\xi, t)\,\check{f}_2(\xi, p - t)\,dt.$$

4. Представление функции через ее преобразование Радона. Пусть задана функция $f(x)$, и пусть $\check{f}(\xi, p)$ — ее преобразование Радона:

$$\check{f}(\xi, p) = \int f(x)\,\delta(p - (\xi, x))\,dx. \tag{1}$$

Поставим задачу: выразить функцию $f(x)$ через ее интегралы по гиперплоскостям, то есть, иными словами, получить обращение формулы (1) *).

Мы увидим, что формулы, выражающие функцию $f(x)$ через ее преобразование Радона, различны для пространств четной и нечетной размерности. Разберем сначала более простой случай пространства нечетной размерности.

Пусть $\check{f}(\xi, p)$ — преобразование Радона функции $f(x)$ в пространстве нечетной размерности n. Продифференцируем

*) Решение этой задачи впервые получено Радоном [12]. В вып. I (стр. 102 и след.) было приведено ее решение, основанное на рассмотрении интеграла $\int\limits_{|\omega|=1} |(\omega, x)|^{\lambda}\,d\omega$, где λ — комплексное число. Здесь эта задача решается иным методом.

функцию $\check{f}(\xi, p)$ по p $n-1$ раз *). Мы получим

$$\psi(\xi, p) = \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p). \tag{2}$$

Усредним затем функцию $\psi(\xi, p)$ по множеству гиперплоскостей, проходящих через заданную точку x. Будет доказано, что после усреднения мы получим, с точностью до постоянного множителя, искомое значение функции f в точке x.

Мы не определили пока точно, что значит усреднить функцию $\psi(\xi, p)$ по множеству гиперплоскостей, проходящих через точку x. Дадим это определение. Прежде всего заметим, что любая гиперплоскость, проходящая через точку x_0, задается уравнением $(\xi, x) = (\xi, x_0)$. Таким образом, речь идет об усреднении по ξ функции $\psi(\xi, (\xi, x))$. Это усреднение определим как интеграл

$$\int_\Gamma \psi(\xi, (\xi, x))\, \omega(\xi) \tag{3}$$

по произвольной замкнутой поверхности Γ в пространстве точек ξ, охватывающей точку $\xi = 0$, где

$$\omega(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \xi_k\, d\xi_1 \ldots d\xi_{k-1}\, d\xi_{k+1} \ldots d\xi_n \text{ **)}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что интеграл (3) не зависит от выбора поверхности Γ. Действительно, стоящие под знаком интеграла функция

$$\psi(\xi, (\xi, x)) = \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, (\xi, x))$$

и форма $\omega(\xi)$ однородны по ξ, причем первая имеет степень однородности $-n$, а вторая n. Поэтому все выражение $\psi(\xi, (\xi, x))\, \omega(\xi)$ в (3) есть однородная функция степени однородности 0. Это означает, что выражение под интегралом в формуле (3) сохраняется при замене ξ на $\alpha\xi$, где $\alpha > 0$, то есть, иными словами, оно постоянно вдоль лучей в пространстве ξ, выходящих из начала координат. Таким образом, интеграл (3) не будет меняться при деформации поверхности Γ *).

Итак, мы определили усреднение функции $\psi(\xi, p) = \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)$ по множеству гиперплоскостей, проходящих через точку x, как интеграл

$$\int_\Gamma \psi(\xi, (\xi, x))\, \omega(\xi),$$

где $\omega(\xi)$ задается формулой (4). Этот интеграл берется по произвольной поверхности Γ в пространстве ξ, охватывающей точку $\xi = 0$.

Нам предстоит доказать следующий результат.

*Пусть $\check{f}(\xi, p)$ — преобразование Радона функции $f(x)$ **) в нечетномерном пространстве. Тогда функция $f(x)$ определяется по функции $\check{f}(\xi, p)$ следующей формулой обращения:*

$$\int_\Gamma \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, (\xi, x))\, \omega(\xi) = c f(x), \tag{5}$$

где интеграл берется по произвольной поверхности Γ в пространстве ξ, охватывающей точку $\xi = 0$, а

$$\omega(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \xi_k\, d\xi_1 \ldots d\xi_{k-1}\, d\xi_{k+1} \ldots d\xi_n.$$

Постоянная c в дальнейшем будет вычислена. Мы увидим, что $c = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2(2\pi)^{n-1}$.

---

*) Оператор $\frac{\partial}{\partial p}$ естественно назвать оператором бесконечно малого параллельного сдвига гиперплоскости, поскольку при изменении p гиперплоскость $(\xi, x) = p$ сдвигается параллельно себе.

**) Форма $\omega(\xi)$ имеет простой геометрический смысл. Именно, $\frac{1}{n}\omega(\xi)$ есть объем конуса с вершиной в точке $\xi = 0$, опирающегося на элемент поверхности Γ (см. вып. 1, стр. 371).

*) Поскольку форма $\psi(\xi, (\xi, x))\, \omega(\xi)$ постоянна вдоль лучей, выходящих из точки $\xi = 0$, то ее можно было бы рассматривать как форму, заданную в пространстве этих лучей; тем самым, интеграл (3) можно трактовать как интеграл по множеству лучей, выходящих из точки $\xi = 0$.

**) Напомним, что функцию $f(x)$ мы считаем бесконечно дифференцируемой и быстро убывающей вместе со всеми производными. Однако формула обращения верна и при значительно более слабых условиях на $f(x)$, обсуждать которые мы, впрочем, здесь не будем.

Докажем сначала формулу (5) для точки $x=0$, то есть докажем, что

$$\int_\Gamma \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, 0)\,\omega(\xi) = cf(0). \qquad (6)$$

Интеграл (6) задает непрерывный функционал в пространстве бесконечно дифференцируемых быстро убывающих вместе со всеми производными функций $f(x)$:

$$(F, f) = \int_\Gamma \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, 0)\,\omega(\xi). \qquad (7)$$

Наша цель — доказать, что $F(x) = c\delta(x)$. Покажем сперва, что функционал F удовлетворяет следующему условию:

$$\left(F, f\left(A^{-1}x\right)\right) = (F, f(x)), \qquad (8)$$

где A — произвольное невырожденное линейное преобразование. В самом деле, как было установлено в п. 3, преобразование Радона функции $f\left(A^{-1}x\right)$ есть $|\det A|\,\check{f}(A'\xi, p)$, где A' — сопряженное преобразование. Следовательно,

$$\left(F, f\left(A^{-1}x\right)\right) = \int_\Gamma |\det A|\,\check{f}_p^{(n-1)}(A'\xi, 0)\,\omega(\xi).$$

Очевидно, что, заменив переменную ξ на $A'^{-1}\xi$, мы получим исходный интеграл (7). Этим доказано, равенство (8).

Усредним левую часть равенства (8) по множеству ортогональных преобразований A, то есть по множеству преобразований, сохраняющих сумму квадратов $x_1^2 + \ldots + x_n^2$. В результате получим

$$(F, f_1(x)) = (F, f(x)), \qquad (9)$$

где $f_1(x)$ — усреднение функции $f(x)$ по сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$. Итак, при вычислении (F, f) функцию f можно заменить ее средним по сферам $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$. Значит, F можно теперь рассматривать как функционал в пространстве функций на полупрямой $0 \leqslant r < \infty$.

Заметим, что на полупрямой $0 \leqslant r < \infty$ функционал F является в силу соотношения $(F, f(\alpha x)) = (F, f(x))$ однородной обобщенной функцией степени однородности -1. Легко показать, что единственная однородная обобщенная функция на полупрямой степени однородности -1 есть, с точностью до множителя, δ-функция (сравни «Обобщенные функции», вып. 1, стр. 110). Этим доказано, что $F = c\delta(x)$, то есть

$$\int_\Gamma \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, 0)\,\omega(\xi) = cf(0). \qquad (10)$$

Выражение функции $f(x)$ в произвольной точке x_0 через преобразование Радона $\check{f}(\xi, p)$ получается непосредственно из формулы (10). Для этого достаточно применить формулу (10) к функции $f_1(x) = f(x + x_0)$. Вспомним, что преобразование Радона функции $f_1(x)$ есть $\check{f}(\xi, p + (\xi, x_0))$ (см. п. 3). Таким образом, формула (10), примененная к функции $f_1(x)$, дает

$$\int_\Gamma \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, (\xi, x_0))\,\omega(\xi) = cf(x_0). \qquad (11)$$

Собственно говоря, при выводе формулы (11) мы нигде не пользовались тем, что пространство нечетномерно. Однако для четномерного пространства формула (11) тривиальна, поскольку интеграл попросту равен нулю. Это следует непосредственно из того, что при четном n подынтегральная функция $\psi(\xi) = \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, (\xi, x_0))$ является нечетной функцией от ξ *), то есть $\psi(-\xi) = -\psi(\xi)$.

Вычислим постоянную c в формуле (10) для нечетномерного пространства. Для этого применим формулу (10) к функции

$$f(x) = e^{-x_1^2 - \ldots - x_n^2}.$$

Преобразование Радона функции $e^{-x_1^2 - \ldots - x_n^2}$ есть

$$\check{f}(\xi, p) = \int e^{-x_1^2 - \ldots - x_n^2}\,\delta(p - \xi_1 x_1 - \ldots - \xi_n x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Ортогональным преобразованием переменных $x_1, \ldots, x_n$ этот интеграл приводится к виду

$$\check{f}(\xi, p) = \int e^{-x_1^2 - \ldots - x_n^2}\,\delta(p - |\xi|\,x_1)\,dx_1 \ldots dx_n,$$

---

*) Поскольку $\check{f}_p^{(n-1)}(\alpha\xi, \alpha p) = \alpha^{-n}\,\mathrm{sign}\,\alpha\,\check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)$.

где $|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}$. Отсюда легко получаем

$$\check{f}(\xi, p)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{|\xi|}e^{-\frac{p^2}{|\xi|^2}}.$$

Разлагая экспоненту в ряд, получим

$$\check{f}_p^{(n-1)}(\xi, 0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{|\xi|^n}.$$

Подставим выражения для $f(x)$ и $\check{f}_p^{(n-1)}(\xi, 0)$ в формулу (10). Мы получим

$$c=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\int_\Gamma\frac{\omega(\xi)}{|\xi|^n}=$$
$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\Omega_n,$$

где Ω_n — площадь поверхности единичной сферы. Поскольку

$$\Omega_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-1)!},$$

то получаем окончательно

$$c=(-1)^{\frac{n-1}{2}}2(2\pi)^{n-1}.$$

Итак, мы получили следующий окончательный результат. *В пространстве нечетной размерности n функция $f(x)$ выражается через свое преобразование Радона $\check{f}(\xi, p)$ следующей формулой обращения:*

$$f(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_\Gamma\check{f}_p^{(n-1)}(\xi, (\xi, x))\,\omega(\xi), \tag{12}$$

где

$$\omega(\xi)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\xi_k\,d\xi_1\ldots d\xi_{k-1}\,d\xi_{k+1}\ldots d\xi_n,$$

а интеграл берется по произвольной поверхности Γ в пространстве ξ, охватывающей точку $\xi=0$.

Можно было бы доказать, что *в четномерном пространстве формула, выражающая функцию $f(x)$ через ее преобразование Радона $\check{f}(\xi, p)$, имеет следующий вид:*

$$f(x)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int_\Gamma\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\check{f}(\xi, p)(p-(\xi, x))^{-n}dp\right)\omega(\xi) \tag{13}$$

где интеграл по p следует понимать в смысле регуляризованного значения *).

Отметим основное различие формул обращения для четномерного и нечетномерного пространства. В нечетномерном пространстве формула обращения локальна. Именно, чтобы определить значение функции f в точке x, нужно знать только интегралы функции f по плоскостям, проходящим через точку x, и по бесконечно близким к ним плоскостям. В четномерном пространстве, как это видно из формулы (13), чтобы определить значение функции f в точке пространства, нужно знать ее интегралы по всем плоскостям.

Вывод формулы обращения для четномерного пространства проводится так же, как для нечетномерного пространства. Именно, теми же рассуждениями, что и на стр. 26—27, можно доказать следующее равенство:

$$\int_\Gamma\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\check{f}(\xi, p)\,p^{-n}\,dp\right)\omega(\xi)=cf(0). \tag{14}$$

---

*) Именно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p^{-n}\varphi(p)\,dp=\int_0^\infty p^{-n}\Big\{\varphi(p)+\varphi(-p)-$$
$$-2\left[\varphi(0)+\frac{p^2}{2!}\varphi''(0)+\ldots+\frac{p^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)\right]\Big\}\,dp$$

(см. вып. 1, стр. 418).

Легко убедиться, что в нечетномерном случае это равенство тривиально, поскольку интеграл равен нулю. В четномерном же случае коэффициент $c \neq 0$. Его можно вычислить, подставляя, например, в равенство (14) $f(x) = e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2}$.

В результате мы получим, что $c = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)!}(2\pi)^n$.

5. Аналог формулы Планшереля для преобразования Радона. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие вместе со всеми производными функции в n-мерном аффинном пространстве, $\check{f}(\xi, p)$ и $\check{g}(\xi, p)$ — их преобразования Радона. Мы покажем, что *если пространство нечетномерно, то для функций f и g и их преобразований Радона имеет место следующий аналог формулы Планшереля*:

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi, p)\, \overline{\check{g}_p^{(n-1)}(\xi, p)\,dp} \right) \omega(\xi), \quad (1)$$

где

$$\omega(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \xi_k\, d\xi_1 \dots d\xi_{k-1}\, d\xi_{k+1} \dots d\xi_n,$$

Γ — *произвольная поверхность в пространстве ξ, охватывающая точку $\xi = 0$. Эту формулу путем интегрирования по частям по p можно также привести к следующему виду*:

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = $$
$$= \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}_p^{(m)}(\xi, p)\, \overline{\check{g}_p^{(m)}(\xi, p)}\, dp \right) \omega(\xi), \quad (1')$$

где $m = \frac{n-1}{2}$.

Если пространство четномерно, то аналог формулы Планшереля имеет следующий вид:

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Gamma} \left(\int \check{f}(\xi, p_1)\, \overline{\check{g}(\xi, p_2)}\, (p_1 - p_2)^{-n}\, dp_1\, dp_2 \right) \omega(\xi)\ ^{*)}. \quad (2)$$

Дадим вывод формулы для нечетномерного пространства; для четномерного пространства вывод аналогичен. Рассмотрим свертку функций $f(x)$ и $g^*(x) = \overline{g(-x)}$,

$$F(x) = \int f(y)\overline{g(y-x)}\,dy.$$

Согласно п.3, преобразование Радона $\check{F}(\xi, p)$ функции $F(x)$ выражается через преобразования Радона функций $f(x)$ и $g(x)$ следующим образом:

$$\check{F}(\xi, p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi, t)\, \overline{\check{g}(\xi, t-p)}\,dt.$$

По формуле обращения, выражающей функцию $F(x)$ через ее преобразование Радона, имеем

$$F(0) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int \check{F}_p^{(n-1)}(\xi, 0)\,\omega(\xi) =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi, t)\, \overline{\check{g}_p^{(n-1)}(\xi, t)\,dt} \right) \omega(\xi).$$

---

*) Стоящий в скобках интеграл по p_1, p_2 нужно понимать в смысле регуляризованного значения. Именно, преобразуем его путем замены переменных к виду

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi, p + p_2)\, \overline{\check{g}(\xi, p_2)}\, dp_2 \right) p^{-n}\, dp.$$

Тогда задача сводится к регуляризации интеграла по p. Об этой регуляризации было сказано уже в сноске к стр. 29.

Но

$$F(0)=\int f(y)\overline{g(y)}\,dy.$$

Таким образом, мы получаем

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_{\Gamma}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,\ p)\,\overline{\check{g}_p^{(n-1)}(\xi,\ p)}\,dp\right)\omega(\xi),$$

то есть формулу (1).

Преобразуем выражение, стоящее справа, выполнив $\frac{n-1}{2}$ раз интегрирование по частям по p. Так как по условию функции f, g и их производные быстро убывают, то функции $\check{f}(\xi,\ p)$, $\check{g}(\xi,\ p)$ и их производные по p стремятся к нулю, когда $p\to\pm\infty$, то есть когда гиперплоскость $(\xi,\ x)=p$ удаляется в бесконечность. Поэтому в результате интегрирования по частям мы получим

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}\int_{\Gamma}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}_p^{(m)}(\xi,\ p)\,\overline{\check{g}^{(m)}(\xi,\ p)}\,dp\right)\omega(\xi),$$

где $m=\frac{n-1}{2}$, то есть формулу (1′).

Формула (1′) получена для быстро убывающих функций f и g. Заметим, что так как эти функции образуют всюду плотное множество в пространстве функций f, для которых

$$\int|f(x)|^2\,dx<\infty,$$

то формула (1′) остается справедливой и для любых функций с интегрируемым квадратом модуля.

Интересное следствие из формулы Планшереля получаем, когда функция $g(x)$ есть характеристическая фунция некоторой ограниченной области V в нечетномерном пространстве (то есть $g(x)=1$, когда точка x принадлежит V, и $g(x)=0$, когда x не принадлежит V). Будем считать пространство евклидовым. Преобразование Радона $\check{g}(\xi,\ p)$

функции $g(x)$ при $|\xi|=1$ есть площадь сечения области V гиперплоскостью $(\xi,\ x)=p$. Формула Планшереля дает нам *выражение для интеграла функции $f(x)$ по области V через интегралы $\check{f}(\xi,\ p)$ функции $f(x)$ по гиперплоскостям* $(\xi,\ x)=p$:

$$\int_V f(x)\,dx=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_{\Gamma}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\check{f}(\xi,\ p)\,\frac{\partial^{n-1}S(\xi,\ p)}{\partial p^{n-1}}\,dp\right)\omega(\xi).\quad(3)$$

Здесь $S(\xi,\ p)$ — площадь сечения области V гиперплоскостью $(\xi,\ x)=p$; Γ — сфера единичного радиуса.

В § 2 эта формула будет обобщена на случай неограниченных областей V.

Если теперь в формуле Планшереля принять функции $f(x)$, $g(x)$ равными характеристической функции области V, то мы получим *выражение для объема v области V в нечетномерном пространстве через площади $S(\xi,\ p)$ сечений области V гиперплоскостями* $(\xi,\ x)=p$:

$$v=\frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}\int_{\Gamma}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^m S(\xi,\ p)}{\partial p^m}\right)^2 dp\right)\omega(\xi),\quad(4)$$

где $m=\frac{n-1}{2}$.

Несколько более изысканный четномерный случай мы здесь рассматривать не станем.

В силу формулы Планшереля преобразование для (нечетномерного пространства) $f(x)\to f_p^{(m)}(\xi,\ p)$, $m=\frac{n-1}{2}$, можно продолжить до изометрического отображения пространства всех функций $f(x)$, для которых

$$\int|f(x)|^2\,dx<\infty,$$

в пространство функций $\psi(\xi,\ p)$, удовлетворяющих условию однородности

$$\psi(\alpha\xi,\ \alpha p)=\alpha^{-m-1}\operatorname{sign}\alpha\,\psi(\xi,\ p)\quad(5)$$

и таких, что

$$\int_{\Gamma}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(\xi,\ p)|^2\,dp\right)\omega(\xi)<\infty.\quad(6)$$

Можно показать, что при этом мы получим отображение на все пространство функций $\psi(\xi, p)$, удовлетворяющих условиям (5) и (6). Доказательства мы проводить здесь не будем.

Заметим, что как вывод формулы Планшереля, так и доказательство сформулированного сейчас утверждения можно получить, сводя преобразование Радона к преобразованию Фурье и используя затем известные свойства преобразования Фурье. Этот вывод мы рекомендуем провести читателю.

6. Аналог теоремы Пэли — Винера для преобразования Радона *). Здесь мы найдем необходимые и достаточные условия, при которых функция $\check{f}(\xi, p)$ является преобразованием Радона некоторой бесконечно дифференцируемой функции, быстро убывающей вместе со всеми производными.

Эти условия формулируются одинаково для пространств любой размерности, однако доказательство достаточности несколько различно для четномерных и для нечетномерных пространств. Для простоты ограничимся пространствами нечетномерными.

Замечательно, что, помимо естественных условий на дифференцируемость и на скорость убывания, функция $\check{f}(\xi, p)$ удовлетворяет еще некоторым алгебраическим соотношениям (см. условие 4) **).

Итак, пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция в нечетномерном пространстве, быстро убывающая при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными. Найдем необходимые условия, которым удовлетворяет ее преобразование Радона

$$\check{f}(\xi, p) = \int\limits_{(\xi, x)=p} f(x)\,\omega = \int f(x)\,\delta(p - (\xi, x))\,dx. \qquad (1)$$

*) Классическая теорема Пэли — Винера есть теорема о преобразовании Фурье финитной функции на прямой. Ее аналогами мы называем в этой книге теоремы, в которых дается описание функций, получающихся из «достаточно хороших» функций при тех или иных преобразованиях интегральной геометрии.

**) Эти алгебраические соотношения связаны с наличием конечномерных представлений у группы аффинных преобразований (включающей параллельные переносы). Аналогичный факт для группы движений пространства Лобачевского тоже связан с наличием конечномерных представлений у группы движений этого пространства (см. теорему Пэли — Винера для группы Лоренца в гл. IV, § 5).

Прежде всего напомним, что

1) *Функция $\check{f}(\xi, p)$ удовлетворяет условию однородности*

$$\check{f}(\alpha\xi, \alpha p) = |\alpha|^{-1}\check{f}(\xi, p) \qquad (2)$$

для любого $\alpha \neq 0$.

Далее, из определения преобразования Радона и условий на функцию $f(x)$ можно без труда установить следующие свойства функции $\check{f}(\xi, p)$.

2) *Функция $\check{f}(\xi, p)$ бесконечно дифференцируема по ξ и по p при $\xi \neq 0$.*

3) *При $|p| \to \infty$ для любого $k > 0$ имеет место оценка*

$$|\check{f}(\xi, p)| = o(|p|^{-k}) \qquad (3)$$

равномерно по ξ, когда ξ пробегает ограниченную замкнутую область, не содержащую точки $\xi = 0$. Та же оценка имеет место для любой производной функции $\check{f}(\xi, p)$ по ξ и p.

Покажем, что функция $\check{f}(\xi, p)$ удовлетворяет дополнительно следующему условию:

4) *Для любого $k = 0, 1, \ldots$ интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi, p)\,p^k\,dp \qquad (4)$$

является однородным многочленом от ξ степени k.

В самом деле, если подставить в интеграл (4) вместо функции $\check{f}(\xi, p)$ ее выражение через $f(x)$, то мы получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi, p)\,p^k\,dp = \int f(x)(\xi, x)^k\,dx.$$

Отсюда утверждение следует непосредственно.

Итак, мы сформулировали необходимые условия, которым удовлетворяет преобразование Радона бесконечно дифференцируемой функции, быстро убывающей вместе со всеми производными. Докажем теперь, что эти условия также и достаточны.

Именно, покажем, что *всякая функция $\check{f}(\xi, p)$, удовлетворяющая условиям 1)—4), является преобразованием*

Радона некоторой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, быстро убывающей вместе со всеми своими производными.

Построим по функции $\check{f}(\xi, p)$ функцию $f(x)$ согласно формуле обращения для преобразования Радона

$$f(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_{\Gamma}\check{f}_p^{(n-1)}(\xi, (\xi, x))\,\omega(\xi)\ ^{*}). \tag{5}$$

Нам нужно доказать, что $f(x)$ есть бесконечно дифференцируемая быстро убывающая вместе со своими производными функция и что преобразование Радона функции $f(x)$ совпадает с исходной функцией $\check{f}(\xi, p)$.

Бесконечная дифференцируемость функции $f(x)$ следует непосредственно из условия 2) на функцию $\check{f}(\xi, p)$. Покажем, что $f(x)$ — быстро убывающая функция. Иными словами, покажем, что для любого $x_0 \neq 0$ функция $f(tx_0)$ при $t \to \infty$ есть быстро убывающая функция от t.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$x_0=(1, 0, \ldots, 0).$$

Возьмем в качестве поверхности интегрирования в формуле (5) пару гиперплоскостей $\xi_n = \pm 1$. Так как функция под знаком интеграла в (5) не меняется при замене ξ на $-\xi$, то интеграл (5) сводится к удвоенному интегралу по гиперплоскости $\xi_n = 1$. В результате мы получаем следующее выражение для $f(tx_0)$:

$$f(tx_0)=\int \psi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 1; t\xi_1)\,d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} =$$
$$= t^{-1}\int \psi(pt^{-1}, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 1; p)\,dp\,d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}, \tag{6}$$

где для краткости обозначено

$$\psi(\xi, p)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}}\check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p). \tag{7}$$

*) Условие 1) обеспечивает независимость этого интеграла от выбора поверхности интегрирования Г.

Подинтегральная функция есть бесконечно дифференцируемая функция от t^{-1} в окрестности точки $t^{-1}=0$. Поэтому она может быть разложена в асимптотический ряд Тейлора по степеням t^{-1}:

$$\psi(pt^{-1}, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 1; p) \sim$$
$$\sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{-k}p^k}{k!}\psi_{\xi_1}^{(k)}(0, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 1; p). \tag{8}$$

Проинтегрировав этот ряд почленно по параметрам $\xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ и p, получим асимптотический ряд для функции $f(tx_0)$ при $t \to \infty$ *)

$$f(tx_0) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{-k-1}}{k!}\int p^k \psi_{\xi_1}^{(k)}(0, \ldots, \xi_{n-1}; p)\,dp\,d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}. \tag{9}$$

Покажем, что все члены этого асимптотического ряда равны нулю. Это и будет означать, что функция $f(tx_0)$ при $t \to \infty$ убывает быстрее любой отрицательной степени t. Для этого вспомним, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\check{f}(\xi, p)\,p^m\,dp$$

является в силу условия 4) многочленом степени m от ξ. Интегрируя это выражение по частям, мы получим, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi, p)\,p^k\,dp=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}}\int \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)\,p^k\,dp$$

есть многочлен степени $k-n+1$ от ξ (при $k < n-1$ интеграл равен нулю). Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{\xi_1}^{(k)}(\xi, p)\,p^k\,dp=\frac{\partial^k}{\partial\xi_1^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi, p)\,p^k\,dp=0.$$

*) В том, что ряд (8) действительно допускает почленное интегрирование, можно убедиться путем оценки остаточного члена. Эту несколько громоздкую, но стандартную выкладку мы опускаем.

Итак, все члены асимптотического ряда (9) равны нулю. Тем самым доказано, что функция $f(x)$ быстро убывает при $|x|\to\infty$. Теми же рассуждениями можно убедиться, что любая производная функции $f(x)$ также быстро убывает при $|x|\to\infty$.

Итак, доказано, что функция $f(x)$, определенная по функции $\check f(\xi, p)$ формулой (5), бесконечно дифференцируема и быстро убывает вместе со всеми своими производными при $|x|\to\infty$. Осталось показать, что преобразование Радона функции $f(x)$ совпадает с исходной функцией $\check f(\xi, p)$.

Пусть преобразование Радона функции $f(x)$ есть $\check g(\xi, p)$. Тогда по формуле обращения имеем

$$f(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_\Gamma \check g_p^{(n-1)}(\xi, (\xi, x))\,\omega(\xi). \qquad (10)$$

Следовательно, разность функций $\check f(\xi, p)$ и $\check g(\xi, p)$,

$$\check F(\xi, p)=\check f(\xi, p)-\check g(\xi, p)$$

удовлетворяет соотношению

$$\int_\Gamma \check F_p^{(n-1)}(\xi, (\xi, x))\,\omega(\xi)\equiv 0. \qquad (11)$$

Нам нужно показать, что $\check F(\xi, p)\equiv 0$. Для этого введем функцию $\Phi(\xi)=\check F_p^{(n-1)}(\xi, 1)$ и покажем, что $\Phi(\xi)\equiv 0$.

В самом деле, возьмем в (11) в качестве поверхности Γ пару гиперплоскостей в пространстве ξ

$$(\xi, x)=\pm 1.$$

Поскольку функция под знаком интеграла в (11) не меняется при замене ξ на $-\xi$, то интеграл в (11) сведется к интегралу только по гиперплоскости $(\xi, x)=1$,

$$2\int_{(\xi, x)=1}\Phi(\xi)\,\omega\equiv 0.$$

Это означает, что преобразование Радона функции $\Phi(\xi)$ равно тождественно нулю. Отсюда следует, что и сама функция Φ равна тождественно нулю *).

Итак, мы показали, что $\check F_p^{(n-1)}(\xi, 1)\equiv 0$. Но тогда также $\check F_p^{(n-1)}(\xi, p)\equiv 0$, а потому и $\check F(\xi, p)\equiv 0$. Итак, доказано, что функция $\check f(\xi, p)$, удовлетворяющая условиям 1)—4), является преобразованием Радона некоторой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, быстро убывающей вместе со всеми своими производными.

7. Асимптотика для преобразования Фурье характеристической функции. В этом пункте мы рассмотрим одну интересную задачу анализа. Речь идет об отыскании асимптотики при $|\xi|\to\infty$ у интеграла

$$\varphi(\xi)=\int_V e^{i(\xi, x)}\,dx, \qquad (1)$$

взятого по ограниченной области V в n-мерном пространстве.

Относительно области V сделаем некоторые дополнительные предположения. Именно, будем предполагать, что область V ограничена выпуклой, $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ раза дифференцируемой поверхностью, имеющей точку 0 своим центром симметрии. Кроме того, предположим, что произведение главных радиусов кривизны в каждой точке этой поверхности отлично от нуля.

Интеграл (1) есть преобразование Фурье характеристической функции области V.

Мы получим асимптотику для интеграла (1) из наглядных геометрических соображений, перейдя от преобразования Фурье характеристической функции области V к ее преобразованию Радона.

Пусть $S(\xi, p)$ — преобразование Радона характеристической функции области V. Если вектор ξ предполагать единичным, то $S(\xi, p)$ есть площадь сечения области V гиперплоскостью $(\xi, x)=p$.

---

*) Заметим, что функция $\Phi(\xi)$ бесконечно дифференцируема при $\xi\neq 0$. Легко показать, что если положить $\Phi(0)=0$, то эта функция будет бесконечно дифференцируемой и при $\xi=0$. Далее, для функции $\Phi(\xi)$ и для любой ее производной $D\Phi(\xi)$ имеет место оценка

$$|D\Phi(\xi)|=O(|\xi|^{-n}).$$

Отсюда следует, что для функции $\Phi(\xi)$ преобразование Радона определено и что функция $\Phi(\xi)$ однозначно определяется своим преобразованием Радона согласно формуле обращения.

Функция $\varphi(\xi)$ выражается через $S(\xi, p)$ следующим образом:

$$\varphi(r\xi)=\int_{-a(\xi)}^{a(\xi)} S(\xi, p)\, e^{ipr}\, dp, \tag{2}$$

где $2a(\xi)$ — диаметр области V в направлении ξ (рис. 1).

Для нас важно изучить поведение функции $S(\xi, p)$ в окрестности значений $p=\pm a(\xi)$. Пусть гиперплоскость $(\xi, x)=a(\xi)$ касается поверхности в точке A. Отнесем поверхность к новой

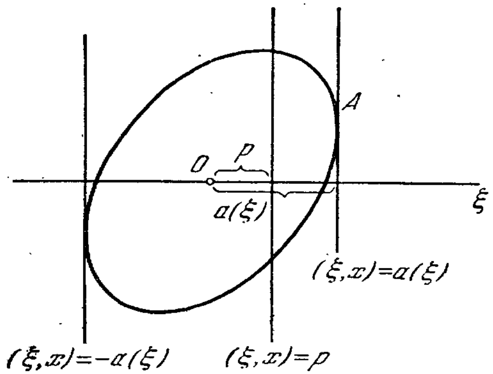

Рис. 1.

системе координат, взяв в качестве координатных осей нормаль к поверхности и направления векторов главных кривизн в точке A. Тогда уравнение поверхности в окрестности точки A примет вид

$$a-p=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^2}{2\rho_i}+\ldots, \qquad a=a(\xi),$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ — главные радиусы кривизны в точке A, а многоточием обозначены члены более высокого порядка относительно x_i.

При $p \to a(\xi)$ сечение области V гиперплоскостью $(\xi, x)=p$ есть, с точностью до малых более высокого порядка, эллипсоид

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^2}{2\rho_i}=a-p.$$

Объем этого эллипсоида равен

$$\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{\rho_1\ldots\rho_{n-1}}\,(a-p)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Таким образом, площадь сечения $S(\xi, p)$ области V гиперплоскостью $(\xi, x)=p$ есть

$$S(\xi, p)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{\rho_1\ldots\rho_{n-1}}\,(a-p)^{\frac{n-1}{2}}+(a-p)^{\frac{n}{2}}S_1(\xi, p),$$

где $S_1(\xi, p)$ — функция, $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ раз непрерывно дифференцируемая по p при $|p|\leqslant a(\xi)$.

В силу предположения относительно области V функция $S(\xi, p)$ есть четная функция от p. Поэтому мы можем также писать

$$S(\xi, p)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,\frac{\sqrt{\rho_1\ldots\rho_{n-1}}}{a^{\frac{n-1}{2}}}\,(a^2-p^2)^{\frac{n-1}{2}}+(a^2-p^2)^{\frac{n}{2}}S_2(\xi, p),$$

где функция $S_2(\xi, p)$ снова $\left[\frac{n+3}{2}\right]$ раз непрерывно дифференцируема по p при $|p|\leqslant a(\xi)$.

Перейдем теперь от преобразования Радона $S(\xi, p)$ к преобразованию Фурье φ согласно формуле (2). Мы получим

$$\varphi(r\xi)=\frac{\sqrt{\rho_1\ldots\rho_{n-1}}\,a^{1/2}\cdot(2\pi)^{n/2}}{r^{n/2}}\,J_{n/2}(ar)+$$
$$+\int_{-a}^{a}(a^2-p^2)^{n/2}S_2(\xi, p)\,e^{ipr}\,dp, \tag{3}$$

где $J_{n/2}(ar)$ — функция Бесселя индекса $\frac{n}{2}$ *).

*) Использовано интегральное представление Пуассона для функции Бесселя, см. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, 1951 г., формула 6.413 (3), стр. 345.

Для функции $J_{n/2}(ar)$ известна следующая асимптотическая формула при $r \to \infty$ *):

$$J_{n/2}(ar) = \sqrt{\frac{2}{\pi a r}} \cos\left(ar - \frac{n+1}{4}\pi\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right)$$

при условии, что $\left|\cos\left(ar - \frac{n+1}{4}\pi\right)\right| \geqslant \delta > 0$.

С другой стороны, интегрируя второе слагаемое в формуле (3) по частям, мы без труда получим для него следующую асимптотическую оценку:

$$\int_{-a}^{a} (a^2 - p^2)^{n/2} S_2(\xi, p)\, e^{ipr}\, dp = O\left(r^{-\frac{n+2}{2}}\right).$$

Подставив оба эти выражения в формулу (3), мы получим окончательно следующее *асимптотическое выражение для функции* $\varphi(\xi) = \int\limits_V e^{i(\xi, x)}\, dx$:

$$\varphi(r\xi) = 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\rho_1 \ldots \rho_{n-1}}\, \frac{\cos\left(ar - \frac{n+1}{4}\pi\right)}{r^{\frac{n+1}{2}}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right)$$

при условии, что $\left|\cos\left(ar - \frac{n+1}{4}\pi\right)\right| \geqslant \delta > 0$ (здесь $2a$ — диаметр области V в направлении вектора ξ).

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели преобразование Радона быстро убывающих функций, которое определялось там как интеграл по гиперплоскости. Ясно, что это определение преобразования Радона переносится и на все суммируемые функции, в частности на характеристические функции ограниченных областей.

В этом параграфе мы определим преобразование Радона обобщенных функций. В частности, будет определено преобразование Радона некоторых несуммируемых функций, например характеристических функций неограниченных тел. Тем самым на несуммируемые функции будет обобщено понятие интеграла по гиперплоскости.

*) См. там же, формула 6.461, стр. 353.

Своеобразный интерес представляет преобразование Радона характеристической функции неограниченной области. Поясним это подробнее для случая нечетномерного пространства.

Пусть сначала $S(\xi, p)$ — преобразование Радона характеристической функции ограниченной области V (например, эллипсоида, ограниченного выпуклого тела и т. д.). Как мы знаем, $S(\xi, p)$ есть площадь сечения этой области гиперплоскостью $(\xi, x) = p$. В предыдущем параграфе была получена следующая формула. Пусть F — характеристическая функция ограниченной области V. Тогда

$$\int F(x) f(x)\, dx = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\xi, p)\, \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)\, dp\right) \omega(\xi), \qquad (1)$$

где $\check{f}(\xi, p)$ — преобразование Радона функции $f(x)$. Так как стоящий слева интеграл есть $\int\limits_V f(x)\, dx$, то тем самым формула (1) дает решение следующей задачи: зная интегралы функции $f(x)$ по гиперплоскостям, вычислить интеграл функции $f(x)$ по ограниченной области V.

Та же задача может быть поставлена и для *неограниченной* области V. В п. 4 мы увидим, что ее решение снова дается формулой

$$\int\limits_V f(x)\, dx = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\xi, p)\, \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)\, dp\right) \omega(\xi),$$

где $S(\xi, p)$ — преобразование Радона характеристической функции области V. Итак, вычислив преобразование Радона $S(\xi, p)$ характеристической функции неограниченной области V, мы получаем решение следующей задачи: зная интегралы функции $f(x)$ по гиперплоскостям, вычислить интеграл функции $f(x)$ по области V. Функцию $S(\xi, p)$ естественно считать обобщенной площадью сечения неограниченной области.

Этот параграф посвящен главным образом вычислению преобразования Радона некоторых обобщенных функций. В частности, в пп. 2 и 3 вычислено преобразование Радона обобщенных функций, сосредоточенных в точке, на отрезке, на луче и на прямой. В пп. 5, 6 и 8 вычисляются преобразования Радона характеристических функций некоторых неограниченных областей: одной полы кругового конуса, одной полы гиперболоида и октанта. Во всех примерах важны не только окончательные формулы, но и те методы, которыми эти формулы удается получить.

1. Определение преобразования Радона обобщенной функции. Преобразование Радона обобщенной функции мы определим так, чтобы для основных функций определение совпадало с обычным. Это определение будет основываться на формуле Планшереля для преобразования Радона, полученной в § 1, п. 5. Поскольку формула Планшереля пишется по-разному для пространств четномерных и пространств нечетномерных, то четномерные и нечетномерные пространства надо рассматривать отдельно. Мы остановимся на более простом случае нечетномерного пространства *).

Формула Планшереля для нечетномерного пространства размерности n может быть записана в следующем виде:

$$\int F(x) f(x)\, dx =$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{F}(\xi, p) \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)\, dp \right) \omega(\xi), \tag{1}$$

где $\check{F}$, $\check{f}$ — преобразования Радона функций F, f, принадлежащих пространству основных функций. Напомним, что интеграл справа берется по произвольной поверхности Γ в пространстве ξ, охватывающей точку $\xi = 0$, а

$$\omega(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \xi_k\, d\xi_1 \ldots d\xi_{k-1}\, d\xi_{k+1} \ldots d\xi_n.$$

Обозначим производную $(n-1)$-го порядка по p от функции $\check{f}(\xi, p)$ через ψ:

$$\psi(\xi, p) = \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p). \tag{2}$$

*) Все определения и выкладки, которые даются в этом и следующем параграфах для нечетномерного пространства, могут быть без особого труда повторены и для четномерного пространства.

Тогда интеграл в правой части равенства запишется в виде

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{F}(\xi, p) \psi(\xi, p)\, dp \right) \omega(\xi) = (\check{F}, \psi), \tag{3}$$

то есть $\check{F}$ задает функционал в пространстве функций ψ. Сама формула Планшереля перепишется в виде

$$(F, f) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} (\check{F}, \psi). \tag{4}$$

Эта формула определяет, таким образом, преобразование Радона $\check{F}$ функции F как функционал в пространстве функций ψ.

Мы в состоянии теперь дать определение преобразования Радона обобщенной функции F. Именно, пусть F — обобщенная функция в пространстве основных функций $f(x)$. Рассмотрим пространство функций $\psi(\xi, p)$, задаваемых формулой (2), где $\check{f}(\xi, p)$ — преобразование Радона функции из основного пространства. Преобразованием Радона обобщенной функции F назовем функционал $\check{F}$ в пространстве функций ψ, определяемый следующим соотношением:

$$(F, f) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} (\check{F}, \psi).$$

В качестве пространства основных функций $f(x)$ возьмем пространство S бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих вместе со всеми производными. Из п. 6 § 1 уже известно, что представляют собой преобразования Радона $\check{f}(\xi, p)$ этих функций, а тем самым, и их производные $\psi(\xi, p) = \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)$. Именно, функции $\psi(\xi, p)$ характеризуются следующими условиями:

1) Функции $\psi(\xi, p)$ — четные однородные функции от ξ, p степени однородности $-n$, то есть

$$\psi(\alpha\xi, \alpha p) = |\alpha|^{-n} \psi(\xi, p)$$

для любого $\alpha \neq 0$.

2) Функции $\psi(\xi, p)$ — бесконечно дифференцируемые по ξ и по p при $\xi \neq 0$.

3) При $|p| \to \infty$ и для любого $k > 0$ имеет место оценка

$$|\psi(\xi, p)| = o(|p|^{-k})$$

равномерно по ξ, когда ξ пробегает произвольную ограниченную замкнутую область, не содержащую точки $\xi = 0$. Та же оценка имеет место для производных функции ψ.

4) Для любого целого числа $k \geqslant 0$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, p) p^k \, dp$$

является однородным многочленом от ξ степени $k - n + 1$ (при $k < n - 1$ интеграл равен нулю).

Условия 1), 2), 3) являются непосредственным следствием аналогичных условий для $\check{f}$, выведенных в § 1. Условие 4) для $k \geqslant n - 1$ получается интегрированием по частям аналогичного условия для $\check{f}$; при $k < n - 1$ равенство интеграла нулю есть свойство производной $(n-1)$-го порядка.

Итак, преобразование Радона обобщенной функции F есть функционал в пространстве функций $\psi(\xi, p)$, удовлетворяющих условиям 1) — 4). Этот функционал $\check{F}$ можно затем продолжить различными способами на пространство всех функций $\psi(\xi, p)$, удовлетворяющих только условиям однородности, бесконечной дифференцируемости и быстрого убывания по p (условия 1—3). В этом пространстве естественным образом задается топология. Тем самым преобразование Радона обобщенной функции является обобщенной функцией в обычном смысле, но определенной неоднозначно.

Возникает вопрос, каковы те «несущественные» функции $\check{F}(\xi, p)$, которым отвечает функционал, равный нулю на подпространстве функций, удовлетворяющих условию 4). Иными словами, каковы те обобщенные функции $\check{F}(\xi, p)$, для которых

$$(\check{F}, \psi) \equiv \int_{\Gamma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(\xi, p) \psi(\xi, p) \, dp \right) \omega(\xi) = 0$$

при условии, что функция $\psi(\xi, p)$ удовлетворяет дополнительному условию 4): интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, p) p^k \, dp$$

равен нулю при $k < n - 1$, а при $k \geqslant n - 1$ является многочленом от ξ степени $k - n + 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Оказывается, что подпространство несущественных функций порождается функциями вида

$$p^k a_{-k-1}(\xi), \tag{5}$$

где при $k < n - 1$ $a_{-k-1}(\xi)$ есть произвольная функция, удовлетворяющая только условию однородности

$$a_{-k-1}(\alpha\xi) = \alpha^{-k} |\alpha|^{-1} a_{-k-1}(\xi) \tag{6}$$

для любого $\alpha \neq 0$; при $k \geqslant n - 1$ функция $a_{-k-1}(\xi)$ удовлетворяет кроме условия (6) еще следующему условию:

$$\int_{\Gamma} a_{-k-1}(\xi) P_{k-n+1}(\xi) \, \omega(\xi) = 0 \tag{7}$$

для любого однородного многочлена $P_{k-n+1}(\xi)$ степени $k - n + 1$.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что дополнительное условие 4, наложенное на функции ψ, можно еще записать в следующем виде:

$$(p^k a_{-k-1}(\xi), \psi) \equiv \int_{\Gamma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, p) p^k \, dp \right) a_{-k-1}(\xi) \, \omega(\xi) = 0,$$

где $a_{-k-1}(\xi)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям (6) и (7). Тем самым, ввиду двойственности пространства основных функций и пространства, ему сопряженного, пространство всех несущественных функций порождается функциями вида $p^k a_{-k-1}(\xi)$.

В дальнейшем при вычислении преобразования Радона обобщенных функций следует всегда помнить, что преобразование Радона определено лишь с точностью до несущественных функций.

2. Преобразование Радона функций, сосредоточенных в точке и на отрезке прямой. Вычислим преобразование Радона функции $\delta(x) = \delta(x_1, \ldots, x_n)$. Функцию $\delta(x)$ можно рассматривать как плотность распределения единичной массы в пространстве, когда вся масса сосредоточена в одной точке $x = 0$. Как было замечено в п. 1 § 1, для вычисления преобразования Радона нужно сначала вычислить массу

$M(\xi, p)$ полупространства $(\xi, x) < p$. Тогда преобразование Радона определится по формуле $\check{F}(\xi, p) = \frac{\partial M(\xi, p)}{\partial p}$.

Очевидно, что в нашем случае масса полупространства $(\xi, x) < p$ задается следующим образом: $M(\xi, p) = 1$, когда $p > 0$, и $M(\xi, p) = 0$, когда $p < 0$. Так как $\frac{\partial M(\xi, p)}{\partial p} = \delta(p)$, то *преобразование Радона обобщенной функции* $\delta(x) = \delta(x_1, \ldots, x_n)$ *есть* $\delta(p)$.

Вычислим преобразование Радона функций, сосредоточенных на прямой. Пусть на оси x_1 распределена конечная масса с плотностью $a(x_1)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |a(x_1)|\, dx_1 < \infty$. Тем самым, плотность распределения массы во всем пространстве задается обобщенной функцией

$$F(x) = a(x_1)\,\delta(x_2, \ldots, x_n).$$

Найдем массу $M(\xi, p)$ полупространства $(\xi, x) < p$. Поскольку гиперплоскость $(\xi, x) = p$ пересекает ось x_1 в точке $x_1 = \frac{p}{\xi_1}$, то имеем, очевидно,

$$M(\xi, p) = \int_{-\infty}^{\frac{p}{\xi_1}} a(x)\, dx, \quad \text{когда } \xi_1 > 0;$$

$$M(\xi, p) = \int_{\frac{p}{\xi_1}}^{\infty} a(x)\, dx, \quad \text{когда } \xi_1 < 0.$$

Отсюда находим, что $\frac{\partial M(\xi, p)}{\partial p} = |\xi_1|^{-1}\, a\left(\frac{p}{\xi_1}\right)$.

Итак, *преобразование Радона функции* $a(x_1)\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$ *при условии, что* $\int_{-\infty}^{\infty} |a(x)|\, dx < \infty$, *есть* $|\xi_1|^{-1}\, a\left(\frac{p}{\xi_1}\right)$.

Это выражение $|\xi_1|^{-1}\, a\left(\frac{p}{\xi_1}\right)$ имеет простой смысл. Именно, $a\left(\frac{p}{\xi_1}\right)$ есть плотность массы в точке пересечения гиперплоскости с осью x_1.

В частности, мы получаем, что преобразование Радона характеристической функции отрезка, лежащего на оси x_1 (то есть функции $a(x_1)\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$, где $a(x_1) = 1$ или 0 в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит точка x_1 заданному отрезку), есть

$$\varphi(\xi, p) = \begin{cases} |\xi_1|^{-1}, & \text{если гиперплоскость } (\xi, x) = p \text{ пересекает отрезок,} \\ 0, & \text{если гиперплоскость } (\xi, x) = p \text{ не пересекает отрезка.} \end{cases}$$

Полученный результат позволяет выразить интеграл функции $f(x)$ по отрезку $[\alpha, \beta]$ оси x_1 через интегралы $\check{f}(\xi, p)$ функции $f(x)$ по гиперплоскостям. Именно, по формуле Планшереля имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x_1)\, f(x_1, 0, \ldots, 0)\, dx_1 =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\Gamma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_1|^{-1}\, a\left(\frac{p}{\xi_1}\right) \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)\, dp \right) \omega(\xi). \qquad (1)$$

Пусть $a(x_1)$ — характеристическая функция отрезка $[\alpha, \beta]$. Примем в качестве поверхности интегрирования Γ пару гиперплоскостей $\xi_1 = \pm 1$. Тогда формула (1) примет следующий вид:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x_1, 0, \ldots, 0)\, dx_1 =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^{n-1}} \int \left(\int_{\alpha}^{\beta} \check{f}_p^{(n-1)}(\xi, p)\, dp \right) d\xi_2 \ldots d\xi_n,$$

где $\xi = (1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

3. Преобразование Радона обобщенной функции $(x_1)_+^{\lambda}\, \delta(x_2, \ldots, x_n)$. Мы рассмотрели в предыдущем пункте функцию вида $a(x_1)\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$, где $\int_{-\infty}^{\infty} |a(x_1)|\, dx_1 < \infty$, и установили, что преобразование Радона этой функции есть $|\xi_1|^{-1}\, a\left(\frac{p}{\xi_1}\right)$.

4 Зак. 2905. И. М. Гельфанд и др., вып. 5

Теперь найдем преобразование Радона обобщенной функции $(x_1)_+^\lambda \delta(x_2, \ldots, x_n)$ (определенной при $\lambda \neq -1, -2, \ldots$), сосредоточенной на луче *).

Интеграл $\int\limits_0^\infty x^\lambda\, dx$ не сходится в обычном смысле ни при каком значении λ, и предыдущий результат здесь уже неприменим. Для вычисления преобразования Радона функции $(x_1)_+^\lambda \delta(x_2, \ldots, x_n)$ будет применен очень простой прием, которым мы неоднократно будем пользоваться. Этот прием мы назовем методом разбиения для обобщенных функций. Он полезен в разных вопросах теории обобщенных функций.

Именно, представим обобщенную функцию $(x_1)_+^\lambda$ в виде суммы двух слагаемых

$$(x_1)_+^\lambda = (x_1)_+^\lambda\, \theta(1 - x_1) + (x_1)_+^\lambda\, \theta(x_1 - 1)\ ^{**)},$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1)_+^\lambda\, \theta(1 - x_1)\, dx_1 \equiv \int\limits_0^1 x_1^\lambda\, dx_1$$

*) Напомним, что обобщенная функция t_+^λ на прямой $-\infty < t < \infty$ определяется следующей формулой:

$$(t_+^\lambda, f) = \int\limits_0^\infty t^\lambda f(t)\, dt,$$

где интеграл сходится при $\operatorname{Re}\lambda > -1$, а при $\operatorname{Re}\lambda < -1$ его нужно понимать в смысле аналитического продолжения по λ. Эта обобщенная функция, рассматриваемая как функция от λ, является аналитической функцией от λ всюду, кроме точек $\lambda = -1, -2, \ldots$, в которых она имеет простые полюсы (см. вып. 1, стр. 68).

**) Такое разложение применялось в вып. 1, стр. 96. Оно давало там возможность вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty x^\lambda\, dx$.

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1)_+^\lambda\, \theta(x_1 - 1)\, dx_1 \equiv \int\limits_1^\infty x_1^\lambda\, dx_1$$

сходятся каждый в определенной области значений λ: первый — при $\operatorname{Re}\lambda > -1$, а второй — при $\operatorname{Re}\lambda < -1$. Поэтому преобразование Радона каждой из функций $(x_1)_+^\lambda\, \theta(1 - x_1) \times \delta(x_2, \ldots, x_n)$ и $(x_1)_+^\lambda\, \theta(x_1 - 1)\, \delta(x_2, \ldots, x_n)$ может быть вычислено по формуле, полученной ранее. Само по себе это нам на первый взгляд бесполезно, так как каждый из интегралов сходится при различных значениях λ. Однако, аналитически продолжив каждый из интегралов, мы получим нужный ответ. А именно, преобразование Радона обобщенной функции $(x_1)_+^\lambda\, \theta(1 - x_1)\, \delta(x_2, \ldots, x_n)$ есть

$$|\xi_1|^{-1} \left(\frac{p}{\xi_1}\right)_+^\lambda \theta\left(1 - \frac{p}{\xi_1}\right) \equiv \left[p_+^\lambda (\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_-^\lambda (\xi_1)_-^{-1-\lambda}\right] \theta\left(1 - \frac{p}{\xi_1}\right);$$

преобразование Радона обобщенной функции $(x_1)_+^\lambda\, \theta(x_1 - 1) \times \delta(x_2, \ldots, x_n)$ есть

$$|\xi_1|^{-1} \left(\frac{p}{\xi_1}\right)_+^\lambda \theta\left(\frac{p}{\xi_1} - 1\right) \equiv \left[p_+^\lambda (\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_-^\lambda (\xi_1)_-^{-1-\lambda}\right] \theta\left(\frac{p}{\xi_1} - 1\right).$$

Эти формулы для преобразования Радона сохраняют смысл для любых нецелых значений λ. Теперь сложим полученные выражения. Мы получим, что *преобразование Радона обобщенной функции* $(x_1)_+^\lambda \delta(x_2, \ldots, x_n)$, *где* λ — *нецелое число, есть*

$$|\xi_1|^{-1} \left(\frac{p}{\xi_1}\right)_+^\lambda \equiv p_+^\lambda (\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_-^\lambda (\xi_1)_-^{-1-\lambda}. \qquad (1)$$

3а. Преобразование Радона обобщенной функции $(x_1)_+^k \delta(x_2, \ldots, x_n)$, где $k = 0, 1, \ldots$ Выражение (1) п. 3 определяет преобразование Радона функции $(x_1)_+^\lambda \delta(x_2, \ldots, x_n)$ только для нецелых значений λ. Предельный переход к целым значениям λ связан с одним поучительным замечанием, которое мы сейчас приведем. При $\lambda = 0, 1, \ldots$ обобщенная функция $p_+^\lambda (\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_-^\lambda (\xi_1)_-^{-1-\lambda}$ имеет полюс, так как эти значения λ являются полюсами обобщенных функций $(\xi_1)_+^{-1-\lambda}$ и $(\xi_1)_-^{-1-\lambda}$. На первый взгляд этот факт может показаться противоречивым, поскольку исходная функция $(x_1)_+^\lambda \delta(x_2, \ldots, x_n)$ не имеет особенности при $\lambda = 0, 1, \ldots$ Однако никакого противоречия здесь нет. В самом деле, вспомним, что преобразование Радона обобщенной функции определено неоднозначно с точностью до несущественной функции. Обобщенная функция $p_+^\lambda (\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_-^\lambda (\xi_1)_-^{-1-\lambda}$ хотя и имеет полюс при $\lambda = k$ ($k = 0, 1, \ldots$), но главный член ее лорановского разложения в окрестности точки $\lambda = k$ есть несущественная функция, которую можно отбросить.

Вычислим теперь преобразование Радона обобщенной функции $(x_1)_+^k \delta(x_2, \ldots, x_n)$, где $k = 0, 1, \ldots$ Для этого разложим обобщенную функцию $p_+^\lambda (\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_-^\lambda (\xi_1)_-^{-1-\lambda}$ в ряд Лорана по степеням $\lambda - k$ в окрестности точки $\lambda = k$. Обобщенные функции p_+^λ, p_-^λ, $(\xi_1)_+^{-1-\lambda}$ и $(\xi_1)_-^{-1-\lambda}$ разлагаются следующим образом в ряды по степеням $\lambda - k$ в окрестности точки $\lambda = k$:

$$p_+^\lambda = p_+^k + (\lambda - k)\, p_+^k \ln|p| + \ldots$$
$$p_-^\lambda = p_-^k + (\lambda - k)\, p_-^k \ln|p| + \ldots$$

$$(\xi_1)_+^{-1-\lambda} = -(-1)^k \frac{\delta^{(k)}(\xi_1)}{k!} \frac{1}{\lambda - k} + (\xi_1)_+^{-1-k} + \ldots \quad (1)$$
$$(\xi_1)_-^{-1-\lambda} = -\frac{\delta^{(k)}(\xi_1)}{k!} \frac{1}{\lambda - k} + (\xi_1)_-^{-1-k} + \ldots,$$

где $(\xi_1)_+^{-1-k}$, $(\xi_1)_-^{-1-k}$ — присоединенные однородные функции *). Отсюда получаем

$$p_+^\lambda (\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_-^\lambda (\xi_1)_-^{-1-\lambda} = -\frac{(-1)^k}{k!} p^k \delta^{(k)}(\xi_1) \frac{1}{\lambda + k} +$$
$$+ p_+^k (\xi_1)_+^{-1-k} + p_-^k (\xi_1)_-^{-1-k} - \frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)}(\xi_1)\, p^k \ln|p| + \ldots \quad (2)$$

*) Разложение обобщенных функций $(\xi_1)_+^{-1-\lambda}$, $(\xi_1)_-^{-1-\lambda}$ в ряды Лорана в окрестности особой точки и определение присоединенных однородных функций см. в вып. 1, стр. 422—424.

Многоточием обозначены члены с положительными степенями $\lambda - k$.

Отбросим в этом разложении первое слагаемое как несущественную функцию *) и перейдем к пределу при $\lambda \to k$. Мы получим, что преобразование Радона обобщенной функции $(x_1)_+^k \delta(x_2, \ldots, x_n)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ есть

$$p_+^k (\xi_1)_+^{-1-k} + p_-^k (\xi_1)_-^{-1-k} - \frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)}(\xi_1)\, p^k \ln|p|, \quad (3)$$

где $(\xi_1)_+^{-1-k}$, $(\xi_1)_-^{-1-k}$ — присоединенные однородные функции.

Итак, установлено, что *преобразование Радона обобщенной функции* $(x_1)_+^\lambda \delta(x_2, \ldots, x_n)$ $(\lambda \neq -1, -2, \ldots)$, *сосредоточенной на луче* $x_1 > 0$, $x_2 = \ldots = x_n = 0$, *есть*

$$p_+^\lambda (\xi_1)_+^{-1-\lambda} + p_-^\lambda (\xi_1)_-^{-1-\lambda}, \textit{ когда } \lambda \neq 0, 1, \ldots, \quad (4)$$

и

$$p_+^k (\xi_1)_+^{-1-k} + p_-^k (\xi_1)_-^{-1-k} - \frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)}(\xi_1)\, p^k \ln|p|, \quad (4')$$

когда $\lambda = k$, $k = 0, 1, \ldots$

В частности, мы получаем, что преобразование Радона характеристической функции луча

$$\theta(x_1)\, \delta(x_2, \ldots, x_n)$$
$$(\theta(x_1) = 1 \text{ при } x_1 > 0 \text{ и } \theta(x_1) = 0 \text{ при } x_1 < 0)$$

*) Утверждение, что $p^k \delta^{(k)}(\xi_1)$ несущественна, то есть, что функционал, отвечающий этой функции, равен нулю, легко проверить непосредственно. В самом деле, имеем по определению

$$(p^k \delta^{(k)}(\xi_1), \psi) = \frac{(-1)^{n-1}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_\Gamma \delta^{(k)}(\xi_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, p)\, p^k\, dp \right) \omega(\xi).$$

В силу дополнительных соотношений, которым удовлетворяют основные функции $\psi(\xi, p)$, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, p)\, p^k\, dp$ есть многочлен от ξ степени $k - n + 1$. Отсюда непосредственно следует, что $(p^k \delta^{(k)}(\xi_1), \psi) = 0$.

есть

$$\theta(p)(\xi_1)_+^{-1}+\theta(-p)(\xi_1)_-^{-1}-\delta(\xi_1)\ln|p|.$$

Полезно сравнить между собой формулы для преобразования Радона характеристических функций луча и отрезка. На множестве гиперплоскостей, не параллельных лучу, преобразование Радона для луча имеет тот же вид, что и для отрезка. Именно,

$$\varphi(\xi, p)=\begin{cases} |\xi_1|^{-1}, & \text{если гиперплоскость } (\xi, x)=p \text{ пересекает луч (соответственно отрезок);}\\ 0, & \text{если гиперплоскость } (\xi, x)=p \text{ не пересекает луча (соответственно отрезка).}\end{cases}$$

Мы видим также, что в формулу для преобразования Радона характеристической функции луча входит еще дополнительное слагаемое $-\delta(\xi_1)\ln|p|$, сосредоточенное на множестве гиперплоскостей, параллельных лучу.

Полученные формулы легко переносятся на случай любого луча, выходящего из точки 0. Введем обобщенную функцию $a_{x_0}(x;\lambda)$, сосредоточенную на луче с направляющим вектором x_0, задав ее следующей формулой

$$(a_{x_0}(x;\lambda), f(x))=\int_0^\infty t^\lambda f(tx_0)\,dt. \tag{5}$$

(Этот интеграл сходится при $\operatorname{Re}\lambda>-1$, а при $\operatorname{Re}\lambda<-1$ его нужно понимать в смысле аналитического продолжения по λ.) При $x_0=(1, 0, \ldots, 0)$ обобщенная функция $a_{x_0}(x;\lambda)$ совпадает с рассмотренной уже функцией $(x_1)_+^\lambda\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$. Нетрудно убедиться, что преобразование Радона функции $a_{x_0}(x;\lambda)$ получается из преобразования Радона функции $(x_1)_+^\lambda\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$ заменой ξ_1 на скалярное произведение (ξ, x_0). Итак, преобразование Радона обобщенной функции $a_{x_0}(x;\lambda)$, определенной формулой (5), есть

$$p_+^\lambda(\xi, x_0)_+^{-1-\lambda}+p_-^\lambda(\xi, x_0)_-^{-1-\lambda}, \text{ когда } \lambda\neq 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

и

$$p_+^k(\xi, x_0)_+^{-1-k}+p_-^k(\xi, x_0)_-^{-1-k}-\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}[(\xi, x_0)]\,p^k\ln|p|, \tag{6'}$$

когда $\lambda=k$ $(k=0, 1, \ldots)$.

В заключение приведем формулы для преобразования Радона обобщенных функций

$$|x_1|^\lambda\delta(x_2, \ldots, x_n)\equiv(x_1)_+^\lambda\,\delta(x_2, \ldots, x_n)+(x_1)_-^\lambda\,\delta(x_2, \ldots, x_n)$$

и

$$|x_1|^\lambda\operatorname{sign}x_1\delta(x_2, \ldots, x_n)=(x_1)_+^\lambda\,\delta(x_2, \ldots, x_n)-(x_1)_-^\lambda\,\delta(x_2, \ldots, x_n),$$

сосредоточенных на всей оси x_1.

Преобразование Радона функции $|x_1|^\lambda\delta(x_2, \ldots, x_n)$ *есть*

$$|p|^\lambda|\xi_1|^{-1-\lambda}, \text{ когда } \lambda\neq 2k \quad (k=0, 1, \ldots), \tag{7}$$

и

$$p^{2k}|\xi_1|^{-1-2k}-\frac{2}{(2k)!}\delta^{(2k)}(\xi_1)\,p^{2k}\ln|p|, \tag{7'}$$

когда $\lambda=2k$ $(k=0, 1, \ldots)$ ($|\xi_1|^{-1-2k}$ — присоединенная однородная функция).

Отметим, что функция $p^{2k}|\xi_1|^{-1-2k}$ при $2k<n-1$ является несущественной, а потому первое слагаемое в формуле (7′) в случае, когда $2k<n-1$, может быть отброшено.

Преобразование Радона обобщенной функции

$$|x_1|^\lambda\operatorname{sign}x_1\delta(x_2, \ldots, x_n)$$

есть

$$|p|^\lambda\operatorname{sign}p\,|\xi_1|^{-1-\lambda}\operatorname{sign}\xi_1, \text{ когда } \lambda\neq 2k-1 \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{8}$$

и

$$p^{2k-1}\xi_1^{-2k}\operatorname{sign}\xi_1+\frac{2}{(2k-1)!}\delta^{(2k-1)}(\xi_1)\,p^{2k-1}\ln|p|, \tag{8'}$$

когда $\lambda=2k-1$ $(k=1, 2, \ldots)$ ($\xi_1^{-2k}\operatorname{sign}\xi_1$ — присоединенная однородная функция). При $2k<n$ первое слагаемое в формуле (8′) можно отбросить как несущественную функцию.

В частности, получаем, что преобразование Радона функции $\delta(x_2, \ldots, x_n)$ есть $-2\delta(\xi_1)\ln|p|$.

Преобразование Радона функции $\delta(x_2, \ldots, x_n)$, а тем самым и выражение для интеграла от произвольной функции $f(x)$, взятого по оси x_1, через интегралы функции $f(x)$ по гиперплоскостям можно также получить непосредственно путем «спуска». Этот прием состоит в следующем.

Рассмотрим все прямые, параллельные оси x_1, и проинтегрируем функцию $f(x)$ по этим прямым. Мы получим функцию $f_1(x)$ в $(n-1)$-мерном пространстве R_{n-1}. Интегралы исходной функции $f(x)$ по гиперплоскостям в R_n, параллельным оси x_1, совпадают с интегралами функции $f_1(x)$ по всевозможным гиперплоскостям в пространстве R_{n-1}. Тем самым задача о вычислении интеграла функции по оси x_1 в пространстве R_n сводится к следующей задаче. Определить значение функции $f_1(x)$ в точке пространства R_{n-1}, зная ее интегралы по всевозможным гиперплоскостям. Решение этой задачи дается формулой обращения (§ 1).

Тот же прием, примененный несколько раз, позволяет также получить формулы, выражающие интеграл функции по k-мерной плоскости через интегралы функции по гиперплоскостям. Их вывод мы предоставляем читателю.

4. Выражение интеграла функции по заданной области через интегралы по гиперплоскостям. Рассмотрим следующую задачу. Пусть заданы интегралы $\varphi(\xi, p)$ функции $f(x)$ по всевозможным гиперплоскостям. Спрашивается, как вычислить интеграл функции $f(x)$ по заданной области V.

Для решения задачи введем характеристическую функцию $\chi(x)$ области V. С помощью этой функции $\chi(x)$ интеграл по области V можно записать как интеграл по всему пространству

$$\int_V f(x)\,dx = \int \chi(x) f(x)\,dx.$$

Пусть $S(\xi, p)$ — преобразование Радона функций $\chi(x)$. Тогда, в силу определения преобразования Радона обобщенной функции, имеем

$$\int \chi(x) f(x)\,dx = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_\Gamma \left(\int_{-\infty}^{\infty} S(\xi, p)\,\varphi_p^{(n-1)}(\xi, p)\,dp \right) \omega(\xi). \tag{1}$$

Формула (1) дает решение поставленной задачи.

Итак, *чтобы выразить интеграл от функции $f(x)$ по области V через интегралы по гиперплоскостям, достаточно вычислить преобразование Радона $S(\xi, p)$ характеристической функции области V.*

Преобразование Радона $S(\xi, p)$ характеристической функции области V имеет простой геометрический смысл, когда эта область ограничена. Именно, если пространство евклидово, а $(\xi, x) = p$ — нормальное уравнение гиперплоскости (то есть $|\xi| = 1$), то $S(\xi, p)$ есть площадь сечения тела V гиперплоскостью $(\xi, x) = p$. В аффинном пространстве понятия площади сечения уже не существует. Зато в этом пространстве определено понятие объема. Функция $S(\xi, p)$ имеет для случая аффинного пространства следующее геометрическое истолкование: $S(\xi, p)\,dp$ есть *объем* части тела V, заключенной между гиперплоскостями $(\xi, x) = p$ и $(\xi, x) = p + dp$ *). Ради простоты мы и в случае аффинного пространства будем условно называть $S(\xi, p)$ площадью сечения ограниченного тела V.

Итак, интеграл функции $f(x)$ по ограниченной области V выражается следующим образом через интегралы $\varphi(\xi, p)$ функции $f(x)$ по гиперплоскостям $(\xi, x) = p$:

$$\int_V f(x)\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_\Gamma \left(\int_{-\infty}^{\infty} S(\xi, p)\,\varphi_p^{(n-1)}(\xi, p)\,dp \right) \omega(\xi),$$

где $S(\xi, p)$ — площадь сечения области V гиперплоскостью $(\xi, x) = p$.

Поскольку в случае неограниченной области V формула для интеграла по области V та же самая, то естественно в этом случае истолковать входящую в формулу функцию $S(\xi, p)$ как обобщенную площадь сечения неограниченной области V гиперплоскостью $(\xi, x) = p$.

Тем самым, можно говорить также о площади сечения неограниченной области.

Ясно, что определенная так площадь сечения неограниченной области V обладает свойством аддитивности. Именно, *пусть область V разбита на области V_i (которые в качестве общих точек могут иметь только точки границы). Тогда площадь сечения $S(\xi, p)$ области V гиперплоскостью $(\xi, x) = p$ есть, с точностью до несущественного слагаемого, сумма площадей сечений $S_i(\xi, p)$ областей V_i.*

*) Иными словами, $S(\xi, p) = \dfrac{\partial V(\xi, p)}{\partial p}$, где $V(\xi, p)$ — объем той части тела V, которая лежит в полупространстве $(\xi, x) < p$.

Задача состоит в том, чтобы вычислить обобщенные площади сечений неограниченной области. Эта задача может быть решена следующим геометрическим методом. Будем рассматривать неограниченную область V как предел последовательности ограниченных областей $V_h\left(\lim\limits_{h\to\infty} V_h = V\right)$. Площади сечений $S_h(\xi, p)$ ограниченной области V_h можно вычислить из геометрических соображений. При $h\to\infty$ функция $S_h(\xi, p)$ стремится как функционал к преобразованию Радона $S(\xi, p)$ характеристической функции области V. Покажем, как осуществить предельный переход.

Предположим, что при $h\to\infty$ функция $S_h(\xi, p)$ разлагается по h в асимптотический ряд следующего вида:

$$S_h(\xi, p) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i(h) f_i(\xi, p), \tag{2}$$

где $\lim\limits_{h\to\infty} \frac{a_i(h)}{a_{i+1}(h)} = \infty$ и одна из функций $a_i(h)$ равна единице*). Пусть, скажем, $a_k(h) = 1$. Тогда $\lim\limits_{h\to\infty} a_i(h) = \infty$ при $i < k$ и $\lim\limits_{h\to\infty} a_i(h) = 0$ при $i > k$.

Мы знаем, что функция $S_h(\xi, p)$, рассматриваемая как функционал, стремится при $h\to\infty$ к преобразованию Радона характеристической функции всей области V. Значит, все стремящиеся к бесконечности члены ряда (2) являются несущественными, то есть как функционалы они равны нулю. Таким образом, из асимптотической формулы (2) получаем, что преобразование Радона характеристической функции области V есть

$$S(\xi, p) = f_k(\xi, p).$$

Заметим, что функция $S(\xi, p)$ определяется этим процессом неоднозначно. Именно, она зависит, вообще говоря, от выбора последовательности ограниченных областей, дающих в пределе при $h\to\infty$ исходную область V. Однако все полученные так функции $S(\xi, p)$ совпадают как функционалы, то есть отличаются лишь на несущественную функцию от ξ и p. В силу этой неоднозначности не существует понятия площади отдельного бесконечного сечения неограниченного тела. О площади можно говорить только как о функции от секущей плоскости.

*) Собственно говоря, выяснение того, когда такое асимптотическое разложение возможно, представляет самостоятельный интерес. Мы не будем здесь этого касаться.

Выясним, как сосчитать «площади» $S(\xi, p)$ плоских сечений верхней полы двуполостного гиперболоида*)

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} > 1, \quad x_1 > 0, \tag{3}$$

в трехмерном пространстве.

Плоские сечения гиперболоида — это эллипсы, площади которых вычисляются непосредственно, гиперболы и, наконец, параболы (предельный случай). Задача состоит в том, чтобы вычислить площади гипербол.

Для решения задачи отсечем от гиперболоида плоскостью $x_1 = h$ ограниченное тело и вычислим площади сечений $S_h(\xi, p)$ этого ограниченного тела. Разложив функцию $S_h(\xi, p)$ в асимптотический ряд по h при $h\to\infty$, мы получим, как об этом было сказано выше, площади сечений $S(\xi, p)$ гиперболоида.

К сожалению, этот геометрический вывод связан с хотя и простыми по существу, но громоздкими выкладками. Мы их опустим и приведем только окончательный ответ.

Чтобы записать ответ, напомним, как пишется аффинный инвариант кривой второго порядка. Пусть дана кривая второго порядка

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \tag{4}$$

Известно, что определители

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(где $a_{ij} = a_{ji}$ при всех i, j) сохраняются при аффинных преобразованиях (то есть при параллельных сдвигах и при центроаффинных преобразованиях с определителем 1). Однако δ

*) Говоря в дальнейшем о гиперболоидах и конусах, мы обычно имеем в виду не поверхности, а тела; говоря об эллипсах и гиперболах, мы подразумеваем не сами кривые, а области, ограниченные ими.

и Δ не являются инвариантами кривой, так как при замене коэффициентов a_{ij} на λa_{ij} ($\lambda \neq 0$) кривая сохранится, а определители δ и Δ умножатся соответственно на λ^2 и λ^3. Очевидно, что аффинным инвариантом кривой будет отношение $\frac{\Delta}{|\delta|^{3/2}}$.

Пусть сечение гиперболоида (3) плоскостью $(\xi, x) = p$ есть гипербола. Выберем на плоскости какую-либо систему координат, например x_1 и x_2. Тогда коэффициенты a_{ij} уравнения (4) гиперболы будут функциями от ξ, p, а значит, функциями от ξ, p будут также δ и Δ. Оказывается, что *площадь гиперболы, получающейся в сечении гиперболоида* (3) *плоскостью* $(\xi, x) = p$ *выражается следующей формулой*:

$$S(\xi, p) = \frac{1}{2}\left| \xi_3^{-1} \frac{\Delta}{\delta^{3/2}} \right| \cdot \ln \left| \xi_3^{-1} \frac{\Delta}{\delta^{3/2}} \right|. \tag{5}$$

Поясним, откуда возникает множитель ξ_3^{-1}. Он возникает из-за того, что элемент площади ω на плоскости $(\xi, x) = p$ определяется по формуле $d(\xi, x)\,\omega = dx_1\,dx_2\,dx_3$, и значит, если на плоскости выбраны координаты x_1, x_2, то $\omega = \xi_3^{-1}\,dx_1\,dx_2$. Заметим, что если на плоскости $(\xi, x) = p$ выбрать другие координаты $y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3$ и $y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3$, то мы получим

$$\omega = a(\xi)\,dy_1\,dy_2 \equiv \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}^{-1} dy_1\,dy_2,$$

и формула (5) перепишется в следующем виде:

$$S(\xi, p) = \frac{1}{2}\left| a(\xi) \frac{\Delta}{\delta^{3/2}} \right| \cdot \ln \left| a(\xi) \frac{\Delta}{\delta^{3/2}} \right|.$$

Полезно сравнить формулу (5) для площади гиперболы с формулой для площади эллипса

$$S(\xi, p) = \pi \left| \xi_3^{-1} \frac{\Delta}{\delta^{3/2}} \right|.$$

Объясним, чем интересна приведенная здесь формула для площади гиперболы. Одни и те же гиперболы могут встретиться при сечении разных гиперболоидов. Площадь гиперболы есть при этом всегда функция от ξ, p. Замечательно, что *площадь гиперболы может быть выражена непосредственно через коэффициенты ее уравнения, и это выражение, даваемое формулой* (5), *не зависит от гиперболоида*. Этим выражение для площади гиперболы похоже на выражение для площади ограниченной фигуры (например, эллипса), что и дает нам право говорить о площади гиперболы.

Подробное обсуждение преобразования Радона характеристической функции одной полы гиперболоида будет проведено в п. 6; там мы дадим окончательную формулу для этого преобразования.

5. Преобразование Радона характеристической функции одной полы конуса. В этом пункте мы найдем преобразование Радона характеристической функции верхней полы конуса

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} > 0, \quad x_1 > 0.$$

Будет показано, что это преобразование Радона имеет следующий вид:

$$\varphi(\xi, p) = \pi a_1 a_2 a_3 \left[p_+^2 \theta(\xi_1) + p_-^2 \theta(-\xi_1) \right] Q_+^{-3/2} + \\ + a_1 a_2 a_3 \ln|p|\, Q_-^{-3/2}, \tag{1}$$

где

$$Q = Q(\xi) \equiv a_1^2\xi_1^2 - a_2^2\xi_2^2 - a_3^2\xi_3^2.$$

В этой записи использованы обозначения, принятые в вып. 1 «Обобщенных функций»:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда } t > 0, \\ 0, & \text{когда } t < 0; \end{cases}$$

$$Q_+^\lambda = \begin{cases} Q^\lambda, & \text{когда } Q > 0, \\ 0, & \text{когда } Q < 0, \end{cases}$$

и так далее.

Разберем геометрический смысл формулы (1). Наличие двух слагаемых в квадратной скобке связано с неоднозначностью записи уравнения плоскости, а именно с тем, что уравнения $(\xi, x) = p$ и $(-\xi, x) = -p$ задают одну и ту же плоскость. Поэтому достаточно рассмотреть только первое слагаемое. Это слагаемое

$$\pi a_1 a_2 a_3 p_+^2 \theta(\xi_1)\left(a_1^2\xi_1^2 - a_2^2\xi_2^2 - a_3^2\xi_3^2\right)_+^{-\frac{3}{2}}$$

есть площадь эллипса, поскольку, когда $p > 0$, $\xi_1 > 0$ и $a_1^2\xi_1^2 - a_2^2\xi_2^2 - a_3^2\xi_3^2 > 0$, плоскость $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = p$ пересекает конус по эллипсу. Слагаемое же

$$a_1 a_2 a_3 p^2 \ln|p|\left(a_1^2\xi_1^2 - a_2^2\xi_2^2 - a_3^2\xi_3^2\right)_-^{-\frac{3}{2}}$$

есть площадь гиперболы, поскольку, когда

$$a_1^2\xi_1^2 - a_2^2\xi_2^2 - a_3^2\xi_3^2 < 0,$$

плоскость $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = p$ пересекает конус по гиперболе.

Формулу (1) можно было бы получить методом предельного перехода, о котором говорилось в предыдущем пункте. Однако здесь мы дадим другой вывод. Он основан на том, что сперва ищется преобразование Радона обобщенной функции

$$\theta(x_1)\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2}\right)_+^{\lambda},$$

где λ — комплексное число, а затем делается предельный переход при $\lambda \to 0$.

Для простоты будем дальше рассматривать круговой конус

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0, \quad x_1 > 0;$$

переход к общему случаю делается путем аффинного преобразования пространства. Имеет место следующий результат.

Преобразование Радона обобщенной функции

$$\theta(x_1) P_+^{\lambda}(x) \equiv \theta(x_1)(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)_+^{\lambda}$$

есть

$$\varphi(\xi, p) = \frac{\pi}{\lambda+1}\left[p_+^{2+2\lambda}\theta(\xi_1) + p_-^{2+2\lambda}\theta(-\xi_1)\right] Q_+^{-\lambda-\frac{3}{2}}(\xi) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\pi}{(\lambda+1)\sin\pi\lambda}|p|^{2+2\lambda} Q_-^{-\lambda-\frac{3}{2}}(\xi), \qquad (2)$$

где $Q(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$. (Нестрогий вывод формулы (2) дан в добавлении к этому пункту.)

Отсюда при $\lambda \to 0$ мы получим преобразование Радона характеристической функции конуса.

Заметим, что предельный переход в формуле (2) недопустим, поскольку коэффициент при втором слагаемом обращается в бесконечность при $\lambda = 0$. Однако мы знаем, что функция $\varphi(\xi, p)$, рассматриваемая как обобщенная функция, не имеет особенности при $\lambda = 0$ (поскольку ее не имеет исходная функция $\theta(x_1) P_+^{\lambda}(x)$). Следовательно, вычет функции $\varphi(\xi, p)$ при $\lambda = 0$, равный

$$p^2\left(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\right)_-^{-\frac{3}{2}},$$

есть несущественная функция.

Таким образом, чтобы получить из формулы (2) преобразование Радона функции $\theta(x_1) P_+^0(x)$, нужно разложить функцию $\varphi(\xi, p)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\lambda = 0$, отбросить главный член разложения как несущественную функцию и только после этого перейти к пределу при $\lambda \to 0$. В результате мы получим, что *преобразование Радона характеристической функции конуса*

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0, \quad x_1 > 0,$$

есть

$$\varphi(\xi, p) = \pi\left[p_+^2\theta(\xi_1) + p_-^2\cdot\theta(-\xi_1)\right] Q_+^{-\frac{3}{2}}(\xi) + \\ + p^2\ln|p|\, Q_-^{-\frac{3}{2}}(\xi) - \frac{1}{2}p^2 Q_-^{-\frac{3}{2}}(\xi)\ln Q_-(\xi), \qquad (3)$$

где $Q(\xi) \equiv \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$.

Покажем, что последнее слагаемое в формуле (3) есть несущественная функция и, следовательно, его можно отбросить. Для этого напомним, что функция вида $p^2 a(\xi)$ несущественна, если $\int_\Gamma a(\xi)\,\omega(\xi) = 0$, где интеграл берется по какой-нибудь замкнутой поверхности Γ, охватывающей точку $\xi = 0$. Значит, нам нужно убедиться, что

$$\int_\Gamma Q_-^{-\frac{3}{2}}(\xi)\ln Q_-(\xi)\,\omega(\xi) = 0.$$

Так как

$$Q_-^{-\frac{3}{2}}(\xi)\ln Q_-(\xi)=\left.\frac{\partial Q_-^{\lambda}(\xi)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=-\frac{3}{2}},$$

то достаточно доказать, что

$$\int\limits_{\Gamma} Q_-^{\lambda}(\xi)\,\omega(\xi)\equiv\int\limits_{\Gamma}\left(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2\right)_-^{\lambda}\omega(\xi)=0 \qquad (4)$$

при любом λ. Докажем это. Возьмем в качестве поверхности интегрирования Γ пару плоскостей $\xi_1=\pm 1$. Тогда интеграл (4) примет вид $2\int(1-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{\lambda}\,d\xi_2\,d\xi_3$. Переходя к полярным координатам, мы получим, что

$$2\int(1-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{\lambda}\,d\xi_2\,d\xi_3=4\pi\int\limits_1^{\infty}(r^2-1)^{\lambda}r\,dr=2\pi\int\limits_0^{\infty}t^{\lambda}\,dt=0.$$

(То, что $\int\limits_0^{\infty}t^{\lambda}\,dt=0$, было показано в вып. 1, стр. 96.)

Итак, доказано, что последнее слагаемое в формуле (3) есть несущественная функция. Отбросив его, мы получим как раз формулу (1) при $a_1=a_2=a_3=1$.

В заключение приведем без вывода формулу для преобразования Радона обобщенной функции $\theta(x_1)\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)_+^{\lambda}$ в n-мерном пространстве (n — нечетное число)

$$\left[\theta(x_1)\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)_+^{\lambda}\right]^{\vee}=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)}\left\{\left[p_+^{2\lambda+n-1}\theta(\xi_1)+p_-^{2\lambda+n-1}\theta(-\xi_1)\right]\times\right.$$

$$\times\left(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2\right)_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}-$$

$$\left.-\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2\sin\pi\lambda}|p|^{2\lambda+n-1}\left(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2\right)_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right\}.$$

Читателю рекомендуется найти на основании этой формулы преобразование Радона характеристической функции верхней полы конуса

$$x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2>0,\qquad x_1>0,$$

в нечетномерном пространстве. Впрочем, не представляет особого труда рассмотреть и четномерный случай.

Добавление к п. 5. Хотя вычислению преобразования Радона λ-х степеней будет посвящен весь § 3, быть может, полезно привести здесь нестрогий, но удобный способ вычисления преобразования Радона функции $\theta(x_1)P_+^{\lambda}(x)\equiv\equiv\theta(x_1)\left(x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)_+^{\lambda}$. Мы покажем сейчас, что с точностью до коэффициентов преобразование Радона функции $\theta(x_1)P_+^{\lambda}(x)$ можно получить на основании общих рассуждений.

Используем сначала однородность функции $\theta(x_1)P_+^{\lambda}(x)$. Из того, что эта функция однородна степени однородности 2λ, следует, что ее преобразование Радона $\varphi(\xi, p)$ есть однородная функция относительно ξ степени однородности $-2\lambda-3$. Поскольку, кроме того, $\varphi(\xi, p)$ — однородная функция от ξ, p степени однородности -1, то она однородна относительно p степени однородности $2\lambda+2$. Как известно, всякая однородная обобщенная функция одного переменного p степени однородности $2\lambda+2$ есть линейная комбинация обобщенных функций $p_+^{2\lambda+2}$ и $p_-^{2\lambda+2}$.

Таким образом, преобразование Радона обобщенной функции $\theta(x_1)P_+^{\lambda}(x)$ имеет следующий вид:

$$\varphi(\xi, p)=p_+^{2\lambda+2}\varphi_+(\xi)+p_-^{2\lambda+2}\varphi_-(\xi),$$

где $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\xi)$ — однородные функции от ξ степени однородности $-2\lambda-3$. Так как $\varphi(\xi, p)$ — четная функция от ξ, p, то имеем $\varphi_-(\xi)=\varphi_+(-\xi)$.

Теперь используем тот факт, что функция $\theta(x_1)P_+^{\lambda}(x)$ сохраняется при «гиперболических поворотах», то есть при линейных преобразованиях, не меняющих форму $x_1^2-x_2^2-x_3^2$ и оставляющих на месте каждую полу конуса $x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$. Отсюда следует, что функции $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\xi)$ сохраняются при гиперболических поворотах в пространстве ξ.

На основании этого свойства установим, какой вид имеют обобщенные функции $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\xi)$. Будем опираться на следующий результат, который приведем без доказательства.

Любая однородная обобщенная функция от ξ степени однородности λ ($\lambda\neq-1, -2, \ldots$), инвариантная относительно гиперболических поворотов, есть линейная комбинация трех следующих функций:

$$\theta(\xi_1)(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{\frac{\lambda}{2}}, \quad \theta(-\xi_1)(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{\frac{\lambda}{2}}$$

и

$$(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{\frac{\lambda}{2}}.$$

(Первые две из этих функций сосредоточены соответственно в верхней и нижней полах конуса $\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2=0$, а последняя — во внешности конуса.)

На основании этого результата заключаем, что функции $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\xi)$ имеют следующий вид:

$$\varphi_+(\xi)=\varphi_-(-\xi)=a(\lambda)\,\theta(\xi_1)(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{-\lambda-\frac{3}{2}}+$$
$$+b(\lambda)\,\theta(-\xi_1)(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{-\lambda-\frac{3}{2}}+c(\lambda)(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{-\lambda-\frac{3}{2}},$$

где коэффициенты $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ — неизвестные пока аналитические функции от λ.

Итак, получаем, что преобразование Радона обобщенной функции $\theta(x_1)(x_1^2-x_2^2-x_3^2)_+^\lambda$ имеет следующий вид:

$$\varphi(\xi,\ p)=a(\lambda)\left[p_+^{2+2\lambda}\theta(\xi_1)+p_-^{2+2\lambda}\theta(-\xi_1)\right](\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{-\lambda-\frac{3}{2}}+$$
$$+b(\lambda)\left[p_+^{2+2\lambda}\theta(-\xi_1)+p_-^{2+2\lambda}\theta(\xi_1)\right](\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{-\lambda-\frac{3}{2}}+$$
$$+c(\lambda)\,|p|^{2+2\lambda}(\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{-\lambda-\frac{3}{2}}. \tag{5}$$

Остается вычислить коэффициенты $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$.

Заметим прежде всего, что слагаемое с коэффициентом $b(\lambda)$ должно отсутствовать, то есть $b(\lambda)\equiv 0$. Действительно, если $\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2>0$, а p и ξ_1 имеют разные знаки, то плоскость $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=p$ не пересекает конуса. Чтобы вычислить коэффициент $a(\lambda)$, проведем плоскость, пересекающую конус по эллипсу, например плоскость $x_1=1$, то есть положим $\xi=\xi_0\equiv(1,\ 0,\ 0)$, $p=1$. Из формулы (5) получаем, что

$$\varphi(\xi_0,\ 1)=a(\lambda).$$

Вычислим $\varphi(\xi_0,\ 1)$ непосредственно, интегрируя функцию $\theta(x_1)P_+^\lambda(x)$ по плоскости. Мы получим

$$\varphi(\xi_0,\ 1)=\iint\limits_{x_2^2+x_3^2\leqslant 1}(1-x_2^2-x_3^2)^\lambda\,dx_2\,dx_3=\frac{\pi}{\lambda+1}$$

(интеграл сходится, когда $\operatorname{Re}\lambda>-1$). Итак,

$$a(\lambda)=\frac{\pi}{\lambda+1}.$$

Наконец, вычислим коэффициент $c(\lambda)$. Для этого проведем плоскость, пересекающую конус по гиперболе, например плоскость $x_3=1$, то есть положим $\xi=\xi_0=(0,\ 0,\ 1)$, $p=1$. Из формулы (5) получаем, что $\varphi(\xi_0,\ 1)=c(\lambda)$. Вычислим $\varphi(\xi_0,\ 1)$ непосредственно, интегрируя функцию $\theta(x_1)P_+^\lambda(x)$ по плоскости. Мы получим

$$c(\lambda)=\varphi(\xi_0,\ 1)=\iint\limits_{\substack{x_1^2-x_2^2\geqslant 1\\ x_1>0}}(x_1^2-x_2^2-1)^\lambda\,dx_1\,dx_2.$$

Этот интеграл расходится при любых значениях λ. Сосчитаем его методом разбиения. Именно, запишем интеграл в виде бесконечной суммы интегралов по областям $n+1>x_1>n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ и в каждом интеграле сделаем подстановку $x_2=\sqrt{x_1^2-1}\,t$. Тем самым наш интеграл будет представлен в виде суммы интегралов вида

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^\lambda\,dt\int_n^{n+1}(x_1^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}\,dx_1=$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}\int_n^{n+1}(x_1^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}\,dx_1.$$

Каждый из этих интегралов сходится при $\operatorname{Re}\lambda>-1$ и может быть продолжен как аналитическая функция от λ в область $\operatorname{Re}\lambda<-1$. Сложив эти интегралы и вынеся за скобку общий множитель $\dfrac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}$, мы получим, что

$$c(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}\int_1^\infty (x_1^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}\,dx_1.$$

Так как

$$\int_1^\infty (x_1^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}\,dx_1=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(-\lambda-1)\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(этот интеграл сходится в обычном смысле при $-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}\lambda<-1$), то мы получаем окончательно

$$c(\lambda)=\frac{1}{2}\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda-1)=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{(\lambda+1)\sin\pi\lambda}.$$

6. Преобразование Радона характеристической функции одной полы двуполостного гиперболоида. Здесь будет дана формула для преобразования Радона характеристической функции одной полы двуполостного гиперболоида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}>1, \qquad x_1>0. \tag{1}$$

Рассмотрим два сорта сечений гиперболоида (1) — эллипсы и гиперболы. Преобразование Радона характеристической функции гиперболоида должно содержать два слагаемых, из которых одно задает площадь эллипса, а другое — площадь гиперболы *). Наша задача — написать формулы для этих площадей как функций от ξ, p и от параметров a_1, a_2, a_3.

В п. 4 уже говорилось, как эти площади выражаются через коэффициенты в уравнении соответствующих кривых. Именно нужно записать уравнение кривой в какой-либо системе координат, скажем в координатах x_1, x_2, и вычислить определители δ и Δ, составленные из коэффициентов уравнения. Тогда площадь эллипса есть

$$S_{\text{эл}}(\xi,\ p)=\pi\left|\xi_3^{-1}\frac{\Delta}{\delta^{3/2}}\right|, \tag{2}$$

*) Можно показать, что, как и в случае конуса, сечения, имеющие формулу параболы, не дают вклада в преобразование Радона (хотя a priori в особых направлениях возможен вклад в виде δ-функций — см. прямую в п. 3 и октант в п. 8).

а площадь гиперболы

$$S_{\text{гип}}(\xi,\ p)=\frac{1}{2}\left|\xi_3^{-1}\frac{\Delta}{\delta^{3/2}}\right|\cdot\ln\left|\xi_3^{-1}\frac{\Delta}{\delta^{3/2}}\right|. \tag{3}$$

Формула (3) для площади гиперболы может быть получена предельным переходом из преобразования Радона характеристической функции ограниченного тела (об этом мы уже говорили в п. 4). Однако этот вывод громоздок, и мы его опускаем.

Мы хотим выразить определители δ и Δ через коэффициенты уравнения секущей плоскости

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=p. \tag{4}$$

Для этого запишем в координатах x_1, x_2 уравнение линии пересечения плоскости (4) с поверхностью

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1. \tag{5}$$

Исключая x_3 из системы уравнений (4) и (5), получаем следующее уравнение кривой:

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{\xi_1^2}{a_3^2\xi_3^2}\right)x_1^2-2\frac{\xi_1\xi_2}{a_3^2\xi_3^2}x_1x_2-\left(\frac{1}{a_2^2}+\frac{\xi_2^2}{a_3^2\xi_3^2}\right)x_2^2+$$
$$+2\frac{\xi_1p}{a_3^2\xi_3^2}x_1+2\frac{\xi_2p}{a_3^2\xi_3^2}x_2-\frac{p^2}{\xi_3^2}-1=0.$$

Из этого уравнения находим, что

$$\delta=(a_1a_2a_3)^{-2}\xi_3^{-2}Q,$$
$$\Delta=(a_1a_2a_3)^{-2}\xi_3^{-2}(p^2-Q),$$

где

$$Q=Q(\xi)\equiv a_1^2\xi_1^2-a_2^2\xi_2^2-a_3^2\xi_3^2.$$

Таким образом, если сечение есть эллипс, то его площадь выражается формулой

$$S_{\text{эл}}(\xi,\ p)=\pi a_1a_2a_3\,|p^2-Q|\,|Q|^{-\frac{3}{2}}.$$

Если же сечение — гипербола, то его площадь есть

$$S_{\text{гип}}(\xi,\ p)=\frac{1}{2}a_1a_2a_3\,|p^2-Q|\,|Q|^{-\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{p^2-Q}{Q^{3/2}}\right|,$$

где

$$Q=Q(\xi)\equiv a_1^2\xi_1^2-a_2^2\xi_2^2-a_3^2\xi_3^2.$$

Остается выяснить, при каких ξ и p сечение есть эллипс и при каких—гипербола. Легко заметить, что эллипс мы получаем, когда $Q(\xi)>0$ и $p^2>Q(\xi)$; кроме того, коэффициенты p и ξ_1 должны быть одного знака (так как если они разных знаков, то плоскость $(\xi, x)=p$ пересекает не верхнюю, а нижнюю полу гиперболоида). Гипербола же получится, когда $Q(\xi)<0$, а коэффициент p произволен.

Сформулируем окончательный результат. *Преобразование Радона характеристической функции верхней полы двуполостного гиперболоида*

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}>1, \qquad x_1>0,$$

имеет следующий вид:

$$S(\xi, p)=\pi a_1a_2a_3\theta(p\xi_1)(p^2-Q)_+Q_+^{-\frac{3}{2}}+$$
$$+\frac{1}{2}a_1a_2a_3(p^2-Q)Q_-^{-\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{p^2-Q}{Q^{3/2}}\right|, \qquad (6)$$

где

$$Q=Q(\xi)\equiv a_1^2\xi_1^2-a_2^2\xi_2^2-a_3^2\xi_3^2.$$

Отметим, что этот результат можно получить двумя способами. Один способ — предельный переход в формуле для преобразования Радона характеристической функции ограниченного тела. Второй состоит в том, что сперва ищется преобразование Радона функции $\theta(x_1)\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}-1\right)_+^\lambda$, где λ — комплексное число, а затем делается предельный переход при $\lambda\to 0$. (Этот способ был проиллюстрирован в п. 5 на примере конуса.)

Легко убедиться, что функция

$$\left|\xi_3^{-1}\frac{\Delta}{\delta^{3/2}}\right|\ln\left(a_1^2a_2^2a_3^2\xi_3^2\,|\,\delta\,|\right)\equiv a_1a_2a_3(p^2-Q)Q_-^{-\frac{3}{2}}\ln|Q|$$

является несущественной (см. по этому поводу выкладку на стр. 63—64). Поэтому в формуле (6) можно отбросить знаменатель под знаком логарифма.

Заметим, что выражение $\left|\xi_3^{-1}\frac{\Delta}{\delta^{3/2}}\right|\ln\left(a_1^2a_2^2a_3^2\xi_3^2\,|\,\delta\,|\right)$ несущественно для гиперболы, но не для эллипса: в случае эллипса это выражение надо заменить нулем, когда плоскость пересекает гиперболоид по мнимому эллипсу (то есть когда $p^2<Q$), следовательно, оно не есть многочлен от p.

Задача. Используя выражение для площади гиперболы, вычислить преобразование Радона характеристической функции гиперболического параболоида $x_3-x_1x_2>0$.

7. Преобразование Радона однородной функции. Рассмотрим произвольную однородную функцию $P(x)$ степени однородности 1, принимающую неотрицательные значения. Определим однородную обобщенную функцию $P^\lambda(x)$ следующей формулой:

$$(P^\lambda, f)=\int P^\lambda(x)f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Интеграл заведомо сходится, когда $\operatorname{Re}\lambda>0$. При $\operatorname{Re}\lambda<0$ будем понимать его в смысле аналитического продолжения по λ. Поставим задачу найти преобразование Радона функции $P^\lambda(x)$.

Сначала выразим функцию $P^\lambda(x)$ через обобщенную функцию $a_{x'}(x;\lambda)$, сосредоточенную на луче с направляющим вектором x'. Эту функцию мы определили в п. 3 следующим образом:

$$(a_{x'}(x;\lambda), f)=\int_0^\infty f(tx')t^\lambda\,dt. \qquad (2)$$

Перейдем в равенстве (1) к обобщенным полярным координатам *). Мы получим

$$(P^\lambda, f)=\int_\Gamma\left(\int_0^\infty t^{\lambda+n-1}f(tx')\,dt\right)P^\lambda(x')\,\omega(x')=$$
$$=\int_\Gamma(a_{x'}(x;\lambda+n-1), f)P^\lambda(x')\,\omega(x'). \qquad (3)$$

*) См. Добавление, § 2, п. 5.

Здесь интегрирование ведется по произвольной замкнутой поверхности, описанной вокруг точки 0 (например, по сфере);

$$\omega(x')=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x'_k\,dx'_1\ldots dx'_{k-1}\,dx'_{k+1}\ldots dx'_n.$$

Таким образом, функция $P^\lambda(x)$ выражается следующим образом через функцию $a_{x'}(x;\ \lambda)$, сосредоточенную на луче

$$P^\lambda(x)=\int_\Gamma a_{x'}(x;\ \lambda+n-1)\,P^\lambda(x')\,\omega(x'). \qquad (4)$$

Это выражение упростится, если в качестве поверхности интегрирования Γ взять поверхность $P(x)=1$. Мы получим

$$P^\lambda(x)=\int_{P(x')=1} a_{x'}(x;\ \lambda+n-1)\,\omega(x'). \qquad (5)$$

На основании этой формулы легко найти преобразование Радона функции $P^\lambda(x)$. Именно, как мы уже знаем из п. 3, преобразование Радона функции $a_{x'}(x;\ \lambda+n-1)$ есть

$$p_+^{\lambda+n-1}(\xi,\ x')_+^{-\lambda-n}+p_-^{\lambda+n-1}(\xi,\ x')_-^{-\lambda-n}.$$

(Для простоты рассматривается только случай нецелых λ.) Следовательно, в силу формулы (5) мы получаем, что *преобразование Радона обобщенной функции* P^λ *есть*

$$p_+^{\lambda+n-1}\int_{P(x)=1}(\xi,\ x)_+^{-\lambda-n}\,\omega(x)+p_-^{\lambda+n-1}\int_{P(x)=1}(\xi,\ x)_-^{-\lambda-n}\,\omega(x).$$

Если поверхность $P(x)=1$ ограничена, то оба интеграла сходятся при $\operatorname{Re}\lambda<-n$. При $\operatorname{Re}\lambda>-n$ эти интегралы нужно понимать в смысле аналитического продолжения по λ.

8. Преобразование Радона характеристической функции октанта. Приведем еще один интересный пример на вычисление преобразования Радона. Именно, будем искать преобразование Радона характеристической функции октанта

$$x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0.$$

Если плоскость пересекает октант, то в сечении мы получаем либо треугольник, либо «внешний треугольник»*), либо угол. Поэтому в формулу для преобразования Радона характеристической функции октанта войдут слагаемые, выражающие обобщенные площади всех этих фигур. Найдем эти площади.

Пусть сначала плоскость $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=p$ пересекает октант по треугольнику. Это будет в том случае, когда ξ_1, ξ_2, ξ_3 и p имеют один и тот же знак. Вычислим площадь треугольника. Плоскость $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=p$ пересекает координатные оси в точках с координатами $\frac{p}{\xi_1}$, $\frac{p}{\xi_2}$ и $\frac{p}{\xi_3}$. Отсюда получаем, что объем тетраэдра, образованного этой плоскостью и координатными плоскостями, есть $\frac{1}{6}\frac{p^3}{\xi_1\xi_2\xi_3}$. Следовательно, площадь сечения равна $\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{6}\frac{p^3}{\xi_1\xi_2\xi_3}\right)=$ $=\frac{1}{2}\frac{p^2}{\xi_1\xi_2\xi_3}$ **). Итак, в преобразование Радона характеристической функции октанта входят слагаемые

$$\frac{1}{2}p_+^2(\xi_1)_+^{-1}(\xi_2)_+^{-1}(\xi_3)_+^{-1}+\frac{1}{2}p_-^2(\xi_1)_-^{-1}(\xi_2)_-^{-1}(\xi_3)_-^{-1},$$

выражающие площадь треугольника.

Теперь постараемся вычислить обобщенные площади внешних треугольников и углов. Будем вычислять площади сечений не одного октанта, а сразу всех октантов, которые пересекает данная плоскость. Если плоскость не проходит через начало и не параллельна ни одной из координатных осей, то она пересекает семь октантов, причем в сечении мы получаем один треугольник, три внешних треугольника и три угла. Обозначим через s площадь треугольника, через s_1, s_2, s_3 — обобщенные площади углов и через σ_1, σ_2, σ_3 —

*) То есть фигуру, граница которой состоит из двух лучей и из отрезка (см. рис. 2).

**) Если $|\xi|=1$, то это выражение есть обычная площадь треугольника в евклидовом пространстве.

обобщенные площади внешних треугольников (рис. 2). Наша задача в том, чтобы выразить площади σ_i и s_i через площадь треугольника s.

Для решения задачи убедимся сначала, что обобщенная площадь полуплоскости равна нулю. В самом деле, полуплоскость возникает как сечение плоскостью полупространства. Таким образом, обобщенную площадь полуплоскости мы определим, вычислив преобразование Радона характеристической функции полупространства. Чтобы найти это преобразование Радона, нам нужно суметь выразить интеграл от произвольной функции $f(x)$ по полупространству через интегралы по плоскостям. Ясно, что для вычисления интеграла по полупространству достаточно знать интегралы только по плоскостям, параллельным границе полупространства. Тем самым преобразование Радона характеристической функции полупространства сосредоточено на множестве плоскостей фиксированного направления (параллельных границе полупространства). Это означает, что полуплоскостям можно приписать площадь, равную нулю.

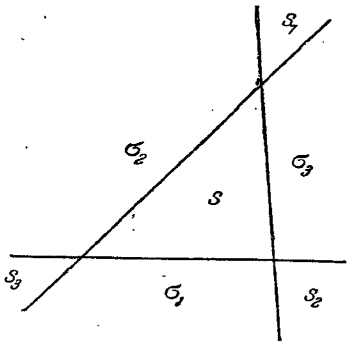

Рис. 2.

Воспользуемся аддитивностью площади сечения и запишем, что площади всех полуплоскостей, изображенных на рис. 2, равны нулю.

Мы получим шесть равенств:

$$\begin{aligned} s_2+s_3+\sigma_1&=0, & \sigma_2+\sigma_3+s_1&=-s,\\ s_3+s_1+\sigma_2&=0, & \sigma_3+\sigma_1+s_2&=-s,\\ s_1+s_2+\sigma_3&=0, & \sigma_1+\sigma_2+s_3&=-s. \end{aligned}$$

Из этих равенств только четыре независимы, и мы получаем из них следующие выражения для площадей σ_i и s_i:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1&=\left(-\frac{2}{3}+\alpha_1\right)s, & \sigma_2&=\left(-\frac{2}{3}+\alpha_2\right)s, & \sigma_3&=\left(-\frac{2}{3}+\alpha_3\right)s,\\ s_1&=\left(\frac{1}{3}+\alpha_1\right)s, & s_2&=\left(\frac{1}{3}+\alpha_2\right)s, & s_3&=\left(\frac{1}{3}+\alpha_3\right)s, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где α_1, α_2, α_3 связаны между собой одним соотношением

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0.$$

Таким образом, остается произвол в определении площадей внешних треугольников и углов. Несколько позже мы убедимся, что точнее обобщенные площади сечений определить невозможно. Именно, при изменении коэффициентов α_1, α_2, α_3 в формуле для преобразования Радона добавляется несущественная функция.

Покажем, что коэффициенты α_1, α_2, α_3 не зависят от выбора секущей плоскости, то есть являются постоянными. В самом деле, пусть $\varphi_1(\xi, p)$—преобразование Радона характеристической функции одного из октантов. Совершим в пространстве растяжение в направлении одной из координатных осей, например в направлении оси x_1:

$$x_1'=\lambda x_1\ (\lambda>0),\quad x_2'=x_2,\quad x_3'=x_3.$$

При этом преобразовании функция $\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3;\ p)$ перейдет в $\lambda^{-1}\varphi_1(\lambda^{-1}\xi_1, \xi_2, \xi_3;\ p)$ (см. формулу (1) на стр. 21). Так как, однако, это преобразование сохраняет октант, то должны сохраняться и обобщенные площади сечений. Таким образом, имеем

$$\lambda^{-1}\varphi_1(\lambda^{-1}\xi_1, \xi_2, \xi_3;\ p)=\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3;\ p).$$

Но тогда из равенств (1) следует, что коэффициенты α_i сохраняются при замене ξ_1 на $\lambda^{-1}\xi_1$. Следовательно, они от ξ_1 не зависят. По тем же соображениям они не зависят и от ξ_2, ξ_3.

Итак, мы сосчитали площади внешних треугольников и углов. Выясним теперь, какой вклад дают в преобразование Радона характеристической функции октанта

$$x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0$$

сечения, имеющие вид внешнего треугольника или угла.

Плоскость $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=p$ пересекает октант по внешнему треугольнику в том случае, когда только один из коэффициентов ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеет знак, противоположный знаку p.

Если же два из коэффициентов ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют знак, противоположный знаку p, то плоскость пересекает октант по углу. Тем самым, на основании формул (1) заключаем, что в преобразование Радона характеристической функции октанта входят слагаемые $\left(\text{мы пишем } \alpha_i \text{ вместо } \frac{\alpha_i}{2}\right)$:

$$p_+^2 \left\{\left(-\frac{1}{3}+\alpha_1\right)(\xi_1)_-^{-1}(\xi_2)_+^{-1}(\xi_3)_+^{-1}\right\} + \\ + p_-^2 \left\{\left(-\frac{1}{3}+\alpha_1\right)(\xi_1)_+^{-1}(\xi_2)_-^{-1}(\xi_3)_-^{-1}\right\},$$

выражающие площади внешних треугольников. Фигурными скобками мы обозначили для краткости сумму трех слагаемых, получающихся циклической перестановкой индексов 1, 2, 3:

$$\{a_1 b_2 c_3\} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2.$$

Аналогично получаем, что в преобразование Радона характеристической функции октанта входят слагаемые

$$p_+^2 \left\{\left(\frac{1}{6}+\alpha_1\right)(\xi_1)_+^{-1}(\xi_2)_-^{-1}(\xi_3)_-^{-1}\right\} + \\ + p_-^2 \left\{\left(\frac{1}{6}+\alpha_1\right)(\xi_1)_-^{-1}(\xi_2)_+^{-1}(\xi_3)_+^{-1}\right\},$$

выражающие площади углов.

Итак, мы нашли вклад, который вносят в преобразование Радона характеристической функции октанта сечения, не параллельные координатным осям. Этот вклад выражается в виде следующей суммы:

$$\varphi_1(\xi, p) = \frac{1}{2}\left[p_+^2 (\xi_1)_+^{-1}(\xi_2)_+^{-1}(\xi_3)_+^{-1} + p_-^2 (\xi_1)_-^{-1}(\xi_2)_-^{-1}(\xi_3)_-^{-1}\right] + \\ + p_+^2 \left\{\left(-\frac{1}{3}+\alpha_1\right)(\xi_1)_-^{-1}(\xi_2)_+^{-1}(\xi_3)_+^{-1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{6}+\alpha_1\right)(\xi_1)_+^{-1}(\xi_2)_-^{-1}(\xi_3)_-^{-1}\right\} + \\ + p_-^2 \left\{\left(-\frac{1}{3}+\alpha_1\right)(\xi_1)_+^{-1}(\xi_2)_-^{-1}(\xi_3)_-^{-1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{6}+\alpha_1\right)(\xi_1)_-^{-1}(\xi_2)_+^{-1}(\xi_3)_+^{-1}\right\}, \quad (2)$$

где α_1, α_2, α_3 связаны соотношением

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

В этой формуле имеется произвол из-за наличия в ней неопределенных коэффициентов α_1, α_2, α_3. Оказывается, что такой произвол неизбежен, поскольку сумма слагаемых, содержащих эти коэффициенты, есть несущественная функция.

В самом деле, эта сумма может быть записана в виде

$$p^2 \left\{\alpha_1 (\xi_1)_-^{-1}(\xi_2)_+^{-1}(\xi_3)_+^{-1} + \alpha_1 (\xi_1)_+^{-1}(\xi_2)_-^{-1}(\xi_3)_-^{-1}\right\}. \quad (3)$$

Нам нужно показать, что вычет однородной функции

$$a(\xi) = \left\{\alpha_1 (\xi_1)_-^{-1}(\xi_2)_+^{-1}(\xi_3)_+^{-1} + \alpha_1 (\xi_1)_+^{-1}(\xi_2)_-^{-1}(\xi_3)_-^{-1}\right\}$$

равен нулю, то есть равен нулю интеграл вида

$$\int_\Gamma a(\xi)\,\omega(\xi),$$

где $\omega(\xi) = \xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 + \xi_2\, d\xi_3\, d\xi_1 + \xi_3\, d\xi_1\, d\xi_2$, а интеграл берется по произвольной поверхности, охватывающей начало. Это и будет означать, что функция (3) является несущественной (см. п. 1).

Итак, покажем, что

$$\int_\Gamma a(\xi)\,\omega(\xi) = 0.$$

Для этого заметим, что интеграл

$$J = \int_\Gamma \left[(\xi_1)_-^{-1}(\xi_2)_+^{-1}(\xi_3)_+^{-1} + (\xi_1)_+^{-1}(\xi_2)_-^{-1}(\xi_3)_-^{-1}\right]\omega(\xi)$$

сохраняется при перестановке индексов. Следовательно, имеем

$$\int_\Gamma a(\xi)\,\omega(\xi) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, J = 0,$$

поскольку $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Проведенное геометрическое рассуждение не позволяет, однако, сосчитать полностью преобразование Радона характеристической функции октанта. Дело в том, что в преобразование Радона входят еще слагаемые, сосредоточенные на множестве плоскостей, параллельных координатным осям. Найти эти слагаемые путем геометрических рассуждений было бы уже труднее.

Итак, мы сумели на самом деле угадать только «главную часть» преобразования Радона характеристической функции октанта.

Можно полностью вычислить преобразование Радона характеристической функции октанта, основываясь на рассмотрении обобщенной функции

$$(x_1)_+^\lambda (x_2)_+^\lambda (x_3)_+^\lambda,$$

где λ — комплексное число. Эта функция при $\lambda = 0$ превращается в характеристическую функцию октанта. Поэтому если мы сумеем вычислить преобразование Радона функции $(x_1)_+^\lambda (x_2)_+^\lambda (x_3)_+^\lambda$, то затем предельным переходом при $\lambda \to 0$ мы найдем преобразование Радона характеристической функции октанта.

Преобразование Радона функции $(x_1)_+^\lambda (x_2)_+^\lambda (x_3)_+^\lambda$ будет найдено в следующем пункте. Здесь же мы приведем без вывода окончательную формулу для преобразования Радона характеристической функции октанта.

Преобразование Радона характеристической функции октанта

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi(\xi, p) = \frac{1}{2} p_+^2 (\xi_1)_+^{-1} (\xi_2)_+^{-1} (\xi_3)_+^{-1} - \frac{1}{3} p_+^2 \{(\xi_1)_-^{-1} (\xi_2)_+^{-1} (\xi_3)_+^{-1}\} + \\ + \frac{1}{6} p_+^2 \{(\xi_1)_+^{-1} (\xi_2)_-^{-1} (\xi_3)_-^{-1}\} + \\ + \frac{\pi^2}{12} p_+^2 \{[-(\xi_1)_+^{-1} + 2(\xi_1)_-^{-1}] \delta(\xi_2) \delta(\xi_3)\} - \\ - \frac{1}{2} p_+^2 \ln p_+ \{\delta(\xi_1) \xi_2^{-1} \xi_3^{-1}\} + \ldots \qquad (4)\end{aligned}$$

В этой формуле выписаны только члены с p_+^2. Члены с p_-^2 получаются, если всюду заменить $(\xi_i)_+$ на $(\xi_i)_-$, а $(\xi_i)_-$ на $(\xi_i)_+$. Через $(\xi_i)_+^{-1}$ и $(\xi_i)_-^{-1}$ здесь обозначены присоединенные однородные обобщенные функции*). Проанализируем формулу (4). В нее входят слагаемые трех различных типов. Прежде всего мы видим в этой формуле слагаемые

$$\frac{1}{2} p_+^2 (\xi_1)_+^{-1} (\xi_2)_+^{-1} (\xi_3)_+^{-1}, \qquad -\frac{1}{3} p_+^2 (\xi_1)_-^{-1} (\xi_2)_+^{-1} (\xi_3)_+^{-1}$$

и т. д.

Мы уже знаем, что эти слагаемые выражают обобщенные площади сечений плоскостями, не параллельными ребрам октанта.

Теперь рассмотрим слагаемые другой группы

$$\frac{\pi^2}{12} p_+^2 [-(\xi_1)_+^{-1} + 2(\xi_1)_-^{-1}] \delta(\xi_2) \delta(\xi_3) + \\ + \frac{\pi^2}{12} p_-^2 [-(\xi_1)_-^{-1} + 2(\xi_1)_+^{-1}] \delta(\xi_2) \delta(\xi_3) \qquad (5)$$

и два других слагаемых, получающихся из (5) циклической перестановкой индексов. Функция (5) сосредоточена на множестве плоскостей вида $\xi_1 x_1 = p$, то есть плоскостей, параллельных одной из граней октанта. Тем самым ее можно рассматривать как вклад, который вносит в преобразование Радона характеристической функции октанта одна из его граней.

Наконец, рассмотрим последнюю группу слагаемых

$$-\frac{1}{2} p_+^2 \ln p_+ \delta(\xi_1) \xi_2^{-1} \xi_3^{-1} - \frac{1}{2} p_-^2 \ln p_- \delta(\xi_1) \xi_2^{-1} \xi_3^{-1} \equiv \\ \equiv -\frac{1}{2} p^2 \ln |p| \delta(\xi_1) \xi_2^{-1} \xi_3^{-1} \qquad (6)$$

и два других слагаемых, получающихся из (6) циклической

*) Напомним, что присоединенная функция t_+^{-1} на прямой определяется следующей формулой (см. вып. 1, стр. 115):

$$(t_+^{-1}, f(t)) = \int_0^1 \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + \int_1^\infty f(t) t^{-1} dt.$$

В том случае, когда основные функции $f(t)$ определены не на всей прямой, а на некотором отрезке $[a, b]$, обобщенная функция t_+^{-1} снова определяется приведенной формулой, где функция $f(t)$ положена равной нулю вне отрезка $[a, b]$. Аналогично определяется обобщенная функция t_-^{-1}.

перестановкой индексов. Функция (6) сосредоточена на множестве плоскостей вида $\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = p$, то есть плоскостей, параллельных одному из ребер октанта. Тем самым, ее можно рассматривать как вклад, который вносит в преобразование Радона характеристической функции октанта одно из его ребер.

Итак, из формулы (4) мы видим, каков вклад в преобразование Радона характеристической функции октанта от каждого из ребер октанта и от каждой его грани.

Формулу (4) легко переписать для случая любого трехгранного угла. Именно, рассмотрим трехгранный угол, вершина которого лежит в начале координат, а направления ребер задаются векторами $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$. Будем предполагать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$, равен единице. Преобразование Радона характеристической функции этого угла мы получим, заменив в формуле (4) ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответственно на $(e^{(1)}, \xi)$, $(e^{(2)}, \xi)$, $(e^{(3)}, \xi)$.

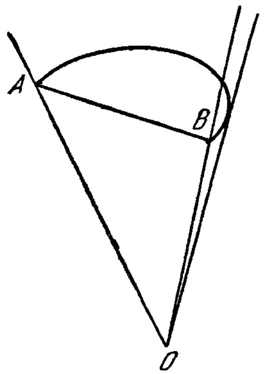

Рис. 3.

Читателю предлагается вычислить преобразование Радона характеристической функции половины кругового конуса (рис. 3).

Приведем наводящие соображения о том, как угадать формулу. Сначала нужно найти вклад в преобразование Радона от сечений тела плоскостями, не параллельными ни одному из ребер OA и OB. Если это сечение ограничено, то его площадь вычисляется непосредственно. Таким образом, нужно разобрать случай, когда сечение неограниченно. Это будет тогда, когда *весь* круговой конус плоскость пересекает по гиперболе *). Заметим, что если грань AOB (рис. 3) либо совсем не пересекает гиперболы, либо отсекает от нее конечную часть, то обобщенную площадь легко сосчитать. В самом деле, обобщенную площадь всей гиперболы мы уже умеем вычислять. Площадь же части гиперболы, от которой

*) Как и в случае всего кругового конуса, можно ожидать, что сечения, имеющие форму параболы, не вносят вклада в преобразование Радона.

отрезана ограниченная часть, мы вычислим, используя аддитивность понятия площади.

Затем нужно найти вклад в преобразование Радона от исключительных направлений плоскостей. Эти исключительные направления возникают из-за того, что тело имеет одну плоскую грань AOB и два ребра OA и OB. Чтобы найти вклад от грани AOB, заменим полуконус трехгранным углом, одна из граней которого есть AOB. Вклад от этой грани будет одинаков для конуса и для трехгранного угла. Следовательно, искомое слагаемое можно взять из формулы (4).

Теперь найдем вклад от ребра OA. Для этого построим трехгранный угол с вершиной в точке O, одна из граней которого — OAB, другая касается конуса вдоль ребра OA, а третья выбрана произвольно. Вклад от этого ребра в преобразование Радона будет одинаков для полуконуса и для трехгранного угла. Следовательно, этот вклад может быть определен на основании формулы (4).

9. Обобщенная гипергеометрическая функция. Введем понятие обобщенной гипергеометрической функции.

Зададим в n-мерном пространстве k линейных форм $(\xi^{(1)}, x), \ldots, (\xi^{(k)}, x)$ и рассмотрим обобщенную функцию в n-мерном пространстве следующего вида:

$$(\xi^{(1)}, x)_+^{\lambda_1 - 1} \ldots (\xi^{(k)}, x)_+^{\lambda_k - 1}, \tag{1}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — комплексные числа.

Обобщенной гипергеометрической функцией

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_k \mid \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)} \mid \xi, p)$$

назовем преобразование Радона функции (1), *то есть*

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_k \mid \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)} \mid \xi, p) = \\ = \left[(\xi^{(1)}, x)_+^{\lambda_1 - 1} \ldots (\xi^{(k)}, x)_+^{\lambda_k - 1}\right]^\vee. \tag{2}$$

Более общее определение гипергеометрической функции есть $F = \left[\Delta_{1+}^{\lambda_1 - 1} \ldots \Delta_{k+}^{\lambda_k - 1}\right]^\vee$, где $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ — определители, элементами которых являются линейные формы $(\xi^{(\alpha)}, x)$. По-видимому, все специальные функции, возникающие в теории представлений, могут быть выражены через такие гипергеометрические функции.

Можно всегда предполагать, что число линейно независимых среди форм $(\xi^{(1)}, x), \ldots, (\xi^{(k)}, x)$, входящих в выражение (2), не меньше n — размерности пространства. В самом деле, если бы их было меньше чем n, то преобразование Радона функции $(\xi^{(1)}, x)_+^{\lambda_1-1} \ldots (\xi^{(k)}, x)_+^{\lambda_k-1}$ свелось бы к преобразованию Радона в пространстве меньшей размерности.

В частном случае, когда все формы $(\xi^{(1)}, x), \ldots, (\xi^{(k)}, x)$ линейно независимы, назовем преобразование Радона функции $(\xi^{(1)}, x)_+^{\lambda_1-1} \ldots (\xi^{(k)}, x)_+^{\lambda_k-1}$ *обобщенной* B-*функцией*. Обычную B-функцию мы получаем в случае двумерного пространства. Именно,

$$\mathrm{B}(\lambda_1, \lambda_2) = F(\lambda_1, \lambda_2 \mid \xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)} \mid \xi_0, 1),$$

где $\xi_0^{(1)} = (1,0)$, $\xi_0^{(2)} = (0,1)$, $\xi_0 = (1,1)$.

Покажем, что гипергеометрическая функция Гаусса получается из нашего определения гипергеометрической функции как частный случай, а именно, когда берутся три формы в двумерном пространстве, из которых две линейно независимы.

В самом деле, гипергеометрическая функция Гаусса $F(\alpha, \beta, \gamma; t)$ задается следующей формулой:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; t) = \frac{1}{\mathrm{B}(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\,dx.$$

Ясно, что интеграл, стоящий в правой части, можно рассматривать как интеграл от функции

$$(x_1)_+^{\beta-1}(x_2)_+^{\gamma-\beta-1}[(1-t)x_1+x_2]_+^{-\alpha}$$

в двумерном пространстве по плоскости $x_1+x_2=1$. Таким образом, имеем

$$F(\alpha, \beta, \gamma; t) = \frac{1}{\mathrm{B}(\beta, \gamma-\beta)} F(\beta, \gamma-\beta, 1-\alpha \mid \xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}, \xi_0^{(3)} \mid \xi_0, 1), \tag{3}$$

где

$$\xi_0^{(1)} = (1,0), \quad \xi_0^{(2)} = (0,1), \quad \xi_0^{(3)} = (1-t, 1), \quad \xi_0 = (1,1).$$

Можно было бы дать несколько более естественное определение гипергеометрической функции, а именно, назвать

обобщенной гипергеометрической функцией преобразование Радона функции

$$\chi_1((\xi^{(1)}, x)) \ldots \chi_k((\xi^{(k)}, x)),$$

где χ_i — характеры на мультипликативной группе вещественных чисел. Напомним, что характером называется функция χ, удовлетворяющая функциональному уравнению $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta)$ для любых чисел $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Как известно, всякая такая функция имеет вид либо $\chi(\alpha) = |\alpha|^\lambda$, либо $\chi(\alpha) = |\alpha|^\lambda \operatorname{sign} \alpha$.

В таком виде определение обобщенной гипергеометрической функции можно перенести на комплексное пространство (см. гл. II, § 3, п. 7).

Рассмотрим следующий пример. Зададим в трехмерном пространстве три независимые линейные формы x_1, x_2, x_3. Постараемся вычислить обобщенную B-функцию

$$\varphi(\xi, p) \equiv [(x_1)_+^{\lambda_1-1}(x_2)_+^{\lambda_2-1}(x_3)_+^{\lambda_3-1}]^\vee, \tag{4}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0, -1, -2, \ldots$ Мы получим для функции $\varphi(\xi, p)$ следующую формулу:

$$\varphi(\xi, p) = \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)\Gamma(\lambda_3)}{2i\Gamma(\lambda)\sin\pi\lambda} \times$$
$$\times [e^{i\pi\lambda}(p-i0)^{-1+\lambda}(\xi_1+i0)^{-\lambda_1}(\xi_2+i0)^{-\lambda_2}(\xi_3+i0)^{-\lambda_3} -$$
$$- e^{-i\pi}(p+i0)^{-1+\lambda}(\xi_1-i0)^{-\lambda_1}(\xi_2-i0)^{-\lambda_2}(\xi_3-i0)^{-\lambda_3}], \tag{5}$$

где $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

Функцию $\varphi(\xi, p)$ (при условии, что $\xi_3 \neq 0$) можно записать в виде следующего интеграла:

$$\varphi(\xi, p) = \frac{1}{|\xi_3|} \int\limits_{\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=p} (x_1)_+^{\lambda_1-1}(x_2)_+^{\lambda_2-1}(x_3)_+^{\lambda_3-1}\,dx_1\,dx_2. \tag{6}$$

Поскольку функция (4) отлична от нуля только при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, то интеграл берется фактически не по всей плоскости $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3 = p$, а только по ее части, лежащей внутри октанта $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.

Эта часть плоскости, по которой ведется интегрирование, есть либо треугольник, либо «внешний треугольник», либо угол. Сосчитаем интеграл для всех этих трех случаев в отдельности.

Сначала рассмотрим случай, когда интеграл берется по треугольнику. Это будет, когда все числа $\frac{p}{\xi_1}$, $\frac{p}{\xi_2}$, $\frac{p}{\xi_3}$ положительны.

Сделаем в интеграле замену переменных $\frac{\xi_1}{p}x_1=\alpha_1$, $\frac{\xi_2}{p}x_2=\alpha_2$, $\frac{\xi_3}{p}x_3=\alpha_3$. Мы получим

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{1}{|\xi_3|}\left(\frac{p}{\xi_1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{p}{\xi_2}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{p}{\xi_3}\right)^{\lambda_3-1}\int\limits_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3>0}}\alpha_1^{\lambda_1-1}\alpha_2^{\lambda_2-1}\alpha_3^{\lambda_3-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2.$$

Этот интеграл легко вычисляется с помощью замены переменной $\alpha_1=(1-\alpha_2)t$:

$$\int\limits_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3>0}}\alpha_1^{\lambda_1-1}\alpha_2^{\lambda_2-1}\alpha_3^{\lambda_3-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2=\int_0^1\alpha_2^{\lambda_2-1}(1-\alpha_2)^{\lambda_1+\lambda_3-1}\,d\alpha_2\times$$

$$\times\int_0^1 t^{\lambda_1-1}(1-t)^{\lambda_3-1}\,dt=\frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}.$$

Итак, если $\frac{p}{\xi_1}$, $\frac{p}{\xi_2}$, $\frac{p}{\xi_3}$ положительны, то имеем

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}|p|^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}|\xi_1|^{-\lambda_1}|\xi_2|^{-\lambda_2}|\xi_3|^{-\lambda_3}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда интеграл берется по внешнему треугольнику. Это будет, когда одно из чисел $\frac{p}{\xi_1}$, $\frac{p}{\xi_2}$, $\frac{p}{\xi_3}$, например $\frac{p}{\xi_3}$, отрицательно.

В этом случае сделаем в интеграле (6) замену переменных

$$\frac{\xi_1}{p}x_1=\alpha_1,\quad \frac{\xi_2}{p}x_2=\alpha_2,\quad -\frac{\xi_3}{p}x_3=\alpha_3.$$

Мы получим

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{1}{|\xi_3|}\left(\frac{p}{\xi_1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{p}{\xi_2}\right)^{\lambda_2}\left|\frac{p}{\xi_3}\right|^{\lambda_3-1}\int\limits_{\substack{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=1\\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3>0}}\alpha_1^{\lambda_1-1}\alpha_2^{\lambda_2-1}\alpha_3^{\lambda_3-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2.$$

Этот интеграл вычисляется с помощью замены переменных $\alpha_1+\alpha_2=u$, $\alpha_1-\alpha_2=v$:

$$\int\limits_{\substack{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=1\\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3>0}}\alpha_1^{\lambda_1-1}\alpha_2^{\lambda_2-1}\alpha_3^{\lambda_3-1}\,d\alpha_1 d\alpha_2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^\infty\int_{-u}^{u}\left(\frac{u+v}{2}\right)^{\lambda_1-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)^{\lambda_2-1}(u-1)^{\lambda_3-1}\,dv\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^\infty u^{\lambda_1+\lambda_2-1}(u-1)^{\lambda_3-1}\,du\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\lambda_1-1}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\lambda_2-1}dt$$

(последний переход сделан путем замены переменной $v=ut$).

Оба последних интеграла сходятся, когда

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3>0,\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3<1$$

и могут быть выражены через B-функцию.

В результате мы получим следующее выражение:

$$\int\limits_{\substack{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=1\\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3>0}}\alpha_1^{\lambda_1-1}\alpha_2^{\lambda_2-1}\alpha_3^{\lambda_3-1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2=$$

$$=\frac{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2)}{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\,\frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}.$$

Итак, если $\frac{p}{\xi_1}$, $\frac{p}{\xi_2}>0$, $\frac{p}{\xi_3}<0$, то имеем

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2)}{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\,\frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\times$$

$$\times|p|^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}|\xi_1|^{-\lambda_1}|\xi_2|^{-\lambda_2}|\xi_3|^{-\lambda_3}.$$

Наконец, в последнем случае, когда плоскость $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=p$ пересекает октант $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$ по углу $\Big($это будет в случае, когда два из чисел $\frac{p}{\xi_1}$, $\frac{p}{\xi_2}$, $\frac{p}{\xi_3}$ отрицательны и одно положительно$\Big)$, мы получим аналогичной выкладкой

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{\sin\pi\lambda_3}{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\,\frac{\Gamma(\lambda_1)\,\Gamma(\lambda_2)\,\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\times$$
$$\times|p|^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}|\xi_1|^{-\lambda_1}|\xi_2|^{-\lambda_2}|\xi_3|^{-\lambda_3}$$

$\left(\text{если } \frac{p}{\xi_1},\ \frac{p}{\xi_2} \text{ отрицательны и } \frac{p}{\xi_3} \text{ положительно}\right)$. Комбинируя рассмотренные случаи, получаем окончательный результат. *Преобразование Радона обобщенной функции*

$$(x_1)_+^{\lambda_1-1}(x_2)_+^{\lambda_2-1}(x_3)_+^{\lambda_3-1}$$

есть

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{\Gamma(\lambda_1)\,\Gamma(\lambda_2)\,\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\,p_+^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}\times$$
$$\times\Big[(\xi_1)_+^{-\lambda_1}(\xi_2)_+^{-\lambda_2}(\xi_3)_+^{-\lambda_3}+\Big\{\frac{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2)}{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_1)_+^{-\lambda_1}(\xi_2)_+^{-\lambda_2}(\xi_3)_-^{-\lambda_3}\Big\}+$$
$$+\Big\{\frac{\sin\pi\lambda_3}{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_1)_-^{-\lambda_1}(\xi_2)_-^{-\lambda_2}(\xi_3)_+^{-\lambda_3}\Big\}\Big]+\ \dots \tag{7}$$

В этой формуле фигурная скобка обозначает сумму трех слагаемых, получающихся одно из другого циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Для краткости выписаны только члены с p_+. Члены с p_- получаются, если заменить $(\xi_i)_+$ на $(\xi_i)_-$ и $(\xi_i)_-$ на $(\xi_i)_+$.

Функции $p_\pm^\lambda$, $(\xi_i)_\pm^\lambda$ нужно, конечно, понимать как обобщенные функции.

Оказывается, что формула (7) сильно упрощается, если перейти от обобщенных функций $p_\pm^\lambda$, $(\xi_i)_\pm^\lambda$ к обобщенным функциям $(p\pm i0)^\lambda$, $(\xi_i\pm i0)^\lambda$. Напомним, что обобщенные функции $(t+i0)^\lambda$, $(t-i0)^\lambda$ на прямой определяются следующим образом:

$$(t+i0)^\lambda=t_+^\lambda+e^{i\pi\lambda}t_-^\lambda,$$
$$(t-i0)^\lambda=t_+^\lambda+e^{-i\pi\lambda}t_-^\lambda.$$

Мы получим, что

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{\Gamma(\lambda_1)\,\Gamma(\lambda_2)\,\Gamma(\lambda_3)}{2i\Gamma(\lambda)\sin\pi\lambda}\times$$
$$\times\big[e^{i\pi\lambda}(p-i0)^{-1+\lambda}(\xi_1+i0)^{-\lambda_1}(\xi_2+i0)^{-\lambda_2}(\xi_3+i0)^{-\lambda_3}-$$
$$-e^{-i\pi\lambda}(p+i0)^{-1+\lambda}(\xi_1-i0)^{-\lambda_1}(\xi_2-i0)^{-\lambda_2}(\xi_3-i0)^{-\lambda_3}\big], \tag{8}$$

где $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$. (Проверка формулы (8) предоставляется читателю.)

Формула (8) теряет смысл, когда $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ есть целое положительное число, поскольку в этом случае знаменатель обращается в нуль. Это связано с неоднозначностью определения преобразования Радона. Чтобы получить из (7) выражение для $\varphi(\xi,\ p)$ при целом положительном значении $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, нужно было бы сначала вычесть из (7) подходящую несущественную функцию и только после этого делать предельный переход. Таким способом можно получить, в частности, из формулы (7) выражение для функции

$$\left[(x_1)_+^0\,(x_2)_+^0\,(x_3)_+^0\right]^\vee,$$

то есть для преобразования Радона характеристической функции октанта $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$. Это выражение было приведено без вывода в п. 8.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Этот параграф посвящен вычислению преобразования Радона обобщенных функций, связанных с квадратичными формами. Изложение здесь чисто аналитическое. Особенно полезен здесь метод аналитического продолжения по коэффициентам квадратичной формы, который применялся в вып. 1 при изучении самих обобщенных функций, связанных с квадратичными формами. В дальнейшем этот параграф не будет использован, и его можно при желании пропустить. Мы рекомендуем читателю рассматривать его как дополнение к исследованию обобщенных функций P^λ и $(P+c)^\lambda$, где P — квадратичная форма, проведенному в вып. 1. Весьма полезно сравнить результаты этого параграфа с преобразованием Фурье обобщенных функций P^λ, $(P+c)^\lambda$. Преобразование Радона этих функций снова выражается через функции аналогичной выкладкой

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{\sin\pi\lambda_3}{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\ \frac{\Gamma(\lambda_1)\,\Gamma(\lambda_2)\,\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\times$$
$$\times|p|^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}|\xi_1|^{-\lambda_1}|\xi_2|^{-\lambda_2}|\xi_3|^{-\lambda_3}$$

$\left(\text{если } \frac{p}{\xi_1},\ \frac{p}{\xi_2} \text{ отрицательны и } \frac{p}{\xi_3} \text{ положительно}\right)$. Комбинируя рассмотренные случаи, получаем окончательный результат. *Преобразование Радона обобщенной функции*

$$(x_1)_+^{\lambda_1-1}(x_2)_+^{\lambda_2-1}(x_3)_+^{\lambda_3-1}$$

есть

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{\Gamma(\lambda_1)\,\Gamma(\lambda_2)\,\Gamma(\lambda_3)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\,p_+^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1}\times$$
$$\times\Big[(\xi_1)_+^{-\lambda_1}(\xi_2)_+^{-\lambda_2}(\xi_3)_+^{-\lambda_3}+\Big\{\frac{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2)}{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_1)_+^{-\lambda_1}(\xi_2)_+^{-\lambda_2}(\xi_3)_-^{-\lambda_3}\Big\}+$$
$$+\Big\{\frac{\sin\pi\lambda_3}{\sin\pi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_1)_-^{-\lambda_1}(\xi_2)_-^{-\lambda_2}(\xi_3)_+^{-\lambda_3}\Big\}\Big]+\ \ldots \tag{7}$$

В этой формуле фигурная скобка обозначает сумму трех слагаемых, получающихся одно из другого циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Для краткости выписаны только члены с p_+. Члены с p_- получаются, если заменить $(\xi_i)_+$ на $(\xi_i)_-$ и $(\xi_i)_-$ на $(\xi_i)_+$.

Функции $p_\pm^\lambda$, $(\xi_i)_\pm^\lambda$ нужно, конечно, понимать как обобщенные функции.

Оказывается, что формула (7) сильно упрощается, если перейти от обобщенных функций $p_\pm^\lambda$, $(\xi_i)_\pm^\lambda$ к обобщенным функциям $(p\pm i0)^\lambda$, $(\xi_i\pm i0)^\lambda$. Напомним, что обобщенные функции $(t+i0)^\lambda$, $(t-i0)^\lambda$ на прямой определяются следующим образом:

$$(t+i0)^\lambda=t_+^\lambda+e^{i\pi\lambda}t_-^\lambda,$$
$$(t-i0)^\lambda=t_+^\lambda+e^{-i\pi\lambda}t_-^\lambda.$$

Мы получим, что

$$\varphi(\xi,\ p)=\frac{\Gamma(\lambda_1)\,\Gamma(\lambda_2)\,\Gamma(\lambda_3)}{2i\Gamma(\lambda)\sin\pi\lambda}\times$$
$$\times\big[e^{i\pi\lambda}(p-i0)^{-1+\lambda}(\xi_1+i0)^{-\lambda_1}(\xi_2+i0)^{-\lambda_2}(\xi_3+i0)^{-\lambda_3}-$$
$$-e^{-i\pi\lambda}(p+i0)^{-1+\lambda}(\xi_1-i0)^{-\lambda_1}(\xi_2-i0)^{-\lambda_2}(\xi_3-i0)^{-\lambda_3}\big], \tag{8}$$

где $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$. (Проверка формулы (8) предоставляется читателю.)

Формула (8) теряет смысл, когда $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ есть целое положительное число, поскольку в этом случае знаменатель обращается в нуль. Это связано с неоднозначностью определения преобразования Радона. Чтобы получить из (7) выражение для $\varphi(\xi,\ p)$ при целом положительном значении $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, нужно было бы сначала вычесть из (7) подходящую несущественную функцию и только после этого делать предельный переход. Таким способом можно получить, в частности, из формулы (7) выражение для функции

$$\left[(x_1)_+^0(x_2)_+^0(x_3)_+^0\right]^\vee,$$

то есть для преобразования Радона характеристической функции октанта $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$. Это выражение было приведено без вывода в п. 8.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Этот параграф посвящен вычислению преобразования Радона обобщенных функций, связанных с квадратичными формами. Изложение здесь чисто аналитическое. Особенно полезен здесь метод аналитического продолжения по коэффициентам квадратичной формы, который применялся в вып. 1 при изучении самих обобщенных функций, связанных с квадратичными формами. В дальнейшем этот параграф не будет использован, и его можно при желании пропустить. Мы рекомендуем читателю рассматривать его как дополнение к исследованию обобщенных функций P^λ и $(P+c)^\lambda$, где P — квадратичная форма, проведенному в вып. 1. Весьма полезно сравнить результаты этого параграфа с преобразованием Фурье обобщенных функций P^λ, $(P+c)^\lambda$. Преобразование Радона этих функций снова выражается через функции такого же вида и не требует, в отличие от преобразования Фурье, введения обобщенных функций Бесселя.

Мы ограничиваемся здесь нечетномерным случаем; читателю рекомендуется вывести аналогичные формулы для четномерных пространств.

1. Преобразование Радона обобщенных функций $(P+i0)^\lambda$, $(P-i0)^\lambda$ и P_+^λ, где P — невырожденная квадратичная форма. В вып. 1 были введены обобщенные функции $(P+i0)^\lambda$, $(P-i0)^\lambda$, P_+^λ, P_-^λ, где $P=P(x)$ — невырожденная квадратичная форма, λ — комплексное число. Напомним их определение. Сперва введем обобщенную функцию $(P+iP_1)^\lambda$, где P_1 — положительно определенная квадратичная форма:

$$((P+iP_1)^\lambda,\ f)=\int (P+iP_1)^\lambda f(x)\,dx. \tag{1}$$

Интеграл, стоящий в правой части, сходится, когда $\operatorname{Re}\lambda>0$, и является аналитической функцией от λ. При $\operatorname{Re}\lambda<0$ его следует понимать в смысле аналитического продолжения по λ. По определению $(P+i0)^\lambda$ есть предел обобщенной функции $(P+iP_1)^\lambda$, когда все коэффициенты положительно определенной формы P_1 стремятся к нулю. Аналогично определяется обобщенная функция $(P-i0)^\lambda$.

Обобщенные функции P_+^λ и P_-^λ связаны с функциями $(P+i0)^\lambda$ и $(P-i0)^\lambda$ следующими соотношениями:

$$(P+i0)^\lambda=P_+^\lambda+e^{\pi i\lambda}P_-^\lambda,\qquad (P-i0)^\lambda=P_+^\lambda+e^{-\pi i\lambda}P_-^\lambda. \tag{2}$$

Вычислим преобразование Радона этих функций для случая, когда λ не является целым или полуцелым числом.

Сначала вычислим преобразование Радона функции $P^\lambda\equiv(P\pm i0)^\lambda$, где P — положительно определенная квадратичная форма. Воспользуемся следующим свойством преобразования Радона, установленным в п. 3 § 1. Если $\check F(\xi,\ p)$ — преобразование Радона функции $F(x)$, то при замене функции $F(x)$ функцией $F(A^{-1}x)$, где A — невырожденное линейное преобразование, функция $\check F(\xi,\ p)$ переходит в

$$\check F_A(\xi,\ p)\equiv|\det A|\,\check F(A'\xi,\ p).$$

Отсюда получаем следующее свойство преобразования Радона $\check F(\xi,\ p)$ функции P^λ. Если A — произвольное линейное преобразование, сохраняющее квадратичную форму P, и A' — сопряженное к нему преобразование, то

$$\check F(A'\xi,\ p)=\check F(\xi,\ p).$$

Следовательно, функция $\check F(\xi,\ p)$ имеет следующий вид:

$$\check F(\xi,\ p)=\varphi(Q,\ p), \tag{3}$$

где $Q=Q(\xi)$ — квадратичная форма, сопряженная с формой P (то есть матрицы форм P и Q являются взаимно обратными).

С другой стороны, снова в силу сформулированного выше свойства преобразования Радона, если функцию $P^\lambda(x)$ заменить на $\alpha^{2\lambda}P^\lambda(x)\equiv P^\lambda(\alpha x)$, $\alpha>0$, то преобразование Радона $\varphi(Q,\ p)$ функции P^λ заменится на $\alpha^{2\lambda}\varphi(Q,\ p)\equiv\equiv\alpha^{-n}\varphi(\alpha^{-2}Q,\ p)$.

Следовательно, функция $\varphi(Q,\ p)$ является однородной функцией от Q степени однородности $-\lambda-\frac{n}{2}$, то есть она имеет вид

$$\varphi(Q,\ p)=\varphi(p)\,Q^{-\lambda-\frac{n}{2}}. \tag{4}$$

Наконец, для определения $\varphi(p)$ воспользуемся тем фактом, что преобразование Радона $\check F(\xi,\ p)$ есть четная однородная функция переменных ξ, p степени однородности -1. Отсюда следует, что функция $\varphi(p)$ в равенстве (4) есть четная однородная обобщенная функция от p степени однородности $2\lambda+n-1$. Следовательно, $\varphi(p)=c(\lambda)\,|p|^{2\lambda+n-1}$ (см. вып. 1, стр. 110).

Итак, *преобразование Радона обобщенной функции P^λ, где $P=P(x)$ — положительно определенная форма, есть*

$$\check F(\xi,\ p)=c(\lambda)\,|p|^{2\lambda+n-1}Q^{-\lambda-\frac{n}{2}}, \tag{5}$$

где $Q=Q(\xi)$ — квадратичная форма, сопряженная с формой P.

Коэффициент $c(\lambda)$ в формуле (5) имеет следующий вид:

$$c(\lambda)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}}, \tag{6}$$

где Δ — дискриминант квадратичной формы P.

Приведем вычисление коэффициента $c(\lambda)$. Не нарушая общности, можно предполагать, что форма P имеет канонический вид $P=\sum \alpha_i^2 x_i^2$. Тогда $Q=\sum \alpha_i^{-2}\xi_i^2$. Подставим в выражение (5) $\xi = \xi_0 = (0, \ldots, 0, \alpha_n)$, $p=1$. Мы получим

$$\check{F}(\xi_0, 1) = c(\lambda).$$

С другой стороны, по определению,

$$\check{F}(\xi_0, 1) = \int\limits_{\alpha_n x_n = 1} \left(\sum \alpha_i^2 x_i^2\right)^\lambda \omega = \frac{1}{\alpha_n}\int (\alpha_1^2 x_1^2 + \ldots + \alpha_{n-1}^2 x_{n-1}^2 + 1)^\lambda \times$$

$$\times dx_1 \ldots dx_{n-1} = \frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\int (t_1^2 + \ldots + t_{n-1}^2 + 1)^\lambda dt_1 \ldots dt_{n-1},$$

откуда $\check{F}(\xi_0, 1) = \dfrac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(-\lambda - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}}$.

Применим теперь метод аналитического продолжения по коэффициентам квадратичной формы P (подробное его изложение дается петитом в конце пункта). Мы получим:

Пусть невырожденная форма $P = P(x)$ имеет в каноническом представлении k положительных и l отрицательных квадратов. Тогда преобразование Радона функции $(P+i0)^\lambda$ имеет следующий вид:

$$\frac{e^{-\frac{l\pi}{2}i}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}}|p|^{2\lambda+n-1}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}, \tag{7}$$

где $Q = Q(\xi)$ — форма, сопряженная с формой P, Δ — дискриминант формы P.

Аналогично, *преобразование Радона функции $(P-i0)^\lambda$ имеет следующий вид*:

$$\frac{e^{\frac{l\pi}{2}i}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}}|p|^{2\lambda+n-1}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}. \tag{7'}$$

Наконец, на основании формулы

$$P_+^\lambda = -\frac{1}{2i\sin\pi\lambda}\left[e^{-\pi\lambda i}(P+i0)^\lambda - e^{\pi\lambda i}(P-i0)^\lambda\right]$$

мы получим: *преобразование Радона функции P_+^λ есть*

$$-\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}{2i\sin\pi\lambda\,\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}}|p|^{2\lambda+n-1}\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{\pi}{2}(l+2\lambda)i}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}(l+2\lambda)i}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right]. \tag{8}$$

Преобразуем эту формулу, подставив в нее вместо обобщенных функций $(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$ и $(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}$ их выражения через $Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}$ и $Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}$. После элементарных преобразований получим, что *преобразование Радона функции P_+^λ есть*

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{|\Delta|}\sin\pi\lambda}|p|^{2\lambda+n-1}\times$$

$$\times\left[\sin\frac{\pi}{2}(l+2\lambda)Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}} - \sin\frac{\pi k}{2}Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right], \tag{9}$$

где $Q = Q(\xi)$ — квадратичная форма, сопряженная с P; k и l — соответственно число положительных и отрицательных квадратов в форме P. Преобразование Радона функции P_-^λ получается отсюда, если мы поменяем ролями k и l, а также Q_+ и Q_-.

Интересен частный случай, когда квадратичная форма P имеет в каноническом представлении четное число k положительных и нечетное число l отрицательных квадратов. В этом случае преобразование Радона функции P_+^λ имеет следующий вид:

$$\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{ctg}\pi\lambda}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)}|p|^{2\lambda+n-1}Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}.$$

Отсюда следует, что *если квадратичная форма P имеет в каноническом представлении четное число положительных и нечетное число отрицательных квадратов, то* *для вычисления интеграла*

$$\int P_{+}^{\lambda}(x) f(x)\, dx$$

достаточно знать интегралы функции $f(x)$ лишь по тем гиперплоскостям $(\xi, x) = p$, для которых $Q(\xi) > 0$, где Q — сопряженная с P квадратичная форма (по предположению, λ не является целым или полуцелым числом).

Изложим подробно метод аналитического продолжения по коэффициентам формы P *). Будем искать преобразование Радона функции P^{λ}, где $P = P_1 + iP_2$ — квадратичная форма с *комплексными коэффициентами*, такая, что $\operatorname{Im} P = P_2$ есть положительно определенная форма. Обобщенная функция P^{λ} аналитически зависит не только от λ, но и от коэффициентов квадратичной формы P. Следовательно, и преобразование Радона функции P^{λ} является аналитической функцией от коэффициентов формы P в «верхней полуплоскости» квадратичных форм $\operatorname{Im} P > 0$. Тем самым, преобразование Радона функции P^{λ} однозначно определяется своими значениями на «мнимой полуоси», то есть на множестве квадратичных форм вида $P = iP_2$, где P_2 — положительно определенная форма. Поэтому достаточно найти преобразование Радона обобщенных функций $(iP_2)^{\lambda}$. Но для таких функций преобразование Радона было уже фактически найдено. Именно, на основании формулы (5) заключаем, что преобразование Радона функции $(iP_2)^{\lambda}$ есть

$$\frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(-\lambda - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda) \sqrt{(-i)^n \Delta}} |p|^{2\lambda+n-1} Q^{-\lambda-\frac{n}{2}},$$

где Q — квадратичная форма, сопряженная с формой $P = iP_2$, а Δ — дискриминант формы P. Полученное выражение нужно теперь продолжить на «верхнюю полуплоскость» всех квадратичных форм $P = P_1 + iP_2$ с положительно определенной мнимой частью. Но аналитическое продолжение формы Q известно, поскольку ее коэффициенты аналитически зависят от коэффициентов формы P. Следовательно, задача будет решена, если мы сумеем определить $\sqrt{(-i)^n \Delta}$ как однозначную аналитическую функцию в «верхней полуплоскости» квадратичных форм. Это определение было дано в п. 2, § 3, гл. III, вып. 1. Для полноты приведем его здесь.

*) См. вып. 1, гл. III, § 2, где методом аналитического продолжения по коэффициентам были найдены вычеты обобщенной функции P_{+}^{λ} в особых точках λ.

Представим форму P в виде

$$P = P_1 + iP_2,$$

где P_1, P_2 — квадратичные формы с вещественными коэффициентами, причем форма P_2 положительно определена. Существует невырожденное линейное преобразование

$$x_k = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} y_l$$

с вещественными коэффициентами, приводящее формы P_1 и P_2 к виду

$$P_1 = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

$$P_2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2.$$

Вещественные коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ формы P_1 не зависят от специального выбора такого преобразования и являются, таким образом, инвариантами самой квадратичной формы P. Значение функции $\sqrt{(-i)^n \Delta}$ определяется тогда для формы P следующим образом:

$$\sqrt{(-i)^n \Delta} = |b|^{-1} (1 - \lambda_1 i)^{1/2} \ldots (1 - \lambda_n i)^{1/2}, \tag{10}$$

где b — определитель матрицы $\|b_{kl}\|$, а значения квадратных корней определяются формулой

$$\sqrt{z} = |z|^{1/2} e^{\frac{i}{2} \arg z}, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Итак, *преобразование Радона обобщенной функции P^{λ}, где $P = P(x)$ — квадратичная форма с комплексными коэффициентами, мнимая часть которой положительно определена, имеет вид*

$$\frac{e^{-\frac{\pi n i}{4}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(-\lambda - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda) \sqrt{(-i)^n \Delta}} |p|^{2\lambda+n-1} Q^{-\lambda-\frac{n}{2}}, \tag{11}$$

где $Q = Q(\xi)$ — квадратичная форма, сопряженная форме P, Δ — дискриминант формы P. Значение $\sqrt{(-i)^n \Delta}$ определено выше.

По определению, обобщенная функция $(P + i0)^{\lambda}$ есть предел обобщенной функции $(P + iP_1)^{\lambda}$, где P_1 — положительно определенная квадратичная форма, когда коэффициенты формы P_1 стремятся к нулю. Совершая в (11) предельный переход, легко получим искомое выражение для преобразования Радона функции $(P + i0)^{\lambda}$.

2. Преобразование Радона функций $(P+c+i0)^\lambda$, $(P+c-i0)^\lambda$ и $(P+c)_+^\lambda$, где P — невырожденная квадратичная форма. Вычислим сначала преобразование Радона функции $(x_1^2+\ldots+x_n^2+c)^\lambda$, $c>0$. Оно задается интегралом $\left(\text{сходящимся в обычном смысле, когда } \operatorname{Re}\lambda<-\frac{n-1}{2}\right)$

$$\check{F}(\xi,p)=\int\limits_{(\xi,x)=p}(x_1^2+\ldots+x_n^2+c)^\lambda\omega=$$

$$=\int\limits_{|\xi|x_n=|p|}(x_1^2+\ldots+x_n^2+c)^\lambda\omega=$$

$$=\frac{1}{|\xi|}\int\left(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+\frac{p^2}{|\xi|^2}+c\right)^\lambda dx_1\ldots dx_{n-1},\qquad(1)$$

где $|\xi|^2=\sum\xi_i^2$. Последний интеграл легко вычислить, переходя к сферическим координатам. Мы получаем: *преобразование Радона обобщенной функции* $(x_1^2+\ldots+x_n^2+c)^\lambda$, $c>0$, *есть*

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}\frac{1}{|\xi|}\left(\frac{p^2}{|\xi|^2}+c\right)^{\lambda+\frac{n-1}{2}}.\qquad(2)$$

Отсюда легко получаем, что *преобразование Радона функции* $(P+c)^\lambda$, *где* $c>0$ *и* $P=P(x)$ — *произвольная положительно определенная форма, есть*

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}}Q^{-1/2}\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)^{\lambda+\frac{n-1}{2}}.\qquad(3)$$

Здесь Q — сопряженная квадратичная форма; Δ — дискриминант формы P. Применив метод аналитического продолжения (см. п. 1), мы найдем на основании формулы (3) преобразование Радона функций $(P+c+i0)^\lambda$ и $(P+c-i0)^\lambda$, где P — любая невырожденная форма, c — любое вещественное число. Опуская выкладки, сформулируем окончательный результат.

Пусть невырожденная квадратичная форма $P=P(x)$ *имеет в каноническом представлении* k *положительных*

и l *отрицательных квадратов* $(k+l=n)$. *Тогда преобразование Радона обобщенной функции* $(P+c+i0)^\lambda$ *есть*

$$\frac{e^{-\frac{\pi}{2}li}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}}(Q-i0)^{-1/2}\left(\frac{p^2}{Q}+c+i0\right)^{\lambda+\frac{n-1}{2}}.\qquad(4)$$

Здесь $Q=Q(\xi)$ — *сопряженная с* P *квадратичная форма,* Δ — *дискриминант формы* P.

Аналогично, *преобразование Радона обобщенной функции* $(P+c-i0)^\lambda$ *есть*

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}li}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(-\lambda-\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{|\Delta|}}(Q+i0)^{-1/2}\left(\frac{p^2}{Q}+c-i0\right)^{\lambda+\frac{n-1}{2}}.\qquad(4')$$

Отсюда получаем также, что *преобразование Радона функции*

$$(P+c)_+^\lambda=-\frac{1}{2i\sin\pi\lambda}\left[e^{-\pi\lambda i}(P+c+i0)^\lambda-e^{\pi\lambda i}(P+c-i0)^\lambda\right]$$

есть

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\sin\pi\lambda\sqrt{|\Delta|}}\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{2i}\right)\left[e^{-\frac{\pi}{2}(l+2\lambda)i}(Q-i0)^{-1/2}\left(\frac{p^2}{Q}+c+i0\right)^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-\right.$$

$$\left.-e^{\frac{\pi}{2}(l+2\lambda)i}(Q+i0)^{-1/2}\left(\frac{p^2}{Q}+c-i0\right)^{\lambda+\frac{n-1}{2}}\right].\qquad(5)$$

В этом выражении полезно перейти от функций $(Q\pm i0)^{-1/2}$ к функциям $Q_\pm^{-1/2}$ и от функций $\left(\frac{p^2}{Q}+c\pm i0\right)^{\lambda+\frac{n-1}{2}}$ к функциям

$\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)_{\pm}^{\lambda+\frac{n-1}{2}}$. В результате получим: *преобразование Радона функции* $(P+c)_+^\lambda$ *есть*

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\sin\pi\lambda\sqrt{|\Delta|}}\left[\sin\pi\left(\lambda+\frac{l}{2}\right)Q_+^{-\frac{1}{2}}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-\sin\frac{\pi k}{2}Q_-^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}+$$
$$+\sin\pi\left(\lambda+\frac{l-1}{2}\right)Q_-^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-$$
$$\left.-\sin\frac{\pi(k-1)}{2}Q_+^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}\right], \qquad (6)$$

или, в другой записи,

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\sin\pi\lambda\sqrt{|\Delta|}}\left[\sin\pi\left(\lambda+\frac{l}{2}\right)Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}\times\right.$$
$$\times(p^2+cQ)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-\sin\frac{\pi k}{2}Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}+$$
$$+\sin\pi\left(\lambda+\frac{l-1}{2}\right)Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-$$
$$\left.-\sin\frac{\pi(k-1)}{2}Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}\right]. \qquad (6')$$

Здесь Q — сопряженная с P квадратичная форма, Δ — дискриминант формы P.

Отметим, что при $c>0$ четвертое слагаемое в скобках обращается в нуль, а при $c<0$ в нуль обращается третье слагаемое.

Аналогично, *преобразование Радона функции $(P+c)_-^\lambda$ имеет следующий вид*:

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\sin\pi\lambda\sqrt{|\Delta|}}\left[\sin\pi\left(\lambda+\frac{k}{2}\right)Q_-^{-\frac{1}{2}}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-\sin\frac{\pi l}{2}Q_+^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}+$$

$$+\sin\pi\left(\lambda+\frac{k-1}{2}\right)Q_+^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-$$
$$\left.-\sin\frac{\pi(l-1)}{2}Q_-^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2}{Q}+c\right)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}\right], \qquad (7)$$

или, в другой записи,

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)\sin\pi\lambda\sqrt{|\Delta|}}\left[\sin\pi\left(\lambda+\frac{k}{2}\right)Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}\times\right.$$
$$\times(p^2+cQ)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-\sin\frac{\pi l}{2}Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}+$$
$$+\sin\pi\left(\lambda+\frac{k-1}{2}\right)Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}-$$
$$\left.-\sin\frac{\pi(l-1)}{2}Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+cQ)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}\right]. \qquad (7')$$

3. Преобразование Радона характеристических функций гиперболоида и конуса. В этом пункте мы вычислим на основе результатов пп. 1 и 2 преобразование Радона характеристических функций гиперболоида и конуса в нечетномерном пространстве. Тем самым будут определены обобщенные площади сечений этих фигур.

Сначала найдем преобразование Радона характеристической функции области $x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2+1>0$, то есть внутренней части однополостного гиперболоида. Эта характеристическая функция есть

$$(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2+1)_+^0.$$

Согласно п. 2, ее преобразование Радона задается следующим образом:

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}Q_+^{-\frac{n}{2}}(p^2+Q)_+^{\frac{n-1}{2}}-\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\lim_{\lambda\to 0}U, \qquad (1)$$

где $U=$

$$=\frac{Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+Q)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}}+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\pi\lambda Q_-^{\lambda-\frac{n}{2}}(p^2+Q)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}}{\sin\pi\lambda},$$

и $Q=\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2$. Переходя к пределу, получаем: *преобразование Радона характеристической функции области $x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2+1>0$, то есть области, лежащей внутри однополостного гиперболоида, есть*

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}Q_+^{-\frac{n}{2}}(p^2+Q)^{\frac{n-1}{2}}-$$

$$-\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}Q_-^{-\frac{n}{2}}(p^2+Q)^{\frac{n-1}{2}}\ln\left|\frac{p^2+Q}{Q}\right|, \tag{2}$$

где $Q=\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2$.

Приведем результаты для других областей.

Преобразование Радона характеристической функции $(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2+1)_-^0$ *области, лежащей вне однополостного гиперболоида, есть*

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}Q_-^{-\frac{n}{2}}(p^2+Q)^{\frac{n-1}{2}}\ln\left|\frac{p^2+Q}{Q}\right|, \tag{3}$$

где $Q=\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2$.

Отсюда видно, что для вычисления интеграла функции $f(x)$ по области $x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2+1<0$ не нужно знать интегралов по тем гиперплоскостям $(\xi, x)=p$, для которых $Q>0$, то есть по гиперплоскостям, сечения которых с однополостным гиперболоидом имеют конечную площадь.

Преобразование Радона характеристической функции $(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2-1)_+^0$ *области, лежащей внутри двуполостного гиперболоида, есть*

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}Q_+^{-\frac{n}{2}}(p^2-Q)_+^{\frac{n-1}{2}}-$$

$$-\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}Q_-^{-\frac{n}{2}}(p^2-Q)^{\frac{n-1}{2}}\ln\left|\frac{p^2-Q}{Q}\right|. \tag{4}$$

Эта функция равна нулю для тех гиперплоскостей $(\xi, x)=p$, для которых $Q>0$ и $p^2-Q<0$. Результат не является неожиданным. Это как раз те гиперплоскости, которые не пересекают области.

Преобразование Радона характеристической функции $(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2-1)_-^0$ *— области, лежащей вне двуполостного гиперболоида, есть*

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}Q_+^{-\frac{n}{2}}(p^2-Q)_-^{\frac{n-1}{2}}+$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}Q_-^{-\frac{n}{2}}(p^2-Q)^{\frac{n-1}{2}}\ln\left|\frac{p^2-Q}{Q}\right|. \tag{5}$$

Эта функция равна нулю для тех гиперплоскостей $(\xi, x)=p$, для которых $Q>0$, $p^2-Q>0$. Это как раз те гиперплоскости, которые пересекают двуполостный гиперболоид, причем сечение имеет конечную площадь.

Итак, для вычисления интеграла функции $f(x)$ по области, лежащей вне двуполостного гиперболоида, не нужно знать интегралы по гиперплоскостям, пересекающим двуполостный гиперболоид по области конечной площади.

Наконец, найдем преобразование Радона характеристической функции конуса $x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2>0$, то есть функции P_+^0, где $P=x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2$. Воспользуемся результатами п. 1. Согласно п. 1, преобразование Радона функции $P_+^\lambda=(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2)_+^\lambda$ есть

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)}|p|^{2\lambda+n-1}\left[Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}-\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sin\pi\lambda}Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right],$$

где $Q=\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2$. Переходя к пределу при $\lambda\to 0$, получим, что преобразование Радона функции P_+^0 есть

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}p^{n-1}Q_+^{-\frac{n}{2}}-\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\lim_{\lambda\to 0}\frac{|p|^{2\lambda+n-1}Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}}{\sin\pi\lambda}. \tag{6}$$

В выражении, стоящем под знаком предела, знаменатель обращается в нуль при $\lambda=0$. Следовательно, и числитель, рассматриваемый как обобщенная функция, должен обращаться в нуль при $\lambda=0$, иными словами, обобщенная функция

$$\lim_{\lambda\to 0}|p|^{2\lambda+n-1}Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}=p^{n-1}Q_-^{-\frac{n}{2}}$$

является несущественной, то есть отвечающий ей функционал равен нулю.

То, что функции $p^{n-1}Q_-^{-\frac{n}{2}}$ отвечает функционал, равный нулю, можно установить непосредственно. Для этого, согласно сказанному в § 1, достаточно доказать, что

$$\int_\Gamma Q_-^{-\frac{n}{2}}(\xi)\,\omega(\xi)=0, \tag{7}$$

где Γ — произвольная поверхность, охватывающая точку $\xi=0$. Интеграл (7) следует понимать в смысле регуляризованного значения, а именно

$$\int_\Gamma Q_-^{-\frac{n}{2}}(\xi)\,\omega(\xi)=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2i}\left[\int_\Gamma (Q+i0)^{-\frac{n}{2}}\omega(\xi)-\int_\Gamma (Q-i0)^{-\frac{n}{2}}\omega(\xi)\right].$$

Интегралы, стоящие в правой части равенства, сходятся и, как нетрудно проверить,

$$\int (Q+i0)\,\omega^{-\frac{n}{2}}(\xi)=\int (Q-i0)^{-\frac{n}{2}}\,\omega(\xi).$$

Итак, получаем: *преобразование Радона характеристической функции конуса* $x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2>0$ *есть*

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}p^{n-1}Q_+^{-\frac{n}{2}}-\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}p^{n-1}Q_-^{-\frac{n}{2}}\ln\frac{p^2}{Q_-}, \tag{8}$$

где $Q=\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2$.

Пользуясь формулами этого пункта, можно выразить интеграл функции $f(x)$ по каждой из рассмотренных областей через преобразование Радона $\varphi(\xi,p)$ этой функции. Так, например,

$$\int\limits_{x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2>0} f(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_\Gamma\left(\int_{-\infty}^{\infty}S(\xi,p)\frac{\partial^{n-1}\varphi(\xi,p)}{\partial p^{n-1}}dp\right)\omega(\xi), \tag{9}$$

где $S(\xi,p)$ задается формулой (8).

4. Преобразование Радона δ-функции, сосредоточенной на поверхности второго порядка. Поставим задачу: выразить интеграл функции $f(x)$ по поверхности второго порядка через интегралы этой функции по гиперплоскостям. Как и ранее, пространство предполагается нечетномерным. В силу формулы Планшереля эта задача сводится к вычислению преобразования Радона δ-функции, сосредоточенной на этой поверхности.

Сначала найдем преобразование Радона δ-функции

$$\delta(x_1^2+\ldots+x_n^2-1),$$

сосредоточенной на поверхности сферы. Как известно,

$$\delta(x_1^2+\ldots+x_n^2-1)=\operatorname*{Выч}_{\lambda=-1}(x_1^2+\ldots+x_n^2-1)_+^\lambda.$$

Поэтому достаточно воспользоваться результатами п. 2. Мы получаем, что *преобразование Радона функции* $\delta(x_1^2+\ldots+x_n^2-1)$, *сосредоточенной на поверхности сферы, есть*

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)^{-\frac{n}{2}+1}(p^2-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2)_+^{\frac{n-3}{2}}. \tag{1}$$

Для вычисления преобразования Радона функции $\delta(x_1^2+\ldots+x_n^2-1)$ можно было бы воспользоваться также формулой

$$\delta(x_1^2+\ldots+x_n^2-1)=\operatorname*{Выч}_{\lambda=-1}(x_1^2+\ldots+x_n^2-1)_-^\lambda.$$

В результате мы получили бы, что *преобразование Радона функции* $\delta\left(x_1^2+\ldots+x_n^2-1\right)$ *есть*

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\left(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2\right)^{-\frac{n}{2}+1}\left(p^2-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2\right)_-^{\frac{n-3}{2}}. \quad (1')$$

Между этими двумя результатами нет противоречия. В самом деле, разность написанных функций есть многочлен степени $n-3$ относительно p,

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\left(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2\right)^{-\frac{n}{2}+1}\left(p^2-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2\right)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Следовательно, эта разность есть несущественная функция, то есть равна нулю как функционал.

Таким образом, *для вычисления интеграла функции* $f(x)$ *по сфере достаточно знать либо только интегралы по гиперплоскостям, пересекающим сферу, либо только интегралы по гиперплоскостям, не пересекающим сферу.*

Аналогично, применяя формулы, полученные в п. 2, получаем: *преобразование Радона функции* $\delta\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2+1\right)$, *сосредоточенной на поверхности однополостного гиперболоида, есть*

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}Q_-^{-\frac{n}{2}+1}\left(p^2+Q\right)^{\frac{n-3}{2}}\ln\left|\frac{p^2+Q}{Q}\right|, \qquad (2)$$

где $Q=\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2$.

Мы видим отсюда, что при вычислении интеграла функции $f(x)$ по поверхности однополостного гиперболоида $x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2+1=0$ не нужно знать интегралы функции $f(x)$ по гиперплоскостям, сечение которых с поверхностью имеет конечную площадь.

Преобразование Радона функции $\delta\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2-1\right)$, *сосредоточенной на поверхности двуполостного гиперболоида, выражается одной из следующих равносильных формул:*

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}Q_+^{-\frac{n}{2}+1}\left(p^2-Q\right)_+^{\frac{n-3}{2}}+$$
$$+\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}Q_-^{-\frac{n}{2}+1}\left(p^2-Q\right)^{\frac{n-3}{2}}\ln\left|\frac{p^2-Q}{Q}\right| \qquad (3)$$

и

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}Q_+^{-\frac{n}{2}+1}\left(p^2-Q\right)_-^{\frac{n-3}{2}}+$$
$$+\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}Q_-^{-\frac{n}{2}+1}\left(p^2-Q\right)^{\frac{n-3}{2}}\ln\left|\frac{p^2+Q}{Q}\right|, \qquad (3')$$

где $Q=\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2$.

Таким образом, при вычислении интеграла функции $f(x)$ по поверхности двуполостного гиперболоида можно не знать либо интегралов по гиперплоскостям, не пересекающим поверхности гиперболоида, либо интегралов по гиперплоскостям, сечение которых с гиперболоидом имеет конечную площадь.

Теперь вычислим преобразование Радона функции

$$\delta\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right),$$

сосредоточенной на поверхности конуса $x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2=0$. Эта функция связана с обобщенной функцией $\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)_+^\lambda$ следующим образом:

$$\delta\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)=\underset{\lambda=-1}{\text{Выч}}\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)_+^\lambda=$$
$$=\underset{\lambda=-1}{\text{Выч}}\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)_-^\lambda \text{ *)}.$$

Преобразование Радона функции $\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)_-^\lambda$ было найдено в п. 1. Именно, это есть функция следующего

---

*) См. вып. 1, гл. III, § 2, стр. 343.

вида:

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1)\ldots\left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)}\times$$

$$\times\operatorname{ctg}\pi\lambda\,|p|^{2\lambda+n-1}(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2)_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}.$$

Отсюда получаем, что *преобразование Радона функции* $\delta(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2)$ *есть*

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}2\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}p^{n-3}\ln|p|\,Q_-^{-\frac{n}{2}+1}\ ^{*)},\tag{4}$$

где $Q=\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2$.

На основании формулы (4) получаем следующее выражение для интеграла функции $f(x)$ по поверхности конуса через интегралы $\check{f}(\xi,p)$ функции $f(x)$ по гиперплоскостям $(\xi,x)=p$:

$$\int\limits_{x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2=0} f(x)\,dx=$$

$$=\frac{2^{-n+1}\pi^{-\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p^{n-3}\ln|p|\,(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2)_-^{-\frac{n}{2}+1}\times$$

$$\times\check{f}_p^{(n-1)}(\xi,p)\,dp\,\omega(\xi).$$

Мы видим, что для вычисления интеграла функции $f(x)$ по поверхности конуса $x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2=0$ не нужно знать интегралы функции $f(x)$ по гиперплоскостям, опорным к конусу и им параллельным.

*) Мы отбросили несущественное слагаемое

$$cp^{n-3}Q_-^{-\frac{n}{2}+1}\ln Q_-.$$

§ 4. СВОДКА ФОРМУЛ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

I. Обозначения

$f(x)$ — функция в n-мерном аффинном пространстве, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $dx\equiv dx_1\ldots dx_n$,

$\check{f}(\xi,p)\equiv[f(x)]^{\vee}$ — ее преобразование Радона,

$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $(\xi,x)\equiv\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n$,

$$\omega(\xi)=\sum(-1)^{k-1}\xi_k\,d\xi_1\ldots d\xi_{k-1}\,d\xi_{k+1}\ldots d\xi_n,$$

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & \text{когда } t>0,\\ 0, & \text{когда } t<0,\end{cases}$$

$P(x)$ — невырожденная квадратичная форма,

$Q(x)$ — квадратичная форма, сопряженная с $P(x)$.

II. Определение преобразования Радона

$$\check{f}(\xi,p)=\int f(x)\,\delta(p-(\xi,x))\,dx.$$

III. Основные свойства преобразования Радона

1. $\check{f}(\alpha\xi,\alpha p)=|\alpha|^{-1}\check{f}(\xi,p)$ для любого $\alpha\neq0$;
2. $\{f(x+a)\}^{\vee}=\check{f}(\xi,p+(\xi,a))$;
3. $\{f(A^{-1}x)\}^{\vee}=|\det A|\,\check{f}(A'\xi,p)$, где A — невырожденное линейное преобразование, A' — преобразование, ему сопряженное.
4. $\left\{\left(a,\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)\right\}^{\vee}=(a,\xi)\dfrac{\partial\check{f}(\xi,p)}{\partial p}$.
5. $\dfrac{\partial}{\partial p}\{(a,x)f(x)\}^{\vee}=-\left(a,\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right)\check{f}(\xi,p)$.
6. $\{f_1*f_2\}^{\vee}=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check{f}_1(\xi,t)\,\check{f}_2(\xi,p-t)\,dt$.

IV. Формула обращения для преобразования Радона

$$f(x)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Gamma}\check{f}_p^{(n-1)}(\xi,(\xi,x))\,\omega(\xi)$$

для пространства нечетной размерности n,

$$f(x)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check{f}(\xi,p)\,(p-(\xi,x))^{-n}\,dp\right)\omega(\xi)$$

для пространства четной размерности n. Здесь Γ — произвольная поверхность, окружающая начало.

V. Аналог формулы Планшереля

$$\int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2(2\pi)^{n-1}}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\check f_p^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\xi,p)\,\overline{\check g_p^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\xi,p)}\,dp\right)\omega(\xi)$$

для пространства нечетной размерности n;

$$\int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\check f(\xi,p_1)\,\overline{\check g(\xi,p_2)}\,(p_1-p_2)^{-n}\,dp_1\,dp_2\right)\omega(\xi)$$

для пространства четной размерности n.

VI. Преобразования Радона некоторых обобщенных функций в нечетномерном пространстве *). Звездочкой отмечены формулы, вывод которых в книге не был приведен.

Функция	Преобразование Радона
1*	$p^{n-1}a(\xi)$, где $a(\xi)$ — произвольная четная однородная функция степени однородности $-n$, такая, что $\int\limits_{\Gamma}a(\xi)\,\omega(\xi)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^n\pi^{n-1}\Gamma^{-1}(n)$
$\theta(x_1)$*	$\frac{1}{2}\pi^{n-\frac{3}{2}}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)\times$ $\times\left[p_+^{n-1}(\xi_1)_+^{-1}+p_-^{n-1}(\xi_1)_-^{-1}\right]\delta(\xi_2,\ldots,\xi_n)$

*) Определение преобразования Радона обобщенной функции см. в § 2, п. 1.

Продолжение

Функция	Преобразование Радона
$\delta(x_1,\ldots,x_n)$	$\delta(p)$
$\delta(x_1,\ldots,x_k)$*, k — нечетное ($k<n$)	$\pi^{n-k-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n-k}{2}\right)\lvert p\rvert^{n-k-1}\times$ $\times\,\delta(\xi_{k+1},\ldots,\xi_n)$
$\delta(x_1,\ldots,x_k)$* k — четное число	$(-1)^{\frac{n-k+1}{2}}2\pi^{n-k-\frac{1}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-k+1}{2}\right)\times$ $\times\,\Gamma^{-1}\left(\frac{n-k}{2}\right)p^{n-k-1}\ln\lvert p\rvert\times$ $\times\,\delta(\xi_{k+1},\ldots,\xi_n)$
$a(x_1)\,\delta(x_2,\ldots,x_n)$, где $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lvert a(x_1)\rvert\,dx_1<\infty$	$\lvert\xi_1\rvert^{-1}a\left(\frac{p}{\xi_1}\right)$
$(x_1)_+^{\lambda}\,\delta(x_2,\ldots,x_n)$, λ — нецелое	$p_+^{\lambda}(\xi_1)_+^{-1-\lambda}+p_-^{\lambda}(\xi_1)_-^{-1-\lambda}$
$(x_1)_+^{k}\,\delta(x_2,\ldots,x_n)$, $k=0,1,\ldots$	$p_+^{k}(\xi_1)_+^{-1-k}+p_-^{k}(\xi_1)_-^{-1-k}-$ $-\frac{(-1)^k}{k!}p^k\ln\lvert p\rvert\,\delta^{(k)}(\xi_1)$
$\lvert x_1\rvert^{\lambda}\,\delta(x_2,\ldots,x_n)$, $\lambda\neq-1,-2,\ldots$ $\lambda\neq 2k$ ($k=0,1,\ldots$)	$\lvert p\rvert^{\lambda}\lvert\xi_1\rvert^{-1-\lambda}$
$x_1^{2k}\,\delta(x_2,\ldots,x_n)$ $k=0,1,\ldots$	$p^{2k}\lvert\xi_1\rvert^{-1-2k}-\frac{2}{(2k)!}p^{2k}\ln\lvert p\rvert\,\delta^{(2k)}(\xi_1)$

Продолжение

Функция	Преобразование Радона
$\lvert x_1 \rvert^{\lambda} \operatorname{sign} x_1 \delta(x_2, \ldots, x_n)$ $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ $\lambda \neq 2k-1 \quad (k=1, 2, \ldots)$	$\lvert p \rvert^{\lambda} \operatorname{sign} p \cdot \lvert \xi_1 \rvert^{-1-\lambda} \operatorname{sign} \xi_1$
$x_1^{2k-1} \delta(x_2, \ldots, x_n)$ $k=1, 2, \ldots$	$p^{2k-1} \lvert \xi_1 \rvert^{-2k} \operatorname{sign} \xi_1 + \frac{2}{(2k-1)!} p^{2k-1} \ln \lvert p \rvert \, \delta^{(2k-1)}(\xi_1)$
Характеристическая функция верхней полы конуса в трехмерном пространстве $x_1^2-x_2^2-x_3^2>0,\ x_1>0$	$\pi \left[p_+^2 \theta(\xi_1)+p_-^2 \theta(-\xi_1)\right] (\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{-\frac{3}{2}} + p^2 \ln \lvert p \rvert (\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{-\frac{3}{2}}$
Характеристическая функция верхней полы гиперболоида в трехмерном пространстве $x_1^2-x_2^2-x_3^2>1,\ x_1>0$	$\pi\theta(\xi, p) (\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+^{-\frac{3}{2}} (p^2-\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_+ + \frac{1}{2} (\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{-\frac{3}{2}} (p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) \times \ln \lvert p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \rvert$
$P_+^{\lambda}(x)$	$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \lvert p \rvert^{2\lambda+n-1}}{(\lambda+1) \ldots \left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\lvert \Delta \rvert} \sin \pi\lambda} \times \left[\sin \pi \left(\frac{l}{2}+\lambda\right) Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}}(\xi) - \sin \frac{\pi k}{2} Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}(\xi)\right]$, где k, l — соответственно число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом представлении формы $P(x)$; Δ — дискриминант формы $P(x)$

Продолжение

Функция	Преобразование Радона
$\theta(x_1)(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2)_+^{\lambda *}$	$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \left[p_+^{2\lambda+n-1} \theta(\xi_1)+p_-^{2\lambda+n-1} \theta(-\xi_1)\right]}{(\lambda+1) \ldots \left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right)} \times (\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2)_+^{-\lambda-\frac{n}{2}} - \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \lvert p \rvert^{2\lambda+n-1}}{2(\lambda+1) \ldots \left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right) \sin \pi\lambda} \times (\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2)_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}$
$[P(x)+c]_+^{\lambda}$	$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{(\lambda+1) \ldots \left(\lambda+\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\lvert \Delta \rvert} \sin \pi\lambda} \times \left[\sin \pi \left(\frac{l}{2}+\lambda\right) Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}} (p^2+cQ)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}} - \sin \frac{\pi k}{2} Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}} (p^2+cQ)_+^{\lambda+\frac{n-1}{2}} + \sin \pi \left(\frac{l-1}{2}+\lambda\right) Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}} (p^2+cQ)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}} - \sin \frac{\pi(k-1)}{2} Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}} (p^2+cQ)_-^{\lambda+\frac{n-1}{2}}\right]$
$\theta(x_1)(x_1^2-x_2^2-x_3^2-1)_+^{\lambda *}$	$\frac{\pi}{\lambda+1} \theta(p\xi_1) (\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_2^3)_+^{-\lambda-\frac{3}{2}} \times (p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)_+^{\lambda+1} + \frac{\pi}{2(\lambda+1) \sin \pi\lambda} \times (\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)_-^{-\lambda-\frac{3}{2}} (p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)_+^{\lambda+1}$

Продолжение

Функция	Преобразование Радона
$\delta\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2\pi^{\frac{n-3}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) p^{n-3} \ln\lvert p\rvert \times \left(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2\right)_-^{-\frac{n}{2}+1}$
$\delta\left(x_1^2+\ldots+x_n^2-1\right)$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) \times \left(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2\right)^{-\frac{n}{2}+1} \left(p^2-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2\right)_+^{\frac{n-3}{2}}$
$\delta\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2-1\right)$	$\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2\right)_+^{-\frac{n}{2}+1} \times \left(p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right)_+^{\frac{n-3}{2}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-3}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right) \times \left(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2\right)_-^{-\frac{n}{2}+1} \times \left(p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \times \ln\left\lvert \frac{p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}{\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2} \right\rvert$

ГЛАВА II

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Здесь будут разобраны некоторые задачи интегральной геометрии в комплексном пространстве.

Сформулируем общую постановку задачи интегральной геометрии. Пусть задано некоторое пространство X и в нем заданы какие-то многообразия, скажем, аналитические и аналитически зависящие от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\lambda) = \mathfrak{M}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k).$$

Сопоставим функции $f(x)$ в пространстве X ее интегралы по этим многообразиям

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathfrak{M}(\lambda)} f(x)\, d\sigma. \tag{1}$$

Мы получили новую функцию $\varphi(\lambda)$, определенную на множестве многообразий $\mathfrak{M}(\lambda)$. Задача состоит в том, чтобы по функции φ восстановить исходную функцию $f(x)$. Более точно нас интересуют следующие вопросы:

1) Когда отображение $f \to \varphi$, устанавливаемое формулой (1), где $f(x)$ — «любая» функция в пространстве X, является взаимно однозначным? Если это отображение взаимно однозначно, то какова формула обращения, выражающая функцию $f(x)$ через $\varphi(\lambda)$.

2) Какие функции от λ можно представить интегралом (1), где $f(x)$ — «любая» функция в пространстве X?

При этом, говоря о «любых» функциях, мы имеем в виду класс функций, выделяемый какими-нибудь условиями на гладкость или на скорость их убывания на бесконечности,

Продолжение

Функция	Преобразование Радона
$\delta\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\right)$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}}2\pi^{\frac{n-3}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)p^{n-3}\ln\lvert p\rvert\times$ $\times\left(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2\right)_-^{-\frac{n}{2}+1}$
$\delta\left(x_1^2+\ldots+x_n^2-1\right)$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)\times$ $\times\left(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2\right)^{-\frac{n}{2}+1}\left(p^2-\xi_1^2-\ldots-\xi_n^2\right)_+^{\frac{n-3}{2}}$
$\delta\left(x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2-1\right)$	$\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2\right)_+^{-\frac{n}{2}+1}\times$ $\times\left(p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right)_+^{\frac{n-3}{2}}$ $+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-3}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)\times$ $\times\left(\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2\right)_-^{-\frac{n}{2}+1}\times$ $\times\left(p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right)^{\frac{n-3}{2}}\times$ $\times\ln\left\lvert\frac{p^2-\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}{\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_n^2}\right\rvert$

ГЛАВА II

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Здесь будут разобраны некоторые задачи интегральной геометрии в комплексном пространстве.

Сформулируем общую постановку задачи интегральной геометрии. Пусть задано некоторое пространство X и в нем заданы какие-то многообразия, скажем, аналитические и аналитически зависящие от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$:

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\lambda)=\mathfrak{M}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k).$$

Сопоставим функции $f(x)$ в пространстве X ее интегралы по этим многообразиям

$$\varphi(\lambda)=\int\limits_{\mathfrak{M}(\lambda)} f(x)\,d\sigma. \tag{1}$$

Мы получили новую функцию $\varphi(\lambda)$, определенную на множестве многообразий $\mathfrak{M}(\lambda)$. Задача состоит в том, чтобы по функции φ восстановить исходную функцию $f(x)$. Более точно нас интересуют следующие вопросы:

1) Когда отображение $f\to\varphi$, устанавливаемое формулой (1), где $f(x)$ — «любая» функция в пространстве X, является взаимно однозначным? Если это отображение взаимно однозначно, то какова формула обращения, выражающая функцию $f(x)$ через $\varphi(\lambda)$.

2) Какие функции от λ можно представить интегралом (1), где $f(x)$ — «любая» функция в пространстве X?

При этом, говоря о «любых» функциях, мы имеем в виду класс функций, выделяемый какими-нибудь условиями на гладкость или на скорость их убывания на бесконечности, но локально содержащий все бесконечно дифференцируемые функции *). Таким классом может быть, например, класс всех финитных бесконечно дифференцируемых функций или класс быстро убывающих на бесконечности бесконечно дифференцируемых функций.

Естественно ожидать, что для того, чтобы однозначно определить функцию n переменных, нужно знать функцию того же числа переменных. Иными словами, в разумно поставленной задаче интегральной геометрии совокупность многообразий $\mathfrak{M}$ в пространстве X, по которым мы интегрируем функцию $f(x)$, должна зависеть от того же числа параметров, какова размерность пространства X.

С точки зрения авторов, именно решение поставленных задач составляет основное содержание интегральной геометрии. До сих пор в понятие интегральной геометрии вкладывалось иное содержание, сводившееся главным образом к вычислению инвариантных мер в тех или иных однородных пространствах (см., например, [13]).

Задачи интегральной геометрии возникают естественным образом в теории представлений групп Ли и являются, по существу, основой теории представлений. Роль этих задач в теории представлений читатель поймет, прочитав главы IV и VI этой книги.

Для каждой задачи интегральной геометрии можно построить ее локальный аналог, заменяя многообразия касательными плоскостями. Локальная задача интегральной геометрии решена полностью только для простейшего случая — семейства $(n-1)$-мерных плоскостей в n-мерном аффинном пространстве.

Представляло бы значительный интерес решить локальную задачу интегральной геометрии для общего случая семейства k-мерных плоскостей в n-мерном аффинном пространстве. Естественно, что начать следовало бы с семейства прямых. При этом разумнее было бы решать сначала задачу для комплексного пространства, так как комплексный случай проще, чем вещественный.

*) То есть для каждой точки существует такая ее окрестность U, что, какова бы ни была бесконечно дифференцируемая функция на U, выделенный класс содержит функцию ψ, совпадающую с φ на U.

Пока в этом направлении сделан только первый шаг — решена задача интегральной геометрии для некоторых семейств прямых в трехмерном комплексном пространстве. Решение этой задачи дано в § 1.

В § 2 этой главы решается задача интегральной геометрии для семейства прямых, лежащих на квадрике в четырехмерном комплексном пространстве. Выбор этой задачи не случаен. Позже, в главе V, читатель увидит, что эта задача лежит в основе всей теории представлений группы Лоренца.

В § 3 изучается преобразование Радона для комплексного пространства. Этот параграф можно было бы рассматривать и как добавление к главе I, где было изучено преобразование Радона для вещественного пространства. В вещественном пространстве бóльшая часть формул, связанных с преобразованием Радона, писалась по-разному для нечетномерных и четномерных пространств. Как увидит читатель, комплексный случай более напоминает нечетномерный, чем изысканный четномерный случай.

§ 1. КОМПЛЕ́КСЫ ПРЯМЫХ В ТРЕХМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В этом параграфе будет рассмотрена следующая задача интегральной геометрии. Задано некоторое семейство прямых в трехмерном комплексном аффинном пространстве. Требуется, зная интегралы функции $f(z) = f(z_1, z_2, z_3)$, по прямым семейства восстановить функцию $f(z)$.

Поскольку функция f зависит от трех комплексных переменных, то задачу интегральной геометрии разумно ставить для трехпараметрических семейств прямых, то есть для *компле́ксов* прямых. Здесь будет дано решение задачи для одного специального класса комплексов. Эти комплексы характерны тем, что для них задача решается более просто — формула, выражающая функцию f через ее интегралы по прямым комплекса, локальна (см. п. 4).

1. Плюкеровы координаты прямой. Прямые в пространстве будем задавать при помощи плюкеровых координат, которые определяются следующим образом.

8 Зак. 2905. И. М. Гельфанд и др., вып. 5

Пусть

$$(z_1,\ z_2,\ z_3) \quad \text{и} \quad (z_1',\ z_2',\ z_3')$$

— какие-нибудь две точки прямой. Тогда *плюкеровыми координатами* прямой называются следующие шесть чисел:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= z_1' - z_1, & p^1 &= z_2' z_3 - z_3' z_2, \\ \alpha_2 &= z_2' - z_2, & p^2 &= z_3' z_1 - z_1' z_3, \\ \alpha_3 &= z_3' - z_3, & p^3 &= z_1' z_2 - z_2' z_1. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Векторы $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ и $p = (p^1,\ p^2,\ p^3)$ имеют простой геометрический смысл. Именно, вектор α есть направляющий вектор прямой, а p есть векторное произведение $p = [\alpha,\ z]$ направляющего вектора α и «радиуса-вектора» z какой-либо из точек прямой.

Очевидно, что любая точка z прямой с плюкеровыми координатами α, p удовлетворяет уравнению

$$p = [\alpha,\ z]. \tag{2}$$

Отсюда видно, что *прямая однозначно определяется своими плюкеровыми координатами* α, p. Обратно, плюкеровы координаты определяются прямой однозначно, с точностью до постоянного множителя. Иными словами, плюкеровы координаты представляют собой однородные координаты прямой. В самом деле, пусть $p = [\alpha,\ z]$ и $p' = [\alpha',\ z]$ — два уравнения одной и той же прямой. Тогда векторы α и α' являются направляющими векторами прямой, а потому

$$\alpha' = \lambda\alpha, \qquad \lambda \neq 0.$$

Из уравнений (3) получаем также, что $p' = \lambda[\alpha,\ z] = \lambda p$. Таким образом, плюкеровы координаты α, p и α', p' между собой пропорциональны.

Между плюкеровыми координатами α, p имеет место соотношение

$$\alpha_1 p^1 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^3 = 0, \tag{3}$$

поскольку вектор $p = [\alpha,\ z]$ ортогонален вектору α, то есть $(\alpha,\ [\alpha,\ z]) = 0$. Легко видеть, что, обратно, любые шесть чисел α_i, p^j, связанные соотношением (3), можно рассматривать как плюкеровы координаты некоторой прямой. Уравнение этой прямой имеет следующий вид:

$$p = [\alpha,\ z]\ ^{*)}.$$

Приведем формулы преобразования плюкеровых координат прямой при аффинных преобразованиях пространства.

I. *При преобразовании сдвига*

$$z' = z + z_0$$

плюкеровы координаты преобразуются по формулам

$$\alpha' = \alpha, \qquad p' = p + [\alpha,\ z_0].$$

II. *При центроаффинном преобразовании*

$$z_i' = a_i^j z_j$$

плюкеровы координаты преобразуются по формулам

$$\alpha_i' = a_i^j \alpha_j, \qquad p'^i = b_j^i p^j,$$

где b_j^i — *алгебраическое дополнение элемента* a_j^i *в матрице* $\|a_j^i\|$.

Эти формулы непосредственно следуют из определения плюкеровых координат.

2. Комплéксы прямых. Множество всех прямых в трехмерном комплексном пространстве можно рассматривать как многообразие. Именно, будем рассматривать системы чисел $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ p^1,\ p^2,\ p^3)$ как однородные координаты точек пятимерного комплексного проективного пространства. Как мы видели в п. 1, числа α_i и p^j являются плюкеровыми координатами некоторой прямой тогда и только тогда, когда они связаны между собой соотношением

$$\alpha_1 p^1 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^3 = 0. \tag{1}$$

Таким образом, *множество всех прямых в трехмерном комплексном пространстве образует поверхность второго порядка* $\alpha_1 p^1 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^3 = 0$ *в пятимерном ком-*

*) Собственно говоря, мы всегда предполагаем дополнительно, что $\alpha \neq 0$. Этого предположения можно и не делать, если рассматривать прямые не в аффинном, а в проективном пространстве. При $\alpha = 0$ мы получаем бесконечно удаленные прямые.

плексном проективном пространстве. Из этой поверхности следует отбросить точки, отвечающие бесконечно удаленным прямым, то есть точки, у которых $\alpha=0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать комплексы прямых, то есть семейства прямых, зависящих от трех комплексных параметров.

Любой комплекс прямых задается одним уравнением между плюкеровыми координатами

$$F(\alpha, p)=0. \tag{2}$$

не являющимся следствием уравнения (1) (F — однородная функция).

Будем рассматривать только *алгебраические комплексы*, то есть будем предполагать, что F есть (однородный) многочлен. Этот многочлен будем всегда считать *неприводимым*. Степень многочлена F назовем *порядком* комплекса.

Пример комплекса прямых дают касательные к произвольной (алгебраической) поверхности. Другим примером служит комплекс прямых, пересекающих заданную алгебраическую кривую (которая может быть и бесконечно удаленной). Третий пример: задается однопараметрическое семейство плоскостей и рассматриваются все прямые, лежащие на этих плоскостях. Комплексы второго и третьего типов можно рассматривать как случаи вырождения комплексов первого типа — когда поверхность «стягивается» в линию и (двойственный случай) когда поверхность оказывается развертывающейся.

Укажем некоторые свойства прямых комплекса.

Совокупность прямых комплекса, проходящих через заданную точку пространства z_0, зависит от одного (комплексного) параметра. В самом деле, условие того, что прямая α, p проходит через точку z_0, записывается в виде

$$p=[\alpha, z_0], \tag{3}$$

что дает два дополнительных условия на плюкеровы координаты прямой.

Составим уравнение конуса, образованного прямыми комплекса, проходящими через заданную точку z_0. Пусть уравнение комплекса есть

$$F(\alpha, p)=0.$$

Если z — точка конуса, то плюкеровы координаты прямолинейной образующей конуса, проходящей через точку z, суть

$$\alpha=z-z_0, \qquad p=[\alpha, z_0]=[z, z_0].$$

Подставляя эти α и p в уравнение комплекса, получим, что *уравнение конуса, образованного прямыми комплекса $F(\alpha, p)=0$, проходящими через точку z_0, имеет следующий вид*:

$$F(z-z_0, [z, z_0])=0. \tag{4}$$

Ясно, что эта коническая поверхность имеет, вообще говоря, тот же порядок, что и исходный комплекс.

Легко убедиться также, что *совокупность прямых комплекса, имеющих заданное направление α, зависит от одного (комплексного) параметра, кроме исключительного случая, когда уравнение комплекса не зависит явно от p.* В этом исключительном случае комплекс состоит из всех прямых, параллельных образующим некоторого конуса. Следовательно, этот исключительный комплекс либо вообще не содержит прямых заданного направления, либо все прямые заданного направления принадлежат комплексу.

Уравнение цилиндрической поверхности, образованной прямыми комплекса заданного направления α, получится, если в уравнение комплекса вместо p подставить $p=[\alpha, z]$. Оно имеет тем самым следующий вид:

$$F(\alpha, [\alpha, z])=0. \tag{5}$$

Ясно, что порядок этой поверхности не превышает степени многочлена F относительно плюкеровых координат p^1, p^2, p^3.

3. Один специальный класс комплексов. Наложим теперь на рассматриваемые комплексы дополнительное требование. Это требование сформулируем сначала в геометрической форме.

Возьмем в пространстве любые две точки $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$, лежащие на одной из прямых комплекса, и рассмотрим все прямые комплекса, проходящие через точку $z^{(1)}$, и все прямые комплекса, проходящие через точку $z^{(2)}$. Мы получим два конуса с вершинами в $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ (исключение составляет особый случай, когда любая прямая, проходящая через одну из этих точек, принадлежит комплексу). Прямая, проходящая через точки $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$, является общей образующей этих конусов. *Будем требовать, чтобы два любых таких конуса, составленных из прямых комплекса и имеющих общую образующую, имели бы общую касательную плоскость вдоль этой образующей.* (Формально будем это требование считать выполненным и в особом случае, когда хотя бы один из пары конусов превращается в совокупность всех прямых, проходящих через данную точку.)

Ниже мы сформулируем это условие в алгебраической форме.

Заметим, что если вершина конуса, составленного из прямых комплекса, удаляется в бесконечность, то в пределе конус переходит в цилиндр. Таким образом, в рассматриваемых комплексах цилиндры и конусы, составленные из прямых комплекса и имеющие общую образующую, также касаются один другого вдоль этой общей образующей.

В п. 2, стр. 116 были приведены примеры комплексов. Все эти комплексы удовлетворяют наложенному требованию *). Проверим это для комплекса прямых, касательных к некоторой поверхности. Пусть заданы два конуса, касательных к поверхности и имеющих общую образующую l. Проведем касательную плоскость к поверхности в точке, где ее касается прямая l. Очевидно, эта плоскость касается одновременно обоих конусов вдоль прямой l.

Легко видеть, что и комплекс прямых, пересекающих заданную кривую, также удовлетворяет поставленному требованию. Заметим, что здесь возможен особый случай. Именно, если взять точку на заданной кривой, то любая прямая, проходящая через эту точку, принадлежит комплексу.

Дадим теперь алгебраическую трактовку приведенного условия. *Пусть уравнение комплекса прямых есть $F(\alpha, p)=0$, где F — неприводимый многочлен. Для того чтобы два любых конуса, составленных из прямых комплекса и имеющих общую образующую, касались один другого вдоль этой общей образующей, необходимо и достаточно, чтобы плюкеровы координаты прямых комплекса удовлетворяли соотношению*

$$(F_\alpha, F_p) \equiv \sum_{i=1}^{3} F_{\alpha_i}(\alpha, p) F_{p^i}(\alpha, p) = 0. \qquad (1)$$

Иными словами, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1) *являлось следствием из уравнения комплекса $F(\alpha, p)=0$ и из соотношения $\alpha_1 p^1 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^3 = 0$, имеющего место между плюкеровыми координатами прямой.*

Для доказательства рассмотрим два конуса, составленных из прямых комплекса, один с вершиной в точке z^0, другой с вершиной в точке z'. Их уравнения будут соответственно

$$F(z - z^0, [z, z^0]) = 0 \qquad (2)$$

и

$$F(z - z', [z, z']) = 0. \qquad (2')$$

Предположим, что прямая, проходящая через вершины конусов z^0 и z',

$$\alpha = z' - z^0, \quad p = [z', z^0]$$

принадлежит комплексу, то есть $F(z' - z^0, [z', z^0]) = 0$, и является, таким образом, общей образующей конусов.

Направление касательной плоскости к конусу (2) вдоль образующей α, p определяется частными производными функции $\Phi(z) \equiv F(z - z^0, [z, z^0])$, то есть вектором $F_\alpha(\alpha, p) + [z^0, F_p(\alpha, p)]$ *).

Чтобы конусы (2) и (2′) касались друг друга вдоль общей образующей α, p, необходимо и достаточно, чтобы векторы $F_\alpha + [z^0, F_p]$ и $F_\alpha + [z', F_p]$ были коллинеарны на этой образующей **), то есть чтобы было

$$\lambda(F_\alpha + [z^0, F_p]) = \mu(F_\alpha + [z', F_p]). \qquad (3)$$

Покажем, что из соотношения (3) вытекает равенство $\sum F_{\alpha_i} F_{p^i} = 0$. В самом деле, если $\lambda \neq \mu$, то достаточно скалярно умножить обе части равенства (3) на F_p. В результате мы получим, что $(F_\alpha, F_p) \equiv \sum F_{\alpha_i} F_{p^i} = 0$. Пусть теперь

*) Можно показать, что и обратно, примерами, приведенными на стр. 116, исчерпываются все неприводимые комплексы, удовлетворяющие нашему требованию.

*) Это — ковариантный вектор. Его удобно, по аналогии со случаем вещественного евклидова пространства, называть вектором нормали.

**) Если α, p — прямая «общего положения» в комплексе, а z^0, z' — точки «общего положения» на ней, то эти векторы — ненулевые. Это следует из неприводимости многочлена F.

$\lambda=\mu$. Тогда из равенства (3) следует, что $[\alpha, F_p]\equiv\equiv[z'-z^0, F_p]=0$, то есть что вектор F_p коллинеарен вектору α.

С другой стороны, применяя теорему Эйлера об однородных функциях к многочлену $F(\alpha)\equiv F(\alpha, [\alpha, z^0])$, мы получим

$$(\alpha, F_\alpha+[z^0, F_p])=kF(\alpha)=0 \qquad (4)$$

(k — степень однородности многочлена $F(\alpha)$ относительно α). Заменив в равенстве (4) вектор α коллинеарным ему вектором F_p, получим снова, что $(F_\alpha, F_p)=0$.

Итак, доказано, что из условия касания конусов вдоль общей образующей следует, что $(F_\alpha, F_p)=0$. Обратно, пусть выполнено условие $(F_\alpha, F_p)=0$. Покажем, что тогда конусы касаются друг друга вдоль общей образующей, то есть что векторы

$$F_\alpha+[z^0, F_p] \quad \text{и} \quad F_\alpha+[z', F_p]$$

коллинеарны. В самом деле, из равенства $(F_\alpha, F_p)=0$ следует, что

$$(F_p, F_\alpha+[z^0, F_p])=0.$$

Отсюда и из формулы (4) (полученной из теоремы Эйлера об однородных функциях) заключаем, что вектор $F_\alpha+[z^0, F_p]$ коллинеарен вектору $[\alpha, F_p]$. По той же причине вектор $F_\alpha+[z', F_p]$ также коллинеарен вектору $[\alpha, F_p]$. Следовательно, если $[\alpha, F_p]\neq 0$, то векторы $F_\alpha+[z^0, F_p]$ и $F_\alpha+[z', F_p]$ коллинеарны. В особом же случае, когда $[\alpha, F_p]\equiv[z', F_p]-[z^0, F_p]=0$, эти векторы попросту совпадают.

4. Решение задачи интегральной геометрии для комплекса прямых. Рассмотрим комплекс прямых

$$F(\alpha, p)=0 \qquad (1)$$

(F — неприводимый многочлен) такой, что его произвольная прямая удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=1}^{3} F_{\alpha_i}F_{p^i}=0. \qquad (2)$$

Геометрический смысл этого требования был выяснен в п. 3. Для такого комплекса будет решена следующая задача интегральной геометрии.

Пусть $f(z)=f(z_1, z_2, z_3)$ — функция, бесконечно дифференцируемая и быстро убывающая вместе со всеми производными. Проинтегрируем ее по каждой прямой комплекса. Интеграл по прямой будем задавать следующей формулой:

$$\varphi(\alpha, p)=\frac{i}{2}\int f(\alpha t+\beta)\,dt\,d\bar{t}, \qquad (3)$$

где α, p — плюкеровы координаты прямой, а β — произвольная точка прямой, то есть $p=[\alpha, \beta]$ *). Задача состоит в том, чтобы, зная $\varphi(\alpha, p)$ для всех прямых комплекса, восстановить исходную функцию $f(z)$. Мы увидим, что эта задача имеет единственное решение. Это решение локально. Под этим мы понимаем следующее. Чтобы восстановить значение функции $f(z)$ в некоторой точке z^0, достаточно знать только интегралы по прямым комплекса, проходящим через точку z^0, и по бесконечно близким к ним прямым комплекса. Более того, как мы увидим, чтобы восстановить значение функции в точке z^0, можно ограничиться только теми прямыми комплекса, которые параллельны прямым комплекса, проходящим через точку z^0. В пункте 5 мы увидим, что рассматриваемые комплексы — это в некотором смысле наиболее общие комплексы, для которых решение задачи интегральной геометрии единственно и локально **).

Перейдем к решению задачи. Будем искать значение функции $f(z)$ в точке z^0 пространства. Для этого используем следующий прием. Сначала проведем через точку z^0 всевозможные прямые комплекса, то есть прямые с плюкеровыми координатами α, $p=[\alpha, z^0]$, удовлетворяющими уравнению $F(\alpha, p)=0$. Эти прямые образуют конус, уравнение которого

$$F(z-z^0, [z, z^0])=0. \qquad (4)$$

*) Заметим, что интеграл по прямой, определенный формулой (3), зависит не только от самой прямой, но и от выбора ее плюкеровых координат α, p, поскольку для любого $\lambda\neq 0$ имеем, очевидно,

$$\varphi(\lambda\alpha, \lambda p)=\lambda^{-1}\bar{\lambda}^{-1}\varphi(\alpha, p).$$

**) Простейшим комплексом, для которого решение задачи интегральной геометрии не единственно, является общий комплекс первого порядка (см. [25]).

Сдвинем в комплексе каждую из прямых α, p, проходящих через точку z^0, параллельно себе на бесконечно малое расстояние. Плюкеровы координаты α при этом сдвиге не изменятся, а координаты p получат некоторое приращение $dp=(dp^1, dp^2, dp^3)$.

Покажем, что вектор dp коллинеарен вектору

$$a=F_\alpha+[z^0, F_p], \tag{5}$$

определяющему направление касательной плоскости к конусу (4). (*Исключением будет случай, когда направление вектора dp определено неоднозначно. В этом особом случае вектор dp всегда можно взять коллинеарным вектору a.*)

Для доказательства заметим, что вектор p удовлетворяет двум соотношениям. Первое из них — тождественное соотношение, связывающее между собой плюкеровы координаты

$$(\alpha, p)\equiv\alpha_1p^1+\alpha_2p^2+\alpha_3p^3=0. \tag{6}$$

Второе соотношение — условие того, что прямая α, p принадлежит комплексу

$$F(\alpha, p)=0. \tag{7}$$

Продифференцировав равенства (6) и (7), мы получаем два соотношения для вектора dp:

$$(\alpha, dp)\equiv\alpha_1\,dp^1+\alpha_2\,dp^2+\alpha_3\,dp^3=0, \tag{8}$$

$$(F_p, dp)\equiv F_{p^1}\,dp^1+F_{p^2}\,dp^2+F_{p^3}\,dp^3=0. \tag{9}$$

Этими двумя соотношениями направление вектора dp определяется однозначно. Исключение составляет случай, когда вектор F_p коллинеарен вектору α.

Убедимся, что вектор $a=F_\alpha+[z^0, F_p]$ удовлетворяет тем же соотношениям, что и вектор dp: $(\alpha, a)=0$, $(F_p, a)=0$. Отсюда будет непосредственно следовать, что векторы dp и a коллинеарны.

Первое равенство $(\alpha, a)\equiv(\alpha, F_\alpha+[z^0, F_p])=0$ вытекает сразу из теоремы Эйлера об однородных функциях, примененной к многочлену $F(\alpha, [\alpha, z^0])$ (см. п. 3, формула (4)).

Второе равенство

$$(F_p, a)\equiv(F_p, F_\alpha)+(F_p, [z^0, F_p])=0$$

есть непосредственное следствие условия (2).

Итак, доказано, что при параллельном сдвиге прямой в комплексе, проходящей через точку z^0, вектор dp коллинеарен вектору $a=F_\alpha+[z^0, F_p]$.

Введем операторы «бесконечно малого параллельного сдвига прямых комплекса, проходящих через точку z^0»:

$$L=\left(a, \frac{\partial}{\partial p}\right)\equiv a_1\frac{\partial}{\partial p^1}+a_2\frac{\partial}{\partial p^2}+a_3\frac{\partial}{\partial p^3} \tag{10}$$

и

$$\overline{L}=\left(\overline{a}, \frac{\partial}{\partial \overline{p}}\right)\equiv \overline{a}_1\frac{\partial}{\partial \overline{p}^1}+\overline{a}_2\frac{\partial}{\partial \overline{p}^2}+\overline{a}_3\frac{\partial}{\partial \overline{p}^3}, \tag{10'}$$

где $a=F_\alpha+[z^0, F_p]$. Мы покажем, что если к функции $\varphi(\alpha, p)$ применить сначала операторы L и $\overline{L}$, а затем полученную функцию $L\overline{L}\varphi(\alpha, p)$ усреднить по множеству прямых комплекса, проходящих через точку z^0, то в результате получится, с точностью до множителя, искомое значение функции f в точке z^0. Точный результат формулируется в виде следующей теоремы.

Предположим, что все прямые комплекса $F(\alpha, p)=0$, где F — неприводимый многочлен, удовлетворяют условию

$$(F_\alpha, F_p)\equiv F_{\alpha_1}F_{p^1}+F_{\alpha_2}F_{p^2}+F_{\alpha_3}F_{p^3}=0,$$

и пусть в конусе, образованном прямыми комплекса, проходящими через точку z^0, точка z^0 является единственной особой точкой. Тогда значение функции $f(z)$ в точке z^0 выражается через интегралы $\varphi(\alpha, p)$ функции $f(z)$ по прямым комплекса следующей формулой обращения:

$$f(z^0)=c_{z^0}\frac{i}{2}\int\limits_\Gamma L\overline{L}\varphi(\alpha, [\alpha, z^0])\,\omega_{z^0}(\alpha)\overline{\omega_{z^0}(\alpha)}, \tag{11}$$

где L, $\overline{L}$ — операторы бесконечно малого параллельного сдвига в комплексе, определенные формулами (10) *и* (10′). *Интегрирование ведется по произвольному контуру Γ на* *конусе* $F(\alpha, [\alpha, z^0]) = 0$ *в пространстве точек* α, *пересекающему каждую образующую конуса по одному разу; дифференциальная форма* $\omega_{z^0}(\alpha)$ *имеет следующий вид*:

$$\omega_{z^0}(\alpha) = \frac{\alpha_1\, d\alpha_2 - \alpha_2\, d\alpha_1}{a_3} = \frac{\alpha_2\, d\alpha_3 - \alpha_3\, d\alpha_2}{a_1} = \frac{\alpha_3\, d\alpha_1 - \alpha_1\, d\alpha_3}{a_2} \, {}^{*)}, \tag{12}$$

где $a \equiv F_\alpha + [z^0, F_p]$. Позже будет также показано, что постоянная c_{z^0} в формуле (11) может быть вычислена по следующей формуле:

$$c_{z^0}^{-1} = -\pi\Delta \frac{i}{2} \int\limits_{\Gamma} \frac{B(a, a)}{A^2(\alpha, \alpha)} \omega_{z^0}(\alpha) \overline{\omega_{z^0}(\alpha)}, \tag{13}$$

где $A(\alpha, \alpha)$ — произвольная эрмитова положительно определенная квадратичная форма, а $B(a, a)$ — сопряженная к A эрмитова форма (то есть матрицы форм B и A являются взаимно обратными), Δ — дискриминант формы A.

Собственно говоря, такого контура Γ, пересекающего каждую образующую конуса по одному разу, не существует, и выражение «интеграл по контуру Γ» следует понимать в условном смысле. Именно, сначала пространство образующих нужно разбить на достаточно малые области и для каждой области взять контур Γ_i, пересекающий образующие этой области по одному разу. Интеграл (11) определяется как сумма интегралов по Γ_i. Это определение имеет смысл, поскольку интегралы по Γ_i не зависят от выбора контуров Γ_i, а их сумма не зависит от способа разбиения пространства образующих на части. В самом деле, легко убедиться, что стоящая под знаком интеграла форма $L\overline{L}\varphi(\alpha, [\alpha, z^0])\, \omega_{z^0}(\alpha)\, \overline{\omega_{z^0}(\alpha)}$ однородна на конусе и имеет степень однородности (0, 0). Следовательно, она сохраняется при деформации контура интегрирования (см. также определение вычета однородной функции, Добавление, § 2, п. 5).

---

*) Форма $\omega_{z^0}(\alpha)$ на конусе определяется из соотношения

$$dF(\alpha)\, \omega_{z^0}(\alpha) = \alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 + \alpha_2\, d\alpha_3\, d\alpha_1 + \alpha_3\, d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

где $F(\alpha) = 0$ — уравнение конуса. Легко убедиться непосредственно, что на конусе каждая из форм, приведенных в (12), удовлетворяет этому соотношению.

5. Вывод формулы обращения. Дадим вывод приведенной в п. 4 формулы обращения.

Формулу обращения достаточно вывести для какой-либо фиксированной точки, скажем, для точки $z^0 = 0$. Иными словами, достаточно показать, что

$$f(0) = c_0 \frac{i}{2} \int\limits_{\Gamma} \left(F_\alpha, \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(\overline{F}_\alpha, \frac{\partial}{\partial \overline{p}}\right) \varphi(\alpha, 0)\, \omega(\alpha)\, \overline{\omega(\alpha)}, \tag{1}$$

где $\omega(\alpha) = \dfrac{\alpha_1\, d\alpha_2 - \alpha_2\, d\alpha_1}{F_{\alpha_3}} = \dfrac{\alpha_2\, d\alpha_3 - \alpha_3\, d\alpha_2}{F_{\alpha_1}} = \dfrac{\alpha_3\, d\alpha_1 - \alpha_1\, d\alpha_3}{F_{\alpha_2}}$,

а Γ — контур на поверхности конуса $F(\alpha, 0) = 0$.

Поскольку функция $\varphi(\alpha, p)$ получена интегрированием исходной функции $f(z)$ по прямым комплекса, то интеграл

$$(\Phi, f) = \frac{i}{2} \int\limits_{\Gamma} \left(F_\alpha, \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(\overline{F}_\alpha, \frac{\partial}{\partial \overline{p}}\right) \varphi(\alpha, 0)\, \omega(\alpha)\, \overline{\omega(\alpha)} \tag{2}$$

задает линейный функционал Φ в пространстве функций $f(z)$. Очевидно, что этот функционал сосредоточен на поверхности конуса $F(z, 0) = 0$. Мы хотим показать, что на самом деле

$$\Phi = c\delta(z).$$

Прежде всего заметим, что Φ — *однородная обобщенная функция степени однородности* $(-3, -3)$. В самом деле, заменим функцию $f(z)$ на функцию $f(\lambda z)$, $\lambda \neq 0$. При этой замене функция $\varphi(\alpha, p)$ перейдет в функцию

$$\varphi_1(\alpha, p) = \varphi(\lambda\alpha, \lambda^2 p) = \lambda^{-1}\overline{\lambda}^{-1}\varphi(\alpha, \lambda p).$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{\partial^2 \varphi_1(\alpha, 0)}{\partial p^i\, \partial \overline{p}^j} = \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, 0)}{\partial p^i\, \partial \overline{p}^j}.$$

Следовательно, подинтегральное выражение в (2) сохраняется при замене функции $\varphi(\alpha, p)$ на функцию $\varphi_1(\alpha, p)$.

Итак, доказано, что $(\Phi, f(\lambda z)) = (\Phi, f(z))$, то есть что обобщенная функция Φ в пространстве функций трех переменных однородна с показателем однородности $(-3, -3)$. Известно, что единственная однородная функция с показателем однородности $(-3, -3)$, сосредоточенная в точке $z = 0$, есть функция $c\delta(z)$ (см. Добавление, § 2). Поэтому для доказательства того, что $\Phi = c\delta(z)$, достаточно убедиться, что обобщенная функция Φ сосредоточена в вершине конуса. Иными словами, нужно доказать следующее утверждение.

Лемма. *Если $f(z) = 0$ в окрестности точки $z = 0$, то* $(\Phi, f) = 0$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму для функции $f(z)$, сосредоточенной в сколь угодно малой окрестности точки $z^0 \neq 0$. Итак, пусть $z^0 \neq 0$ — произвольная точка на конусе $F(z, 0) = 0$. По предположению, производные F_{z_1}, F_{z_2}, F_{z_3} не обращаются одновременно в нуль в точке z^0. Поэтому можно всегда указать координату z_i и производную F_{z_j} $(i \neq j)$, отличные от нуля в точке z^0 *). Пусть, например, $F_{z_2} \neq 0$, $z_3 \neq 0$ в точке z^0. Выберем столь малую окрестность точки z^0, что в этой окрестности F_{z_2} и z_3 нигде не обращаются в нуль, и пусть $f(z)$ — произвольная функция, сосредоточенная в этой окрестности. Нам нужно доказать, что тогда $(\Phi, f) = 0$. Мы убедимся в этом, выразив интеграл (Φ, f) непосредственно через функцию f.

Запишем интегралы по прямым в следующей форме:

$$\varphi(\alpha, p) = \frac{i}{2} \int f(\alpha_1 t + v_1, \alpha_2 t + v_2, \alpha_3 t)\, dt\, d\bar{t},$$

где $(v_1, v_2, 0)$ — точка пересечения прямой с плоскостью $z_3 = 0$.

Величины v_1, v_2 непосредственно выражаются через плюккеровы координаты прямой:

$$v_1 = \frac{p^2}{\alpha_3}, \quad v_2 = -\frac{p^1}{\alpha_3}.$$

Следовательно,

$$\varphi(\alpha, p) = \frac{i}{2} \int f\left(\alpha_1 t + \frac{p^2}{\alpha_3}, \alpha_2 t - \frac{p^1}{\alpha_3}, \alpha_3 t\right) dt\, d\bar{t}. \tag{3}$$

Заметим, что в этой записи функция φ не зависит от p^3. Такая запись оказалась возможной из-за соотношения, связывающего между собой плюккеровы координаты прямой:

$$\alpha_1 p^1 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^3 = 0;$$

в силу этого соотношения одну из плюккеровых координат всегда можно исключить.

Подставим это выражение для функции $\varphi(\alpha, p)$ в формулу (2) для (Φ, f). В результате мы выразим (Φ, f) непосредственно через функцию f:

$$(\Phi, f) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_\Gamma \left(\int \frac{1}{|\alpha_3|^2}\left(-F_{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial z_2} + F_{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(-\bar{F}_{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + \bar{F}_{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\right) f(\alpha t)\, dt\, d\bar{t}\right) \omega(\alpha)\overline{\omega(\alpha)}, \tag{4}$$

где внешний интеграл берется по контуру, лежащему на конусе $F(\alpha, 0) = 0$, а

$$\omega(\alpha) = \frac{\alpha_1 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_1}{F_{\alpha_3}} = \frac{\alpha_2 d\alpha_3 - \alpha_3 d\alpha_2}{F_{\alpha_1}} = \frac{\alpha_3 d\alpha_1 - \alpha_1 d\alpha_3}{F_{\alpha_2}}.$$

Мы видим, что интеграл (4) берется по поверхности конуса $F(z, 0) = 0$. Преобразуем этот интеграл, взяв в качестве новых переменных координаты точек конуса $z_1 = \alpha_1 t$, $z_2 = \alpha_2 t$, $z_3 = \alpha_3 t$. Так как, по предположению, в области, где сосредоточена функция $f(z)$, $F_{z_2} \neq 0$, то в качестве независимых переменных на конусе можно взять z_1 и z_3. Тогда имеем

$$dz_1\, dz_3 = -t\, dt\, (\alpha_3 d\alpha_1 - \alpha_1 d\alpha_3).$$

В результате, после перехода к новым переменным, интеграл (4) принимает следующий вид:

$$(\Phi, f) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \frac{1}{|z_3|^2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{F_{z_1}}{F_{z_2}}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\bar{F}_{z_1}}{\bar{F}_{z_2}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right) \times$$
$$\times f(z)\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_3\, d\bar{z}_3 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \frac{1}{|z_3|^2} f''_{z_1\bar{z}_1}\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_3\, d\bar{z}_3,$$

где $f''_{z_1\bar{z}_1}$ — полная производная по z_1, $\bar{z}_1$ функции f на поверхности конуса $F(z, 0) = 0$.

По теореме Стокса этот интеграл равен нулю. Лемма доказана.

*) Это очевидно, если в точке z^0 отлично от нуля не менее двух координат. Если же в точке z^0, скажем, $z_1 = z_2 = 0$ и $z_3 \neq 0$, то в силу равенства $z_1 F_{z_1} + z_2 F_{z_2} + z_3 F_{z_3} = 0$ должно быть $F_{z_3} = 0$. Следовательно, либо $F_{z_1} \neq 0$, либо $F_{z_2} \neq 0$.

Итак, доказано, что обобщенная функция Φ сосредоточена в вершине конуса 0. Тем самым доказана и формула обращения

$$f(0)=c_0\frac{i}{2}\int_\Gamma\left(F_\alpha, \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(\bar{F}_\alpha, \frac{\partial}{\partial \bar{p}}\right)\varphi(\alpha, 0)\,\omega(\alpha)\overline{\omega(\alpha)}.$$

Остается вычислить постоянную в формуле обращения. Для этого применим формулу обращения к функции

$$f(z)=e^{-A(z, z)},$$

где

$$A(z, z)=\sum g_{ij}z_i\bar{z}_j$$

— произвольная эрмитова положительно определенная форма. Вычислим сначала интегралы функции $f(z)$ по прямым. Имеем:

$$\varphi(\alpha, [\alpha, \beta])=\frac{i}{2}\int f(\alpha t+\beta)\,dt\,d\bar{t}=$$

$$=\frac{i}{2}\int e^{-t\bar{t}A(\alpha, \alpha)-tA(\alpha, \beta)-\bar{t}A(\beta, \alpha)-A(\beta, \beta)}\,dt\,d\bar{t}=$$

$$=\frac{\pi}{A(\alpha, \alpha)}e^{-\frac{A(\beta, \beta)A(\alpha, \alpha)-|A(\alpha, \beta)|^2}{A(\alpha, \alpha)}}.$$

Легко убедиться в справедливости следующего равенства:

$$A(\beta, \beta)A(\alpha, \alpha)-|A(\alpha, \beta)|^2=\Delta B([\alpha, \beta], [\alpha, \beta]),$$

где

$$B(z, z)=\sum g^{ij}z_i\bar{z}_j$$

— сопряженная к $A(z, z)$ эрмитова форма (то есть матрицы форм A и B являются взаимно обратными), а Δ — дискриминант формы A.

Таким образом, имеем

$$\varphi(\alpha, p)=\frac{\pi}{A(\alpha, \alpha)}e^{-\frac{B(p, p)}{A(\alpha, \alpha)}}.$$

Применяя к функции $\varphi(\alpha, p)$ операторы бесконечно малого параллельного сдвига

$$L=\left(a, \frac{\partial}{\partial p}\right) \quad \text{и} \quad \bar{L}=\left(\bar{a}, \frac{\partial}{\partial \bar{p}}\right),$$

мы получим

$$L\bar{L}\varphi(\alpha, 0)=-\frac{\pi\Delta B(F_\alpha, F_\alpha)}{A^2(\alpha, \alpha)}.$$

Подставляя это выражение в формулу для $f(0)$, находим

$$c_0^{-1}=-\pi\Delta\frac{i}{2}\int_\Gamma\frac{B(F_\alpha(\alpha, 0), F_\alpha(\alpha, 0))}{A^2(\alpha, \alpha)}\,\omega(\alpha)\overline{\omega(\alpha)}. \qquad (5)$$

Аналогично, для произвольной точки z^0 получаем следующее выражение для постоянной c_{z^0} в формуле обращения

$$c_{z^0}^{-1}=-\pi\Delta\frac{i}{2}\int_\Gamma\frac{B(a, a)}{A^2(\alpha, \alpha)}\,\omega_{z^0}(\alpha)\overline{\omega_{z^0}(\alpha)}, \qquad (6)$$

где $a=F_\alpha+[z^0, F_p]$.

6. Примеры комплексов. Рассмотрим комплекс прямых, состоящий из прямолинейных образующих конуса второго порядка

$$z_1^2+z_2z_3=0$$

и из параллельных им прямых. Очевидно, что уравнение этого комплекса есть

$$F(\alpha, p)\equiv\alpha_1^2+\alpha_2\alpha_3=0.$$

Формула обращения для этого комплекса имеет следующий вид:

$$f(z)=c\frac{i}{2}\int_\Gamma L\bar{L}\varphi(\alpha, [\alpha, z])\frac{d\alpha_3\,d\bar{\alpha}_3}{4|\alpha_1^2|},$$

где

$$L=2\alpha_1\frac{\partial}{\partial p^1}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial p^2}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial p^3},$$

а интегрирование ведется по линии $\alpha_1^2+\alpha_2\alpha_3=0$, $\alpha_2=1$. Вычислим постоянную c по формуле (5) п. 5. Полагая в этой формуле $A(z, z)=2z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_3\bar{z}_3$, получим

$$c^{-1}=-\pi\frac{i}{2}\int_\Gamma\frac{2d\alpha_3\,d\bar{\alpha}_3}{4|\alpha_1^2|(2|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)}=$$

$$=-\pi\frac{i}{2}\int\frac{d\alpha\,d\bar{\alpha}}{|\alpha|(|\alpha|+1)^2}=-2\pi^2.$$

Таким образом (поскольку $\alpha_1^2 = -\alpha_3$ на Г) имеем

$$f(z) = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{i}{2}\int_\Gamma L\bar{L}\varphi(\alpha, [\alpha, z])\frac{d\alpha_3\, d\bar{\alpha}_3}{|\alpha_3|}.$$

Теперь рассмотрим комплекс всех прямых, пересекающих кривую второго порядка

$$z_1 z_2 = 1, \quad z_3 = 0. \tag{1}$$

Каждая из прямых комплекса определяется направляющим вектором α и точкой $(\lambda, \lambda^{-1}, 0)$ пересечения с кривой (1). Она задается, таким образом, следующими параметрическими уравнениями:

$$z_1 = \alpha_1 t + \lambda, \quad z_2 = \alpha_2 t + \lambda^{-1}, \quad z_3 = \alpha_3 t. \tag{2}$$

Выразим плюкеровы координаты p^1, p^2, p^3 прямой комплекса через α и λ. Из уравнений (2) мы получаем

$$p^1 = -\alpha_3\lambda^{-1}, \quad p^2 = \alpha_3\lambda, \quad p^3 = \alpha_1\lambda^{-1} - \alpha_2\lambda. \tag{3}$$

Чтобы составить уравнение комплекса, достаточно исключить λ из каких-нибудь двух уравнений (3). Исключая λ из первых двух уравнений, получаем следующее уравнение комплекса:

$$F(\alpha, p) \equiv \alpha_3^2 + p^1 p^2 = 0. \tag{4}$$

Мы видим, что рассматриваемый комплекс есть комплекс второго порядка.

Зададим в пространстве точку $z = (z_1, z_2, z_3)$ и найдем все прямые комплекса, проходящие через точку z. Исключая t из уравнений (2), мы получаем соотношение между λ и α

$$\lambda = \frac{\alpha_3 z_1 - \alpha_1 z_3}{\alpha_3}, \quad \lambda^{-1} = \frac{\alpha_3 z_2 - \alpha_2 z_3}{\alpha_3}. \tag{5}$$

Перемножив затем эти равенства, получаем соотношение для направляющих векторов α

$$\Phi(\alpha) \equiv \alpha_3^2 + (\alpha_3 z_1 - \alpha_1 z_3)(\alpha_2 z_3 - \alpha_3 z_2) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, прямые комплекса, проходящие через точку z, — это все прямые

$$z_1 = \alpha_1 t + \lambda, \quad z_2 = \alpha_2 t + \lambda^{-1}, \quad z_3 = \alpha_3 t,$$

направляющие векторы которых удовлетворяют соотношению (6), а λ определяется из уравнений (5).

Зададим теперь интегралы функции $f(z)$ по прямым комплекса

$$\varphi(\alpha; \lambda) = \frac{i}{2}\int f(\alpha_1 t + \lambda, \alpha_2 t + \lambda^{-1}, \alpha_3 t)\, dt\, d\bar{t}. \tag{7}$$

Найдем на основании формулы обращения, полученной в п. 5, как функция $f(z)$ выражается через функцию $\varphi(\alpha, \lambda)$.

Для этого нам нужно знать, какой вид имеет оператор L бесконечно малого параллельного сдвига прямой в комплексе. Как мы знаем, этот оператор есть

$$L = a_1\frac{\partial}{\partial p^1} + a_2\frac{\partial}{\partial p^2} + a_3\frac{\partial}{\partial p^3},$$

где a_1, a_2, a_3 — координаты вектора $a \equiv F_\alpha + [z, F_p]$. Для нашего комплекса имеем

$$a_1 = -p^1 z_3, \quad a_2 = p^2 z_3, \quad a_3 = 2\alpha_3 + p^1 z_1 - p^2 z_2.$$

Заменим здесь p^1, p^2, z_1, z_2 их выражениями через α, z_3 и λ на основании формул (2) и (3). Мы получим

$$a_1 = \alpha_3 z_3\lambda^{-1}, \quad a_2 = \alpha_3 z_3\lambda, \quad a_3 = -(\alpha_1\lambda^{-1} + \alpha_2\lambda)\, z_3.$$

Следовательно,

$$L = \lambda z_3\left(\alpha_3\lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial p^1} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial p^2} - (\alpha_1\lambda^{-2} + \alpha_2)\frac{\partial}{\partial p^3}\right).$$

Заметим, что так как $p^1 = -\alpha_3\lambda^{-1}$, $p^2 = \alpha_3\lambda$, $p^3 = \alpha_1\lambda^{-1} - \alpha_2\lambda$, то в скобке стоит оператор полного дифференцирования по λ. Итак, окончательно,

$$L = z_3\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}.$$

На основании формулы обращения, полученной в п. 5, получаем следующее выражение функции $f(z)$ через функцию $\varphi(\alpha, \lambda)$:

$$f(z) = c_z\frac{i}{2}\int_\Gamma |z_3|^2|\lambda|^2\varphi_{\lambda\bar{\lambda}}\left(\alpha; \frac{\alpha_3 z_1 - \alpha_1 z_3}{\alpha_3}\right)\omega(\alpha)\overline{\omega(\alpha)},$$

где $\omega(\alpha)=\frac{\alpha_3\,d\alpha_1-\alpha_1\,d\alpha_3}{\alpha_2 z_3\lambda}$, а интегрирование ведется по контуру Γ на поверхности конуса

$$\Phi(\alpha)\equiv\alpha_3^2+(\alpha_3 z_1-\alpha_1 z_3)(\alpha_2 z_3-\alpha_3 z_2)=0.$$

Возьмем, в частности, в качестве контура интегрирования Γ сечение конуса плоскостью $\alpha_3=1$. Тогда формула обращения примет следующий вид:

$$f(z)=c_z\frac{i}{2}\int\limits_{(z_1-\alpha_1 z_3)(z_2-\alpha_2 z_3)=1}\varphi_{\lambda\bar\lambda}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ 1;\ z_1-\alpha_1 z_3)\,d\alpha_1\,d\bar\alpha_1.$$

Вычисление коэффициента c_z предоставляется читателю.

7. Замечание об операторах сдвига. Формулу обращения, выражающую функцию $f(z)$ через интегралы $\varphi(\alpha, p)$ по прямым комплекса можно несколько обобщить. Именно, вместо того чтобы сдвигать образующие конуса с вершиной в точке z^0 параллельно себе, будем сдвигать их в комплексе произвольным образом. Тогда вместо операторов бесконечно малого параллельного сдвига в комплексе возникнут операторы более общего вида

$$L\varphi(\alpha, [\alpha, z^0])=\sum u_i\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}+v_i\frac{\partial\varphi}{\partial p^i}, \tag{1}$$

$$\bar L\varphi(\alpha, [\alpha, z^0])=\sum \bar u_i\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\alpha_i}+\bar v_i\frac{\partial\varphi}{\partial\bar p^i}, \tag{1'}$$

где u_i, v_i — однородные аналитические функции от α, задающие сдвиг. Образуем теперь функцию

$$\psi(\alpha, z^0)=(L+w(\alpha))(\bar L+\bar w(\alpha))\,\varphi(\alpha, [\alpha, z^0]), \tag{2}$$

где $w(\alpha)$ — некоторая однородная функция, и усредним ее по множеству образующих конуса с вершиной в точке z^0. Функции $u_i(\alpha)$, $v_i(\alpha)$, $w(\alpha)$ должны быть подобраны так, чтобы это усреднение было равно $cf(z^0)$, то есть чтобы имела место формула обращения

$$\int\limits_\Gamma (L+w)(\bar L+\bar w)\,\varphi(\alpha, [\alpha, z^0])\,\omega_{z^0}(\alpha)\overline{\omega_{z^0}(\alpha)}=cf(z^0), \tag{3}$$

где $c\neq 0$. Можно указать необходимые и достаточные условия на функции u_i, v_i, w, при которых имеет место формула (3). Этих условий мы, однако, приводить не будем и ограничимся лишь следующим замечанием: *формула обращения вида* (3) *возможна только для специальных комплексов, которые были рассмотрены нами в пп.* 3 *и* 4. Наметим доказательство этого утверждения. Для простоты положим $z^0=0$. Итак, пусть для комплекса

$$F(\alpha, p)=0$$

имеет место формула обращения вида

$$cf(0)=\int\limits_\Gamma (L+w)(\bar L+\bar w)\,\varphi(\alpha, 0)\,\omega(\alpha)\overline{\omega(\alpha)},\qquad c\neq 0, \tag{4}$$

где

$$L\varphi(\alpha, 0)=\sum u_i\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}+\sum v_i\frac{\partial\varphi}{\partial p^i},$$

а интеграл берется по контуру Γ на поверхности конуса

$$F(\alpha, 0)=0.$$

Нетрудно убедиться, что равенство (4) возможно лишь тогда, когда бесконечно малый сдвиг $d\alpha$, dp образующих конуса происходит в касательной плоскости к конусу $\left(\text{то есть когда } \sum u_i F_{\alpha_i}=0 \text{ и } \sum v_i F_{\alpha_i}=0\right)$. Кроме того, коэффициент c в формуле обращения отличен от нуля лишь при условии, что $dp\neq 0$. Посмотрим, какие это накладывает требования на комплекс. Условия, что бесконечно малый сдвиг $d\alpha$, dp образующей происходит в касательной плоскости, записываются, как нетрудно показать, в следующем виде:

$$F_{\alpha_1}d\alpha_1+F_{\alpha_2}d\alpha_2+F_{\alpha_3}d\alpha_3=0,$$
$$\frac{dp^1}{F_{\alpha_1}}=\frac{dp^2}{F_{\alpha_2}}=\frac{dp^3}{F_{\alpha_3}}. \tag{5}$$

С другой стороны, условие того, что сдвиг происходит в самом комплексе, записывается так:

$$\sum F_{\alpha_i}d\alpha_i+\sum F_{p^i}dp^i=0. \tag{6}$$

Поскольку, по предположению, $dp\neq 0$, то из равенств (5), (6) получаем

$$\sum F_{\alpha_i}F_{p^i}=0.$$

Итак, мы получили то самое условие на комплекс, которое было наложено в пп. 3 и 4.

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Постановка задачи. Рассмотрим в комплексном четырехмерном пространстве поверхность второго порядка

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=1. \tag{1}$$

Эта поверхность является линейчатой. Именно, через каждую ее точку можно провести комплексные прямые, лежащие целиком на поверхности (прямолинейные образующие). В этом отношении поверхность (1) напоминает не сферу в вещественном пространстве, а однополостный гиперболоид. Впрочем, поскольку в комплексном пространстве все невырожденные квадратичные формы между собой эквивалентны, то есть переводятся одна в другую линейным преобразованием, то поверхность (1) с равным основанием можно было бы называть и сферой и гиперболоидом.

Подсчитаем, от какого числа параметров зависит множество прямых на поверхности сферы (1). Прямая определяется направляющим вектором α, заданным с точностью до множителя, и вектором одной из точек β, заданным с точностью до вектора, кратного вектору α. Таким образом, семейство *всех* прямых в четырехмерном пространстве зависит от $8-2=6$ комплексных параметров. Найдем число дополнительных условий на векторы α, β, при которых прямая лежит целиком на поверхности (1). Для этого запишем уравнение прямой в параметрической форме

$$z=\alpha t+\beta$$

(t — комплексный параметр) и подставим это выражение для z в уравнение поверхности. В результате мы получим три дополнительных соотношения для α и β:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=0,$$
$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4=0,$$
$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2=1.$$

Таким образом, *семейство прямых, лежащих на поверхности сферы, зависит от* $6-3=3$ *комплексных параметров, то есть имеет ту же размерность, что и сама поверхность.*

Поставим следующую задачу интегральной геометрии. Сопоставим функции $f(z)$, заданной на поверхности сферы, ее интегралы по прямолинейным образующим сферы (точное определение интеграла по прямолинейной образующей будет дано в п. 3). Требуется, зная эти интегралы, восстановить функцию $f(z)$. Решение задачи будет дано в п. 4.

Эта задача аналогична рассмотренной в § 1 задаче для комплексов прямых в трехмерном пространстве и будет решена здесь тем же методом. Ее отличие только в том, что вместо трехмерного комплексного аффинного пространства мы имеем дело с трехмерным комплексным многообразием.

Позже, в главе IV, мы увидим, что эта задача лежит в основе всей теории представлений группы Лоренца (то есть группы комплексных матриц $\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$ с определителем $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, образующей гиперболоид в четырехмерном пространстве).

2. Прямолинейные образующие поверхности второго порядка. Сначала выберем каноническое уравнение поверхности второго порядка. Поскольку все невырожденные квадратичные формы в комплексном пространстве между собой эквивалентны, то есть получаются одна из другой линейным преобразованием, то уравнение «сферы» можно задать с помощью любой невырожденной квадратичной формы.

Зададим поверхность второго порядка следующим уравнением:

$$z_1z_4-z_2z_3=1. \tag{1}$$

Из дальнейшего читатель увидит, что задавать поверхность уравнением (1) во многих отношениях удобнее, чем задавать ее уравнением $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=1$.

Мы приведем здесь удобный способ задания прямых на поверхности (1). Рассмотрим сначала пересечение этой поверхности с двумерной плоскостью. Это пересечение есть кривая второго порядка. Иногда эта кривая вырождается в пару прямых, но иногда мы получаем в пересечении только одну прямую (когда вторая прямая является бесконечно удаленной).

Выясним, когда пересечение поверхности (1) с плоскостью есть одна прямая. Будем пока для простоты писать уравнения плоскости разрешенными относительно z_1 и z_4:

$$\left.\begin{aligned} z_1&=\alpha_1z_2+\beta_1z_3+\gamma_1,\\ z_4&=\alpha_2z_2+\beta_2z_3+\gamma_2.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставив эти выражения для z_1, z_4 в уравнение поверхности, мы получим уравнение линии пересечения

$$(\alpha_1z_2+\beta_1z_3+\gamma_1)(\alpha_2z_2+\beta_2z_3+\gamma_2)-z_2z_3=1. \tag{3}$$

Эта линия пересечения есть прямая в том случае, когда уравнение (3) вырождается в уравнение первой степени, то есть когда $\alpha_1\alpha_2=\beta_1\beta_2=0$, $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=1$. Таким образом, должно быть либо $\alpha_1=\beta_2=0$, $\alpha_2\beta_1=1$, либо $\alpha_2=\beta_1=0$, $\alpha_1\beta_2=1$.

В первом случае уравнения плоскости имеют вид

$$z_1=\beta_1 z_3+\gamma_1, \quad z_4=\frac{1}{\beta_1}z_2+\gamma_2, \tag{4}$$

во втором случае они имеют вид

$$z_1=\alpha_1 z_2+\gamma_1, \quad z_4=\frac{1}{\alpha_1}z_3+\gamma_2. \tag{4'}$$

При этом не должно быть $\gamma_1=\gamma_2=0$, так как если $\gamma_1=\gamma_2=0$, то плоскость вообще не пересекает поверхности (1).

Итак, мы получаем два семейства плоскостей, пересекающих поверхность по прямой линии. Уравнения этих плоскостей будем дальше писать в однородной форме: уравнения плоскости первого семейства —

$$\left.\begin{aligned} uz_1+vz_3&=u',\\ uz_2+vz_4&=v';\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

уравнения плоскости второго семейства —

$$\left.\begin{aligned} u'z_4-v'z_3&=u,\\ -u'z_2+v'z_1&=v.\end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

(Исключается случай, когда $u=v=0$, или $u'=v'=0$.)

К этим уравнениям мы пришли, предположив, что уравнение плоскости можно разрешить относительно z_1, z_4. Однако можно было бы без труда убедиться, что это ограничение несущественно, то есть, что любая плоскость, пересекающаяся с поверхностью (1) по прямой, задается уравнениями либо вида (5) либо вида (5′).

Нетрудно заметить, что, пересекая поверхность (1) плоскостями (5) или (5′), мы получим в с е прямые, лежащие на этой поверхности (поскольку любая прямая, лежащая на поверхности, пересекается с двумя бесконечно удаленными прямыми, лежащими на поверхности).

Теперь покажем, что все прямые на поверхности (1) можно получить, пересекая эту поверхность либо только плоскостями первого семейства, либо только плоскостями второго семейства. Для этого достаточно убедиться, что плоскость первого семейства

$$\left.\begin{aligned} uz_1+vz_3&=u',\\ uz_2+vz_4&=v'\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и плоскость второго семейства

$$\left.\begin{aligned} u'z_4-v'z_3&=u,\\ -u'z_2+v'z_1&=v\end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

пересекают поверхность по одной и той же прямой. Убедимся в этом. В самом деле, умножив первое из уравнений (5) на z_4, а второе — на $-z_3$ и сложив, получим

$$u'z_4-v'z_3=u(z_1z_4-z_2z_3)=u.$$

Аналогично

$$-u'z_2+v'z_1=v(-z_2z_3+z_1z_4)=v.$$

Тем самым показано, что на поверхности

$$z_1z_4-z_2z_3=1$$

система уравнений (5′) есть следствие системы (5). Аналогично убеждаемся, что и, обратно, система уравнений (5) есть следствие системы уравнений (5′) на поверхности $z_1z_4-z_2z_3=1$. Итак, эти системы уравнений эквивалентны на поверхности $z_1z_4-z_2z_3=1$, а потому они задают на поверхности одну и ту же прямую линию.

Итак, мы показали, что любая прямая на поверхности

$$z_1z_4-z_2z_3=1$$

задается плоскостью

$$\left.\begin{aligned} uz_1+vz_3&=u',\\ uz_2+vz_4&=v'\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

($(u, v)\neq(0, 0)$ и $(u', v')\neq(0, 0)$), пересекающей поверхность по этой прямой. При этом, как легко убедиться, две различные плоскости вида (5) пересекают поверхность по разным прямым. Таким образом, *четверку чисел* $(u, v; u', v')$ *в* *уравнениях* (5) *можно рассматривать как однородные координаты прямой, лежащей на поверхности* $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$.

Отметим, что числа $(u, v; u', v')$ не произвольны. Именно, нужно исключить случай, когда $u = v = 0$, а также случай, когда $u' = v' = 0$ (в каждом из этих случаев плоскость (5) не имеет общих точек с поверхностью, а тем самым не задает никакой прямой). Отсюда видно, что *многообразие прямых, лежащих на поверхности второго порядка в четырехмерном комплексном пространстве, есть трехмерное (комплексное) проективное пространство, из которого удалены две непересекающиеся поверхности комплексной размерности* 1, *а именно поверхность* $u = v = 0$ *и поверхность* $u' = v' = 0$, *где* $(u, v; u', v')$ — *однородные координаты в пространстве.*

Для примера найдем однородные координаты прямых, проходящих через заданную точку. Любая прямая на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, проходящая через точку $z^0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0)$, задается системой уравнений

$$\begin{cases} uz_1 + vz_3 = uz_1^0 + vz_3^0, \\ uz_2 + vz_4 = uz_2^0 + vz_4^0. \end{cases}$$

Таким образом, *прямые на поверхности* $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, *проходящие через точку* $z^0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0)$, *задаются координатами*

$$(u, v; uz_1^0 + vz_3^0, uz_2^0 + vz_4^0).$$

Теперь найдем условие параллельности двух прямых на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, заданных однородными координатами. Пусть прямая имеет однородные координаты $(u, v; u', v')$. Это значит, что прямая задается системой уравнений

$$uz_1 + vz_3 = u',$$
$$uz_2 + vz_4 = v',$$

а также эквивалентной ей системой уравнений

$$u'z_4 - v'z_3 = u,$$
$$-u'z_2 + v'z_1 = v.$$

Найдем направляющий вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ этой прямой. Очевидно, что этот вектор удовлетворяет соотношениям

$$u\alpha_1 + v\alpha_3 = 0, \qquad u'\alpha_4 - v'\alpha_3 = 0,$$
$$u\alpha_2 + v\alpha_4 = 0, \qquad -u'\alpha_2 + v'\alpha_1 = 0.$$

Из этих соотношений получаем

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_2}{\alpha_4} = -\frac{u}{v}; \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{u'}{v'}.$$

Таким образом, *две прямые на поверхности* $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, *заданные однородными координатами* $(u_1, v_1; u_1', v_1')$ *и* $(u_2, v_2; u_2', v_2')$, *параллельны тогда и только тогда, когда*

$$u_1 : v_1 = u_2 : v_2 \quad \text{и} \quad u_1' : v_1' = u_2' : v_2'.$$

Найдем еще однородные координаты прямых, лежащих в пересечении поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ с гиперплоскостью. Для краткости будем записывать уравнение поверхности в виде $(z, z) = 1$, где $(z, z) \equiv z_1z_4 - z_2z_3$, и через (u, v) будем обозначать билинейную форму, отвечающую квадратичной форме (z, z). Запишем уравнение секущей гиперплоскости в виде

$$(z, z^0) = \operatorname{ch} \tau,$$

где z^0 — некоторая точка поверхности, τ — комплексное число.

При $\tau = 0$ эта гиперплоскость пересекает поверхность по конусу с вершиной в точке z^0. Как мы уже видели, прямолинейные образующие конуса имеют однородные координаты

$$(u, v; uz_1^0 + vz_3^0, uz_2^0 + vz_3^0).$$

Если $\tau \neq 0$, то в сечении мы получаем невырожденную двумерную поверхность второго порядка. Эта поверхность обладает двумя семействами прямолинейных образующих. Нетрудно убедиться, что прямолинейные образующие одного семейства имеют однородные координаты

$$\left(u, v; e^{\tau}(uz_1^0 + vz_3^0), e^{\tau}(uz_2^0 + vz_4^0)\right),$$

а образующие другого семейства — однородные координаты

$$\left(u, v; e^{-\tau}(uz_1^0 + vz_3^0), e^{-\tau}(uz_2^0 + vz_4^0)\right).$$

Проверка этого утверждения предоставляется читателю.

3. Интегралы функции $f(z)$ по поверхности второго порядка и по комплексным прямым. Пусть на поверхности второго порядка

$$z_1z_4 - z_2z_3 = 1 \tag{1}$$

задана функция $f(z)$. Определим, что такое интеграл функции $f(z)$ по поверхности (1).

Свяжем с поверхностью (1) дифференциальную форму $\sigma(z)$, определяемую из соотношения

$$dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4 = d(z_1z_4 - z_2z_3)\cdot\sigma(z).$$

Легко видеть, что в различных системах координат на поверхности (1) эта форма определяется следующим образом:

$$\sigma(z) = -\frac{dz_1\, dz_2\, dz_3}{z_1} = \frac{dz_2\, dz_3\, dz_4}{z_4} = \frac{dz_1\, dz_3\, dz_4}{z_3} = -\frac{dz_1\, dz_2\, dz_4}{z_2}. \tag{2}$$

Интеграл I функции $f(z)$ по поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ определим с помощью формы $\sigma(z)$, а именно

$$I = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int\limits_{z_1z_4 - z_2z_3 = 1} f(z)\,\sigma(z)\,\overline{\sigma(z)}. \tag{3}$$

Теперь свяжем дифференциальную форму с каждой прямолинейной образующей поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ и тем самым определим интеграл функции $f(z)$ по этой прямолинейной образующей. Пусть $(u, v;\ u', v')$ — координаты прямой. Это значит, что прямая на поверхности задается системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} uz_1 + vz_3 &= u',\\ uz_2 + vz_4 &= v', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

а также эквивалентной системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} u'z_4 - v'z_3 &= u,\\ -u'z_2 + v'z_1 &= v. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Из этих уравнений мы получаем соотношения между дифференциалами dz_1, dz_2, dz_3 и dz_4 на прямой $(u, v;\ u', v')$

$$\begin{aligned} u\,dz_1 + v\,dz_3 &= 0,\\ u\,dz_2 + v\,dz_4 &= 0,\\ u'\,dz_4 - v'\,dz_3 &= 0,\\ u'\,dz_2 - v'\,dz_1 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем на прямой $(u, v;\ u', v')$

$$\frac{dz_1}{vu'} = \frac{dz_2}{vv'} = -\frac{dz_3}{uu'} = -\frac{dz_4}{uv'} = \omega. \tag{5}$$

Форму ω, определенную равенствами (5), мы и свяжем с прямой $(u, v;\ u', v')$.

Интеграл функции $f(z)$ по прямолинейной образующей $(u, v;\ u', v')$ поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, то есть по прямой, заданной системой уравнений (4), *определим следующим образом:*

$$\varphi(u, v;\ u', v') = \frac{i}{2}\int f(z)\,\omega\overline{\omega}, \tag{6}$$

где дифференциальная форма ω на прямой определяется по формуле (5). Из определения следует, что функция $\varphi(u, v;\ u', v')$ есть однородная функция от $u, v;\ u', v'$ степени однородности $(-2, -2)$, то есть

$$\varphi(\alpha u, \alpha v;\ \alpha u', \alpha v') = \alpha^{-2}\overline{\alpha}^{-2}\varphi(u, v;\ u', v')$$

для любого $\alpha \neq 0$.

Полезно отметить, что форма ω, которую мы связали с прямой $(u, v;\ u', v')$, удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\sigma(z) = d(uz_1 + vz_3)\,d(uz_2 + vz_4)\cdot\omega \tag{7}$$

и

$$\sigma(z) = d(u'z_4 - v'z_3)\,d(-u'z_2 + v'z_1)\cdot\omega, \tag{7'}$$

где $\sigma(z)$ — дифференциальная форма на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, определенная равенством (2). В справедливости этих соотношений легко убедиться непосредственно, подставляя в них выражения для форм ω и $\sigma(z)$.

Разумеется, что каждое из соотношений (7) и (7') могло бы служить в качестве определения дифференциальной формы ω.

4. Представление функции $f(z)$ на поверхности второго порядка через ее интегралы по прямолинейным образующим поверхности. Сформулируем еще раз задачу интегральной геометрии, которая будет здесь решаться. Рассматривается поверхность второго порядка в четырехмерном комплексном пространстве

$$z_1z_4 - z_2z_3 = 1. \tag{1}$$

Каждая прямолинейная образующая этой поверхности определяется системой уравнений

$$\begin{cases} uz_1 + vz_3 = u', \\ uz_2 + vz_4 = v', \end{cases} \tag{2}$$

а также эквивалентной системой уравнений

$$\begin{cases} u'z_4 - v'z_3 = u, \\ -u'z_2 + v'z_1 = v. \end{cases} \tag{2'}$$

Тем самым прямолинейная образующая задается системой однородных координат $(u, v; u', v')$.

Пусть $f(z)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$. Определим интеграл функции $f(z)$ по прямолинейной образующей (2) следующим образом:

$$\varphi(u, v; u', v') = \frac{i}{2}\int f(z)\,\omega\bar{\omega}, \tag{3}$$

где

$$\omega = \frac{dz_1}{vu'} = \frac{dz_2}{vv'} = -\frac{dz_3}{uu'} = -\frac{dz_4}{uv'}.$$

Задача состоит в том, чтобы, зная функцию $\varphi(u, v; u', v')$, восстановить исходную функцию $f(z)$.

У этой задачи существует простой локальный аналог. Именно, возьмем точку z^0 на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ и проведем гиперплоскость, касательную к поверхности в точке z^0. Эта касательная гиперплоскость пересечет поверхность по конусу второго порядка с вершиной в точке z^0. Будем затем «раздувать» поверхность, оставляя неподвижной точку z^0, то есть совершим подобное преобразование пространства $z \to \lambda z + (1-\lambda) z^0$ с центром в точке z^0, где $|\lambda| \to \infty$. В пределе наша поверхность перейдет в касательную гиперплоскость, а ее прямолинейные образующие — в прямые на гиперплоскости, параллельные образующим конуса. В результате мы получим следующий локальный аналог поставленной выше задачи. Требуется восстановить значение функции $f(z)$ в вершине конуса второго порядка в трехмерном пространстве, зная ее интегралы по прямолинейным образующим конуса и по параллельным им прямым. Например, если взять $z^0 = (1, 0, 0, 1)$, то касательная гиперплоскость к поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ в точке z^0 пересекает поверхность по конусу

$$t_1^2 + t_2t_3 = 0, \tag{4}$$

где $t_1 = 1 + z_1$, $t_2 = z_2$, $t_3 = z_3$.

Тем самым локальная задача состоит в том, чтобы восстановить значение функции в точке O трехмерного пространства, зная ее интегралы по образующим конуса (4) и по параллельным им прямым. Эта задача была уже решена в § 1, п. 6. Ее решение дается следующей формулой:

$$f(0) = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma} L\bar{L}\varphi(\alpha, 0)\frac{d\alpha_3\,d\bar{\alpha}_3}{|\alpha_3|}, \tag{5}$$

где $\varphi(\alpha, p)$ — интеграл функции $f(z)$ по прямой с плюкеровыми координатами α, p, $L = 2\alpha_1\frac{\partial}{\partial p_1} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial p_2} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial p_3}$, а интеграл берется по линии $\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 1$.

Задача интегральной геометрии для прямых на поверхности второго порядка будет решена тем же методом, что и аналогичная задача для комплекса прямых в трехмерном пространстве, разобранная в § 1. В дальнейшем, в п. 6, эта задача будет также решена иным методом.

Сначала введем операторы бесконечно малого параллельного сдвига в множестве прямолинейных образующих поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$. Напомним, что условие параллельности двух прямых, заданных однородными координатами $(u_1, v_1; u_1', v_1')$ и $(u_2, v_2; u_2', v_2')$, имеет следующий вид:

$$u_1 : v_1 = u_2 : v_2, \quad u_1' : v_1' = u_2' : v_2'$$

(см. п. 2).

Пусть задана прямая $(u, v; u', v')$. Тогда любая параллельная ей прямая имеет координаты $(\lambda u, \lambda v; \mu u', \mu v')$. Используя однородность координат прямой, мы можем так распорядиться множителями λ, μ, чтобы было $\lambda\mu = 1$, то есть $\lambda = e^{-\tau}$, $\mu = e^{\tau}$.

Итак, любая прямая, параллельная прямой $(u, v; u', v')$, может быть задана координатами

$$(e^{-\tau}u, e^{-\tau}v; e^{\tau}u', e^{\tau}v'). \tag{6}$$

При переходе от прямой $(u, v; u', v')$ к бесконечно близкой к ней параллельной прямой (6) координаты u, v, u', v' получают приращения

$$du = -u\,d\tau, \quad dv = -v\,d\tau, \quad du' = u'\,d\tau, \quad dv' = v'\,d\tau.$$

В соответствии с этим введем *операторы бесконечно малого параллельного сдвига во множестве прямолинейных образующих поверхности*

$$\begin{aligned} L &= -u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + u'\frac{\partial}{\partial u'} + v'\frac{\partial}{\partial v'}, \\ \overline{L} &= -\overline{u}\frac{\partial}{\partial \overline{u}} - \overline{v}\frac{\partial}{\partial \overline{v}} + \overline{u}'\frac{\partial}{\partial \overline{u}'} + \overline{v}'\frac{\partial}{\partial \overline{v}'}. \end{aligned} \tag{7}$$

Применив к функции $\varphi(u, v; u', v')$ операторы L и $\overline{L}$, мы получим функцию

$$\psi(u, v; u', v') = L\overline{L}\varphi(u, v; u', v'). \tag{8}$$

Мы увидим, что если функцию ψ усреднить по множеству прямолинейных образующих поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, проходящих через заданную точку z, то в результате получится, с точностью до постоянного множителя, искомое значение функции f в точке z.

Нам нужно определить, что значит усреднение функции ψ по множеству прямых, проходящих через точку z. Напомним, что любая прямая на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, проходящая через точку $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, имеет координаты

$$(u, v; uz_1 + vz_3, uz_2 + vz_4)$$

(см. п. 2). Таким образом, речь идет об усреднении по u и v функции

$$\psi(u, v; uz_1 + vz_3, uz_2 + vz_4).$$

Эта функция однородна относительно u, v степени однородности $(-2, -2)$, а потому усреднение функции ψ естественно определить как *вычет* по u, v, то есть как интеграл

$$\frac{i}{2}\int_\Gamma \psi(u, v; uz_1 + vz_3, uz_2 + vz_4)(u\,dv - v\,du)(\overline{u}\,d\overline{v} - \overline{v}\,d\overline{u}).$$

(Интеграл берется по произвольной кривой Γ на плоскости (u, v), пересекающейся в одной точке с каждой комплексной прямой $\alpha u + \beta v = 0$ *).)

Итак, по аналогии с задачей для комплекса прямых в трехмерном пространстве (§ 1) нам предстоит получить следующий результат.

Функция $f(z)$ на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ определяется через свои интегралы $\varphi(u, v; u', v')$ по прямым, лежащим на этой поверхности, следующей формулой обращения:

$$f(z) = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{i}{2}\int_\Gamma L\overline{L}\varphi(u, v; uz_1 + vz_3, uz_2 + vz_4) \times$$
$$\times (u\,dv - v\,du)(\overline{u}\,d\overline{v} - \overline{v}\,d\overline{u}), \tag{9}$$

где $L = -u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + u'\frac{\partial}{\partial u'} + v'\frac{\partial}{\partial v'}$, *интеграл берется по произвольной кривой Γ на плоскости (u, v), пересекающейся в одной точке с каждой прямой $\alpha u + \beta v = 0$.*

Вывод этой формулы обращения мы дадим в следующем пункте, а затем другим методом — в п. 6.

5. Вывод формулы обращения. Формулу обращения достаточно вывести для какой-нибудь одной фиксированной точки z на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, скажем, для точки $z^0 = (1, 0, 0, 1)$. Таким образом, нужно доказать соотношение

$$\frac{i}{2}\int L\overline{L}\varphi(u, v; u, v)(u\,dv - v\,du)(\overline{u}\,d\overline{v} - \overline{v}\,d\overline{u}) =$$
$$= cf(1, 0, 0, 1), \tag{1}$$

где $L = -u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + u'\frac{\partial}{\partial u'} + v'\frac{\partial}{\partial v'}$, а $\varphi(u, v; u', v')$ — интеграл функции f по прямой, определенный формулой (3) п. 4.

Интеграл (1) задает непрерывный функционал в пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций $f(z)$

*) См. Добавление, § 2, п. 5, а также замечание на стр. 124 данной главы.

на поверхности $z_1 z_4 - z_2 z_3 = 1$:

$$(F, f) = \frac{i}{2} \int_{\Gamma} L\bar{L}\varphi(u, v; u, v)(u\,dv - v\,du)(\bar{u}\,d\bar{v} - \bar{v}\,d\bar{u}). \quad (2)$$

Ясно, что этот функционал F сосредоточен на поверхности конуса, образованного прямолинейными образующими, проходящими через точку $z^0 = (1, 0, 0, 1)$. Покажем, что на самом деле этот функционал сосредоточен в вершине конуса $(1, 0, 0, 1)$. Иными словами, докажем следующее утверждение.

Лемма. *Если* $f(z) = 0$ *в окрестности точки* $(1, 0, 0, 1)$, *то* $(F, f) = 0$.

Доказательство леммы. Пусть функция f сосредоточена в достаточно малой области, не содержащей точки $z^0 = (1, 0, 0, 1)$. Введем в этой области локальные координаты. Для этого заметим, что у точек $z \neq z^0$ на поверхности конуса с вершиной в точке $z^0 = (1, 0, 0, 1)$ не могут одновременно обращаться в нуль координаты z_2 и z_3.

В самом деле, этот конус получается в пересечении поверхности $z_1 z_4 - z_2 z_3 = 1$ с гиперплоскостью $z_1 + z_4 = 2$. Следовательно, если для некоторой точки конуса $z_2 = z_3 = 0$, то в этой точке $z_1 = z_4 = 1$, то есть эта точка есть вершина конуса.

Пусть, например, в области, где сосредоточена функция f, не обращается в нуль координата z_3. В таком случае, в силу уравнения $z_1 z_4 - z_2 z_3 = 1$, координата z_2 есть в этой области непрерывная функция от z_1, z_3 и z_4. Поэтому z_1, z_3 и z_4 можно принять в качестве локальных координат в области, где сосредоточена функция f. Таким образом, мы можем дальше рассматривать функцию f как функцию от трех переменных z_1, z_3, z_4: $f = f_1(z_1, z_3, z_4)$.

Запишем интеграл по прямой $(u, v; u', v')$, заданной уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &u z_1 + v z_3 = u', \qquad && u' z_4 - v' z_3 = u, \\ &u z_2 + v z_4 = v', && -u' z_2 + v' z_1 = v, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

приняв z_3 в качестве переменной интегрирования. Из уравнений (3) имеем

$$z_1 = -\frac{v}{u} z_3 + \frac{u'}{u}, \qquad z_4 = \frac{v'}{u'} z_3 + \frac{u}{u'},$$

а потому

$$\varphi(u, v; u', v') = \frac{1}{|u|^2 |u'|^2} \frac{i}{2} \int f_1\left(-\frac{v}{u} z_3 + \frac{u'}{u},\ z_3,\ \frac{v'}{u'} z_3 + \frac{u}{u'}\right) dz_3\,d\bar{z}_3 = \frac{i}{2} \int f_1\left(-vu'z + \frac{u'}{u},\ uu'z,\ uv'z + \frac{u}{u'}\right) dz\,d\bar{z}\text{*)}. \quad (4)$$

Подставим это выражение для функции φ в формулу (2) для функционала F. Прежде всего непосредственной выкладкой получаем

$$L\varphi(u, v; u, v) \equiv \left(-u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + u'\frac{\partial}{\partial u'} + v'\frac{\partial}{\partial v'}\right)\varphi(u, v; u', v')\Big|_{\substack{u' = u \\ v' = v}} = 2\,\frac{i}{2} \int \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_4}\right) f_1\left(-uvz + 1,\ u^2 z,\ uvz + 1\right) dz\,d\bar{z}.$$

Таким образом, формула (2) для (F, f), если в качестве линии интегрирования Γ взять прямую $u = 1$, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}(F, f) &= 4\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_4}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_4}\right) \times \\ &\qquad \times f_1(-vz + 1,\ z,\ vz + 1)\,dz\,d\bar{z}\,dv\,d\bar{v} = \\ &= 4\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_4}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_4}\right) \times \\ &\qquad \times f_1(1 - t,\ z,\ 1 + t)\,dt\,d\bar{t}\,\frac{dz\,d\bar{z}}{|z|^2} \end{aligned} \quad (5)$$

(напоминаем, что $f = f_1(z_1, z_3, z_4)$).

Теперь уже легко убедиться, что этот интеграл равен нулю. В самом деле, подинтегральная функция

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_4}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_4}\right) f_1(1 - t,\ z,\ 1 + t)$$

есть полная производная функции $f_1(1 - t, z, 1 + t)$ по t

*) Заметим, что координаты u, u' прямой можно предполагать отличными от нуля. В самом деле, пусть $u = 0$. Так как мы рассматриваем только прямые, проходящие через точку $(1, 0, 0, 1)$, то $u' = u = 0$. Тогда в силу уравнений (3), вдоль этой прямой имеем $z_3 = 0$. Следовательно, прямая не пересекает области, где сосредоточена функция f.

и $\bar{t}$. Следовательно, интеграл (F, f) равен нулю на основании теоремы Стокса. Лемма доказана.

Итак, мы доказали, что функционал F, определенный формулой (2), сосредоточен в точке $(1, 0, 0, 1)$ и, таким образом, F есть линейная комбинация δ-функции и ее производных. Покажем, что $(F, f) = cf(1, 0, 0, 1)$. Для этого нам достаточно доказать, что F есть однородный функционал степени однородности $(-3, -3)$. Докажем это.

Можно предположить, что функция f сосредоточена в сколь угодно малой окрестности точки $z^0 = (1, 0, 0, 1)$. Возьмем в качестве локальных координат на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ в окрестности точки z^0 переменные $t_1 = z_1 - 1$, $t_2 = z_2$, $t_3 = z_3$ и тем самым будем рассматривать функцию f как функцию от t_1, t_2, t_3, $f = f_1(t_1, t_2, t_3)$. В этих переменных интеграл по прямой $(u, v; u', v')$ запишется следующим образом:

$$\varphi(u, v; u', v') = \frac{1}{|u'|^2|v|^2} \times$$
$$\times \frac{i}{2}\int f_1\left(t_1, \frac{v'}{u'}(t_1+1) - \frac{v}{u'}, -\frac{u}{v}(t_1+1) + \frac{u'}{v}\right) dt_1\, d\bar{t}_1 =$$
$$= \frac{i}{2}\int f_1\left(vu't, vv't + \frac{v'-v}{u'}, -uu't + \frac{u'-u}{v}\right) dt\, d\bar{t}.$$

Подставим это выражение в формулу (2) для (F, f). Прежде всего непосредственной выкладкой получаем

$$L\varphi(u, v; u, v) \equiv$$
$$\equiv \left(-u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + u'\frac{\partial}{\partial u'} + v'\frac{\partial}{\partial v'}\right)\varphi(u, v; u', v')\Big|_{\substack{u'=u,\\ v'=v}} =$$
$$= 2\,\frac{i}{2}\int\left(\frac{v}{u}\frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{u}{v}\frac{\partial}{\partial t_3}\right) f_1(uvt, v^2t, -u^2t)\, dt\, d\bar{t}.$$

Таким образом, формула (2) для (F, f), если в качестве линии интегрирования Γ взять прямую $u = 1$, принимает следующий вид:

$$(F, f) = 4\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\left(v\frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t_3}\right)\left(\bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_2} + \frac{1}{\bar{v}}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_3}\right) \times$$
$$\times f_1(vt, v^2t, -t)\, dt\, d\bar{t}\, dv\, d\bar{v} \qquad (6)$$

(напоминаем, что $f = f_1(t_1, t_2, t_3)$). Из этой формулы непосредственно видно, что F есть однородный функционал степени однородности $(-3, -3)$. В самом деле, интеграл (6) сохраняется при замене функции $f_1(t_1, t_2, t_3)$ на функцию $f_1(\alpha t_1, \alpha t_2, \alpha t_3)$, то есть

$$(F, f_1(\alpha t_1, \alpha t_2, \alpha t_3)) = (F, f_1(t_1, t_2, t_3)).$$

Тем самым доказано, что $(F, f) = cf_1(0, 0, 0)$.

Итак, мы получили формулу обращения

$$f(1, 0, 0, 1) =$$
$$= c\,\frac{i}{2}\int_\Gamma L\bar{L}\varphi(u, v; u, v)(u\,dv - v\,du)(\bar{u}\,d\bar{v} - \bar{v}\,d\bar{u}).$$

Чтобы определить постоянную c, заметим, что эта постоянная должна быть та же, что и в формуле обращения для соответствующей локальной задачи (см. п. 4, формулу (5)). Таким образом, имеем $c = -\frac{1}{4\pi^2}$ *).

6. Другой вывод формулы обращения **). В этом пункте будет дан другой вывод формулы обращения, опирающийся на свойства обобщенной функции $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2|^\lambda$.

Напомним, что наша задача состоит в том, чтобы восстановить финитную бесконечно дифференцируемую функцию $f(z)$ на поверхности $(z, z) = 1$ $((z, z) \equiv z_1z_4 - z_2z_3)$, зная интегралы функции $f(z)$ по прямолинейным образующим. Эту задачу мы сначала сведем к другой задаче интегральной геометрии на поверхности $(z, z) = 1$, которая затем и будет решаться. Сформулируем эту вторую задачу.

Зададим на поверхности второго порядка $(z, z) = 1$ точку z^0 и рассмотрим сечения этой поверхности гиперплоскостями

$$(z, z^0) = \operatorname{ch}\tau.$$

При $\operatorname{ch}\tau = 1$ мы получим в сечении конус с вершиной

*) Впрочем, постоянную c можно вычислить непосредственно, применив формулу обращения, например, к функции

$$f(z) = e^{-|z_1|^2 - |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^4}.$$

**) Перед чтением этого пункта читателю нужно познакомиться со свойствами обобщенных функций вида $P^\lambda(z)\bar{P}^\mu(z)$ (см. Добавление, § 2, п. 7).

в точке z^0, поскольку гиперплоскость $(z, z^0)=1$ касается поверхности в точке z^0. При $\operatorname{ch}\tau=-1$ мы получим конус с вершиной в точке $-z_0^0$. При $\operatorname{ch}\tau\neq\pm 1$ мы будем получать в сечении невырожденные поверхности второго порядка.

Определим интеграл $\psi(\tau, z^0)$ функции $f(z)$ по сечению поверхности гиперплоскостью $(z, z^0)=\operatorname{ch}\tau$ формулой

$$\psi(\tau, z^0)=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int f(z)\,\omega_{z^0}\overline{\omega}_{z^0}, \tag{1}$$

где дифференциальная форма ω_{z^0} определяется из соотношения

$$dz_1\,dz_2\,dz_3\,dz_4=d(z, z)\,d(z, z^0)\,\omega_{z^0}. \tag{2}$$

Задача состоит в том, чтобы, *зная интегралы* $\psi(\tau, z^0)$ *функции* $f(z)$ *по сечениям поверхности* $(z, z)=1$ *гиперплоскостями* $(z, z^0)=\operatorname{ch}\tau$, *восстановить значение функции в точке* z^0 *). Мы покажем, что решение этой задачи дается следующей формулой обращения:

$$f(z^0)=-\frac{1}{8\pi^2}\left.\frac{\partial^2\psi(\tau, z^0)}{\partial\tau\,\partial\overline{\tau}}\right|_{\tau=0}. \tag{3}$$

Выясним сначала, как получить отсюда решение основной задачи, то есть как восстановить функцию $f(z)$ на поверхности $(z, z)=1$, зная ее интегралы по прямолинейным образующим. Для этого заметим, что сечение поверхности $(z, z)=1$ гиперплоскостью $(z, z^0)=\operatorname{ch}\tau$ $(\operatorname{ch}\tau\neq\pm 1)$ расслаивается на непересекающиеся прямые. Следовательно, если нам заданы интегралы $\varphi(u, v;\ u', v')$ функции $f(z)$ по прямым, то мы можем сосчитать и интеграл функции $f(z)$ по сечению поверхности $(z, z)=1$ гиперплоскостью $(z, z^0)=\operatorname{ch}\tau$. Именно, имеет место следующая формула (проверку которой мы опустим):

$$\psi(\tau, z^0)=4\,\frac{i}{2}\int_\Gamma\varphi\left(e^{-\frac{\tau}{2}}u,\ e^{-\frac{\tau}{2}}v,\ e^{\frac{\tau}{2}}(uz_1^0+vz_3^0),\ e^{\frac{\tau}{2}}(uz_2^0+vz_4^0)\right)\times$$
$$\times(u\,dv-v\,du)(\overline{u}\,d\overline{v}-\overline{v}\,d\overline{u}). \tag{4}$$

*) Локальным аналогом этой задачи является следующая задача: восстановить значение функции $f(z)$ в точке 0 трехмерного комплексного аффинного пространства, зная интегралы этой функции по поверхностям $z_1^2+z_2^2+z_3^2=\tau^2$.

Интеграл здесь берется по линии Γ на плоскости (u, v), пересекающейся в одной точке с каждой прямой $\alpha u+\beta v=0$ *).

Если это выражение для функции $\psi(\tau, z^0)$ подставить в формулу обращения (3), то получим искомое выражение для $f(z^0)$ через интегралы $\varphi(u, v;\ u', v')$ функции f по прямолинейным образующим

$$f(z^0)=-\frac{1}{8\pi^2}\,\frac{i}{2}\int_\Gamma L\overline{L}\varphi(u, v;\ uz_1^0+vz_3^0,\ uz_2^0+vz_4^0)\times$$
$$\times(u\,dv-v\,du)(\overline{u}\,d\overline{v}-\overline{v}\,d\overline{u}).$$

Это есть в точности та формула обращения, которая была приведена в п. 4 и доказана в п. 5.

Итак, задача состоит в том, чтобы получить формулу обращения

$$f(z^0)=-\frac{1}{8\pi^2}\left.\frac{\partial^2\psi(\tau; z^0)}{\partial\tau\,\partial\overline{\tau}}\right|_{\tau=0}.$$

Вывод этой формулы основан на рассмотрении интеграла

$$F(\lambda)=\left(\frac{i}{2}\right)^3\int_{(z, z)=1} f(z)\,|(z, z^0)^2-1|^{2\lambda}\,\sigma(z)\,\overline{\sigma(z)}, \tag{5}$$

где дифференциальная форма $\sigma(z)$ на поверхности $(z, z)=1$ определяется из соотношения

$$dz_1dz_2dz_3dz_4=d(z, z)\,\sigma(z).$$

Поскольку множитель при $f(z)$ под знаком интеграла постоянен на гиперплоскостях $(z, z^0)=\operatorname{ch}\tau$, то этот интеграл выражается непосредственно через интегралы $\psi(\tau, z^0)$ по сечениям поверхности $(z, z)=1$ гиперплоскостями $(z, z^0)=\operatorname{ch}\tau$. Именно,

$$F(\lambda)=\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\int_{|\operatorname{Im}\tau|<\pi}\psi(\tau; z^0)\,|\operatorname{ch}^2\tau-1|^{2\lambda}\,d(\operatorname{ch}\tau)\,d\,\overline{(\operatorname{ch}\tau)}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\int_{|\operatorname{Im}\tau|<\pi}\psi(\tau, z^0)\,|\operatorname{sh}\tau|^{4\lambda+2}\,d\tau\,d\overline{\tau}. \tag{6}$$

*) См. стр. 124.

Интеграл (6) сходится при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ и является в этой области аналитической функцией от λ. Определим функцию $F(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda < -1$ путем аналитического продолжения по λ.

Мы увидим, что при $\lambda = -\frac{3}{2}$ функция $F(\lambda)$ имеет простой полюс, и вычислим $\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\, F(\lambda)$, сначала исходя из формулы (6), а затем — из формулы (5). Сравнив эти выражения для вычета, мы и получим искомое выражение $f(z^0)$ через $\psi(\tau;\, z^0)$.

Сделаем пока о функции $f(z)$ дополнительное предположение, что она отлична от нуля лишь при достаточно малых значениях $(z,\, z^0) - 1$. Позже мы увидим, что это ограничение несущественно.

Итак, вычислим $\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\, F(\lambda)$ на основании формулы (6). Для этого перепишем формулу (6) в виде

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\int\limits_{|\operatorname{Im}\tau|<\pi} \psi(\tau;\, z^0)\left|\frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\right|^{4\lambda+2}|\tau|^{4\lambda+2}\,d\tau\, d\bar{\tau}.$$

В силу предположения о функции $f(z)$, при $\lambda = -\frac{3}{2}$ функция

$$\psi(\tau;\, z^0)\left|\frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\right|^{4\lambda+2}$$

непрерывна и бесконечно дифференцируема по τ в области $-\pi \leqslant \operatorname{Im}\tau \leqslant \pi$ *). С другой стороны, обобщенная функция $|\tau|^{4\lambda+2}$ имеет при $\lambda = -\frac{3}{2}$ простой полюс с вычетом

$$\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\, |\tau|^{4\lambda+2} = \frac{\pi}{2}\,\delta^{(1,\,1)}(\tau,\, \bar{\tau})$$

*) Бесконечная дифференцируемость функции $\psi(\tau;\, z^0)$ следует непосредственно из формулы (4). Функция же $\left|\frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\right|^{4\lambda+2}$ имеет особенность при $\tau = \pm i\pi$, но при этих значениях τ имеем $\psi(\tau;\, z^0) = 0$.

(см. Добавление, § 1, п. 3). Следовательно, функция $F(\lambda)$ имеет при $\lambda = -\frac{3}{2}$ простой полюс с вычетом

$$\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\, F(\lambda) = \frac{\pi}{4}\frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial\bar{\tau}}\left[\psi(\tau;\, z^0)\left|\frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\right|^{-4}\right]_{\tau=0} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left.\frac{\partial^2\psi(\tau;\, z^0)}{\partial\tau\,\partial\bar{\tau}}\right|_{\tau=0}. \qquad (7)$$

Итак, мы вычислили $\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\, F(\lambda)$, исходя из формулы (6).

Теперь сосчитаем $\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\, F(\lambda)$, исходя из формулы (5):

$$F(\lambda) = \left(\frac{i}{2}\right)^3\int f(z)\left((z,\, z^0)^2 - 1\right)^\lambda \left(\overline{(z,\, z^0)^2 - 1}\right)^\lambda \sigma(z)\overline{\sigma(z)}. \qquad (5)$$

Сначала покажем, что этот вычет определяется значениями функции f в сколь угодно малой окрестности точки z^0. Для этого используем свойство обобщенной функции $G^\lambda(z)\bar{G}^\lambda(z)$ (см. Добавление, § 2, п. 2). Именно, если на поверхности $G = 0$ нет особых точек, то обобщенная функция $G^\lambda\bar{G}^\lambda$, рассматриваемая как функция от λ, имеет особенности только при $\lambda = -1, -2, \ldots$ Отсюда непосредственно следует, что $\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\, G^\lambda\bar{G}^\lambda$ является обобщенной функцией, сосредоточенной на множестве особых точек поверхности $G = 0$. Применим этот результат к нашему случаю. У нас $G = (z,\, z^0)^2 - 1$; таким образом, поверхность $G = 0$ есть пара сечений поверхности $(z,\, z) = 1$ гиперплоскостями $(z,\, z^0) = 1$ и $(z,\, z^0) = -1$. Эти сечения — конусы с вершинами соответственно в точках z^0 и $-z^0$; следовательно, единственными особыми точками поверхности $(z,\, z^0)^2 - 1 = 0$ являются точки z^0 и $-z^0$. Итак, доказано, что обобщенная функция на поверхности гиперболоида

$$\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\, |(z,\, z^0)^2 - 1|^{2\lambda}$$

сосредоточена в двух точках z^0 и $-z^0$.

Так как, по сделанному раньше предположению, функция $f(z)$ равна нулю в окрестности точки $-z^0$, то, следовательно,

$$\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}} F(\lambda)=\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\left(\frac{i}{2}\right)^3\int f(z)\,|(z,\ z^0)^2-1|^{2\lambda}\,\sigma(z)\,\overline{\sigma(z)}$$

однозначно определяется значениями функции f в сколь угодно малой окрестности точки z^0. Итак, при вычислении $\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}} F(\lambda)$ мы можем считать функцию $f(z)$ сосредоточенной в сколь угодно малой окрестности точки z^0.

Сделаем в интеграле (5) линейное преобразование переменных, при котором форма $(z,\ z)$ приведется к каноническому виду $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=1$, а точка z^0 перейдет в точку (0, 0, 0, 1). Мы получим

$$F(\lambda)=16\left(\frac{i}{2}\right)^3\int f_1(z)\,|z_4^2-1|^{2\lambda}\,\sigma_1(z)\,\overline{\sigma_1(z)}=$$

$$=16\left(\frac{i}{2}\right)^3\int f_1(z)\,|z_1^2+z_2^2+z_3^2|^{2\lambda}\,\sigma_1(z)\,\overline{\sigma_1(z)}, \qquad (8)$$

где $f_1(z)$ — исходная функция $f(z)$ в новых переменных; форма $\sigma_1(z)$ определяется соотношением $dz_1\,dz_2\,dz_3\,dz_4=$ $=d(z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2)\,\sigma_1(z)$. Примем за локальные координаты на поверхности $z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=1$ в окрестности точки (0, 0, 0, 1) величины z_1, z_2, z_3. В этих переменных имеем

$$\sigma_1(z)\,\overline{\sigma_1(z)}=\frac{1}{4}\,\frac{dz_1\,dz_2\,dz_3\,d\bar z_1\,d\bar z_2\,d\bar z_3}{|1-z_1^2-z_2^2-z_3^2|}.$$

Обобщенная функция $|z_1^2+z_2^2+z_3^2|^{2\lambda}$ имеет при $\lambda=-\frac{3}{2}$ полюс с вычетом

$$\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}}\,|z_1^2+z_2^2+z_3^2|^{2\lambda}=-\frac{1}{2}\,\pi^3\delta(z)$$

(см. Добавление, § 2, п. 7). Ввиду этого из формулы (8) получаем

$$\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}} F(\lambda)=-2\pi^3 f_1(0,0,0,1)=-2\,\pi^3 f(z^0).$$

Теперь сопоставим полученное выражение для $\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}} F(\lambda)$ с выражением для $\underset{\lambda=-3/2}{\text{Выч}} F(\lambda)$, найденным ранее (формула (7)). Мы получим искомую формулу

$$f(z^0)=-\frac{1}{8\pi^2}\,\frac{\partial^2\psi(\tau,\ z^0)}{\partial\tau\,\partial\bar\tau}\bigg|_{\tau=0},$$

выражающую значение функции $f(z)$ в точке z^0 через ее интегралы по плоским сечениям поверхности $(z,\ z)=1$ гиперплоскостями $(z,\ z^0)=1$.

При выводе этой формулы на функцию $f(z)$ было наложено дополнительное ограничение, что она отлична от нуля, только когда $(z,\ z^0)-1$ достаточно мало. Из полученной формулы обращения видно, что это ограничение несущественно, поскольку для вычисления $f(z^0)$ нужно знать интегралы функции только по тем сечениям, на которых $(z,\ z^0)$ сколь угодно близко к единице.

7. Быстро убывающие функции на поверхности второго порядка. Теорема Пэли — Винера. Введем понятие функции на поверхности $z_1z_4-z_2z_3=1$, быстро убывающей вместе со всеми своими производными. Тем самым для поверхности $z_1z_4-z_2z_3=1$ будет определен аналог функционального пространства S *).

Назовем функцию $f(z)$, заданную на поверхности z_1z_4- $-z_2z_3=1$ *быстро убывающей*, если для любого многочлена $P(z)$ от переменных z_k и $\bar z_k$ функция $P(z)f(z)$ есть функция, ограниченная на поверхности $z_1z_4-z_2z_3=1$.

Теперь введем понятие функции, быстро убывающей вместе со всеми производными. Сопоставим каждой бесконечно дифференцируемой функции $f(z)$ на поверхности

$$z_1z_4-z_2z_3=1$$

*) Пространство S есть пространство бесконечно дифференцируемых функций нескольких (вещественных или комплексных) переменных, быстро убывающих вместе со всеми своими производными.

обобщенную функцию

$$F(z) = f(z)\,\delta(z_1z_4 - z_2z_3 - 1), \tag{1}$$

сосредоточенную на этой поверхности. Пусть

$$P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

обозначает оператор, являющийся многочленом от переменных z_k, $\bar z_k$ и от операторов $\frac{\partial}{\partial z_k}$, $\frac{\partial}{\partial \bar z_k}$.

Оператор $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ назовем внутренним оператором (относительно поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$), если он всякую функцию вида (1) переводит в функцию того же вида, то есть

$$P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)[f(z)\,\delta(z_1z_4 - z_2z_3 - 1)] = g(z)\,\delta(z_1z_4 - z_2z_3 - 1),$$

где $g(z)$ — снова некоторая функция, заданная на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$. Всякий внутренний оператор P относит, таким образом, функции $f(z)$ на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ некоторую другую функцию $g(z)$ на этой поверхности. Следовательно, его можно рассматривать как оператор в пространстве функций, заданных на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$.

Назовем функцию $f(z)$, заданную на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, быстро убывающей вместе со всеми своими производными, если для любого внутреннего оператора $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ функция

$$P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(z)$$

есть функция, ограниченная на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$.

Бесконечно дифференцируемые функции на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, быстро убывающие вместе со всеми производными, образуют линейное пространство, которое мы обозначим через S. Топология в этом пространстве вводится при помощи набора норм

$$\|f\|_P = \sup_z \left| P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(z)\right|, \tag{2}$$

где P пробегает внутренние операторы на поверхности

$$z_1z_4 - z_2z_3 = 1.$$

Было бы интересно определить на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ также аналоги пространств S_α^β (см. «Обобщенные функции», вып. 2). По-видимому, эти пространства определяются, как и в случае S, наборами норм, связанных с некоторыми элементами кольца внутренних операторов.

Рассмотрим следующую задачу. Функциям $f(z)$ на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ мы сопоставили в п. 3 их интегралы $\varphi(u, v; u', v')$ по прямым, лежащим на этой поверхности. Спрашивается, каковы все те функции $\varphi(u, v; u', v')$, которые отвечают бесконечно дифференцируемым функциям $f(z)$, быстро убывающим вместе со всеми производными.

Прежде всего напомним, что функция φ, полученная интегрированием по прямым некоторой функции $f(z)$ на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ всегда удовлетворяет условию однородности

$$\varphi(\alpha u, \alpha v; \alpha u', \alpha v') = \alpha^{-2}\bar\alpha^{-2}\varphi(u, v; u', v')$$

для любого $\alpha \neq 0$. Это условие непосредственно следует из определения функции φ.

Из условий бесконечной дифференцируемости и быстрого убывания функции f следует, что функция φ также должна удовлетворять некоторым условиям гладкости и быстрого убывания. Сформулируем эти условия без вывода (их вывод будет дан в главе IV).

Условие дифференцируемости. Функция $\varphi(u, v; u', v')$ бесконечно дифференцируема по u, v, u', v' и $\bar u, \bar v, \bar u', \bar v'$ всюду, кроме точек, где $u = v = 0$ или $u' = v' = 0$.

Условие убывания. Для любого вещественного числа k функция

$$\left(\frac{|u'|^2 + |v'|^2}{|u|^2 + |v|^2}\right)^k (|u|^2 + |v|^2)(|u'|^2 + |v'|^2)\,\varphi(u, v; u', v')$$

является ограниченной функцией от u, v, u', v'. Тем же свойством должны обладать и функции φ_P, соответствующие функциям $Pf(z)$, где P — произвольный внутренний оператор.

Оказывается, что сформулированных здесь условий на функцию $\varphi(u, v; u', v')$ еще недостаточно для того, чтобы эта функция получалась интегрированием по прямым некоторой бесконечно дифференцируемой быстро убывающей вместе со всеми производными функции $f(z)$. Именно, функция φ, а также и ее производные, удовлетворяет некоторым дополнительным соотношениям, которые вместе со сформулированными условиями гладкости и убывания оказываются уже не только необходимыми, но и достаточными условиями на функцию φ. Эти соотношения будут получены из групповых соображений в гл. IV, § 5. Здесь мы ограничимся только их формулировкой.

Полезно вспомнить, что та же ситуация имеет место для преобразования Радона в n-мерном аффинном пространстве (гл. I, § 1). Именно, преобразование Радона бесконечно дифференцируемой функции в n-мерном пространстве, быстро убывающей вместе со всеми производными, помимо естественных условий гладкости и убывания, также удовлетворяет дополнительным соотношениям.

Дополнительные условия на функцию $\varphi(u, v; u', v')$ удобнее формулировать не в терминах самой функции $\varphi(u, v; u', v')$, а в терминах ее преобразования Меллина.

Введем сначала неоднородную систему координат на множестве прямых:

$$z_1 = \frac{u}{v}, \quad z_2 = \frac{u'}{v'}, \quad \lambda = \frac{v'}{v}$$

и положим

$$\varphi_1(z_1, z_2, \lambda) = \lambda\bar{\lambda}\varphi(z_1, 1; \lambda z_2, \lambda). \tag{3}$$

Первые две координаты z_1, z_2 определяют здесь направление прямой. Таким образом, при фиксированных z_1, z_2 функция φ_1 есть функция на множестве параллельных прямых. Проинтегрируем функцию $\varphi_1(z_1, z_2, \lambda)$ с весовым множителем $\lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}$ по множеству параллельных прямых. Мы получим функцию

$$K(z_1, z_2; n_1, n_2) = \frac{i}{2}\int \varphi_1(z_1, z_2, \lambda)\lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}, \tag{4}$$

которую естественно называть *преобразованием Меллина* функции $\varphi_1(z_1, z_2, \lambda)$. Здесь (n_1, n_2) — произвольная пара комплексных чисел, такая, что разность $n_1 - n_2$ есть целое число. (Это требование необходимо для того, чтобы функция $\lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}$ была однозначной функцией от λ.)

Дополнительные условия, которым удовлетворяет функция $\varphi(u, v; u', v')$, формулируются в терминах ее преобразования Меллина следующим образом:

1) Если n_1, n_2 не являются целыми числами одного и того же знака, то имеет место следующее соотношение:

$$\frac{i}{2}\int K(z, z_2; n_1, n_2)(z - z_1)^{-n_1-1}\overline{(z - z_1)}^{-n_2-1}\,dz\,d\bar{z} =$$
$$= \frac{i}{2}\int K(z_1, z; -n_1, -n_2)(z_2 - z)^{-n_1-1}\overline{(z_2 - z)}^{-n_2-1}\,dz\,d\bar{z}. \tag{5}$$

Оба написанных здесь интеграла нужно понимать в смысле регуляризованных значений (см. Добавление, § 1).

2) Если $n_1 = 1, 2, \ldots$, то

$$\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}} K(z_1, z_2; n_1, n_2) = (-1)^{n_1}\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_2^{n_1}} K(z_1, z_2; -n_1, n_2). \tag{6}$$

3) Если $n_2 = 1, 2, \ldots$, то

$$\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_1^{n_2}} K(z_1, z_2; n_1, n_2) = (-1)^{n_2}\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_2^{n_2}} K(z_1, z_2; n_1, -n_2). \tag{6'}$$

Групповой смысл этих соотношений будет установлен в главе IV. Здесь мы укажем, как можно было бы получить эти дополнительные соотношения из геометрических соображений.

Условия 1) связаны со следующим геометрическим фактом. Проведем сечение поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$ какой-либо гиперплоскостью. В сечении получится двумерная поверхность второго порядка, обладающая двумя семействами прямолинейных образующих. Поэтому, интегрируя функцию φ по множеству образующих первого семейства и по множеству образующих второго семейства, мы получим один и тот же результат, а именно, интеграл исходной функции $f(z)$ по двумерной поверхности. Тем самым мы получаем соотношения для функции φ. Другие соотношения мы получим, если вместо функции f будем рассматривать функции Pf, где P — внутренние операторы.

Можно показать, что получаемые в результате соотношения как раз эквивалентны соотношениям (5).

Теперь укажем, как возникают из геометрических соображений соотношения (6) и (6′). Функция $f(z)$ выражается через функцию $\varphi(u, v; u', v')$ следующей формулой обращения ((9) п. 4):

$$f(z) = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{i}{2}\int_\Gamma \psi(u, v; uz_1 + vz_3; uz_2 + vz_4) \times$$
$$\times (u\,dv - v\,du)(\bar{u}\,d\bar{v} - \bar{v}\,d\bar{u}), \qquad (7)$$

где обозначено

$$\psi(u, v; u', v') = L\bar{L}\varphi(u, v; u', v'),$$
$$L = -u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + u'\frac{\partial}{\partial u'} + v'\frac{\partial}{\partial v'}.$$

Интеграл (7) берется по множеству всех прямых на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, проходящих через точку z. При неограниченном удалении точки z это множество прямых переходит в семейство параллельных прямых на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$. Таким образом, из условия, что $f(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, получаем, что интеграл от функции ψ, взятый по множеству параллельных прямых, лежащих на поверхности $z_1z_4 - z_2z_3 = 1$, равен нулю. Можно показать, что каждое из условий $|z|^k f(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$ сводится к тому, что интеграл от некоторого дифференциального оператора, примененного к функции ψ, взятый по множеству параллельных прямых, должен равняться нулю.

Можно показать, что получаемые в результате условия на функцию ψ как раз эквивалентны соотношениям (6), (6′).

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Определение преобразования Радона. В этом параграфе мы изучим связь между функциями $f(z)$ в комплексном аффинном пространстве и интегралами от этих функций по всевозможным гиперплоскостям. Его можно рассматривать как добавление к главе I, где аналогичные вопросы рассматривались для вещественного пространства.

Сначала дадим определение интеграла по гиперплоскости в комплексном аффинном пространстве. Пусть задано n-мерное комплексное аффинное пространство точек $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и в нем гиперплоскость

$$(\zeta, z) = s,$$

где обозначено $(\zeta, z) = \zeta_1z_1 + \ldots + \zeta_nz_n$.

С этой гиперплоскостью свяжем дифференциальную форму ω, определяемую из следующего соотношения:

$$dz_1 \ldots dz_n = d(\zeta, z)\,\omega. \qquad (1)$$

Легко получить выражение для дифференциальной формы ω в произвольной системе координат на гиперплоскости. Так, если задавать точки гиперплоскости $\zeta_1z_1 + \ldots + \zeta_nz_n = s$ координатами $z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n$, то получаем

$$\omega = (-1)^{k-1}\frac{1}{\zeta_k}dz_1 \ldots dz_{k-1}\,dz_{k+1} \ldots dz_n. \qquad (2)$$

Пусть $f(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция, быстро убывающая вместе со всеми производными.

Интеграл функции $f(z)$ по гиперплоскости $(\zeta, z) = s$ зададим следующей формулой:

$$\check{f}(\zeta, s) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\int_{(\zeta, z) = s} f(z)\,\omega\bar{\omega}^{*}), \qquad (3)$$

где форма ω определяется из условия (1), *а $\bar{\omega}$ — комплексно сопряженная форма*,

$$\bar{\omega} = (-1)^{k-1}\frac{1}{\bar{\zeta}_k}d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_{k-1}\,d\bar{z}_{k+1} \ldots d\bar{z}_n.$$

Функцию $\check{f}(\zeta, s)$, определенную по существу на множестве гиперплоскостей, назовем *преобразованием Радона* функции $f(z)$. Выражение для функции $\check{f}(\zeta, s)$ удобно также записать в виде интеграла по всему пространству, используя символику δ-функций в комплексном пространстве (см. Добавление, § 2, п. 1). Именно,

$$\check{f}(\zeta, s) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int f(z)\,\delta(s - (\zeta, z))\,dz\,d\bar{z}, \qquad (4)$$

где $dz = dz_1 \ldots dz_n$.

*) Степень $\frac{i}{2}$ относится к дифференциальной форме, стоящей под знаком интеграла, и вводится для того, чтобы эта форма была вещественной (см. Добавление, § 2, п. 1).

Из этого выражения видно, в частности, что $\check{f}(\zeta, s)$ есть однородная функция от ζ, s степени однородности $(-1, -1)$. Это значит, что для любого комплексного числа $\alpha \neq 0$ справедливо равенство

$$\check{f}(\alpha\zeta, \alpha s) = \alpha^{-1}\bar{\alpha}^{-1}\check{f}(\zeta, s). \tag{5}$$

Таким образом, функция $\check{f}(\zeta, s)$ фактически зависит от того же числа комплексных переменных, что и исходная функция $f(z)$.

Заметим, что гиперплоскости в комплексном n-мерном пространстве имеют вещественную размерность $2n-2$. Ввиду этого преобразование Радона в n-мерном комплексном пространстве, рассматриваемом как вещественное пространство размерности $2n$, состоит в том, что функция f интегрируется по некоторым $2n-2$-мерным плоскостям, образующим $2n$-параметрическое семейство.

Сформулируем несколько элементарных свойств преобразования Радона. Проверка этих свойств ведется дословно так же, как и для случая вещественного пространства (см. главу I, § 1, п. 3), а потому мы ее опустим.

а) Пусть A — невырожденное линейное преобразование переменных $z_1, \ldots, z_n$. Тогда преобразование Радона функции

$$f_A(z) = f(A^{-1}z)$$

есть

$$\check{f}_A(\zeta, s) = |\det A|^2 \check{f}(A'\zeta, s), \tag{6}$$

где $\check{f}(\zeta, s)$ — преобразование Радона функции $f(z)$, а A' — линейное преобразование, сопряженное к преобразованию A (то есть $(\zeta, Az) = (A'\zeta, z)$).

б) Преобразование Радона функции $f(z+a)$ есть

$$\check{f}(\zeta, s + (\zeta, a)),$$

где $\check{f}(\zeta, s)$ — преобразование Радона функции $f(z)$.

в) Преобразование Радона функции

$$\left[\left(a, \frac{\partial}{\partial z}\right) + \left(b, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right] f(z) \equiv \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{\partial}{\partial z_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) f(z)$$

есть

$$(a, \zeta)\frac{\partial \check{f}(\zeta, s)}{\partial s} + (b, \bar{\zeta})\frac{\partial \check{f}(\zeta, s)}{\partial \bar{s}}, \tag{7}$$

где $\check{f}(\zeta, s)$ — преобразование Радона функции $f(z)$. Отсюда, как следствие, получаем, что преобразование Радона функции

$$P\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) f(z),$$

где $P(\xi, \eta)$ — многочлен, однородный относительно ξ степени однородности k и однородный относительно η степени однородности l, есть

$$P(\zeta, \bar{\zeta})\frac{\partial^{k+l}\check{f}(\zeta, s)}{\partial s^k\, \partial \bar{s}^l}.$$

г) Преобразование Радона свертки

$$f(z) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int f_1(z-z') f_2(z')\, dz'\, d\bar{z}'$$

есть

$$\check{f}(\zeta, s) = \frac{i}{2}\int \check{f}_1(\zeta, s-t)\, \check{f}_2(\zeta, t)\, dt\, d\bar{t}, \tag{8}$$

где $\check{f}_1$ и $\check{f}_2$ — преобразования Радона функций f_1 и f_2.

2. Представление функции через ее преобразование Радона. Пусть задана функция $f(z)$ в n-мерном комплексном пространстве, и пусть $\check{f}(\zeta, s)$ — ее преобразование Радона,

$$\check{f}(\zeta, s) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int f(z)\,\delta(s - (\zeta, z))\, dz\, d\bar{z}. \tag{1}$$

Поставим задачу, зная функцию $\check{f}(\zeta, s)$, восстановить функцию $f(z)$, то есть, иными словами, получить обращение формулы (1).

Аналогичная задача была решена в главе I для вещественного пространства. При этом оказалось, что для четномерных и для нечетномерных вещественных пространств формулы обращения различны. Мы увидим, что в комплексном случае формула обращения имеет одинаковый вид для пространств любых размерностей. Она аналогична формуле обращения для случая нечетномерного вещественного пространства.

Формулу обращения мы получим, повторив, по существу, рассуждения главы I для случая нечетномерного вещественного пространства. Сначала функцию $\check{f}(\zeta, s)$ продифференцируем $n-1$ раз по s и $n-1$ раз по $\bar{s}$ *). Мы получим функцию

$$\psi(\zeta, s) = \check{f}_s^{(n-1,\ n-1)}(\zeta, s). \tag{2}$$

Затем функцию $\psi(\zeta, s)$ усредним по множеству гиперплоскостей, проходящих через заданную точку z. Оказывается, в результате усреднения получится, с точностью до постоянного множителя, искомое значение функции f в точке z.

Поясним, что следует понимать под усреднением функции $\psi(\zeta, s)$ по множеству гиперплоскостей, проходящих через точку z. Заметим, что любая гиперплоскость, проходящая через точку z_0, задается уравнением $(\zeta, z) = (\zeta, z_0)$. Таким образом, речь идет об усреднении по ζ функции $\psi(\zeta, (\zeta, z))$. Эта функция является однородной функцией относительно ζ степени однородности $(-n, -n)$ (поскольку исходная функция $\check{f}$, производной которой является функция ψ, однородна степени однородности $(-1, -1)$). Ввиду этого усреднение функции $\psi(\zeta, (\zeta, z))$ естественно определить как ее вычет, то есть как интеграл

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int_\Gamma \psi(\zeta, (\zeta, z))\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)} \tag{3}$$

по произвольной поверхности Γ в пространстве точек ζ, пересекающейся по одному разу с каждой комплексной прямой, проходящей через точку $\zeta = 0$ **). Здесь дифференциальная

*) Операторы $\dfrac{\partial}{\partial s}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \bar{s}}$ естественно называть операторами бесконечно малого параллельного сдвига гиперплоскости, поскольку при изменении s гиперплоскость $(\zeta, z) = s$ сдвигается параллельно себе.

**) Это выражение нужно понимать в условном смысле, поскольку такой поверхности Γ, пересекающейся по одному разу с каждой комплексной прямой, проходящей через точку $\zeta = 0$, на самом деле не существует. Именно, сначала пространство прямых, проходящих через точку $\zeta = 0$, разбивается на достаточно малые области, и для каждой области берется кусок аналитической поверхности Γ_i, пересекающей прямые из этой области по одному разу. По определению, интеграл по Γ есть сумма интегралов по Γ_i. Это определение не противоречиво, поскольку интегралы по Γ_i не зависят от выбора Γ_i, а их сумма не зависит от способа разбиения пространства прямых, проходящих через точку $\zeta = 0$, на части.

форма $\omega(\zeta)$ определяется так:

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \zeta_k\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_{k-1}\, d\zeta_{k+1} \ldots d\zeta_n \tag{4}$$

(см. Добавление, § 2, п. 5).

Заметим, что, поскольку подинтегральное выражение однородно степени однородности $(0, 0)$, то этот интеграл можно трактовать и как интеграл по проективному пространству комплексных прямых, проходящих через точку $\zeta = 0$.

Итак, нам предстоит получить следующий результат.

Пусть $\check{f}(\zeta, s)$ — *преобразование Радона функции* $f(z)$. *Тогда функция* $f(z)$ *определяется по функции* $\check{f}(\zeta, s)$ *следующей формулой обращения*:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int_\Gamma \check{f}_s^{(n-1,\ n-1)}(\zeta, (\zeta, z))\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)} = cf(z), \tag{5}$$

где

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \zeta_k\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_{k-1}\, d\zeta_{k+1} \ldots d\zeta_n,$$

а интеграл берется по произвольной поверхности Γ *в пространстве* ζ, *пересекающейся по одному разу с каждой комплексной прямой, проходящей через точку* $\zeta = 0$. Постоянная c в дальнейшем будет вычислена.

Докажем сперва формулу (5) для точки $z = 0$, то есть докажем, что

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int_\Gamma \check{f}_s^{(n-1,\ n-1)}(\zeta, 0)\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)} = cf(0). \tag{6}$$

Интеграл (6) задает непрерывный функционал в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $f(z)$, быстро убывающих вместе со всеми производными,

$$(F, f) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int_\Gamma \check{f}_s^{(n-1,\ n-1)}(\zeta, 0)\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)}. \tag{7}$$

Нам нужно доказать, что $F = c\delta(z)$. Легко непосредственно убедиться, что функционал F удовлетворяет следующему условию:

$$(F, f(Az)) = (F, f(z)), \tag{8}$$

где A — произвольное невырожденное линейное преобразование *). Усредняя левую часть равенства (8) по множеству преобразований A, сохраняющих форму

$$|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$$

(то есть по множеству унитарных преобразований), мы получим

$$(F, f_1(z)) = (F, f(z)), \tag{9}$$

где $f_1(z)$ — усреднение функции $f(z)$ по сферам

$$|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = r^2.$$

Тем самым при вычислении (F, f) функцию f можно заменить ее средним по сферам $|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = r^2$. Значит F можно теперь рассматривать как функционал в пространстве функций на полупрямой $0 \leqslant r < \infty$. Но на полупрямой $0 \leqslant r < \infty$ функционал F является, в силу соотношения $(F, f(\alpha z)) = (F, f(z))$ для любого $\alpha \neq 0$, однородной обобщенной функцией степени однородности -1. Легко показать, что единственная однородная обобщенная функция на полупрямой степени однородности -1 есть, с точностью до множителя, δ-функция (сравни вып. 1, стр. 110). Этим доказано, что $F = c\delta(z)$, то есть, что

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int\limits_{\Gamma} \check{f}_s^{(n-1,\, n-1)}(\zeta,\ 0)\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)} = c f(0). \tag{10}$$

Выражение для функции $f(z)$ в произвольной точке z_0 через преобразование Радона $\check{f}(\zeta, s)$ получается непосредственно из формулы (10). Для этого достаточно применить формулу (10) к функции $f_1(z) = f(z + z_0)$. Поскольку преобразование Радона функции $f_1(z)$ есть $\check{f}(\zeta,\ s + (\zeta, z_0))$ (см. п. 1), то мы получим из формулы (10)

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int\limits_{\Gamma} \check{f}_s^{(n-1,\, n-1)}(\zeta,\ (\zeta,\ z_0))\, \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)} = c f(z_0). \tag{11}$$

*) См. аналогичное рассуждение в п. 4 § 1 гл. I для вещественного пространства.

Осталось вычислить постоянную c в формуле обращения. Для этого применим формулу обращения к функции

$$f(z) = e^{-|z_1|^2 - \ldots - |z_n|^2}.$$

Преобразование Радона функции $f(z)$ есть

$$\check{f}(\zeta,\ s) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int e^{-|z_1|^2 - \ldots - |z_n|^2} \delta(s - \zeta_1 z_1 - \ldots - \zeta_n z_n) \times \\ \times dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots dz_n\, d\bar{z}_n.$$

Унитарным преобразованием переменных $z_1, \ldots, z_n$ этот интеграл приводится к виду

$$\check{f}(\zeta,\ s) = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int e^{-|z_1|^2 - \ldots - |z_n|^2} \delta(s - |\zeta|\, z_1) \times \\ \times dz_1 d\bar{z}_1 \ldots dz_n\, d\bar{z}_n,$$

где $|\zeta|^2 = |\zeta_1|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2$. Отсюда легко получаем

$$\check{f}(\zeta,\ s) = \frac{\pi^{n-1}}{|\zeta|^2} e^{-\frac{s\bar{s}}{|\zeta|^2}}.$$

Разлагая экспоненту в ряд, получим

$$\check{f}_s^{(n-1,\, n-1)}(\zeta,\ 0) = (-1)^{n-1} (n-1)!\, \pi^{n-1} |\zeta|^{-2n}.$$

Подставим выражение для $f(0)$ и $\check{f}_s^{(n-1,\, n-1)}(\zeta,\ 0)$ в формулу (10). Мы получим

$$c = (-1)^{n-1} (n-1)!\, \pi^{n-1} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int\limits_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)}}{|\zeta|^{2n}}.$$

Последний интеграл легко вычислить. Например, беря в качестве Γ гиперплоскость $\zeta_1 = 1$, получаем

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int \frac{\omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)}}{|\zeta|^{2n}} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \int \frac{d\zeta_2\, d\bar{\zeta}_2 \ldots d\zeta_n\, d\bar{\zeta}_n}{(1 + |\zeta_2|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2)^n} = \\ = \Omega_{2n-2} \int\limits_0^\infty \frac{r^{2n-3}\, dr}{(1 + r^2)^n} = \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}$$

(Ω_{2n-2} — поверхность единичной сферы в $2n$ — 2-мерном вещественном пространстве). Следовательно, $c=(-1)^{n-1}\pi^{2n-2}$.

Итак, мы получили следующий окончательный результат. *Функция $f(z)$ в комплексном n-мерном пространстве, бесконечно дифференцируемая и быстро убывающая вместе со всеми производными, выражается через свое преобразование Радона $\check{f}(\zeta, s)$ следующей формулой обращения:*

$$f(z)=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n-2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\int\limits_{\Gamma}\check{f}_s^{(n-1,\,n-1)}(\zeta,\ (\zeta,\ z))\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)},\quad (12)$$

где $\omega(\zeta)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\zeta_k\,d\zeta_1\ldots d\zeta_{k-1}\,d\zeta_{k+1}\ldots d\zeta_n$, *а интеграл берется по произвольной поверхности Γ в пространстве ζ, пересекающейся по одному разу с каждой комплексной прямой, проходящей через точку $\zeta=0$.*

3. Аналог формулы Планшереля для преобразования Радона. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две функции в n-мерном комплексном аффинном пространстве, бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие вместе со всеми производными; $\check{f}(\zeta, s)$ и $\check{g}(\zeta, s)$ — их преобразования Радона. Покажем, что *для функций и их преобразований Радона имеет место следующий аналог формулы Планшереля:*

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int f(z)\,\overline{g(z)}\,dz\,d\bar z=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n-2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\check{f}(\zeta,\ s)\,\overline{\check{g}_s^{(n-1,\,n-1)}(\zeta,\ s)}\,ds\,d\bar s\right)\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)},\quad (1)$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int f(z)\,\overline{g(z)}\,dz\,d\bar z=$$
$$=\frac{1}{\pi^{2n-2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\frac{\partial^{n-1}\check{f}(\zeta,\ s)}{\partial s^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial^{n-1}\check{g}(\zeta,\ s)}{\partial s^{n-1}}}\,ds\,d\bar s\right)\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)},\quad (2)$$

где $\omega(\zeta)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\zeta_k\,d\zeta_1\ldots d\zeta_{k-1}\,d\zeta_{k+1}\ldots d\zeta_n$, *а Γ — произвольная поверхность в пространстве ζ, пересекающаяся по одному разу с каждой комплексной прямой, проходящей через точку $\zeta=0$* *). (Вторая формула получается из первой интегрированием по частям.)

Для доказательства применим формулу обращения для преобразования Радона (п. 2) к свертке

$$F(z)=\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int f(u)\,\overline{g(u-z)}\,du\,d\bar u\quad (3)$$

функций $f(z)$ и $g^*(z)=\overline{g(-z)}$. Используя элементарные свойства преобразования Радона (см. конец п. 1), убеждаемся, что преобразование Радона функции $F(z)$ есть

$$\check{F}(\zeta,\ s)=\frac{i}{2}\int\check{f}(\zeta,\ t)\,\overline{\check{g}(\zeta,\ t-s)}\,dt\,d\bar t.$$

Тем самым по формуле обращения для преобразования Радона имеем

$$F(0)=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n-2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\int\limits_{\Gamma}\check{F}_s^{(n-1,\,n-1)}(\zeta,\ 0)\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n-2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\check{f}(\zeta,\ t)\,\overline{\check{g}_s^{(n-1,\,n-1)}(\zeta,\ t)}\,dt\,d\bar t\right)\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}.$$

Но, с другой стороны,

$$F(0)=\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int f(u)\,\overline{g(u)}\,du\,d\bar u.$$

Таким образом, мы получаем

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int f(z)\,\overline{g(z)}\,dz\,d\bar z=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n-2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\int\limits_{\Gamma}\left(\int\check{f}(\zeta,\ s)\,\overline{\check{g}_s^{(n-1,\,n-1)}(\zeta,\ s)}\,ds\,d\bar s\right)\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}.$$

*) Напомним, что в вещественном пространстве формула Планшереля для преобразования Радона пишется по-разному для нечетномерных и четномерных пространств. В простейшем, нечетномерном случае формула Планшереля аналогична формуле Планшереля для комплексного пространства.

Формула получена нами для быстро убывающих функций $f(z)$, $g(z)$. Однако, совершая обычный предельный переход, мы можем распространить эту формулу на любые функции $f(z)$, $g(z)$ с интегрируемым квадратом модуля.

В силу формулы Планшереля преобразование

$$f(z) \to \check{f}_s^{(n-1,\, n-1)}(\zeta, s)$$

есть изометрическое отображение пространства функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^n \int |f(z)|^2\, dz\, d\bar{z} < \infty, \tag{4}$$

в пространство однородных функций $\psi(\zeta, s)$ степени однородности $(-n, -n)$ (то есть таких, что $\psi(\alpha\zeta, \alpha s) = \alpha^{-n}\bar{\alpha}^{-n}\psi(\zeta, s)$ для любого $\alpha \neq 0$), удовлетворяющих условию

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{\pi^{2n-2}}\left(\frac{i}{2}\right)^n \int_\Gamma \left(\int |\psi(\zeta, s)|^2\, ds\, d\bar{s}\right) \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)} < \infty. \tag{5}$$

Можно показать, что это отображение является отображением на все пространство однородных функций $\psi(\zeta, s)$ степени однородности $(-n, -n)$, удовлетворяющих условию (5). Доказательства мы приводить здесь не будем.

4. Аналог теоремы Пэли — Винера для преобразования Радона. Нас будет теперь интересовать, каковы все те функции $\check{f}(\zeta, s)$, которые являются преобразованием Радона бесконечно дифференцируемых функций $f(z)$, быстро убывающих вместе со всеми производными *). Оказывается, для того, чтобы функция $\check{f}(\zeta, s)$ была преобразованием Радона некоторой бесконечно дифференцируемой функции в комплексном n-мерном пространстве, быстро убывающей вместе со всеми производными, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

*) Напомним, что функция $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ называется быстро убывающей, если для любого $k \geqslant 0$ $\lim\limits_{|z| \to \infty} |z|^k |f(z)| = 0$, где $|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$.

1. Функция $\check{f}(\zeta, s)$ однородна относительно ζ, s степени однородности $(-1, -1)$, то есть

$$\check{f}(\alpha\zeta, \alpha s) = \alpha^{-1}\bar{\alpha}^{-1}\check{f}(\zeta, s)$$

для любого $\alpha \neq 0$.

2. Функция $\check{f}(\zeta, s)$ бесконечно дифференцируема по ζ, s и $\bar{\zeta}$, $\bar{s}$ при $\zeta \neq 0$.

3. При $|s| \to \infty$ и для любого $k > 0$ имеет место оценка

$$|\check{f}(\zeta, s)| = o\left(|s|^{-k}\right)$$

равномерно по ζ, когда ζ пробегает ограниченную замкнутую область в пространстве, не содержащую начала координат. Та же оценка имеет место для любой производной функции $\check{f}(\zeta, s)$ по ζ, s, $\bar{\zeta}$ и $\bar{s}$.

4. Для любых k, $l = 0, 1, \ldots$ интеграл

$$\frac{i}{2}\int \check{f}(\zeta, s)\, s^k \bar{s}^l\, ds\, d\bar{s}$$

является однородным многочленом от ζ, $\bar{\zeta}$ степени однородности (k, l).

Как мы видели в главе I, аналогичные условия имеют место и в случае вещественного пространства.

Доказательство необходимости и достаточности условий 1—4 мы опустим, поскольку это доказательство дословно такое же, что и для вещественного пространства (см. гл. I).

5. Преобразование Радона обобщенных функций. Преобразование Радона обобщенных функций определим так, чтобы для основных функций это определение совпадало с обычным.

Будем исходить из формулы Планшереля, полученной в п. 3:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n \int F(z) f(z)\, dz\, d\bar{z} =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n-2}}\left(\frac{i}{2}\right)^n \int_\Gamma \left(\int \check{F}(\zeta, s)\, \check{f}_s^{(n-1,\, n-1)}(\zeta, s)\, ds\, d\bar{s}\right) \omega(\zeta)\, \overline{\omega(\zeta)}, \tag{1}$$

где $\omega(\zeta) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \zeta_k\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_{k-1}\, d\zeta_{k+1} \ldots d\zeta_n$, а интегрирование справа ведется по произвольной поверхности Γ в пространстве ζ, пересекающейся по одному разу с каждой комплексной прямой, проходящей через точку $\zeta=0$. (В отличие от приведенной в п. 3 формулы Планшереля здесь отброшена черта над вторым множителем.) Перепишем эту формулу в виде

$$(F,\ f)=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n-2}}(\check{F},\ \psi), \tag{2}$$

где обозначено

$$\psi(\zeta,\ s)=\check{f}_s^{(n-1,\ n-1)}(\zeta,\ s). \tag{3}$$

Таким образом, формула Планшереля определяет преобразование Радона функции F как функционал в пространстве функций $\psi(\zeta,\ s)$. Эту формулу мы и используем для определения преобразования Радона обобщенной функции F. Именно, пусть F — обобщенная функция в пространстве основных функций $f(z)$. Преобразованием Радона обобщенной функции F назовем функционал $\check{F}$ в пространстве функций $\psi(\zeta,\ s)=\check{f}_s^{(n-1,\ n-1)}(\zeta,\ s)$, где $\check{f}$ — преобразование Радона основной функции f. Этот функционал мы определим следующим соотношением:

$$(F,\ f)=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n-2}}(\check{F},\ \psi). \tag{4}$$

В качестве пространства основных функций $f(z)$ возьмем пространство S бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих вместе со всеми их производными. Из п. 4 мы уже знаем, каковы все те функции $\check{f}(\zeta,\ s)$, которые являются преобразованиями Радона функций из S. Тем самым мы знаем, что представляют собой их производные $\psi(\zeta,\ s)=\check{f}_s^{(n-1,\ n-1)}(\zeta,\ s)$. Именно, функции $\psi(\zeta,\ s)$ характеризуются следующими условиями:

1. Функции $\psi(\zeta,\ s)$ — однородные функции от ζ, s степени однородности $(-n,\ -n)$, то есть

$$\psi(\alpha\zeta,\ \alpha s)=\alpha^{-n}\bar{\alpha}^{-n}\psi(\zeta,\ s)$$

для любого $\alpha\neq 0$.

2. Функции $\psi(\zeta,\ s)$ бесконечно дифференцируемы по ζ, $\bar{\zeta}$ и по s, $\bar{s}$ при $\zeta\neq 0$.

3. При $|s|\to\infty$ и для любого $k>0$ имеет место оценка

$$|\psi(\zeta,\ s)|=o\left(|s|^{-k}\right)$$

равномерно по ζ, когда ζ пробегает произвольную ограниченную замкнутую область в пространстве, не содержащую точки $\zeta=0$. Та же оценка имеет место для производных функции ψ по ζ, $\bar{\zeta}$, s и $\bar{s}$.

4. Для любых целых чисел k, $l\geqslant 0$ интеграл

$$\int\psi(\zeta,\ s)\,s^k\bar{s}^l\,ds\,d\bar{s}$$

является однородным многочленом от ζ, $\bar{\zeta}$ степени однородности $(k-n+1,\ l-n+1)$. (Если хотя бы одно из чисел k, l меньше, чем $n-1$, то интеграл равен нулю.)

Итак, преобразование Радона обобщенной функции F есть функционал в пространстве функций $\psi(\zeta,\ s)$, удовлетворяющих условиям 1—4. По теореме о продолжении функционала этот функционал можно затем продолжить различными способами на пространство всех бесконечно дифференцируемых однородных функций $\psi(\zeta,\ s)$ степени однородности $(-n,\ -n)$, удовлетворяющих только условию быстрого убывания по s (условию 3); в этом пространстве функций вводится естественная топология. Тем самым преобразование Радона обобщенной функции является обобщенной функцией в обычном смысле слова, определенной неоднозначно.

Спрашивается, каковы все несущественные функции $\varphi(\zeta,\ s)$, то есть такие обобщенные функции, которым отвечает функционал, равный нулю на подпространстве функций, удовлетворяющих дополнительно условию 4.

Нетрудно убедиться, что *подпространство несущественных функций порождается функциями вида*

$$s^k\bar{s}^l a_{-k-1,\ -l-1}(\zeta),$$

k, $l=0,\ 1,\ \ldots$, *где* $a_{-k-1,\ -l-1}(\zeta)$ — *однородная функция степени однородности* $(-k-1,\ -l-1)$. *При* k, $l\geqslant n-1$ *эта функция* $a_{-k-1,\ -l-1}(\zeta)$ *удовлетворяет дополнительно следующему условию:*

$$\int a_{-k-1,\ -l-1}(\zeta)\,P_{k-n+1,\ l-n+1}(\zeta)\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}=0 \tag{5}$$

для любого однородного многочлена $P_{k-n+1,\, l-n+1}(\zeta)$ *степени однородности* $(k-n+1,\ l-n+1)$.

Доказательство этого утверждения дословно такое же, как и для вещественного пространства (см. гл. I, § 2, п. 1), а потому мы его здесь опустим.

6. Примеры. Приведем несколько примеров преобразований Радона обобщенных функций.

1. Преобразование Радона функции $F(z) \equiv 1$ есть

$$\check{F}(\zeta,\ s) = \frac{(-1)^{n-1}\pi^{2n-2}}{\Gamma^2(n)}\, s^{n-1}\bar{s}^{n-1} a(\zeta),$$

где $a(\zeta)$ — произвольная однородная функция степени однородности $(-n,\ -n)$ с вычетом, равным 1, то есть

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\int\limits_{\Gamma} a(\zeta)\,\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)} = 1.$$

2. Преобразование Радона функции $F(z) \equiv \delta(z)$ есть $\check{F}(\zeta,\ s) = \delta(s)$.

В справедливости этих формул легко убедиться непосредственно, подставляя функции F и $\check{F}$ в равенство

$$(F,\ f) = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n-2}}\left(\check{F},\ \check{f}_s^{(n-1,\, n-1)}\right).$$

3. Преобразование Радона обобщенной функции P^λ, где $P = P(z)$ — положительно определенная эрмитова форма, имеет следующий вид:

$$\check{F}(\zeta,\ s) = c(\lambda)\frac{1}{\Delta}\, s^{\lambda+n-1}\bar{s}^{\lambda+n-1} Q^{-\lambda-n}(\zeta), \qquad (6)$$

где $Q(\zeta)$ — эрмитова форма, сопряженная с формой $P(z)$, Δ — дискриминант формы P, $c(\lambda) = \dfrac{\pi^{n-1}\Gamma(-\lambda-n+1)}{\Gamma(-\lambda)}$.

Для доказательства воспользуемся следующим свойством преобразования Радона (п. 1). Если $\check{F}(\zeta,\ s)$ — преобразование Радона функции $F(z)$, то при замене функции $F(z)$ функцией $F_A(z) = F(A^{-1}z)$, где A — невырожденное линейное преобразование, функция $\check{F}(\zeta,\ s)$ переходит в $\check{F}_A(\zeta,\ s) = |\det A|^2 \check{F}(A'\zeta,\ s)$. Отсюда

получаем следующее свойство преобразования Радона $\check{F}(\zeta,\ s)$ функции P^λ. Если преобразование A с определителем 1 сохраняет форму P, то для сопряженного ему преобразования A' справедливо равенство

$$\check{F}(A'\zeta,\ s) = \check{F}(\zeta,\ s).$$

Следовательно, функция $\check{F}$ имеет вид:

$$\check{F}(\zeta,\ s) = \varphi(Q,\ s),$$

где $Q = Q(\zeta)$ — эрмитова форма, сопряженная с P (то есть матрицы форм P и Q взаимно обратны).

С другой стороны, опять в силу сформулированного выше свойства преобразования Радона, при замене функции $P^\lambda(z)$ на $|\alpha|^{2\lambda}P^\lambda(z) \equiv P^\lambda(\alpha z)$, преобразование Радона $\varphi(Q,\ s)$ функции $P^\lambda(z)$ перейдет в $|\alpha|^{2\lambda}\varphi(Q,\ s) \equiv |\alpha|^{-2n}\varphi(|\alpha|^{-2}Q,\ s)$. Следовательно, $\varphi(Q,\ s)$ есть однородная функция от Q степени однородности $-\lambda-n$, то есть она имеет вид

$$\varphi(Q,\ s) = \varphi(s)\, Q^{-\lambda-n}.$$

Наконец, вспоминая, что эта функция однородна относительно ζ, s и $\bar{\zeta}$, $\bar{s}$ степени однородности $(-1,\ -1)$, получаем искомое выражение (6).

Вычислим коэффициент $c(\lambda)$. Не нарушая общности, можно предполагать, что $P = \sum \alpha_k^2 z_k \bar{z}_k$. Тогда $Q = \sum \alpha_k^{-2}\zeta_k\bar{\zeta}_k$. Подставим в (6) $\zeta = \zeta_0 = (0, \ldots, 0,\ \alpha_n)$, $s = 1$. Мы получим

$$\check{F}(\zeta_0,\ 1) = c(\lambda)\frac{1}{\Delta}.$$

С другой стороны, по определению,

$$F(\zeta_0,\ 1) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\int\limits_{\alpha_n z_n = 1}\left(\sum \alpha_k^2 z_k \bar{z}_k\right)^\lambda \omega\bar{\omega} =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{\alpha_n^2}\int\left(\alpha_1^2 z_1\bar{z}_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^2 z_{n-1}\bar{z}_{n-1} + 1\right)^\lambda \times$$

$$\times\, dz_1 d\bar{z}_1 \ldots dz_{n-1} d\bar{z}_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1^2 \ldots \alpha_n^2}\int\left(t_1^2 + \ldots + t_{2n-2}^2 + 1\right)^\lambda dt_1 \ldots dt_{2n-2},$$

откуда $\check{F}(\zeta_0, 1) = \frac{\pi^{n-1}\Gamma(-\lambda-n+1)}{\Gamma(-\lambda)}\frac{1}{\Delta}$. Сравнивая полученные выражения для $\check{F}(\zeta_0, 1)$, получаем

$$c(\lambda) = \frac{\pi^{n-1}\Gamma(-\lambda-n+1)}{\Gamma(-\lambda)}.$$

Читателю рекомендуется вычислить также преобразование Радона обобщенных функций $(P+i0)^\lambda$, $(P-i0)^\lambda$, P_+^λ и P_-^λ, где $P=P(z)$ — произвольная невырожденная эрмитова форма. (Указание: воспользоваться формулой (6) и применить метод аналитического продолжения по коэффициентам формы.)

4. Преобразование Радона обобщенной функции $P^\lambda \bar{P}^\mu$, где $P=P(z)$ — невырожденная квадратичная форма от z, а $\lambda-\mu$ — целое (определение этой функции см. в Добавлении, § 2, п. 7), имеет следующий вид:

$$\check{F}(\zeta, s) = c(\lambda, \mu)\frac{1}{|\Delta|}s^{2\lambda+n-1}\bar{s}^{2\mu+n-1}Q^{-\lambda-\frac{n}{2}}\bar{Q}^{-\mu-\frac{n}{2}}, \qquad (7)$$

где $Q=Q(\zeta)$ — квадратичная форма, сопряженная с P, Δ — дискриминант формы P и

$$c(\lambda, \mu) = (-1)^{n-1}2^{-n+1}\pi^{n-2}\frac{\sin\pi\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\cos\pi\lambda\Gamma\left(\lambda+\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{n+1}{2}\right)}. \qquad (8)$$

Формула (7) получается на основании тех же рассуждений, что и в предыдущем примере. Вычислим коэффициент $c(\lambda, \mu)$ в формуле (7). Можно предполагать, что $P=\sum_{k=1}^n z_k^2$, а потому $Q=\sum_{k=1}^n \zeta_k^2$.

Применим формулу Планшереля к паре функций $P^\lambda\bar{P}^\lambda$ и $e^{-|z|^2}$, где $|z|^2=|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2$. Легко подсчитать, что преобразование Радона функции $e^{-|z|^2}$ есть $\pi^{n-1}\frac{1}{|\zeta|^2}e^{-\frac{|s|^2}{|\zeta|^2}}$. Следовательно, формула Планшереля нам дает

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n\int|P|^{2\lambda}e^{-|z|^2}dz\,d\bar{z} = c(\lambda, \lambda)\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{n-1}}\frac{\Gamma^2(2\lambda+n)}{\Gamma^2(2\lambda+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{i}{2}\right)^n\int_\Gamma\left(\int s^{2\lambda}\bar{s}^{2\lambda}\frac{|Q(\zeta)|^{-2\lambda-n}}{|\zeta|^2}e^{-\frac{|s|^2}{|\zeta|^2}}ds\,d\bar{s}\right)\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}. \qquad (9)$$

Интеграл, стоящий в левой части равенства, вычислен в Добавлении, § 2, п. 7. Именно,

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n\int|P|^{2\lambda}e^{-|z|^2}dz\,d\bar{z} = \frac{\pi^n 2^{2\lambda}\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \qquad (10)$$

С другой стороны, в интеграле, стоящем справа в формуле (9), можно выполнить интегрирование по s, $\bar{s}$. В результате равенство (9) примет вид

$$\frac{\pi^n 2^{2\lambda}\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = c(\lambda, \lambda)\frac{(-1)^{n-1}\Gamma^2(2\lambda+n)}{\pi^{n-2}\Gamma(2\lambda+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\int_\Gamma|Q(\zeta)|^{-2\lambda-n}|\zeta|^{2\lambda}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}. \qquad (11)$$

Вычислим интеграл, стоящий в (11). Для этого воспользуемся равенством

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n\int|Q(z)|^{-2\lambda-n}e^{-|z|^2}dz\,d\bar{z} =$$
$$=\left(\frac{i}{2}\right)^n\int_\Gamma\left(\int|Q(t\zeta)|^{-2\lambda-n}e^{-|t\zeta|^2}t^{n-1}\bar{t}^{n-1}dt\,d\bar{t}\right)\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} \qquad (12)$$

(формула перехода к обобщенным полярным координатам).

Стоящий слева интеграл вычисляется по формуле (10), а в интеграле, стоящем справа, можно выполнить интегрирование по t, $\bar{t}$. В результате равенство (12) примет вид

$$\frac{\pi^n 2^{-2\lambda-n}\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} =$$
$$=\pi\Gamma(-2\lambda)\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\int_\Gamma|Q(\zeta)|^{-2\lambda-n}|\zeta|^{4\lambda}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)},$$

откуда

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\int_\Gamma|Q(\zeta)|^{-2\lambda-n}|\zeta|^{4\lambda}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}=$$
$$=\frac{\pi^{n-1}2^{-2\lambda-n}\Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(-2\lambda)}.$$

12 Зак. 2905. И. М. Гельфанд и др., вып. 5

Подставив это выражение в равенство (11), получим после элементарных упрощений

$$c(\lambda, \lambda) = \frac{(-1)^{n-1} \pi^{n-1} 2^{4\lambda+n} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) \Gamma(2\lambda+1) \Gamma(-2\lambda)}{\Gamma^2(2\lambda+n) \Gamma\left(-\lambda-\frac{n}{2}+1\right) \Gamma(-\lambda)} =$$

$$= (-1)^{n-1} 2^{-n+1} \pi^{n-2} \frac{\sin \pi\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) \Gamma^2(\lambda+1)}{\cos \pi\lambda\, \Gamma^2\left(\lambda+\frac{n+1}{2}\right)}. \qquad (13)$$

Теперь вычислим $c(\lambda, \mu)$, где $\mu = \lambda + k$ *). Для этого воспользуемся рекуррентным соотношением для $P^\lambda \bar{P}^\mu$

$$\left(\sum \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_k^2}\right) P^\lambda \bar{P}^{\mu+1} = 4(\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right) P^\lambda \bar{P}^\mu .$$

Применим к обеим частям равенства преобразование Радона После сокращений получим следующее рекуррентное соотношение для $c(\lambda, \mu)$:

$$c(\lambda, \mu+1) = \frac{\mu+1}{\mu+\frac{n+1}{2}} c(\lambda, \mu).$$

Отсюда

$$c(\lambda, \mu) \equiv c(\lambda, \lambda+k) = \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+1)} \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+k+\frac{n+1}{2}\right)} \cdot c(\lambda, \lambda).$$

Подставляя в это равенство выражение для $c(\lambda, \lambda)$, получим окончательно

$$c(\lambda, \mu) = (-1)^{n-1} 2^{-n+1} \pi^{n-2} \frac{\sin \pi\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) \Gamma(\lambda+1) \Gamma(\mu+1)}{\cos \pi\lambda\, \Gamma\left(\lambda+\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\mu+\frac{n+1}{2}\right)}.$$

5. Теперь рассмотрим целые аналитические функции $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$. Эти функции можно трактовать как обобщенные функции в пространстве всех *финитных* бесконечно дифференцируемых функций комплексных перемен-

*) Напоминаем, что разность $\mu - \lambda$ всегда есть целое число.

ных $z_1, \ldots z_n$ *). Тогда для функций $f(z)$ определено преобразование Радона $\check{f}(\zeta, s)$. Спрашивается, что представляют собой функции $\check{f}(\zeta, s)$.

Оказывается, что *преобразование Радона целой аналитической функции* $\check{f}(\zeta, s)$ *имеет следующий вид*:

$$\check{f}(\zeta, s) = s^{n-1} \bar{s}^{n-1} \varphi(\zeta, s), \qquad (14)$$

где $\varphi(\zeta, s)$ — *целая аналитическая функция комплексного переменного* s, *удовлетворяющая условию однородности*

$$\varphi(\alpha\zeta, \alpha s) = \alpha^{-n} \bar{\alpha}^{-n} \varphi(\zeta, s)$$

для любого $\alpha \neq 0$.

Дадим простое, но нестрогое доказательство этого утверждения. Условие аналитичности функции $f(z)$ записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Перейдем в этих равенствах от функции f к ее преобразованию Радона. Мы получим, что функция $\bar{\zeta}_i \frac{\partial \check{f}(\zeta, s)}{\partial \bar{s}}$ равна нулю как обобщенная функция ($i=1, \ldots, n$). Это означает, что

$$\bar{\zeta}_i \frac{\partial \check{f}(\zeta, s)}{\partial \bar{s}} = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} s^k \bar{s}^l a_{i,k,l}(\zeta), \qquad (15)$$

где $a_{i,k,l}(\zeta)$ — однородные функции степени однородности $(-k-1, -l-1)$, удовлетворяющие при $k, l \geqslant n-1$ следующему условию:

$$\int_\Gamma a_{i,k,l}(\zeta) P_{k-n+1,\, l-n+1}(\zeta)\, \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = 0 \qquad (16)$$

для любого многочлена $P_{k-n+1,\, l-n+1}(\zeta)$ степени однородности $(k-n+1,\ l-n+1)$. Проинтегрировав равенство (15)

*) В отличие от разобранных раньше примеров, здесь уже нельзя в качестве пространства основных функций брать пространство S бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих вместе со всеми своими производными.

по $\bar{s}$, получим

$$\check{f}(\zeta, s) = \sum_{k, l=0}^{\infty} s^k \bar{s}^l a_{k, l}(\zeta), \tag{17}$$

где

$$l a_{k, l}(\zeta) = \bar{\zeta}_i^{-1} a_{i, k, l-1}(\zeta). \tag{18}$$

(Можно считать, что $a_{k, l}(\zeta)$ не зависит от индекса i.)

Отбросим в этой сумме те слагаемые, которые равны нулю как обобщенные функции. Это будут, прежде всего, все слагаемые с $k < n-1$ или $l < n-1$. Далее, если $k \geqslant n-1$ и $l > n-1$, то из условия (16) для функций $a_{i, k, l}(\zeta)$ получаем, что

$$\int_\Gamma a_{k, l}(\zeta) P_{k-n+1, l-n+1}(\zeta) \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = 0$$

для любого многочлена $P_{k-n+1, l-n+1}(\zeta)$ степени однородности $(k-n+1, l-n+1)$. Отсюда следует, что слагаемые с $k \geqslant n-1$ и $l > n-1$ также можно отбросить. Итак, остаются лишь слагаемые с $k \geqslant n-1$ и $l = n-1$. Таким образом, имеем

$$\check{f}(\zeta, s) = s^{n-1} \bar{s}^{n-1} \varphi(\zeta, s),$$

где $\varphi(\zeta, s)$ — целая функция комплексного переменного s.

7. Обобщенная гипергеометрическая функция в комплексном пространстве. Дадим определение обобщенной гипергеометрической функции в комплексном пространстве (определение обобщенной гипергеометрической функции в вещественном пространстве см. в гл. I, § 2, п. 9).

Сначала введем понятие характера на мультипликативной группе комплексных чисел $z \neq 0$. *Характером* будем называть любую непрерывную функцию $\chi(z)$ на группе комплексных чисел $z \neq 0$, удовлетворяющую соотношению

$$\chi(z_1 z_2) = \chi(z_1) \chi(z_2) \tag{1}$$

для любых комплексных чисел $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$.

Найдем все характеры группы комплексных чисел. Для этого перейдем к полярным координатам, положив $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Из уравнения (1) следует, что

$$\chi(r_1 r_2) = \chi(r_1) \chi(r_2)$$

и

$$\chi(e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}) = \chi(e^{i\varphi_1}) \chi(e^{i\varphi_2}).$$

Отсюда получаем, что $\chi(r) = r^\alpha$, $\chi(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi}$, где α — произвольное комплексное число, а n — целое число. Следовательно, всякий характер на группе комплексных чисел $z \neq 0$ имеет вид

$$\chi(z) = |z|^\alpha e^{in \arg z}. \tag{2}$$

Это выражение для характера χ удобнее записать в следующей форме:

$$\chi(z) = z^\lambda \bar{z}^\mu, \tag{3}$$

где λ, μ — комплексные числа, разность которых — целое число (именно, λ, μ связаны с числами α и n следующим образом: $\lambda + \mu = \alpha$, $\lambda - \mu = n$).

Заметим, что функцию $\chi(z) = z^\lambda \bar{z}^\mu$ можно рассматривать как обобщенную однородную функцию переменного z (ее определение как обобщенной функции дано в Добавлении, § 1, п. 3).

Перейдем к определению обобщенной гипергеометрической функции.

Пусть в комплексном n-мерном пространстве задано p линейных форм

$$(\zeta^{(1)}, z), \ \ldots, \ (\zeta^{(p)}, z), \tag{4}$$

где обозначено $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $(\zeta^{(k)}, z) = \zeta_1^{(k)} z_1 + \ldots + \zeta_n^{(k)} z_n$.

Обобщенной гипергеометрической функцией

$$F(\chi_1, \ldots, \chi_p \,|\, \zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(p)} \,|\, \zeta, s)$$

мы назовем преобразование Радона обобщенной функции

$$\chi_1[(\zeta^{(1)}, z)] \ldots \chi_p[(\zeta^{(p)}, z)],$$

где $\chi_1, \ldots, \chi_2$ — *характеры, то есть*

$$F(\chi_1, \ldots, \chi_p \,|\, \zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(p)} \,|\, \zeta, s) = \{\chi_1[(\zeta^{(1)}, z)] \ldots \chi_p[(\zeta^{(p)}, z)]\}^\vee. \tag{5}$$

Можно всегда предполагать, что среди линейных форм имеется по крайней мере n линейно независимых, где n — размерность пространства.

В том случае, когда все линейные формы линейно независимы, функцию F естественно было бы назвать обобщенной В-функцией.

Приведем формулу для обобщенной В-функции в двумерном пространстве. Пусть $\zeta^{(1)}=(\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)})$, $\zeta^{(2)}=(\zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)})$ — два линейно независимых вектора. Разложим вектор ζ по векторам $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$. Пусть

$$\zeta=\zeta_1\zeta^{(1)}+\zeta_2\zeta^{(2)}$$

и пусть характеры χ_1 и χ_2 имеют вид

$$\chi_1(z)=z^{m_1-1}\bar{z}^{m_2-1}, \quad \chi_2(z)=z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}.$$

Тогда имеем

$$F(\chi_1, \chi_2 \mid \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)} \mid \zeta, s)=$$
$$=\frac{\sin \pi m_1 \sin \pi n_1}{\sin \pi (m_1+n_1)} \mathrm{B}(m_1, n_1)\,\mathrm{B}(m_2, n_2)\,|\Delta|^{-2}\left|\frac{s}{\zeta_1\zeta_2}\right|^2 \chi_1\left(\frac{s}{\zeta_1}\right)\chi_2\left(\frac{s}{\zeta_2}\right), \tag{6}$$

где $\Delta=\begin{vmatrix} \zeta_1^{(1)} \zeta_2^{(1)} \\ \zeta_1^{(2)} \zeta_2^{(2)} \end{vmatrix}$, а B — обычная бэта-функция. Функцию $\left|\frac{s}{\zeta_1\zeta_2}\right|^2 \chi_1\left(\frac{s}{\zeta_1}\right)\chi_2\left(\frac{s}{\zeta_2}\right)$ нужно, разумеется, понимать как обобщенную. Вывод формулы (6) предоставляется читателю.

ГЛАВА III

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ КОМПЛЕКСНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой и в следующей главах будут построены теория представлений и гармонический анализ (аналог интеграла Фурье) для группы G комплексных матриц второго порядка $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ с определителем $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Эта группа интересна во многих отношениях. Во-первых, она изоморфна (локально) таким важным группам, как группа движений пространства Лобачевского и группа преобразований Лоренца (изоморфизм этих групп будет установлен в § 1). Во-вторых, эта группа является простейшей из так называемых простых групп Ли, для которых особенно отчетливо проявляется отличие гармонического анализа (интеграл Фурье) от гармонического анализа в евклидовом пространстве, то есть от обычного интеграла Фурье. На первый взгляд может показаться, что эту группу можно заменить еще более простой, а именно, группой вещественных матриц второго порядка с определителем 1, которая также представляется достаточно интересной (она локально изоморфна группе преобразований Лоренца на плоскости и группе движений плоскости Лобачевского). Однако это не так, поскольку комплексные группы проще, чем вещественные (в случае вещественных групп проявляются дополнительные специфические особенности). Впрочем, в главе VII мы рассмотрим и представления группы вещественных матриц второго порядка с определителем 1.

Главы III и IV представляют, таким образом, неразрывное целое. Их основная цель — построение интеграла Фурье на группе комплексных матриц второго порядка с определителем 1. Строя обычный интеграл Фурье, мы находимся в выгодном положении: материал, из которого он строится

В том случае, когда все линейные формы линейно независимы, функцию F естественно было бы назвать обобщенной B-функцией.

Приведем формулу для обобщенной B-функции в двумерном пространстве. Пусть $\zeta^{(1)}=(\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)})$, $\zeta^{(2)}=(\zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)})$ — два линейно независимых вектора. Разложим вектор ζ по векторам $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$. Пусть

$$\zeta=\zeta_1\zeta^{(1)}+\zeta_2\zeta^{(2)}$$

и пусть характеры χ_1 и χ_2 имеют вид

$$\chi_1(z)=z^{m_1-1}\bar{z}^{m_2-1}, \quad \chi_2(z)=z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}.$$

Тогда имеем

$$F(\chi_1, \chi_2 \,|\, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)} \,|\, \zeta, s)=$$
$$=\frac{\sin\pi m_1 \sin\pi n_1}{\sin\pi(m_1+n_1)} \mathrm{B}(m_1, n_1)\,\mathrm{B}(m_2, n_2)\,|\Delta|^{-2}\left|\frac{s}{\zeta_1\zeta_2}\right|^2 \chi_1\left(\frac{s}{\zeta_1}\right)\chi_2\left(\frac{s}{\zeta_2}\right), \tag{6}$$

где $\Delta=\begin{vmatrix}\zeta_1^{(1)} & \zeta_2^{(1)}\\ \zeta_1^{(2)} & \zeta_2^{(2)}\end{vmatrix}$, а B — обычная бэта-функция. Функцию $\left|\frac{s}{\zeta_1\zeta_2}\right|^2 \chi_1\left(\frac{s}{\zeta_1}\right)\chi_2\left(\frac{s}{\zeta_2}\right)$ нужно, разумеется, понимать как обобщенную. Вывод формулы (6) предоставляется читателю.

ГЛАВА III

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ КОМПЛЕКСНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой и в следующей главах будут построены теория представлений и гармонический анализ (аналог интеграла Фурье) для группы G комплексных матриц второго порядка $\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$ с определителем $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Эта группа интересна во многих отношениях. Во-первых, она изоморфна (локально) таким важным группам, как группа движений пространства Лобачевского и группа преобразований Лоренца (изоморфизм этих групп будет установлен в § 1). Во-вторых, эта группа является простейшей из так называемых простых групп Ли, для которых особенно отчетливо проявляется отличие гармонического анализа (интеграл Фурье) от гармонического анализа в евклидовом пространстве, то есть от обычного интеграла Фурье. На первый взгляд может показаться, что эту группу можно заменить еще более простой, а именно, группой вещественных матриц второго порядка с определителем 1, которая также представляется достаточно интересной (она локально изоморфна группе преобразований Лоренца на плоскости и группе движений плоскости Лобачевского). Однако это не так, поскольку комплексные группы проще, чем вещественные (в случае вещественных групп проявляются дополнительные специфические особенности). Впрочем, в главе VII мы рассмотрим и представления группы вещественных матриц второго порядка с определителем 1.

Главы III и IV представляют, таким образом, неразрывное целое. Их основная цель — построение интеграла Фурье на группе комплексных матриц второго порядка с определителем 1. Строя обычный интеграл Фурье, мы находимся в выгодном положении: материал, из которого он строится (функции $e^{i\lambda x}$, тригонометрические функции), к моменту построения интеграла Фурье уже достаточно хорошо известен читателю. Здесь же мы должны начать с самого начала — построить аналог функции $e^{i\lambda x}$. Этому посвящена глава III. Построению же гармонического анализа на группе (интеграл Фурье) посвящена глава IV.

Отметим, что само построение экспонент для группы очень удобно делать с помощью обобщенных функций. Поэтому глава III интересна не только как подготовительная к следующей главе IV, но и сама по себе, поскольку она является хорошей иллюстрацией того, как работают обобщенные функции.

Аналоги экспонент на группе называются представлениями. Их точное определение дано в § 2. Авторы не ставят целью изложить в главе III весь материал, связанный с представлениями, не говоря уже о многочисленных применениях теории представлений.

Введением в теорию представлений, где даны также приложения теории представлений, является книга И. М. Гельфанда, Р. А. Минлоса и З. Я. Шапиро «Представления группы вращений и группы Лоренца», с которой данная книга мало пересекается. Вместе эти две книги содержат много фактического материала, касающегося представлений группы комплексных унимодулярных матриц второго порядка. Много полезного читатель найдет также в книге М. А. Наймарка «Линейные представления группы Лоренца».

Для чтения главы III нужно знать обобщенные функции одного комплексного переменного (в объеме § 1 Добавления к этой книге).

§ 1. ГРУППА G КОМПЛЕКСНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА И РАЗЛИЧНЫЕ ЕЕ РЕАЛИЗАЦИИ

1. Связь между группой комплексных матриц второго порядка с определителем 1 и собственной группой Лоренца. Рассмотрим совокупность эрмитовых матриц

$$a=\begin{Vmatrix} x_0-x_3 & x_2-ix_1 \\ x_2+ix_1 & x_0+x_3 \end{Vmatrix}.$$

Каждой матрице a отнесем вектор $x=(x_0, x_1, x_2, x_3)$ из четырехмерного вещественного пространства R_4. Это соответствие взаимно однозначно и линейно. Сопоставим каждой комплексной матрице

$$g=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

преобразование в пространстве эрмитовых матриц

$$a'=g^*ag,$$

где звездочка обозначает эрмитовское сопряжение. Тем самым мы отнесем каждой матрице g линейное преобразование в пространстве R_4, которое обозначим через A_g.

Очевидно, это соответствие таково, что $A_{g_1g_2}=A_{g_1}A_{g_2}$, то есть произведению двух матриц g_1, g_2 отвечает произведение соответствующих им преобразований A_{g_1}, A_{g_2}. Выясним, каковы те линейные преобразования A_g, которые отвечают матрицам g.

Поскольку $\det g=1$, то преобразование $a'=g^*ag$ в пространстве эрмитовых матриц a сохраняет определитель

$$\det a=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2.$$

Следовательно, *преобразования A_g не меняют квадратичной формы*

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2.$$

Покажем, что $\det A_g=1$. В самом деле, поскольку преобразование A_g не меняет квадратичной формы, то его определитель есть либо $+1$, либо -1. Если бы существовали преобразования A_g как с определителем 1, так и с определителем -1, то совокупность преобразований A_g была бы несвязным множеством. Но это невозможно, поскольку исходная группа матриц $g=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ связна.

Покажем, наконец, что *преобразования A_g сохраняют верхнюю полу конуса*

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=0, \quad x_0>0. \tag{1}$$

В самом деле, неравенства $x_0 > 0$, $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$ являются необходимыми и достаточными условиями положительной определенности матрицы

$$a = \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix}.$$

Преобразования же $a' = g^* a g$ переводят положительно определенные матрицы снова в положительно определенные.

Итак, показано, что комплексным матрицам $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ отвечают линейные преобразования A_g в четырехмерном вещественном пространстве, удовлетворяющие следующим условиям:

1) Преобразования A_g сохраняют квадратичную форму

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

2) $\det A_g = 1$.

3) Преобразования A_g сохраняют верхнюю полу конуса

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad x_0 > 0.$$

Линейные преобразования в четырехмерном пространстве, удовлетворяющие этим условиям, называют *собственными преобразованиями Лоренца*, а группу всех таких преобразований — *собственной группой Лоренца*. Можно было бы показать, что *любое* собственное преобразование Лоренца соответствует некоторой комплексной матрице $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ с определителем $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Найдем, каким комплексным матрицам g отвечает тождественное преобразование. Очевидно, для таких матриц g выполняется равенство

$$a = g^* a g \tag{2}$$

для любой эрмитовой матрицы a. При $a = e = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ получаем отсюда, что $g^* g = e$, а потому $g^* = g^{-1}$. Следовательно, равенство (2) может быть записано в виде

$$ga = ag,$$

то есть матрица g перестановочна с любой эрмитовой матрицей a. Отсюда следует, что матрица g кратна единичной матрице. Поскольку, кроме того, $\det g = 1$, то, следовательно, $g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ или $g = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

Таким образом, *тождественное преобразование соответствует двум матрицам* $g = \pm \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Отсюда непосредственно следует, что двум матрицам g_1, g_2 соответствует одно и то же преобразование Лоренца тогда и только тогда, когда $g_1 = \pm g_2$.

Итак, *мы установили соответствие между комплексными матрицами второго порядка с определителем* 1 *и собственными преобразованиями Лоренца. Это соответствие таково, что каждой комплексной матрице g соответствует одно преобразование Лоренца и каждому преобразованию Лоренца отвечают две комплексные матрицы g и $-g$, различающиеся лишь знаком. При этом соответствии произведению двух комплексных матриц отвечает произведение соответствующих преобразований Лоренца.*

Ввиду этого соответствия в дальнейшем будем группой Лоренца называть группу комплексных матриц второго порядка с определителем 1.

Не составляет труда выписать матрицу преобразования Лоренца, соответствующего комплексной унимодулярной матрице $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ второго порядка. Пусть $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ — точка пространства R_4. Ей соответствует эрмитова матрица

$$a = \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix}.$$

При преобразовании $a' = g^* a g$, где $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, получаем эрмитову матрицу a' с элементами

$$a'_{11}=(|\alpha|^2+|\gamma|^2)\,x_0+i\,(\alpha\bar\gamma-\bar\alpha\gamma)\,x_1+(\alpha\bar\gamma+\bar\alpha\gamma)\,x_2+(|\gamma|^2-|\alpha|^2)\,x_3;$$

$$a'_{12}=(\bar\alpha\beta+\bar\gamma\delta)\,x_0+i\,(\bar\gamma\beta-\bar\alpha\delta)\,x_1+(\bar\gamma\beta+\bar\alpha\delta)\,x_2+(\bar\gamma\delta-\bar\alpha\beta)\,x_3;$$

$$a'_{21}=\bar a'_{12};$$

$$a'_{22}=(|\beta|^2+|\delta|^2)\,x_0+i\,(\beta\bar\delta-\bar\beta\delta)\,x_1+(\beta\bar\delta+\bar\beta\delta)\,x_2+(|\delta|^2-|\beta|^2)\,x_3.$$

Этой матрице соответствует точка $x'=(x'_0,\ x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ пространства R_4 с координатами

$$x'_0=\frac{a'_{11}+a'_{22}}{2},\qquad x'_1=\operatorname{Im}a'_{21},$$

$$x'_2=\operatorname{Re}a'_{21},\qquad x'_3=\frac{a'_{22}-a'_{11}}{2}.$$

Подставляя значения a'_{11}, a'_{21}, a'_{22}, получаем вид линейного преобразования в R_4, соответствующего матрице $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$:

$$x'_0=\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2)\,x_0+\operatorname{Im}(\bar\alpha\gamma+\bar\beta\delta)\,x_1+\operatorname{Re}(\bar\alpha\gamma+\bar\beta\delta)\,x_2+\frac{1}{2}(|\gamma|^2+|\delta|^2-|\alpha|^2-|\beta|^2)\,x_3;\quad (3_0)$$

$$x'_1=\operatorname{Im}(\alpha\bar\beta+\gamma\bar\delta)\,x_0+\operatorname{Re}(\alpha\bar\delta-\bar\gamma\beta)\,x_1-\operatorname{Im}(\bar\gamma\beta+\bar\alpha\delta)\,x_2+\operatorname{Im}(\alpha\bar\beta-\gamma\bar\delta)\,x_3;\quad (3_1)$$

$$x'_2=\operatorname{Re}(\bar\alpha\beta+\bar\gamma\delta)\,x_0+\operatorname{Im}(\gamma\bar\beta-\alpha\bar\delta)\,x_1+\operatorname{Re}(\bar\gamma\beta+\bar\alpha\delta)\,x_2+\operatorname{Re}(\bar\gamma\delta-\bar\alpha\beta)\,x_3;\quad (3_2)$$

$$x'_3=\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\delta|^2-|\alpha|^2-|\gamma|^2)\,x_0+\operatorname{Im}(\beta\bar\delta-\bar\alpha\gamma)\,x_1+\operatorname{Re}(\beta\bar\delta-\bar\alpha\gamma)\,x_2+\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\delta|^2-|\beta|^2-|\gamma|^2)\,x_3.\quad (3_3)$$

2. Группа комплексных матриц второго порядка как группа движений пространства Лобачевского и родственных пространств. В п. 1 мы отнесли каждой комплексной матрице $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ линейное преобразование $a'=g^*ag$ в пространстве эрмитовых матриц

$$a=\begin{Vmatrix}x_0-x_3 & x_2-ix_1\\ x_2+ix_1 & x_0+x_3\end{Vmatrix},$$

а тем самым преобразование Лоренца в пространстве точек $x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$. Поскольку преобразования Лоренца сохраняют форму $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$, то тем самым поверхности

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=\text{const}$$

переходят в себя при преобразованиях Лоренца. Имеется три типа таких поверхностей, а именно верхняя или нижняя пола двуполостного гиперболоида $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=c>0$, однополостный гиперболоид $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=c<0$ и, наконец, верхняя или нижняя пола конуса $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$.

Если вместо точек четырехмерного пространства $x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ рассматривать эрмитовы матрицы $a=\begin{Vmatrix}x_0-x_3 & x_2-ix_1\\ x_2+ix_1 & x_0+x_3\end{Vmatrix}$, то эти поверхности можно задавать как многообразия в пространстве эрмитовых матриц. Мы получаем следующие многообразия в пространстве эрмитовых матриц: пространство всех положительно определенных (или отрицательно определенных) эрмитовых матриц с заданным значением определителя $c>0$; пространство всех эрмитовых матриц с заданным значением определителя $c<0$; пространство всех эрмитовых матриц $a\geqslant 0$ (или матриц $a\leqslant 0$) *) с определителем, равным нулю.

Преобразования Лоренца индуцируют на каждой из этих поверхностей преобразования, которые мы будем называть *движениями*. Тем самым комплексным матрицам $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$,

*) Т. е. таких матриц a, что отвечающая им эрмитова форма принимает неотрицательные (соответственно неположительные) значения.

$\alpha\delta-\beta\gamma=1$ мы сопоставляем движения на каждой из поверхностей следующих типов:

а) верхняя (или нижняя) пола двуполостного гиперболоида $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=c>0$,

б) однополостный гиперболоид $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=c<0$,

в) верхняя (или нижняя) пола конуса $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$.

Легко проверить, что двум комплексным матрицам g_1 и g_2 отвечает одно и то же движение тогда и только тогда, когда $g_1=\pm g_2$.

Верхняя пола двуполостного гиперболоида

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=c>0, \quad x_0>0,$$

с определенными на ней движениями представляет собой одну из моделей *пространства Лобачевского* (подробнее о различных моделях пространства Лобачевского и о связи между ними будет рассказано в начале гл. V).

Таким образом, *группа комплексных матриц второго порядка с определителем* 1 *локально изоморфна группе движений пространства Лобачевского.*

Наряду с пространством Лобачевского у нас возникли еще два родственных пространства, группа движений которых локально изоморфна группе матриц второго порядка с определителем 1. Моделями этих пространств являются поверхность однополостного гиперболоида $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=c<0$ и верхняя пола конуса $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$.

Покажем, что группа движений на каждой из поверхностей транзитивна, то есть что любую точку поверхности можно перевести движением в любую другую. Докажем это для верхней полы двуполостного гиперболоида

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=1.$$

(Доказательство для других типов поверхностей проводится аналогично.)

Сопоставим, как делалось раньше, каждой точке $x=(x_0, x_1, x_2, x_3)$ четырехмерного пространства эрмитову матрицу

$$a=\left\| \begin{matrix} x_0-x_3 & x_2-ix_1 \\ x_2+ix_1 & x_0+x_3 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда точкам нашей поверхности будут отвечать эрмитовы положительно определенные матрицы с определителем 1. Известно, что любую такую матрицу можно представить в виде

$$a=g^*g\equiv g^*\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| g,$$

где g — комплексная матрица с определителем 1. Тем самым доказано, что эту матрицу a можно получить из фиксированной матрицы $\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$ при помощи некоторого движения.

§ 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА В ПРОСТРАНСТВАХ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Представления групп. Сначала сформулируем не вполне точное определение представления группы.

Представлением топологической группы будем называть непрерывную функцию $T(g)$ на этой группе, такую, что

$$T(g_1g_2)=T(g_1)\,T(g_2) \tag{1}$$

для любых элементов g_1, g_2 группы.

В случае группы вещественных чисел по сложению функциональное уравнение (1) решается в скалярных функциях и его решениями являются показательные функции. Если группа некоммутативна, то скалярных решений уравнения (1) может оказаться очень мало. Естественно в этом случае требовать, чтобы значения функции $T(g)$ были не числами, а линейными операторами в некотором линейном топологическом пространстве. Эти операторные функции $T(g)$ можно рассматривать как аналоги экспонент для случая произвольной группы.

Дадим теперь точное определение представления группы. *Пусть G — топологическая группа, E — линейное топологическое пространство. Скажем, что задано представление группы G в топологическом пространстве E, если каждому элементу g группы сопоставлен непрерывный линейный оператор $T(g)$ в пространстве E, причем $T(g)$ непрерывно зависит от g и удовлетворяет функциональному уравнению*

$$T(g_1g_2)=T(g_1)\,T(g_2).$$

Кроме того, предполагается, что единичному элементу группы сопоставлен единичный оператор.

Если пространство представления E конечномерно, то и само представление называется конечномерным.

Аналогом экспонент $e^{i\lambda x}$ с вещественным λ являются так называемые унитарные представления, которые определяются следующим образом.

Пусть в линейном топологическом пространстве E введено скалярное произведение (ξ, η), то есть непрерывный положительный эрмитов функционал. Представление $T(g)$ в пространстве E называется унитарным (относительно введенного скалярного произведения), если

$$(T(g)\xi, T(g)\eta) = (\xi, \eta)$$

для любого элемента g группы и любой пары векторов ξ, η пространства E.

Задача данного параграфа — определить аналоги экспонент для группы G комплексных матриц $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ с определителем $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Укажем простой пример конечномерного представления группы G: каждой матрице g сопоставлена она сама.

Приведем другой пример конечномерного представления группы G. Рассмотрим однородные многочлены степени $n_1 - 1$ от двух комплексных переменных z_1, z_2, то есть функции вида

$$P(z_1, z_2) = a_0 z_1^{n_1-1} + a_1 z_1^{n_1-2} z_2 + \ldots + a_{n_1-1} z_2^{n_1-1}.$$

Они образуют линейное пространство размерности n_1. Каждой матрице $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ сопоставим линейное преобразование $T(g)$ в пространстве многочленов, то есть матрицу порядка n_1. Это линейное преобразование $T(g)$ зададим следующей формулой:

$$T(g) P(z_1, z_2) = P(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2).$$

Легко проверить, что линейные преобразования $T(g)$ удовлетворяют функциональному уравнению (1), то есть образуют представление группы G.

Более общее конечномерное представление группы G мы получили бы, рассматривая многочлены как от z_1, z_2, так и от $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, имеющие степень $n_1 - 1$ относительно z_1, z_2 и степень $n_2 - 1$ относительно $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$. Размерность пространства этих многочленов есть $n_1 n_2$.

Например, если $n_1 = n_2 = 2$, то эти многочлены имеют вид

$$P(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) = a_{11} z_1 \bar{z}_1 + a_{12} z_1 \bar{z}_2 + a_{21} z_2 \bar{z}_1 + a_{22} z_2 \bar{z}_2,$$

то есть они являются квадратичными формами.

Заметим, что представлениями в пространствах многочленов от z_1, z_2 и $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ исчерпываются все так называемые *неприводимые* конечномерные представления группы G.

Мы будем дальше рассматривать главным образом бесконечномерные представления. Ясно, что представлений у группы G очень много. При этом многие из них действительно отличаются друг от друга по существу. Однако есть и такие, различие между которыми иллюзорно и является лишь следствием не вполне удачного определения того, какие представления следует считать существенно различными. Так, например, одни и те же формулы для представлений можно получить как в пространстве бесконечно дифференцируемых функций, так, скажем, и в пространстве пять раз дифференцируемых функций.

Мы строим здесь представления группы G, играющие основную роль. Это — представления в так называемых пространствах D_χ, являющихся естественным обобщением пространств однородных многочленов. Можно было бы показать, что во всяком бесконечномерном *неприводимом* представлении группы Лоренца, при некоторых естественных дополнительных ограничениях, содержится в качестве «ядра» (то есть во всюду плотном подпространстве с более сильной топологией) представление, задаваемое в D_χ. В этом существенная роль представлений в пространствах D_χ.

2. Описание пространств D_χ однородных функций. Определим пространства D_χ, в которых будут затем построены представления группы комплексных унимодулярных матриц второго порядка. Эти пространства D_χ состоят из однородных функций $f(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ двух комплексных переменных.

Чтобы не усложнять записи, условимся обозначать эти функции через $f(z_1, z_2)$. Аналогично, функции одного комплексного переменного $\varphi(z, \bar{z})$ будем коротко обозначать через $\varphi(z)$.

Напомним, что функция $f(z_1, z_2)$ комплексных переменных z_1 и z_2 называется *однородной функцией степени однородности* (λ, μ), где λ и μ — комплексные числа, разность которых — целое число, если для любого комплексного числа $a \neq 0$ выполняется равенство

$$f(az_1, az_2) = a^{\lambda}\bar{a}^{\mu} f(z_1, z_2)\,^{*}). \qquad (1)$$

Пусть n_1, n_2 — пара комплексных чисел, разность которых — целое число. Будем эту пару чисел обозначать для краткости буквой χ:

$$\chi = (n_1, n_2).$$

Сопоставим паре комплексных чисел $\chi = (n_1, n_2)$ пространство D_χ. Это пространство состоит из функций $f(z_1, z_2)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) Функции $f(z_1, z_2)$ однородны степени однородности $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ **).

2) Функции $f(z_1, z_2)$ бесконечно дифференцируемы по z_1, z_2, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ во всей области изменения z_1 и z_2, за исключением точки $(0, 0)$.

Введем в пространство D_χ топологию. Последовательность функций $\{f_m(z_1, z_2)\}$ из пространства D_χ назовем *сходящейся к нулю*, если на любом ограниченном замкнутом множестве, не содержащем точки $(0, 0)$, функции $f_m(z_1, z_2)$ равномерно сходятся к нулю вместе с производными любого порядка. Позже мы докажем, что пространство D_χ полно относительно этой топологии.

Возможны другие реализации пространства D_χ. Рассмотрим на комплексной плоскости «контур» Ω, пересекающий каждую комплексную прямую $a_1z_1 + a_2z_2 = 0$. Ввиду однородности, функции $f(z_1, z_2)$ из D_χ однозначно определены своими значениями на контуре Ω. Тем самым D_χ можно задавать не как пространство однородных функций двух комплексных переменных, а как пространство функций на контуре Ω.

Отметим, что если прямая $a_1z_1 + a_2z_2 = 0$ пересекает контур более чем в одной точке, то значения однородной функции в точках пересечения контура с прямой различаются множителем, зависящим только от степени однородности.

*) Мы требуем, чтобы разность $\lambda - \mu$ была целым числом, так как только при этом условии множитель $a^{\lambda}\bar{a}^{\mu} \equiv |a|^{\lambda+\mu} e^{i(\lambda-\mu)\arg a}$ есть однозначная функция от a (см. Добавление, § 2).

**) Мы берем функции степени однородности $(n_1 - 1, n_2 - 1)$, а не степени однородности (n_1, n_2), поскольку это оказывается более удобным для дальнейшего.

3. Две удобные реализации пространства D_χ. Рассмотрим комплексную прямую $z_2 = 1$ в двумерном комплексном пространстве. Эта прямая пересекает каждую прямую, проходящую через начало координат (за исключением прямой $z_2 = 0$) в одной и только одной точке. Поэтому каждая функция из $f(z_1, z_2)$ из пространства D_χ однозначно определяется своими значениями на прямой $z_2 = 1$. Каждой функции $f(z_1, z_2)$ из D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, сопоставим функцию

$$\varphi(z) = f(z, 1). \qquad (1)$$

Тогда, очевидно, функция $f(z_1, z_2)$ определяется по функции $\varphi(z)$ следующим образом:

$$f(z_1, z_2) = z_2^{n_1-1}\bar{z}_2^{n_2-1}\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right). \qquad (2)$$

Функции $\varphi(z)$, соответствующие, в силу соотношения (2), функциям $f(z_1, z_2)$ из пространства D_χ, образуют пространство, которое также будет обозначаться через D_χ. Это пространство допускает следующее внутреннее описание. В силу бесконечной дифференцируемости функций $f(z_1, z_2)$, функции $\varphi(z)$ бесконечно дифференцируемы по z и $\bar{z}$. Кроме того, они удовлетворяют дополнительным условиям в окрестности точки $z = \infty$. Именно, из соотношения (2) следует, что функция

$$f(1, z) = z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}\varphi\left(\frac{1}{z}\right), \qquad (3)$$

а потому и функция

$$\hat{\varphi}(z) = z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z}\right) \qquad (4)$$

являются бесконечно дифференцируемыми по z и $\bar{z}$.

Итак, *если* $\varphi(z) = f(z, 1)$, *где* $f(z_1, z_2)$ — *функция из пространства* D_χ, *то как функция* $\varphi(z)$, *так и функция*

$$\hat{\varphi}(z) = z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z}\right)$$

бесконечно дифференцируемы по z *и* $\bar{z}$.

Назовем функцию $\hat{\varphi}(z)$ *инверсией* функции $\varphi(z)$.

Нетрудно получить и обратное утверждение: *если функция* $\varphi(z)$ *и ее инверсия* $\hat{\varphi}(z)$ *бесконечно дифференцируемы по* z *и* $\bar{z}$, *то функция*

$$f(z_1, z_2) = z_2^{n_1-1}\bar{z}_2^{n_2-1}\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

принадлежит пространству D_χ. Таким образом, равенство (2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между бесконечно дифференцируемыми функциями $f(z_1, z_2)$ степени однородности $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ и функциями $\varphi(z)$, такими, что как $\varphi(z)$, так и $\hat{\varphi}(z)$, бесконечно дифференцируемы.

Топология, введенная в пространство функций $f(z_1, z_2)$, однозначно определяет топологию в пространстве функций $\varphi(z)$. Именно, последовательность функций $\{\varphi_m(z)\}$ из пространства D_χ сходится к нулю, если в любой конечной области равномерно сходится к нулю как последовательность производных любого порядка функций $\varphi_m(z)$, так и последовательность производных любого порядка функций $\hat{\varphi}_m(z)$, где $\hat{\varphi}_m(z)$ — инверсия функции $\varphi_m(z)$.

Функции $\varphi(z)$ из пространства D_χ имеют при $|z| \to \infty$ асимптотику

$$\varphi(z) \sim Cz^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}. \tag{5}$$

Это вытекает из того, что в силу равенства (3) $\varphi(z) = z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}f\left(1, \frac{1}{z}\right)$, и потому при $|z| \to \infty$ имеем $\varphi(z) \sim f(1, 0)\, z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}$.

Пользуясь бесконечной дифференцируемостью функции $\varphi(z)$, можно указать более точный результат. Именно, *функция* $\varphi(z)$ *разлагается при* $|z| \to \infty$ *в асимптотический ряд вида*

$$\varphi(z) \sim z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1} \sum_{j, k=0}^{\infty} a_{jk} z^{-j}\bar{z}^{-k}. \tag{6}$$

В самом деле, так как функция $\hat{\varphi}(z) = z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z}\right)$ бесконечно дифференцируема при $z = 0$, то она разлагается при $z \to 0$ в асимптотический ряд Тейлора

$$\hat{\varphi}(z) \sim \sum_{j, k=0}^{\infty} b_{jk} z^j \bar{z}^k. \tag{7}$$

Из разложения (7) и вытекает, что при $|z| \to \infty$

$$\varphi(z) = (-1)^{n_1-n_2} z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}\hat{\varphi}\left(-\frac{1}{z}\right) \sim z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1} \sum_{j, k=0}^{\infty} a_{jk} z^{-j}\bar{z}^{-k},$$

где $a_{jk} = (-1)^{n_1-n_2+j+k}\, b_{jk}$.

Вообще говоря, асимптотические ряды не допускают почленного дифференцирования. Однако асимптотический ряд Тейлора (7) можно почленно дифференцировать, причем получающиеся при этом ряды являются асимптотическими разложениями производных функции $\hat{\varphi}(z)$. Отсюда легко следует:

Асимптотическое разложение производных функции $\varphi(z)$ *получается путем почленного дифференцирования ряда* (6).

Справедливо и обратное утверждение. Если функция $\varphi(z)$ бесконечно дифференцируема по z и $\bar{z}$ и имеет асимптотическое разложение вида (6), допускающее почленное дифференцирование, то она принадлежит пространству D_χ. Доказательство этого утверждения мы опустим.

Укажем еще одну удобную реализацию пространства D_χ. Рассмотрим множество Ω всех точек (z_1, z_2), для которых $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Каждая прямая, проходящая через начало координат, содержит вместе с любой точкой (ω_1, ω_2) этого множества также все точки вида $(e^{i\gamma}\omega_1, e^{i\gamma}\omega_2)$, где γ — вещественное число, $0 \leqslant \gamma < 2\pi$. Из условия однородности вытекает, что

$$f(e^{i\gamma}\omega_1, e^{i\gamma}\omega_2) = e^{i(n_1-n_2)\gamma} f(\omega_1, \omega_2). \tag{8}$$

Таким образом, каждой функции $f(z_1, z_2)$ из D_χ можно сопоставить бесконечно дифференцируемую функцию $f(\omega_1, \omega_2)$ на сфере Ω *): $|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 = 1$, удовлетворяющую условию

*) Если рассматривать пространство комплексных переменных z_1, z_2 как четырехмерное вещественное пространство, то Ω есть обычная сфера в этом пространстве.

однородности (8). Очевидно, что функция $f(z_1, z_2)$ восстанавливается по $f(\omega_1, \omega_2)$ по формуле

$$f(z_1, z_2) = r^{n_1+n_2-2} f\left(\frac{z_1}{r}, \frac{z_2}{r}\right), \tag{9}$$

где $r = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$.

Заметим, что *если* $f(\omega_1, \omega_2)$ — *произвольная бесконечно дифференцируемая функция на сфере* Ω: $|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 = 1$, *удовлетворяющая условию однородности* (8), *то функция* $f(z_1, z_2)$, *определенная формулой* (9), *принадлежит* D_χ.

Итак, пространство D_χ можно реализовать как пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(\omega_1, \omega_2)$, заданных на множестве Ω точек (ω_1, ω_2), для которых $|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 = 1$, и удовлетворяющих условию однородности (8). Эта реализация удобна тем, что множество Ω, на котором задана функция $f(\omega_1, \omega_2)$, компактно.

Пользуясь этой реализацией, легко доказать полноту пространства D_χ. Заметим, что топология D_χ в указанной реализации определяется так: последовательность функций $f(\omega_1, \omega_2)$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда эти функции вместе с производными любого порядка равномерно сходятся к нулю на Ω. Доказательство полноты пространства D_χ протекает точно так же, как доказательство полноты пространства бесконечно дифференцируемых функций на отрезке *).

4. Представление группы G в пространстве D_χ. Теперь определим представление группы G комплексных унимодулярных матриц второго порядка в пространстве D_χ. Каждая матрица $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, задает в плоскости двух комплексных переменных (z_1, z_2) линейное преобразование

$$z_1' = \alpha z_1 + \gamma z_2; \quad z_2' = \beta z_1 + \delta z_2.$$

Этому линейному преобразованию отвечает преобразование

$$f(z_1, z_2) \to f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$$

в пространстве функций $f(z_1, z_2)$.

Ясно, что если функция $f(z_1, z_2)$ принадлежит пространству D_χ, то и $f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$ также принадлежит D_χ. Именно, вместе с $f(z_1, z_2)$ функция $f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$

*) См. «Обобщенные функции», вып. 2, стр. 32.

также бесконечно дифференцируема и однородна степени однородности $(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Таким образом, указанное преобразование является линейным преобразованием в пространстве D_χ. Обозначим это преобразование через $T_\chi(g)$, то есть

$$T_\chi(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2), \tag{1}$$

где f принадлежит D_χ. Очевидно, что преобразование $T_\chi(g)$ непрерывно в пространстве D_χ: если последовательность функций $\{f_m(z_1, z_2)\}$ из пространства D_χ сходится к нулю, то последовательность функций $T_\chi(g) f_m(z_1, z_2)$ также сходится к нулю. Непрерывно зависит $T_\chi(g)$ и от элемента g группы G: если $\lim\limits_{m\to\infty} g_m = g$, то для любой функции $f(z_1, z_2)$ из пространства D_χ выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} T_\chi(g_m) f(z_1, z_2) = T_\chi(g) f(z_1, z_2). \tag{2}$$

Нетрудно проверить также, что для любых двух элементов g_1 и g_2 группы G справедливо равенство

$$T_\chi(g_1 g_2) = T_\chi(g_1) T_\chi(g_2). \tag{3}$$

Таким образом, преобразования $T_\chi(g)$ в пространстве D_χ образуют представление группы G. *Итак, каждой паре комплексных чисел* $\chi = (n_1, n_2)$, *разность которых — целое число, мы сопоставили представление* $T_\chi(g)$ *группы* G. *Это представление строится в пространстве* D_χ *бесконечно дифференцируемых функций* $f(z_1, z_2)$ *степени однородности* $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ *и задается формулой*

$$T_\chi(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2). \tag{4}$$

Пару комплексных чисел $\chi = (n_1, n_2)$ будем называть *весом* представления $T_\chi(g)$.

5. Операторы $T_\chi(g)$ в других реализациях пространства D_χ. В п. 3 было показано, что пространство D_χ можно реализовать как пространство бесконечно дифференцируемых по z и $\bar z$ функций $\varphi(z) (= \varphi(z, \bar z))$, инверсии которых $\hat\varphi(z) = z^{n_1-1} \bar z^{n_2-1} \varphi\left(-\frac{1}{z}\right)$ также бесконечно дифференцируемы по z и $\bar z$. Найдем операторы в пространстве функций $\varphi(z)$, соответствующие операторам $T_\chi(g)$. Для этого заметим, что функции $\varphi(z)$ соответствует функция двух переменных

$$f(z_1, z_2) = z_2^{n_1-1} \bar{z}_2^{n_2-1} \varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right). \quad (1)$$

Оператор $T_\chi(g)$ переводит эту функцию в функцию

$$f_g(z_1, z_2) = T_\chi(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2). \quad (2)$$

В силу однородности функции $f(z_1, z_2)$ имеем

$$f_g(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2) = \\ = (\beta z_1 + \delta z_2)^{n_1-1} \overline{(\beta z_1 + \delta z_2)}^{n_2-1} f\left(\frac{\alpha z_1 + \gamma z_2}{\beta z_1 + \delta z_2}, 1\right) = \\ = (\beta z_1 + \delta z_2)^{n_1-1} \overline{(\beta z_1 + \delta z_2)}^{n_2-1} \varphi\left(\frac{\alpha z_1 + \gamma z_2}{\beta z_1 + \delta z_2}\right).$$

Поэтому функция $\varphi_g(z) = f_g(z, 1)$, соответствующая функции $f_g(z_1, z_2)$, выражается через функцию $\varphi(z)$ по формуле

$$\varphi_g(z) = (\beta z + \delta)^{n_1-1} \overline{(\beta z + \delta)}^{n_2-1} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right).$$

Итак, *если реализовать D_χ как пространство функций $\varphi(z)$ одной комплексной переменной, то оператор представления $T_\chi(g)$ задается в этой реализации формулой*

$$T_\chi(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{n_1-1} \overline{(\beta z + \delta)}^{n_2-1} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right). \quad (3)$$

Нетрудно написать оператор $T_\chi(g)$ для случая, когда D_χ реализовано как пространство функций на некотором произвольном «контуре» Ω, пересекающемся с любой прямой $a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$. Любым двум комплексным числам z_1 и z_2, не равным одновременно нулю, соответствуют точка (ω_1, ω_2) на контуре Ω и число $\rho(z_1, z_2) \neq 0$, такие, что

$$z_1 = \rho(z_1, z_2)\omega_1, \quad z_2 = \rho(z_1, z_2)\omega_2.$$

Пусть (ω_1, ω_2) — точка на контуре Ω и $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ — элемент группы G. Положим

$$\rho_g(\omega_1, \omega_2) = \rho(\alpha\omega_1 + \gamma\omega_2, \beta\omega_1 + \delta\omega_2). \quad (4)$$

Тогда если пространство D_χ реализовано как пространство функций на контуре Ω, то оператор $T_\chi(g)$ в этой реализации имеет

следующий вид:

$$T_\chi(g) f(\omega_1, \omega_2) = \\ = [\rho_g(\omega_1, \omega_2)]^{n_1-1} \overline{[\rho_g(\omega_1, \omega_2)]}^{n_2-1} f\left(\frac{\alpha\omega_1 + \gamma\omega_2}{\rho_g(\omega_1, \omega_2)}, \frac{\beta\omega_1 + \delta\omega_2}{\rho_g(\omega_1, \omega_2)}\right). \quad (5)$$

Если прямые $a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$ пересекают контур Ω в нескольких точках, то функция $\rho_g(\omega_1, \omega_2)$ определена неоднозначно. Однако в этом случае и функции $f(\omega_1, \omega_2)$ не произвольны, а удовлетворяют дополнительным условиям. Именно, их значения в точках пересечения с прямой $a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$ различаются постоянными множителями. Отсюда легко усмотреть, что оператор $T_\chi(g)$ определен формулой (5) однозначно.

6. Сопряженные представления. Пусть D'_χ — пространство, сопряженное D_χ, то есть пространство линейных функционалов в пространстве D_χ. Тогда для пары пространств D_χ и D'_χ естественным образом определен билинейный функционал

$$(F, \varphi),$$

где $F \in D'_\chi$ и $\varphi \in D_\chi$. Именно, (F, φ) есть значение функционала F на функции φ.

Определим в сопряженном пространстве D'_χ представление группы G. Оператор представления $\tilde{T}_\chi(g)$ зададим следующей формулой:

$$(\tilde{T}_\chi(g) F, \varphi) = (F, T_\chi(g^{-1})\varphi) \quad (1)$$

(операторы $\tilde{T}_\chi(g)$ действительно образуют представление, то есть $\tilde{T}_\chi(g_1 g_2) = \tilde{T}_\chi(g_1)\tilde{T}_\chi(g_2)$, что проверяется непосредственной выкладкой). Это представление $\tilde{T}_\chi(g)$ будем называть *сопряженным представлению* $T_\chi(g)$. Заметим, что если в равенстве (1) заменить функцию φ на функцию $T_\chi(g)\varphi$, то мы получим

$$(\tilde{T}_\chi(g) F, T_\chi(g)\varphi) = (F, \varphi). \quad (2)$$

Это означает, что *билинейный функционал (F, φ) инвариантен относительно представления $T_\chi(g)$ и сопряженного ему представления $\tilde{T}_\chi(g)$.*

Рассмотрим теперь пару пространств D_{χ_1} и D_{χ_2}, обладающих инвариантным билинейным функционалом $B(\varphi, \psi)$, то есть

$$B(T_{\chi_1}(g)\varphi,\ T_{\chi_2}(g)\psi) = B(\varphi,\ \psi)$$

для любого элемента g группы G. Предположим, что этот функционал не вырождается на D_{χ_1}, то есть если

$$B(\varphi,\ \psi) = 0$$

для фиксированной функции φ из D_{χ_1} и произвольной функции ψ из D_{χ_2}, то $\varphi = 0$. Покажем, что тогда пространство D_{χ_1} можно взаимно однозначно отобразить в пространство D'_{χ_2}, сопряженное к пространству D_{χ_2} так, что при этом отображении операторы $T_{\chi_1}(g)$ перейдут в операторы $\widetilde{T}_{\chi_2}(g)$. Тем самым, представление $\widetilde{T}_{\chi_2}(g)$, сопряженное представлению $T_{\chi_2}(g)$, можно рассматривать как расширение представления $T_{\chi_1}(g)$.

В самом деле, каждая функция φ из D_{χ_1} задает линейный функционал $B(\varphi,\ \psi)$ в пространстве D_{χ_2}. Тем самым пространство D_{χ_1} отображается в пространство D'_{χ_2}, сопряженное к D_{χ_2}. Так как по условию функционал $B(\varphi,\ \psi)$ не вырождается на D_{χ_1}, то в нуль при этом отображении переходит только функция $\varphi = 0$. Таким образом, отображение $D_{\chi_1} \to D'_{\chi_2}$ взаимно однозначно. Убедимся, что сопряженное представление $\widetilde{T}_{\chi_2}(g)$ есть расширение представления $T_{\chi_1}(g)$, то есть что оно совпадает на подпространстве D_{χ_1} с представлением $T_{\chi_1}(g)$.

В самом деле, рассматривая функцию φ как элемент пространства D'_{χ_2}, имеем

$$(\widetilde{T}_{\chi_2}(g)\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ T_{\chi_2}(g^{-1})\psi).$$

С другой стороны, согласно определению отображения $D_{\chi_1} \to D'_{\chi_2}$, имеем

$$(\varphi,\ \psi) = B(\varphi,\ \psi).$$

Следовательно,

$$(\varphi,\ T_{\chi_2}(g^{-1})\psi) = B(\varphi,\ T_{\chi_2}(g^{-1})\psi) =$$
$$= B(T_{\chi_1}(g)\varphi,\ \psi) = (T_{\chi_1}(g)\varphi,\ \psi).$$

Итак, мы получили, что $(\widetilde{T}_{\chi_2}(g)\varphi,\ \psi) = (T_{\chi_1}(g)\varphi,\ \psi)$, откуда $T_{\chi_1}(g)\varphi = \widetilde{T}_{\chi_2}(g)\varphi$.

В § 4 будет показано, что для любой пары комплексных чисел $\chi = (n_1,\ n_2)$ представления $T_\chi(g)$ и $T_{-\chi}(g)$, где $-\chi = (-n_1,\ -n_2)$, обладают невырожденным инвариантным билинейным функционалом. Таким образом, *сопряженное представление* $\widetilde{T}_\chi(g)$ *является расширением представления* $T_{-\chi}(g)$.

§ 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ D_χ

Здесь мы сформулируем основные результаты о представлениях в пространствах D_χ, которые будут затем установлены в §§ 4—6. Их вывод интересен с точки зрения обобщенных функций, однако для построения гармонического анализа на группе знать этот вывод необязательно. Поэтому после § 3 читатель может при желании перейти сразу к чтению главы IV.

1. Неприводимость представлений в пространствах D_χ и роль целых точек. Можно дать несколько определений неприводимого представления. Простейшее из них: *представление в пространстве E называется неприводимым, если в пространстве E не существует замкнутых инвариантных подпространств.* Такое определение естественно для конечномерных представлений, где нет дополнительных сложностей из-за структуры пространства представления (ведь все n-мерные пространства изоморфны между собой).

Конечно, определяя неприводимое представление в бесконечномерном пространстве, мы также должны требовать отсутствия инвариантных подпространств. Однако этого требования еще недостаточно.

Введем еще понятие операторной неприводимости представления. Пусть дано представление $T(g)$ в пространстве E. Будем говорить, что оно *операторно неприводимо*, если любой замкнутый оператор в пространстве E*), перестано-

*) Оператор A в пространстве E называется замкнутым, если его график, то есть множество пар $[\xi,\ A\xi]$, где ξ пробегает область определения оператора A, есть замкнутое множество в прямой сумме $E \oplus E$.

вочный со всеми операторами представления, кратен единичному оператору.

Для конечномерных представлений операторная неприводимость и отсутствие инвариантных подпространств — это два эквивалентных требования. Для бесконечномерных представлений это уже не так. Позже мы увидим, что представление в пространстве D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, где n_1, n_2 — целые числа одного знака, операторно неприводимо, и в то же время пространство D_χ обладает инвариантным подпространством. Поэтому операторная неприводимость не есть настоящая неприводимость. Мы употребляем этот термин только ради краткости, чтобы не говорить каждый раз: «пространство, в котором каждый замкнутый оператор, перестановочный с операторами представления, кратен единичному».

Можно сформулировать другое определение неприводимости, имеющее геометрический смысл, которое совмещает в себе как отсутствие инвариантных подпространств, так и операторную неприводимость. Пусть задано представление $T(g)$ в пространстве E. Рассмотрим прямую сумму $E \oplus E$. Тогда в этой прямой сумме также естественным образом задано представление. *Назовем представление $T(g)$ в пространстве E неприводимым, если любое инвариантное собственное подпространство пространства $E \oplus E$ состоит из точек $[c_1\xi, c_2\xi]$, где ξ пробегает все пространство E, а c_1, c_2 — фиксированные числа.*

Докажем, что если выполнено это условие, то в E нет инвариантных подпространств. В самом деле, пусть H — инвариантное подпространство пространства E. Тогда множество пар $[\xi, \eta]$, где ξ пробегает подпространство H, а η—все пространство E, является инвариантным подпространством в $E \oplus E$. Очевидно, что это допустимо, только либо если $H = 0$, либо если H совпадает со всем пространством E.

Операторная неприводимость также отсюда следует. Пусть A — замкнутый оператор в пространстве E, перестановочный с операторами $T(g)$. Рассмотрим пары $[\xi, A\xi]$, где ξ пробегает область определения оператора A. Замкнутость оператора A означает, что множество этих пар есть замкнутое подпространство в прямой сумме $E \oplus E$. Перестановочность оператора A с операторами $T(g)$ означает, что, во-первых, вместе с ξ области определения оператора A принадлежит также $T(g)\xi$, и, во-вторых, $AT(g)\xi = T(g)A\xi$. Но тогда множество точек $[\xi, A\xi]$ есть инвариантное подпространство

в $E \oplus E$. Так как, по предположению, любое инвариантное подпространство в $E \oplus E$ состоит из точек $[c_1\xi, c_2\xi]$, где ξ пробегает все пространство E, то, следовательно, оператор A кратен единичному оператору.

Истинным определением неприводимости следует считать следующее. Пусть $T(g)$ — представление, действующее в ядерном пространстве E *). Рассмотрим тензорное произведение $E \otimes F$, где F — любое пространство. В нем также действует представление группы. *Представление в пространстве E называется неприводимым, если любое инвариантное подпространство в $E \otimes F$ имеет вид $E \otimes F_1$, где F_1 — подпространство пространства F.*

Когда F — двумерное пространство, мы получаем отсюда определение неприводимого представления, сформулированное на предыдущей странице (так как в этом случае $E \otimes F$ совпадает с прямой суммой $E \oplus E$). Когда F — одномерное пространство, мы получаем условие, что в пространстве E нет инвариантных подпространств.

В этой главе мы докажем только операторную неприводимость представлений в пространствах D_χ. Точнее, будет установлен даже более слабый результат, поскольку мы будем рассматривать не все замкнутые операторы A, а только непрерывные. Именно, мы докажем в § 5, что *единственными непрерывными операторами A в пространстве D_χ, перестановочными с операторами представления $T_\chi(g)$, то есть*

$$AT_\chi(g) = T_\chi(g)A,$$

являются операторы, кратные единичному оператору.

Для целей книги этого результата вполне достаточно. На самом деле, можно было бы доказать более сильный результат. Именно, *представления в D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, для нецелых χ, то есть когда n_1, n_2 не являются целыми числами одного знака, неприводимы во всех смыслах*, а именно, в пространстве D_χ нет инвариантных подпространств, представление в D_χ операторно неприводимо и даже имеет место неприводимость, сформулированная в терминах тензорного произведения (см. выше петит). Впрочем, доказывать этот результат мы не будем.

Особую роль играют представления $T_\chi(g)$, $\chi = (n_1, n_2)$, в «целых» точках χ. Мы говорим, что $\chi = (n_1, n_2)$—целая точка, если n_1, n_2 — целые числа одного знака (и притом

*) По поводу определения ядерного пространства см. «Обобщенные функции», вып. 4, стр. 78 и след.

оба отличны от нуля). Мы увидим сейчас, что в «целых» точках $\chi=(n_1, n_2)$ в пространствах D_χ существуют инвариантные подпространства.

Сначала рассмотрим случай, когда n_1, n_2 — целые положительные числа. Напомним, что пространство D_χ состоит из бесконечно дифференцируемых однородных функций $f(z_1, z_2)$ степени однородности (n_1-1, n_2-1).

Очевидно, *что для* $\chi=(n_1, n_2)$, *где* n_1, n_2 — *целые положительные числа, в* $D_\chi \equiv D_{n_1, n_2}$ *есть конечномерное инвариантное подпространство* E_χ, *состоящее из однородных многочленов степени однородности* (n_1-1, n_2-1). В самом деле, операторы представления $T_\chi(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1+\gamma z_2, \beta z_1+\delta z_2)$ переводят эти многочлены снова в многочлены степени (n_1-1, n_2-1). Если пространство D_χ реализовать в виде пространства функций от одного переменного z, то подпространство однородных многочленов обращается в подпространство многочленов от z, $\bar z$ степени не выше чем n_1-1 относительно z и не выше чем n_2-1 относительно $\bar z$, то есть в подпространство с базисом $\{z^k \bar z^l\}$, где $k=0, \ldots, n_1-1$, $l=0, \ldots, n_2-1$. Ясно, что размерность этого подпространства многочленов E_χ есть $n_1 n_2$.

Поскольку подпространство E_χ инвариантно, то представление группы G можно также реализовать и в фактор-пространстве D_χ/E_χ, то есть в пространстве функций из D_χ, определенных с точностью до многочленов.

Можно показать, что в пространстве D_χ/E_χ уже нет инвариантных подпространств. Таким образом, пространство $D_\chi \equiv D_{n_1, n_2}$, где n_1, n_2 — целые положительные числа, «двухэтажно», то есть оно обладает одним инвариантным подпространством; фактор-пространство по этому подпространству уже не содержит инвариантных подпространств. Представление $T_\chi(g)$ в этом пространстве напоминает тем самым жорданову клетку.

Каково же представление в фактор-пространстве

$$D_{n_1, n_2}/E_{n_1, n_2}?$$

Мы покажем в п. 2, что

$$D_{n_1, n_2}/E_{n_1, n_2} \cong D_{-n_1, n_2} \cong D_{n_1, -n_2}.$$

Теперь опишем структуру пространства $D_{-\chi} \equiv D_{-n_1, -n_2}$, где $-n_1$, $-n_2$ — целые отрицательные числа. Здесь положение двойственно предыдущему. Именно, здесь есть инвариантное бесконечномерное подпространство

$$F_{-n_1, -n_2} \cong D_{n_1, n_2}/E_{n_1, n_2}$$

и конечномерное фактор-пространство

$$D_{-n_1, -n_2}/F_{-n_1, -n_2} \cong E_{n_1, n_2}.$$

Построим их. Для этого рассмотрим в пространстве $D_{-n_1, -n_2}$ подпространство $F_{-\chi} \equiv F_{-n_1, -n_2}$ таких функций $f(z)$, для которых равны нулю моменты

$$b_{jk} = \frac{i}{2} \int f(z) z^j \bar z^k \, dz \, d\bar z = 0,$$

где $j=0, 1, \ldots, n_1-1$, $k=0, 1, \ldots, n_2-1$.

Можно без труда показать, что если к функции $f(z)$ применить оператор представления $T_{-\chi}(g)$, то ее моменты b_{jk}, $0 \leqslant j \leqslant n_1-1$, $0 \leqslant k \leqslant n_2-1$, подвергнутся линейному преобразованию. Следовательно, подпространство $F_{-\chi}$ инвариантно.

Так как подпространство $F_{-\chi}$ инвариантно, то представление группы G можно также реализовать в фактор-пространстве $D_{-\chi}/F_{-\chi}$, то есть в пространстве функций из $D_{-\chi}$, определенных с точностью до функций из $F_{-\chi}$. Ясно, что элементы этого фактор-пространства однозначно определяются моментами b_{jk}. Таким образом, фактор-пространство $D_{-\chi}/F_{-\chi}$ конечномерно и имеет размерность $n_1 n_2$.

В § 2 было уже отмечено, что пространство $D_{-n_1, -n_2}$ есть часть пространства D'_{n_1, n_2}, сопряженного D_{n_1, n_2}. Поэтому структуру пространства $D_{-n_1, -n_2}$ можно было бы получить из структуры D_{n_1, n_2}, используя переход к сопряженному пространству.

2. Эквивалентность представлений в пространствах D_χ и роль целых точек. Назовем представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ *эквивалентными*, если существует линейный оператор A, взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображающий пространство D_{χ_1} представления $T_{\chi_1}(g)$ на пространство D_{χ_2} представления $T_{\chi_2}(g)$ и такой, что

$$A T_{\chi_1}(g) = T_{\chi_2}(g) A. \tag{1}$$

Существенно различными будем считать лишь неэквивалентные представления. Спрашивается, когда два представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ между собой эквивалентны?

В § 5 будет показано, что *представления* $T_{\chi_1}(g)$ *и* $T_{\chi_2}(g)$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $\chi_1 = \chi_2$ (*тривиальный случай*),

2) $\chi_1 = (n_1, n_2)$, $\chi_2 = (-n_1, -n_2)$, *где* χ_1 — *не целая точка, то есть* n_1, n_2 *не являются одновременно целыми числами одного знака.*

В § 5 будет также доказано, что оператор A, отображающий пространство D_{χ_1} на пространство D_{χ_2} и удовлетворяющий условию перестановочности (1), определен в каждом из этих случаев однозначно, с точностью до множителя.

В первом, тривиальном, случае, когда $\chi_1 = \chi_2$, то есть пространства D_{χ_1} и D_{χ_2} совпадают, этот оператор A кратен единичному оператору *).

Укажем вид оператора A для второго случая, то есть когда $\chi_1 = (n_1, n_2)$, $\chi_2 = (-n_1, -n_2)$, где $\chi_1 = (n_1, n_2)$ не есть целая точка (то есть числа n_1, n_2 не являются целыми одного знака). Будем предполагать, что D_{χ_1} и D_{χ_2} реализованы как пространства функций $\varphi(z)$ одного комплексного переменного. Как мы увидим в § 5, оператор $D_{n_1, n_2} \xrightarrow{A} D_{-n_1, -n_2}$ имеет следующий вид:

$$A\varphi(z) = \frac{i}{2} \int (z_1 - z)^{-n_1 - 1} \overline{(z_1 - z)}^{-n_2 - 1} \varphi(z_1)\, dz_1\, d\bar{z}_1. \qquad (2)$$

Интеграл нужно понимать в смысле регуляризованного значения **).

Аналогичный вид имеет оператор $D_{-n_1, -n_2} \xrightarrow{B} D_{n_1, n_2}$ (в формуле (2) надо заменить n_1, n_2 на $-n_1$, $-n_2$):

$$B\varphi(z) = \frac{i}{2} \int (z_1 - z)^{n_1 - 1} \overline{(z_1 - z)}^{n_2 - 1} \varphi(z_1)\, dz_1\, d\bar{z}_1. \qquad (2')$$

*) Собственно, этот результат и означает сформулированную в п. 1 операторную неприводимость представления в D_χ, а именно, единственными операторами в D_χ, перестановочными с операторами представления, являются операторы, кратные единичному.

**) О том, как определяется это регуляризованное значение, будет сказано в § 5.

Заметим, что произведение BA операторов A и B есть оператор в D_{n_1, n_2}, перестановочный с представлением. Ввиду операторной неприводимости представления он кратен единичному оператору E, то есть $BA = \mu E$. Мы увидим в § 5, что

$$\mu = (-1)^{n_1 - n_2} 4\pi^2 (n_1 + n_2 + |n_1 - n_2|)^{-1} \times$$
$$\times (-n_1 - n_2 + |n_1 - n_2|)^{-1}.$$

Можно было бы доказать следующую теорему. *Пусть $T(g)$ — неприводимое представление в пространстве E, удовлетворяющее условию, что для любой непрерывной быстро убывающей функции $f(g)$ сходится интеграл $\int f(g)\, T(g)\, dg$. Тогда можно так подобрать χ, что для этого χ существует непрерывное взаимно однозначное отображение пространства D_χ в E, перестановочное с представлениями $T(g)$ и $T_\chi(g)$.*

Назовем представление в E эквивалентным представлению в соответствующем пространстве D_χ. Оказывается, что и при таком более слабом определении эквивалентности не существует никаких других пар эквивалентных представлений в пространствах D_χ.

Мы условились существенно различными считать лишь неэквивалентные представления. Мы можем теперь говорить о множестве представлений группы G. Точками этого множества служат классы эквивалентных между собой представлений. Поскольку каждое представление $T_\chi(g)$, $\chi = (n_1, n_2)$ задается парой комплексных чисел n_1, n_2, разность которых — целое число, то мы можем ввести понятие *„римановой поверхности“* пространства представлений. Точки этой римановой поверхности задаются парой комплексных чисел n_1, n_2, разность которых — целое число. Тем самым, универсальной накрывающей пространства представлений служит счетная последовательность плоскостей комплексного переменного.

Точкой ветвления римановой поверхности пространства представлений назовем такую точку, в любой сколь угодно малой окрестности которой содержатся эквивалентные между собой представления. Естественным образом определяется порядок ветвления. В силу сказанного в начале этого пункта единственная точка ветвления на римановой поверхности пространства представлений группы G есть точка $n_1 = 0$, $n_2 = 0$. Ее порядок ветвления есть 2. Особую роль на римановой поверхности играют целые точки χ (см. стр. 213).

14 Зак. 2905. И. М. Гельфанд и др., вып. 5

3. Вопрос об эквивалентности представлений в целых точках. Теперь рассмотрим пару пространств D_{n_1, n_2}, $D_{-n_1, -n_2}$, где (n_1, n_2) — целая точка, то есть n_1, n_2 — целые числа одного знака (и притом отличные от нуля).

Мы увидим в § 5, что операторы

$$D_{n_1, n_2} \xrightarrow{A} D_{-n_1, -n_2}, \quad D_{-n_1, -n_2} \xrightarrow{B} D_{n_1, n_2},$$

определенные формулами (2), (2′) п. 2 перестановочны с представлениями и в этом особом случае.

Собственно говоря, формула для оператора A

$$A\varphi(z) = \frac{i}{2} \int (z_1 - z)^{-n_1-1} \overline{(z_1 - z)}^{-n_2-1} \varphi(z_1)\, dz_1\, d\bar{z}_1$$

теряет смысл, когда n_1, n_2 — целые положительные числа, поскольку правая часть, как функция от n_1, n_2, имеет полюс при этих значениях n_1, n_2. Однако мы могли бы поставить перед интегралом подходящий множитель в виде произведения Г-функций. Тогда оператор A был бы определен и для целых положительных n_1, n_2. В § 5 будет показано, что этот оператор A имеет вид $A = \dfrac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial z^{n_1}\, \partial \bar{z}^{n_2}}$.

Однако, как мы сейчас убедимся, операторы A и B уже не осуществляют изоморфного отображения одного пространства на другое.

Для определенности будем предполагать, что n_1, n_2 — целые положительные числа. Рассмотрим сначала отображение $D_{-n_1, -n_2} \xrightarrow{B} D_{n_1, n_2}$. Это отображение задается формулой

$$B\varphi(z) = \frac{i}{2} \int (z_1 - z)^{n_1-1} \overline{(z_1 - z)}^{n_2-1} \varphi(z_1)\, dz_1\, d\bar{z}_1. \tag{1}$$

Правая часть этого равенства есть многочлен от z, $\bar{z}$ степени $n_1 - 1$ относительно z и степени $n_2 - 1$ относительно $\bar{z}$. Таким образом, *оператор B переводит все пространство $D_{-n_1, -n_2}$ в подпространство многочленов E_{n_1, n_2}*.

Из формулы (1) видно также, что *оператор B переводит в нуль те и только те функции $\varphi(z_1)$, у которых равны нулю моменты*

$$b_{jk} = \frac{i}{2} \int z_1^j \bar{z}_1^k \varphi(z_1)\, dz_1\, d\bar{z}_1,$$

где $j = 0, 1, \ldots, n_1-1$, $k = 0, 1, \ldots, n_2-1$. Подпространство этих функций мы уже обозначали в п. 1 через $F_{-n_1, -n_2}$.

Таким образом, оператор B осуществляет изоморфизм $D_{-n_1, -n_2}/F_{-n_1, -n_2} \cong E_{n_1, n_2}$.

Теперь рассмотрим отображение $D_{n_1, n_2} \xrightarrow{A} D_{-n_1, -n_2}$. Как было уже сказано раньше, оператор A имеет следующий вид: $A = \dfrac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial z^{n_1}\, \partial \bar{z}^{n_2}}$.

Очевидно, что этот оператор переводит в нуль подпространство E_{n_1, n_2} многочленов от z, $\bar{z}$ степени не выше $n_1 - 1$ относительно z и не выше $n_2 - 1$ относительно $\bar{z}$. Можно показать (см. § 5), что оператор A отображает D_{n_1, n_2} не на все пространство $D_{-n_1, -n_2}$, а на его инвариантное подпространство $F_{-n_1, -n_2}$. Таким образом, оператор A осуществляет изоморфизм $D_{n_1, n_2}/E_{n_1, n_2} \cong F_{-n_1, -n_2}$.

Итак, мы видим, что в целых точках $\chi = (n_1, n_2)$ имеют место те же соотношения, что и в случае нецелых χ, — соотношения между представлениями в D_{n_1, n_2} и в $D_{-n_1, -n_2}$. Замечательно, однако, что в целых точках χ возникают еще дополнительные соотношения. Именно, в § 5 будет доказано существование следующих отображений, перестановочных с представлениями

$$D_{n_1, n_2} \xrightarrow{A_1} D_{-n_1, n_2}; \quad D_{n_1, n_2} \xrightarrow{A_2} D_{n_1, -n_2}$$

и

$$D_{-n_1, n_2} \xrightarrow{B_1} D_{-n_1, -n_2}; \quad D_{n_1, -n_2} \xrightarrow{B_2} D_{-n_1, -n_2}$$

(напоминаем, что n_1, n_2 предполагаются целыми положительными числами). Операторы, задающие эти отображения, имеют следующий вид:

$$A_1 = B_2 = \frac{\partial^{n_1}}{\partial z^{n_1}}, \quad A_2 = B_1 = \frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}^{n_2}}.$$

В § 5 будет показано, что каждый из операторов A_1, A_2 задает отображение на все пространство, причем каждый из них переводит в нуль подпространство многочленов E_{n_1, n_2}. Таким образом, операторы A_1, A_2 осуществляют изоморфизм пространств $D_{n_1, n_2}/E_{n_1, n_2} \cong D_{-n_1, n_2}$ и $D_{n_1, n_2}/E_{n_1, n_2} \cong D_{n_1, -n_2}$.

С другой стороны, как будет также показано в § 5, операторы B_1, B_2 осуществляют взаимно однозначное отображение на подпространство $F_{-n_1, -n_2}$ пространства $D_{-n_1, -n_2}$. Таким образом, эти операторы осуществляют изоморфизм пространств $D_{-n_1, n_2} \cong F_{-n_1, -n_2}$ и $D_{n_1, -n_2} \cong F_{-n_1, -n_2}$.

Отметим, что произведение $B_1 A_1$ операторов A_1 и B_1 есть оператор A, отображающий пространство D_{n_1, n_2} в пространство $D_{-n_1, -n_2}$.

Результаты мы можем записать в виде одной коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & E_{n_1,n_2} \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \\
F_{-n_1,-n_2} \arrow[d] & D_{n_1,n_2} \arrow[l] \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "A_2"'] \arrow[dr, leftrightarrow] & D_{-n_1,n_2} \arrow[r] \arrow[d, "B_1"] \arrow[dl, leftrightarrow] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & D_{n_1,-n_2} \arrow[r, "B_2"'] \arrow[d] & D_{-n_1,-n_2} \arrow[d] & F_{-n_1,-n_2} \arrow[l] \\
 & 0 & E_{n_1,n_2} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 4.

В этой диаграмме все (направленные) последовательности, в которые входят подряд два (и только два) пространства D_χ, являются точными. (Напоминаем, что n_1, n_2 предполагаются целыми положительными числами.)

Мы увидим в § 5, что не существует других пар представлений, кроме описанных в пп. 2 и 3, обладающих перестановочными операторами.

Будем называть два неприводимых представления $T_1(g)$ и $T_2(g)$ *ближайшими родственниками*, если они содержатся в одном и том же операторно неприводимом представлении. Точнее, существует операторно неприводимое представление, действующее в пространстве D, обладающее следующим свойством. В пространстве D имеется инвариантное подпространство D_1, такое, что представление в подпространстве D_1 эквивалентно представлению $T_1(g)$, а представление в фактор-пространстве D/D_1 эквивалентно представлению $T_2(g)$.

Скажем, что два представления являются *родственниками*, если их можно соединить конечной цепочкой ближайших родственников.

Из сказанного в этом пункте следует, что конечномерное представление группы G в пространстве E_{n_1, n_2} многочленов от z, $\bar{z}$, степени не выше $n_1 - 1$ относительно z и не выше $n_2 - 1$ относительно $\bar{z}$ является ближайшим родственником представления в пространстве $D_{-n_1, n_2} \cong D_{n_1, -n_2}$. Можно показать, что других родственных связей между неприводимыми представлениями группы G не существует.

Мы увидим в главе VII, что для группы вещественных матриц структура родственных связей между представлениями несколько сложнее.

Общее определение родственных представлений дано в статье И. М. Гельфанда «Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений» (Успехи матем. наук, т. XIV, № 3, 1959). Из топологии в множестве представлений, которая вводится в этой статье, видно также, что целые точки $\chi = (n_1, n_2)$ являются в известном смысле особыми точками на «римановой поверхности» представлений.

4. Унитарность представлений. При некоторых условиях в пространстве D_χ существует инвариантный эрмитов билинейный функционал (φ, ψ), то есть такой, что

$$(T_\chi(g)\varphi,\ T_\chi(g)\psi) = (\varphi, \psi) \tag{1}$$

для любых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из D_χ и любого элемента g из G. Если этот функционал положительно определен, то примем его за скалярное произведение. Тогда само представление будет унитарным относительно этого скалярного произведения.

Спрашивается, когда в пространстве D_χ можно ввести такое скалярное произведение? Этот вопрос будет разобран в § 6. Именно, будет показано, что скалярное произведение (φ, ψ) в D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, можно ввести в следующих двух случаях:

а) Имеет место равенство $n_1 = -\bar{n}_2$. В этом случае скалярное произведение задается равенством

$$(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int \varphi(z) \overline{\psi(z)}\, dz\, d\bar{z}. \tag{2}$$

Представления в D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, где $n_1 = -\bar{n}_2$, будем называть представлениями *основной серии*.

б) $n_1 = n_2 = \rho$, где $\rho \neq 0$ — вещественное число, принадлежащее интервалу $-1 < \rho < 1$. В этом случае скалярное произведение задается формулой

$$(\varphi, \psi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |z_1 - z_2|^{-2\rho-2} \varphi(z_1) \overline{\psi(z_2)}\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2. \tag{3}$$

Представления в D_χ, $\chi = (\rho, \rho)$, где $-1 < \rho < 1$, будем называть представлениями *дополнительной серии*.

§ 4. ИНВАРИАНТНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. В § 3 были сформулированы результаты относительно представлений $T_\chi(g)$ в пространствах D_χ. Все эти результаты будут получены единым методом, связанным с изучением инвариантных билинейных функционалов. Отыскание инвариантных билинейных функционалов само по себе есть интересная задача теории представлений. Другой интересной задачей, которой мы здесь не касаемся, было бы отыскание инвариантных полилинейных функционалов.

Сначала введем общее определение инвариантного билинейного функционала для пары представлений. Рассмотрим пару представлений $T_1(g)$ и $T_2(g)$ группы G, действующих соответственно в линейных топологических пространствах E_1 и E_2. Пусть $B(\varphi, \psi)$ — *непрерывный билинейный функционал*, аргументы которого φ и ψ пробегают соответственно пространства E_1 и E_2. Это значит, что функционал $B(\varphi, \psi)$, $\varphi \in E_1$, $\psi \in E_2$, удовлетворяет следующим требованиям:

1) $B(a\varphi_1 + b\varphi_2, \psi) = aB(\varphi_1, \psi) + bB(\varphi_2, \psi)$;
$B(\varphi, a\psi_1 + b\psi_2) = aB(\varphi, \psi_1) + bB(\varphi, \psi_2)$.

2) $B(\varphi, \psi)$ есть непрерывная функция от φ и ψ в прямой сумме топологических пространств E_1 и E_2.

Билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ называется *инвариантным относительно представлений* $T_1(g)$ и $T_2(g)$, если для любых функций φ и ψ из пространств E_1 и E_2 и любого элемента g группы G выполняется равенство

$$B(\varphi, \psi) = B[T_1(g)\varphi, T_2(g)\psi].$$

В § 2 были построены представления $T_\chi(g)$ группы G в линейных топологических пространствах D_χ. Все дальнейшее изложение главы III основано на описании билинейных функционалов, инвариантных относительно пары представлений $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$, которое будет проведено в этом параграфе.

Основные результаты этого параграфа могут быть изложены в виде двух теорем. Пусть имеются два представления

группы G

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{n_1-1}\overline{(\beta z + \delta)}^{n_2-1}\varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{m_1-1}\overline{(\beta z + \delta)}^{m_2-1}\varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right),$$

действующие в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2}. Нам нужно найти инвариантный билинейный функционал относительно $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$. Ответ зависит от чисел $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$ и $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$.

Если s_1, s_2 не являются целыми отрицательными числами или нулями, то инвариантный билинейный функционал существует тогда и только тогда, когда $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$. В этом случае (см. стр. 228) он имеет следующий вид:

$$B(\varphi, \psi) =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (z_1 - z_2)^{-n_1-1}\overline{(z_1 - z_2)}^{-n_2-1}\varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2.$$

В случае, когда $s_1 = -\frac{m_1+n_1}{2}$, $s_2 = -\frac{m_2+n_2}{2}$ — целые отрицательные числа или нули, имеет место следующий результат (см. стр. 235—236).

Инвариантный билинейный функционал существует тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$;
2) $m_1 = -n_1$, $m_2 = -n_2$;
3) $m_1 = n_1$, $m_2 = -n_2$, где $n_1 = 0, 1, \ldots$;
4) $m_1 = -n_1$, $m_2 = n_2$, где $n_2 = 0, 1, \ldots$

Инвариантный билинейный функционал задается в этих случаях следующими формулами:

если $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$ (в этом случае $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots$), то

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2}\int \varphi^{(n_1, n_2)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}\ ^{*});$$

если $m_1 = -n_1$, $m_2 = -n_2$, то

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z};$$

---

*) Здесь введено обозначение $\varphi^{(n_1, n_2)}(z) = \frac{\partial^{n_1+n_2}\varphi(z)}{\partial z^{n_1}\,\partial \bar{z}^{n_2}}$.

если $m_1 = n_1$, $m_2 = -n_2$, где $n_1 = 0, 1, \ldots$, то

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int \varphi^{(n_1, 0)}(z) \psi(z)\, dz\, d\bar{z};$$

если $m_1 = -n_1$, $m_2 = n_2$, где $n_2 = 0, 1, \ldots$, то

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int \varphi^{(0, n_2)}(z) \psi(z)\, dz\, d\bar{z}.$$

Подчеркнем, что в случае $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$ и в случае $m_1 = -n_1$, $m_2 = -n_2$ инвариантный билинейный функционал существует для любых n_1, n_2, в отличие от случаев 3 и 4, когда он существует лишь в дискретных точках.

Доказательство этих результатов основано на следующем предварительном замечании. Каждой матрице $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, соответствует дробно-линейное преобразование $w = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}$ комплексной плоскости. При этом умножению матриц соответствует умножение преобразований, а матрицы $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$ и только они переходят в тождественное преобразование. Хорошо известно, что любое дробно-линейное преобразование комплексной плоскости $w = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}$ можно получить композицией следующих простейших преобразований:

1) параллельный перенос

$$z \to z + z_0 \qquad \left(g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z_0 & 1 \end{Vmatrix}\right);$$

2) преобразование подобия

$$z \to \alpha^2 z \qquad \left(g = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{Vmatrix}\right);$$

3) инверсия

$$z \to -\frac{1}{z} \qquad \left(g = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}\right).$$

Поэтому при выяснении, является ли заданный билинейный функционал инвариантным, достаточно ограничиться операторами $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$, отвечающими этим простейшим преобразованиям.

При этом исследование условий инвариантности билинейного функционала относительно преобразований параллельного переноса и подобия является общим для всех случаев, и мы его проведем отдельно в п. 2.

2. Необходимое условие инвариантности билинейного функционала относительно преобразований параллельного переноса и подобия. Пусть заданы два представления группы G:

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{n_1 - 1} \overline{(\beta z + \delta)}^{n_2 - 1} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) \tag{1}$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\psi(z) = (\beta z + \delta)^{m_1 - 1} \overline{(\beta z + \delta)}^{m_2 - 1} \psi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right), \tag{1'}$$

действующие соответственно в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2}.

Сначала найдем вид билинейного функционала, инвариантного относительно преобразований параллельного переноса. При этом мы будем рассматривать пока билинейный функционал только на множестве финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

Мы покажем, что *билинейный функционал в пространстве K финитных бесконечно дифференцируемых функций, инвариантный относительно преобразований параллельного переноса, имеет следующий вид*:

$$B(\varphi, \psi) = (B_0, \omega), \tag{2}$$

где B_0 — некоторая обобщенная функция в пространстве K, а функция $\omega(z)$ определяется следующим равенством:

$$\omega(z) = \frac{i}{2} \int \varphi(z_1) \psi(z + z_1)\, dz_1\, d\bar{z}_1. \tag{3}$$

Для доказательства заметим, что операторы $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$, отвечающие преобразованию параллельного переноса, являются операторами сдвига

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(z) = \varphi(z + z_0),$$
$$T_{\chi_2}(g)\psi(z) = \psi(z + z_0).$$

Инвариантность билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ относительно преобразований $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ означает, что этот функционал инвариантен относительно сдвигов, то есть, что

$$B(\varphi, \psi) = B(\varphi(z + z_0), \psi(z + z_0)). \tag{4}$$

Сошлемся теперь на следующий результат, установленный в вып. 4 «Обобщенных функций» стр. 211. *Всякий инвариантный относительно сдвигов эрмитов билинейный функционал* $B(\varphi, \psi)$ *в пространстве* K *имеет вид*

$$B(\varphi, \psi) = \left(B_0, \int \varphi(x)\overline{\psi(x-y)}\,dx\right),$$

где B_0 — *некоторая обобщенная функция в пространстве* K. Ясно, что этот результат можно переформулировать и на случай функционалов, линейных по обоим аргументам. В результате мы и получим формулы (2), (3).

Таким образом, мы нашли общий вид билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ в пространстве K финитных бесконечно дифференцируемых функций, инвариантного относительно преобразований параллельного переноса. Оказалось, что этот функционал имеет следующий вид:

$$B(\varphi, \psi) = (B_0, \omega), \tag{2}$$

где B_0 — обобщенная функция в пространстве K, а $\omega(z)$ — функция, определяемая равенством

$$\omega(z) = \frac{i}{2}\int \varphi(z_1)\psi(z + z_1)\,dz_1\,d\bar{z}_1. \tag{3}$$

Потребуем теперь, чтобы билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ был инвариантен также относительно преобразования подобия $z \to \alpha^2 z$. Из этого условия мы найдем вид обобщенной функции B_0. Именно, мы увидим сейчас, что B_0 есть однородная обобщенная функция от z, $\bar{z}$ степени однородности $(s_1 - 1,\ s_2 - 1)$, где $s_1 = -\frac{n_1 + m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2 + m_2}{2}$.

Для доказательства заметим, что преобразованию подобия соответствует матрица $g = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{Vmatrix}$. Поэтому операторы $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$ имеют вид

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(z) = \alpha^{-n_1+1}\bar{\alpha}^{-n_2+1}\varphi(\alpha^2 z) \tag{5}$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\varphi(z) = \alpha^{-m_1+1}\bar{\alpha}^{-m_2+1}\varphi(\alpha^2 z). \tag{5'}$$

Условие инвариантности билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ относительно операторов $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$ записывается тем самым следующим образом:

$$B(\varphi, \psi) = \alpha^{-n_1-m_1+2}\bar{\alpha}^{-n_2-m_2+2}B[\varphi(\alpha^2 z), \psi(\alpha^2 z)].$$

Заменим в этом равенстве билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ его выражением $B(\varphi, \psi) = (B_0, \omega)$ и примем во внимание, что

$$\frac{i}{2}\int \varphi(\alpha^2 z_1)\psi[\alpha^2(z + z_1)]\,dz_1\,d\bar{z}_1 =$$
$$= |\alpha|^{-4}\frac{i}{2}\int \varphi(z_1)\psi(\alpha^2 z + z_1)\,dz_1\,d\bar{z}_1 = |\alpha|^{-4}\omega(\alpha^2 z).$$

Мы получим

$$(B_0, \omega) = \alpha^{-n_1-m_1}\bar{\alpha}^{-n_2-m_2}(B_0, \omega(\alpha^2 z)). \tag{6}$$

Это равенство (6) и означает, что функционал B_0 является однородной обобщенной функцией степени однородности $(s_1 - 1,\ s_2 - 1)$, где $s_1 = -\frac{n_1 + m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2 + m_2}{2}$.

Отметим, что разность $s_1 - s_2$ должна быть целым числом. В самом деле, подставляя в (6) $\alpha = -1 = e^{\pi i}$, мы получим $e^{\pi(-n_1-m_1+n_2+m_2)i} = 1$. Следовательно, $-(n_1 + m_1) + (n_2 + m_2) = 2(s_1 - s_2)$ должно быть четным числом.

Однородные обобщенные функции рассматриваются в Добавлении, § 1. Там доказано, что для каждой пары комплексных чисел (s_1, s_2), разность которых — целое число, существует одна и притом только одна (с точностью до постоянного множителя) однородная обобщенная функция степени однородности $(s_1 - 1,\ s_2 - 1)$. Эта однородная функция в области $z \neq 0$ совпадает с функцией $Cz^{s_1-1}\bar{z}^{s_2-1}$, за исключением случая, когда $s_1, s_2 = 0, -1, -2, \ldots$ В этом случае однородная обобщенная функция степени однородности $(s_1 - 1,\ s_2 - 1)$ имеет вид $\delta^{(-s_1, -s_2)}(z, \bar{z})$ *).

*) Напомним, что через $\delta^{(-s_1, -s_2)}(z, \bar{z})$ мы условились обозначать частную производную $\dfrac{\partial^{-s_1-s_2}\delta(z, \bar{z})}{\partial z^{-s_1}\partial \bar{z}^{-s_2}}$.

Будем называть случай, когда числа $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$ и $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$ являются одновременно целыми отрицательными числами или нулями, *особым случаем* *). Мы получаем, таким образом, что в неособом случае имеет место равенство

$$(B_0, \omega) = \frac{i}{2}\int z^{s_1-1}\bar{z}^{s_2-1}\omega(z)\,dz\,d\bar{z}, \tag{7}$$

где интеграл при $\operatorname{Re}(s_1+s_2) < 0$ нужно понимать в смысле регуляризованного значения (см. Добавление, § 1).

Итак, *если* $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$ *не являются одновременно целыми отрицательными числами или нулями, то билинейный функционал, инвариантный относительно преобразований параллельного переноса и подобия, задается для каждой пары финитных функций* φ, ψ *формулой*

$$B(\varphi, \psi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int z^{s_1-1}\bar{z}^{s_2-1} \int \varphi(z+z_1)\psi(z_1)\,dz\,d\bar{z}\,dz_1\,d\bar{z}_1 =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (z_1-z_2)^{s_1-1}\left(\overline{z_1-z_2}\right)^{s_2-1} \varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2 \text{ **}). \tag{8}$$

Аналогично *задается инвариантный билинейный функционал и в случае, когда* $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$

---

*) Такое разделение на особый и неособый случаи сделано только по техническим соображениям, ради удобства изложения.

**) При $\operatorname{Re}(s_1+s_2) < 0$ интегралы нужно понимать в смысле регуляризованного значения. А именно, при $-m < \operatorname{Re}(s_1+s_2) < -m+1$ регуляризация интеграла (8) определяется следующим образом:

$$B(\varphi, \psi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int z^{s_1-1}\bar{z}^{s_2-1} \times$$
$$\times \int \psi(z_1)\left[\varphi(z+z_1) - \sum_{i+j=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(i,j)}(z_1)\,z^i\bar{z}^j}{i!\,j!}\right] dz\,d\bar{z}\,dz_1\,d\bar{z}_1 \tag{9}$$

(см. Добавление, § 1).

— целые отрицательные числа или нули, а именно,

$$B(\varphi, \psi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(-s_1, -s_2)}(z) \int \varphi(z+z_1)\psi(z_1)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz\,d\bar{z} =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(-s_1, -s_2)}(z_1-z_2)\,\varphi(z_1)\,\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2 =$$
$$= \frac{i}{2}\int \varphi^{(-s_1, -s_2)}(z)\,\psi(z)\,dz\,d\bar{z}. \tag{10}$$

В следующем пункте мы найдем условия инвариантности билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ относительно инверсий.

Пространство D_χ можно реализовать и как пространство *однородных* функций $f(z_1, z_2)$ от двух комплексных переменных степени однородности (n_1-1, n_2-1). Эти функции связаны с функциями $\varphi(z)$ следующим образом:

$$f(z_1, z_2) = z_2^{n_1-1}\bar{z}_2^{n_2-1}\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right).$$

Напишем выражение для билинейного функционала в однородных координатах z_1, z_2. Заменяя в формуле (8) z на $\frac{z_1}{z_2}$ и z' на $\frac{z_1'}{z_2'}$, мы получим

$$B(f_1, f_2) =$$
$$= \int_\Gamma \int_{\Gamma'} \left(z_1z_2' - z_1'z_2\right)^{s_1-1}\left(\overline{z_1z_2' - z_1'z_2}\right)^{s_2-1} f_1(z_1, z_2)\, f_2\left(z_1', z_2'\right)\omega\omega', \tag{11}$$

где

$$\omega = \frac{i}{2}(z_1\,dz_2 - z_2\,dz_1)(\bar{z}_1\,d\bar{z}_2 - \bar{z}_2\,d\bar{z}_1),$$
$$\omega' = \frac{i}{2}\left(z_1'\,dz_2' - z_2'\,dz_1'\right)\left(\bar{z}_1'\,d\bar{z}_2' - \bar{z}_2'\,d\bar{z}_1'\right),$$

Γ и Γ' — контуры, пересекающиеся по одному разу с каждой прямой, проходящей через начало координат. (Точный смысл этого требования неоднократно разъяснялся в гл. II, см., например, стр. 124; см. также Добавление, § 2, п. 5.)

Заметим, что выражение $z_1z_2' - z_1'z_2$ является инвариантом пары точек (z_1, z_2) и $\left(z_1', z_2'\right)$ относительно группы линейных преобразований

$$z_1 \to \alpha z_1 + \gamma z_2, \quad z_2 \to \beta z_1 + \delta z_2, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{12}$$

Было бы интересно получить формулу (11) непосредственно, рассматривая пространства D_{χ_1} и D_{χ_2} как пространства однородных функций.

3. Условия инвариантности билинейного функционала относительно инверсий. Теперь мы выясним, при каких дополнительных условиях билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ инвариантен также относительно инверсий $z \to -\frac{1}{z}$. В этом пункте мы рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$ не является целым отрицательным или нулем. Случай, когда $s_1, s_2 = 0, -1, -2, \ldots$, будет разобран отдельно в п. 5.

Выясним сначала, для каких $\chi_1 = (n_1, n_2)$ и $\chi_2 = (m_1, m_2)$ может существовать инвариантный билинейный функционал.

Предположим, что инвариантный билинейный функционал существует. Тогда, как было показано в п. 2, он задается для финитных функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ формулой

$$B(\varphi, \psi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (z_1 - z_2)^{s_1-1} \overline{(z_1 - z_2)}^{s_2-1} \varphi(z_1)\psi(z_2)\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2. \quad (1)$$

Установим, какие ограничения на числа s_1, s_2 налагает инвариантность функционала $B(\varphi, \psi)$ относительно операторов $T_{\chi_1}(g_0)$, $T_{\chi_2}(g_0)$, отвечающих преобразованию инверсии $z \to -\frac{1}{z}$. Преобразование инверсии задается матрицей $g_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$. Операторы $T_{\chi_1}(g_0)$ и $T_{\chi_2}(g_0)$ имеют вид

$$T_{\chi_1}(g_0)\varphi(z) = z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z}\right), \quad (2)$$

$$T_{\chi_2}(g_0)\psi(z) = z^{m_1-1}\bar{z}^{m_2-1}\psi\left(-\frac{1}{z}\right). \quad (2')$$

Поскольку преобразования (2) и (2′) переводят, вообще говоря, финитные функции в нефинитные, то мы должны сузить класс рассматриваемых функций. Именно, потребуем, чтобы функции φ и ψ обращались в нуль в некоторой окрестности точки $z = 0$. Из этого предположения следует, что $T_{\chi_1}(g_0)\varphi$ и $T_{\chi_2}(g_0)\psi$ также являются финитными функциями. Кроме того, будем предполагать, что носители функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не имеют общих точек. Это значит, что существуют непересекающиеся компактные множества A_1 и A_2, такие, что $\varphi(z) = 0$ вне множества A_1 и $\psi(z) = 0$ вне множества A_2.

Условие инвариантности билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ относительно операторов $T_{\chi_1}(g_0)$ и $T_{\chi_2}(g_0)$ имеет следующий вид:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (z_1 - z_2)^{s_1-1} \overline{(z_1 - z_2)}^{s_2-1} \varphi(z_1)\psi(z_2)\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (z_1 - z_2)^{s_1-1} \overline{(z_1 - z_2)}^{s_2-1} \times$$
$$\times z_1^{n_1-1}\bar{z}_1^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z_1}\right) z_2^{m_1-1}\bar{z}_2^{m_2-1}\psi\left(-\frac{1}{z_2}\right) dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2, \quad (3)$$

где $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$. Так как, по предположению, носители функций φ и ψ не пересекаются, то оба написанных интеграла сходятся в обычном смысле.

Преобразуем равенство (3), сделав в правой части равенства подстановку $z_1 = -\frac{1}{w_1}$, $z_2 = -\frac{1}{w_2}$. Мы получим

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (z_1 - z_2)^{s_1-1} \overline{(z_1 - z_2)}^{s_2-1} \varphi(z_1)\psi(z_2)\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2 =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (w_1 - w_2)^{s_1-1} \overline{(w_1 - w_2)}^{s_2-1} w_1^{-s_1-n_1}\bar{w}_1^{-s_2-n_2}\varphi(w_1) \times$$
$$\times w_2^{-s_1-m_1}\bar{w}_2^{-s_2-m_2}\psi(w_2)\, dw_1\, d\bar{w}_1\, dw_2\, d\bar{w}_2. \quad (3')$$

Здесь использовано, что число $n_1 - n_2 + m_1 - m_2$ — четно (см. стр. 219). Написанное равенство возможно лишь при условии, что

$$-s_1 - n_1 = 0, \qquad -s_2 - n_2 = 0,$$
$$-s_1 - m_1 = 0, \qquad -s_2 - m_2 = 0.$$

Так как $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$, то мы получаем отсюда $n_1 = m_1 = -s_1$, $n_2 = m_2 = -s_2$.

Напомним, что, по предположению, числа s_1, s_2 не являются целыми отрицательными числами или нулями. Тем самым $n_1 \neq 0, 1, \ldots$ или $n_2 \neq 0, 1, \ldots$

Итак, доказано следующее утверждение.

Пусть $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(n_1, n_2)$, *и* $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(m_1, m_2)$ — *два представления группы* G, *причем* $s_1=-\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2=-\frac{n_2+m_2}{2}$ *не являются целыми отрицательными числами или нулями. Тогда билинейный функционал* $B(\varphi, \psi)$, *инвариантный относительно представлений* $T_{\chi_1}(g)$ *и* $T_{\chi_2}(g)$, *может существовать лишь при условии, что* $\chi_1=\chi_2$, *то есть* $n_1=m_1$, $n_2=m_2$. *Для финитных функций* $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$ *этот функционал (если он существует) задается следующим образом:*

$$B(\varphi, \psi)=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int (z_1-z_2)^{-n_1-1}\overline{(z_1-z_2)}^{-n_2-1}\varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2. \tag{4}$$

(*При* $\operatorname{Re}(n_1+n_2)>0$ *интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения.*) *)

4. Достаточность условий существования инвариантного билинейного функционала (для неособого случая). Покажем теперь, что найденные необходимые условия существования инвариантного билинейного функционала для случая, когда s_1 или $s_2\neq 0, -1, \ldots$, также и достаточны. Именно, нам нужно доказать, что в пространстве D_χ, где $n_1\neq 0, 1, \ldots$, или $n_2\neq 0, 1, \ldots$, существует инвариантный билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$, то есть такой билинейный функционал, что для любых функций φ и ψ из D_χ и любого элемента g группы G выполняется равенство

$$B(\varphi, \psi)=B(T_\chi(g)\varphi, T_\chi(g)\psi).$$

В п. 3 было показано, что если такой функционал существует, то для финитных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ он должен задаваться формулой

$$B(\varphi, \psi)=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int (z_1-z_2)^{-n_1-1}\overline{(z_1-z_2)}^{-n_2-1}\times \varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2. \tag{1}$$

*) См. сноску на стр. 220.

Мы докажем, что *функционал* $B(\varphi, \psi)$, *определенный для финитных функций по формуле* (1), *продолжается до непрерывного билинейного функционала на всем пространстве* D_χ *и что полученный в результате функционал инвариантен.*

Доказательство этого простое, но слегка громоздкое. При желании его можно пропустить и ограничиться формулировкой теоремы 1 в конце пункта.

Сначала докажем следующую лемму.

Если $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$ — *финитные функции, а* g — *такой элемент группы* G, *что функции* $T_\chi(g)\varphi(z)$ *и* $T_\chi(g)\psi(z)$ *также финитны, то для функционала* $B(\varphi, \psi)$, *определенного формулой* (1), *справедливо равенство*

$$B(\varphi, \psi)=B(T_\chi(g)\varphi, T_\chi(g)\psi). \tag{2}$$

В развернутом виде равенство (2) записывается следующим образом:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2\int (z_1-z_2)^{-n_1-1}\overline{(z_1-z_2)}^{-n_2-1}\varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2=$$
$$=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int (z_1-z_2)^{-n_1-1}\overline{(z_1-z_2)}^{-n_2-1}\times$$
$$\times(\beta z_1+\delta)^{n_1-1}\overline{(\beta z_1+\delta)}^{n_2-1}\varphi\left(\frac{\alpha z_1+\gamma}{\beta z_1+\delta}\right)\times$$
$$\times(\beta z_2+\delta)^{n_1-1}\overline{(\beta z_2+\delta)}^{n_2-1}\psi\left(\frac{\alpha z_2+\gamma}{\beta z_2+\delta}\right)dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2. \tag{3}$$

Обе части равенства (3) являются аналитическими функциями от n_1, n_2 *). Поэтому достаточно доказать это равенство для случая, когда $\operatorname{Re}(n_1+n_2)<0$. В этом случае, в силу поставленных условий на функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и элемент g, интегралы в обеих частях равенства (3) абсолютно сходятся. Сделаем в правой части равенства (3) подстановку $\frac{\alpha z_1+\gamma}{\beta z_1+\delta}=w_1$, $\frac{\alpha z_2+\gamma}{\beta z_2+\delta}=w_2$. После несложных преобразований

*) Точнее, они являются аналитическими функциями от $\lambda=n_1+n_2$ при фиксированном (целом) значении n_1-n_2.

получим, что интеграл, стоящий в правой части, равен

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (w_1 - w_2)^{-n_1-1} \overline{(w_1 - w_2)}^{-n_2-1} \times \\ \times \varphi(w_1)\psi(w_2)\,dw_1\,d\overline{w}_1\,dw_2\,d\overline{w}_2,$$

то есть совпадает с интегралом, стоящим в левой части. Тем самым равенство (3) доказано.

Таким образом, определенный нами для финитных функций функционал $B(\varphi, \psi)$ удовлетворяет соотношению инвариантности, если функции $T_{\chi_1}(g)\varphi(z)$ и $T_{\chi_2}(g)\psi(z)$ также финитны.

Распространим теперь функционал $B(\varphi, \psi)$ на все пространство D_χ с сохранением свойства инвариантности. Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции из пространства D_χ. Предположим сначала, что существует открытое множество Ω, в котором обе функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ равны нулю. Тогда найдется такой элемент g_0 группы G, что функции $T_{\chi_1}(g_0)\varphi(z)$ и $T_{\chi_1}(g_0)\psi(z)$ финитны $\Big($именно, элемент $g_0 = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ выбирается так, чтобы соответствующее ему дробно-линейное преобразование $w = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}$ переводило некоторую точку области Ω в бесконечно удаленную точку$\Big)$. Значение билинейного функционала для функций φ и ψ определим следующей формулой:

$$B(\varphi, \psi) = B(T_\chi(g_0)\varphi, T_\chi(g_0)\psi).$$

Это определение не зависит от выбора элемента g_0. В самом деле, пусть g_1 — другой элемент группы G, такой, что функции $T_\chi(g_1)\varphi(z)$ и $T_\chi(g_1)\psi(z)$ финитны. Тогда преобразование $T_\chi(g_0 g_1^{-1})$ переводит финитные функции $T_\chi(g_1)\varphi(z)$ и $T_\chi(g_1)\psi(z)$ в финитные же функции $T_\chi(g_0)\varphi(z)$ и $T_\chi(g_0)\psi(z)$, и потому справедливо равенство

$$B(T_\chi(g_1)\varphi, T_\chi(g_1)\psi) = B(T_\chi(g_0)\varphi, T_\chi(g_0)\psi).$$

Таким образом, мы распространили функционал $B(\varphi, \psi)$ на всевозможные пары функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ из D_χ, обращающихся в нуль в одной и той же открытой области. Полученный таким путем расширенный функционал обладает,

очевидно, свойством билинейности. Именно, если функции φ_1, φ_2, ψ обращаются в нуль в некоторой области Ω, то

$$B(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1 B(\varphi_1, \psi) + a_2 B(\varphi_2, \psi).$$

Аналогично, если функции φ, ψ_1, ψ_2 обращаются в нуль в некоторой области Ω, то

$$B(\varphi, b_1\psi_1 + b_2\psi_2) = b_1 B(\varphi, \psi_1) + b_2 B(\varphi, \psi_2).$$

Очевидно также, что этот функционал инвариантен относительно всех операторов представления $T_\chi(g)$.

Нам осталось определить функционал $B(\varphi, \psi)$ для любых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из пространства D_χ. Выберем на комплексной плоскости три области Ω_1, Ω_2, Ω_3, удовлетворяющие следующим требованиям:

1) Любые две из областей Ω_1, Ω_2, Ω_3 имеют непустое пересечение.

2) Не существует точек, принадлежащих одновременно замыканиям областей Ω_1, Ω_2, Ω_3.

Очевидно тогда, что любую функцию $\varphi(z)$ из D_χ можно разбить на слагаемые

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z)$$

такие, что $\varphi_i(z)$ обращается в нуль на Ω_i ($i = 1, 2, 3$), и притом все слагаемые снова принадлежат пространству D_χ.

Пусть φ и ψ — произвольные функции из D_χ. Рассмотрим разложения этих функций

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z),$$
$$\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z) + \psi_3(z).$$

Для любой пары функций $\varphi_i(z)$ и $\psi_j(z)$ функционал $B(\varphi_i, \psi_j)$ нами уже определен, поскольку эти функции обращаются в нуль в некоторой области (именно в пересечении областей Ω_i и Ω_j). Определим тогда значение функционала $B(\varphi, \psi)$ следующей формулой:

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{i, j=1}^{3} B(\varphi_i, \psi_j).$$

Нетрудно показать, что значение $B(\varphi, \psi)$ не зависит от способа разбиения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на слагаемые, а также, что $B(\varphi, \psi)$ является инвариантным билинейным функционалом.

Доказательство достаточности полученных в п. 2 условий закончено. Мы доказали, таким образом, следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть представления*

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(z) = (\beta z+\delta)^{n_1-1}\overline{(\beta z+\delta)}^{n_2-1}\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right) \qquad (4)$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\psi(z) = (\beta z+\delta)^{m_1-1}\overline{(\beta z+\delta)}^{m_2-1}\psi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right) \qquad (4')$$

группы G таковы, что хотя бы одно из чисел $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$ *не является целым отрицательным или нулем. Для того чтобы существовал непрерывный билинейный функционал* $B(\varphi, \psi)$, *инвариантный относительно представлений* $T_{\chi_1}(g)$ *и* $T_{\chi_2}(g)$, *необходимо и достаточно, чтобы было* $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, *то есть* $\chi_1 = \chi_2 = \chi$. *При этом билинейный функционал* $B(\varphi, \psi)$ *задается для финитных функций* $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$ *равенством*

$$B(\varphi, \psi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (z_1-z_2)^{-n_1-1}\overline{(z_1-z_2)}^{-n_2-1}\times$$
$$\times\varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2. \qquad (5)$$

(*При* $\mathrm{Re}(n_1+n_2)>0$ *интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения.*) *Для нефинитных функций функционал* $B(\varphi, \psi)$ *определяется на основании условий билинейности и инвариантности.*

Отметим, что если $\mathrm{Re}(n_1+n_2)<0$, то формула (5) задает значение билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ для *всех* функций из пространства D_χ. Это вытекает из того, что при $\mathrm{Re}(n_1+n_2)<0$ интеграл (5) сходится в обычном смысле для любых функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ из пространства D_χ *).

5. Условия существования инвариантного билинейного функционала для случая, когда $s_1, s_2 = 0, -1, -2, \ldots$ В пп. 3 и 4 мы искали инвариантные билинейные функционалы для пары пространства D_{χ_1}, $\chi_1=(n_1, n_2)$, и D_{χ_2}, $\chi_2 = (m_1, m_2)$, в случае, когда $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$ и $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$ не являются целыми отрицательными числами или нулями. Теперь мы изучим случай, когда $s_1, s_2 = 0, -1, -2, \ldots$

*) В сходимости интеграла удобнее всего убедиться, записав выражение для $B(\varphi, \psi)$ в однородных координатах (см. формулу (11) п. 2).

В п. 2 был найден билинейный функционал в подпространстве финитных функций, инвариантный относительно операторов $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$, отвечающих преобразованиям параллельного переноса и подобия в комплексной плоскости. Этот билинейный функционал имеет следующий вид:

$$B(\varphi, \psi) =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(-s_1, -s_2)}(z_1-z_2)\varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2, \qquad (1)$$

где $\delta^{(-s_1, -s_2)}(z) = \frac{\partial^{-s_1-s_2}\delta(z)}{\partial z^{-s_1}\,\partial\bar z^{-s_2}}$.

Выясним теперь, при каких дополнительных условиях на χ_1, χ_2 этот функционал $B(\varphi, \psi)$ инвариантен относительно операторов $T_{\chi_1}(g_0)$, $T_{\chi_2}(g_0)$, отвечающих преобразованию инверсии $z \to -\frac{1}{z}$. Поскольку преобразование инверсии задается матрицей $g_0 = \begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{Vmatrix}$, то операторы $T_{\chi_1}(g_0)$, $T_{\chi_2}(g_0)$ имеют следующий вид:

$$T_{\chi_1}(g_0)\varphi(z) = z^{n_1-1}\bar z^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z}\right),$$
$$T_{\chi_2}(g_0)\psi(z) = z^{m_1-1}\bar z^{m_2-1}\psi\left(-\frac{1}{z}\right).$$

Будем предполагать, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не только финитны, но и обращаются в нуль в некоторой окрестности точки $z=0$. Тогда функции $T_{\chi_1}(g_0)\varphi(z)$ и $T_{\chi_2}(g_0)\psi(z)$, где $g_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, также финитны и мы имеем

$$B(T_{\chi_1}(g_0)\varphi(z),\ T_{\chi_2}(g_0)\psi(z)) =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(-s_1, -s_2)}(z_1-z_2)\, z_1^{n_1-1}\bar z_1^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z_1}\right)\times$$
$$\times z_2^{m_1-1}\bar z_2^{m_2-1}\psi\left(-\frac{1}{z_2}\right)dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2.$$

Таким образом, условие инвариантности функционала $B(\varphi, \psi)$ относительно преобразования инверсии записывается в следующем виде:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(-s_1, -s_2)}(z_1 - z_2)\varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2 = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(-s_1, -s_2)}(z_1 - z_2)\, z_1^{n_1-1}\bar{z}_1^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z_1}\right) \times \\ \times z_2^{m_1-1}\bar{z}_2^{m_2-1}\psi\left(-\frac{1}{z_2}\right) dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2. \quad (2)$$

Здесь $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные финитные функции, равные нулю в некоторой окрестности точки $z=0$. Сделаем в правой части этого равенства подстановку $w_1 = -\frac{1}{z_1}$, $w_2 = -\frac{1}{z_2}$ и примем во внимание, что

$$(-1)^{n_1-n_2+m_1-m_2} = (-1)^{-2(s_1-s_2)} = 1.$$

Мы получим

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(-s_1, -s_2)}(z_1 - z_2)\varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2 = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(-s_1, -s_2)}\left(\frac{w_1 - w_2}{w_1 w_2}\right) w_1^{-n_1-1}\bar{w}_1^{-n_2-1} \times \\ \times w_2^{-m_1-1}\bar{w}_2^{-m_2-1}\varphi(w_1)\psi(w_2)\,dw_1\,d\bar{w}_1\,dw_2\,d\bar{w}_2. \quad (3)$$

Интеграл в правой части равенства можно упростить, используя следующее удобное соотношение для δ-функции.

Пусть $P(w) \equiv P(w_1, \ldots, w_n)$ — целая аналитическая функция в n-мерном комплексном пространстве, такая, что поверхность $P=0$ не имеет особых точек, $a(w)$ — бесконечно дифференцируемая функция, нигде не обращающаяся в нуль. Тогда

$$\delta^{(k, l)}(aP) = a^{-k-1}\bar{a}^{-l-1}\delta^{(k, l)}(P) \quad (4)$$

(см. Добавление, § 2, п. 1). Применим эту формулу к случаю, когда $P = w_1 - w_2$, $a = \frac{1}{w_1 w_2}$. Казалось бы, этого нельзя делать, поскольку функция $a = \frac{1}{w_1 w_2}$ имеет особенность при $w_1 = 0$ и при $w_2 = 0$. Вспомним однако, что стоящая под знаком интеграла в (3) функция $\varphi(w_1)\psi(w_2)$, по предположению, равна нулю в окрестности прямых $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$; следовательно, поведение функции $a(w)$ в окрестности прямых $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$ для нас несущественно. Итак, мы можем заменить в (3) функцию $\delta^{(-s_1, -s_2)}\left(\frac{w_1 - w_2}{w_1 w_2}\right)$ на $(w_1 w_2)^{-s_1+1}\overline{(w_1 w_2)}^{-s_2+1}\delta^{(-s_1, -s_2)}(w_1 - w_2)$. В результате получим

$$\frac{i}{2}\int \varphi^{(-s_1, -s_2)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z} = \frac{i}{2}\int w^{-s_1-m_1}\bar{w}^{-s_2-m_2}\psi(w) \times \\ \times \left[w^{-s_1-n_1}\bar{w}^{-s_2-n_2}\varphi(w)\right]^{(-s_1, -s_2)} dw\,d\bar{w}. \quad (5)$$

Очевидно, что это равенство может выполняться лишь при условии, что

$$\varphi^{(-s_1, -s_2)}(w) = w^{-s_1-m_1}\bar{w}^{-s_2-m_2}\left[w^{-s_1-n_1}\bar{w}^{-s_2-n_2}\varphi(w)\right]^{(-s_1, -s_2)}. \quad (6)$$

Выясним, для каких показателей имеет место равенство (6). Выражение, стоящее в правой части равенства, может быть представлено в виде суммы

$$\sum_{k=0}^{-s_1}\sum_{l=0}^{-s_2} c_{k, l}\, w^{\alpha_k}\bar{w}^{\beta_l}\varphi^{(k, l)}(w).$$

По условию эта сумма должна состоять из одного слагаемого $\varphi^{(-s_1, -s_2)}(w)$. Очевидно, что если $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, то это возможно лишь при условии, что $-s_1 - n_1 = 0$, $-s_2 - n_2 = 0$. Если $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$, то это возможно лишь при условии, что $-s_2 - n_2 = 0$. Аналогично, если $s_1 \neq 0$, $s_2 = 0$, то это возможно лишь при условии, что $-s_1 - n_1 = 0$.

Итак, должно выполняться по крайней мере **одно из** следующих соотношений:

1) $s_1 = -n_1$, $s_2 = -n_2$,
2) $s_1 = 0$, $s_2 = 0$,
3) $s_1 = -n_1$, $s_2 = 0$,
4) $s_1 = 0$, $s_2 = -n_2$.

Принимая во внимание, что $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$, получаем следующий результат:

Пусть $\chi_1 = (n_1, n_2)$, $\chi_2 = (m_1, m_2)$, *причем* $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$ *и* $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$ — *целые отрицательные числа или нули. Для того чтобы существовал билинейный функционал* $B(\varphi, \psi)$, *инвариантный относительно представлений* $T_{\chi_1}(g)$ *и* $T_{\chi_2}(g)$, *необходимо, чтобы выполнялось одно из следующих условий*:

1) $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, *причем* $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$
2) $n_1 = -m_1$, $n_2 = -m_2$,
3) $n_1 = m_1$, $n_2 = -m_2$, *причем* $n_1 = 1, 2, \ldots$
4) $n_1 = -m_1$, $n_2 = m_2$, *причем* $n_2 = 1, 2, \ldots$

Попутно мы установили, что инвариантный билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ (если он существует) задается в каждом из этих случаев следующими формулами:

Если $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, где $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int \varphi^{(n_1, n_2)}(z) \psi(z)\, dz\, d\bar{z}. \tag{7}$$

Если $n_1 = -m_1$, $n_2 = -m_2$, то

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int \varphi(z) \psi(z)\, dz\, d\bar{z}. \tag{8}$$

Если $n_1 = m_1$, $n_2 = -m_2$, где $n_1 = 1, 2, \ldots$, то

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int \varphi^{(n_1, 0)}(z) \psi(z)\, dz\, d\bar{z}. \tag{9}$$

Если $n_1 = -m_1$, $n_2 = m_2$, где $n_2 = 1, 2, \ldots$, то

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int \varphi^{(0, n_2)}(z) \psi(z)\, dz\, d\bar{z} \tag{10}$$

(здесь функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ всюду предполагаются финитными).

Таким образом, мы не только нашли, при каких значениях n_1, n_2, m_1, m_2 могут существовать инвариантные билинейные функционалы, но и установили, какой вид они должны иметь для финитных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Теперь докажем, что полученные условия существования инвариантного билинейного функционала являются также достаточными.

Сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда $n_1 = -m_1$, $n_2 = -m_2$. В этом случае функционал $B(\varphi, \psi)$ должен задаваться *для финитных функций* $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ формулой

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int \varphi(z) \psi(z)\, dz\, d\bar{z}. \tag{11}$$

Покажем, что интеграл (11) сходится для любых функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, принадлежащих соответственно пространствам D_{χ_1}, $\chi_1 = (n_1, n_2)$, и D_{χ_2}, $\chi_2 = (m_1, m_2)$. В самом деле, для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ при $z \to \infty$ имеют место асимптотические соотношения

$$\varphi(z) \sim C_1 z^{n_1 - 1} \bar{z}^{n_2 - 1}$$

и

$$\psi(z) \sim C_2 z^{m_1 - 1} \bar{z}^{m_2 - 1} = C_2 z^{-n_1 - 1} \bar{z}^{-n_2 - 1}.$$

Следовательно, $\varphi(z)\psi(z) \sim C_1 C_2 |z|^{-4}$, а потому интеграл (11) сходится.

Докажем теперь инвариантность функционала $B(\varphi, \psi)$, определенного формулой (11). Используя равенства $n_1 = -m_1$, $n_2 = -m_2$, мы получаем, что для любого $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$

$$B(T_{\chi_1}(g)\varphi, T_{\chi_2}(g)\psi) =$$
$$= \frac{i}{2} \int T_{\chi_1}(g)\varphi(z)\, T_{\chi_2}(g)\psi(z)\, dz\, d\bar{z} =$$
$$= \frac{i}{2} \int (\beta z + \delta)^{-2} \overline{(\beta z + \delta)}^{-2} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) \psi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) dz\, d\bar{z}.$$

Подстановкой $\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta} = w$ этот интеграл приводится к виду $\frac{i}{2} \int \varphi(w) \psi(w)\, dw\, d\bar{w}$. Таким образом,

$$B(T_{\chi_1}(g)\varphi, T_{\chi_2}(g)\psi) = B(\varphi, \psi),$$

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай, когда $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$ и $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае инвариантный билинейный функционал (если он существует) задается для финитных функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ формулой

$$B(\varphi, \psi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(n_1, n_2)}(z_1 - z_2)\,\varphi(z_1)\,\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2 = \\ = \frac{i}{2} \int \varphi^{(n_1, n_2)}(z)\,\psi(z)\,dz\,d\bar{z}. \quad (12)$$

Покажем, что интеграл (12) сходится для *любых* функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, принадлежащих пространству D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$. В самом деле, функция $\varphi(z)$ разлагается при $z \to \infty$ в асимптотический ряд следующего вида:

$$\varphi(z) \sim z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1} \sum_{j,\,k=0}^{\infty} a_{jk} z^{-j}\bar{z}^{-k}$$

(см. (6) п. 2 § 2). Поскольку n_1, n_2 — целые положительные числа, то для производной $\varphi^{(n_1, n_2)}(z)$ мы получаем отсюда следующую асимптотику:

$$\varphi^{(n_1, n_2)}(z) \sim C_1 z^{-n_1-1}\bar{z}^{-n_2-1}.$$

Так как, с другой стороны, $\psi(z) \sim C_2 z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}$, то $\varphi^{(n_1, n_2)}(z)\,\psi(z) \sim C_1 C_2 |z|^{-4}$. Следовательно, интеграл (12) сходится.

Поэтому формула (12) определяет функционал $B(\varphi, \psi)$ для любых φ и ψ из D_χ.

Покажем, что функционал $B(\varphi, \psi)$ инвариантен, то есть

$$B(T_\chi(g)\varphi,\ T_\chi(g)\psi) = B(\varphi, \psi). \quad (13)$$

В п. 2 мы уже доказали это утверждение для параллельных переносов и подобий. Нам остается доказать его для инверсии $T_\chi(g_0)\varphi(z) = z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z}\right) \equiv \hat{\varphi}(z)$, где $g_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, то есть доказать, что

$$B(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \equiv B(T_\chi(g_0)\varphi,\ T_\chi(g_0)\psi) = B(\varphi, \psi). \quad (13')$$

По определению функционала $B(\varphi, \psi)$ имеем

$$B(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(n_1, n_2)}(z_1 - z_2)\, z_1^{n_1-1}\bar{z}_1^{n_2-1}\varphi\left(-\frac{1}{z_1}\right) \times \\ \times z_2^{n_1-1}\bar{z}_2^{n_2-1}\psi\left(-\frac{1}{z_2}\right) dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2. \quad (14)$$

Пусть сперва φ и ψ финитны и имеют финитные инверсии $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ (иначе говоря, φ и ψ равны нулю в окрестности точки $z = 0$). Сделаем в интеграле (14) подстановку $w_1 = -\frac{1}{z_1}$, $w_2 = -\frac{1}{z_2}$. Поскольку $\varphi(w_1)\psi(w_2)$ равно нулю в некоторой окрестности прямых $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$, получим

$$B(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(n_1, n_2)}\left(\frac{w_1 - w_2}{w_1 w_2}\right) w_1^{-n_1-1}\bar{w}_1^{-n_2-1}\varphi(w_1) \times \\ \times w_2^{-n_1-1}\bar{w}_2^{-n_2-1}\psi(w_2)\,dw_1\,d\bar{w}_1\,dw_2\,d\bar{w}_2 = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \delta^{(n_1, n_2)}(w_1 - w_2)\,\varphi(w_1)\,\psi(w_2)\,dw_1\,d\bar{w}_1\,dw_2\,d\bar{w}_2 = \\ = B(\varphi, \psi). \quad (15)$$

(Мы воспользовались соотношением (4) на стр. 230.) Итак, равенство (13′) доказано, когда φ, ψ, $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ финитны.

Общий случай легко сводится к рассмотренному. Финитные функции с финитными инверсиями не образуют всюду плотного множества в D_χ. Тем не менее, для произвольной пары функций φ и ψ из D_χ можно с любой степенью точности одновременно приблизить значения $B(\varphi, \psi)$ и $B(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ значениями $B(\varphi_1, \psi_1)$ и $B(\hat{\varphi}_1, \hat{\psi}_1)$, где φ_1 и ψ_1 — финитные функции, такие, что $\hat{\varphi}_1$ и $\hat{\psi}_1$ тоже финитны. Так как $B(\varphi_1, \psi_1) = B(\hat{\varphi}_1, \hat{\psi}_1)$, то равенство (13′) доказано.

Аппроксимирующие функции φ_1 и ψ_1 получаются «сглаживанием к нулю» функций φ и ψ в окрестностях точек $z = 0$ и $z = \infty$. При этом, поскольку в формулу (12) входит производная функции φ, следует производить сглаживание функции φ в окрестности, где $\psi_1(z)$ уже равна нулю.

Тем самым инвариантность функционала $B(\varphi, \psi)$ доказана.

Совершенно аналогично рассматриваются случаи, когда $n_1 = m_1$, $n_2 = -m_2$, $n_1 = 1, 2, \ldots$ и когда $n_1 = -m_1$, $n_2 = m_2$, $n_2 = 1, 2, \ldots$

Итак, нами получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть представления*

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{n_1-1}\,\overline{(\beta z + \delta)}^{n_2-1}\varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\psi(z) = (\beta z + \delta)^{m_1-1}\,\overline{(\beta z + \delta)}^{m_2-1}\psi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right),$$

таковы, что $s_1 = -\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2 = -\frac{n_2+m_2}{2}$ — *целые отрицательные числа или нули. Для того чтобы существовал билинейный функционал* $B(\varphi, \psi)$, *инвариантный относительно представлений* $T_{\chi_1}(g)$ *и* $T_{\chi_2}(g)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий*:

1) $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, *где* $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots$,
2) $n_1 = -m_1$, $n_2 = -m_2$,
3) $n_1 = m_1$, $n_2 = -m_2$, *где* $n_1 = 1, 2, \ldots$,
4) $n_1 = -m_1$, $n_2 = m_2$, *где* $n_2 = 1, 2, \ldots$ *).

Инвариантный билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ *задается в каждом из этих случаев следующими формулами*:

Если $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, *причем* $n_1 = 0, 1, \ldots$, $n_2 = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2}\int \varphi^{(n_1, n_2)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}. \tag{16}$$

Если $n_1 = -m_1$, $n_2 = -m_2$, *то*

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}. \tag{17}$$

Если $n_1 = m_1$, $n_2 = -m_2$, *где* $n_1 = 1, 2, \ldots$, *то*

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2}\int \varphi^{(n_1, 0)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}. \tag{18}$$

Если $n_1 = -m_1$, $n_2 = m_2$, *где* $n_2 = 1, 2, \ldots$, *то*

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2}\int \varphi^{(0, n_2)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}. \tag{19}$$

6. Вырождение инвариантных билинейных функционалов **). Говорят, что билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$, определенный на паре пространств D_1 и D_2, вырождается на подпространстве $E_1 \subset D_1$, если $B(\varphi, \psi) = 0$ для любых $\varphi \in E_1$ и $\psi \in D_2$.

*) Заметим, что так как $n_1 - n_2$ — целое число, то в случаях 3) и 4) все числа n_1, n_2, m_1, m_2 являются целыми.

**) Этот и следующий пункты не нужны для дальнейшего, и читатель может их при желании пропустить.

Аналогично определяется вырождение билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ на подпространстве $E_2 \subset D_2$.

Мы покажем здесь, что инвариантные билинейные функционалы, построенные в п. 4 и 5, могут иногда вырождаться.

Сначала рассмотрим случай, когда $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, причем $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае инвариантный билинейный функционал задается формулой

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2}\int \varphi^{(n_1, n_2)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}. \tag{1}$$

Очевидно, что $B(\varphi, \psi) = 0$, если $\varphi(z)$ — многочлен вида

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1} a_{jk} z^j \bar{z}^k$$

(мы видели уже в п. 1 § 3, что такие многочлены принадлежат пространству D_{χ_1}, $\chi_1 = (n_1, n_2)$, и образуют в D_{χ_1} инвариантное подпространство E_{χ_1}).

Итак, *если* $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$, *то инвариантный билинейный функционал* $B(\varphi, \psi)$ *в пространстве* D_{χ_1}, $\chi_1 = (n_1, n_2)$ *вырождается на конечномерном подпространстве* E_{χ_1}.

Рассмотрим теперь случай, когда $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, и n_1, n_2 не являются целыми неотрицательными числами. В этом случае инвариантный билинейный функционал задается формулой

$$B'(\varphi, \psi) = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (z_1 - z_2)^{-n_1-1}\overline{(z_1 - z_2)}^{-n_2-1}\varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2.$$

Отсюда очевидно, что *если дополнительно* $n_1, n_2 = -1, -2, \ldots$, *то инвариантный билинейный функционал* $B(\varphi, \psi)$ *в пространстве* D_{χ_1}, $\chi_1 = (n_1, n_2)$, *обращается в нуль для всех таких функций* $\varphi(z)$, *моменты которых*

$$b_{jk} = \frac{i}{2}\int z^j \bar{z}^k \varphi(z)\,dz\,d\bar{z}$$

равны нулю при $j = 0, 1, \ldots, -n_1 - 1$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, -n_2 - 1$.

Мы уже отмечали в п. 1 § 3, что такие функции образуют в D_{χ_1} инвариантное бесконечномерное подпространство F_{χ_1}. Фактор-пространство D_{χ_1}/F_{χ_1} имеет конечную размерность $n_1 n_2$.

Вырождение билинейного функционала имеет место также в следующих двух случаях:

а) $n_1=m_1$, $n_2=-m_2$, где n_1, $n_2=1, 2, \ldots$,

б) $n_1=-m_1$, $n_2=m_2$, где n_1, $n_2=1, 2, \ldots$

В первом из этих случаев инвариантный билинейный функционал задается формулой

$$B(\varphi, \psi)=\frac{i}{2}\int \varphi^{(n_1, 0)}(z)\psi(z)\,dz\,d\bar{z}. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что $B(\varphi, \psi)$ обращается в нуль для функций φ вида

$$\varphi(z)=\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1}a_{jk}z^j\bar{z}^k.$$

Эти функции $\varphi(z)$ образуют в D_{χ_1} конечномерное инвариантное подпространство E_{χ_1}. Аналогичная ситуация имеет место во втором случае.

7. Условно инвариантные билинейные функционалы. Рассмотрим представление в пространстве D_χ, $\chi=(n_1, n_2)$, где n_1, n_2 — целые числа одного и того же знака (отличные от нуля). Как мы уже знаем, в этом случае в пространстве D_χ имеется инвариантный билинейный функционал, причем этот функционал вырождается на инвариантном подпространстве пространства D_χ. Мы покажем сейчас, что в этом инвариантном подпространстве можно в свою очередь ввести билинейный функционал, инвариантный относительно представления $T_\chi(g)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $n_1, n_2=-1, -2, \ldots$ Тогда инвариантный билинейный функционал в D_χ имеет вид

$$B(\varphi, \psi)=$$
$$=\frac{i}{2}\int (z_1-z_2)^{-n_1-1}\overline{(z_1-z_2)}^{-n_2-1}\varphi(z_1)\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2. \qquad (1)$$

Он вырождается на подпространстве F_χ функций φ, моменты b_{ks} которых равны нулю при $0\leqslant k\leqslant -n_1-1$, $0\leqslant s\leqslant -n_2-1$.

Будем искать инвариантный билинейный функционал на подпространстве F_χ. Предварительно заметим следующее.

При отыскании инвариантного функционала (см. п. 2) мы использовали соотношение однородности

$$B(\varphi(z), \psi(z))=\alpha^{2s_1+2}\bar{\alpha}^{2s_2+2}B(\varphi(\alpha^2 z), \psi(\alpha^2 z)), \qquad (2)$$

где $s_1=-\frac{n_1+m_1}{2}$, $s_2=-\frac{n_2+m_2}{2}$. Из этого соотношения мы установили, что функционал $B(\varphi, \psi)$ должен иметь вид

$$B(\varphi, \psi)=$$
$$=C\left(\frac{i}{2}\right)^2\int z^{s_1-1}\bar{z}^{s_2-1}\left[\int \varphi(z_1)\psi(z+z_1)\,dz_1\,d\bar{z}_1\right]dz\,d\bar{z} \qquad (3)$$

(в рассматриваемом нами случае $m_1=n_1$, $m_2=n_2$, а потому $s_1=-n_1$, $s_2=-n_2$). Если теперь рассматривать только функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, принадлежащие подпространству F_χ, то, кроме функционала (3), соотношению (2) удовлетворяет еще и функционал

$$B_1(\varphi, \psi)=$$
$$=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int z^{-n_1-1}\bar{z}^{-n_2-1}\ln|z|\int \varphi(z_1)\psi(z+z_1)\,dz\,d\bar{z}\,dz_1\,d\bar{z}_1. \qquad (4)$$

В самом деле, обобщенная функция $z^{-n_1-1}\bar{z}^{-n_2-1}\ln|z|$ является присоединенной однородной обобщенной функцией. (см. Добавление № 1 п. 5). Отсюда следует, что

$$B_1(\varphi(\alpha^2 z), \psi(\alpha^2 z))=$$
$$=\alpha^{2n_1-2}\bar{\alpha}^{2n_2-2}[B_1(\varphi(z), \psi(z))+\ln|\alpha|B(\varphi(z), \psi(z))].$$

Но если функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ принадлежат подпространству F_χ, то $B(\varphi, \psi)=0$. Поэтому выполняется равенство

$$B_1(\varphi(\alpha^2 z), \psi(\alpha^2 z))=\alpha^{-2s_1-2}\bar{\alpha}^{-2s_2-2}B_1(\varphi(z), \psi(z)),$$

обеспечивающее инвариантность функционала $B_1(\varphi, \psi)$ относительно преобразований

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(z)=\alpha^{-n_1+1}\bar{\alpha}^{-n_2+1}\varphi(\alpha^2 z),$$
$$T_{\chi_2}(g)\psi(z)=\alpha^{-m_1+1}\bar{\alpha}^{-m_2+1}\psi(\alpha^2 z).$$

Нетрудно непосредственно убедиться, что $B_1(\varphi, \psi)$ есть инвариантный билинейный функционал в подпространстве F_χ.

Итак, *если $n_1, n_2 = -1, -2, \ldots$, то в инвариантном подпространстве F_χ пространства D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, существует инвариантный билинейный функционал. Этот функционал задается формулой*

$$B_1(\varphi, \psi) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int (z_2 - z_1)^{-n_1-1} \overline{(z_2 - z_1)}^{-n_2-1} \ln |z_1 - z_2| \times \\ \times \varphi(z_1) \psi(z_2)\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2. \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$ В этом случае инвариантный билинейный функционал в пространстве D_{χ_1} задается формулой

$$B(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int \varphi^{(n_1, n_2)}(z) \psi(z)\, dz\, d\bar{z}.$$

Он вырождается на подпространстве E_χ многочленов степени $n_1 - 1$ по z и степени $n_2 - 1$ по $\bar{z}$. Найдем вид инвариантного билинейного функционала $B_2(\varphi, \psi)$ в этом подпространстве. Очевидно, что этот функционал однозначно определяется числами

$$c_{ks, rt} = B_2(z^k \bar{z}^s, z^r \bar{z}^t),$$
$$0 \leqslant k, r \leqslant n_1 - 1, \quad 0 \leqslant s, t \leqslant n_2 - 1.$$

Покажем сначала, что $c_{ks, rt} = 0$, если $k + r \neq n_1 - 1$ или $s + t \neq n_2 - 1$. Воспользуемся для этого инвариантностью функционала $B_2(\varphi, \psi)$ относительно преобразований, отвечающих матрице $\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{Vmatrix}$. Мы получаем, что

$$c_{ks, rt} = \alpha^{-2(n_1-k-r-1)} \bar{\alpha}^{-2(n_2-s-t-1)} c_{ks, rt}.$$

Если $c_{ks, rt} \neq 0$, то это равенство имеет место лишь в случае, когда $k + r = n_1 - 1$, а $s + t = n_2 - 1$.

Итак, нужно определить лишь числа $c_{ks} = c_{ks;\, n_1-k-1,\, n_2-s-1}$. Из инвариантности функционала $B_2(\varphi, \psi)$ относительно преобразований, отвечающих матрице $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z_0 & 1 \end{Vmatrix}$ вытекает, что

$$0 = B_2(z^k \bar{z}^s, z^{n_1-k} \bar{z}^{n_2-s-1}) = \\ = B_2((z + z_0)^k \overline{(z + z_0)}^s, (z + z_0)^{n_1-k} \overline{(z + z_0)}^{n_2-s-1}).$$

Разлагая правую часть этого равенства по степеням z_0 и приравнивая нулю коэффициенты при z_0, получим следующие соотношения для c_{ks}:

$$k c_{k-1, s} + (n_1 - k) c_{ks} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$s c_{k, s-1} + (n_2 - s) c_{ks} = 0.$$

Из этих соотношений непосредственно находим числа c_{ks}:

$$c_{ks} = (-1)^{k+s} \frac{k!\,(n_1 - k - 1)!\, s!\,(n_2 - s - 1)!}{(n_1 - 1)!\,(n_2 - 1)!}$$

(мы положили для простоты $c_{00} = 1$). Поэтому для многочленов

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{s=0}^{n_2-1} a_{ks}^{(1)} z^k \bar{z}^s$$

и

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{s=0}^{n_2-1} a_{ks}^{(2)} z^k \bar{z}^s$$

функционал $B_2(\varphi, \psi)$ задается равенством

$$B_2(\varphi, \psi) = \\ = \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{s=0}^{n_2-1} (-1)^{k+s} \frac{k!\,(n_1 - k - 1)!\, s!\,(n_2 - s - 1)!}{(n_1 - 1)!\,(n_2 - 1)!} a_{ks}^{(1)} a_{n_1-k-1,\, n_2-s-1}^{(2)}. \qquad (6)$$

Итак, *если $n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$, то в инвариантном подпространстве E_{χ_1} пространства D_{χ_1}, $\chi_1 = (n_1, n_2)$, состоящем из многочленов степени $n_1 - 1$ относительно z и степени $n_2 - 1$ относительно $\bar{z}$, существует инвариантный билинейный функционал $B_2(\varphi, \psi)$, определяемый формулой* (6).

16 Зак. 2905. И. М. Гельфанд и др., вып. 5

§ 5. УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ G

В этом параграфе будет выяснено, при каких условиях на $\chi_1=(n_1,\ n_2)$ и $\chi_2=(m_1,\ m_2)$ представления

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(z)=(\beta z+\delta)^{n_1-1}\overline{(\beta z+\delta)}^{n_2-1}\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right) \qquad (1)$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\psi(z)=(\beta z+\delta)^{m_1-1}\overline{(\beta z+\delta)}^{m_2-1}\psi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right) \qquad (2)$$

группы G эквивалентны. Иными словами, будет выяснено, при каких условиях существует линейный оператор A, взаимно непрерывно и взаимно однозначно отображающий пространство D_{χ_1} на пространство D_{χ_2} и такой, что

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A. \qquad (3)$$

Наряду с этим будет выяснено, какие представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ «частично эквивалентны», то есть когда существует линейный оператор A, отображающий (но уже не изоморфно) пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} и удовлетворяющий соотношению (3).

Попутно будет доказано, что единственными непрерывными операторами в пространстве D_χ, коммутирующими с операторами в $T_\chi(g)$, являются операторы, кратные единичному («операторная неприводимость» пространства D_χ).

1. Перестановочные операторы. Исследуем сначала, для каких представлений $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$ существует линейное непрерывное отображение $A\neq 0$ пространства D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} (не обязательно взаимно однозначное и не обязательно на все пространство), такое, что

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A. \qquad (1)$$

Представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ называются эквивалентными, если A есть изоморфное отображение, то есть оператор A отображает D_{χ_1} *на все* пространство D_{χ_2} и притом взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Сначала установим связь операторов A с инвариантными билинейными функционалами.

Как мы уже знаем из § 4, п. 5, на паре пространств $D_{-\chi_2}$, $-\chi_2=(-m_1,\ -m_2)$ и D_{χ_2}, $\chi_2=(m_1,\ m_2)$ существует невырожденный инвариантный билинейный функционал

$$(\psi,\ \varphi)=\frac{i}{2}\int\psi(z)\varphi(z)\,dz\,d\bar{z}. \qquad (2)$$

Пусть теперь A — линейный оператор, отображающий пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2}. Сопоставим оператору A билинейный функционал на паре пространств D_{χ_1} и $D_{-\chi_2}$ следующего вида:

$$B(\varphi,\ \psi)=(\psi,\ A\varphi). \qquad (3)$$

Здесь φ — функция из D_{χ_1}, а ψ — функция из $D_{-\chi_2}$.

Покажем, что *оператор A перестановочен с представлениями $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$, то есть*

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A,$$

тогда и только тогда, когда билинейный функционал $B(\varphi,\ \psi)=(\psi,\ A\varphi)$ инвариантен относительно представлений $T_{\chi_1}(g)$, $T_{-\chi_2}(g)$.

В самом деле, условие перестановочности оператора A с представлениями $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$ равносильно следующему соотношению:

$$(T_{-\chi_2}(g)\psi,\ AT_{\chi_1}(g)\varphi)=(T_{-\chi_2}(g)\psi,\ T_{\chi_2}(g)A\varphi)$$

для любых функций φ из D_{χ_1} и ψ из $D_{-\chi_2}$.

С другой стороны, условие инвариантности билинейного функционала $B(\varphi,\ \psi)$ имеет следующий вид:

$$(T_{-\chi_2}(g)\psi,\ AT_{\chi_1}(g)\varphi)=(\psi,\ A\varphi).$$

Левые части написанных равенств совпадают. Правые же части равенств также совпадают ввиду инвариантности функционала $(\psi,\ \varphi)$ относительно представлений $T_{-\chi_2}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$. Таким образом, условие перестановочности оператора A с представлениями $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ и условие инвариантности билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ относительно $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{-\chi_2}(g)$ можно записать в виде одного и того же соотношения.

В § 4 было уже выяснено, для каких пар χ_1 и χ_2 существует инвариантный билинейный функционал. Чтобы получить условия, при которых существует оператор A, перестановочный с представлениями $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$, достаточно в формулировке основного результата § 4 заменить χ_2 на $-\chi_2$. Таким образом, мы получаем:

Для того чтобы для двух представлений $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(n_1, n_2)$, и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(m_1, m_2)$, существовал оператор $A\neq 0$, непрерывно отображающий пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} и такой, что

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих четырех условий:

1) $n_1=-m_1$, $n_2=-m_2$,
2) $n_1=m_1$, $n_2=m_2$,
3) $n_1=-m_1$, $n_2=m_2$, где $n_1=1, 2, \ldots$,
4) $n_1=m_1$, $n_2=-m_2$, где $n_2=1, 2, \ldots$

На основании результатов § 4 можно также найти вид перестановочного оператора для каждого из этих четырех случаев.

Пусть оператор A отображает пространство D_{χ_1}, $\chi_1=(n_1, n_2)$ в пространство D_{χ_2}, $\chi_2=(m_1, m_2)$ и удовлетворяет условию (4). Тогда ему отвечает билинейный функционал

$$B(\varphi, \psi)=\frac{i}{2}\int \psi(z)\,A\varphi(z)\,dz\,d\bar{z} \tag{5}$$

на паре пространств D_{χ_1} и $D_{-\chi_2}$, инвариантный относительно представлений $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{-\chi_2}(g)$. Но в § 4 мы доказали, что инвариантный билинейный функционал на паре пространств D_{χ_1} и $D_{-\chi_2}$ (если он существует) определен однозначно, с точностью до множителя, и нашли вид этого функционала для различных случаев. Именно *):

*) В § 4 рассматривался билинейный функционал на паре пространств D_{χ_1} и D_{χ_2}. Поэтому в приведенных там формулах нужно поменять χ_2 на $-\chi_2$

если $n_1=m_1$, $n_2=m_2$, то

$$B(\varphi, \psi)=c\,\frac{i}{2}\int \psi(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\bar{z}; \tag{6}$$

если $n_1=-m_1$, $n_2=-m_2$, причем n_1, n_2 не являются одновременно целыми положительными числами или нулями, то

$$B(\varphi, \psi)=c\left(\frac{i}{2}\right)^2\int (z_2-z_1)^{-n_1-1}\,\overline{(z_2-z_1)}^{\,-n_2-1}\times \\ \times\varphi(z_1)\,\psi(z_2)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2; \tag{7}$$

если $n_1=-m_1$, $n_2=-m_2$, где $n_1, n_2=0, 1, \ldots$, то

$$B(\varphi, \psi)=c\,\frac{i}{2}\int \varphi^{(n_1, n_2)}(z)\,\psi(z)\,dz\,d\bar{z}; \tag{8}$$

если $n_1=-m_1$, $n_2=m_2$, где $n_1=1, 2, \ldots$, то

$$B(\varphi, \psi)=c\,\frac{i}{2}\int \varphi^{(n_1, 0)}(z)\,\psi(z)\,dz\,d\bar{z}; \tag{9}$$

если $n_1=m_1$, $n_2=-m_2$, где $n_2=1, 2, \ldots$, то

$$B(\varphi, \psi)=c\,\frac{i}{2}\int \varphi^{(0, n_2)}(z)\,\psi(z)\,dz\,d\bar{z}. \tag{10}$$

Сопоставив эти выражения (6)—(10) для инвариантного билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ с выражением (5), мы получим непосредственно формулу для перестановочного оператора A.

Сформулируем окончательный результат этого пункта. Пусть $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ — два представления группы G. Ищутся операторы A, непрерывно отображающие пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} и удовлетворяющие условию перестановочности

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A.$$

Установлено, что такие операторы A существуют в следующих четырех случаях:

1. $\chi_1=\chi_2$. В этом случае оператор A имеет вид

$$A\varphi(z)=c\varphi(z), \tag{11}$$

то есть он кратен единичному оператору.

2. $\chi_1=(n_1, n_2)$, $\chi_2=(-n_1, -n_2)$, причем хотя бы одно из чисел n_1, n_2 не является целым положительным или нулем. Перестановочный оператор A имеет следующий вид:

$$A\varphi(z)=c\frac{i}{2}\int(z-z_1)^{-n_1-1}\overline{(z-z_1)}^{-n_2-1}\varphi(z_1)\,dz_1\,d\bar{z}_1 \text{ *)}. \quad (12)$$

3. $\chi_1=(n_1, n_2)$, $\chi_2=(-n_1, -n_2)$, причем $n_1, n_2=0, 1, \ldots$ Оператор A имеет вид

$$A\varphi(z)=c\frac{\partial^{n_1+n_2}\varphi(z)}{\partial z^{n_1}\partial\bar{z}^{n_2}} \text{ **)}. \quad (13)$$

4. $\chi_1=(n_1, n_2)$, $\chi_2=(-n_1, n_2)$, где $n_1=1, 2, \ldots$ Оператор A имеет вид

$$A\varphi(z)=c\frac{\partial^{n_1}\varphi(z)}{\partial z^{n_1}}. \quad (14)$$

4′. $\chi_1=(n_1, n_2)$, $\chi_2=(n_1, -n_2)$, где $n_2=1, 2, \ldots$ Оператср A имеет вид

$$A\varphi(z)=c\frac{\partial^{n_2}\varphi(z)}{\partial\bar{z}^{n_2}}. \quad (14')$$

Обращаем внимание читателя на первый случай, когда $\chi_1=\chi_2$, то есть когда пространства D_{χ_1} и D_{χ_2} совпадают. Нами установлено, что *единственными линейными непрерывными операторами в пространстве D_χ, перестановочными с операторами представления, являются операторы, кратные единичному оператору*. Это свойство пространств D_χ мы называем *операторной неприводимостью*.

---

*) Интеграл нужно понимать в смысле регуляризованного значения, см. Добавление, § 1.

**) Заметим, что формулу (13) можно рассматривать как частный случай формулы (12). Для этого следует в формуле (12) положить $c=\Gamma^{-1}\left(\frac{-n_1-n_2+|n_1-n_2|}{2}\right)$ и принять во внимание, что обобщенная функция

$$\frac{(z_1-z)^{-n_1-1}\overline{(z_1-z)}^{-n_2-1}}{\Gamma\left(\frac{-n_1-n_2+|n_1-n_2|}{2}\right)}$$

принимает при целых неотрицательных значениях n_1 и n_2 значение $\delta^{(n_1, n_2)}(z_1-z)$.

2. Условие эквивалентности двух представлений. Найдем теперь необходимые и достаточные условия эквивалентности двух представлений $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$.

Напомним, что представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ называются эквивалентными, если существует оператор A, взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображающий пространство D_{χ_1} на пространство D_{χ_2}, такой, что

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A. \quad (1)$$

В п. 1 были найдены необходимые и достаточные условия на $\chi_1=(n_1, n_2)$ и $\chi_2=(m_1, m_2)$, при которых представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ обладают перестановочным с ними оператором A. Там же были приведены формулы для оператора A.

Чтобы исследовать вопрос об эквивалентности представлений $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$, нам нужно лишь выяснить, при каких дополнительных условиях на χ_1 и χ_2 оператор A взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство D_{χ_1} на D_{χ_2}.

Первый случай, когда $n_1=m_1$, $n_2=m_2$, неинтересен, поскольку в этом случае пространства D_{χ_1} и D_{χ_2} попросту совпадают.

Поэтому мы рассмотрим сразу случай, когда

$$n_1=-m_1, \quad n_2=-m_2.$$

Покажем, что *если n_1, n_2 не являются целыми числами одного знака, то представления $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(n_1, n_2)$, и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(-n_1, -n_2)$, эквивалентны.* Рассмотрим оператор A, отображающий пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} и такой, что

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A.$$

Как было показано в п. 1, оператор A имеет следующий вид:

$$A\varphi(z)=\frac{i}{2}\int(z-z_1)^{-n_1-1}\overline{(z-z_1)}^{-n_2-1}\varphi(z_1)\,dz_1\,d\bar{z}_1.$$

Аналогично рассмотрим оператор A_1, отображающий пространство D_{χ_2} в пространство D_{χ_1} и такой, что

$$A_1T_{\chi_2}(g)=T_{\chi_1}(g)A_1.$$

Этот оператор A_1 имеет вид

$$A_1\varphi(z) = \frac{i}{2}\int (z - z_1)^{n_1-1}\overline{(z - z_1)}^{n_2-1}\varphi(z_1)\,dz_1\,d\bar{z}_1.$$

Произведение A_1A операторов A и A_1 отображает пространство D_{χ_1} в себя. Этот оператор A_1A перестановочен с операторами $T_{\chi_1}(g)$, так как

$$A_1AT_{\chi_1}(g) = A_1T_{\chi_2}(g)\,A = T_{\chi_1}(g)\,A_1A.$$

Следовательно, ввиду операторной неприводимости представления $T_{\chi_1}(g)$, оператор A_1A кратен единичному оператору E,

$$A_1A = \mu_1E.$$

Точно так же доказывается, что

$$AA_1 = \mu_2E.$$

Нам нужно показать, что $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$. Отсюда будет непосредственно следовать, что операторы A и A_1 осуществляют изоморфизм пространств D_{χ_1} и D_{χ_2}, а потому представления в D_{χ_1} и в D_{χ_2} эквивалентны.

Возьмем в пространстве D_{χ_1} бесконечно дифференцируемую и быстро убывающую вместе со всеми производными функцию $\varphi(z)$. Ее преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(w)$ есть также бесконечно дифференцируемая функция, быстро убывающая вместе со всеми производными. Предположим дополнительно, что функция $\tilde{\varphi}(w)$ равна нулю в окрестности точки $w = 0$. Посмотрим, во что переводит функцию φ оператор A_1A. Найдем сначала преобразование Фурье $\widetilde{A\varphi}$ функции $A\varphi$. Поскольку $A\varphi$ есть свертка функции $\varphi(z)$ с обобщенной функцией $z^{-n_1-1}\bar{z}^{-n_2-1}$, то преобразование Фурье функции $A\varphi$ есть произведение

$$\widetilde{A\varphi} = \widetilde{z^{-n_1-1}\bar{z}^{-n_2-1}}\,\tilde{\varphi}(w).$$

Известно (см. Добавление, § 1, п. 7), что

$$\widetilde{z^{-n_1-1}\bar{z}^{-n_2-1}} = \frac{2^{-n_1-n_2}\pi i^{|n_1-n_2|}\,\Gamma\left(\frac{-n_1-n_2+|n_1-n_2|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2+|n_1-n_2|+2}{2}\right)}\,w^{n_1}\bar{w}^{n_2}.$$

Таким образом, в силу предположения о функции $\varphi(z)$, функция $\widetilde{A\varphi}$ есть снова бесконечно дифференцируемая функция, быстро убывающая вместе со всеми производными и равная нулю в окрестности точки $w = 0$. Теперь найдем преобразование Фурье функции $A_1A\varphi$. Имеем

$$\widetilde{A_1A\varphi} = \widetilde{z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}}\cdot\widetilde{A\varphi}. \qquad (2)$$

Так как

$$\widetilde{z^{n_1-1}\bar{z}^{n_2-1}} = \frac{2^{n_1+n_2}\pi i^{|n_1-n_2|}\,\Gamma\left(\frac{n_1+n_2+|n_1-n_2|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-n_1-n_2+|n_1-n_2|+2}{2}\right)}\,w^{-n_1}\bar{w}^{-n_2},$$

то, подставляя в равенство (2) выражение для $\widetilde{z^{n_1-1}z^{n_2-1}}$ и $\widetilde{A\varphi}$, получим после сокращений $\widetilde{A_1A\varphi} = \mu_1\tilde{\varphi}$, где

$$\mu_1 = (-1)^{n_1-n_2}4\pi^2(n_1+n_2+|n_1-n_2|)^{-1}\times$$
$$\times(-n_1-n_2+|n_1-n_2|)^{-1}. \qquad (3)$$

Очевидно, что такое же выражение мы получим и для оператора AA_1.

Итак, установлено, что $A_1A = AA_1 = \mu E$, где

$$\mu = (-1)^{n_1-n_2}4\pi^2(n_1+n_2+|n_1-n_2|)^{-1}\times$$
$$\times(-n_1-n_2+|n_1-n_2|)^{-1}.$$

Так как $\mu \neq 0$, то операторы A и A_1 осуществляют изоморфизм пространств D_{χ_1} и D_{χ_2}. Тем самым доказана эквивалентность представлений $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1 = (n_1, n_2)$, и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2 = (-n_1, -n_2)$, где n_1, n_2 не являются целыми числами одного знака (отличными от нуля).

Рассмотрим теперь особый случай, когда $\chi_1 = (n_1, n_2)$, $\chi_2 = (-n_1, -n_2)$, причем n_1, n_2 — целые числа одного знака *). Покажем, что в этом случае представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ не эквивалентны.

Не нарушая общности, можно предполагать, что $n_1 \geqslant 0$ и $n_2 \geqslant 0$ (в противном случае мы поменяли бы ролями

*) Случай, когда $n_1 = n_2 = 0$, нужно, разумеется, исключить, поскольку в этом случае пространства D_{χ_1} и D_{χ_2} совпадают.

представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$). В этом случае оператор A, отображающий пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} и перестановочный с представлениями $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$, имеет следующий вид:

$$A = c\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial z^{n_1}\partial \bar{z}^{n_2}}.$$

Очевидно, что этот оператор вырожден. Именно, он переводит в нуль все многочлены из D_{χ_1} вида

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1} a_{jk} z^j \bar{z}^k.$$

Следовательно, представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ не эквивалентны.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $\chi_1 = (n_1, n_2)$, $\chi_2 = (-n_1, n_2)$, где $n_1 = 1, 2, \ldots$, и случай, когда $\chi_1 = (n_1, n_2)$, $\chi_2 = (n_1, -n_2)$, где $n_2 = 1, 2, \ldots$

В этих случаях представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ не эквивалентны. В самом деле, если бы они были эквивалентны, то существовал бы оператор A_1, отображающий пространство D_{χ_2} в пространство D_{χ_1} и перестановочный с операторами представления. Между тем, как мы знаем, такого оператора не существует *).

Итак, нами получен следующий результат.

Представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$, где $\chi_1 = (n_1, n_2)$, $\chi_2 = (m_1, m_2)$, $\chi_1 \neq \chi_2$, эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$n_1 = -m_1, \quad n_2 = -m_2,$$

причем n_1 и n_2 не являются целыми числами одного знака. В этом случае оператор A, осуществляющий взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства D_{χ_1} на пространство D_{χ_2} и такой, что

$$AT_{\chi_1}(g) = T_{\chi_2}(g)A,$$

*) Впрочем, неэквивалентность представлений следует также из того, что оператор A, отображающий пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} и перестановочный с $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$, есть оператор дифференцирования, а потому он вырождается на некотором подпространстве.

задается следующей формулой:

$$A\varphi(z) = \frac{i}{2}\int (z - z_1)^{-n_1-1}\overline{(z - z_1)}^{-n_2-1}\varphi(z_1)\,dz_1\,d\bar{z}_1.$$

(При $\operatorname{Re}(n_1 + n_2) > 0$ интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения.)

3. Частично эквивалентные представления *). Мы видели уже, что два представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ могут обладать коммутирующим оператором (то есть таким оператором A, отображающим непрерывно пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2}, что $AT_{\chi_1}(g) = T_{\chi_2}(g)A$), и в то же время не быть эквивалентными. Такие представления мы назвали *частично эквивалентными* представлениями. В этом пункте они будут подробно изучены.

Напомним, что представления $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1 = (n_1, n_2)$, и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2 = (m_1, m_2)$, обладают коммутирующим оператором и в то же время неэквивалентны в следующих трех случаях:

1) $n_1 = -m_1$, $n_2 = -m_2$, где n_1, n_2 — целые числа одного знака ($n_1 n_2 > 0$);

2) $n_1 = -m_1$, $n_2 = m_2$, где $n_1 = 1, 2, \ldots$;

3) $n_1 = m_1$, $n_2 = -m_2$, где $n_2 = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим подробно первый случай, когда $n_1 = -m_1$, $n_2 = -m_2$, где n_1, n_2 — целые числа одного знака. Не нарушая общности, можно предполагать, что n_1, n_2 — положительные числа. В этом случае пространства D_{χ_1} и D_{χ_2} обладают инвариантными подпространствами. Именно, инвариантным подпространством в D_{χ_1} является пространство многочленов

$$\sum_{k=0}^{n_1-1}\sum_{l=0}^{n_2-1} a_{jk} z^j \bar{z}^k.$$

Это подпространство мы обозначили через E_{χ_1}.

Инвариантным подпространством в D_{χ_2} является подпространство всех функций $\psi(z)$, моменты которых

$$b_{jk} = \frac{i}{2}\int z^j \bar{z}^k \psi(z)\,dz\,d\bar{z}$$

равны нулю при $j = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$ и $k = 0, 1, \ldots, n_2 - 1$.

*) Этот пункт не нужен для дальнейшего, и читатель может его при желании пропустить.

Это пространство мы обозначили через F_{χ_2} (см. § 3, п. 1).

Таким образом, каждое из представлений $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ индуцирует пару представлений группы G — представление в инвариантном подпространстве и представление в фактор-пространстве.

Мы покажем в этом пункте, что *представления группы* G *в пространствах* D_{χ_1}/E_{χ_1} *и* F_{χ_2} *оказываются эквивалентными*. Точно так же эквивалентными оказываются представления в пространствах E_{χ_1} и D_{χ_2}/F_{χ_2}.

Сначала установим эквивалентность представлений в пространствах D_{χ_1}/E_{χ_1} и F_{χ_2}.

Рассмотрим оператор A, непрерывно отображающий пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} и такой, что

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)\,A.$$

Этот оператор имеет следующий вид:

$$A=\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial z^{n_1}\partial\bar{z}^{n_2}}.$$

Найдем ядро и образ отображения A. Очевидно, что оператор A переводит в нуль все многочлены из D_{χ_1} вида

$$\sum_{k=0}^{n_1-1}\sum_{l=0}^{n_2-1}a_{kl}z^k\bar{z}^l,$$

и притом только их. Эти многочлены образуют в D_{χ_1} инвариантное подпространство, E_{χ_1}.

Покажем теперь, что *образом отображения* A *является подпространство* F_{χ_2} *функций* $\psi(z)$ *из* D_{χ_2}, *моменты которых*

$$b_{kl}=\frac{i}{2}\int z^k\bar{z}^l\psi(z)\,dz\,d\bar{z}$$

обращаются в нуль при $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n_1-1$ и $l=0,\ 1,\ \ldots,\ n_2-1$.

Пусть сначала $\varphi(z)$ — финитная функция из D_{χ_2}. Покажем, что тогда

$$A\varphi(z)=\frac{\partial^{n_1+n_2}\varphi(z)}{\partial z^{n_1}\partial\bar{z}^{n_2}}$$

принадлежит подпространству F_{χ_2}. В самом деле, интегрированием по частям получаем

$$b_{kl}=\frac{i}{2}\int z^k\bar{z}^l\,\frac{\partial^{n_1+n_2}\varphi(z)}{\partial z^{n_1}\partial\bar{z}^{n_2}}\,dz\,d\bar{z}=$$

$$=(-1)^{n_1+n_2}\frac{i}{2}\int\frac{\partial^{n_1+n_2}(z^k\bar{z}^l)}{\partial z^{n_1}\partial\bar{z}^{n_2}}\varphi(z)\,dz\,d\bar{z}.$$

Следовательно, $b_{kl}=0$ при $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n_1-1$ и $l=0,\ 1,\ \ldots,\ n_2-1$, а потому функция $A\varphi(z)$ принадлежит подпространству F_{χ_2}.

Покажем теперь, что подпространству F_{χ_2} принадлежат также все функции вида $\psi(z)=AT_{\chi_1}(g)\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — финитная функция. В самом деле, имеем

$$\psi(z)=AT_{\chi_1}(g)\varphi(z)=T_{\chi_2}(g)\,A\varphi(z).$$

Но так как функция $A\varphi(z)$ принадлежит по доказанному подпространству F_{χ_2}, а это подпространство инвариантно относительно преобразований $T_{\chi_2}(g)$, то функция $\psi(z)$ также принадлежит F_{χ_2}.

Заметим, наконец, что всякую функцию $\varphi(z)$ из D_{χ_1} можно представить в виде линейной комбинации функций вида $T_{\chi_1}(g)\varphi_k(z)$, где $\varphi_k(z)$ — финитные функции. Отсюда следует, что все функции $A\varphi(z)$, $\varphi(z)\in D_{\chi_1}$, принадлежат подпространству F_{χ_2}. Итак, доказано, что оператор A отображает D_{χ_1} в подпространство F_{χ_2} пространства D_{χ_2}.

Докажем теперь, что оператор A отображает D_{χ_1} на все пространство F_{χ_2}. Введем на множестве финитных функций $\psi(z)$ операторы D^{-1} и $\bar{D}^{-1}$ следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}D^{-1}\psi(z)&=\int\psi(z)\,dx+i\int\psi(z)\,dy,\\ \bar{D}^{-1}\psi(z)&=\int\psi(z)\,dx-i\int\psi(z)\,dy\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

(интегралы в равенствах (1) понимаются как первообразные функции, обращающиеся в нуль, когда $x\to-\infty$ (соответственно $y\to-\infty$)).

Легко видеть, что если финитная функция $\psi(z)$ принадлежит подпространству F_{χ_2}, то функция

$$\varphi(z)=D^{-n_1}\bar{D}^{-n_2}\psi(z)$$

также финитна. При этом $A\varphi(z)=\frac{\partial^{n_1+n_2}\varphi(z)}{\partial z^{n_1}\partial\bar z^{n_2}}=\psi(z)$. Таким образом, установлено, что любая финитная функция $\psi(z)$ из подпространства F_{χ_2} является образом при отображении A некоторой финитной функции $\varphi(z)$.

Отсюда следует, что всякая функция из F_{χ_2} вида $\psi_1(z)=T_{\chi_2}(g)\psi(z)$, где $\psi(z)$ — финитная функция из F_{χ_2}, также является образом некоторой функции из D_{χ_1}. В самом деле, по доказанному $\psi(z)=A\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — функция из D_{χ_1}, а потому

$$\psi_1(z)=T_{\chi_2}(g)A\varphi(z)=AT_{\chi_1}(g)\varphi(z).$$

Нетрудно убедиться, что произвольную функцию из F_{χ_2} можно представить в виде линейной комбинации функций вида $T_{\chi_2}(g)\psi_k(z)$, где $\psi_k(z)$ — финитные функции из F_{χ_2}. Отсюда следует, что любая функция из F_{χ_2} есть образ функции из D_{χ_1} при отображении A. Тем самым доказано, что образом пространства D_{χ_1} при отображении A является все подпространство F_{χ_2}.

Последнее утверждение можно было бы доказать другим способом. Введем оператор

$$B\psi(z)=\frac{2}{\pi(n_1-1)!\,(n_2-1)!}\times$$
$$\times\frac{i}{2}\int(z-z_1)^{n_1-1}\overline{(z-z_1)}^{n_2-1}\ln|z-z_1|\,\psi(z_1)\,dz_1\,d\bar z_1,$$

где $z^{n_1-1}\bar z^{n_2-1}\ln|z|$ — присоединенная однородная функция степени однородности $(n_1-1,\ n_2-1)$. Можно непосредственно убедиться, что это отображение переводит функции из подпространства F_{χ_2} в пространство D_{χ_1}. При этом из равенства

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial z^{n_1}\partial\bar z^{n_2}}\left[z^{n_1-1}\bar z^{n_2-1}\ln|z|\right]=\frac{\pi(n_1-1)!\,(n_2-1)!}{2}\,\delta(z)$$

следует, что $AB\psi(z)=\psi(z)$ для всех функций $\psi(z)$ из подпространства F_{χ_2}. Поэтому оператор A отображает пространство D_{χ_1} на все подпространство F_{χ_2}.

Итак, доказано, что ядром отображения A является инвариантное подпространство E_{χ_1} в D_{χ_1}, а образом пространства D_{χ_1} при отображении A является инвариантное подпространство F_{χ_2} пространства D_{χ_2}. Следовательно, оператор A

индуцирует взаимно однозначное отображение фактор-пространства D_{χ_1}/E_{χ_1} на подпространство F_{χ_2}. Так как по условию

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A,$$

то тем самым мы доказали эквивалентность представлений в пространствах D_{χ_1}/E_{χ_1} и F_{χ_2}.

Рассмотрим теперь представления, индуцированные представлениями $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ соответственно на подпространстве E_{χ_1} и на фактор-пространстве D_{χ_2}/F_{χ_2}. Покажем, что эти представления также эквивалентны. Для этого рассмотрим оператор A_1, отображающий пространство D_{χ_2} на пространство D_{χ_1} и коммутирующий с представлениями. Этот оператор имеет вид

$$A_1\psi(z)=\frac{i}{2}\int(z-z_1)^{n_1-1}\overline{(z-z_1)}^{n_2-1}\psi(z_1)\,dz_1\,d\bar z_1\ ^{*)}. \qquad (2)$$

Легко видеть, что оператор A_1 переводит любую функцию $\psi(z)$ из пространства D_{χ_2} в многочлен степени n_1-1 по z и степени n_2-1 по $\bar z$. Иными словами, отображение A_1 переводит пространство D_{χ_2} в подпространство E_{χ_1} из D_{χ_1}. Очевидно, что ядро отображения A_1 состоит из функций, моменты b_{ks} которых равны нулю при $0\leqslant k\leqslant n_1-1$, $0\leqslant s\leqslant n_2-1$.

Поскольку можно найти финитную функцию, имеющую наперед заданную совокупность моментов, то оператор A_1 отображает пространство D_{χ_2} на все подпространство E_{χ_1}. Тем самым доказана эквивалентность представлений, индуцированных в подпространстве E_{χ_1} и фактор-пространстве D_{χ_2}/F_{χ_2}.

Итак, для случая, когда $\chi_1=(n_1,\ n_2)$, $\chi_2=(-n_1,\ -n_2)$, где $n_1,\ n_2$ — целые положительные числа, мы установили эквивалентность следующих пар представлений:

*) Вообще говоря, когда n_1, n_2 — произвольные числа, интеграл (2) может расходиться, и его следует тогда понимать в смысле регуляризованного значения. Однако в нашем случае, когда n_1, n_2 — целые положительные числа, интеграл (2) сходится. Это непосредственно следует из того, что при $|z_1|\to\infty$ функции $\psi(z_1)$ из пространства D_{χ_2} имеют следующую асимптотику:

$$\psi(z_1)\sim Cz_1^{-n_1-1}\bar z_1^{-n_2-1}.$$

1) Представления $T_{\chi_1}(g)$, рассматриваемого в фактор-пространстве D_{χ_1}/E_{χ_1}, и представления $T_{\chi_2}(g)$, рассматриваемого в подпространстве F_{χ_2}.

2) Представления $T_{\chi_1}(g)$, рассматриваемого в подпространстве E_{χ_1} и представления $T_{\chi_2}(g)$, рассматриваемого в фактор-пространстве D_{χ_2}/F_{χ_2}.

Здесь E_{χ_1} — инвариантное подпространство пространства D_{χ_1}, состоящее из многочленов вида

$$\sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{k=0}^{n_2-1} a_{jk}z^j\bar{z}^k;$$

F_{χ_2} — инвариантное подпространство пространства D_{χ_2}, состоящее из всех функций $\psi(z)$, моменты которых

$$b_{jk}=\frac{i}{2}\int z^j\bar{z}^k\psi(z)\,dz\,d\bar{z}$$

обращаются в нуль при $j=0, 1, \ldots, n_1-1$ и $k=0, 1, \ldots, n_2-1$.

Рассмотрим теперь другие пары частично эквивалентных представлений. Как было отмечено в начале этого пункта, представления $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(n_1, n_2)$, и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(m_1, m_2)$, являются частично эквивалентными еще в следующих двух случаях:

а) когда $n_1=-m_1$, $n_2=m_2$, причем $n_1=1, 2, \ldots$ и

б) когда $n_1=m_1$, $n_2=-m_2$, причем $n_2=1, 2, \ldots$

В первом из этих случаев оператор A, удовлетворяющий соотношению

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A,$$

имеет вид $A=\dfrac{\partial^{n_1}}{\partial z^{n_1}}$, а во втором $A=\dfrac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}^{n_2}}$.

Рассуждениями, аналогичными проведенным выше, мы получаем следующий результат. *Пусть $n_1=-m_1$, $n_2=m_2$, где $n_1=1, 2, \ldots$ Если $n_2>0$, то оператор $A=\dfrac{\partial^{n_1}}{\partial z^{n_1}}$ осуществляет изоморфизм фактор-пространства D_{χ_1}/E_{χ_1} и пространства D_{χ_2}. Если же $n_2<0$, то оператор A осуществляет изоморфизм пространства D_{χ_1} и подпространства F_{χ_2}.*

Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда $n_1=m_1$, $n_2=-m_2$, $n_2=1, 2, \ldots$

Итак, *для случая, когда n_1, $n_2=1, 2, \ldots$, установлена эквивалентность следующих четырех представлений:*

а) *представления $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(n_1, n_2)$ рассматриваемого в фактор-пространстве D_{χ_1}/E_{χ_1},*

б) *представления $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(-n_1, -n_2)$, рассматриваемого в подпространстве F_{χ_2},*

в) *представления $T_{\chi_3}(g)$, $\chi_3=(-n_1, n_2)$, в пространстве D_{χ_3},*

г) *представления $T_{\chi_4}(g)$, $\chi_4=(n_1, -n_2)$ в пространстве D_{χ_4}.*

Кроме того, эквивалентны между собой представление $T_{\chi_1}(g)$, рассматриваемое в подпространстве E_{χ_1}, и представление $T_{\chi_2}(g)$, рассматриваемое в фактор-пространстве D_{χ_2}/F_{χ_2}.

§ 6. УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ G

1. Инвариантные эрмитовы функционалы в пространствах D_χ. Цель этого параграфа — найти условия, при которых в пространстве D_χ существует инвариантное скалярное произведение (φ, ψ). Под инвариантным скалярным произведением мы понимаем такой положительно определенный эрмитов функционал (φ, ψ) в пространстве D_χ, что $(\varphi, \psi)=(T_\chi(g)\varphi, T_\chi(g)\psi)$ для всех функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из пространства D_χ и всех элементов g группы G.

Сначала найдем условия, при которых в пространстве D_χ существует инвариантный, но не обязательно положительно определенный, эрмитов функционал. Для этого установим связь между инвариантными эрмитовыми функционалами и инвариантными билинейными функционалами, полученными в § 4.

Каждому эрмитову функционалу (φ, ψ) в пространстве D_χ, $\chi=(n_1, n_2)$ можно сопоставить билинейный функционал

$$B(\varphi, \psi)=(\varphi, \bar{\psi}).$$

Этот билинейный функционал определен для функций $\varphi(z)$ из пространства D_χ и функций $\psi(z)$ из пространства $D_{\bar{\chi}}$, где $\bar{\chi}=(\bar{n}_2, \bar{n}_1)$. Покажем, что *эрмитов функционал* (φ, ψ)

инвариантен относительно представления $T_\chi(g)$ тогда и только тогда, когда отвечающий ему билинейный функционал $B(\varphi, \psi) = (\varphi, \overline{\psi})$ инвариантен относительно представлений $T_\chi(g)$ и $T_{\overline{\chi}}(g)$, где $\chi = (n_1, n_2)$, $\overline{\chi} = (\overline{n}_2, \overline{n}_1)$.

В самом деле, наше утверждение непосредственно следует из очевидного равенства

$$B\left(T_\chi(g)\varphi,\ T_{\overline{\chi}}(g)\psi\right) = \left(T_\chi(g)\varphi,\ \overline{T_{\overline{\chi}}(g)\psi}\right) = \\ = \left(T_\chi(g)\varphi,\ T_\chi(g)\overline{\psi}\right).$$

Таким образом, вопрос о существовании в пространстве D_χ инвариантного эрмитова функционала сводится к вопросу о существовании билинейного функционала, инвариантного относительно представлений $T_\chi(g)$ и $T_{\overline{\chi}}(g)$. В § 4 было выяснено, для каких пар χ_1, χ_2 существует инвариантный билинейный функционал. Там же были построены инвариантные билинейные функционалы.

Для того чтобы получить условия, когда в пространстве D_χ существует инвариантный эрмитов функционал, достаточно в приведенной там формулировке положить $\chi_1 = \chi$ и $\chi_2 = \overline{\chi}$. Формула же для инвариантного эрмитова функционала получится, если заменить в формуле для соответствующего билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ функцию ψ на функцию $\overline{\psi}$. В результате мы получаем:

Инвариантные эрмитовы функционалы существуют в тех и только тех пространствах D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, для которых либо $n_1 = -\overline{n}_2$, либо $n_1 = \overline{n}_2$.

В случае, когда $n_1 = -\overline{n}_2$, инвариантный эрмитов функционал имеет следующий вид:

$$(\varphi, \psi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z)\overline{\psi(z)}\,dz\,d\overline{z}. \tag{1}$$

Если же $n_1 = \overline{n}_2$, то $n_1 = n_2 = \rho$, где ρ — вещественное число (поскольку $n_1 - n_2$ — целое число), и инвариантный эрмитов функционал имеет следующий вид:

$$(\varphi, \psi) = c\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |z_1 - z_2|^{-2\rho-2}\varphi(z_1)\overline{\psi(z_2)}\,dz_1\,d\overline{z}_1\,dz_2\,d\overline{z}_2, \tag{2}$$

если $\rho \neq 0, 1, \ldots$ (интеграл, как обычно, понимается в смысле регуляризованного значения);

$$(\varphi, \psi) = c\,\frac{i}{2}\int \varphi^{(q,\,q)}(z)\overline{\psi(z)}\,dz\,d\overline{z}, \tag{2'}$$

если $\rho = q$, $q = 0, 1, 2, \ldots$

Заметим, что формулы (2) и (2′) для эрмитова функционала можно объединить, воспользовавшись тем фактом, что

$$\left.\frac{|z|^{-2\rho-2}}{\Gamma(-\rho)}\right|_{\rho=q} = \frac{(-1)^q\pi}{q!}\,\delta^{(q,\,q)}(z).$$

Именно,

$$(\varphi, \psi) = \frac{c}{\Gamma(-\rho)}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |z_1 - z_2|^{-2\rho-2}\varphi(z_1)\overline{\psi(z_2)}\,dz_1\,d\overline{z}_1\,dz_2\,d\overline{z}_2. \tag{3}$$

2. Условие положительной определенности инвариантных эрмитовых функционалов. Мы выяснили в п. 1, что инвариантный эрмитов функционал в пространстве D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, существует в следующих двух случаях:

а) когда $n_1 = -\overline{n}_2$, то есть

$$n_1 = \frac{n + i\rho}{2}, \quad n_2 = \frac{-n + i\rho}{2},$$

где n — целое, а ρ — произвольное вещественное число;

б) когда $n_1 = n_2 = \rho$, где ρ — вещественное число.

В первом случае инвариантный эрмитов функционал в пространстве D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, имеет следующий вид:

$$(\varphi, \psi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z)\overline{\psi(z)}\,dz\,d\overline{z}. \tag{1}$$

Ясно, что этот функционал является положительно определенным.

Представления в пространстве D_χ, где $\chi = \left(\frac{n + i\rho}{2}, \frac{-n + i\rho}{2}\right)$, мы будем называть *представлениями основной серии*.

Рассмотрим теперь случай, когда $n_1 = n_2 = \rho$, где ρ — вещественное число. Установим, при каких значениях ρ инвариантный эрмитов функционал оказывается положительно определенным. Пусть сначала $\rho < 0$. Тогда инвариантный эрмитов функционал задается сходящимся интегралом

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{\Gamma(-\rho)}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |z_1 - z_2|^{-2\rho-2} \varphi(z_1) \overline{\psi(z_2)}\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2. \qquad (2)$$

Выясним, при каких значениях ρ этот функционал положительно определен, то есть $(\varphi, \varphi) > 0$ для любой функции $\varphi \neq 0$ из D_χ.

Запишем функционал (φ, φ) в следующем виде:

$$(\varphi, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(-\rho)} \frac{i}{2} \int |z|^{-2\rho-2}\, \theta(z)\, dz\, d\bar{z},$$

где

$$\theta(z) = \frac{i}{2} \int \varphi(z_1) \overline{\varphi(z + z_1)}\, dz_1\, d\bar{z}_1.$$

Перейдем теперь от функций $\varphi(z)$ к их преобразованиям Фурье *)

$$\tilde{\varphi}(w) = \frac{i}{2} \int \varphi(z)\, e^{i \operatorname{Re}(zw)}\, dz\, d\bar{z}. \qquad (3)$$

Так как функция $\theta(z)$ является сверткой функций $\varphi(z)$ и $\varphi^*(z) = \overline{\varphi(-z)}$, то ее преобразование Фурье есть функция $|\tilde{\varphi}(w)|^2$.

С другой стороны, преобразование Фурье функции $\dfrac{|z|^{-2\rho-2}}{\Gamma(-\rho)}$ есть обобщенная функция $\dfrac{\pi\, |w|^{2\rho}}{2^{2\rho}\Gamma(\rho+1)}$ (см. добавление, § 1, п. 7).

Таким образом, значение эрмитова функционала (φ, φ) задается следующим интегралом:

$$(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2^{2\rho+2}\pi\,\Gamma(\rho+1)} \frac{i}{2} \int |w|^{2\rho} |\tilde{\varphi}(w)|^2\, dw\, d\bar{w}. \qquad (4)$$

*) Заметим, что так как при $|z| \to \infty$ функция $|\varphi(z)|$ имеет асимптотику $|\varphi(z)| \sim C|z|^{2\rho-2}$, причем по условию $\rho < 0$, то функция $\varphi(z)$ абсолютно интегрируема; поэтому интеграл в формуле (3) сходится в обычном смысле.

Этот интеграл нужно, конечно, понимать в смысле регуляризованного значения.

Итак, нам нужно установить, при каких значениях ρ, где $\rho < 0$, этот интеграл положителен.

Прежде всего заметим, что при $-1 < \rho < 0$ интеграл (4) сходится в обычном смысле, а потому $(\varphi, \varphi) > 0$, если $\varphi > 0$.

Таким образом, *если $n_1 = n_2 = \rho$, где $-1 < \rho < 0$, то инвариантный эрмитов функционал в пространстве D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$ является положительно определенным.*

Пусть теперь число ρ лежит в интервале $-q-1 < \rho < -q$, где $q = 1, 2, \ldots$ Тогда регуляризованное значение интеграла (4) определяется следующим образом (см. добавление, § 1, п. 3):

$$(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2^{2\rho+2}\pi\,\Gamma(\rho+1)} \times$$
$$\times \frac{i}{2} \int |w|^{2\rho} \left[|\tilde{\varphi}(w)|^2 - \sum_{j+k=0}^{2q-2} \frac{w^j \bar{w}^k}{j!\,k!} \frac{\partial^{j+k} |\tilde{\varphi}(0)|^2}{\partial w^j\, \partial \bar{w}^k} \right] dw\, d\bar{w}. \qquad (5)$$

Этот функционал мы изучим подробно в следующем пункте. Мы покажем, в частности, что этот функционал не является знакоопределенным.

Если $\rho = -q-1$ — целое отрицательное число, то имеем

$$\left. \frac{|w|^{2\rho}}{\Gamma(\rho+1)} \right|_{\rho=-q-1} = \frac{(-1)^q \pi}{q!} \delta^{(q,\, q)}(w)$$

(см. Добавление, § 1, п. 3). Тем самым эрмитов функционал (4) имеет при $\rho = -q-1$, $q = 0, 1, \ldots$, следующий вид:

$$(\varphi, \varphi) = \frac{(-1)^q}{2^{-2q} q!} \frac{\partial^{2q} |\tilde{\varphi}(0)|^2}{\partial w^q\, \partial \bar{w}^q}. \qquad (6)$$

Этот функционал мы исследуем подробно в п. 4 и покажем, в частности, что он не является знакоопределенным.

Итак, мы рассмотрели инвариантный эрмитов функционал в пространстве D_χ, $\chi = (\rho, \rho)$, для случая, когда $\rho < 0$. Покажем теперь, что случай, когда $\rho > 0$ легко сводится к рассмотренному.

В самом деле, в § 5 было показано, что представления $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(\rho,\ \rho)$, и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(-\rho,\ -\rho)$, где $\rho\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, эквивалентны. Именно, существует оператор A, взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображающий пространство D_{χ_2} на пространство D_{χ_1}, такой, что

$$AT_{\chi_2}(g)=T_{\chi_1}(g)A.$$

Этот оператор задается следующей формулой:

$$A\varphi(z)=\frac{1}{\Gamma(-\rho)}\frac{i}{2}\int|z-z_1|^{2\rho-2}\varphi(z_1)\,dz_1\,d\bar z_1,$$

где интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения. Если теперь $(\varphi,\ \psi)$ — инвариантный эрмитов функционал в пространстве D_{χ_1}, $\chi_1=(\rho,\ \rho)$, то, очевидно, инвариантный эрмитов функционал в пространстве D_{χ_2}, $\chi_2=(-\rho,-\rho)$, определяется следующим образом:

$$(\varphi,\ \psi)_1=(A\varphi,\ A\psi).$$

Ясно, что этот функционал $(\varphi,\ \psi)_1$ будет положительно определенным тогда и только тогда, когда функционал $(\varphi,\ \psi)$ в пространстве D_{χ_1} положительно определен.

Мы знаем уже, что инвариантные эрмитовы функционалы в пространстве D_χ, $\chi=(\rho,\ \rho)$, положительно определены при $-1<\rho<0$, следовательно, они положительно определены также при $0<\rho<1$.

Заметим, что при $\rho=0$ инвариантный эрмитов функционал также положительно определен, поскольку в этом случае он имеет вид

$$(\varphi,\ \psi)=\frac{i}{2}\int\varphi(z)\overline{\psi(z)}\,dz\,d\bar z.$$

Итак, мы получили следующий результат.

Представление $T_\chi(g)$ в пространстве D_χ, $\chi=(n_1,\ n_2)$, обладает эрмитовым положительно определенным инвариантным функционалом $(\varphi,\ \psi)$ в следующих двух случаях:

а) $n_1=\frac{n+i\rho}{2}$, $n_2=\frac{-n+i\rho}{2}$, *где n — целое, ρ — произвольное вещественное число. Функционал $(\varphi,\ \psi)$ имеет следующий вид:*

$$(\varphi,\ \psi)=\frac{i}{2}\int\varphi(z)\overline{\psi(z)}\,dz\,d\bar z.$$

Эти представления называются представлениями основной серии.

б) $n_1=n_2=\rho$, *где* $-1<\rho<1$, $\rho\neq 0$. *Функционал $(\varphi,\ \psi)$ имеет следующий вид:*

$$(\varphi,\ \psi)=\frac{1}{\Gamma(-\rho)}\left(\frac{i}{2}\right)^2\int|z_1-z_2|^{-2\rho-2}\varphi(z_1)\overline{\psi(z_2)}\,dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2$$

(при $\rho>0$ интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения). Эти представления называются представлениями дополнительной серии.

3. Инвариантные эрмитовы функционалы в пространствах D_χ, $\chi=(\rho,\ \rho)$, для случая $|\rho|\geqslant 1$, $\rho\neq\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ *). Исследуем инвариантный эрмитов функционал $(\varphi,\ \varphi)$ в пространстве D_χ, $\chi=(\rho,\ \rho)$, для случая, когда вещественное число ρ лежит в интервале $-q-1<\rho<-q$, $q=1,\ 2,\ \ldots$ Как было показано в п. 2, этот функционал задается следующим образом:

$$(\varphi,\ \varphi)=\frac{1}{2^{2\rho+2}\pi\Gamma(\rho+1)}\frac{i}{2}\int|w|^{2\rho}|\tilde\varphi(w)|^2\,dw\,d\bar w, \qquad (1)$$

где $\tilde\varphi(w)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(z)$, то есть

$$\tilde\varphi(w)=\frac{i}{2}\int\varphi(z)e^{i\,\mathrm{Re}(zw)}\,dz\,d\bar z.$$

Интеграл (1) следует понимать в смысле регуляризованного значения. Именно

$$(\varphi,\ \varphi)=\frac{1}{2^{2\rho+2}\pi\Gamma(\rho+1)}\times$$
$$\times\frac{i}{2}\int|w|^{2\rho}\left[|\tilde\varphi(w)|^2-\sum_{j+k=0}^{2q-2}\frac{w^j\bar w^k}{j!\,k!}\frac{\partial^{j+k}|\tilde\varphi(0)|^2}{\partial w^j\,\partial\bar w^k}\right]dw\,d\bar w.$$

*) Этот пункт можно при желании пропустить.

Рассмотрим в D_χ множество L_q функций $\varphi(z)$, для которых

$$\frac{\partial^{j+k}|\tilde{\varphi}(0)|^2}{\partial w^j\,\partial \bar{w}^k}=0 \quad \text{при} \quad j+k\leqslant 2q-2.$$

Для этих функций $\varphi(z)$ функционал (φ, φ) принимает вид

$$(\varphi, \varphi)=\frac{1}{2^{2\rho+2}\pi\Gamma(\rho+1)}\,\frac{i}{2}\int|w|^{2\rho}\,|\tilde{\varphi}(w)|^2\,dw\,d\bar{w}.$$

Таким образом, мы видим, что эрмитов функционал (φ, φ) знакоопределен на множестве L_q. Покажем, что *множество L_q состоит из тех и только тех функций $\varphi(z)$, моменты которых*

$$b_{jk}=\frac{i}{2}\int z^j\bar{z}^k\varphi(z)\,dz\,d\bar{z}$$

равны нулю при $j+k\leqslant q-1$ $(j,\ k\geqslant 0)$. Отсюда, в частности, будет следовать, что L_q есть линейное подпространство пространства D_χ.

Для доказательства заметим, что условие $b_{jk}=0$ эквивалентно условию $\dfrac{\partial^{j+k}\tilde{\varphi}(0)}{\partial w^j\,\partial \bar{w}^k}=0$, где $\tilde{\varphi}(w)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(z)$. Таким образом, нужно доказать эквивалентность следующих двух условий на функцию $\tilde{\varphi}(w)$:

а) $\dfrac{\partial^{j+k}|\tilde{\varphi}(0)|^2}{\partial w^j\,\partial \bar{w}^k}=0$ при $j+k\leqslant 2q-2$

и

б) $\dfrac{\partial^{j+k}\tilde{\varphi}(0)}{\partial w^j\,\partial \bar{w}^k}=0$ при $j+k\leqslant q-1$.

Очевидно, что из условия б) следует условие а). Докажем теперь индукцией по $j+k$, что из условия а) следует условие б). Пусть выполнено условие а). Тогда при $j+k=0$ получаем $|\tilde{\varphi}(0)|^2=0$, откуда $\tilde{\varphi}(0)=0$. Пусть уже доказано, что $\dfrac{\partial^{j+k}\tilde{\varphi}(0)}{\partial w^k\,\partial \bar{w}^j}=0$ при $j+k<s$ $(s<q-1)$. Покажем, что тогда $\dfrac{\partial^{j+k}\tilde{\varphi}(0)}{\partial w^j\,\partial \bar{w}^k}=0$ при $j+k=s$. В самом деле, по формуле дифференцирования произведения имеем:

$$\frac{\partial^{2s}|\tilde{\varphi}(0)|^2}{\partial w^s\,\partial \bar{w}^s}=\sum_{j,\,k=0}^{s}C_s^jC_s^k\,\frac{\partial^{j+k}\tilde{\varphi}(0)}{\partial w^j\,\partial \bar{w}^k}\,\overline{\frac{\partial^{2s-j-k}\tilde{\varphi}(0)}{\partial w^{s-k}\,\partial \bar{w}^{s-j}}}=0.$$

Отбрасывая в этой сумме члены, равные нулю в силу индуктивного предположения, получим

$$\sum_{j+k=s}C_s^jC_s^k\left|\frac{\partial^{j+k}\tilde{\varphi}(0)}{\partial w^j\,\partial \bar{w}^k}\right|^2=0.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^{j+k}\tilde{\varphi}(0)}{\partial w^j\,\partial \bar{w}^k}=0$ при $j+k=s$, что и требовалось доказать.

Итак, доказано, что *инвариантный эрмитов функционал (φ, φ) в пространстве D_χ, где $\chi=(\rho, \rho)$, $-q-1<\rho<-q$, $q=1, 2, \ldots$, знакоопределен на подпространстве L_q. Это подпространство L_q состоит из всех функций $\varphi(z)$, моменты которых*

$$b_{jk}=\frac{i}{2}\int z^j\bar{z}^k\varphi(z)\,dz\,d\bar{z}$$

равны нулю при $j+k\leqslant q-1$ $(j,\ k\geqslant 0)$.

Мы докажем сейчас, что функционал (φ, φ) не является знакоопределенным на всем пространстве D_χ. Более того, мы построим в D_χ подпространство M_q, дополнительное к L_q и такое, что функционал (φ, φ) принимает на подпространствах L_q и M_q значения различных знаков. Это подпространство строится следующим образом.

Рассмотрим разрывные функции $\tilde{\varphi}(w)$ следующего вида:

$$\tilde{\varphi}(w)=\begin{cases}P(w) & \text{при } |w|\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } |w|>1,\end{cases}$$

где $P(w)=\sum\limits_{j+k=0}^{q-1}a_{jk}w^j\bar{w}^k$. При $|w|\leqslant 1$ имеем

$$|\tilde{\varphi}(w)|^2=\sum_{j+k=0}^{2q-2}\frac{w^j\bar{w}^k}{j!\,k!}\,\frac{\partial^{j+k}|P(0)|^2}{\partial w^j\,\partial \bar{w}^k}.$$

Поэтому для функций $\varphi(z)$, преобразованиями которых являются построенные функции $\tilde{\varphi}(w)$, выполняется соотношение

$$(\varphi, \varphi) = -\frac{1}{2^{2\rho+2}\pi\Gamma(\rho+1)} \frac{i}{2} \int\limits_{|w|>1} |w|^{2\rho} |P(w)|^2 \, dw \, d\bar{w}.$$

Отсюда вытекает, что на функциях указанного вида знак функционала (φ, φ) противоположен знаку этого функционала на L_q.

Построенные функции $\varphi(z)$ не принадлежат пространству D_χ, так как хотя они и бесконечно дифференцируемы (в силу финитности $\tilde{\varphi}(w)$), но не удовлетворяют необходимым условиям на асимптотику при $|z| \to \infty$. Однако, заменяя эти функции функциями вида $\psi(z) = e^{-\varepsilon |z|^2} \varphi(z)$, мы получаем функции из пространства D_χ. Нетрудно убедиться, что при достаточно малом ε для всех рассматриваемых функций знак (ψ, ψ) совпадает со знаком (φ, φ). Подпространство функций $\psi(z)$ обозначим через M_q.

Докажем, что подпространство M_q дополнительно к подпространству L_q. Для этого заметим, что единственным общим элементом этих подпространств является функция $\varphi_0(z) \equiv 0$ (поскольку знаки (φ, φ) на этих подпространствах различны). Далее, размерность подпространства M_q равна, очевидно, $\frac{q(q+1)}{2}$. Но размерность фактор-пространства D_χ/L_q также равна $\frac{q(q+1)}{2}$, так как каждый смежный класс в D_χ по подпространству L_q задается значениями моментов

$$b_{jk} = \frac{i}{2} \int z^j \bar{z}^k \varphi(z) \, dz \, d\bar{z}, \quad j + k \leqslant q - 1.$$

Число же этих моментов равно $\frac{q(q+1)}{2}$. Отсюда непосредственно вытекает, что подпространства L_q и M_q взаимно дополнительны.

Итак, доказано, что при $-q-1 < \rho < -q$, где $q = 1, 2, \ldots$, пространство D_χ, $\chi = (\rho, \rho)$, является суммой двух непересекающихся подпространств L_q и M_q, на которых функционал (φ, φ) принимает значения противоположных знаков, причем размерность второго подпространства равна $\frac{q(q+1)}{2}$.

Отсюда нетрудно вывести, что L_q является максимальным подпространством в D_χ, на котором функционал (φ, φ) знакоопределен. Иными словами, если L — любое подпространство в D_χ, содержащее L_q, то в L найдется элемент ψ, такой, что знак (ψ, ψ) противоположен знаку (φ, φ) на L_q.

Поскольку представления $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1 = (\rho, \rho)$, и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2 = (-\rho, -\rho)$, эквивалентны при нецелых ρ, то пространство D_χ, $\chi = (\rho, \rho)$, при $q < \rho < q+1$ $(q = 1, 2, \ldots)$ также является суммой двух непересекающихся подпространств, на которых инвариантный эрмитов функционал принимает значения противоположных знаков.

4. Инвариантные эрмитовы функционалы в особом случае, когда $n_1 = n_2 = q$, q—целое число. Теперь мы исследуем инвариантные эрмитовы функционалы в пространствах D_χ, $\chi = (n_1, n_2)$, где $n_1 = n_2 = q$ — целое число.

Сначала рассмотрим случай, когда $q = 1, 2, \ldots$ В этом случае, как уже отмечалось на стр. 259, инвариантный эрмитов функционал имеет следующий вид:

$$(\varphi, \psi) = (-1)^q \frac{i}{2} \int \varphi^{(q, q)}(z) \overline{\psi(z)} \, dz \, d\bar{z} \, ^{*)}. \quad (1)$$

Ясно, что этот функционал является вырожденным: он обращается в нуль для любой функции $\psi(z)$ из пространства D_χ и любого многочлена вида

$$\varphi(z) = \sum_{i, j=0}^{q-1} a_{ij} z^i \bar{z}^j.$$

Напомним, что такие многочлены образуют в D_χ конечномерное инвариантное подпространство, которое мы обозначили через E_χ. Следовательно, *функционал* (φ, ψ) *в случае, когда* $n_1 = n_2 = q$, $q = 1, 2, \ldots$, *можно рассматривать*

---

*) Выбор перед интегралом множителя $(-1)^q$ удобен для дальнейшего.

как инвариантный эрмитов функционал на фактор-пространстве D_χ/E_χ.

Покажем, что *на фактор-пространстве* D_χ/E_χ *этот функционал невырожден и положительно определен.*

В самом деле, мы показали в § 5, п. 3, что представление $T_\chi(g)$, $\chi=(q, q)$, рассматриваемое в фактор-пространстве D_χ/E_χ, эквивалентно представлению $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(-q, q)$. Но представление $T_{\chi_1}(g)$ принадлежит основной серии представлений и потому обладает инвариантным положительно определенным функционалом, определенным с точностью до множителя. Следовательно, функционал (φ, ψ), рассматриваемый в фактор-пространстве D_χ/E_χ, является невырожденным и знакоопределенным. Покажем, что этот функционал *положительно* определен. Возьмем финитную функцию $\varphi(z)$. Тогда интегрированием по частям мы получаем

$$(\varphi, \varphi)=(-1)^q \frac{i}{2}\int \varphi^{(q, q)}(z)\overline{\varphi(z)}\,dz\,d\bar z= \\ =\frac{i}{2}\int |\varphi^{(q, 0)}(z)|^2\,dz\,d\bar z. \qquad (2)$$

Следовательно, $(\varphi, \varphi)>0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $n_1=n_2=-q$, где $q=1, 2, \ldots$ В этом случае инвариантный эрмитов функционал имеет следующий вид:

$$(\varphi, \psi)=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int |z_1-z_2|^{2q-2}\varphi(z_1)\overline{\psi(z_2)}\,dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2= \\ =\left(\frac{i}{2}\right)^2\int (z_1-z_2)^{q-1}\overline{(z_1-z_2)}^{q-1}\varphi(z_1)\overline{\psi(z_2)}\,dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2. \qquad (3)$$

Ясно, что этот функционал вырождается на подпространстве функций $\varphi(z)$, моменты которых

$$b_{jk}=\frac{i}{2}\int z^j\bar z^k\varphi(z)\,dz\,d\bar z$$

равны нулю при $j, k=0, 1, \ldots, q-1$.

Напомним, что эти функции $\varphi(z)$ образуют в D_χ инвариантное подпространство, которое мы обозначили через F_χ. Следовательно, *функционал* (φ, ψ) *в случае, когда* $n_1=n_2=-q$, $q=1, 2, \ldots$, *можно рассматривать как инвариантный эрмитов функционал на фактор-пространстве* D_χ/F_χ.

Покажем, что *на фактор-пространстве* D_χ/F_χ *этот функционал невырожден и что при* $q>1$ *он не является знакоопределенным.* В самом деле, представление $T_\chi(g)$, $\chi=(-q, -q)$, рассматриваемое в D_χ/F_χ, эквивалентно представлению $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(q, q)$, рассматриваемому в подпространстве многочленов вида

$$\varphi(z)=\sum_{i, j=0}^{q-1} a_{ij}z^i\bar z^j$$

(см. § 5, п. 3). В пространстве же многочленов, как легко вывести из формулы (6) на стр. 241, инвариантный эрмитов функционал задается следующим образом:

$$(\varphi, \psi)=\sum_{i, j=0}^{q-1}(-1)^{i+j}\frac{i!(q-i-1)!j!(q-j-1)!}{[(q-1)!]^2}a_{ij}\bar b_{q-1-j, q-1-i}, \qquad (4)$$

где $\varphi(z)=\sum_{i, j=0}^{q-1} a_{ij}z^i\bar z^j$, $\psi(z)=\sum_{i, j=0}^{q-1} b_{ij}z^i\bar z^j$.

Ясно, что этот функционал невырожден и в то же время не является знакоопределенным.

Заметим, что функционал (4) положительно определен на подпространстве E_χ^+ многочленов $\sum_{i, j=0}^{q-1} a_{ij}z^i\bar z^j$, у которых $a_{ij}=(-1)^{i+j}\bar a_{q-1-j, q-1-i}$. Размерность этого пространства равна $\frac{q(q+1)}{2}$ при четном q и $\frac{q(q-1)}{2}$ при нечетном q.

С другой стороны, функционал (4) отрицательно определен на подпространстве E_χ^- многочленов $\sum_{i, j=0}^{q-1} a_{ij}z^i\bar z^j$, у которых $a_{ij}=-(-1)^{i+j}\bar a_{q-1-j, q-1-i}$. Размерность этого подпространства равна $\frac{q(q-1)}{2}$ при четном q и $\frac{q(q+1)}{2}$ при нечетном q.

Нетрудно видеть, что эти подпространства E_χ^+ и E_χ^- ортогональны относительно функционала (φ, ψ) и что их сумма есть все пространство E_χ.

Покажем теперь, что *в подпространстве* F_χ, $\chi=(-q, -q)$ *существует эрмитов положительно определенный функционал, инвариантный относительно представления* $T_\chi(g)$. В самом деле, представление $T_\chi(g)$, рассматриваемое в подпространстве F_χ, эквивалентно представлению $T_{\chi_1}(g)$ в пространстве D_{χ_1}, $\chi_1=(-q, q)$ (см. § 5, п. 3). Представление же в пространстве D_{χ_1} принадлежит основной серии. Следовательно, в пространстве D_{χ_1}, а поэтому и в пространстве F_χ, существует эрмитов положительно определенный инвариантный функционал.

Поскольку нам известен инвариантный эрмитов функционал в пространстве D_{χ_1}, а также известен оператор A, отображающий пространство F_χ в пространство D_{χ_1}, то отсюда можно получить выражения для инвариантного эрмитова функционала в пространстве F_χ. Именно, инвариантный эрмитов функционал в пространстве F_χ имеет следующий вид:

$$(\varphi, \psi)= \\ =\left(\frac{i}{2}\right)^2\int |z_1-z_2|^{2q-2}\ln|z_1-z_2|\varphi(z_1)\overline{\psi(z_2)}\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2. \qquad (5)$$

Вывод формулы (5) мы предоставляем читателю.

5. Унитарные представления группы G операторами в гильбертовом пространстве. В п. 3 мы нашли условия, при которых в пространстве D_χ существует эрмитов положительно определенный функционал (φ, ψ), инвариантный относительно операторов $T_\chi(g)$, то есть

$$(\varphi, \psi)=(T_\chi(g)\varphi, T_\chi(g)\psi).$$

Если такой эрмитов функционал (φ, ψ) существует, то его можно принять за скалярное произведение в пространстве D_χ. Пополняя затем пространство D_χ по норме $\|\varphi\|$, определяемой равенством

$$\|\varphi\|^2=(\varphi, \varphi),$$

мы получим гильбертово пространство H, в котором пространство D_χ образует всюду плотное подмножество.

Поскольку операторы представления $T_\chi(g)$ изометричны на D_χ, то они однозначно продолжаются до унитарных операторов в гильбертовом пространстве H. Эти операторы

будем по-прежнему обозначать через $T_\chi(g)$. Очевидно, что продолженные операторы также удовлетворяют соотношению

$$T_\chi(g_1g_2)=T_\chi(g_1)\,T_\chi(g_2).$$

Следовательно, они образуют представление группы G.

Итак, *каждому представлению* $T_\chi(g)$, *обладающему инвариантным эрмитовым положительно определенным функционалом, соответствует представление группы G унитарными операторами в гильбертовом пространстве.* Покажем, что при этом соответствии *эквивалентные представления переходят в эквивалентные, а неэквивалентные — в неэквивалентные* *).

В самом деле, пусть представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ эквивалентны, то есть существует оператор A, отображающий взаимно однозначно и взаимно непрерывно D_{χ_1} на D_{χ_2} и такой, что $AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A$. Пусть, далее, в пространстве D_{χ_2} задан инвариантный эрмитов положительно определенный функционал $(\varphi, \psi)_2$. Ему отвечает инвариантный эрмитов положительно определенный функционал $(\varphi, \psi)_1$ в пространстве D_{χ_1}, определенный следующей формулой:

$$(\varphi, \psi)_1=(A\varphi, A\psi)_2. \qquad (1)$$

Примем $(\varphi, \psi)_1$ и $(\varphi, \psi)_2$ за скалярные произведения в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2}, и пусть H_1, H_2 — пополнения этих пространств относительно введенного в них скалярного произведения. В силу равенства (1) оператор A определяет изометрическое отображение пространства D_{χ_1} на пространство D_{χ_2}.

Это отображение можно продолжить до изометрического отображения $\hat{A}$ гильбертова пространства H_1 на пространство H_2, причем условия перестановочности

$$\hat{A}T_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)\hat{A},$$

будут сохранены.

Итак, если представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ группы G операторами в пространствах D_{χ_1}, D_{χ_2} эквивалентны и

*) Унитарные представления $T_1(g)$ и $T_2(g)$ группы G в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 называются эквивалентными, если существует изометрическое отображение A пространства H_1 на H_2, такое, что $AT_1(g)=T_2(g)A$.

обладают положительно определенными и инвариантными эрмитовыми функционалами, то они продолжаются до эквивалентных представлений в пространствах H_1 и H_2.

Обратно, пусть представления $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(n_1, n_2)$, и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(m_1, m_2)$, индуцируют в гильбертовых пространствах H_1, H_2 эквивалентные представления. Тогда, по определению, существует такой изометрический оператор $\hat{A}$, отображающий пространство H_1 на пространство H_2, что $\hat{A}T_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)\hat{A}$. Пусть $(\varphi, \psi)_2$ — инвариантное скалярное произведение в пространстве H_2. Введем эрмитов функционал

$$B(\varphi, \psi)=(\hat{A}\varphi, \psi)_2,$$

где φ пробегает пространство H_1, а ψ пробегает пространство H_2. Этот функционал инвариантен относительно представлений $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$. В частности, функционал $B(\varphi, \psi)$ можно рассматривать как инвариантный эрмитов функционал пары пространств D_{χ_1}, $\chi_1=(n_1, n_2)$, и D_{χ_2}, $\chi_2=(m_1, m_2)$. Но такой функционал может существовать лишь в следующих четырех случаях:

1) $n_1=-\overline{m}_2, \quad n_2=-\overline{m}_1;$
2) $n_1=\overline{m}_2, \quad n_2=\overline{m}_1;$
3) $n_1=\overline{m}_2, \quad n_2=-\overline{m}_1, \quad n_1=1, 2, \ldots;$
4) $n_1=-\overline{m}_1, \quad n_2=\overline{m}_2, \quad n_2=1, 2, \ldots$

Случаи 3 и 4 здесь нужно сразу исключить, поскольку в этих случаях функционал $B(\varphi, \psi)$ не является знакоопределенным.

Таким образом, если $T_{\chi_1}(g)$ — представление основной серии, то есть $n_1=\frac{-n+i\rho}{2}$, $n_2=\frac{-n-i\rho}{2}$, то должно быть либо $m_1=\frac{n-i\rho}{2}$, $m_2=\frac{n+i\rho}{2}$, либо $m_1=\frac{-n+i\rho}{2}$, $m_2=\frac{-n-i\rho}{2}$. В обоих случаях представление $T_{\chi_2}(g)$ эквивалентно представлению $T_{\chi_1}(g)$. Если же $T_{\chi_1}(g)$ — представление дополнительной серии, то есть $n_1=n_2=\rho$ — вещественное число, $-1<\rho<1$, $\rho\neq 0$, то должно быть либо $m_1=m_2=-\rho$, либо $m_1=m_2=\rho$. В обоих случаях представление $T_{\chi_2}(g)$ эквивалентно представлению $T_{\chi_1}(g)$.

Итак, доказано, что если представления в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2} продолжаются до эквивалентных представлений в гильбертовых пространствах H_1, H_2, то и сами представления в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2} между собой эквивалентны.

6. Пространственная неприводимость унитарных представлений группы G. В п. 5 мы построили представления группы G унитарными операторами в гильбертовом пространстве H. Покажем сейчас, что эти представления пространственно неприводимы, то есть, что в пространстве H нет замкнутого подпространства, отличного от нулевого и от всего пространства H, инвариантного относительно операторов представления $T_\chi(g)$.

В самом деле, пусть H_1 — некоторое замкнутое инвариантное подпространство гильбертова пространства H. Рассмотрим проекционный оператор P, соответствующий этому подпространству (то есть такой, что $P\varphi=\varphi$ для всех элементов φ из H_1, и $P\varphi=0$ для всех элементов ортогонального к H_1 подпространства H_2).

Покажем, что оператор P коммутирует со всеми операторами $T_\chi(g)$. В самом деле, любой элемент φ пространства H можно представить в виде $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, где φ_1 — элемент из подпространства H_1, а φ_2 — элемент подпространства H_2, ортогонального к H_1. В силу унитарности представления $T_\chi(g)$ и инвариантности подпространства H_1 элементы $T_\chi(g)\varphi_1$ принадлежат подпространству H_1, а элементы $T_\chi(g)\varphi_2$ ортогональны этому подпространству. Поэтому

$$PT_\chi(g)\varphi=T_\chi(g)\varphi_1=T_\chi(g)P\varphi.$$

Введем в пространстве H эрмитов функционал

$$(\varphi, \psi)_1=(P\varphi, \psi),$$

где (φ, ψ) — инвариантное скалярное произведение в H. В силу сказанного функционал $(\varphi, \psi)_1$ инвариантен относительно представления $T_\chi(g)$. Будем рассматривать его только на подпространстве D_χ. Напомним, что инвариантный эрмитов функционал в любом пространстве D_χ, если он существует, определен однозначно с точностью до постоянного множителя. Поэтому существует такое число λ, что для любых двух элементов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из пространства D_χ выполняется равенство

$$(P\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi),$$

то есть

$$(P\varphi - \lambda\varphi, \psi) = 0.$$

Так как элементы пространства D_χ образуют всюду плотное множество в H, то отсюда следует, что $P\varphi = \lambda\varphi$ на всем пространстве H. Следовательно, проекционный оператор P есть либо единичный, либо нулевой оператор, а потому инвариантное подпространство H_1 есть либо нулевое пространство, либо все пространство H. Тем самым пространственная неприводимость представления $T_\chi(g)$ доказана.

ГЛАВА IV

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ГРУППЕ КОМПЛЕКСНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе мы изучим преобразование Фурье на группе G комплексных матриц $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ с определителем $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. В качестве образца мы возьмем преобразование Фурье на прямой (или в n-мерном евклидовом пространстве). Преобразование Фурье на группах Ли обладает большим своеобразием по сравнению с обычным преобразованием Фурье и заслуживает особого изучения *).

---

*) Отметим, что более удачным образцом для определения преобразования Фурье на группе было бы не пространство Евклида, а пространство Лобачевского. Причина этого в том, что евклидово пространство в известном смысле вырождено: оно есть предельный случай пространства Лобачевского кривизны k при $k \to 0$. Основное различие между пространством Лобачевского и пространством Евклида состоит в том, что в пространстве Лобачевского объем шара есть показательная функция от радиуса r (именно, $e^{|k|r}$, где k — кривизна пространства), а в пространстве Евклида — степенная функция от r. Это различие присуще и самим группам движений этих пространств. Пусть G — группа движений, U — компактная окрестность единичного элемента. Рассмотрим инвариантную меру $\mu(U^n)$ множества U^n как функцию от n и исследуем как растет эта функция.

Группа движений пространства Лобачевского локально изоморфна группе матриц $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Для этой группы $\mu(U^n)$ растет как показательная функция от n. Для группы же движений евклидова пространства $\mu(U^n)$ растет как степенная функция от n. Случай произвольной полупростой группы Ли схож со случаем группы матриц $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$. Нильпотентные же группы напоминают по своим свойствам группу движений евклидова пространства. Преобразование Фурье в пространстве Лобачевского будет рассмотрено в гл. VI.

любых двух элементов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из пространства D_χ выполняется равенство

$$(P\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi),$$

то есть

$$(P\varphi - \lambda\varphi, \psi) = 0.$$

Так как элементы пространства D_χ образуют всюду плотное множество в H, то отсюда следует, что $P\varphi = \lambda\varphi$ на всем пространстве H. Следовательно, проекционный оператор P есть либо единичный, либо нулевой оператор, а потому инвариантное подпространство H_1 есть либо нулевое пространство, либо все пространство H. Тем самым пространственная неприводимость представления $T_\chi(g)$ доказана.

ГЛАВА IV

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ГРУППЕ КОМПЛЕКСНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе мы изучим преобразование Фурье на группе G комплексных матриц $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ с определителем $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. В качестве образца мы возьмем преобразование Фурье на прямой (или в n-мерном евклидовом пространстве). Преобразование Фурье на группах Ли обладает большим своеобразием по сравнению с обычным преобразованием Фурье и заслуживает особого изучения *).

---

*) Отметим, что более удачным образцом для определения преобразования Фурье на группе было бы не пространство Евклида, а пространство Лобачевского. Причина этого в том, что евклидово пространство в известном смысле вырождено: оно есть предельный случай пространства Лобачевского кривизны k при $k \to 0$. Основное различие между пространством Лобачевского и пространством Евклида состоит в том, что в пространстве Лобачевского объем шара есть показательная функция от радиуса r (именно, $e^{|k|r}$, где k — кривизна пространства), а в пространстве Евклида — степенная функция от r. Это различие присуще и самим группам движений этих пространств. Пусть G — группа движений, U — компактная окрестность единичного элемента. Рассмотрим инвариантную меру $\mu(U^n)$ множества U^n как функцию от n и исследуем как растет эта функция.

Группа движений пространства Лобачевского локально изоморфна группе матриц $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Для этой группы $\mu(U^n)$ растет как показательная функция от n. Для группы же движений евклидова пространства $\mu(U^n)$ растет как степенная функция от n. Случай произвольной полупростой группы Ли схож со случаем группы матриц $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$. Нильпотентные же группы напоминают по своим свойствам группу движений евклидова пространства. Преобразование Фурье в пространстве Лобачевского будет рассмотрено в гл. VI.

Типичным примером этого является преобразование Фурье на группе комплексных унимодулярных матриц второго порядка.

К задачам этой главы очень близки задачи интегральной геометрии на гиперболоиде в четырехмерном комплексном пространстве, рассмотренные независимо в гл. II, § 2. (О связи задач данной главы с интегральной геометрией см. § 3, п. 1.)

Краткая сводка содержания этой главы будет дана в конце § 1 (п. 5), после того как мы введем основные понятия.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГРУППЕ. ПОСТАНОВКА ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ И СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Преобразование Фурье на прямой. Сначала изложим основные факты, касающиеся преобразования Фурье на прямой.

Преобразованием Фурье суммируемой функции $f(x)$, заданной на прямой, называется функция

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx, \tag{1}$$

где λ — вещественное или комплексное число. Этот интеграл сходится при всех вещественных значениях λ. При некоторых дополнительных требованиях на $f(x)$, например, если при любом $a>0$ имеем $|f(x)|\leqslant Ce^{-a|x|}$, функция $F(\lambda)$ определена при всех комплексных λ и является целой аналитической функцией от λ.

Основные результаты гармонического анализа на прямой сводятся к следующему.

1. Поведение преобразований Фурье при сдвигах, дифференцировании, свертке. *При замене функции $f(x)$ на функцию $f(x-a)$ (преобразование сдвига) функция $F(\lambda)$ умножается на $e^{i\lambda a}$.*

При дифференцировании функции $f(x)$ функция $F(\lambda)$ умножается на $-i\lambda$, а при умножении функции $f(x)$ на ix функция $F(\lambda)$ переходит в $F'(\lambda)$.

Если $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, то преобразованием Фурье свертки

$$f_1 * f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\,f_2(x-y)\,dy$$

является $F_1(\lambda)\,F_2(\lambda)$.

Преобразованием Фурье функции $f(-x)$ является $F(-\lambda)$, а преобразованием Фурье функции $\overline{f(x)}$ является $\overline{F(-\bar{\lambda})}$.

Аналоги этих результатов для группы G будут получены в § 2.

2. Формула обращения. *Функция $f(x)$ восстанавливается по своему преобразованию Фурье следующим образом:*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda \tag{2}$$

(в предположении, что $F(\lambda)$ также суммируемая функция). Аналог этой формулы для группы G будет получен в § 3.

3. Формула Планшереля. *Если $f(x)$ имеет интегрируемый квадрат модуля, то функция $F(\lambda)$ также имеет интегрируемый квадрат модуля. При этом выполняется равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\,d\lambda. \tag{3}$$

Справедлива формула обращения (2), *где интеграл понимается в смысле сходимости в среднем.*

Аналог формулы Планшереля для группы G будет получен в § 3. Отметим, что для группы вещественных чисел область определения преобразования Фурье для функций с интегрируемым квадратом и для суммируемых функций одна и та же, а именно вещественная ось. Можно показать, что для группы G эти области различны (см. п. 4). Первая из них — аналог вещественной оси, а вторая — аналог полосы.

4. Теорема Пэли — Винера. *Функция $F(\lambda)$ комплексного переменного λ тогда и только тогда является*

преобразованием Фурье финитной бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, когда $F(\lambda)$ принадлежит пространству Z, то есть когда $F(\lambda)$ — целая аналитическая функция от λ, удовлетворяющая неравенствам вида

$$|\lambda^m F(\lambda)| \leqslant C_m e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

Аналог теоремы Пэли — Винера для группы G будет получен в § 5. Отметим, что в случае группы G дело обстоит сложнее, чем для вещественной прямой. Помимо условий аналитичности и неравенств вида (4), преобразование Фурье $F(\chi)$ финитной бесконечно дифференцируемой функции $f(g)$ должно удовлетворять некоторым алгебраическим условиям (ср. также гл. II, § 2, п. 7).

5. Теорема Бохнера. *Каждая положительно определенная непрерывная функция $f(x)$ является преобразованием Фурье конечной положительной меры.*

Отметим, что в случае группы G запас элементарных функций, используемых в теореме Бохнера, отличается от запаса функций, используемых в теореме Планшереля (в случае вещественной прямой в обеих теоремах используются функции $e^{i\lambda x}$, где λ — вещественное число). Именно, функции с интегрируемым квадратом разлагаются по унитарным представлениям только основной серии, а суммируемые положительно определенные функции разлагаются по унитарным представлениям основной и дополнительной серий.

В данной книге теорема Бохнера для группы G рассматриваться не будет.

2. Функции на группе G. Приведем основные факты относительно функций на группе G.

Функция $f(g)$ на группе G комплексных унимодулярных матриц $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ называется *быстро убывающей*, если для любого $n > 0$ справедливо неравенство

$$|f(g)| < C|g|^{-n}, \tag{1}$$

где

$$|g|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2. \tag{2}$$

Введем теперь понятие суммируемой функции. Для этого нужно определить элемент объема на группе. Оказывается, что элемент объема dg можно определить так, чтобы он не менялся при левом и правом сдвигах на группе, а также при переходе к обратному элементу, то есть

$$dg = d(gg_0) = d(g_0 g) = d(g^{-1})$$

для любого элемента g_0 группы G. (Доказательство см. в добавлении к этому параграфу.)

Приведем выражение для элемента объема dg в параметрах α, β, δ матрицы g

$$dg = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\alpha\, d\bar{\alpha}\, d\beta\, d\bar{\beta}\, d\delta\, d\bar{\delta}}{|\beta|^2}. \tag{3}$$

Функция $f(g)$ называется *суммируемой на группе G*, если для нее сходится интеграл

$$\int |f(g)|\, dg.$$

Можно показать, что из быстрого убывания функции следует ее суммируемость (см. добавление к этому параграфу).

Введем, наконец, понятие дифференцируемой функции на группе G. Отождествим элементы $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ группы G с точками поверхности

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{4}$$

в комплексном четырехмерном пространстве. В окрестности каждой точки этой поверхности можно всегда взять в качестве координат какие-нибудь три из параметров α, β, γ, δ. (Именно, пусть, например, в этой окрестности $\beta \neq 0$. Тогда, в силу соотношения (4), γ есть непрерывная функция от α, β, δ, а потому точки этой окрестности задаются параметрами α, β, δ.) Скажем, что функция $f(g)$ *бесконечно дифференцируема в окрестности матрицы g_0*, если, рассматриваемая как функция от трех выбранных координат в окрестности g_0, она имеет производные любого порядка в этой окрестности. Можно показать, что данное определение не зависит от выбора системы координат.

3. Преобразование Фурье на группе G. Определим теперь преобразование Фурье на группе G. Для этого определим сначала функции на группе G, являющиеся аналогами экспонент. Экспоненты $e^{i\lambda x}$ — это решения функционального уравнения

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\,f(x_2).$$

Поэтому аналогами экспонент $e^{i\lambda x}$ для группы G будут решения функционального уравнения

$$f(g_1g_2)=f(g_1)\,f(g_2). \tag{1}$$

Однако единственной скалярной функцией, удовлетворяющей такому уравнению, оказывается функция $f(g)\equiv 1$. Поэтому естественно искать решения уравнения (1) в виде функций, значения которых — операторы, действующие в некотором пространстве. (Каждое решение уравнения (1) есть представление группы G.)

Простейшие (а именно операторно неприводимые) решения функционального уравнения (1) были определены в главе III. Ими оказались операторы $T_\chi(g)$, $\chi=(n_1, n_2)$, действующие в пространстве функций D_χ по формуле

$$T_\chi(g)\,\varphi(z)=(\beta z+\delta)^{n_1-1}\overline{(\beta z+\delta)}^{n_2-1}\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right). \tag{2}$$

Эти операторы $T_\chi(g)$ и являются аналогами экспонент $e^{i\lambda x}$ для случая группы G. Элемент g играет здесь ту же роль, что x, а χ — ту же роль, что $i\lambda$.

Отметим, что из «экспонент», т. е. решений уравнений $T(g_1g_2)=T(g_1)\,T(g_2)$, могут быть получены почти все специальные функции. Именно, специальные функции возникают как матричные элементы операторов представлений тех или иных групп. Из обычных специальных функций исключение составляют лишь функции Ляме и Матье, которые с теорией представлений, насколько это сейчас видно, не связаны.

Преобразованием Фурье функции $f(g)$ на группе G назовем операторную функцию $F(\chi)$, определяемую равенством

$$F(\chi)=\int f(g)\,T_\chi(g)\,dg. \tag{3}$$

Таким образом, для каждого χ, при котором функция $F(\chi)$

определена, она является оператором в пространстве D_χ, действующим по формуле

$$F(\chi)\,\varphi(z)=\int f(g)\,T_\chi(g)\,\varphi(z)\,dg. \tag{4}$$

Нашей задачей будет изучение свойств преобразования Фурье. Мы выясним, как ведет себя преобразование Фурье при сдвиге и свертке функций, установим, как ведет себя преобразование Фурье при дифференцировании функции $f(g)$. В § 3 мы найдем формулу обращения, выражающую функцию $f(g)$ через ее преобразование Фурье $F(\chi)$. Для функций $f(g)$ и $F(\chi)$ будет получен также аналог формулы Планшереля. В § 5 будет получен аналог теоремы Пэли—Винера.

4. Область определения функции $F(\chi)$. Выясним, для каких χ определена функция $F(\chi)$ — преобразование Фурье функции $f(g)$.

Рассмотрим преобразование Фурье быстро убывающих функций $f(g)$. Мы покажем, что *если $f(g)$ — непрерывная быстро убывающая функция, то интеграл*

$$F(\chi)=\int f(g)\,T_\chi(g)\,dg$$

сходится для любого $\chi=(n_1, n_2)$.

Это означает, что для любой функции $\varphi(z)$ из пространства D_χ сходится интеграл

$$F(\chi)\,\varphi(z)=\int f(g)\,T_\chi(g)\,\varphi(z)\,dg,$$

причем функция $F(\chi)\,\varphi(z)$ также принадлежит пространству D_χ. При этом *оператор $F(\chi)$ непрерывен относительно топологии пространства D_χ.*

Для доказательства этого утверждения реализуем D_χ как пространство бесконечно дифференцируемых однородных функций $\varphi(z_1, z_2)$ степени однородности $(n_1-1,\ n_2-1)$. В этом пространстве оператор $T_\chi(g)$ задается формулой

$$T_\chi(g)\,\varphi(z_1, z_2)=\varphi(\alpha z_1+\gamma z_2,\ \beta z_1+\delta z_2)$$

(см. гл. III, § 2, п. 4). Установим сходимость интеграла

$$F(\chi)\varphi(z_1, z_2) \equiv \int f(g)\, T_\chi(g)\, \varphi(z_1, z_2)\, dg =$$
$$= \int f(g)\, \varphi(\alpha z_1 + \gamma z_2,\ \beta z_1 + \delta z_2)\, dg. \qquad (1)$$

Оценим сначала $\varphi(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$. В силу однородности функции $\varphi(z_1, z_2)$ получаем оценку

$$|\varphi(\alpha z_1 + \gamma z_2,\ \beta z_1 + \delta z_2)| \leqslant M[\,|\alpha z_1 + \gamma z_2|^2 + |\beta z_1 + \delta z_2|^2\,]^k,$$

где $k = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(n_1 + n_2) - 1$, а M — наибольшее значение $|\varphi(z_1, z_2)|$ на сфере $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$.

Из неравенства Коши — Буняковского имеем

$$|\alpha z_1 + \gamma z_2|^2 + |\beta z_1 + \delta z_2|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (|\alpha|^2 + |\gamma|^2 + |\beta|^2 + |\delta|^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2) =$$
$$= |g|^2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Следовательно, при $k \geqslant 0$

$$\int |f(g)\, T_\chi(g)\, \varphi(z_1, z_2)|\, dg \leqslant$$
$$\leqslant M(|z_1|^2 + |z_2|^2)^k \int |g|^{2k}\, |f(g)|\, dg. \qquad (2)$$

Последний интеграл сходится, поскольку $f(g)$ есть быстро убывающая функция.

Если $k \leqslant 0$, то используем неравенство

$$|\delta z_1' - \gamma z_2'|^2 + |-\beta z_1' + \alpha z_2'|^2 \leqslant |g|^2(|z_1'|^2 + |z_2'|^2).$$

Полагая здесь $z_1' = \alpha z_1 + \gamma z_2$, $z_2' = \beta z_1 + \delta z_2$, получаем, что

$$|\alpha z_1 + \gamma z_2|^2 + |\beta z_1 + \delta z_2|^2 \geqslant \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|g|^2}.$$

Следовательно, при $k \leqslant 0$

$$\int |f(g)\, T_\chi(g)\, \varphi(z_1, z_2)|\, dg \leqslant$$
$$\leqslant M(|z_1|^2 + |z_2|^2)^k \int |g|^{-2k}\, |f(g)|\, dg, \qquad (3)$$

откуда снова непосредственно следует сходимость интеграла (1).

Очевидно, что функция $F(\chi)\varphi(z_1, z_2)$ имеет ту же степень однородности, что и $\varphi(z_1, z_2)$, а также, что она бесконечно дифференцируема при $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$. Таким образом, эта функция принадлежит пространству D_χ.

Наконец, из оценок (2), (3) непосредственно следует, что функция $F(\chi)\varphi(z_1, z_2)$ непрерывно зависит от функции $\varphi(z_1, z_2)$ в топологии пространства D_χ. Утверждение доказано.

Теперь рассмотрим преобразование Фурье суммируемой функции на группе G. Напомним, что для суммируемых функций на прямой и для функций с интегрируемым квадратом на прямой их преобразование Фурье $F(\lambda)$ имеет одну и ту же область определения — вещественную ось λ. Для группы G ситуация оказывается иной. А именно, можно доказать, что *если $f(g)$ — суммируемая функция на группе G, то ее преобразование Фурье $F(\chi)$, $\chi = (n_1, n_2)$, определено «в полосе»* $-2 \leqslant \operatorname{Re}(n_1 + n_2) \leqslant 2$. С другой стороны (см. § 3), мы увидим, что преобразование Фурье функции с интегрируемым квадратом модуля на группе G определено, вообще говоря, лишь на «оси» $\operatorname{Re}(n_1 + n_2) = 0$. Таким образом, *преобразование Фурье функций, суммируемых на группе G, и функций с интегрируемым квадратом модуля имеет различные области определения.*

Докажем сейчас несколько иное утверждение о суммируемых функциях $f(g)$. (См. [27], стр. 504.) *Пусть $\chi = (n_1, n_2)$ лежит в полосе $-2 \leqslant \operatorname{Re}(n_1 + n_2) \leqslant 2$. Тогда D_χ можно вложить как всюду плотное подмножество в некоторое банахово пространство L_χ так, что операторы $T_\chi(g)$ будут изометрическими в этом банаховом пространстве. При этом интеграл*

$$F(\chi) = \int f(g)\, T_\chi(g)\, dg$$

будет сходиться по норме пространства L_χ для любой суммируемой функции $f(g)$.

Доказательство. Введем в D_χ норму $\|\varphi\|_p$, где $p = \dfrac{4}{2 - \operatorname{Re}(n_1 + n_2)}$ (и значит, $1 \leqslant p \leqslant \infty$):

$$\|\varphi\|_p = \left[\frac{i}{2}\int |\varphi(z)|^p\, dz\, d\bar{z}\right]^{1/p},$$

если $p<\infty$; $\|\varphi\|_\infty=\max|\varphi(z)|$. Легко убедиться, что $\|\varphi\|_p<\infty$ для любого φ из D_χ. Пополнив D_χ по норме $\|\varphi\|_p$, получим банахово пространство, которое обозначим через L_χ. Докажем, что операторы $T_\chi(g)$ изометричны в L_χ. Случай $\operatorname{Re}(n_1+n_2)=2$ тривиален. Пусть $\operatorname{Re}(n_1+n_2)<2$. Тогда имеем

$$\|T_\chi(g)\varphi(z)\|_p^p=\frac{i}{2}\int|T_\chi(g)\varphi(z)|^p\,dz\,d\bar z=$$
$$=\frac{i}{2}\int\left|(\beta z+\delta)^{n_1-1}\overline{(\beta z+\delta)}^{n_2-1}\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)\right|^p dz\,d\bar z.$$

Подстановка $\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}=w$ приводит этот интеграл к виду

$$\frac{i}{2}\int\left|(-\beta w+\alpha)^{(-n_1-n_2+2)\,p-4}\right||\varphi(w)|^p\,dw\,d\bar w=$$
$$=\frac{i}{2}\int|-\beta w+\alpha|^{[2-\operatorname{Re}(n_1+n_2)]\,p-4}|\varphi(w)|^p\,dw\,d\bar w.$$

Подставляя $p=\frac{4}{2-\operatorname{Re}(n_1+n_2)}$, мы получим

$$\|T_\chi(g)\varphi(z)\|_p^p=\frac{i}{2}\int|\varphi(w)|^p\,dw\,d\bar w=\|\varphi\|_p^p,$$

то есть отображение $T_\chi(g)$ изометрично.

Из изометричности $T_\chi(g)$ следует, что

$$\left\|\int f(g)\,T_\chi(g)\,dg\right\|_p\leqslant\int|f(g)|\,dg,$$

а потому интеграл $\int f(g)\,T_\chi(g)\,dg$ сходится по норме для любой суммируемой функции $f(g)$.

5. Сводка результатов главы IV. Эта сводка будет неизбежно краткой, поскольку мы еще не предполагаем, что читатель владеет всеми понятиями, связанными с преобразованием Фурье на группе. Поэтому эта сводка не может заменить чтения текста, может быть, несколько необычного для аналитика.

Мы определили преобразование Фурье функции на группе G как оператор $F(\chi)$, зависящий от χ, где χ — пара

комплексных чисел n_1, n_2, разность которых есть целое число. Позже (§ 2) мы увидим, что $F(\chi)$ есть интегральный оператор с ядром $K(z_1, z_2; \chi)$ и тем самым преобразование Фурье функции на группе есть функция $K(z_1, z_2; \chi)$, где z_1, z_2 — комплексные переменные, а $\chi=(n_1, n_2)$.

Функция $K(z_1\ z_2; \chi)$ тесно связана с изложенным в § 2 гл. II интегральным преобразованием на гиперболоиде в четырехмерном комплексном пространстве. Эта связь установлена в § 2 (п. 3) данной главы. В дальнейшем читатель убедится, что § 2 гл. II содержит, по существу, другой, геометрический вариант данной главы. (Точнее, содержание § 2 гл. II находится в таком же отношении к содержанию гл. IV, в каком преобразование Радона в n-мерном пространстве относится к преобразованию Фурье в n-мерном пространстве.)

Можно показать, что чем быстрее убывает функция $f(g)$, тем в более широкой полосе определено ее преобразование Фурье $F(\chi)$. Быстрого же убывания функции $f(g)$ достаточно для того, чтобы ее преобразование Фурье $F(\chi)$ было определено во всей «комплексной плоскости χ», см. п. 4. (Для краткости мы будем говорить о комплексной плоскости χ, хотя на самом деле это счетное число комплексных плоскостей.) Можно показать, что для быстро убывающей функции $f(g)$ ее преобразование Фурье $F(\chi)$ есть аналитическая функция от χ.

Собственно говоря, в этой главе будет разобрано два основных вопроса: какие функции $F(\chi)$ отвечают функциям с интегрируемым квадратом (§ 3) и какие функции $F(\chi)$ отвечают быстро убывающим функциям (§ 5).

Основной результат § 3 состоит в следующем. Пусть $f(g)$ — функция с интегрируемым квадратом. Тогда ее преобразование Фурье $F(\chi)$ определено только для «вещественных» χ, то есть для таких $\chi=(n_1, n_2)$, что $n_2=-\bar n_1$, и, значит, имеющих следующий вид: $\chi=\left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$, где n — целое, а ρ — вещественное число. (Мы видели в § 6 гл. III, что такие χ отвечают представлениям основной серии.) При этом имеет место теорема Планшереля

$$\int|f(g)|^2\,dg=-\frac{1}{8\pi^4}\int n_1n_2\operatorname{Tr}(F(\chi)F^*(\chi))\,d\chi \qquad (1)$$

(определение $F^*(\chi)$ см. на стр. 295), где интеграл по

$\chi=\left(\frac{n+i\rho}{2},\ \frac{-n+i\rho}{2}\right)$ нужно понимать как интеграл по ρ и сумму по n. $\operatorname{Tr}(FF^*)$ обозначает след оператора FF^* (оператор $F(\chi)$ является оператором Гильберта — Шмидта).

Интересный групповой смысл весового множителя $n_1 n_2$ будет указан на стр. 319.

Теорему Планшереля (1) можно также записать через ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ оператора $F(\chi)$, а именно

$$\int |f(g)|^2\,dg = -\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int n_1 n_2\,|K(z_1, z_2; \chi)|^2\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2\,d\chi. \qquad (2)$$

Заметим, что в формулу Планшереля входят не все неприводимые унитарные представления, а только представления основной серии. В этом — своеобразие преобразования Фурье на группе.

Возникает вопрос, всякому ли оператору $F(\chi)$ с ядром $K(z_1, z_2; \chi)$, таким, что

$$-\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int n_1 n_2\,|K(z_1, z_2; \chi)|^2\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2\,d\chi < \infty$$

отвечает функция $f(g)$ с интегрируемым квадратом. Оказывается, что это не так: преобразование Фурье $F(\chi)$ функции с интегрируемым квадратом удовлетворяет дополнительно условиям симметрии, связывающим $F(\chi)$, $\chi=(n_1, n_2)$, и $F(-\chi)$, $-\chi=(-n_1, -n_2)$. Именно, существует такой оператор $A(\chi)$, что

$$F(\chi)=A^{-1}(\chi)\,F(-\chi)\,A(\chi).$$

Этот оператор $A(\chi)$ имеет следующий вид:

$$A\varphi(z)=\frac{i}{2}\int (z-z_1)^{-n_1-1}\,\overline{(z-z_1)}^{-n_2-1}\,\varphi(z_1)\,dz_1\,d\bar{z}_1,$$

где интеграл нужно понимать в смысле регуляризованного значения. Причина этих условий в том, что каждое представление мы считаем дважды, поскольку представления в пространствах D_χ и $D_{-\chi}$ между собой эквивалентны.

Оказывается, что этих условий уже достаточно для того, чтобы операторная функция $F(\chi)$ была преобразованием Фурье некоторой функции $f(g)$ с интегрируемым квадратом.

Кроме того, при наложении этих условий на $F(\chi)$ можно написать формулу обращения, выражающую функцию $f(g)$ через ее преобразование Фурье $F(\chi)$ (см. § 3, п. 4, стр. 318).

Очень интересно исследовать преобразование Фурье быстро убывающих функций на группе (§ 5). Каковы необходимые и достаточные условия, при которых операторная функция $F(\chi)$ является преобразованием Фурье некоторой быстро убывающей функции $f(g)$?

Мы не будем подробно перечислять эти условия. Они состоят в определении характера гладкости ядер $K(z_1, z_2; \chi)$ и их убывания при $|z_1|\to\infty$ и $|z_2|\to\infty$. Отметим, что, кроме того, функция $F(\chi)$ удовлетворяет условиям симметрии. Однако этого еще недостаточно. Оказывается, что функция $F(\chi)$ удовлетворяет еще ряду соотношений, возникающих в «целых» точках χ. Целыми мы называем такие $\chi=(n_1, n_2)$, где n_1, n_2 — целые числа одного и того же знака. (Вообще, целые точки χ играют особую роль в теории представлений.) Наличие этих соотношений с групповой точки зрения связано с тем, что пространство представления D_χ, где χ — целое, либо содержит конечномерное инвариантное подпространство, либо обладает инвариантным подпространством, фактор-пространство по которому конечномерно. Эти соотношения пишутся так:

$$\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}} K(z_1, z_2; n_1, n_2)=(-1)^{n_1}\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_2^{n_1}} K(z_1, z_2; -n_1, n_2)$$

при $n_1=1, 2, \ldots;$

$$\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_1^{n_2}} K(z_1, z_2; n_1, n_2)=(-1)^{n_2}\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_2^{n_2}} K(z_1, z_2; n_1, -n_2)$$

при $n_2=1, 2, \ldots$

Для функций с интегрируемым квадратом этих соотношений нет. Чем быстрее убывает функция $f(g)$, тем большему числу соотношений удовлетворяет ее преобразование Фурье. Например, в случае убывания немного более быстрого чем суммируемость, имеют место первые из этих соотношений (при $n_1=n_2=1$).

При той широкой трактовке, которая сегодня применяется к дзета-функции, мы рискнем сопоставить типичные свойства дзета-функции со свойствами функции $F(\chi)$, рассматриваемой как аналитическая функция от $\chi=(n_1, n_2)$. Таковыми являются:

1) Особая роль критической полосы $-2 \leqslant \operatorname{Re}(n_1+n_2) \leqslant 2$. Например, для любого χ из этой полосы (и, по-видимому, только из этой полосы) оператор $T_\chi(g)$ является ограниченным как функция g.

2) Наличие функционального уравнения

$$F(\chi)=A^{-1}(\chi) F(-\chi) A(\chi).$$

3) Наличие особенностей в целых точках *).

Отметим еще один факт, тесно связанный с указанными свойствами функции $F(\chi)$. Если $f(g)$ — быстро убывающая функция, то у нее существуют моменты. Моментами функции $f(g)$ мы называем интегралы вида

$$\int f(g)\, a(g)\, dg,$$

где $a(g)$ — матричный элемент конечномерного представления группы G. Замечательно, что эти моменты можно записать в виде явных формул через ядро $K(z_1, z_2; n_1, n_2)$ преобразования Фурье функции $f(g)$ (см. § 5, п. 5). В частности, имеет место следующая формула:

$$\int f(g)\, dg=\frac{i}{2} \int K(z_1, z_2; 1, 1)\, dz_2\, d\bar{z}_2$$

(интеграл, стоящий справа, не зависит от z_1).

ДОБАВЛЕНИЕ К § 1

ФУНКЦИИ НА ГРУППЕ G

1. Быстро убывающие функции на группе G. Мы остановимся здесь подробнее на основных понятиях, касающихся функций на группе комплексных унимодулярных матриц второго порядка. Сначала дадим определение финитной функции на группе и функции быстро убывающей.

*) Может быть, эта неосознанная связь и натолкнула Сельберга [42] на некоторый класс дзета-функций, фактически связанных с представлениями (см. И. М. Гельфанд и И. И. Пятецкий-Шапиро [28]).

Назовем *нормой* $|g|$ матрицы $g=\left\|\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{matrix}\right\|$ следующее выражение:

$$|g|=(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2)^{1/2} \text{ *)}.$$

Функция $f(g)$ на группе G называется *финитной*, если существует такое A, что $f(g)=0$ при $|g|>A$.

Функция $f(g)$ называется непрерывной на группе G, если из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} |g_n-g|=0$, следует $\lim\limits_{n\to\infty} f(g_n)=f(g)$.

Непрерывные финитные функции на группе G образуют линейное пространство C. В этом пространстве естественно вводится топология. Именно, последовательность $\{f_n(g)\}$ финитных непрерывных функций назовем *сходящейся к нулю*, если выполняются следующие требования:

1) Существует такое A, что все функции $f_n(g)$ равны нулю при $|g|>A$.

2) В области $|g| \leqslant A$ последовательность функций $\{f_n(g)\}$ равномерно сходится к нулю.

Функция $f(g)$ на группе G называется *быстро убывающей*, если для любого n выполняется соотношение

$$\lim_{|g|\to\infty} |g|^n f(g)=0.$$

Быстро убывающие непрерывные функции также образуют линейное пространство. Топология в этом пространстве вводится при помощи счетной последовательности норм

$$\|f\|_n=\sup_g |g|^n |f(g)|.$$

Заметим, что пространство быстро убывающих функций на группе G по своим свойствам напоминает не пространство быстро убывающих функций на прямой, а скорее пространство функций на прямой, убывающих быстрее любой функции $e^{-a|x|}$, $a>0$. Мы увидим это позже, при рассмотрении свойств преобразований Фурье. Аналогом пространства быстро убывающих функций на прямой правильнее было бы считать пространство таких функций $f(g)$, что для всех значений n $\lim\limits_{|g|\to\infty} (\ln|g|)^n f(g)=0$. (Ср. со сноской на стр. 275.)

*) Без труда проверяются следующие свойства нормы:
1) $|g_1+g_2| \leqslant |g_1|+|g_2|$;
2) $|g_1 g_2| \leqslant |g_1|\,|g_2|$;
3) $|ag|=|a|\,|g|$, где a — любое число.

2. Инвариантное интегрирование на группе G. Чтобы ввести интегрирование на группе, нужно определить на ней элемент объема dg. Определим элемент объема таким образом, чтобы он сохранялся при левых и правых сдвигах на группе, то есть при замене g соответственно на g_0g и gg_0:

$$dg = d(g_0g) = d(gg_0).$$

Соответствующий интеграл $\int f(g)\,dg$ будет тогда обладать следующим свойством инвариантности:

$$\int f(g_0g)\,dg = \int f(gg_0)\,dg = \int f(g)\,dg \tag{1}$$

(при условии, что интегралы сходятся).

Иными словами, интеграл не меняется при *левом и правом сдвиге* функции $f(g)$, то есть при замене аргумента g соответственно на g_0g и gg_0.

Найдем выражение для инвариантного интеграла на группе G. Для этого рассмотрим сначала совокупность всех комплексных матриц $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$. Каждую матрицу $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ отождествим с точкой $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ комплексного четырехмерного пространства. Унимодулярные матрицы образуют в этом пространстве поверхность второго порядка $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Свяжем с этой поверхностью дифференциальную форму ω, которую определим из соотношения

$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta = d(\alpha\delta - \beta\gamma)\cdot\omega. \tag{2}$$

Отсюда непосредственно получаем следующее выражение для формы ω в параметрах матрицы g:

$$\omega = \frac{d\beta\, d\gamma\, d\delta}{\delta} = \frac{d\alpha\, d\gamma\, d\delta}{\gamma} = -\frac{d\alpha\, d\beta\, d\delta}{\beta} = -\frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{\alpha}. \tag{3}$$

Поскольку элементы α, β, γ, δ матрицы g не могут одновременно обращаться в нуль, форма ω не имеет особенностей на группе G. Покажем, что форма ω сохраняется при преобразованиях сдвига. В самом деле, при преобразованиях сдвига координаты α, β, γ, δ подвергаются линейному преобразованию с определителем 1. Следовательно, форма $d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta$ сохраняется при этих преобразованиях. С другой стороны, при преобразованиях сдвига $g \to gg_0$ и $g \to g_0g$ сохраняется определитель $\alpha\delta - \beta\gamma$ матрицы g. Следовательно, сохраняется и форма $d(\alpha\delta - \beta\gamma)$. Отсюда вытекает, что дифференциальная форма ω, определенная формулой (2), сохраняется при преобразованиях сдвига.

Определим элемент объема на группе G следующим образом:

$$dg = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \omega\bar{\omega}. \tag{4}$$

В силу доказанного этот элемент объема инвариантен при левых и правых сдвигах *). Запишем выражение для элемента объема dg в различных системах параметров на группе G. Согласно (3) имеем

$$dg = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\beta\, d\gamma\, d\delta\, d\bar\beta\, d\bar\gamma\, d\bar\delta}{|\delta|^2} = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\alpha\, d\gamma\, d\delta\, d\bar\alpha\, d\bar\gamma\, d\bar\delta}{|\gamma|^2} =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\alpha\, d\beta\, d\delta\, d\bar\alpha\, d\bar\beta\, d\bar\delta}{|\beta|^2} = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\bar\alpha\, d\bar\beta\, d\bar\gamma}{|\alpha|^2}. \tag{5}$$

Отметим, что элемент объема dg сохраняется не только при левых и правых сдвигах, но и при замене g на g^{-1},

$$d(g^{-1}) = dg.$$

В самом деле, если $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, то $g^{-1} = \begin{Vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{Vmatrix}$. Очевидно, что при замене в выражениях (5) для элемента объема dg переменных α, β, γ, δ соответственно на δ, $-\beta$, $-\gamma$, α, эти выражения сохраняются. Таким образом,

$$\int f(g^{-1})\,dg = \int f(g)\,dg.$$

Инвариантность элемента объема dg, определенного одним из выражений (5), можно было бы установить непосредственно, вычисляя якобианы преобразований $g \to gg_0$ и $g \to g_0g$.

Покажем, что *инвариантный интеграл абсолютно сходится для любой непрерывной быстро убывающей функции*

*) Можно показать, что элемент объема dg определяется условием инвариантности однозначно, с точностью до постоянного множителя.

на группе G (и, в частности, для любой финитной непрерывной функции).

Рассмотрим на группе G область Ω_α, состоящую из матриц $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$, для которых $|\alpha|>\frac{1}{2}$. Аналогично определим области Ω_β, Ω_γ, Ω_δ. Объединение областей Ω_α, Ω_β, Ω_γ Ω_δ есть вся группа G *), а потому достаточно установить абсолютную сходимость интеграла по каждой из этих областей.

Докажем, например, что интеграл по области Ω_β абсолютно сходится. Пусть $f(g)$ — быстро убывающая непрерывная функция на G. Тогда для любого n имеем $|f(g)|\leqslant C_n|g|^{-n}$, где $|g|=(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2)^{1/2}$ — норма матрицы g. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_\beta}|f(g)|\,dg\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{i}{2}\right)^3\int\limits_{|\beta|>\frac{1}{2}}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2)^{-\frac{n}{2}}\frac{d\alpha\,d\beta\,d\delta\,d\bar\alpha\,d\bar\beta\,d\bar\delta}{|\beta|^2}.$$

Нетрудно видеть, что интеграл в правой части неравенства сходится при достаточно больших значениях n (именно, при $n>4$). Следовательно, сходится и интеграл $\int\limits_{\Omega_\beta}|f(g)|\,dg$.

В дальнейшем, говоря о суммируемых функциях, функциях с интегрируемым квадратом модуля и т. д., мы будем всегда иметь в виду интегрируемость относительно инвариантного элемента объема dg (инвариантной меры).

§ 2. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГРУППЕ G

1. Простейшие свойства преобразования Фурье на группе G. В этом пункте мы рассмотрим наиболее простые свойства преобразования Фурье на группе G. Все они легко вытекают из функционального уравнения для

*) Поскольку, в силу равенства $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, не может быть одновременно $|\alpha|\leqslant\frac{1}{2}$, $|\beta|\leqslant\frac{1}{2}$, $|\gamma|\leqslant\frac{1}{2}$, $|\delta|\leqslant\frac{1}{2}$.

«экспонент» $T_\chi(g)$:

$$T_\chi(g_1)\,T_\chi(g_2)=T_\chi(g_1g_2).$$

В первую очередь выясним, что происходит с преобразованием Фурье $F(\chi)$ при сдвигах функции $f(g)$. Преобразованием Фурье сдвинутой функции $f(gg_0)$ является операторная функция

$$\int f(gg_0)\,T_\chi(g)\,dg.$$

Так как интеграл инвариантен при сдвиге $g\to gg_0$, то

$$\int f(gg_0)\,T_\chi(g)\,dg=\int f(g)\,T_\chi(gg_0^{-1})\,dg=$$

$$=\left(\int f(g)\,T_\chi(g)\,dg\right)T_\chi^{-1}(g_0).$$

Таким образом,

$$\int f(gg_0)\,T_\chi(g)\,dg=F(\chi)\,T_\chi^{-1}(g_0). \qquad (1)$$

Аналогично

$$\int f(g_0^{-1}g)\,T_\chi(g)\,dg=T_\chi(g_0)\,F(\chi). \qquad (1')$$

Итак, *если* $F(\chi)$ — *преобразование Фурье функции* $f(g)$, *то преобразованиями Фурье функций* $f(gg_0)$ *и* $f(g_0^{-1}g)$ *будут соответственно операторные функции* $F(\chi)\,T_\chi^{-1}(g_0)$ *и* $T_\chi(g_0)\,F(\chi)$.

Отметим, что $T_\chi^{-1}(g_0)$ и $T_\chi(g_0)$, как и $F(\chi)$, являются операторными функциями от χ; умножение операторных функций понимается как умножение операторов в пространстве D_χ при каждом фиксированном значении χ.

Найдем теперь преобразование Фурье *свертки*

$$f_1*f_2(g)=\int f_1(g_1)\,f_2(g_1^{-1}g)\,dg_1,$$

непрерывных быстро убывающих функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$. Пусть преобразования Фурье функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$ равны соответственно $F_1(\chi)$ и $F_2(\chi)$. Преобразование Фурье функции $f_1*f_2(g)$ задается формулой

$$\int f_1*f_2(g)\,T_\chi(g)\,dg=\int\int f_1(g_1)\,f_2(g_1^{-1}g)\,T_\chi(g)\,dg_1\,dg.$$

Изменим порядок интегрирования и заменим затем g на $g_1 g_2$ *). Ввиду инвариантности интеграла получим, что

$$\int f_1 * f_2(g)\, T_\chi(g)\, dg =$$
$$= \int\int f_1(g_1) f_2(g_2)\, T_{\chi_1}(g_1)\, T_{\chi_2}(g_2)\, dg_1\, dg_2 = F_1(\chi) F_2(\chi). \quad (2)$$

Таким образом, *при свертке функций на группе G их преобразования Фурье перемножаются.* Это утверждение аналогично теореме о преобразовании Фурье свертки функций вещественного аргумента.

Найдем теперь преобразование Фурье функции $f(g^{-1})$ **). Оно задается интегралом

$$\int f(g^{-1})\, T_\chi(g)\, dg = \int f(g)\, T_\chi(g^{-1})\, dg$$

(поскольку интеграл на группе G сохраняется при замене g на g^{-1}).

Напомним теперь, что пространство D_χ естественным образом вкладывается в пространство $D'_{-\chi}$, сопряженное с $D_{-\chi}$ (см. гл. III, § 2, п. 6). При этом вложении оказывается, что $T_\chi(g^{-1}) = T'_{-\chi}(g)$, где $T'_{-\chi}(g)$ есть оператор, сопряженный оператору $T_{-\chi}(g)$. Таким образом, если $F(\chi)$ — преобразование Фурье функции $f(g)$, то

$$\int f(g^{-1})\, T_\chi(g)\, dg = \int f(g)\, T'_{-\chi}(g)\, dg = F'(-\chi). \quad (3)$$

Здесь $F'(-\chi)$ обозначает оператор, сопряженный оператору $F(-\chi)$, то есть такой, что для любых функций $\varphi(z)$ из $D_{-\chi}$ и $\psi(z)$ из D_χ выполняется равенство

$$\frac{i}{2}\int [F(-\chi)\varphi(z)]\, \psi(z)\, dz\, d\bar{z} = \frac{i}{2}\int \varphi(z)\, F'(-\chi)\, \psi(z)\, dz\, d\bar{z}.$$

Отметим, что оператор $F'(-\chi)$ действует в том же пространстве D_χ, что и оператор $F(\chi)$.

*) Перестановка порядка интегрирования возможна в силу быстрого убывания функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$.

**) Переход от функции $f(g)$ к функции $f(g^{-1})$ аналогичен на вещественной оси переходу от функции $f(x)$ к функции $f(-x)$.

Итак, *если $F(\chi)$ — преобразование Фурье функции $f(g)$, то преобразованием Фурье функции $f(g^{-1})$ является операторная функция $F'(-\chi)$, где $F'(\chi)$ — оператор, сопряженный с $F(\chi)$.*

Найдем, далее, преобразование Фурье функции $\overline{f(g)}$. Оно задается равенством

$$\int \overline{f(g)}\, T_\chi(g)\, dg = \int \overline{f(g)\, \bar{T}_\chi(g)\, dg}.$$

Но $\bar{T}_\chi(g) = T_{\bar{\chi}}(g)$, $\bar{\chi} = (\bar{n}_2, \bar{n}_1)$. Поэтому если $F(\chi)$ — преобразование Фурье функции $f(g)$, то

$$\int \overline{f(g)}\, T_\chi(g)\, dg = \int \overline{f(g)\, T_{\bar{\chi}}(g)\, dg} = \bar{F}(\bar{\chi}). \quad (4)$$

Здесь $\bar{F}(\bar{\chi})$ — оператор в пространстве D_χ, определяемый формулой $\bar{F}(\bar{\chi})\varphi(z) = \overline{F(\bar{\chi})\, \overline{\varphi(z)}}$ *).

Таким образом, *если $F(\chi)$ — преобразование Фурье функции $f(g)$, то преобразованием Фурье функции $\overline{f(g)}$ является операторная функция $\bar{F}(\bar{\chi})$, задаваемая формулой*

$$\bar{F}(\bar{\chi})\, \varphi(z) = \overline{F(\bar{\chi})\, \overline{\varphi(z)}}.$$

Комбинируя последние два результата, мы найдем преобразование Фурье функции $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$. Именно, *если $F(\chi)$ — преобразование Фурье функции $f(g)$, то преобразование Фурье функции $f^*(g)$ есть $F^*(\chi^*)$*, где положено $F^* = \bar{F}'$, $\chi^* = (-\bar{n}_2, -\bar{n}_1)$.

2. Преобразование Фурье как интегральный оператор. В этом пункте будет доказано, что преобразование Фурье любой быстро убывающей непрерывной функции $f(g)$ является при любом $\chi = (n_1, n_2)$ интегральным оператором вида

$$F(\chi)\, \varphi(z_1) = \frac{i}{2}\int K(z_1, z_2; \chi)\, \varphi(z_2)\, dz_2\, d\bar{z}_2. \quad (1)$$

*) Если F — оператор в пространстве D_χ, то через $\bar{F}$ обозначается оператор в пространстве $D_{\bar{\chi}}$, $\bar{\chi} = (\bar{n}_2, \bar{n}_1)$, такой, что для любой функции $\varphi(z)$ из D_χ имеем

$$\overline{F\varphi(z)} = \bar{F}\, \overline{\varphi(z)}.$$

В дальнейшем (п. 5) мы покажем, что ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ есть непрерывная функция от z_1 и z_2 и дадим геометрическую интерпретацию этого ядра, а в § 5 будет изучена аналитическая структура этого ядра.

Согласно определению оператора $F(\chi)$, имеем для любой функции $\varphi(z)$ из пространства D_χ

$$F(\chi)\varphi(z_1) = \int f(g) T_\chi(g) \varphi(z_1)\, dg. \qquad (2)$$

При этом интеграл (2) абсолютно сходится для любого $\chi = (n_1, n_2)$, если $f(g)$ — быстро убывающая непрерывная функция (см. п. 4 § 1).

Подставим в интеграл (2) выражение для $T_\chi(g)\varphi(z_1)$:

$$T_\chi(g)\varphi(z_1) = (\beta z_1 + \delta)^{n_1 - 1}\overline{(\beta z_1 + \delta)}^{n_2 - 1}\varphi\left(\frac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta}\right),$$

и выражение элемента объема dg через параметры α, β, δ группы G. Мы получим

$$F(\chi)\varphi(z_1) = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int f(\alpha, \beta, \delta) \times$$
$$\times (\beta z_1 + \delta)^{n_1 - 1}\overline{(\beta z_1 + \delta)}^{n_2 - 1}\varphi\left(\frac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta}\right)\frac{d\alpha\, d\bar\alpha\, d\beta\, d\bar\beta\, d\delta\, d\bar\delta}{|\beta|^2}. \qquad (3)$$

Сделаем замену переменных, введя вместо α и δ новые переменные интегрирования

$$\lambda = \beta z_1 + \delta$$

и

$$z_2 = \frac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta}.$$

Старые переменные α и δ выражаются через β, λ и z_2 следующим образом:

$$\delta = \lambda - \beta z_1, \quad \alpha = \lambda^{-1} + \beta z_2\ ^{*)}.$$

Непосредственное вычисление якобиана дает

$$\frac{D(\alpha, \beta, \delta)}{D(z_2, \beta, \lambda)} = \beta.$$

*) Мы используем здесь равенство $\gamma = \dfrac{\alpha\delta - 1}{\beta}$.

Таким образом, после замены переменных интеграл (3) примет следующий вид:

$$F(\chi)\varphi(z_1) =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int f\left(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1\right)\varphi(z_2)\lambda^{n_1 - 1}\bar\lambda^{n_2 - 1} \times$$
$$\times d\lambda\, d\bar\lambda\, d\beta\, d\bar\beta\, dz_2\, d\bar z_2. \qquad (4)$$

Итак, *преобразование Фурье $F(\chi)$ быстро убывающей функции $f(g)$ есть интегральный оператор вида*

$$F(\chi)\varphi(z_1) = \frac{i}{2}\int K(z_1, z_2; \chi)\varphi(z_2)\, dz_2\, d\bar z_2, \qquad (5)$$

где ядро $K(z_1, z_2; \chi)$, $\chi = (n_1, n_2)$, задается следующим образом:

$$K(z_1, z_2; \chi) =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int f(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1)\lambda^{n_1 - 1}\bar\lambda^{n_2 - 1}\, d\lambda\, d\bar\lambda\, d\beta\, d\bar\beta\ ^{*)}. \qquad (6)$$

3. Геометрическое истолкование ядра $K(z_1, z_2; \chi)$ оператора $F(\chi)$. Функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ и $\Phi(u, v; u', v')$. Ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ можно вычислить в два приема. Именно, сперва мы построим по функции $f(g) = f(\alpha, \beta, \delta)$ функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$, определяемую равенством

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{i}{2}\int f(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1)\, d\beta\, d\bar\beta. \qquad (1)$$

Тогда ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ оператора $F(\chi)$ выразится через $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ следующим образом:

$$K(z_1, z_2; \chi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z_1, z_2; \lambda)\lambda^{n_1 - 1}\bar\lambda^{n_2 - 1}\, d\lambda\, d\bar\lambda. \qquad (2)$$

Функция $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ имеет простое геометрическое истолкование. Будем считать функцию $f(g)$ заданной на

*) Поскольку интеграл (2) абсолютно сходится, то по теореме Фубини интеграл (6) при любых z_1 абсолютно сходится почти при всех значениях z_2, а интеграл (5) абсолютно сходится.

поверхности $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ в четырехмерном комплексном пространстве. Равенства

$$\begin{gathered}\alpha=\lambda^{-1}+\beta z_2,\quad \beta=\beta,\\ \gamma=\frac{\alpha\delta-1}{\beta}=\lambda z_2-\lambda^{-1}z_1-\beta z_1 z_2,\quad \delta=\lambda-\beta z_1\end{gathered}\tag{3}$$

при фиксированных z_1, z_2, λ задают комплексную прямую на поверхности $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ — прямолинейную образующую этой поверхности. Легко убедиться, что, меняя значения z_1, z_2, λ, мы получим все прямолинейные образующие поверхности $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, не параллельные плоскости $\beta=0$ *). Таким образом, $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ *есть интеграл функции* $f(g)$, $g=(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, *заданной на поверхности* $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, *взятый вдоль прямолинейной образующей*

$$\frac{\alpha-\lambda^{-1}}{z_2}=\frac{\beta}{1}=\frac{\gamma-\lambda z_2+\lambda^{-1}z_1}{-z_1z_2}=\frac{\delta-\lambda}{-z_1}.$$

Ясно, что параметры z_1, z_2 определяют направление этой прямолинейной образующей.

Ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ при заданных z_1 и z_2 есть усреднение функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ с весовым множителем $\lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}$ по множеству прямолинейных образующих, отвечающих фиксированным значениям z_1, z_2, то есть по множеству параллельных прямолинейных образующих.

Отметим, что выражение $K(z_1, z_2; \chi)$ через $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ аналогично обычной формуле преобразования Меллина. Поэтому мы будем говорить, что ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ является *преобразованием Меллина* функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$.

Прямые на поверхности $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ удобно иногда задавать не координатами z_1, z_2, λ, а однородными координатами u, v; u', v', как это было сделано в главе II, § 2. Напомним, как вводятся эти однородные координаты. В главе II, § 2 было показано, что любая прямая на поверхности

*) В самом деле, если прямая на поверхности $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ не параллельна плоскости $\beta=0$, то она может быть задана системой уравнений $\alpha=\alpha_0+\beta z_2$, $\delta=\lambda-\beta z_1$, где α_0, λ, z_1, z_2 — постоянные. При $\beta=0$ мы получаем из соотношения $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, что $\alpha_0\lambda=1$, то есть $\alpha_0=\lambda^{-1}$. Выражение для γ в формуле (3) следует непосредственно из соотношения $\gamma=\frac{\alpha\delta-1}{\beta}$.

$\alpha\delta-\beta\gamma=1$ задается системой линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned}u\alpha+v\gamma&=u',\\ u\beta+v\delta&=v' \text{ *}),\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

где $(u, v)\neq(0, 0)$ и $(u', v')\neq(0, 0)$. Числа u, v; u', v' можно принять за однородные координаты этой прямой.

Мы видим здесь геометрический смысл этих координат. Именно, (u, v) и (u', v') — это координаты вектора на плоскости до и после линейного преобразования с помощью матрицы $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$, а прямая — это совокупность всех линейных преобразований g, переводящих (u, v) в (u', v').

Интеграл функции $f(g)$ по прямой, заданной однородными координатами $(u, v; u', v')$, определим формулой

$$\Phi(u, v; u', v')=\frac{i}{2}\int f(g)\,\omega\bar{\omega},\tag{5}$$

где $\omega=\frac{d\alpha}{vu'}=\frac{d\beta}{vv'}=-\frac{d\gamma}{uu'}=-\frac{d\delta}{uv'}$.

Эта функция Φ есть однородная функция от u, v, u', v' степени однородности $(-2, -2)$, то есть

$$\Phi(tu, tv; tu', tv')=t^{-2}\bar{t}^{-2}\Phi(u, v; u', v')$$

для любого $t\neq 0$.

Установим связь между однородными координатами прямой $(u, v; u', v')$ и координатами z_1, z_2, λ, а тем самым и связь между функциями $\Phi(u, v; u', v')$ и $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$. Для этого заметим, что прямая (3) задается на поверхности $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}z_1\alpha+\gamma&=\lambda z_2,\\ z_1\beta+\delta&=\lambda.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Сравнивая эту систему уравнений с системой уравнений (4), получаем, что *координаты* z_1, z_2, λ *прямой на поверхности* $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ *выражаются через однородные координаты* $(u, v; u', v')$ *этой прямой следующим образом*:

$$z_1=\frac{u}{v},\quad z_2=\frac{u'}{v'},\quad \lambda=\frac{v'}{v}.\tag{7}$$

*) В гл. II, § 2 координаты точек обозначались не через α, β, γ, δ, а соответственно через z_1, z_2, z_3, z_4.

Функции же $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ *и* $\Phi(u, v; u', v')$, *задающие интеграл по этой прямой, связаны следующим соотношением*:

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \lambda\bar{\lambda}\Phi(z_1, 1; \lambda z_2, \lambda). \tag{8}$$

Приведем также выражение для функции $\Phi(u, v; u', v')$ через функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$, которое получается непосредственно из формулы (8):

$$\Phi(u, v; u', v') = v^{-1}\bar{v}^{-1}v'^{-1}\bar{v}'^{-1}\varphi\left(\frac{u}{v}, \frac{u'}{v'}; \frac{v'}{v}\right). \tag{9}$$

4. Свойства ядер $K(z_1, z_2; \chi)$. В п. 1 были установлены простейшие свойства преобразования Фурье $F(\chi)$ функций на группе G. Мы выяснили, как изменяется преобразование Фурье при сдвигах функции $f(g)$, а также при замене функции $f(g)$ на $f(g^{-1})$, $\overline{f(g)}$ или $\overline{f(g^{-1})}$.

Очевидно, что эти свойства можно сформулировать также как свойства ядер $K(z_1, z_2; \chi)$, задающих операторы $F(\chi)$. Именно, справедливы следующие результаты.

Пусть $f(g)$ — быстро убывающая непрерывная функция на группе G и $K(z_1, z_2; \chi)$ — ядро ее преобразования Фурье $F(\chi)$. Легко показать, что ядром преобразования Фурье функции $f(gg_0)$ является $T_{-\chi}(g_0)K(z_1, z_2; \chi)$, где оператор $T_{-\chi}(g_0)$ действует на это ядро как на функцию от переменной z_2. В развернутом виде это ядро имеет вид:

$$T_{-\chi}(g_0)K(z_1, z_2; \chi) =$$
$$= (\beta_0 z_2 + \delta_0)^{-n_1-1}\overline{(\beta_0 z_2 + \delta_0)}^{-n_2-1}K\left(z_1, \frac{\alpha_0 z_2 + \gamma_0}{\beta_0 z_2 + \delta_0}; \chi\right). \tag{1}$$

Ядром преобразования Фурье функции $f(g_0^{-1}g)$ является ядро $T_\chi(g_0)K(z_1, z_2; \chi)$, где оператор $T_\chi(g_0)$ действует на ядро как на функцию от z_1. В развернутом виде ядро $T_\chi(g_0)K(z_1, z_2; \chi)$ задается следующим образом:

$$T_\chi(g_0)K(z_1, z_2; \chi) =$$
$$=(\beta_0 z_1 + \delta_0)^{n_1-1}\overline{(\beta_0 z_1 + \delta_0)}^{n_2-1}K\left(\frac{\alpha_0 z_1 + \gamma_0}{\beta_0 z_1 + \delta_0}, z_2; \chi\right). \tag{2}$$

Ядром преобразования Фурье функции $f(g^{-1})$ является

$$K'(z_1, z_2; \chi) = K(z_2, z_1; -\chi). \tag{3}$$

Ядром преобразования Фурье функции $\overline{f(g)}$ является

$$\bar{K}(z_1, z_2; \chi) = \overline{K(z_1, z_2; \bar{\chi})}. \tag{4}$$

Ядром преобразования Фурье функции $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$ является

$$K^*(z_1, z_2; \chi) = \overline{K(z_2, z_1; \chi^*)}, \tag{5}$$

где $\chi^* = -\bar{\chi}$, то есть $\chi^* = (-\bar{n}_2, -\bar{n}_1)$.

Если ядрами преобразований Фурье функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$ являются соответственно $K_1(z_1, z_2; \chi)$ и $K_2(z_1, z_2; \chi)$, то ядром преобразования Фурье свертки $f_1 * f_2(g)$ этих функций является

$$K(z_1, z_2; \chi) = \frac{i}{2}\int K_1(z_1, z_3; \chi)K_2(z_3, z_2; \chi)\,dz_3\,d\bar{z}_3. \tag{6}$$

Доказательство этих утверждений непосредственно вытекает из результатов п. 1 (например, утверждение о ядре преобразования Фурье функции $f(g^{-1})$ вытекает из того, что сопряженный оператор задается транспонированным ядром).

5. Непрерывность ядра $K(z_1, z_2; \chi)$. Покажем, что *если функция $f(g)$ непрерывна и быстро убывает, то соответствующее ей ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ при всех значениях χ является непрерывной функцией от z_1 и z_2*. Для этого достаточно убедиться, что интеграл

$$K(z_1, z_2; \chi) =$$
$$= \left(\frac{i}{2}\right)^2\int f(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1)\lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}\,d\beta\,d\bar{\beta}, \tag{1}$$

которым задается ядро $K(z_1, z_2; \chi)$, равномерно сходится в любой конечной области изменения переменных z_1 и z_2.

Так как функция $f(g)$ быстро убывает, то при любом m выполняется неравенство

$$|f(g)\lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}| \leqslant C|\lambda|^{2k}|g|^{-2m}, \tag{2}$$

где норма $|g|$ матрицы $g = \begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$ выражается формулой $|g|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2$ и где $k = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(n_1 + n_2) - 1$.

Выведем оценки для величины $|\lambda|$. Эта величина связана с элементами α, β, γ, δ матрицы g следующими соотношениями:

$$\lambda=\beta z_1+\delta, \quad \lambda z_2=\alpha z_1+\gamma \tag{3}$$

(см. п. 3, формулу (6)). Следовательно,

$$|\lambda|^2=\frac{|\alpha z_1+\gamma|^2+|\beta z_1+\delta|^2}{1+|z_2|^2}.$$

Отсюда, применяя неравенство Коши — Буняковского, легко получаем

$$|\lambda|^2\leqslant|g|^2\frac{1+|z_1|^2}{1+|z_2|^2}. \tag{4}$$

Теперь найдем для λ оценку снизу. Для этого заметим, что соотношения (3) для λ можно преобразовать к следующему виду:

$$\lambda(\alpha-\beta z_2)=1, \quad \lambda(\delta z_2-\gamma)=z_1\ ^{*)}. \tag{3$'$}$$

Следовательно,

$$|\lambda|^2=\frac{1+|z_1|^2}{|\alpha-\beta z_2|^2+|\delta z_2-\gamma|^2}.$$

Отсюда, применяя снова неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$|\lambda|^2\geqslant\frac{1}{|g|^2}\frac{1+|z_1|^2}{1+|z_2|^2}. \tag{4$'$}$$

Применим к интегралу (1) оценки (2), (4) и (4′). Если $k\geqslant 0$, то мы получим

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\limits_{|\beta|^2+|\lambda|^2\geqslant A}\left|f\left(\lambda^{-1}+\beta z_2,\ \beta,\ \lambda-\beta z_1\right)\lambda^{n_1-1}\bar\lambda^{n_2-1}\right|d\lambda\,d\bar\lambda\,d\beta\,d\bar\beta\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\frac{1+|z_1|^2}{1+|z_2|^2}\right)^k\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\limits_{|\beta|^2+|\lambda|^2\geqslant A}|g|^{2k-2m}\,d\lambda\,d\bar\lambda\,d\beta\,d\bar\beta.$$

*) Именно, если первое из равенств (3) умножить на α, второе — на $-\beta$ и затем сложить равенства, то получим $\lambda(\alpha-\beta z_2)=1$. Аналогично получается второе из равенств (3′).

Нам остается, таким образом, показать, что в каждой ограниченной области изменения z_1, z_2 интеграл

$$J(A)=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\limits_{|\beta|^2+|\lambda|^2\geqslant A}|g|^{2k-2m}\,d\lambda\,d\bar\lambda\,d\beta\,d\bar\beta$$

равномерно стремится к нулю при $A\to\infty$ и при достаточно большом m. Сделаем подстановку $\lambda=\beta z_1+\delta$. Поскольку $|\beta|^2+|\lambda|^2\leqslant 2(|\beta|^2+|\delta|^2)(1+|z_1|^2)$, мы получаем

$$J(A)\leqslant\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\limits_{|\beta|^2+|\delta|^2\geqslant\frac{1}{2}\frac{A}{1+|z_1|^2}}\frac{d\delta\,d\bar\delta\,d\beta\,d\bar\beta}{(|\beta|^2+|\delta|^2)^{m-k}}.$$

Отсюда непосредственно следует, что если $m>k+2$, то при $A\to 0$ имеем $J(A)\to 0$ равномерно в конечной области изменения z_1.

Аналогично рассматривается случай, когда $k\leqslant 0$.

6. Асимптотика ядра $K(z_1, z_2;\chi)$. Изучим поведение ядра $K(z_1, z_2;\chi)$, когда $|z_1|\to\infty$ или $|z_2|\to\infty$. Пусть $f(g)$ — непрерывная быстро убывающая функция. Мы видели, что ядро $K(z_1, z_2;\chi)$, соответствующее этой функции, непрерывно зависит от z_1 и z_2. Заменим $f(g)$ на $f(g_0^{-1}g)$. Функция $f(g_0^{-1}g)$ также непрерывна и быстро убывает, а потому отвечающее ей ядро

$$T_\chi(g_0)K(z_1, z_2;\chi)=$$
$$=(\beta_0z_1+\delta_0)^{n_1-1}\overline{(\beta_0z_1+\delta_0)}^{n_2-1}K\left(\frac{\alpha_0z_1+\gamma_0}{\beta_0z_1+\delta_0},\ z_2;\ \chi\right)$$

непрерывно по z_1 и z_2. Полагая $g_0=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}$, мы получаем, что ядро

$$K_1(z_1, z_2;\chi)\equiv z_1^{n_1-1}\bar z_1^{n_2-1}K\left(-\frac{1}{z_1},\ z_2;\ \chi\right)$$

непрерывно по z_1 и z_2 при всех конечных значениях z_1 и z_2.

Этим определяется поведение ядра $K(z_1, z_2; \chi)$ при $|z_1|\to\infty$. В частности, при $|z_1|\to\infty$ имеем асимптотическое равенство

$$K(z_1, z_2; \chi)\sim C_1 z_1^{n_1-1}\bar{z}_1^{n_2-1}, \tag{1}$$

где $C_1=(-1)^{n_1-n_2}K_1(0, z_2, \chi)$.

Аналогично, рассматривая правые сдвиги функции $f(g)$, мы получим, что ядро

$$K_2(z_1, z_2; \chi)=z_2^{-n_1-1}\bar{z}_2^{-n_2-1}K\left(z_1, -\frac{1}{z_2}, \chi\right)$$

непрерывно по z_1 и z_2 при всех конечных значениях z_1 и z_2. Этим свойством определяется поведение ядра $K(z_1, z_2; \chi)$ при $|z_2|\to\infty$. В частности, при $|z_2|\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$K(z_1, z_2; \chi)\sim C_2 z_2^{-n_1-1}\bar{z}_2^{-n_2-1}, \tag{2}$$

где $C_2=(-1)^{n_1-n_2}K_2(z_1, 0; \chi)$.

Наконец, рассматривая одновременно левые и правые сдвиги функции $f(g)$, мы установим, что ядро

$$K_3(z_1, z_2; \chi)=$$
$$=z_1^{n_1-1}\bar{z}_1^{n_2-1}z_2^{-n_1-1}\bar{z}_2^{-n_2-1}K\left(-\frac{1}{z_1}, -\frac{1}{z_2}; \chi\right)$$

непрерывно по z_1 и z_2 при всех конечных значениях z_1 и z_2. Этим свойством определяется поведение ядра $K(z_1, z_2; \chi)$, когда одновременно $|z_1|\to\infty$ и $|z_2|\to\infty$. В частности, при $|z_1|\to\infty$, $|z_2|\to\infty$ имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$K(z_1, z_2; \chi)\sim C_3 z_1^{n_1-1}\bar{z}_1^{n_2-1}z_2^{-n_1-1}\bar{z}_2^{-n_2-1}, \tag{3}$$

где $C_3=K_3(0, 0; \chi)$.

7. Существование следа у преобразования Фурье. Из результатов предыдущего пункта вытекает следующее свойство преобразования Фурье.

Пусть $f(g)$ — непрерывная быстро убывающая функция, а $K(z_1, z_2; \chi)$ — ядро ее преобразования Фурье. Тогда при любом значении χ интеграл

$$\frac{i}{2}\int K(z, z; \chi)\,dz\,d\bar{z} \tag{1}$$

абсолютно сходится.

В самом деле, из асимптотического равенства (3) п. 6 следует, что при $|z|\to\infty$

$$K(z, z; \chi)\sim C|z|^{-4}.$$

Поскольку интеграл $\frac{i}{2}\int\limits_{|z|\geqslant 1}|z|^{-4}dz\,d\bar{z}$ сходится, интеграл (1) сходится абсолютно.

Позже, в § 5, мы введем понятие бесконечно дифференцируемой функции $f(g)$ на группе, быстро убывающей вместе со всеми производными. Для таких функций $f(g)$ ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ их преобразования Фурье $F(\chi)$ есть уже не только непрерывная, но и бесконечно дифференцируемая функция от z_1, z_2. Если бы это ядро было еще и финитным, то отсюда следовало бы, что при любом χ оператор $F(\chi)$ имеет след, равный

$$\frac{i}{2}\int K(z, z; \chi)\,dz\,d\bar{z}.$$

В нашем случае функция $K(z_1, z_2; \chi)$ не финитна и может иметь даже особенность при $z_1=\infty$ или $z_2=\infty$. Тем не менее можно утверждать, что оператор $F(\chi)$, отвечающий бесконечно дифференцируемой функции $f(g)$, быстро убывающей вместе со всеми производными, имеет след, равный $\frac{i}{2}\int K(z, z; \chi)\,dz\,d\bar{z}$.

Чтобы в этом убедиться, нужно реализовать пространство D_χ не как пространство функций от z, а как пространство функций на компактном многообразии (например, как пространство функций $f(z_1, z_2)$, заданных на сфере $|z_1|^2+|z_2|^2=1$). В этой реализации ядро оператора $F(\chi)$ есть бесконечно дифференцируемая функция $K(z_1, z_2; \chi)$ на компактном многообразии. Тем самым отпадают затруднения, связанные с поведением ядра на бесконечности.

Итак, мы можем утверждать, что если $f(g)$ — бесконечно дифференцируемая функция, быстро убывающая вмест со всеми производными, то оператор

$$F(\chi)=\int f(g)\,T_\chi(g)\,dg \tag{2}$$

имеет след. Этот след выражается через ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ оператора $F(\chi)$ следующей формулой:

$$\operatorname{Tr} F(\chi)=\frac{i}{2}\int K(z, z; \chi)\,dz\,d\bar{z}. \tag{3}$$

Выразим $\operatorname{Tr} F(\chi)$ непосредственно через функцию $f(g)$. Для этого подставим в формулу (3) вместо ядра $K(z_1, z_2; \chi)$ его выражение через $f(g)$. В результате получим следующую формулу (подробную выкладку предоставляется проделать читателю):

$$\operatorname{Tr} F(\chi)=\int f(g)\frac{\lambda^{n_1}\bar{\lambda}^{n_2}+\lambda^{-n_1}\bar{\lambda}^{-n_2}}{|\lambda-\lambda^{-1}|^2}\,dg, \tag{4}$$

где λ, λ^{-1} — собственные значения матрицы g.

Сопоставим выражение (2) для $F(\chi)$ с формулой (4) для $\operatorname{Tr} F(\chi)$. Как мы видим, чтобы получить след оператора $F(\chi)$, нужно заменить в выражении (2) для $F(\chi)$ оператор $T_\chi(g)$ на $\dfrac{\lambda^{n_1}\bar{\lambda}^{n_2}+\lambda^{-n_1}\bar{\lambda}^{-n_2}}{|\lambda-\lambda^{-1}|^2}$, где λ, λ^{-1} — собственные значения матрицы g. Тем самым выражение $\dfrac{\lambda^{n_1}\bar{\lambda}^{n_2}+\lambda^{-n_1}\bar{\lambda}^{-n_2}}{|\lambda-\lambda^{-1}|^2}$ можно рассматривать как обобщенный след оператора $T_\chi(g)$. (Заметим, что этот оператор не имеет следа в обычном смысле.)

Было бы интересно получить формулу для обобщенного следа оператора $T_\chi(g)$ непосредственной выкладкой.

§ 3. ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ И ФОРМУЛА ПЛАНШЕРЕЛЯ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГРУППЕ G

1. Постановка задачи. В предыдущем параграфе было определено преобразование Фурье быстро убывающей функции на группе G. Здесь будет выведена формула обращения, восстанавливающая функцию на группе по ее преобразованию

Фурье. Кроме того, будет описан класс операторных функций $F(\chi)$, являющихся преобразованиями Фурье функций с интегрируемым квадратом модуля, и будет получен аналог формулы Планшереля.

Образцом для нас будет служить формула обращения и формула Планшереля для преобразований Фурье функций на вещественной прямой (или в n-мерном евклидовом пространстве). Как известно, функция $f(x)$ с интегрируемым квадратом модуля на прямой выражается через свое преобразование Фурье $F(\lambda)$ по формуле

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Формула же Планшереля имеет следующий вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\,d\lambda.$$

Здесь будут получены аналоги этих формул для функций $f(g)$ на группе G и их преобразований Фурье $F(\chi)$.

Как мы увидим, имеется существенное различие между приведенными формулами для прямой и их аналогами для группы G. Именно, в формулах для прямой преобразование Фурье $F(\lambda)$ надо знать при всех вещественных значениях λ. Это как раз те значения λ, при которых оператор умножения на $e^{i\lambda x}$ является унитарным оператором на прямой. Аналогичное положение имеет место и для n-мерного евклидова пространства. Казалось бы, что в формуле обращения и формуле Планшереля для группы G преобразование Фурье $F(\chi)$ также должно быть задано для всех значений χ, при которых экспонента $T_\chi(g)$ является унитарным оператором. Однако на самом деле функция $f(g)$ с интегрируемым квадратом модуля на группе G разлагается не по всем унитарным представлениям группы G, а лишь по представлениям основной серии (то есть по представлениям $T_\chi(g)$, для которых $n_2=-\bar{n}_1$). Напомним, что, кроме представлений основной серии, унитарными являются также представления дополнительной серии, у которых

$$n_1=n_2=\rho, \quad -1<\rho<1, \ \rho\neq 0.$$

Случай, когда в разложение функций с интегрируемым квадратом входят все унитарные представления, является в известном смысле вырожденным. Он имеет место для компактных групп, для евклидовых пространств (а также для всех пространств, в которых действует, например, нильпотентная группа Ли). В случае же полупростых групп Ли всегда есть много унитарных представлений, не входящих в разложение функций с интегрируемым квадратом.

Итак, сформулируем стоящую перед нами задачу. Пусть задано преобразование Фурье $F(\chi)$ функции на группе G $f(g) \equiv f(\alpha, \beta, \delta)$ с интегрируемым квадратом модуля.

Это преобразование Фурье $F(\chi)$ определено на «вещественной оси», то есть на совокупности таких точек $\chi = (n_1, n_2)$, которым соответствуют унитарные представления основной серии.

Как мы уже знаем из главы III, точки $\chi = (n_1, n_2)$ «вещественной оси» характеризуются условием $n_2 = -\overline{n_1}$, то есть n_1 и n_2 могут быть записаны в виде

$$n_1 = \frac{n + i\rho}{2}, \quad n_2 = \frac{-n + i\rho}{2},$$

где ρ — вещественное, а n — целое число.

Наша цель — выразить функцию $f(g)$ через значения $F(\chi)$, где $\chi = (n_1, n_2)$ пробегает «вещественную ось».

Напомним, что преобразование Фурье $F(\chi)$ функции $f(g)$ есть оператор (в пространстве D_χ) с ядром $K(z_1, z_2; \chi)$, которое выражается через функцию $f(g)$ следующим образом:

$$K(z_1, z_2; \chi) = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int f(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1) \lambda^{n_1 - 1} \overline{\lambda}^{n_2 - 1} \, d\lambda \, d\overline{\lambda} \, d\beta \, d\overline{\beta}. \tag{1}$$

Таким образом, задача состоит в том, чтобы получить обращение формулы (1), то есть выразить функцию $f(g)$ через ядро $K(z_1, z_2; \chi)$, где χ пробегает «вещественную ось».

Решение этой задачи будет проведено в два этапа. Именно, мы рассмотрим функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$, определяемую по функции $f(g) \equiv f(\alpha, \beta, \delta)$, следующей формулой:

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{i}{2} \int f(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1) \, d\beta \, d\overline{\beta}. \tag{2}$$

Ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ функции $f(g)$ выражается через функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ по формуле

$$K(z_1, z_2; \chi) = \frac{i}{2} \int \varphi(z_1, z_2; \lambda) \lambda^{n_1 - 1} \overline{\lambda}^{n_2 - 1} \, d\lambda \, d\overline{\lambda}. \tag{3}$$

(Интеграл справа мы называем преобразованием Меллина функции φ.) Тем самым, чтобы выразить функцию $f(g)$ через ядро $K(z_1, z_2; \lambda)$ ее преобразования Фурье, нужно решить следующие две задачи:

1) Получить обращение формулы (3), то есть выразить функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ через $K(z_1, z_2; \chi)$.

2) Получить обращение формулы (2), то есть выразить функцию $f(g)$ через функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$.

Решение первой задачи не составляет труда. По существу здесь нужно восстановить функцию, зная ее обычное преобразование Меллина. Это будет сделано в п. 2.

Основную трудность составляет вторая задача — восстановить функцию $f(g)$ по функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$. Она будет решена в п. 3.

Эта вторая задача имеет простое геометрическое истолкование. Именно, функцию $f(g)$ можно рассматривать как функцию по поверхности второго порядка $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ в четырехмерном комплексном линейном пространстве. Тогда $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ есть интеграл функции $f(g)$, взятый вдоль «прямолинейной образующей» этой поверхности (см. § 2, п. 3, где была впервые введена функция $\varphi(z_1\ z_2; \lambda)$).

Задача состоит, следовательно, в том, чтобы восстановить функцию, заданную на поверхности $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ в четырехмерном комплексном линейном пространстве, зная интегралы этой функции вдоль всех прямолинейных образующих этой поверхности. В такой постановке она является задачей интегральной геометрии.

Эта задача была решена в гл. II, § 2. Ее решение дается следующей формулой обращения:

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{i}{2} \int\limits_{\Gamma} L\overline{L}\Phi(u, v; u\alpha + v\gamma, u\beta + v\delta) \times \\ \times (u\,dv - v\,du)(\overline{u}\,d\overline{v} - \overline{v}\,d\overline{u}), \tag{4}$$

где $\Phi(u, v; u', v')$ — интеграл по прямолинейной образующей, заданной *однородными координатами* $u, v; u', v'$. В этой формуле интеграл берется по произвольной линии Γ

на плоскости (u, v), пересекающейся по одному разу с каждой комплексной прямой, проходящей через точку $(0, 0)$; $L, \bar{L}$ — операторы следующего вида:

$$L = -u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + u'\frac{\partial}{\partial u'} + v'\frac{\partial}{\partial v'}, \tag{5}$$

$$\bar{L} = -\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{u}} - \bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{v}} + \bar{u}'\frac{\partial}{\partial \bar{u}'} + \bar{v}'\frac{\partial}{\partial \bar{v}'}. \tag{5$'$}$$

Формула (4) имеет простое геометрическое истолкование. Она означает, что для получения $f(g)$ нужно сначала применить к функции $\Phi(u, v; u', v')$ операторы $L, \bar{L}$ «бесконечно малого параллельного сдвига прямой», а затем функцию $L\bar{L}\Phi$ усреднить по множеству всех «прямолинейных образующих» поверхности $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, проходящих через точку g.

Перепишем формулу обращения (4) в неоднородных координатах z_1, z_2, λ, перейдя соответственно от функции $\Phi(u, v; u', v')$ к функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$. Согласно § 2, п. 3, функция $\Phi(u, v; u', v')$ выражается через функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ следующим образом:

$$\Phi(u, v; u', v') = v^{-1}\bar{v}^{-1}v'^{-1}\bar{v}'^{-1}\varphi\left(\frac{u}{v}, \frac{u'}{v'}; \frac{v'}{v}\right). \tag{6}$$

Подставив это выражение для функции Φ в формулу обращения (4), где в качестве контура Γ взята прямая $v = 1$, мы получим после элементарных преобразований следующее выражение функции $f(g)$ через функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$:

$$f(g) = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{i}{2}\int \varphi_{\lambda\bar{\lambda}}\left(z, \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}; \beta z + \delta\right) dz\, d\bar{z}. \tag{7}$$

Впрочем, мы не будем опираться на результаты гл. II и дадим в п. 3 независимый вывод формулы обращения (7), основанный на преобразовании Фурье. При этом новом подходе совершенно отчетливо видна взаимная однозначность отображения $f \to \varphi$.

Чтобы избежать затруднений, связанных со сходимостью интегралов и параметризацией группы G, мы будем предполагать, что функция $f(g) = f(\alpha, \beta, \delta)$ финитна на группе и обращается в нуль при достаточно малых значениях β. Это

позволяет рассматривать $f(g)$ как финитную функцию параметров α, β, δ. Кроме того, будем предполагать, что f бесконечно дифференцируема по этим параметрам. В дальнейшем мы освободимся от этих ограничений.

2. Восстановление функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ по ядру $K(z_1, z_2; \chi)$. В этом пункте мы найдем формулу обращения для интегрального преобразования Меллина

$$K(z_1, z_2; \chi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z_1, z_2; \lambda)\lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}d\lambda\, d\bar{\lambda}. \tag{1}$$

Мы покажем, что *функция $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ выражается через ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ следующей формулой обращения*:

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{X_0} K(z_1, z_2; \chi)\lambda^{-n_1}\bar{\lambda}^{-n_2}d\chi. \tag{2}$$

Здесь X_0 — «вещественная ось», то есть множество точек $\chi = \left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$, где ρ — вещественное, а n — целое число. «Интегрирование» по χ нужно понимать как интегрирование по ρ и суммирование по n.

Для доказательства заметим, что преобразование (1) сводится к обычному преобразованию Фурье. В самом деле, делая подстановку $\lambda = e^{\tau + i\alpha}$, мы получим

$$K(z_1, z_2; \chi) = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z_1, z_2; e^{\tau + i\alpha})\, e^{\tau(n_1+n_2)}e^{i(n_1-n_2)\alpha}\, d\tau\, d\alpha. \tag{3}$$

Если $\operatorname{Re}(n_1 + n_2) = 0$, то есть $n_1 = \frac{n+i\rho}{2}$, $n_2 = \frac{-n+i\rho}{2}$, где ρ — вещественное, а n — целое число, то формула (3) принимает следующий вид:

$$K(z_1, z_2; \chi) = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z_1, z_2, e^{\tau + i\alpha})\, e^{i\rho\tau}e^{in\alpha}\, d\tau\, d\alpha. \tag{4}$$

Таким образом, $K(z_1, z_2; \chi)$ является преобразованием Фурье функции $\varphi(z_1, z_2, e^{\tau + i\alpha})$ по переменным τ и α (точнее, по переменному τ делается преобразование Фурье, а по переменному α вычисляется коэффициент ряда Фурье). Пользуясь обычными формулами обратного преобразования Фурье, получаем отсюда, что

$$\varphi(z_1, z_2; e^{\tau+i\alpha}) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(z_1, z_2; \frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right) e^{-i\rho\tau} e^{-in\alpha} \, d\rho^*). \quad (5)$$

Эту формулу обращения удобно записать в следующей форме:

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{X_0} K(z_1, z_2; \chi) \lambda^{-n_1} \bar{\lambda}^{-n_2} \, d\chi,$$

где X_0 — множество точек $\chi = \left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$. «Интегрирование» по χ нужно понимать как интегрирование по ρ и суммирование по n.

Можно показать, что преобразование Фурье финитной бесконечно дифференцируемой функции $f(g)$ является аналитической функцией от χ. Поэтому можно, вообще говоря, заменить интегрирование по «контуру» X_0 (являющемуся аналогом вещественной прямой) интегрированием по другому контуру. Тем самым для функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ можно получить выражения через ядра $K(z_1, z_2; \chi)$, соответствующие неунитарным представлениям группы G. Мы, однако, не будем останавливаться здесь на этом интересном вопросе.

3. Выражение функции $f(g)$ через функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$. Теперь выведем формулу обращения для интегрального преобразования

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{i}{2} \int f(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1) \, d\beta \, d\bar{\beta}. \quad (1)$$

Сначала введем на группе G новые параметры

$$p_1 = -\frac{\delta}{\beta}, \quad p_2 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad p_3 = \frac{1}{\beta}.$$

*) Применение формул обращения Фурье обосновано в силу предположений о финитности функции $f(g)$, сделанных на стр. 310. Именно, при этих предположениях функция $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$, определенная формулой (2) п. 1, является при фиксированных значениях z_1 и z_2 финитной функцией от λ, бесконечно дифференцируемой по λ и $\bar{\lambda}$.

Обозначим через $f_1(p_1, p_2, p_3)$ исходную функцию $f(g) \equiv f(\alpha, \beta, \delta)$, выраженную в параметрах p_1, p_2, p_3. Иными словами,

$$f(\alpha, \beta, \delta) = f_1\left(-\frac{\delta}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right)^*). \quad (2)$$

Тогда интегральное преобразование (1) примет следующий вид:

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{i}{2} \int f_1(z_1 - \lambda p_3, z_2 + \lambda^{-1} p_3, p_3) |p_3|^{-4} \, dp_3 \, d\bar{p}_3. \quad (3)$$

Наша задача — вывести формулу обращения для этого интегрального преобразования.

Перейдем от функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ к ее преобразованию Фурье $\Phi(w_1, w_2; \lambda)$ по переменным z_1, z_2:

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \varphi(z_1, z_2; \lambda) e^{i \operatorname{Re}(z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2)} \, dz_1 \, d\bar{z}_1 \, dz_2 \, d\bar{z}_2 \,^{**}). \quad (4)$$

Выразим функцию $\Phi(w_1, w_2; \lambda)$ непосредственно через исходную функцию $f_1(p_1, p_2, p_3)$. На основании формул (1) и (2) получаем

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int f_1(z_1 - \lambda p_3, z_2 + \lambda^{-1} p_3, p_3) e^{i \operatorname{Re}(z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2)} \times \\ \times |p_3|^{-4} \, dz_1 \, d\bar{z}_1 \, dz_2 \, d\bar{z}_2 \, dp_3 \, d\bar{p}_3. \quad (5)$$

*) Заметим, что в силу предположений о функции $f(g)$, сделанных в конце п. 1, функция $f_1(p_1, p_2, p_3)$ является финитной бесконечно дифференцируемой функцией от p_1, p_2, p_3, равной нулю при достаточно малых значениях $|p_3|$.

**) Заметим, что при сделанных предположениях о функции $f(g)$ интеграл (4) сходится и что справедлива формула обратного преобразования Фурье. В самом деле, функция $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ является при фиксированном λ финитной бесконечно дифференцируемой функцией от z_1, z_2.

Сделаем здесь замену переменных интегрирования, положив

$$p_1 = z_1 - \lambda p_3, \quad p_2 = z_2 + \lambda^{-1} p_3.$$

Мы получим

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int f_1(p_1, p_2, p_3) |p_3|^{-4} e^{i \operatorname{Re}[p_1\overline{w}_1 + p_2\overline{w}_2 + p_3(\lambda\overline{w}_1 - \lambda^{-1}\overline{w}_2)]} \times \\ \times dp_1\, d\overline{p}_1\, dp_2\, d\overline{p}_2\, dp_3\, d\overline{p}_3. \quad (6)$$

Отсюда мы видим, что функция $\Phi(w_1, w_2; \lambda)$ связана простым соотношением с *преобразованием Фурье* $F(w_1, w_2, w_3)$ функции $f_1(p_1, p_2, p_3)|p_3|^{-4}$,

$$F(w_1, w_2, w_3) = \\ = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int f_1(p_1, p_2, p_3) |p_3|^{-4} e^{i \operatorname{Re}(p_1\overline{w}_1 + p_2\overline{w}_2 + p_3\overline{w}_3)} \times \\ \times dp_1\, d\overline{p}_1\, dp_2\, d\overline{p}_2\, dp_3\, d\overline{p}_3. \quad (7)$$

Именно

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) = F(w_1, w_2, \overline{\lambda} w_1 - \overline{\lambda}^{-1} w_2). \quad (8)$$

Полученное соотношение (8) есть основное соотношение, связывающее между собой функцию f и функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$.

Ясно, что на основании этого соотношения функция $F(w_1, w_2, w_3)$, а тем самым и функция $f_1(p_1, p_2, p_3)$ могут быть выражены через функцию $\Phi(w_1, w_2; \lambda)$.

Найдем выражение функции $f_1(p_1, p_2, p_3)$ через функцию $\Phi(w_1, w_2; \lambda)$. В силу формулы обратного преобразования Фурье мы имеем

$$\frac{f_1(p_1, p_2, p_3)}{|p_3|^4} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int F(w_1, w_2, w_3)\, e^{-i \operatorname{Re}(p_1\overline{w}_1 + p_2\overline{w}_2 + p_3\overline{w}_3)} \times \\ \times dw_1\, d\overline{w}_1\, dw_2\, d\overline{w}_2\, dw_3\, d\overline{w}_3. \quad (9)$$

Чтобы перейти от функции F к функции $\Phi(w_1, w_2; \lambda)$, сделаем замену переменной $w_3 = \overline{\lambda} w_1 - \overline{\lambda}^{-1} w_2$. Мы получим *)

$$\frac{f_1(p_1, p_2, p_3)}{|p_3|^4} = \frac{1}{2(2\pi)^6} \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int F(w_1, w_2, \overline{\lambda} w_1 - \overline{\lambda}^{-1} w_2) \times \\ \times |\overline{w}_1 + \lambda^{-2} \overline{w}_2|^2 e^{-i \operatorname{Re}(p_1\overline{w}_1 + p_2\overline{w}_2 + p_3(\lambda\overline{w}_1 - \lambda^{-1}\overline{w}_2))} \times \\ \times dw_1\, d\overline{w}_1\, dw_2\, d\overline{w}_2\, d\lambda\, d\overline{\lambda} = \\ = \frac{1}{2(2\pi)^6} \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int \Phi(w_1, w_2; \lambda) |\overline{w}_1 + \lambda^{-2}\overline{w}_2|^2 \times \\ \times e^{-i \operatorname{Re}(p_1\overline{w}_1 + p_2\overline{w}_2 + p_3(\lambda\overline{w}_1 - \lambda^{-1}\overline{w}_2))} dw_1\, d\overline{w}_1\, dw_2\, d\overline{w}_2\, d\lambda\, d\overline{\lambda}. \quad (10)$$

Итак, мы нашли выражение функции $f_1(p_1, p_2, p_3)$ через функцию $\Phi(w_1, w_2; \lambda)$, то есть через преобразование Фурье функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ по переменным z_1, z_2. Отсюда легко уже получить выражение функции $f_1(p_1, p_2, p_3)$ через функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$. Подставляя в (10) выражение

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \varphi(z_1, z_2; \lambda)\, e^{i \operatorname{Re}(z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2)} dz_1\, d\overline{z}_1\, dz_2\, d\overline{z}_2,$$

мы получим

$$\frac{f_1(p_1, p_2, p_3)}{|p_3|^4} = \\ = \frac{1}{2(2\pi)^6} \int \varphi(z_1, z_2, \lambda)\, e^{i \operatorname{Re}[\overline{w}_1(z_1 - p_1 - p_3\lambda) + \overline{w}_2(z_2 - p_2 + p_3\lambda^{-1})]} \times \\ \times |\overline{w}_1 + \lambda^{-2}\overline{w}_2|^2\, dv, \quad (11)$$

где $dv = \left(\frac{i}{2}\right)^5 dw_1\, d\overline{w}_1\, dw_2\, d\overline{w}_2\, d\lambda\, d\overline{\lambda}\, dz_1\, d\overline{z}_1\, dz_2\, d\overline{z}_2$.

Для упрощения полученной формулы выполним интегрирование по w_1, w_2. Для этого воспользуемся равенством

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int e^{i \operatorname{Re}[\overline{w}_1(z_1 - p_1 - p_3\lambda) + \overline{w}_2(z_2 - p_2 + p_3\lambda^{-1})]} \times \\ \times dw_1\, d\overline{w}_1\, dw_2\, d\overline{w}_2 = \delta(z_1 - p_1 - p_3\lambda,\ z_2 - p_2 + p_3\lambda^{-1});$$

---

*) Дополнительный множитель $\frac{1}{2}$ возникает вследствие того, что когда λ пробегает комплексную плоскость, переменная $w_3 = \overline{\lambda} w_1 - \overline{\lambda}^{-1} w_2$ пробегает комплексную плоскость дважды.

Дифференцируя это равенство по λ и $\bar{\lambda}$, мы получим

$$-\frac{|p_3|^2}{4(2\pi)^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int e^{i\,\mathrm{Re}\,[\bar{w}_1(z_1-p_1-p_3\lambda)+\bar{w}_2(z_2-p_2+p_3\lambda^{-1})]} \times$$
$$\times |\bar{w}_1+\lambda^{-2}\bar{w}_2|^2\, dw_1\, d\bar{w}_1\, dw_2\, d\bar{w}_2 =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\bar{\lambda}}\,\delta\left(z_1-p_1-p_3\lambda,\ z_2-p_2+p_3\lambda^{-1}\right).$$

Таким образом, после интегрирования по w_1, w_2 формула (11) принимает следующий вид:

$$f_1(p_1,\ p_2,\ p_3) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2}|p_3|^2\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int \varphi(z_1,\ z_2;\ \lambda) \times$$
$$\times \frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\bar{\lambda}}\,\delta\left(z_1-p_1-p_3\lambda,\ z_2-p_2+p_3\lambda^{-1}\right) dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2\, d\lambda\, d\bar{\lambda} =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2}|p_3|^2\,\frac{i}{2}\int \varphi_{\lambda\bar{\lambda}}\left(p_1+p_3\lambda,\ p_2-p_3\lambda^{-1};\ \lambda\right) d\lambda\, d\bar{\lambda}, \quad (12)$$

где

$$\varphi_{\lambda\bar{\lambda}}\left(p_1+p_3\lambda,\ p_2-p_3\lambda^{-1};\ \lambda\right) = \left.\frac{\partial^2\varphi(z_1,\ z_2;\ \lambda)}{\partial\lambda\,\partial\bar{\lambda}}\right|_{\substack{z_1=p_1+p_3\lambda\\ z_2=p_2-p_3\lambda^{-1}}}. \quad (13)$$

Это и есть искомая формула обращения.

Перейдем в этой формуле к прежним параметрам α, β, δ на группе G, вспоминая, что $p_1 = -\frac{\delta}{\beta}$, $p_2 = \frac{\alpha}{\beta}$, $p_3 = \frac{1}{\beta}$. Мы получим

$$f(\alpha,\ \beta,\ \delta) = -\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{1}{|\beta|^2}\,\frac{i}{2}\int \varphi_{\lambda\bar{\lambda}}\left(\frac{\lambda-\delta}{\beta},\ \frac{\alpha-\lambda^{-1}}{\beta};\ \lambda\right) d\lambda\, d\bar{\lambda}.$$

Заменой переменной $z = \frac{\lambda-\delta}{\beta}$ формула приводится к виду

$$f(\alpha,\ \beta,\ \delta) = -\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{i}{2}\int \varphi_{\lambda\bar{\lambda}}\left(z,\ \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta};\ \beta z+\delta\right) dz\, d\bar{z}. \quad (14)$$

Итак, нами получен следующий результат. *Пусть* $f(g) \equiv f(\alpha,\ \beta,\ \delta)$ — *финитная бесконечно дифференцируемая функция на группе* G, *и пусть задано интегральное преобразование*

$$\varphi(z_1,\ z_2;\ \lambda) = \frac{i}{2}\int f\left(\lambda^{-1}+\beta z_2,\ \beta,\ \lambda-\beta z_1\right) d\beta\, d\bar{\beta}. \quad (15)$$

Тогда функция $f(\alpha,\ \beta,\ \delta)$ *восстанавливается по функции* $\varphi(z_1,\ z_2;\ \lambda)$ *следующей формулой обращения*:

$$f(\alpha,\ \beta,\ \delta) = -\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{i}{2}\int \varphi_{\lambda\bar{\lambda}}\left(z,\ \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta};\ \beta z+\delta\right) dz\, d\bar{z}. \quad (16)$$

Напомним, что при выводе формулы обращения на функцию $f(\alpha,\ \beta,\ \delta)$ накладывалось дополнительное ограничение. Именно, предполагалось, что она обращается в нуль при малых значениях $|\beta|$.

На самом деле это ограничение несущественно (см. п. 4). Из результатов п. 5 будет ясно, что формула обращения верна и для любой функции $f(g)$ с интегрируемым квадратом модуля, при условии, что интегралы (15) и (16) сходятся.

4. Выражение функции $f(g)$ через ее преобразование Фурье $F(\chi)$. Комбинируя результаты пп. 2 и 3, легко выразить функцию $f(g) = f(\alpha,\ \beta,\ \delta)$ на группе через ядро $K(z_1,\ z_2;\ \chi)$ ее преобразования Фурье. Именно, в п. 3 мы получили формулу обращения

$$f(\alpha,\ \beta,\ \delta) = -\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{i}{2}\int \varphi_{\lambda\bar{\lambda}}\left(z,\ \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta};\ \beta z+\delta\right) dz\, d\bar{z}. \quad (1)$$

С другой стороны, в п. 2 было найдено выражение функции $\varphi(z_1,\ z_2;\ \lambda)$ через ядро $K(z_1,\ z_2;\ \chi)$:

$$\varphi(z_1,\ z_2;\ \lambda) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{X_0} K(z_1,\ z_2;\ \chi)\,\lambda^{-n_1}\bar{\lambda}^{-n_2}\, d\chi, \quad (2)$$

где интегрирование ведется по «вещественной оси» X_0: $\chi = (n_1,\ n_2) = \left(\frac{n+i\rho}{2},\ \frac{-n+i\rho}{2}\right)$ *).

Продифференцируем равенство (2) по λ и $\bar{\lambda}$ и подставим полученное выражение для $\varphi_{\lambda\bar{\lambda}}(z_1,\ z_2;\ \lambda)$ в формулу (1). Мы придем к следующему результату.

Финитная бесконечно дифференцируемая функция $f(g) = f(\alpha,\ \beta,\ \delta)$ *на группе* G *восстанавливается по*

*) Напомним, что интегрирование по χ нужно понимать как интегрирование по ρ и суммирование по n.

ядру $K(z_1, z_2; \chi)$ своего преобразования Фурье так:

$$f(\alpha, \beta, \delta) = -\frac{1}{8\pi^4}\frac{i}{2}\int\limits_{X_0}\int n_1 n_2 K\left(z, \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}; \chi\right)\times$$
$$\times(\beta z+\delta)^{-n_1-1}\overline{(\beta z+\delta)}^{-n_2-1}dz\,d\bar z\,d\chi. \quad (3)$$

Здесь $\chi = (n_1, n_2) = \left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$, *где* n — *целое*, ρ — *вещественное число; интегрирование по* χ *следует понимать как интегрирование по* ρ *и суммирование по* n.

В более развернутой записи формула (3) имеет следующий вид:

$$f(\alpha, \beta, \delta) = \frac{1}{32\pi^4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(n^2+\rho^2)\,d\rho\times$$
$$\times\int K\left(z, \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}; \frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)\times$$
$$\times(\beta z+\delta)^{-\frac{1}{2}(n+i\rho)-1}\overline{(\beta z+\delta)}^{\frac{1}{2}(n-i\rho)-1}dz\,d\bar z. \quad (4)$$

Заметим, что предположение о финитности функции $f(\alpha, \beta, \delta)$ может быть отброшено. Это будет видно из следующего пункта.

Выразим теперь функцию $f(g)$ непосредственно через ее преобразование Фурье $F(\chi)$. Для этого заметим, что функция

$$K\left(z_1, \frac{\alpha z_2+\gamma}{\beta z_2+\delta}, \chi\right)(\beta z_2+\delta)^{-n_1-1}\overline{(\beta z_2+\delta)}^{-n_2-1}$$

является ядром оператора $F(\chi)T_\chi^{-1}(g)$, где $F(\chi)$ — преобразование Фурье функции $f(g)$ (см. п. 4, § 2). Следовательно,

$$\frac{i}{2}\int K\left(z_1, \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}, \chi\right)(\beta z+\delta)^{-n_1-1}\overline{(\beta z+\delta)}^{-n_2-1}dz\,d\bar z =$$
$$= \mathrm{Tr}\left(F(\chi)T_\chi^{-1}(g)\right), \quad (5)$$

где Tr обозначает след оператора.

Итак, *функция $f(g)$ на группе выражается следующим образом через свое преобразование Фурье* $F(\chi)$:

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi^4}\int\limits_{X_0}\mathrm{Tr}\left(F(\chi)T_\chi^{-1}(g)\right)c(\chi)\,d\chi, \quad c(\chi) = n_1 n_2{}^{*}). \quad (6)$$

Формула обращения (6) доказана нами для бесконечно дифференцируемых финитных функций, равных нулю при достаточно малых значениях $|\beta|$. Однако на самом деле эта формула справедлива для *всех* финитных бесконечно дифференцируемых функций. Это следует непосредственно из следующего утверждения.

Если формула обращения (6) *справедлива для функции* $f(g)$, *то она справедлива и для функции* $f_1(g) = f(gg_0)$, *где* g_0 — *произвольный элемент группы* G. Докажем это утверждение.

Как было показано в § 2, п. 1, если $F(\chi)$ — преобразование Фурье функции $f(g)$, то преобразованием Фурье функции $f_1(g) = f(gg_0)$ будет $F_1(\chi) = F(\chi)T_\chi^{-1}(g_0)$. По условию, для функции $f(g)$ справедлива формула обращения. Поэтому имеем

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi^4}\int\limits_{X_0}\mathrm{Tr}\left[F(\chi)T_\chi(g^{-1})\right]c(\chi)\,d\chi.$$

Отсюда следует, что

$$f_1(g) = f(gg_0) = -\frac{1}{8\pi^4}\int\limits_{X_0}\mathrm{Tr}\left[F(\chi)T_\chi\left(g_0^{-1}g^{-1}\right)\right]c(\chi)\,d\chi =$$
$$= -\frac{1}{8\pi^4}\int\limits_{X_0}\mathrm{Tr}\left[F(\chi)T_\chi\left(g_0^{-1}\right)T_\chi(g^{-1})\right]c(\chi)\,d\chi =$$
$$= -\frac{1}{8\pi^4}\int\limits_{X_0}\mathrm{Tr}\left[F_1(\chi)T_\chi(g^{-1})\right]c(\chi)\,d\chi.$$

Тем самым справедливость формулы обращения для функции $f_1(g)$ доказана.

В п. 5 мы покажем, что формула обращения верна для любой функции $f(g)$ с интегрируемым квадратом модуля, если интеграл (3) понимать в смысле сходимости в среднем.

*) В теории представлений компактных групп роль пространств D_χ играют конечномерные пространства. Там коэффициент $c(\chi)$, входящий в формулу обращения, есть размерность пространства представления. Значит, и здесь $c(\chi) = n_1 n_2$ есть аналог размерности представления. (Заметим, кстати, что конечномерные представления группы G реализуются в пространстве многочленов от z и $\bar z$ степени соответственно $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ и для них $c(\chi) = n_1 n_2$ есть действительно размерность пространства представления.)

5. Аналог формулы Планшереля для группы G. Мы построили преобразование Фурье для функций на группе G и показали, что бесконечно дифференцируемые финитные функции могут быть восстановлены по значениям преобразования Фурье на «вещественной оси» X_0 в множестве X представлений, задаваемой условием $n_2=-\bar{n}_1$. В этом пункте соответствие между функциями $f(g)$ и операторами $F(\chi)$ будет распространено на все функции с интегрируемым квадратом модуля. Позже, в п. 6, будет описан класс операторов $F(\chi)$, соответствующих таким функциям.

Для получения этих результатов установим изометричность отображения $f(g)\to K(z_1, z_2; \chi)$ при соответствующем выборе скалярных произведений в пространствах функций $f(g)$ и ядер $K(z_1, z_2; \chi)$. Именно, введем для функций $f(g)$ на группе G естественное скалярное произведение

$$(f_1, f_2)=\int f_1(g)\overline{f_2(g)}\,dg, \tag{1}$$

а для ядер $K(z_1, z_2; \chi)$ положим

$$(K_1, K_2)=$$
$$=-\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\limits_{X_0}\int K_1(z_1, z_2; \chi)\overline{K_2(z_1, z_2; \chi)}\,c(\chi)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2\,d\chi, \tag{2}$$

где $c(\chi)=n_1n_2=-|n_1|^2$.

Интегрирование по $\chi=\left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$ здесь нужно понимать как интегрирование по ρ и суммирование по n.

Мы покажем, что *если $f_1(g)$, $f_2(g)$ — бесконечно дифференцируемые финитные функции, а $K_1(z_1, z_2; \chi)$, $K_2(z_1, z_2; \chi)$ — ядра их преобразований Фурье, то имеет место равенство*

$$(f_1, f_2)=(K_1, K_2),$$

то есть

$$\int f_1(g)\overline{f_2(g)}\,dg=-\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\limits_{X_0}\int K_1(z_1, z_2; \chi)\times$$
$$\times\overline{K_2(z_1, z_2; \chi)}\,c(\chi)\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2\,d\chi \tag{3}$$

(аналог формулы Планшереля).

Для доказательства формулы (3) рассмотрим свертку $f(g)=f_1*f_2^*(g)$ функций $f_1(g)$ и $f_2^*(g)=\overline{f_2(g^{-1})}$. Функция $f(g)$ также финитна и бесконечно дифференцируема. Следовательно, для нее справедлива формула обращения. В частности, из формулы обращения для $f(g)$ вытекает, что

$$f(e)=-\frac{1}{8\pi^4}\frac{i}{2}\int\limits_{X_0}\int K(z, z; \chi)\,c(\chi)\,d\chi\,dz\,d\bar{z}, \tag{4}$$

где $K(z_1, z_2; \chi)$ — ядро, соответствующее функции $f(g)=$ $=f_1*f_2^*(g)$. Это ядро, как было показано в § 2 п. 4, выражается через ядра $K_1(z_1, z_2; \chi)$ и $K_2(z_1, z_2; \chi)$ следующим образом:

$$K(z_1, z_2; \chi)=\frac{i}{2}\int K_1(z_1, z_3; \chi)\overline{K_2(z_2, z_3; \chi)}\,dz_3\,d\bar{z}_3.$$

Следовательно,

$$\frac{i}{2}\int K(z_1, z_1; \chi)\,dz_1\,d\bar{z}_1=$$
$$=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int K_1(z_1, z_2; \chi)\overline{K_2(z_1, z_2; \chi)}\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2.$$

С другой стороны, из определения свертки

$$f(g)=f_1*f_2^*(g)=\int f_1(g_1)f_2^*(g_1^{-1}g)\,dg_1=$$
$$=\int f_1(g_1)\overline{f_2(g^{-1}g_1)}\,dg_1$$

следует, что

$$f(e)=\int f_1(g_1)\overline{f_2(g_1)}\,dg_1=(f_1, f_2).$$

Таким образом, равенство (4) означает, что

$$(f_1, f_2)=-\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2\int\limits_{X_0}\int K_1(z_1, z_2, \chi)\overline{K_2(z_1, z_2, \chi)}\times$$
$$\times c(\chi)\,dz_1\,dz_2\,d\bar{z}_1\,d\bar{z}_2\,d\chi=(K_1, K_2). \tag{5}$$

Тем самым аналог формулы Планшереля доказан для финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Рассмотрим теперь пространство $\mathfrak{H}_f$ всех функций $f(g)$ с интегрируемым квадратом модуля на G. Финитные бесконечно дифференцируемые функции $f(g)$ образуют в нем всюду плотное подмножество. Отсюда следует, что *отображение* $f(g) \to K(z_1, z_2; \chi)$, *определенное пока только для финитных бесконечно дифференцируемых функций, можно продолжить до изометрического отображения пространства* $\mathfrak{H}_f$ *функций с интегрируемым квадратом модуля на группе в пространство* $\mathfrak{H}_K$ *ядер* $K(z_1, z_2; \chi)$, *для которых*

$$(K, K) = -\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{X_0}\int |K(z_1, z_2; \chi)|^2 c(\chi)\, dz_1 d\bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_2 d\chi < \infty.$$

Итак, для функций $f(g)$ с интегрируемым квадратом на группе G и их преобразований Фурье установлен следующий аналог формулы Планшереля:

$$\int |f(g)|^2 dg = -\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{X_0}\int |K(z_1, z_2; \chi)|^2 c(\chi)\, dz_1 d\bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_2 d\chi. \quad (6)$$

Полезно записать формулу (6) в другом виде, выразив правую часть не через ядро $K(z_1, z_2; \chi)$, а непосредственно через оператор $F(\chi)$. Для этого заметим, что оператор $F(\chi)$ с ядром $K(z_1, z_2; \chi)$ есть оператор Гильберта — Шмидта, поскольку

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |K(z_1, z_2; \chi)|^2 dz_1 d\bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_2 < \infty. \quad (7)$$

Поэтому оператор $F(\chi) F^*(\chi)$ имеет след, равный интегралу (7) Тем самым формулу Планшереля (6) можно также записать в следующем виде:

$$\int |f(g)|^2 dg = -\frac{1}{8\pi^4}\int_{X_0} c(\chi)\, \mathrm{Tr}\,(F(\chi) F^*(\chi))\, d\chi, \quad (8)$$

где $\mathrm{Tr}\,(FF^*)$ обозначает след оператора FF^*.

6. Соотношения симметрии для преобразования Фурье $F(\chi)$. Нам осталось выяснить, какие ядра $K(z_1, z_2; \chi)$ отвечают функциям $f(g)$ с интегрируемым квадратом на группе G. Для этого вспомним, как осуществлялся переход от функции $f(g) = f(\alpha, \beta, \delta)$ к ядру $K(z_1, z_2; \chi)$. Согласно пп. 1—3, этот переход осуществлялся последовательными отображениями

$$f(\alpha, \beta, \delta) \to f_1(p_1, p_2, p_3) \to F(w_1, w_2, w_3) \to \to \Phi(w_1, w_2; \lambda) \to \varphi(z_1, z_2, \lambda) \to K(z_1, z_2; \chi). \quad (1)$$

В развернутом виде эти отображения задаются следующими формулами:

$$f_1\left(-\frac{\delta}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right) = f(\alpha, \beta, \delta), \quad (2)$$

$$F(w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int \frac{f_1(p_1, p_2, p_3)}{|p_3|^4} e^{i\,\mathrm{Re}\,(p_1\bar{w}_1 + p_2\bar{w}_2 + p_3\bar{w}_3)} \times dp_1 d\bar{p}_1 dp_2 d\bar{p}_2 dp_3 d\bar{p}_3, \quad (3)$$

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) = F(w_1, w_2, \bar{\lambda} w_1 - \bar{\lambda}^{-1} w_2), \quad (4)$$

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{1}{16\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \Phi(w_1, w_2; \lambda) e^{i\,\mathrm{Re}\,(z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2)} dw_1 d\bar{w}_1 dw_2 d\bar{w}_2, \quad (5)$$

$$K(z_1, z_2; \chi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z_1, z_2, \lambda) \lambda^{n_1 - 1}\bar{\lambda}^{n_2 - 1} d\lambda d\bar{\lambda}. \quad (6)$$

Как показывает элементарный подсчет, эти отображения изометричны относительно скалярных произведений вида

$$(f_1, f_2) = \int f_1(g) \overline{f_2(g)}\, dg \equiv \equiv \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int f_1(\alpha, \beta, \delta) \overline{f_2(\alpha, \beta, \delta)} \frac{d\alpha\, d\bar{\alpha}\, d\beta\, d\bar{\beta}\, d\delta\, d\bar{\delta}}{|\beta|^2}, \quad (7)$$

$$(f_{1,1}, f_{1,2}) = \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int \frac{f_{1,1}(p_1, p_2, p_3)}{|p_3|^4} \overline{\frac{f_{1,2}(p_1, p_2, p_3)}{|p_3|^4}} \times |p_3|^2 dp_1 d\bar{p}_1 dp_2 d\bar{p}_2 dp_3 d\bar{p}_3, \quad (8)$$

$$(F_1, F_2) = -\frac{4}{(2\pi)^6}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int F_1(w_1, w_2, w_3) \overline{\frac{\partial^2 F_2(w_1, w_2, w_3)}{\partial w_3 \partial \bar{w}_3}} \times dw_1 d\bar{w}_1 dw_2 d\bar{w}_2 dw_3 d\bar{w}_3, \quad (9)$$

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -\frac{2}{(2\pi)^6}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int \Phi_1(w_1, w_2; \lambda) \overline{\frac{\partial^2 \Phi_2(w_1, w_2; \lambda)}{\partial\lambda\, \partial\bar{\lambda}}} \times dw_1 d\bar{w}_1 dw_2 d\bar{w}_2 d\lambda d\bar{\lambda}, \quad (10)$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int \varphi_1(z_1, z_2; \lambda)\,\overline{\frac{\partial^2\varphi_2(z_1, z_2; \lambda)}{\partial\lambda\,\partial\bar\lambda}} \times$$
$$\times\, dz_1\, d\bar z_1\, dz_2\, d\bar z_2\, d\lambda\, d\bar\lambda, \quad (11)$$

$$(K_1, K_2) = -\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{X_0}\!\!\int K_1(z_1, z_2; \chi)\,\overline{K_2(z_1, z_2; \chi)} \times$$
$$\times\, c(\chi)\, dz_1\, d\bar z_1\, dz_2\, d\bar z_2\, d\chi. \quad (12)$$

Мы получаем таким образом цепочку отображений

$$\mathfrak{H}_f \to \mathfrak{H}_{f_1} \to \mathfrak{H}_F \to \mathfrak{H}_\Phi \to \mathfrak{H}_\varphi \to \mathfrak{H}_K,$$

где $\mathfrak{H}_f, \mathfrak{H}_F, \ldots$ — гильбертовы пространства функций, в которых скалярные произведения задаются соответственно формулами (7) — (12).

Отображения $\mathfrak{H}_{f_1} \to \mathfrak{H}_F$, $\mathfrak{H}_\Phi \to \mathfrak{H}_\varphi$ и $\mathfrak{H}_\varphi \to \mathfrak{H}_K$ сводятся к обычным преобразованиям Фурье, а потому являются взаимно однозначными отображениями на все пространство. Очевидно, что и отображение $\mathfrak{H}_f \to \mathfrak{H}_{f_1}$, задаваемое формулой (2), является взаимно однозначным отображением на все пространство.

Рассмотрим теперь отображение $\mathfrak{H}_F \to \mathfrak{H}_\Phi$, задаваемое формулой (4):

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) = F(w_1, w_2; \bar\lambda w_1 - \bar\lambda^{-1} w_2).$$

Оно не является отображением на все пространство $\mathfrak{H}_\Phi$. В самом деле, при этом отображении получаются не все функции из пространства $\mathfrak{H}_\Phi$, а лишь функции, удовлетворяющие *условию симметрии*

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) = \Phi\left(w_1, w_2; -\frac{\bar w_2}{\lambda \bar w_1}\right). \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что, обратно, любая функция $\Phi(w_1, w_2, \lambda)$, удовлетворяющая условию симметрии (13), может быть получена из некоторой функции $F(w_1, w_2, w_3)$ пространства $\mathfrak{H}_F$.

Итак, доказано, что *пространство ядер $K(z_1, z_2; \chi)$, отвечающих функциям с интегрируемым квадратом на группе, состоит из всех таких функций $K(z_1, z_2; \chi)$, для которых*

$$-\frac{1}{8\pi^4}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{X_0}\!\!\int |K(z_1, z_2; \chi)|^2 c(\chi)\, dz_1\, d\bar z_1\, dz_2\, d\bar z_2\, d\chi < \infty$$

и которые, кроме того, удовлетворяют следующему условию симметрии: функция

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{X_0}\!\!\int K(z_1, z_2; \chi)\, e^{-i\,\mathrm{Re}\,(z_1\bar w_1 + z_2\bar w_2)} \lambda^{-n_1}\bar\lambda^{-n_2} \times$$
$$\times\, dz_1\, d\bar z_1\, dz_2\, d\bar z_2\, d\chi \quad (14)$$

сохраняется при замене λ *на* $-\frac{\bar w_2}{\lambda \bar w_1}$, то есть

$$\Phi(w_1, w_2; \lambda) = \Phi\left(w_1, w_2; -\frac{\bar w_2}{\lambda \bar w_1}\right). \quad (15)$$

Это условие симметрии (15) может быть записано непосредственно через ядро $K(z_1, z_2; \chi)$. Приведем без вывода окончательную формулу

$$\frac{i}{2}\int (z_1 - z)^{-n_1-1}\,\overline{(z_1 - z)}^{-n_2-1} K(z, z_2; \chi)\, dz\, d\bar z =$$
$$= (-1)^{n_1-n_2}\frac{i}{2}\int (z_2 - z)^{-n_1-1}\,\overline{(z_2 - z)}^{-n_2-1} K(z_1, z; -\chi)\, dz\, d\bar z,$$

где $\chi = (n_1, n_2)$, $-\chi = (-n_1, -n_2)$, $n_2 = -\bar n_1$.

Групповой смысл этого соотношения будет выяснен в § 5. Оно связано с тем, что представления, задаваемые числами (n_1, n_2) и $(-n_1, -n_2)$, как это было показано в п. 2 § 5 гл. III, эквивалентны между собой. Его же геометрический смысл был выяснен в гл. II, § 2, п. 7, стр. 159, где был намечен геометрический вывод соотношения симметрии (15).

7. Интеграл Фурье и разложение регулярного представления группы Лоренца на неприводимые. В этом пункте будет установлена связь между разложением функции $f(g)$ на группе Лоренца в интеграл Фурье и разложением регулярного представления этой группы на неприводимые. Чтение этого пункта необязательно для дальнейшего.

Дадим некоторые общие определения. Регулярное (точнее, правое регулярное) представление произвольной локально компактной группы G строится в гильбертовом пространстве H функций $f(g)$, заданных на этой группе, для которых сходится интеграл

$$\|f\|^2 = \int |f(g)|^2\, dg$$

(dg — право-инвариантная мера на G). Сопоставим каждому элементу g_0 группы G оператор $R(g_0)$ правого сдвига в H, переводящий функцию $f(g)$ в функцию

$$R(g_0) f(g) = f(gg_0).$$

Очевидно, что

$$R(g_1 g_2) = R(g_1) R(g_2),$$

и потому $R(g)$ является представлением группы G. Это представление и называется регулярным. В силу инвариантности меры dg при сдвигах $g \to gg_0$ регулярное представление унитарно. Возникает задача о разложении этого представления на неприводимые.

Для рассмотрения этой задачи нам понадобится понятие непрерывной прямой суммы гильбертовых пространств *).

Рассмотрим некоторое множество X, на котором задана положительная мера μ. Пусть каждой точке x этого множества сопоставлено сепарабельное гильбертово пространство $H(x)$ размерности $n(x)$, где $n(x)$ может принимать значения $1, 2, \ldots, n, \ldots$, или ∞, причем функция $n(x)$ измерима по мере μ. Дадим сначала определение непрерывной прямой суммы для случая, когда все пространства $H(x)$ имеют одну и ту же размерность n (n — натуральное число или ∞). Отождествим в этом случае каждое из пространств $H(x)$ с одним и тем же гильбертовым пространством H размерности n.

Построим пространство $\mathfrak{H}$, состоящее из таких вектор-функций $\xi = h(x)$ на множестве X, принимающих значения в пространстве H, что

1) для любого элемента h_0 из H числовая функция $(h_0, h(x))$ измерима по мере μ ((h_1, h_2) — скалярное произведение в H);

2) числовая функция $\|h(x)\|^2$ имеет интегрируемый квадрат модуля по мере μ:

$$\int_X \|h(x)\|^2 \, d\mu < +\infty.$$

Определим в $\mathfrak{H}$ линейные операции, задав их для вектор-функций $\xi = h(x)$, $\eta = g(x)$ формулами $\xi + \eta = h(x) + g(x)$, $a\xi = ah(x)$, и введем скалярное произведение, положив

$$(\xi, \eta) = \int_X (h(x), g(x)) \, d\mu.$$

*) Подробнее о непрерывной прямой сумме гильбертовых пространств см. вып. 4, п. 4 § 4 гл. I.

Можно показать, что пространство $\mathfrak{H}$ удовлетворяет всем аксиомам гильбертова пространства. Мы будем называть $\mathfrak{H}$ *непрерывной прямой суммой гильбертовых пространств* $H(x)$ *по мере* μ и обозначать

$$\mathfrak{H} = \int \oplus H(x) \, d\mu.$$

В случае, когда пространства $H(x)$ имеют различную размерность, поступают следующим образом. Разбивают множество X, на котором задана мера μ, на измеримые подмножества $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, в каждом из которых имеет место равенство $n(x) = n$. Мы уже знаем определение гильбертова пространства

$$\mathfrak{H}_n = \int_{X_n} \oplus H(x) \, d\mu.$$

Обозначим теперь через $\mathfrak{H}$ ортогональную прямую сумму пространств $\mathfrak{H}_n$:

$$\mathfrak{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{H}_n.$$

Это пространство называется непрерывной прямой суммой пространств $\mathfrak{H}(x)$ относительно меры μ и обозначается

$$\mathfrak{H} = \int_X \oplus H(x) \, d\mu.$$

Определим теперь, что значит разложение унитарного представления $T(g)$ группы G в непрерывную прямую сумму. Предположим, что задано представление $T(g)$ группы G в *ядерном* пространстве Φ (определение и свойства ядерных пространств см. в § 3 гл. I вып. 4 этой книги). Это представление называется унитарным относительно непрерывного по обоим аргументам скалярного произведения (φ, ψ) в Φ, если для любых двух элементов φ и ψ из Φ и любого элемента g группы G выполняется равенство

$$(\varphi, \psi) = (T(g)\varphi, \; T(g)\psi).$$

Пополним пространство Φ относительно скалярного произведения (φ, ψ). Мы получим тогда гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, причем представление $T(g)$ продолжается до унитарного представления группы G в $\mathfrak{H}$.

Предположим, что пространство $\mathfrak{H}$ разлагается в непрерывную прямую сумму гильбертовых пространств $H(x)$

$$\mathfrak{H} = \int_X \oplus H(x)\, d\mu$$

относительно некоторой меры μ. Тогда можно получить следующий результат (его доказательство аналогично доказательству теоремы 1′ из п. 4 § 4 гл. 1 вып. 4).

Для любого x из X существует такой ядерный оператор $P(x)$, отображающий пространство Φ в $H(x)$, что для $\varphi \in \Phi$ функции $\varphi(x)$ и $P(x)\varphi$ отличаются лишь на множестве меры нуль ($\varphi(x)$ — вектор-функция, соответствующая элементу φ при реализации пространства $\mathfrak{H}$ в виде непрерывной прямой суммы). При этом оператор $P(x)$ отображает Φ на всюду плотное подмножество в $H(x)$.

Предположим теперь, что существуют унитарные представления $T_x(g)$ группы G в пространствах $H(x)$ такие, что для любого элемента φ из Φ

$$T_x(g)P(x)\varphi = P(x)\,T(g)\,\varphi.$$

В этом случае мы будем говорить, что представление $T(g)$ является *непрерывной прямой суммой представлений* $T_x(g)$ и писать

$$T(g) = \int_X \oplus T_x(g)\, d\mu.$$

Представления $T_x(g)$ называются компонентами представления $T(g)$ в пространствах $H(x)$. Как правило, нас будет интересовать случай, когда компоненты $T_x(g)$ — неприводимые.

Простейшим примером разложения представления в непрерывную прямую сумму неприводимых представлений является разложение регулярного представления аддитивной группы вещественных чисел, осуществляемое при помощи разложения в интеграл Фурье. Регулярное представление аддитивной группы вещественных чисел строится в пространстве L^2 функций $f(t)$ с интегрируемым квадратом модуля и задается формулой

$$R(t_0)f(t) = f(t + t_0).$$

Пусть $F(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(t)$, то есть

$$F(\lambda) = \int f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt.$$

В силу равенства Планшереля соответствие $f(t) \to F(\lambda)$ можно рассматривать как разложение пространства L^2 в непрерывную прямую сумму одномерных пространств $H(\lambda)$. При сдвиге $f(t) \to f(t + t_0)$ функции $f(t)$ ее преобразование Фурье $F(\lambda)$ переходит в функцию $e^{-i\lambda t_0}F(\lambda)$. Поэтому в каждом одномерном пространстве $H(\lambda)$ оператору сдвига $R(t)$ соответствует оператор умножения на число $e^{-i\lambda t}$. Эти операторы образуют (одномерные) представления аддитивной группы вещественных чисел. Тем самым построено разложение регулярного представления $R(t)$ этой группы на неприводимые представления.

Подобно этому построенное в п. 4 разложение функций $f(g)$ на группе Лоренца в интеграл Фурье приводит к разложению регулярного представления

$$R(g_0)f(g) = f(gg_0)$$

этой группы.

Пусть $K(z_1, z; \chi)$ — ядро, соответствующее функции $f(g)$ на G, имеющей интегрируемый квадрат модуля. Ядро $K(z_1, z; \chi)$ можно рассматривать как функцию от переменного z, зависящую от параметров z_1 и χ. Обозначим через X множество пар $x = (z_1, \chi)$, где

$$\chi = \left(\frac{n + i\rho}{2}, \ \frac{-n + i\rho}{2}\right),$$

ρ — вещественное, n — целое, и введем в него меру μ, положив

$$\int_X \Phi(z_1, \chi)\, d\mu = -\frac{1}{8\pi^4}\,\frac{i}{2} \int_{X_0}\!\!\int c(\chi)\,\Phi(z_1, \chi)\, dz_1\, d\bar{z}_1\, d\chi,$$

где X_0 — множество всех $\chi = \left(\frac{n+i\rho}{2}, \ \frac{-n+i\rho}{2}\right)$, интегрирование по χ понимается как суммирование по n и интегрирование по ρ. Через $c(\chi)$ обозначено число $-\frac{n^2+\rho^2}{4}$.

Сопоставим каждой точке $x=(z_1, \chi)$ множества X гильбертово пространство $H_{z_1, \chi}$, состоящее из функций $\varphi(z)$, для которых

$$\|\varphi\|^2_{z_1, \chi} = \frac{i}{2}\int |\varphi(z)|^2\, dz\, d\bar{z} < \infty.$$

Очевидно, что каждое ядро $K(z_1, z; \chi)$ можно рассматривать как вектор-функцию, заданную на множестве X пар (z_1, χ), где $\chi = \left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$, и принимающую значения в пространствах $H_{z_1, \chi}$. При этом из аналога формулы Планшереля (см. формулу (3), п. 6) вытекает *)

$$\int |f(g)|^2\, dg = \int \|K(z_1, z; \chi)\|^2_{z_1, \chi}\, d\mu.$$

Это равенство показывает, что соответствие $f(g) \to K(z_1, z; \chi)$ является разложением пространства H функций $f(g)$ в непрерывную прямую сумму пространств $H_{z_1, \chi}$ относительно меры μ:

$$H = \int_X \oplus H_{z_1, \chi}\, d\mu.$$

Покажем, что этому разложению соответствует разложение регулярного представления группы G в непрерывную прямую сумму неприводимых унитарных представлений $T_\chi(g)$ основной серии. Для этого достаточно вспомнить, что при сдвиге $f(g) \to f(gg_0)$ ядро $K(z_1, z; \chi)$ преобразуется по формуле

$$K(z_1, z; \chi) \to (\beta_0 z + \delta_0)^{-n_1-1}\, (\overline{\beta_0 z + \delta_0})^{-n_2-1}\, K\left(z_1, \frac{\alpha_0 z + \gamma_0}{\beta_0 z + \delta_0}; \chi\right),$$

где $n_1 = \frac{n+i\rho}{2}$, $n_2 = \frac{-n+i\rho}{2}$. Таким образом, ядро $K(z_1, z; \chi)$, рассматриваемое как функция аргумента z, преобразуется при сдвигах $f(g) \to f(gg_0)$ по представлению $T_{-\chi}(g_0)$ основной серии. Этим и доказано, что *разложение функций на группе Лоренца в интеграл Фурье определяет разложение регулярного представления $R(g)$ группы G в непрерывную прямую сумму неприводимых представлений основной серии.*

При этом каждому $\chi = \left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$ соответствует зависящая от параметра z_1 серия компонент, в которых индуцируется одно и то же представление $T_{-\chi}(g)$.

Фактически соответствие $f(g) \to K(z_1, z; \chi)$ определяет и разложение на неприводимые компоненты левого регулярного представления $L(g)$ группы G Лоренца. Это представление определяется формулой

$$L(g_0) f(g) = f(g_0^{-1} g).$$

Из формулы (2) п. 4 § 2 вытекает, что левому сдвигу $f(g) \to f(g_0^{-1} g)$ соответствует следующее преобразование ядра $K(z_1, z; \chi)$

$$K(z_1, z; \chi) \to (\beta_0 z_1 + \delta_0)^{n_1-1}\, (\overline{\beta_0 z_1 + \delta_0})^{n_2-1}\, K\left(\frac{\alpha_0 z_1 + \gamma_0}{\beta_0 z_1 + \delta_0}, z; \chi\right).$$

Таким образом, при левых сдвигах ядро $K(z_1, z; \chi)$, рассматриваемое как функция от z_1, преобразуется по неприводимому унитарному представлению $T_\chi(g)$ основной серии. Это означает, что *левое регулярное представление также разлагается при преобразовании Фурье функции $f(g)$ на неприводимые компоненты.*

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ГРУППЕ G

В § 1 мы определили, что такое бесконечно дифференцируемая функция на группе G. Это определение было связано с выбором локальных координат на группе G. Здесь мы дадим более удобное определение бесконечно дифференцируемой функции, введя дифференциальные операторы на группе G. В иных терминах это определение было дано в гл. II, § 2, п. 7.

*) Через $\|K(z_1, z; \chi)\|_{z_1, \chi}$ обозначена норма ядра $K(z_1, z; \chi)$, рассматриваемого как функция от z и определяемая формулой

$$\|K(z_1, z; \chi)\|^2_{z_1, \chi} = \frac{i}{2}\int |K(z_1, z; \chi)|^2\, dz\, d\bar{z}.$$

Сопоставим каждой точке $x=(z_1, \chi)$ множества X гильбертово пространство $H_{z_1, \chi}$, состоящее из функций $\varphi(z)$, для которых

$$\|\varphi\|^2_{z_1, \chi}=\frac{i}{2}\int |\varphi(z)|^2\,dz\,d\bar{z}<\infty.$$

Очевидно, что каждое ядро $K(z_1, z; \chi)$ можно рассматривать как вектор-функцию, заданную на множестве X пар (z_1, χ), где $\chi=\left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$, и принимающую значения в пространствах $H_{z_1, \chi}$. При этом из аналога формулы Планшереля (см. формулу (3), п. 6) вытекает*)

$$\int |f(g)|^2\,dg=\int \|K(z_1, z; \chi)\|^2_{z_1, \chi}\,d\mu.$$

Это равенство показывает, что соответствие $f(g)\to K(z_1, z; \chi)$ является разложением пространства H функций $f(g)$ в непрерывную прямую сумму пространств $H_{z_1, \chi}$ относительно меры μ:

$$H=\int_X \oplus H_{z_1, \chi}\,d\mu.$$

Покажем, что этому разложению соответствует разложение регулярного представления группы G в непрерывную прямую сумму неприводимых унитарных представлений $T_\chi(g)$ основной серии. Для этого достаточно вспомнить, что при сдвиге $f(g)\to f(gg_0)$ ядро $K(z_1, z; \chi)$ преобразуется по формуле

$$K(z_1, z; \chi)\to(\beta_0 z+\delta_0)^{-n_1-1}(\overline{\beta_0 z+\delta_0})^{-n_2-1}K\left(z_1, \frac{\alpha_0 z+\gamma_0}{\beta_0 z+\delta_0}; \chi\right),$$

где $n_1=\frac{n+i\rho}{2}$, $n_2=\frac{-n+i\rho}{2}$. Таким образом, ядро $K(z_1, z; \chi)$, рассматриваемое как функция аргумента z,

*) Через $\|K(z_1, z; \chi)\|_{z_1, \chi}$ обозначена норма ядра $K(z_1, z; \chi)$, рассматриваемого как функция от z и определяемая формулой

$$\|K(z_1, z; \chi)\|^2_{z_1, \chi}=\frac{i}{2}\int |K(z_1, z; \chi)|^2\,dz\,d\bar{z}.$$

преобразуется при сдвигах $f(g)\to f(gg_0)$ по представлению $T_{-\chi}(g_0)$ основной серии. Этим и доказано, что *разложение функций на группе Лоренца в интеграл Фурье определяет разложение регулярного представления $R(g)$ группы G в непрерывную прямую сумму неприводимых представлений основной серии.*

При этом каждому $\chi=\left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$ соответствует зависящая от параметра z_1 серия компонент, в которых индуцируется одно и то же представление $T_{-\chi}(g)$.

Фактически соответствие $f(g)\to K(z_1, z; \chi)$ определяет и разложение на неприводимые компоненты левого регулярного представления $L(g)$ группы G Лоренца. Это представление определяется формулой

$$L(g_0)f(g)=f(g_0^{-1}g).$$

Из формулы (2) п. 4 § 2 вытекает, что левому сдвигу $f(g)\to f(g_0^{-1}g)$ соответствует следующее преобразование ядра $K(z_1, z; \chi)$

$$K(z_1, z; \chi)\to(\beta_0 z_1+\delta_0)^{n_1-1}(\overline{\beta_0 z_1+\delta_0})^{n_2-1}K\left(\frac{\alpha_0 z_1+\gamma_0}{\beta_0 z_1+\delta_0}, z; \chi\right).$$

Таким образом, при левых сдвигах ядро $K(z_1, z; \chi)$, рассматриваемое как функция от z_1, преобразуется по неприводимому унитарному представлению $T_\chi(g)$ основной серии. Это означает, что *левое регулярное представление также разлагается при преобразовании Фурье функции $f(g)$ на неприводимые компоненты.*

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ГРУППЕ G

В § 1 мы определили, что такое бесконечно дифференцируемая функция на группе G. Это определение было связано с выбором локальных координат на группе G. Здесь мы дадим более удобное определение бесконечно дифференцируемой функции, введя дифференциальные операторы на группе G. В иных терминах это определение было дано в гл. II, § 2, п. 7.

1. Касательное пространство к группе G. Зафиксируем в группе G точку $e=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ и проведем через эту точку «кривые» в G:

$$h(t)=\begin{Vmatrix}a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{Vmatrix}.$$

Здесь t — комплексный параметр, который мы условимся отсчитывать от точки $e=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$, то есть $a(0)=d(0)=1$, $b(0)=c(0)=0$. Функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ будем предполагать аналитически зависящими от t при малых значениях $|t|$.

Назовем касательным вектором к кривой

$$h(t)=\begin{Vmatrix}a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{Vmatrix}$$

в точке $e=h(0)$ матрицу

$$h=h'(0)=\begin{Vmatrix}a'(0) & b'(0)\\ c'(0) & d'(0)\end{Vmatrix}.$$

Касательные векторы в точке e ко всевозможным кривым, проходящим через эту точку, образуют комплексное линейное пространство *), которое будем называть *касательным пространством к группе G в точке e* и обозначать через Λ. Очевидно, что касательное пространство имеет ту же комплексную размерность 3, что и пространство самой группы G.

Покажем, что *касательное пространство Λ состоит из тех и только тех матриц, след которых равен нулю.* В самом деле, элементы матрицы

$$h(t)=\begin{Vmatrix}a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{Vmatrix}$$

связаны соотношением

$$a(t)\,d(t)-b(t)\,c(t)=1.$$

*) В самом деле, если h_1, h_2 — касательные векторы к кривым $h_1(t)$, $h_2(t)$, то матрица $\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2$ является касательным вектором к кривой $h(t)=h_1(\lambda_1 t)\,h_2(\lambda_2 t)$.

Дифференцируя это равенство по t и полагая $t=0$, мы получим, что $a'(0)+d'(0)=0$. Таким образом, след касательной матрицы к кривой $h(t)$ равен нулю.

Обратно, матрицы со следом 0 образуют комплексное линейное пространство той же размерности 3, что и касательное пространство. Следовательно, все они принадлежат касательному пространству Λ.

Можно показать, что каждой матрице h из касательного пространства соответствует однозначно определенная однопараметрическая подгруппа $h(t)$ в G, для которой матрица h является касательной (*однопараметрической подгруппой* называется такая кривая $h(t)$, что $h(t_1+t_2)=h(t_1)\,h(t_2)$ для всех комплексных чисел t_1 и t_2).

2. Операторы Ли. Каждой матрице h касательного пространства Λ сопоставим два линейных дифференциальных оператора A_h и $\overline{A}_h$ на группе G. А именно, проведем через точку e кривую $h(t)$, имеющую в точке e заданную касательную h. Операторы A_h и $\overline{A}_h$ определим следующим образом:

$$A_h f(g)=\left.\frac{\partial f[h(t)\,g]}{\partial t}\right|_{t=0},\quad \overline{A}_h f(g)=\left.\frac{\partial f[h(t)\,g]}{\partial \bar{t}}\right|_{t=0}.$$

Легко показать, что операторы A_h, $\overline{A}_h$ не зависят от выбора кривой $h(t)$ и, следовательно, полностью определяются касательной h *).

Дифференциальные операторы A_h и $\overline{A}_h$ мы будем называть *операторами левого дифференцирования по направлению матрицы h* из касательного пространства Λ или *левыми операторами Ли.*

*) Для доказательства достаточно принять за параметры матрицы $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$ элементы α, β, δ. Тогда оператор A_h выразится через операторы $\frac{\partial}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial\beta}$, $\frac{\partial}{\partial\delta}$ следующим образом:

$$A_h f(g)=a'(0)\left[\alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial f}{\partial\beta}-\delta\frac{\partial f}{\partial\delta}\right]+ \\ +b'(0)\left[\gamma\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial f}{\partial\beta}\right]+c'(0)\,\beta\frac{\partial f}{\partial\delta}.$$

Аналогичное выражение имеет место для оператора $\overline{A}_h$.

Очевидно, что операторы A_h, $\overline{A}_h$ удовлетворяют соотношениям

$$A_{\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2}=\lambda_1 A_{h_1}+\lambda_2 A_{h_2}, \quad \overline{A}_{\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2}=\overline{\lambda}_1\overline{A}_{h_1}+\overline{\lambda}_2\overline{A}_{h_2}.$$

Следовательно, все операторы левого дифференцирования A_h сами образуют комплексное линейное пространство, равно как и операторы $\overline{A}_h$.

В пространствах операторов левого дифференцирования удобно пользоваться следующими базисами.

Введем в касательном пространстве Λ базис, состоящий из матриц

$$a_0=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}, \quad a_+=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad a_-=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Эти матрицы a_0, a_+, a_- служат касательными к кривым

$$a_0(t)=\begin{Vmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{Vmatrix}, \quad a_+(t)=\begin{Vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad a_-(t)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{Vmatrix}.$$

В качестве базисов в пространствах операторов левого дифференцирования A_h и $\overline{A}_h$ примем операторы, отвечающие матрицам a_0, a_+, a_-. Эти операторы обозначим через A_0, A_+, A_- и $\overline{A}_0$, $\overline{A}_+$, $\overline{A}_-$.

Наряду с операторами левого дифференцирования мы можем ввести на группе G операторы *правого дифференцирования* B_h, $\overline{B}_h$. Эти операторы определим следующим образом:

$$B_h f(g)=\left.\frac{\partial f[gh(t)]}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad \overline{B}_h f(g)=\left.\frac{\partial f[gh(t)]}{\partial \overline{t}}\right|_{t=0},$$

где $h(t)$ — произвольная кривая, для которой $h(0)=e$ и $h'(0)=h$. Операторы правого дифференцирования B_h, равно как и операторы $\overline{B}_h$, также образуют трехмерное линейное пространство.

В качестве базиса в пространствах операторов правого дифференцирования также удобно принять операторы, отвечающие матрицам a_0, a_+, a_-. Эти операторы мы обозначим через B_0, B_+, B_- и $\overline{B}_0$, $\overline{B}_+$, $\overline{B}_-$.

Приведем для справок выражения для базисных операторов левого и правого дифференцирования. Пусть в качестве параметров матрицы $g=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ приняты элементы α, β, δ. Тогда

$$\begin{aligned}
A_0&=\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\delta\frac{\partial}{\partial\delta}\right),\\
A_+&=\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta},\\
A_-&=\beta\frac{\partial}{\partial\delta},\\
B_0&=\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\delta\frac{\partial}{\partial\delta}\right),\\
B_+&=\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial}{\partial\delta},\\
B_-&=\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}.
\end{aligned}$$

Выражения для соответствующих операторов $\overline{A}_0$, $\overline{A}_+$, $\overline{A}_-$ и $\overline{B}_0$, $\overline{B}_+$, $\overline{B}_-$ получаются из этих формул заменой α, β, γ, δ на сопряженные числа и операторов $\frac{\partial}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial\beta}$, $\frac{\partial}{\partial\delta}$ на $\frac{\partial}{\partial\overline{\alpha}}$, $\frac{\partial}{\partial\overline{\beta}}$, $\frac{\partial}{\partial\overline{\delta}}$.

3. Связь между операторами левого и правого дифференцирования. Поскольку элементы группы G задаются шестью вещественными параметрами, то на группе G имеется в точности 6 линейно независимых линейных дифференциальных операторов первого порядка. Следовательно, левые операторы Ли связаны с правыми операторами Ли линейными соотношениями (с коэффициентами, зависящими от g). Эти соотношения удобно записать в матричной форме, а именно, введем матрицы, составленные из базисных операторов Ли:

$$A=\begin{Vmatrix} A_0 & A_+ \\ A_- & -A_0 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} B_0 & B_+ \\ B_- & -B_0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда имеет место равенство

$$g'A=Bg' \text{*)}. \tag{1}$$

*) g' — транспонированная матрица g.

(В этой записи Bg' означает лишь формальное умножение матриц, то есть элементы матрицы g' не дифференцируются.)

Аналогичное соотношение связывает операторы $\bar{A}_0$, $\bar{A}_+$, $\bar{A}_-$ и $\bar{B}_0$, $\bar{B}_+$, $\bar{B}_-$.

Для вывода соотношения (1) рассмотрим сначала группу всех невырожденных матриц $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$. Касательное пространство к этой группе состоит из всех матриц второго порядка. Выберем в касательном пространстве базис

$$a_{11}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\quad a_{12}=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\quad a_{21}=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{Vmatrix};\quad a_{22}=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Пусть A_{ij}, B_{ij} $(i,\ j=1,\ 2)$ — соответствующие левые и правые операторы Ли.

Простым подсчетом получаем следующие выражения для операторов:

$$A_{11}=\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial}{\partial\beta},\quad A_{12}=\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial}{\partial\beta},$$
$$A_{21}=\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\delta},\quad A_{22}=\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial}{\partial\delta}.$$

Введем матрицу $\begin{Vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{Vmatrix}$. Эту матрицу удобно записать с помощью символической матрицы

$$\frac{\partial}{\partial g}=\begin{Vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial}{\partial\beta}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial\gamma} & \dfrac{\partial}{\partial\delta}\end{Vmatrix}.$$

Именно,

$$\begin{Vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{Vmatrix}=\frac{\partial}{\partial g}g'.$$

Аналогично для матрицы $\begin{Vmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{Vmatrix}$ мы получим выражение

$$\begin{Vmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{Vmatrix}=g'\frac{\partial}{\partial g}.$$

Следовательно, имеет место соотношение

$$g'\begin{Vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{Vmatrix}g'. \tag{2}$$

Заметим теперь, что левые операторы Ли A_0, A_+, A_- на группе унимодулярных матриц выражаются через операторы A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} следующим образом:

$$A_0=\frac{1}{2}(A_{11}-A_{22}),\quad A_+=A_{12},\quad A_-=A_{21}.$$

Следовательно,

$$\begin{Vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}A_0 & A_+\\ A_- & -A_0\end{Vmatrix}+\frac{1}{2}(A_{11}+A_{22})\begin{Vmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{Vmatrix},$$

где E — единичный оператор. Аналогично

$$\begin{Vmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}B_0 & B_+\\ B_- & -B_0\end{Vmatrix}+\frac{1}{2}(B_{11}+B_{22})\begin{Vmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{Vmatrix}.$$

Учитывая, что

$$A_{11}+A_{22}=B_{11}+B_{22}=\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\delta\frac{\partial}{\partial\delta},$$

мы получаем из равенства (2)

$$g'\begin{Vmatrix}A_0 & A_+\\ A_- & -A_0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}B_0 & B_+\\ B_- & -B_0\end{Vmatrix}g'.$$

4. Коммутационные соотношения для операторов Ли. Заметим, что *правые операторы Ли перестановочны с левыми операторами Ли*. Это непосредственно следует из того факта, что правые и левые сдвиги на группе G перестановочны между собой.

Удобно ввести *коммутатор* $[A,\ B]$ пары операторов A и B, определяемый формулой

$$[A,\ B]=AB-BA.$$

Тогда свойство перестановочности левых и правых операторов Ли запишется следующим образом:

$$[A_{h_1},\ B_{h_2}]=0,\quad [\bar{A}_{h_1},\ \bar{B}_{h_2}]=0,\quad [A_{h_1},\ \bar{B}_{h_2}]=0,$$
$$[\bar{A}_{h_1},\ B_{h_2}]=0.$$

Далее, из перестановочности операторов $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial\bar{t}}$ вытекают следующие соотношения:

$$[A_{h_1},\ \bar{A}_{h_2}]=0,\quad [B_{h_1},\ \bar{B}_{h_2}]=0.$$

Приведем теперь коммутационные соотношения между операторами левого дифференцирования A_0, A_+, A_-. Имеют место следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} [A_+, A_0] &= A_+,\\ [A_-, A_0] &= -A_-,\\ [A_+, A_-] &= -2A_0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Аналогично, для операторов правого дифференцирования справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} [B_+, B_0] &= -B_+,\\ [B_-, B_0] &= B_-,\\ [B_+, B_-] &= 2B_0. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Все эти соотношения можно получить непосредственной выкладкой, используя выражения для операторов A_h, B_h, которые были даны в п. 2. Проще всего, однако, получить их из общих соображений. Именно, пусть h_1 и h_2 — матрицы из касательного пространства Λ. Тогда их коммутатор $[h_1, h_2] = h_1h_2 - h_2h_1$ также принадлежит касательному пространству, поскольку

$$\operatorname{Tr}(h_1h_2 - h_2h_1) = \operatorname{Tr}(h_1h_2) - \operatorname{Tr}(h_2h_1) = 0.$$

Можно показать, что для операторов A_h, B_h справедливы соотношения

$$[A_{h_1}, A_{h_2}] = -A_{[h_1, h_2]}, \quad [B_{h_1}, B_{h_2}] = B_{[h_1, h_2]} \text{ *)}.$$

Таким образом, для вывода коммутационных соотношений (1), (1′) достаточно вычислить коммутаторы $[a_+, a_0]$, $[a_-, a_0]$, $[a_+, a_-]$ базисных матриц

$$a_0 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}, \quad a_+ = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad a_- = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

в касательном пространстве Λ. Непосредственной выкладкой находим

$$[a_+, a_0] = -a_+, \quad [a_-, a_0] = a_-, \quad [a_+, a_-] = -2a_0.$$

Отсюда вытекают формулы (1), (1′).

Пользуясь коммутационными соотношениями, можно представить любой многочлен с постоянными коэффициентами от операторов Ли в виде линейной комбинации одночленов вида

$$A_0^{k_1}A_+^{k_2}A_-^{k_3}B_0^{l_1}B_+^{l_2}B_-^{l_3}\overline{A}_0^{m_1}\overline{A}_+^{m_2}\overline{A}_-^{m_3}\overline{B}_0^{n_1}\overline{B}_+^{n_2}\overline{B}_-^{n_3}. \tag{2}$$

*) См., например, книгу [26].

5. Операторы Лапласа. При изучении функций, заданных в том или ином пространстве, важную роль играют операторы, перестановочные с операторами бесконечно малого сдвига (то есть операторами Ли). Например, в случае евклидова пространства этим свойством обладает обычный оператор Лапласа *).

Мы рассмотрим здесь дифференциальные операторы на группе G, перестановочные со всеми операторами Ли. Из коммутационных соотношений п. 4 видно, что операторов первого порядка с таким свойством не существует. Мы покажем, что этим свойством перестановочности обладает оператор второго порядка

$$\Delta = 2A_0^2 + A_+A_- + A_-A_+.$$

Оператор Δ будем называть оператором Лапласа для группы G. Чтобы доказать свойство перестановочности оператора Δ, мы запишем его в следующем виде:

$$\Delta = \operatorname{Tr} A^2, \quad \text{где} \quad A = \begin{Vmatrix} A_0 & A_+ \\ A_- & -A_0 \end{Vmatrix}.$$

Найдем выражение оператора Δ через правые операторы Ли. Мы видели в п. 3, что матрицы левых и правых операторов Ли

$$A = \begin{Vmatrix} A_0 & A_+ \\ A_- & -A_0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} B_0 & B_+ \\ B_- & -B_0 \end{Vmatrix}$$

связаны соотношением

$$A = g'^{-1}Bg'.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Tr} A^2 = \operatorname{Tr} B^2.$$

Итак, *оператор Δ можно задать следующими эквивалентными формулами*:

$$\Delta = \operatorname{Tr} A^2, \quad \text{где} \quad A = \begin{Vmatrix} A_0 & A_+ \\ A_- & -A_0 \end{Vmatrix},$$

$$\Delta = \operatorname{Tr} B^2, \quad \text{где} \quad B = \begin{Vmatrix} B_0 & B_+ \\ B_- & -B_0 \end{Vmatrix}.$$

*) Если под сдвигом понимать любое преобразование, сохраняющее расстояние между точками.

Покажем, что оператор Δ перестановочен со всеми операторами Ли. В самом деле, поскольку оператор Δ выражается как многочлен от операторов A_h с постоянными коэффициентами, то он перестановочен со всеми операторами B_h. С другой стороны, так как оператор Δ выражается как многочлен от операторов B_h с постоянными коэффициентами, то он перестановочен со всеми операторами A_h. Следовательно, оператор Δ перестановочен со всеми операторами Ли.

На группе G существует второй оператор $\overline{\Delta}$, также коммутирующий со всеми операторами Ли. Он задается формулой

$$\overline{\Delta} = \operatorname{Tr} \overline{A}^2 = 2\overline{A}_0^2 + \overline{A}_+\overline{A}_- + \overline{A}_-\overline{A}_+.$$

Можно показать, что *любой дифференциальный оператор, коммутирующий со всеми операторами Ли, является многочленом* (*с постоянными коэффициентами*) *от операторов* Δ *и* $\overline{\Delta}$.

6. Пространство функций на группе G с быстро убывающими производными. Мы определили в п. 2 § 1 бесконечно дифференцируемые функции на группе G. Очевидно, что это определение можно сформулировать в терминах операторов Ли. Именно, функция $f(g)$ называется *бесконечно дифференцируемой на группе* G, если к ней применим любой оператор, являющийся многочленом от операторов Ли. Выражения вида $P(X)f(g)$, где $P(X)$ — многочлен с постоянными коэффициентами от операторов Ли, назовем производными функции $f(g)$. Порядком производной назовем степень этого многочлена при условии, что все его слагаемые записаны в каноническом виде (2) п. 4.

С группой G свяжем теперь пространство S функций с быстро убывающими производными. Это пространство состоит из бесконечно дифференцируемых функций на G, все производные которых быстро убывают при $|g| \to \infty$. Это значит, что для любого многочлена $P(X)$ от операторов Ли и любого n выполняется равенство

$$\lim_{|g| \to \infty} |g|^n P(X) f(g) = 0.$$

Топологию в пространстве S зададим последовательностью норм

$$\|f\|_n = \sup_{g,\, P} |g|^n \, |P(X) f(g)|,$$

где $P(X)$ пробегает все многочлены степени $\leqslant n$ от операторов Ли, причем предполагается, что коэффициенты многочлена $P(X)$ в канонической записи не превышают по модулю единицу.

Отметим некоторые простые свойства пространства S:

1) Пространство S инвариантно относительно операций левого и правого сдвигов и операции симметрии $f(g) \to f(g^{-1})$.

2) Пространство S инвариантно относительно умножения функции $f(g)$ на любой многочлен $P(g)$ от элементов α, β, γ, δ матрицы g и сопряженных с ними чисел $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$.

3) Свертка $f_1 * f_2(g)$ двух функций из пространства S принадлежит тому же пространству.

Примером функции из пространства S может служить функция $e^{-|g|^2}$. Пространству S принадлежат также все функции вида $Pe^{-|g|^2}$, где P — многочлен с постоянными коэффициентами от элементов матрицы g, сопряженных с ними чисел от операторов Ли на группе G.

7. Операторы, соответствующие операторам Ли при преобразовании Фурье. В § 1 мы сопоставили каждой функции $f(g)$ операторную функцию $F(\chi)$ — ее преобразование Фурье. Выясним, во что переходят при этом соответствии операторы Ли. Как было показано в п. 1 § 2, при левом сдвиге функции $f(g): f(g) \to f(g_0^{-1}g)$ ее преобразование Фурье $F(\chi)$ переходит в $T_\chi(g_0)F(\chi)$. Отсюда вытекает, что преобразованием Фурье функции $f[h(t)g]$ является операторная функция $T_\chi^{-1}[h(t)]F(\chi)$. Следовательно, преобразованием Фурье функции

$$A_h f(g) = \left.\frac{\partial f[h(t)g]}{\partial t}\right|_{t=0}$$

является операторная функция $\widetilde{A}_h(\chi)F(\chi)$, где

$$\widetilde{A}_h(\chi) = \left.\frac{\partial T_\chi^{-1}[h(t)]}{\partial t}\right|_{t=0}. \qquad (1)$$

Итак, *при левом дифференцировании функции $f(g)$ по направлению матрицы h ее преобразование Фурье $F(\chi)$ умножается слева на оператор $\widetilde{A}_h(\chi)$, задаваемый формулой* (1). Точно так же доказывается, что *при правом дифференцировании функции $f(g)$ в направлении матрицы h ее преобразование Фурье умножается справа на оператор $\widetilde{A}_h(\chi)$.*

Укажем вид операторов $\widetilde{A}_0(\chi)$, $\widetilde{A}_+(\chi)$, $\widetilde{A}_-(\chi)$, соответствующих базисным касательным матрицам $a_0 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}$, $a_+ = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $a_- = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$:

$$\widetilde{A}_0(\chi) = \frac{n_1 - 1}{2} E - z\frac{\partial}{\partial z},$$

где E — единичный оператор;

$$\widetilde{A}_+(\chi) = -(n_1 - 1) z + z^2 \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\widetilde{A}_-(\chi) = -\frac{\partial}{\partial z}.$$

Установим теперь, что соответствует операторам Лапласа Δ и $\overline{\Delta}$ при переходе от функций $f(g)$ к их преобразованиям Фурье $F(\chi)$.

Теорема. *При переходе от функций $f(g)$ к их преобразованиям Фурье $F(\chi)$, $\chi = (n_1, n_2)$, операторы Лапласа переходят в операторы, кратные единичным операторам. Именно, оператору Δ отвечает оператор умножения на $n_1^2 - 1$, а оператору $\overline{\Delta}$ — оператор умножения на $n_2^2 - 1$.*

В самом деле, пусть оператору Δ отвечает оператор $\widetilde{\Delta}(\chi)$. Нетрудно показать, что из перестановочности Δ с операторами Ли следует, что оператор Δ перестановочен со всеми операторами сдвига *). Но операторам сдвига соответствуют при преобразовании Фурье операторы умножения на $T_\chi(g)$. Следовательно, оператор $\widetilde{\Delta}(\chi)$ должен коммутировать со всеми операторами $T_\chi(g)$.

*) Операторы сдвига получаются при интегрировании операторов Ли.

Но, как было показано в п. 1 § 1 главы III, все представления $T_\chi(g)$ операторно неприводимы, а потому оператор $\widetilde{\Delta}(\chi)$ кратен единичному оператору:

$$\widetilde{\Delta}(\chi) = k(\chi) E,$$

где $k(\chi)$ — скалярный множитель. Аналогичное рассуждение верно и для преобразования Фурье оператора $\overline{\Delta}$.

То, что оператор $\widetilde{\Delta}(\chi)$ кратен единичному, можно установить и непосредственной выкладкой, подставляя в равенство

$$\widetilde{\Delta}(\chi) = 2\widetilde{A}_0^2 + \widetilde{A}_+\widetilde{A}_- + \widetilde{A}_-\widetilde{A}_+$$

выражения для $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_+$, $\widetilde{A}_-$. Этой выкладкой мы найдем, в частности, и значение скалярного множителя $k(\chi)$:

$$k(\chi) = n_1^2 - 1.$$

§ 5. ТЕОРЕМА ПЭЛИ — ВИНЕРА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГРУППЕ

В § 3 были установлены необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять ядро $K(z_1, z_2; \chi)$ для того, чтобы оно было ядром преобразования Фурье функции $f(g)$ с интегрируемым квадратом модуля. В этом параграфе аналогичный вопрос будет решен для функций $f(g)$ из пространства S, то есть для бесконечно дифференцируемых функций на группе G, быстро убывающих вместе со всеми своими производными. Именно, будут получены необходимые (см. пп. 3 и 4) и достаточные (см. п. 6) условия, при которых функция $K(z_1, z_2; \chi)$ является ядром преобразования Фурье функции из пространства S. Формулировку окончательного результата см. на стр. 357.

1. Интегралы функции $f(g)$ по «прямолинейным образующим». Напомним, что переход от функции $f(g)$ к ядру $K(z_1, z_2; \chi)$ ее преобразования Фурье можно разбить на два этапа. Именно, сначала мы переходим от функции $f(g)$ к функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$, определяемой равенством

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \frac{i}{2}\int f(\lambda^{-1} + \beta z_2, \beta, \lambda - \beta z_1)\, d\beta\, d\overline{\beta}, \qquad (1)$$

а затем от функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ переходим к ядру $K(z_1, z_2; \chi)$, по формуле

$$K(z_1, z_2; \chi) = \frac{i}{2}\int \varphi(z_1, z_2; \lambda)\,\lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}, \qquad (2)$$

$$\chi = (n_1, n_2).$$

Поскольку переход от функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ к ядру $K(z_1, z_2; \chi)$ сводится, по сути дела, к обычному преобразованию Меллина, то достаточно изучить переход от функции $f(g)$ к функции $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$. Таким образом, задача описания ядер $K(z_1, z_2; \chi)$, соответствующих функциям $f(g)$ из пространства S, сводится по существу к описанию функций $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$, определяемых формулой (1).

Как мы уже знаем, функция $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ имеет простое геометрическое истолкование (см. § 2, п. 3). А именно, будем трактовать $f(g)$ как функцию, заданную на поверхности второго порядка $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ в четырехмерном комплексном пространстве. Тогда $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ есть интеграл функции $f(g)$ вдоль «прямолинейной образующей» этой поверхности. Числа z_1, z_2, λ можно рассматривать как координаты, задающие прямолинейную образующую поверхности $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться однородными координатами в семействе «прямолинейных образующих» поверхности $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. В качестве таких координат мы снова берем коэффициенты в системе линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} u\alpha + v\gamma &= u',\\ u\beta + v\delta &= v', \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

задающей прямую на поверхности $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Интеграл функции $f(g)$ по прямолинейной образующей, заданной системой уравнений (3), *определим следующей формулой*:

$$\Phi(u, v; u', v') = \frac{i}{2}\int f(g)\,\omega\bar{\omega}, \qquad (4)$$

где $\omega = \dfrac{d\alpha}{vu'} = \dfrac{d\beta}{vv'} = -\dfrac{d\gamma}{uu'} = -\dfrac{d\delta}{uv'}$.

Из определения следует, что функция $\Phi(u, v; u', v')$ определена для всех значений u, v, u', v', кроме значений $u = v = 0$ и $u' = v' = 0$, и что она есть однородная функция степени однородности $(-2, -2)$, то есть

$$\Phi(\alpha u, \alpha v; \alpha u', \alpha v') = \alpha^{-2}\bar{\alpha}^{-2}\Phi(u, v; u', v')$$

для любого $\alpha \neq 0$.

Напомним, что координаты z_1, z_2, λ прямой выражаются через ее однородные координаты $(u, v; u', v')$ следующим образом:

$$z_1 = \frac{u}{v}, \quad z_2 = \frac{u'}{v'}, \quad \lambda = \frac{v'}{v}.$$

Функции же $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ и $\Phi(u, v; u', v')$ выражаются одна через другую следующими формулами:

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \lambda\bar{\lambda}\Phi(z_1, 1; \lambda z_2, \lambda); \qquad (5)$$

$$\Phi(u, v; u', v') = |v|^{-2}|v'|^{-2}\varphi\left(\frac{u}{v}, \frac{u'}{v'}; \frac{v'}{v}\right) \qquad (6)$$

(доказательство см. в § 2, п. 3).

Свойства функции $\Phi(u, v; u', v')$ будут установлены в пп. 2, 3 и 4.

2. Преобразование функции $\Phi(u, v; u', v')$ при сдвигах и при дифференцировании исходной функции $f(g)$. Мы определили функцию $\Phi(u, v; u', v')$ как интеграл функции $f(g)$ вдоль «прямолинейной образующей» на поверхности $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, заданной системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} u\alpha + v\gamma &= u',\\ u\beta + v\delta &= v'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Именно

$$\Phi(u, v; u', v') = \frac{i}{2}\int f(g)\,\omega\bar{\omega}, \qquad (2)$$

где

$$\omega = \frac{d\alpha}{vu'} = \frac{d\beta}{vv'} = -\frac{d\gamma}{uu'} = -\frac{d\delta}{uv'}.$$

Выясним, как преобразуется функция Φ при левых и правых сдвигах функции $f(g)$. Рассмотрим функцию $f_1(g)=f(g_0^{-1}g)$, где $g_0=\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{Vmatrix}$, и пусть ей отвечает функция

$$\Phi_1(u, v; u', v')=\frac{i}{2}\int f(g_0^{-1}g)\,\omega\overline{\omega}. \qquad (3)$$

Спрашивается, как связана функция Φ_1 с функцией Φ.

Будем писать уравнение прямой (1) коротко в виде

$$(u, v)\,g=(u', v'),$$

где $g=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, а (u, v) понимается как вектор-строка. Эта запись означает, что прямая состоит из всех матриц g, преобразующих вектор (u, v) в вектор (u', v'). Преобразуем интеграл (3), заменив в нем g на g_0g. В результате мы получим интеграл функции $f(g)$ по прямой

$$(u, v)\,g_0g=(u', v'),$$

то есть по прямой с однородными координатами

$$(u\alpha_0+v\gamma_0,\ u\beta_0+v\delta_0;\ u', v').$$

Стоящая под знаком интеграла форма ω переходит при замене g на g_0g в форму

$$\omega'=\frac{d\alpha'}{vu'}=\frac{d\beta'}{vv'}=-\frac{d\gamma'}{uu'}=-\frac{d\delta'}{uv'},$$

где α', β', γ', δ' — элементы матрицы g_0g. Отсюда, используя свойства пропорций, легко получаем для формы ω' следующее выражение:

$$\omega'=\frac{d(\delta_0\alpha'-\beta_0\gamma')}{(u\beta_0+v\delta_0)\,u'}\equiv\frac{d\alpha}{(u\beta_0+v\delta_0)\,u'}.$$

Мы видим, что ω' есть в точности та самая форма, которая должна фигурировать в определении интеграла по прямой

$$(u\alpha_0+v\gamma_0,\ u\beta_0+v\delta_0;\ u', v').$$

Тем самым установлено, что *при левом сдвиге* $f(g)\to f(g_0^{-1}g)$, *где* $g_0=\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{Vmatrix}$, *соответствующая функция* $\Phi(u, v; u', v')$ *переходит в функцию*

$$\Phi_1(u, v; u', v')\equiv\Phi(u\alpha_0+v\gamma_0,\ u\beta_0+v\delta_0;\ u', v').$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что *при правом сдвиге* $f(g)\to f(gg_0)$, *где* $g_0=\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{Vmatrix}$, *соответствующая функция* $\Phi(u, v; u', v')$ *переходит в функцию*

$$\Phi_2(u, v; u', v')\equiv\Phi(u, v;\ u'\alpha_0+v'\gamma_0,\ u'\beta_0+v'\delta_0).$$

Отсюда ясно, как преобразуется функция $\Phi(u, v; u', v')$, если к исходной функции $f(g)$ применить оператор Ли, то есть дифференциальный оператор, отвечающий бесконечно малому левому или правому сдвигу.

Операторы в пространстве функций $\Phi(u, v; u', v')$, отвечающие операторам Ли, будем также называть операторами Ли и обозначать теми же буквами A_0, A_+, A_- и так далее.

Используя формулы § 4, легко написать явное выражение для этих операторов. Именно,

$$A_0=-\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

$$A_+=-u\frac{\partial}{\partial v},$$

$$A_-=-v\frac{\partial}{\partial u};$$

$$B_0=\frac{1}{2}\left(u'\frac{\partial}{\partial u'}-v\frac{\partial}{\partial v'}\right),$$

$$B_+=u'\frac{\partial}{\partial v'},$$

$$B_-=v'\frac{\partial}{\partial u'}.$$

Выражения для соответствующих операторов $\overline{A}_0$, $\overline{A}_+$, $\overline{A}_-$; $\overline{B}_0$, $\overline{B}_+$, $\overline{B}_-$ получаются из этих формул заменой u, v, u', v' на сопряженные числа и операторов $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial u'}$, $\frac{\partial}{\partial v'}$ на $\frac{\partial}{\partial \overline{u}}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{v}}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{u}'}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{v}'}$.

Отметим, что операторы левого сдвига в пространстве функций $\Phi(u, v; u', v')$ выражаются только через операторы $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$

и $\frac{\partial}{\partial \bar{u}}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{v}}$; операторы же правого сдвига выражаются только через операторы $\frac{\partial}{\partial u'}$, $\frac{\partial}{\partial v'}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{u}'}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{v}'}$.

3. Дифференцируемость и убывание функции $\Phi(u, v; u', v')$. Будем теперь предполагать, что функция $f(g)$ бесконечно дифференцируема и быстро убывает вместе со всеми производными. Это означает, что для любого $n > 0$ и любого многочлена $P(X)$ от операторов Ли функция

$$|g|^n P(X) f(g)$$

ограничена на группе G. Тогда соответствующая функция $\Phi(u, v; u', v')$ также должна удовлетворять некоторым условиям дифференцируемости и убывания. Найдем эти условия.

Покажем, что *функция $\Phi(u, v; u', v')$ бесконечно дифференцируема по u, v, u', v' и $\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}', \bar{v}'$ всюду, кроме точек, где $u = v = 0$ или $u' = v' = 0$* (в которых функция не определена).

Для доказательства рассмотрим столь малую область в пространстве $(u, v; u', v')$, что в ней не обращается в нуль какая-нибудь одна из координат (u, v) и какая-нибудь одна из координат (u', v'). Пусть, например, в этой области $u \neq 0$ и $v' \neq 0$. Запишем интеграл по прямой $(u, v; u', v')$, то есть по прямой, заданной уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \alpha\delta - \beta\gamma &= 1, \\ u\alpha + v\gamma &= u', \\ u\beta + v\delta &= v', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

взяв δ в качестве переменной интегрирования. Выражая из уравнений (1) α, β, γ через δ, мы получим, что

$$\Phi(u, v; u', v') = \\ = \frac{i}{2}\int f\left(\frac{uv + u'v' - vu'\delta}{uv'}, \frac{v' - v\delta}{u}, \frac{u'\delta - u}{v'}, \delta\right)\frac{d\delta\, d\bar{\delta}}{|u|^2 |v'|^2}. \tag{2}$$

Из формулы (2) непосредственно видно, что если функция $f(g) = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ бесконечно дифференцируема и быстро убывает вместе со своими производными, то функция Φ бесконечно дифференцируема в области, где $u \neq 0$ и $v' \neq 0$.

Те же рассуждения справедливы и для области, где $u \neq 0$, $u' \neq 0$; области, где $v \neq 0$, $u' \neq 0$, и, наконец, для области, где $v \neq 0$, $v' \neq 0$.

Покажем, что *функция $\Phi(u, v; u', v')$ удовлетворяет следующему условию убывания. Для любого числа k функция*

$$\left(\frac{|u'|^2 + |v'|^2}{|u|^2 + |v|^2}\right)^k (|u|^2 + |v|^2)(|u'|^2 + |v'|^2)\, \Phi(u, v; u', v') \tag{3}$$

является ограниченной функцией от u, v, u', v'. Тем же свойством обладает любая производная $P(X)\Phi$ функции Φ, где $P(X)$ — многочлен с постоянными коэффициентами от операторов Ли.

Доказательство. По условию для любого $k > 0$ имеем

$$|f(g)| < C|g|^{-2k}.$$

Следовательно,

$$|\Phi(u, v; u', v')| < C\frac{i}{2}\int \frac{\omega\bar{\omega}}{|g|^{2k}}, \tag{4}$$

где интеграл берется по прямой, заданной системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha\delta - \beta\gamma &= 1, \\ u\alpha + v\gamma &= u', \\ u\beta + v\delta &= v', \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

а дифференциальная форма ω на прямой имеет вид

$$\omega = \frac{d\alpha}{vu'} = \frac{d\beta}{vv'} = -\frac{d\gamma}{uu'} = -\frac{d\delta}{uv'}.$$

Вычислим интеграл в неравенстве (4). Пусть для определенности $u \neq 0$, $v' \neq 0$. Тогда за переменную интегрирования можно взять δ. Остальные координаты на прямой выражаются через δ следующим образом:

$$\alpha = \frac{uv + u'v' - u'v\delta}{uv'}, \quad \beta = \frac{v' - v\delta}{u}, \quad \gamma = \frac{u'\delta - u}{v'}. \tag{6}$$

Из равенств (6) получаем, что $|g|^2$ можно представить в следующем виде:

$$|g|^2 = |a\delta + b|^2 + |g_0|^2,$$

где

$$|a|^2 = \frac{(|u|^2+|v|^2)(|u'|^2+|v'|^2)}{|u|^2\,|v'|^2},$$

а $|g_0|$ — минимальное значение $|g|$ на прямой.

Таким образом, имеем

$$\frac{i}{2}\int \frac{\omega\bar\omega}{|g|^{2k}} = \frac{1}{|u|^2|v'|^2}\,\frac{i}{2}\int \frac{d\delta\, d\bar\delta}{(|a\delta+b|^2+|g_0|^2)^k} =$$
$$= \frac{\pi}{k-1}\,\frac{|g_0|^{-2(k-1)}}{|u|^2|v'|^2|a|^2} = \frac{\pi}{k-1}\,\frac{|g_0|^{-2(k-1)}}{(|u|^2+|v|^2)(|u'|^2+|v'|^2)}.$$

Итак, установлено, что для любого $k>0$ имеет место оценка

$$|\Phi(u,\ v;\ u',\ v')| < \\ < C(|u|^2+|v|^2)^{-1}(|u'|^2+|v'|^2)^{-1}|g_0|^{-2(k-1)}, \qquad (7)$$

где $|g_0|$ есть минимальное значение $|g|$ на прямой.

Оценим величину $|g_0|$. Из уравнений прямой (5) следует, что

$$|u'|^2+|v'|^2 \leqslant (|u|^2+|v|^2)|g|^2,$$

а потому

$$|g_0|^2 \geqslant \frac{|u'|^2+|v'|^2}{|u|^2+|v|^2}. \qquad (8)$$

С другой стороны, ту же прямую (5) мы можем задать эквивалентной системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha\delta-\beta\gamma&=1,\\ u'\delta-v'\gamma&=u,\\ -u'\beta+v'\alpha&=v. \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

Из этой системы уравнений получаем

$$|u|^2+|v|^2 \leqslant (|u'|^2+|v'|^2)|g|^2,$$

следовательно,

$$|g_0|^2 \geqslant \frac{|u|^2+|v|^2}{|u'|^2+|v'|^2}. \qquad (8')$$

На основании полученных оценок (7), (8), (8′) непосредственно заключаем, что для любого числа k функция

$$\left(\frac{|u'|^2+|v'|^2}{|u|^2+|v|^2}\right)^k (|u|^2+|v|^2)(|u'|^2+|v'|^2)\,\Phi(u,\ v;\ u',\ v') \qquad (9)$$

есть ограниченная функция от $u,\ v,\ u',\ v'$.

Рассмотрим теперь производную $P(X)f(g)$ функции $f(g)$, где $P(X)$ — многочлен от операторов Ли. Как мы уже знаем, этой производной отвечает функция $P(X)\Phi(u,\ v;\ u',\ v')$. Так как по условию $P(X)f$ есть быстро убывающая функция на группе, то для соответствующей ей функции $P(X)\Phi$ имеет место та же оценка, что и для Φ.

4. Соотношения для ядра $K(z_1,\ z_2;\ \chi)$. Оказывается, что, помимо условий дифференцируемости и быстрого убывания, установленных в п. 3, функция $\Phi(u,\ v;\ u',\ v')$ удовлетворяет еще некоторым дополнительным соотношениям симметрии *). Эти соотношения удобнее формулировать не в терминах самой функции $\Phi(u,\ v;\ u',\ v')$, а в терминах ядра $K(z_1,\ z_2;\ \chi)$, которое определяется по функции $\Phi(u,\ v;\ u',\ v')$ следующим образом:

$$K(z_1,\ z_2;\ \chi) = \frac{i}{2}\int \Phi(z_1,\ 1;\ \lambda z_2,\ \lambda)\,\lambda^{n_1}\bar\lambda^{n_2}\,d\lambda\, d\bar\lambda,\quad \chi=(n_1,\ n_2)$$

(см. формулы (2) и (5) пункта 1). Напомним, что функция $K(z_1,\ z_2;\ \chi)$ есть ядро операторной функции

$$F(\chi) = \int f(g)\,T_\chi(g)\,dg,$$

действующей в пространстве представления D_χ. Из § 1, п. 4 мы знаем, что функция $F(\chi)$ определена для всех значений χ.

Соотношения, которым удовлетворяет ядро $K(z_1,\ z_2;\ \chi)$, связаны с существованием у некоторых пар представлений

*) Подобно тому, как преобразование Радона $\check f(\zeta,\ s)$ быстро убывающей функции в n-мерном комплексном аффинном пространстве удовлетворяет условию, что интеграл $\frac{i}{2}\int \check f(\zeta,\ s)\, s^k\bar s^l\, ds\, d\bar s$ является однородным многочленом от $\zeta,\ \bar\zeta$ степени $(k,\ l)$, $k,\ l=0,\ 1,\ \ldots$ (см. гл. II, § 3, п. 4).

$T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$ перестановочных операторов. Эти пары представлений и соответствующие им перестановочные операторы были найдены в гл. III, § 5. Прежде всего там было установлено, что представления $T_\chi(g)$, $\chi=(n_1, n_2)$ и $T_{-\chi}(g)$, $-\chi=(-n_1, -n_2)$, где n_1, n_2 не являются целыми числами одного знака, между собой эквивалентны. Это значит, что существует оператор A, взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображающий пространство представления $T_\chi(g)$ на пространство представления $T_{-\chi}(g)$, такой, что

$$AT_\chi(g)=T_{-\chi}(g)A.$$

Отсюда следует, что *операторная функция* $F(\chi)$ *удовлетворяет соотношению*

$$AF(\chi)=F(-\chi)A. \qquad (1)$$

Это соотношение можно записать как соотношение для ядра $K(z_1, z_2; \chi)$ оператора $F(\chi)$. Как было показано в гл. III, § 5, перестановочный оператор A имеет следующий вид:

$$A\varphi(z)=\frac{i}{2}\int(z_1-z)^{-n_1-1}\overline{(z_1-z)}^{-n_2-1}\varphi(z_1)\,dz_1\,d\bar z_1, \qquad (2)$$

где интеграл (2) следует понимать в смысле регуляризованного значения.

Таким образом, соотношение (1) для операторной функции $F(\chi)$ сводится к следующим соотношениям для ее ядра:

$$\frac{i}{2}\int(z-z_1)^{-n_1-1}\overline{(z-z_1)}^{-n_2-1}K(z, z_2; n_1, n_2)\,dz\,d\bar z=$$
$$=\frac{i}{2}\int(z_2-z)^{-n_1-1}\overline{(z_2-z)}^{-n_2-1}K(z_1, z; -n_1, -n_2)\,dz\,d\bar z \qquad (3)$$

при условии, что n_1, n_2 не являются целыми числами одного знака; интегралы в (3) понимаются в смысле регуляризованных значений *).

Итак, мы получили соотношения для ядра $K(z_1, z_2; \chi)$. Эти соотношения связаны с тем, что представления, задаваемые числами (n_1, n_2) и $(-n_1, -n_2)$, эквивалентны между собой.

*) В точках $\chi=(n_1, n_2)$, где n_1, n_2 — целые числа одного знака, интегралы в формуле (3), рассматриваемые как аналитические функции от n_1, n_2 (см. сноску на стр. 225), имеют особенность.

Эти соотношения мы уже получили раньше, когда рассматривали преобразование Фурье функций на группе с интегрируемым квадратом.

Там эти соотношения были установлены для таких точек $\chi=(n_1, n_2)$, что $n_2=-\bar n_1$ (аналог вещественной оси), поскольку само преобразование Фурье функции $f(g)$ с интегрируемым квадратом определено только на «вещественной оси».

Можно показать, что чем быстрее убывает функция $f(g)$, тем в большей полосе определено ее преобразование Фурье и тем большему числу соотношений оно удовлетворяет.

Вспомним теперь, что перестановочным оператором A обладают не только эквивалентные, но также и частично эквивалентные представления $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$, а именно, представления с весами $\chi_1=(n_1, n_2)$, $\chi_2=(-n_1, n_2)$, где n_1 — целое положительное число, и представления с весами $\chi_1=(n_1, n_2)$ и $\chi_2=(n_1, -n_2)$, где n_2 — целое положительное число. В первом случае перестановочный оператор имеет вид $A=\frac{\partial^{n_1}}{\partial z^{n_1}}$, а во втором случае $A=\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar z^{n_2}}$ (см. гл. III, § 5).

Существование перестановочного оператора A связано с вырождением представлений в целых точках χ. Именно, пусть $\chi=(n_1, n_2)$ — целая точка, то есть n_1, n_2 — целые числа одного знака; пусть для определенности n_1, n_2 положительны. Тогда, как мы знаем из гл. III, в пространстве D_{n_1, n_2} имеется конечномерное инвариантное подпространство E_{n_1, n_2}, а в пространстве $D_{-n_1, -n_2}$ — бесконечномерное инвариантное подпространство $F_{-n_1, -n_2}$. При этом имеем $D_{n_1, n_2}/E_{n_1 n_2}\cong D_{-n_1, n_2}\cong D_{n_1, -n_2}\cong F_{-n_1, -n_2}$.

Таким образом, операторная функция $F(\chi)\equiv F(n_1, n_2)$, помимо соотношений (1), удовлетворяет следующим дополнительным соотношениям:

$$A_1F(n_1, n_2)=F(-n_1, n_2)A_1,$$

где $A_1=\frac{\partial^{n_1}}{\partial z^{n_1}}, \quad n_1=1, 2, \ldots,$

$$A_2F(n_1, n_2)=F(n_1, -n_2)A_2,$$

где $A_2=\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar z^{n_2}}, \quad n_2=1, 2, \ldots$

В терминах ядра $K(z_1, z_2; \chi)$ эти соотношения записываются следующим образом:

$$\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}} K(z_1, z_2; n_1, n_2) = (-1)^{n_1} \frac{\partial^{n_1}}{\partial z_2^{n_1}} K(z_1, z_2; -n_1, n_2)$$

$$\text{при} \quad n_1 = 1, 2, \ldots; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_1^{n_2}} K(z_1, z_2; n_1, n_2) = (-1)^{n_2} \frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_2^{n_2}} K(z_1, z_2; n_1, -n_2)$$

$$\text{при} \quad n_2 = 1, 2, \ldots \qquad (4')$$

Как мы уже говорили, эти соотношения возникают из-за вырождения представлений $T_\chi(g)$ в целых точках пространства представлений.

5. Моменты функции $f(g)$ и их выражение через ядро $K(z_1, z_2; n_1, n_2)$. Назовем *моментами* функции $f(g)$ интегралы вида

$$\int f(g)\, a(g)\, dg,$$

где $a(g)$ — матричный элемент конечномерного неприводимого представления группы G. Мы покажем здесь, что если $f(g)$ — быстро убывающая функция, то все моменты функции $f(g)$ можно легко выразить через ядро $K(z_1, z_2; n_1, n_2)$ ее преобразования Фурье.

Сначала найдем матричные элементы $a(g)$ неприводимых конечномерных представлений группы G. Такие представления строились в гл. III, § 3, п. 1. Каждое из них задавалось парой целых положительных чисел n_1, n_2. Оно реализовалось в пространстве E_{n_1, n_2} многочленов от z и $\bar{z}$ степени не выше $n_1 - 1$ относительно z и не выше $n_2 - 1$ относительно $\bar{z}$. Оператор представления имеет следующий вид:

$$T_\chi(g)\varphi(z) = (\beta z + \delta)^{n_1 - 1} \overline{(\beta z + \delta)}^{n_2 - 1} \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right),$$

где $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$.

Можно было бы показать, что этими представлениями исчерпываются все, с точностью до эквивалентности, неприводимые конечномерные представления группы G.

Введем базис в пространстве многочленов степени не выше $n_1 - 1$ относительно z и степени не выше $n_2 - 1$ относительно $\bar{z}$. В качестве элементов базиса возьмем одночлены $z^{k_1}\bar{z}^{k_2}$, где $k_1 = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$, $k_2 = 0, 1, \ldots, n_2 - 1$. Тогда оператору представления $T_\chi(g)$ будет отвечать матрица (порядка $n_1 n_2$). Элементы этой матрицы удобно нумеровать двумя парами индексов: k_1, k_2 и l_1, l_2, где $k_1, l_1 = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$, $k_2, l_2 = 0, 1, \ldots, n_2 - 1$. Именно, матричным элементом $a_{k_1, k_2; l_1, l_2}(g)$ является коэффициент при $z^{l_1}\bar{z}^{l_2}$ в многочлене

$$T_\chi(g) z^{k_1}\bar{z}^{k_2} = (\beta z + \delta)^{n_1 - k_1 - 1} \overline{(\beta z + \delta)}^{n_2 - k_2 - 1} (\alpha z + \gamma)^{k_1} \overline{(\alpha z + \gamma)}^{k_2}.$$

Таким образом, матричный элемент $a_{k_1, k_2; l_1, l_2}(g)$ может быть выражен следующей формулой:

$$a_{k_1, k_2; l_1, l_2}(g) = \frac{1}{l_1! l_2!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{l_1 + l_2}}{\partial z^{l_1} \partial \bar{z}^{l_2}} \left[(\beta z + \delta)^{n_1 - k_1 - 1} \overline{(\beta z + \delta)}^{n_2 - k_2 - 1} (\alpha z + \gamma)^{k_1} \overline{(\alpha z + \gamma)}^{k_2}\right]_{z=0}. \quad (1)$$

Найдем теперь выражение для моментов

$$\int f(g)\, a_{k_1, k_2; l_1, l_2}(g)\, dg$$

функции $f(g)$ через ядро $K(z_1, z_2; n_1, n_2)$. Согласно определению, $K(z_1, z_2; n_1, n_2)$ есть ядро оператора $\int f(g) T_\chi(g)\, dg$, то есть

$$\int f(g) T_\chi(g) \varphi(z_1)\, dg = \frac{i}{2} \int K(z_1, z_2; n_1, n_2) \varphi(z_2)\, dz_2\, d\bar{z}_2.$$

Положим в этом равенстве $\varphi(z_1) = z_1^{k_1}\bar{z}_1^{k_2}$. Мы получим

$$\int f(g) (\beta z_1 + \delta)^{n_1 - k_1 - 1} \overline{(\beta z_1 + \delta)}^{n_2 - k_2 - 1} (\alpha z_1 + \gamma)^{k_1} \overline{(\alpha z_1 + \gamma)}^{k_2}\, dg =$$

$$= \frac{i}{2} \int K(z_1, z_2; n_1, n_2) z_2^{k_1}\bar{z}_2^{k_2}\, dz_2\, d\bar{z}_2. \qquad (2)$$

На основании формул (1) и (2) получаем следующее выражение для моментов функции $f(g)$ через ядро $K(z_1, z_2; n_1, n_2)$:

$$\int f(g)\, a_{k_1, k_2; l_1, l_2}(g)\, dg =$$

$$= \frac{1}{l_1! l_2!} \frac{i}{2} \frac{\partial^{l_1 + l_2}}{\partial z_1^{l_1} \partial \bar{z}_1^{l_2}} \int K(z_1, z_2; n_1, n_2) z_2^{k_1}\bar{z}_2^{k_2}\, dz_2\, d\bar{z}_2 \,\Big|_{z_1 = 0}. \quad (3)$$

В частности, при $n_1 = n_2 = 1$ мы получаем

$$\int f(g)\, dg = \frac{i}{2} \int K(z_1, z_2; 1, 1)\, dz_2\, d\bar{z}_2$$

(интеграл, стоящий справа, не зависит от z_1).

Можно было бы показать, что моменты функции $f(g)$ выражаются аналогично и через ядро $K(z_1, z_2; -n_1, -n_2)$.

Попутно мы получили следующий интересный результат. *Интеграл*

$$\frac{i}{2}\int K(z_1, z_2;\ n_1, n_2)\, z_2^{k_1}\bar{z}_2^{k_2}\, dz_2\, d\bar{z}_2,$$

где n_1, n_2 — целые положительные числа и $k_1 = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$, $k_2 = 0, 1, \ldots, n_2 - 1$, является многочленом от $z_1, \bar{z}_1$ степени не выше $n_1 - 1$ относительно z_1 и не выше $n_2 - 1$ относительно $\bar{z}_1$. Этот результат можно было бы легко получить также из соотношений симметрии (4) п. 4

$$\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}} K(z_1, z_2;\ n_1, n_2) = (-1)^{n_1} \frac{\partial^{n_1}}{\partial z_2^{n_1}} K(z_1, z_2;\ -n_1, n_2),$$

$$\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_1^{n_2}} K(z_1, z_2;\ n_1, n_2) = (-1)^{n_2} \frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_2^{n_2}} K(z_1, z_2;\ \pm n_1, -n_2).$$

Заметим, что из этих соотношений симметрии получается также аналогичный результат для ядра $K(z_1, z_2;\ -n_1, -n_2)$. Именно, интеграл

$$\frac{i}{2}\int K(z_1, z_2;\ -n_1, -n_2)\, z_1^{k_1}\bar{z}_1^{k_2}\, dz_1\, d\bar{z}_1,$$

где $k_1 = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$, $k_2 = 0, 1, \ldots, n_2 - 1$, является многочленом от $z_2, \bar{z}_2$ степени не выше $n_1 - 1$ относительно z_2 и не выше $n_2 - 1$ относительно $\bar{z}_2$.

6. Теорема Пэли — Винера для преобразования Фурье на группе G. В предыдущих пунктах мы сопоставили бесконечно дифференцируемой функции $f(g)$ на группе G, быстро убывающей вместе со всеми производными, ее интегралы по всевозможным «прямолинейным образующим». Задавая прямолинейную образующую системой уравнений

$$\alpha\beta - \gamma\delta = 1,$$
$$u\alpha + v\gamma = u',$$
$$u\beta + v\delta = v',$$

мы определили интеграл по этой образующей следующей формулой:

$$\Phi(u, v;\ u', v') = \frac{i}{2}\int f(g)\, \omega\bar{\omega}, \tag{1}$$

где $\omega = \frac{d\alpha}{vu'} = \frac{d\beta}{vv'} = -\frac{d\gamma}{uu'} = -\frac{d\delta}{uv'}$ (см. также эквивалентную запись для $\varphi(z_1, z_2;\ \lambda)$ на стр. 343).

Ядро $K(z_1, z_2;\ \chi)$ преобразования Фурье функции $f(g)$ выражается через функцию $\Phi(u, v;\ u', v')$ следующим образом:

$$K(z_1, z_2;\ n_1, n_2) = \frac{i}{2}\int \Phi(z_1, 1;\ \lambda z_2, \lambda)\, \lambda^{n_1}\bar{\lambda}^{n_2}\, d\lambda\, d\bar{\lambda}. \tag{2}$$

В пп. 3 и 4 были установлены свойства функции $\Phi(u, v;\ u', v')$.

Именно, в п. 3 было показано, что функция $\Phi(u, v;\ u', v')$ бесконечно дифференцируема. Там же были получены оценки роста функции Φ. В п. 4 было установлено, что функция Φ удовлетворяет еще некоторым дополнительным соотношениям, которые были сформулированы там в терминах ядра $K(z_1, z_2;\ \chi)$. Оказывается, что эти свойства все вместе не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функция $\Phi(u, v;\ u', v')$ была представима в виде (1), где $f(g)$ — функция из пространства S. Иными словами, справедлива следующая теорема.

Теорема (аналог теоремы Пэли — Винера). *Для того чтобы функция $\Phi(u, v;\ u', v')$ допускала интегральное представление (1), где $f(g)$ — бесконечно дифференцируемая функция на группе G, быстро убывающая вместе со всеми производными, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *Функция $\Phi(u, v;\ u', v')$ однородна степени однородности $(-2, -2)$, то есть*

$$\Phi(\alpha u, \alpha v;\ \alpha u', \alpha v') = \alpha^{-2}\bar{\alpha}^{-2}\Phi(u, v;\ u', v')$$

для любого $\alpha \neq 0$.

2) *Функция $\Phi(u, v;\ u', v')$ бесконечно дифференцируема по $u, v;\ u', v'$ и по $\bar{u}, \bar{v};\ \bar{u}', \bar{v}'$ всюду, кроме точек, где $u = v = 0$ или $u' = v' = 0$.*

3) *Для любого числа k функция*

$$\left(\frac{|u'|^2 + |v'|^2}{|u|^2 + |v|^2}\right)^k (|u|^2 + |v|^2)(|u'|^2 + |v'|^2)\,\Phi(u, v;\ u', v')$$

является ограниченной функцией от $u, v;\ u', v'$. Тем же свойством обладает любая производная $P(X)\Phi$

функции Φ, *где* $P(X)$ — *многочлен с постоянными коэффициентами от операторов Ли* *).

Кроме того, должны выполняться соотношения симметрии, которые удобнее формулировать не для самой функции $\Phi(u, v; u', v')$, а для ядра

$$K(z_1, z_2; n_1, n_2) = \frac{i}{2}\int \Phi(z_1, 1; \lambda z_2, \lambda)\lambda^{n_1}\bar{\lambda}^{n_2}\, d\lambda\, d\bar{\lambda}.$$

4) *Функция* $K(z_1, z_2; \chi)$, $\chi = (n_1, n_2)$, *удовлетворяет соотношению симметрии*

$$\frac{i}{2}\int (z_1 - z)^{-n_1-1}\overline{(z_1 - z)}^{-n_2-1} K(z, z_2; n_1, n_2)\, dz\, d\bar{z} =$$
$$= \frac{i}{2}\int (z - z_2)^{-n_1-1}\overline{(z - z_2)}^{-n_2-1} K(z_1, z; -n_1, -n_2)\, dz d\bar{z}. \tag{3}$$

5) *Если* $n_1 = 1, 2, \ldots,$ *то*

$$\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}} K(z_1, z_2; n_1, n_2) = (-1)^{n_1}\frac{\partial^{n_1}}{\partial z_2^{n_1}} K(z_1, z_2; -n_1, n_2). \tag{4}$$

5′) *Если* $n_2 = 1, 2, \ldots,$ *то*

$$\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_1^{n_2}} K(z_1, z_2; n_1, n_2) = (-1)^{n_2}\frac{\partial^{n_2}}{\partial \bar{z}_2^{n_2}} K(z_1, z_2; n_1, -n_2). \tag{4′}$$

Тем же соотношениям симметрии (3), (4), (4′) *удовлетворяют ядра, отвечающие производным* $P(X)\Phi$ *функции* Φ.

Необходимость условий теоремы была уже установлена в пп. 3 и 4. Докажем достаточность этих условий. Итак, пусть функция $\Phi(u, v; u', v')$ удовлетворяет условиям теоремы. Покажем сначала, что существует функция $f(g)$ с интегрируемым квадратом модуля, интегралы которой по прямолинейным образующим равны $\Phi(u, v; u', v')$.

*) То есть от операторов $-\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right)$, $-u\frac{\partial}{\partial v}$, $-v\frac{\partial}{\partial u}$ и аналогичных операторов по u', v', а также от аналогичных операторов по $\bar{u}$, $\bar{v}$ и по $\bar{u}'$, $\bar{v}'$ (см. п. 2).

Перейдем во множестве прямолинейных образующих к неоднородным координатам z_1, z_2, λ, положив

$$\varphi(z_1, z_2; \lambda) = \lambda\bar{\lambda}\Phi(z_1, 1; \lambda z_2, \lambda). \tag{5}$$

На основании условия 3) убеждаемся в сходимости следующего интеграла:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^3\int |\varphi'_\lambda(z_1, z_2; \lambda)|^2\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2\, d\lambda\, d\bar{\lambda}. \tag{6}$$

В самом деле, легко проверить, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \bar{\lambda}\Phi_1(z_1, 1; \lambda z_2, \lambda),$$

где функция Φ_1 также удовлетворяет условию 3). Оценим интеграл

$$\int |\varphi'_\lambda(z_1, z_2; \lambda)|^2\, dv = \int |\lambda|^2 |\Phi_1(z_1, 1; \lambda z_2, \lambda)|^2\, dv =$$
$$= \int |\Phi_1(z_1, 1; z_2, \lambda)|^2\, dv \tag{7}$$

$\left(dv = \left(\frac{i}{2}\right)^3 dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2\, d\lambda\, d\bar{\lambda}\right)$. Разобьем область интегрирования на две области: область I, где $1 + |z_1|^2 < |z_2|^2 + |\lambda|^2$, и область II, где $|z_2|^2 + |\lambda|^2 < 1 + |z_1|^2$.

На основании условия 3) получаем следующие оценки:

$$\int_{\mathrm{I}} |\Phi_1(z_1, 1; z_2, \lambda)|^2\, dv < C_1\int_{\mathrm{I}} \frac{dv}{(|z_2|^2 + |\lambda|^2)^4},$$
$$\int_{\mathrm{II}} |\Phi_1(z_1, 1; z_2, \lambda)|^2\, dv < C_2\int_{\mathrm{II}} \frac{dv}{(|z_1|^2 + 1)^4}.$$

Очевидно, что оба интеграла в правых частях неравенств сходятся.

Воспользуемся результатами § 3, п. 5. Там мы нашли условия, при которых функция $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ есть интеграл по прямолинейным образующим от некоторой функции $f(g)$ с интегрируемым квадратом модуля. Эти условия заключались в следующем. Во-первых, для ядра

$$K(z_1, z_2; n_1, n_2) = \frac{i}{2}\int \varphi(z_1, z_2; \lambda)\lambda^{n_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-1}\, d\lambda\, d\bar{\lambda}$$

должен сходиться интеграл

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (n^2+\rho^2) \times$$
$$\times \left(\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \left| K\left(z_1, z_2; \frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)\right|^2 dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2 \right) d\rho. \quad (8)$$

В нашем случае это условие выполнено, поскольку, как нетрудно убедиться, интеграл (8) совпадает, с точностью до множителя, со сходящимся интегралом $\int |\varphi'_\lambda(z_1, z_2, \lambda)|^2 dv$.

Во-вторых, функция $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ должна удовлетворять дополнительно условию симметрии. Записанное в терминах ядра $K(z_1, z_2; \chi)$, это условие совпадает в точности с соотношением симметрии (3) (см. конец п. 6 § 3).

Итак, мы видим, что наша функция $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ есть интеграл по прямолинейным образующим от некоторой функции $f(g)$ с интегрируемым квадратом модуля. Согласно § 3, п. 3, эта функция $f(g)$ выражается через функцию $\varphi(z_1, z_2; \lambda)$ по следующей формуле обращения:

$$f(g) = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{i}{2}\int \varphi''_{\lambda\bar{\lambda}}\left(z, \frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}; \beta z+\delta\right) dz\, d\bar{z}. \quad (9)$$

Эту формулу обращения удобно записать в однородных координатах на множестве прямолинейных образующих. А именно,

$$f(g) = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{i}{2}\int_\Gamma \Psi(z_1, z_2; \alpha z_1+\gamma z_2, \beta z_1+\delta z_2) \times$$
$$\times (z_1\, dz_2 - z_2\, dz_1)(\bar{z}_1\, d\bar{z}_2 - \bar{z}_2\, d\bar{z}_1), \quad (10)$$

где обозначено

$$\Psi(u, v; u', v') = \frac{\partial^2}{\partial\lambda\, \partial\bar{\lambda}} [\lambda\bar{\lambda}\Phi(u, v; \lambda u', \lambda v')]_{\lambda=1}\ ^{*)}.$$

*) Формуле обращения (10) можно придать также следующий вид:

$$f(g) = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{i}{2}\int_\Gamma L\bar{L}\Phi(z_1, z_2; \alpha z_1+\gamma z_2, \beta z_1+\delta z_2) \times$$
$$\times (z_1\, dz_2 - z_2\, dz_1)(\bar{z}_1\, d\bar{z}_2 - z_2\, d\bar{z}_1),$$

где $L = u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + u'\frac{\partial}{\partial u'} + v'\frac{\partial}{\partial v'}$. Именно в таком виде эта формула была получена в гл. II (см. формулу (9) на стр. 145)

Интеграл берется здесь по произвольной линии Γ на плоскости (z_1, z_2), пересекающейся по одному разу с каждой прямой, проходящей через точку $(0, 0)$ (см. по этому поводу добавление, § 2, п. 5). Исходная формула обращения (9) получается из (10), если в качестве линии интегрирования Γ взять прямую $z_2 = 1$.

Заметим, что интеграл (10) сходится. В самом деле, так как этот интеграл не зависит от выбора линии интегрирования Γ, то можно считать, что Γ лежит в ограниченной области. Тем самым интеграл (10) берется по компактному множеству, и его сходимость непосредственно следует из ограниченности подинтегральной функции на этом множестве.

Остается показать, что функция $f(g)$, определенная формулой (10), бесконечно дифференцируема и быстро убывает вместе со всеми своими производными.

Бесконечная дифференцируемость функции $f(g)$ непосредственно следует из формулы (10) на основании свойств 3, 4 функции $\Phi(u, v; u', v')$. Докажем, что функция $f(g)$ быстро убывает. Разложим g в произведение $g = k_1 g_\varepsilon k_2$, где k_1, k_2 — унитарные матрицы, а $g_\varepsilon = \begin{Vmatrix} 0 & -\varepsilon^{-1} \\ \varepsilon & 0 \end{Vmatrix}$ *).

Тогда имеем $|g|^2 = |\varepsilon|^2 + |\varepsilon|^{-2}$. Следовательно, если $|g| \to \infty$, то либо $\varepsilon \to 0$, либо $|\varepsilon| \to \infty$. Не нарушая общности, можно считать, что $\varepsilon \to 0$.

Итак, требуется доказать, что при $\varepsilon \to 0$ функция $f(k_1 g_\varepsilon k_2)$ убывает быстрее любой степени $|\varepsilon|$.

Заметим, что свойства функции $\Phi(u, v; u', v')$, а потому и свойства функции $f(g)$ сохраняются при групповых сдвигах. Поэтому достаточно доказать быстрое убывание при $\varepsilon \to 0$ функции $f(g_\varepsilon)$, где $g_\varepsilon = \begin{Vmatrix} 0 & -\varepsilon^{-1} \\ \varepsilon & 0 \end{Vmatrix}$.

*) Докажем, что такое разложение всегда имеет место. Любую матрицу g можно представить в виде $g = ka$, где k — унитарная, a — положительно определенная матрица. Существует унитарная матрица k_2, приводящая a к диагональному виду, то есть $a = k_2^{-1}\delta k_2$, где δ — диагональная матрица. Тогда имеем $g = (kk_2^{-1}s^{-1})(s\delta)k_2$, где $s = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. Очевидно, это и есть требуемое разложение.

Для матриц g_ε формула обращения (9) имеет следующий вид:

$$f(g_\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{i}{2}\int \varphi_{\lambda\bar\lambda}(z,\ -\varepsilon^2 z^{-1};\ -\varepsilon^{-1}z)\,dz\,d\bar z =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2}\varepsilon\bar\varepsilon\frac{i}{2}\int \varphi_{\lambda\bar\lambda}(-\varepsilon z,\ \varepsilon z^{-1};\ z)\,dz\,d\bar z. \quad (11)$$

Легко убедиться, используя условия 2) и 3) теоремы, что последний интеграл есть бесконечно дифференцируемая функция от ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Поэтому функция $f(g_\varepsilon)$ разлагается при $\varepsilon \to 0$ в асимптотический ряд Тейлора

$$f(g_\varepsilon) \sim -\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k,\,l=0}^{\infty} a_{kl}\frac{\varepsilon^{k+1}\bar\varepsilon^{l+1}}{k!\,l!}, \quad (12)$$

где

$$a_{kl} = \frac{i}{2}\int\left(-z\frac{\partial}{\partial z_1} + z^{-1}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k\left(-\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z_1} + \bar z^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar z_2}\right)^l \times$$

$$\times \varphi_{\lambda\bar\lambda}(0,\ 0,\ z)\,dz\,d\bar z. \quad (13)$$

Покажем, что все коэффициенты a_{kl} равны нулю. Это и будет означать быстрое убывание функции $f(g_\varepsilon)$.

Раскроем скобки под знаком интеграла и выполним интегрирование по частям. Мы получим

$$a_{kl} = \sum_{\substack{p+q=k\\ p_1+q_1=l}} (-1)^{p+p_1}(p-q)(p_1-q_1)\,C_k^p C_l^{p_1}\times$$

$$\times\frac{i}{2}\int z^{p-q-1}\bar z^{p_1-q_1-1}\frac{\partial^{p+q+p_1+q_1}\varphi(0,\ 0,\ z)}{\partial z_1^p\,\partial z_2^q\,\partial \bar z_1^{p_1}\,\partial \bar z_2^{q_1}}\,dz\,d\bar z, \quad (14)$$

где C_k^p, $C_l^{p_1}$ — биномиальные коэффициенты. Напомним, что функция $\varphi(z_1,\ z_2;\ \lambda)$ связана с ядром $K(z_1,\ z_2;\ n_1,\ n_2)$ следующим соотношением:

$$K(z_1,\ z_2;\ n_1,\ n_2) = \frac{i}{2}\int \varphi(z_1,\ z_2;\ z)\,z^{n_1-1}\bar z^{n_2-1}\,dz\,d\bar z.$$

Отсюда видно, что интеграл в (14) выражается непосредственно через ядро $K(z_1,\ z_2;\ n_1,\ n_2)$, и мы получаем

$$a_{kl} = \sum_{\substack{p+q=k\\ p_1+q_1=l}} (-1)^{p+p_1}(p-q)(p_1-q_1)\,C_k^p C_l^{p_1}\times$$

$$\times\frac{\partial^{p+q+p_1+q_1}}{\partial z_1^p\,\partial z_2^q\,\partial \bar z_1^{p_1}\,\partial \bar z_2^{q_1}}K(0,\ 0;\ p-q,\ p_1-q_1).$$

Объединим с каждым членом этой суммы, у которого $p > q$, $p_1 > q_1$, все члены, получающиеся перестановкой индексов p, q и индексов p_1, q_1. Мы получим по четыре слагаемых, а именно

$$c_{pq}\frac{\partial^{2q+2q_1}}{\partial z_1^q\,\partial z_2^q\,\partial \bar z_1^{q_1}\,\partial \bar z_2^{q_1}}\left[(-1)^{n_1+n_2}\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial z_1^{n_1}\,\partial \bar z_1^{n_2}}K(0,\ 0;\ n_1,\ n_2) -\right.$$

$$-(-1)^{n_2}\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial z_2^{n_1}\,\partial \bar z_1^{n_2}}K(0,\ 0;\ -n_1,\ n_2) -$$

$$-(-1)^{n_1}\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial z_1^{n_1}\,\partial \bar z_2^{n_2}}K(0,\ 0;\ n_1,\ -n_2) +$$

$$\left.+\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial z_2^{n_1}\,\partial \bar z_2^{n_2}}K(0,\ 0;\ -n_1,\ -n_2)\right],$$

где обозначено $c_{pq} = (-1)^{q+q_1}(p-q)(p_1-q_1)\,C_k^p C_l^{p_1}$, $n_1 = p-q$, $n_2 = p_1 - q_1$. Из условий 5), 5′) теоремы, наложенных на ядро $K(z_1,\ z_2;\ n_1,\ n_2)$, непосредственно следует, что стоящее в скобках выражение равно нулю. Следовательно, $a_{kl} = 0$.

Итак, доказано быстрое убывание самой функции $f(g)$. Чтобы доказать быстрое убывание производных $P(X)f$ функции f, где $P(X)$ — многочлен от операторов Ли, заметим, что производной $P(X)f$ соответствует производная $P(X)\Phi(u,\ v;\ u',\ v')$ функции Φ. Так как функция $P(X)\Phi$ также удовлетворяет условиям теоремы, то $P(X)f(g)$ есть быстро убывающая функция. Теорема доказана.

ГЛАВА V

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В этой главе будут рассмотрены задачи интегральной геометрии в пространстве Лобачевского и в мнимом пространстве Лобачевского, аналогичные задаче Радона для евклидова пространства, разобранной в главе I.

В главе I каждой функции $f(x)$ были сопоставлены ее интегралы по всевозможным гиперплоскостям (преобразование Радона функции $f(x)$). Здесь каждой функции $f(x)$ в пространстве Лобачевского или в мнимом пространстве Лобачевского мы сопоставим ее интегралы по всевозможным орисферам. Поскольку на орисферах реализуется евклидова геометрия, их можно рассматривать как один из аналогов гиперплоскостей евклидова пространства (другим аналогом являются плоскости пространства Лобачевского). Таким образом, мы переносим здесь преобразование Радона на случаи пространства Лобачевского и мнимого пространства Лобачевского (см. §§ 2 и 3). Мы обращаем внимание читателя на метод усреднения функций по некомпактным многообразиям (гиперболоидам) в случаях, когда формальное усреднение приводит к расходящимся интегралам. Разработанный для этой цели способ аналитического продолжения по координатам изложен в п. 2 § 3. Нам кажется, что этот способ усреднения плодотворен и в целом ряде других вопросов (например, в теории представлений некомпактных групп).

Подобно тому как в евклидовом пространстве преобразование Радона тесно связано с преобразованием Фурье, аналогичное преобразование в пространстве Лобачевского и мнимом пространстве Лобачевского связано с разложением функций в этих пространствах в интеграл Фурье. Это разложение будет получено на основе результатов главы V в следующей главе.

§ 1. ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ *)

1. Сферическое пространство и пространство Лобачевского. Здесь будут изложены основные факты, касающиеся пространств постоянной кривизны.

Простейшей моделью n-мерного пространства постоянной положительной кривизны k является n-мерная сфера

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2=R^2, \quad R=\frac{1}{k},$$

в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E_{n+1}. Расстояние ρ между точками сферы определим формулой $\rho=R\alpha$, где α — угол, под которым дуга большого круга, соединяющая эти точки, видна из центра O сферы. Иными словами, расстояние между точками сферы определяется как длина дуги большого круга, соединяющего точки сферы.

Удобно отождествить диаметрально противоположные точки сферы и определить расстояние между точками с помощью кратчайшей из дуг. При этом возникает новое пространство постоянной положительной кривизны $k=\frac{1}{R}$, называемое *эллиптическим пространством* или *пространством Римана*.

Будем теперь вместо пар диаметрально противоположных точек сферы рассматривать прямые, проходящие через эти точки. Тогда пространство Римана будет определено как пространство всех прямых в E_{n+1}, проходящих через начало координат. Координаты $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ точек, лежащих на этих прямых, можно трактовать как однородные координаты в пространстве Римана.

Расстояние r между двумя прямыми, одна из которых проходит через точку $M(x)$, а другая — через точку $N(y)$, определяется следующей формулой:

$$\cos^2 kr=\frac{(x, y)^2}{(x, x)(y, y)}, \quad 0\leqslant kr\leqslant\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

*) Мы употребляем дальше общепринятый термин «пространство постоянной положительной (отрицательной) кривизны». Однако само понятие кривизны нам не нужно. Мы будем этот термин употреблять наряду с понятиями сферического (или эллиптического) пространства и пространства Лобачевского в качестве синонима этих понятий.

где

$$(x,\ y) = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \tag{2}$$

— скалярное произведение в пространстве E_{n+1}.

Отображения пространства на себя, сохраняющие расстояние между точками (и не меняющие ориентации, если пространство ориентировано), называются *движениями* пространства. Легко убедиться, что движения n-мерной сферы и n-мерного пространства Римана задаются ортогональными преобразованиями в E_{n+1} с определителем 1 (при этом, однако, в нечетномерном пространстве Римана преобразования g и $-g$ задают одно и то же движение, а потому их следует отождествить).

Определим теперь по аналогии с пространством положительной кривизны пространство постоянной *отрицательной* кривизны. Для этого рассмотрим $(n+1)$-мерное линейное пространство E_{n+1} и введем в нем билинейную форму

$$[x,\ y] \equiv x_0 y_0 - x_1 y_1 - \ldots - x_n y_n. \tag{3}$$

Рассмотрим в пространстве E_{n+1} совокупность прямых, проходящих через начало координат и лежащих внутри конуса

$$[x,\ x] \equiv x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 0, \tag{4}$$

то есть таких прямых, для точек которых выполняется неравенство $[x,\ x] > 0$. Определим расстояние r между прямыми, одна из которых проходит через точку $M(x)$, а другая — через точку $N(y)$, формулой

$$\operatorname{ch}^2 kr = \frac{[x,\ y]^2}{[x,\ x]\,[y,\ y]}, \tag{5}$$

аналогичной формуле (1).

Нетрудно убедиться, что для прямых, лежащих внутри конуса $[x,\ x] = 0$, выполняется неравенство $\frac{[x,\ y]^2}{[x,\ x]\,[y,\ y]} \geqslant 1$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда эти прямые совпадают.

Отсюда следует, что расстояние r, определяемое формулой (5), есть вещественное неотрицательное число, причем оно равно нулю тогда и только тогда, когда прямые совпадают. Это расстояние r, как в этом можно убедиться непосредственной проверкой, удовлетворяет обычным аксиомам расстояния, то есть аксиоме симметрии и аксиоме треугольника.

Полученное метрическое пространство прямых называется *n-мерным гиперболическим пространством* или *пространством Лобачевского*. Величину k называют кривизной этого пространства.

Заметим, что когда одна из прямых приближается к конусу $[x,\ x] = 0$, расстояние r между прямыми стремится к бесконечности. Таким образом, прямые, лежащие на конусе $[x,\ x] = 0$, являются бесконечно удаленными точками пространства Лобачевского. Множество всех бесконечно удаленных точек образует абсолют.

Итак, *абсолютом пространства Лобачевского называется множество всех прямолинейных образующих конуса* $[x,\ x] = 0$.

Назовем *гиперболическими вращениями* в пространстве E_{n+1} линейные преобразования с определителем 1, сохраняющие форму $[x,\ x]$ и переводящие в себя каждую полу конуса $[x,\ x] = 0$. Очевидно, что гиперболические вращения не меняют расстояния между прямыми и, следовательно, задают движения пространства Лобачевского. Можно доказать, что любое движение пространства Лобачевского задается гиперболическим вращением пространства E_{n+1} и что группа движений пространства Лобачевского транзитивна, то есть любую точку этого пространства можно перевести в любую другую точку некоторым движением.

2. Другие модели пространства Лобачевского. Мы назвали точками пространства Лобачевского прямые, проходящие через начало координат и лежащие внутри конуса $[x,\ x] = 0$. Рассмотрим другие модели этого пространства.

Проведем внутри верхней полы конуса $[x,\ x] = 0$ какую-нибудь поверхность, пересекающую каждый луч, выходящий из начала координат, в одной и только одной точке. Сопоставим каждой прямой, проходящей через начало координат и лежащей внутри конуса $[x,\ x] = 0$, точку ее пересечения с этой поверхностью. В результате мы получим модель пространства Лобачевского в виде множества точек поверхности.

Укажем две наиболее часто встречающиеся модели пространства Лобачевского:

1) Пространство Лобачевского реализуется как множество точек верхней полы двуполостного гиперболоида

$$[x,\ x]=1.$$

Расстояние r между любыми двумя точками x и y определяется по формуле

$$\operatorname{ch} kr=[x,\ y]\ ^{*)}. \tag{1}$$

Из этой формулы непосредственно получается следующее выражение для дифференциала дуги:

$$k^2\,ds^2=-dx_0^2+dx_1^2+\ \dots\ +dx_n^2, \tag{2}$$

где дифференциалы $dx_0, \dots, dx_n$ связаны между собой в силу равенства $[x,\ x]=1$ соотношением

$$x_0\,dx_0-x_1\,dx_1-\ \dots\ -x_n\,dx_n=0.$$

Хотя по внешнему своему виду форма (2) не положительно определенная, но из-за соотношения между дифференциалами она оказывается положительно определенной.

2) Пространство Лобачевского реализуется как множество точек плоскости $x_0=1$, лежащих внутри конуса $[x,\ x]=0$. Очевидно, что эта плоскость пересекает конус по сфере радиуса 1. Тем самым пространство Лобачевского интерпретируется как внутренность n-мерного шара радиуса 1. Так как линейным преобразованиям в пространстве прямых соответствуют проективные преобразования плоскости $x_0=1$, то *движениями пространства в этой реализации являются проективные преобразования n-мерного пространства, сохраняющие внутренность шара*. Заметим, что в этой реализации пространства Лобачевского множество бесконечно удаленных точек пространства (абсолют) есть сфера радиуса 1.

Из формулы (5) п. 1 можно получить, что в этой реализации пространства Лобачевского расстояние r между точками M и N определяется следующей формулой:

$$r=\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{MA}{NA}:\frac{MB}{NB}\right),$$

где A и B — точки пересечения хорды MN со сферой радиуса k^{-1}.

*) Для точек верхней полы гиперболоида имеем $[x,\ y]\geqslant 1$.

3. Мнимое пространство Лобачевского. Пространство Лобачевского было реализовано как пространство прямых в E_{n+1}, проходящих через начало координат и лежащих внутри конуса $[x,\ x]=0$. Теперь возьмем *все* прямые в E_{n+1}, проходящие через начало координат. Определим «расстояние» r между любыми двумя прямыми (не лежащими на конусе $[x,\ x]=0$) той же формулой, что и в пространстве Лобачевского,

$$\operatorname{ch}^2 kr=\frac{[x,\ y]^2}{[x,\ x]\,[y,\ y]}. \tag{1}$$

Это «расстояние» r есть инвариант пары прямых относительно линейных преобразований в E_{n+1}, сохраняющих форму

$$[x,\ y]=x_0y_0-x_1y_1-\ \dots\ -x_ny_n.$$

Множество всех прямых, проходящих через начало координат, распадается на три семейства прямых, транзитивных относительно этих преобразований. Одно из них есть семейство прямых, для которых $[x,\ x]>0$. Это множество прямых образует рассмотренное выше пространство Лобачевского. Другое семейство состоит из прямых, для которых $[x,\ x]=0$. Это множество прямых образует абсолют пространства Лобачевского. Наконец, третье семейство состоит из прямых, для которых $[x,\ x]<0$. Это множество прямых с определенным в нем расстоянием назовем *мнимым пространством Лобачевского*.

Итак, мнимым пространством Лобачевского мы называем многообразие, состоящее из прямых в E_{n+1}, проходящих через начало координат и таких, что $[x,\ x]<0$ (то есть прямых, лежащих вне конуса $[x,\ x]=0$). Расстояние r между двумя прямыми определяется формулой (1).

В отличие от пространства Лобачевского в мнимом пространстве Лобачевского расстояние r уже не обязательно есть вещественное число. Именно, как это следует из формулы (1), $\operatorname{ch} kr$ может принимать любые значения от 0 до ∞. Следовательно, расстояние r между двумя точками мнимого пространства Лобачевского принимает либо вещественные неотрицательные значения (если $1\leqslant\operatorname{ch} kr<\infty$), либо мнимые значения, лежащие на отрезке $\left[0,\ \frac{\pi i}{2k}\right]$ мнимой оси (если $0\leqslant\operatorname{ch} kr\leqslant 1$).

Определим движения в мнимом пространстве Лобачевского. Рассмотрим линейные преобразования в E_{n+1} с определителем 1, сохраняющие форму $[x, x]$ и переводящие в себя каждую полу конуса $[x, x]=0$. Очевидно, что они задают преобразования мнимого пространства Лобачевского, не меняющие расстояний. Эти преобразования мы будем дальше называть *движениями* мнимого пространства Лобачевского. Группа этих движений изоморфна группе движений обычного пространства Лобачевского.

Мы определили мнимое пространство Лобачевского как пространство прямых в E_{n+1}, проходящих через начало координат, и таких, что $[x, x]<0$. Координаты $x(x_0, \ldots, x_n)$ точек этих прямых являются однородными координатами в мнимом пространстве Лобачевского.

В дальнейшем мы будем пользоваться различными специализациями координат x, нормируя их тем или иным условием. Выбрав нормировку, мы получаем ту или иную реализацию мнимого пространства Лобачевского. Наиболее удобными реализациями являются следующие:

1) Если нормировать координаты x условием $[x, x]=-1$, то мнимое пространство Лобачевского реализуется на поверхности однополостного гиперболоида $[x, x]=-1$, диаметрально противоположные точки которого отождествлены. Расстояние r между точками x и y гиперболоида дается формулой

$$\operatorname{ch}^2 kr=[x, y]^2. \tag{2}$$

2) Если положить $x_0=1$, то точки мнимого пространства Лобачевского задаются координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, причем $x_1^2+\ldots+x_n^2>1$. Тем самым мы получаем реализацию мнимого пространства Лобачевского во внешности единичного шара в n-мерном пространстве. В этой реализации движениями являются проективные преобразования всего n-мерного пространства, переводящие внешность шара в себя.

3а. Изотропные прямые в мнимом пространстве Лобачевского. Введем понятие *изотропной прямой* в мнимом пространстве Лобачевского. Поскольку точкой этого пространства мы назвали прямую, проходящую через начало координат в E_{n+1}, то «прямой» естественно назвать двумерную плоскость, проходящую через начало координат. Таким образом, прямой в мнимом пространстве Лобачевского называется совокупность точек вида $x=sa+tb$, где a и b — фиксированные векторы, а s и t — произвольные вещественные числа. Не теряя общности, можно считать, что базисные векторы a и b нормированы условиями $[a, a]=[b, b]=-1$. Прямая в мнимом пространстве Лобачевского называется *изотропной*, если расстояние между любыми двумя ее точками равно нулю. Выведем уравнение изотропной прямой.

Пусть совокупность точек $x=sa+tb$, где a, b — фиксированные векторы, $[a, a]=[b, b]=-1$ и $-\infty<s, t<\infty$, есть изотропная прямая. Так как расстояние между точками a и b равно нулю, то из формулы $\operatorname{ch} kr=|[a, b]|$ имеем $|[a, b]|=1$. Меняя, в случае необходимости, направление вектора b, мы можем считать, что $[a, b]=-1$. Напомним, что, кроме того, $[a, a]=[b, b]=-1$.

Вместо базисных векторов a и b удобнее взять векторы a и $\xi=b-a$. Из соотношений между векторами a и b вытекает, что $[\xi, \xi]=[a, \xi]=0$. Таким образом, *любая изотропная прямая есть совокупность точек $x=sa+t\xi$, где $-\infty<s, t<\infty$, и a, ξ — фиксированные векторы, такие, что*

$$[\xi, \xi]=[a, \xi]=0, \quad [a, a]=-1. \tag{1}$$

Легко убедиться, что и, обратно, любая совокупность точек $x=sa+t\xi$, где $[\xi, \xi]=[a, \xi]=0$, $[a, a]=-1$, есть изотропная прямая*) (поскольку расстояние между любыми двумя такими точками оказывается равным нулю). Вектор ξ мы назовем *направляющим вектором* изотропной прямой.

Так как $[\xi, \xi]=0$, то направляющий вектор ξ лежит на одной из образующих конуса $[x, x]=0$. Вектор же a, в силу соотношения $[a, \xi]=0$, лежит в касательной плоскости к конусу. Таким образом, *изотропные прямые в мнимом пространстве Лобачевского изображаются двумерными плоскостями, касательными к конусу* $[x, x]=0$. Легко видеть, что и, обратно, любая такая плоскость является изотропной прямой мнимого пространства Лобачевского.

Особенно наглядную геометрическую интерпретацию изотропных прямых мы получим, рассматривая различные спе-

*) Отсюда, в частности, следует, что через любые две точки мнимого пространства Лобачевского, расстояние между которыми равно нулю, проходит одна и только одна изотропная прямая.

циализации координат x. Примем сперва $x_0=1$. Очевидно, что гиперплоскость $x_0=1$ пересекается с конусом $[x, x]=0$ по сфере (абсолюту), а с двумерными плоскостями, касающимися конуса, — по прямым, касающимся сферы. Таким образом, при реализации на гиперплоскости $x_0=1$ изотропные прямые изображаются прямыми в n-мерном пространстве, касающимися сферы (абсолюта).

Теперь рассмотрим реализацию мнимого пространства Лобачевского на гиперболоиде $[x, x]=-1$. Запишем условие принадлежности точки $x=sa+t\xi$ этому гиперболоиду: $[sa+t\xi, sa+t\xi]=-1$. В силу условий (1) получаем $s^2=1$. Не нарушая общности, можно считать, что $s=1$. Итак, на однополостном гиперболоиде изотропная прямая есть просто прямолинейная образующая

$$x=a+t\xi, \text{ где } [a, a]=-1, \quad [\xi, \xi]=[a, \xi]=0.$$

Можно показать, что и, обратно, любая прямолинейная образующая гиперболоида $[x, x]=0$ есть изотропная прямая мнимого пространства Лобачевского.

4. Сферы и орисферы в пространстве Лобачевского. *Сферой* в пространстве Лобачевского с центром в точке a и радиусом r называется совокупность всех точек x этого пространства, отстоящих от a на расстоянии r. Из формулы (1) п. 3 для расстояния вытекает, что уравнение сферы имеет следующий вид:

$$[x, a]^2=c\,[a, a]\,[x, x]\,^{*)}, \tag{1}$$

где $c=\operatorname{ch}^2 kr$, $[a, a]>0$.

Если пространство Лобачевского реализовано на гиперболоиде $[x, x]=1$, то уравнение сферы в пространстве Лобачевского с центром в точке a имеет следующий вид:

$$[x, a]=\operatorname{ch} kr. \tag{2}$$

Если мы будем центр сферы удалять в бесконечность, требуя при этом, чтобы сфера проходила через одну и ту же

*) Напомним, что $x=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — однородные координаты точки пространства Лобачевского.

фиксированную точку b, то в пределе сфера перейдет в сферу бесконечно большого радиуса или *орисферу*. Очевидно, эта орисфера однозначно определяется точкой b и точкой ξ абсолюта, в которую переходит в пределе центр сферы.

Орисферы в пространстве Лобачевского интересны по ряду причин. Прежде всего, внутренняя геометрия на орисферах n-мерного пространства Лобачевского совпадает с внутренней геометрией $(n-1)$-мерного евклидова пространства. Таким образом, *орисферы в пространстве Лобачевского являются аналогами плоскостей евклидова пространства.* С другой стороны, множество орисфер в пространстве Лобачевского само образует интересное и сравнительно простое пространство. Это пространство орисфер будет в дальнейшем изложении играть фундаментальную роль.

Орисферы в пространстве Лобачевского можно определить иным образом. Рассмотрим прямые в пространстве Лобачевского. Если точку безгранично удалять по некоторой прямой, то в пределе она перейдет в некоторую точку ξ абсолюта. Тогда скажем, что прямая проходит через точку абсолюта ξ. Назовем *пучком параллельных прямых* в пространстве Лобачевского совокупность прямых, проходящих через одну и ту же точку абсолюта. Оказывается, что любая орисфера представляет собой поверхность, ортогональную к одному из пучков параллельных прямых.

Две орисферы назовем параллельными, если они ортогональны к одному и тому же пучку параллельных прямых. Можно показать, что отрезки параллельных прямых, ортогональные к двум параллельным орисферам и заключенные между ними, имеют одинаковую длину. Эту длину отрезков естественно назвать расстоянием между двумя параллельными орисферами.

Составим уравнение орисферы в пространстве Лобачевского. Сначала реализуем пространство Лобачевского как пространство прямых в E_{n+1}, проходящих через начало координат и лежащих внутри конуса $[x, x]=0$. Каждая из этих прямых задается своим направляющим вектором $x=(x_0, \ldots, x_n)$, где $[x, x]>0$, определенным с точностью до множителя. Координаты этого вектора x можно рассматривать как однородные координаты точки пространства Лобачевского.

Как мы уже видели, уравнение сферы в пространстве Лобачевского имеет в однородных координатах следующий вид:

$$[x, a]^2=c\,[a, a]\,[x, x],$$

где $a=(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ — однородные координаты центра сферы. Пусть центр сферы стремится к бесконечности. В нашей реализации пространства Лобачевского это означает, что вектор a стремится к некоторому вектору ξ, принадлежащему конусу $[\xi, \xi]=0$. Будем одновременно увеличивать радиус сферы так, чтобы произведение $c\,[a, a]$ оставалось постоянным.

В пределе мы получим уравнение орисферы

$$[x, \xi]^2 = c_1 [x, x]. \qquad (3)$$

В этом уравнении $c_1 > 0$. Действительно, $c_1 \geqslant 0$, так как в уравнении (3) $[x, \xi]^2 \geqslant 0$ и $[x, x] > 0$. С другой стороны, равенство $c_1 = 0$ невозможно, поскольку в пространстве Лобачевского не существует точек x, для которых было бы $[x, \xi]=0$ *).

Итак, в однородных координатах уравнение орисферы в пространстве Лобачевского имеет следующий вид:

$$[x, \xi]^2 = c_1 [x, x], \qquad (3)$$

где $c_1 > 0$, *а* ξ — *точка конуса* $[\xi, \xi]=0$. Прямолинейную образующую конуса $[\xi, \xi]=0$, которая задается этой точкой, будем называть «направлением» орисферы.

Теперь посмотрим, как выглядит уравнение орисферы, когда пространство Лобачевского реализовано как множество точек верхней полы гиперболоида $[x, x]=1$. В этой реализации уравнение орисферы (3) принимает следующий вид:

$$[x, \xi]^2 = \lambda^2, \qquad (4)$$

где $[\xi, \xi]=0$ и $\lambda \neq 0$. Это уравнение сохраняется при замене ξ на $-\xi$, а потому будем дальше считать, что вектор ξ принадлежит *верхней поле* конуса $[\xi, \xi]=0$. Заметим, что если вектор x принадлежит верхней поле гиперболоида $[x, x]=1$, а вектор ξ — верхней поле конуса $[\xi, \xi]=0$, то $[x, \xi]>0$. Таким образом, уравнение орисферы (4) можно записать в следующем виде:

$$[x, \xi] = \lambda, \qquad (5)$$

где ξ — точка верхней полы конуса $[\xi, \xi]=0$ и $\lambda > 0$.

Очевидно, что если заменить в этом уравнении ξ на $\alpha\xi$ и λ на $\alpha\lambda$, где $\alpha > 0$, то мы получим уравнение той же самой орисферы. Тем самым пару (ξ, λ) в уравнении (5) можно рассматривать как систему однородных координат, задающих орисферу.

В частности, уравнение орисферы можно нормировать условием $\lambda = 1$. Тогда уравнение орисферы принимает вид

$$[x, \xi] = 1, \qquad (6)$$

где ξ — точка верхней полы конуса $[\xi, \xi]=0$. Итак, *орисфера в пространстве Лобачевского задается точкой* ξ *верхней полы конуса* $([\xi, \xi]=0,\ \xi_0 > 0)$.

Другим важным классом поверхностей в пространстве Лобачевского являются *плоскости*. Их можно определить следующим образом. Пусть пространство Лобачевского реализовано как пространство прямых в $(n+1)$-мерном пространстве E_{n+1}, проходящих через начало координат и лежащих внутри конуса $[x, x]=0$. Проведем в E_{n+1} через начало координат гиперплоскость, пересекающую конус $[x, x]=0$. Совокупность прямых — элементов пространства Лобачевского, лежащих в этой гиперплоскости, назовем *плоскостью в пространстве Лобачевского*. Посмотрим, как выглядит уравнение плоскости в пространстве Лобачевского. Каждая гиперплоскость в E_{n+1}, проходящая через начало координат и пересекающая конус $[x, x]=0$; задается уравнением

$$[x, \xi] = 0,$$

где $[\xi, \xi] < 0$. Это уравнение является, следовательно, и уравнением плоскости пространства Лобачевского в однородных координатах.

Заметим, что вектор ξ в уравнении плоскости определен с точностью до множителя. Отсюда видно, что многообразие плоскостей пространства Лобачевского тождественно множеству прямых E_{n+1}, проходящих через начало координат и лежащих вне конуса $[\xi, \xi]=0$, то есть множеству точек мнимого пространства Лобачевского.

---

*) Если бы имело место $[x, \xi]=0$, то отсюда следовало бы, что

$$x_0\xi_0 = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n.$$

Но тогда, в силу неравенства Коши — Буняковского,

$$x_0^2\xi_0^2 \leqslant (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2).$$

Поскольку $[\xi, \xi]=0$, то $\xi_0^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$. Следовательно,

$$x_0^2 \leqslant x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

что противоречит условию $[x, x] > 0$.

Плоскости в пространстве Лобачевского можно определить и не прибегая к реализации этого пространства. Это поверхности, обладающие следующим характеристическим свойством: если некоторая геодезическая линия имеет две общие точки с плоскостью, то она лежит в этой плоскости. В этом смысле плоскости в пространстве Лобачевского являются аналогами $(n-1)$-мерных плоскостей в n-мерном евклидовом пространстве.

5. Сферы и орисферы в мнимом пространстве Лобачевского. *Сферой* радиуса r с центром в точке a в мнимом пространстве Лобачевского назовем совокупность точек x этого пространства, отстоящих от a на расстоянии r. В отличие от обычного пространства Лобачевского расстояние между точками в мнимом пространстве Лобачевского может быть как вещественным положительным, так и мнимым числом, а также может равняться нулю. Поэтому *в мнимом пространстве Лобачевского имеется три типа сфер — сферы вещественного радиуса, сферы радиуса, равного нулю, и, наконец, сферы мнимого радиуса* (в последнем случае радиус принадлежит отрезку $\left(0, \frac{\pi i}{2k}\right]$).

Уравнение сферы радиуса r с центром в точке a имеет в однородных координатах тот же вид, что и в случае обычного пространства Лобачевского, а именно

$$[x, a]^2 = c[a, a][x, x], \qquad [a, a] < 0, \tag{1}$$

где $c = \operatorname{ch}^2 kr$.

В отличие от обычного пространства Лобачевского, где было $c > 1$, в мнимом пространстве Лобачевского c может принимать любые положительные значения. При $c > 1$ мы получаем сферу вещественного радиуса, при $c < 1$ — сферу мнимого радиуса и, наконец, при $c = 1$ — сферу радиуса, равного нулю.

По определению, сфера радиуса 0 с центром в точке a есть совокупность точек, отстоящих от точки a на расстоянии 0. Мы уже знаем из п. 3а, что через любые две точки мнимого пространства Лобачевского, отстоящие одна от другой на расстоянии 0, проходит изотропная прямая. Таким образом, сфера радиуса 0 с центром в точке a есть поверхность, образованная изотропными прямыми, проходящими через точку a. Эту поверхность естественно также назвать *изотропным конусом* в мнимом пространстве Лобачевского.

Введем понятие орисферы в мнимом пространстве Лобачевского. Будем, как и в случае обычного пространства Лобачевского, удалять центр сферы в бесконечность, требуя при этом, чтобы сфера проходила через одну и ту же фиксированную точку b. Предельную поверхность назовем *орисферой* в мнимом пространстве Лобачевского.

Составим уравнение орисферы. Как мы видели, уравнение сферы в мнимом пространстве Лобачевского имеет в однородных координатах следующий вид:

$$[x, a]^2 = c[a, a][x, x], \tag{2}$$

где $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ — однородные координаты центра сферы. Пусть центр сферы стремится к бесконечности, то есть a стремится к точке ξ, принадлежащей конусу $[\xi, \xi] = 0$. Будем одновременно менять радиус сферы так, чтобы произведение $c[a, a]$ сохраняло постоянное значение c_1. В пределе мы получим *уравнение орисферы в мнимом пространстве Лобачевского*

$$[x, \xi]^2 = c_1[x, x], \tag{3}$$

где $[\xi, \xi] = 0$, $c_1 \leqslant 0$.

Вспомним, что так же писалось уравнение орисферы и в обычном пространстве Лобачевского. Однако там всегда было $c_1 \neq 0$. Здесь же допускается и особый случай, когда $c_1 = 0$.

Назовем орисферы

$$[x, \xi]^2 = c_1[x, x], \tag{4}$$

где $c_1 < 0$, орисферами *первого рода*, а орисферы

$$[x, \xi] = 0 \tag{5}$$

орисферами *второго рода*.

Чтобы получить наглядное представление об орисферах второго рода, реализуем мнимое пространство Лобачевского на гиперплоскости $x_0 = 1$, то есть как множество точек n-мерного пространства, лежащих вне единичной сферы (абсолюта). В этой реализации уравнение орисферы второго рода примет вид

$$\xi_0 - \xi_1 x_1 - \ldots - \xi_n x_n = 0. \tag{5'}$$

Уравнение (5′) есть уравнение гиперплоскости, касающейся абсолюта в точке $\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right)$.

Итак, орисферы второго рода в нашей реализации мнимого пространства Лобачевского это гиперплоскости, касательные к абсолюту. Как мы уже знаем, прямые, касающиеся абсолюта, это изотропные прямые мнимого пространства Лобачевского. Таким образом, орисферы второго рода мнимого пространства Лобачевского распадаются на изотропные прямые.

В дальнейшем мы рассмотрим задачи интегральной геометрии в трехмерном мнимом пространстве Лобачевского. В этом случае вместо орисфер второго рода будут рассматриваться изотропные прямые, на которые эти орисферы распадаются. В силу некоторых общих соображений более естественно было бы называть орисферами второго рода именно эти изотропные прямые *).

Теперь рассмотрим орисферы первого рода. Приведем уравнение орисферы первого рода

$$[x, \xi]^2 = c_1 [x, x],$$

где $c_1 < 0$, к каноническому виду. Так как уравнение орисферы сохраняется, если в нем заменить вектор ξ на вектор $\alpha\xi$ и c_1 на $\alpha^2 c_1$, где $\alpha \neq 0$, то можно уравнение орисферы нормировать условием $c_1 = -1$. С другой стороны, так как уравнение орисферы сохраняется при замене ξ на $-\xi$, то можно считать точку ξ принадлежащей верхней поле конуса $[\xi, \xi] = 0$. В результате уравнение орисферы первого рода принимает следующий канонический вид:

*) Приведем общее определение орисферы в однородном пространстве X, группа преобразований которого G есть группа комплексных унимодуляриых матриц второго порядка (см. гл. VI, § 1, п. 6). *Орисферой в пространстве X называется траектория любой точки при действии на нее преобразований из подгруппы матриц вида* $\begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ (или из любой сопряженной с ней подгруппы). Можно показать (см. гл. VI, § 1, п. 6), что в случае трехмерного мнимого пространства Лобачевского такими траекториями оказываются как раз поверхности, которые мы здесь назвали орисферами первого рода, и изотропные прямые. В гл. VI, § 1, п. 6 будет дано также определение орисферы для случая любой комплексной полупростой группы Ли преобразований.

$$[x, \xi]^2 = -[x, x], \tag{6}$$

где ξ — точка верхней полы конуса $[\xi, \xi] = 0$. Следовательно, орисфера первого рода задается точкой ξ верхней полы конуса $[\xi, \xi] = 0$, $\xi_0 > 0$.

В частности, при реализации мнимого пространства Лобачевского на гиперболоиде $[x, x] = -1$ уравнение орисферы первого рода принимает вид

$$|[x, \xi]| = 1, \tag{6′}$$

где $[\xi, \xi] = 0$, $\xi_0 > 0$.

Нетрудно убедиться, что гиперболическим вращением пространства E_{n+1} любую точку ξ верхней полы конуса $[\xi, \xi] = 0$ можно перевести в любую другую точку этой полы. Отсюда непосредственно следует, что и любую орисферу первого рода можно перевести гиперболическим вращением в любую другую орисферу первого рода.

Из тех же соображений ясно, что и орисферы второго рода

$$[x, \xi] = 0$$

также образуют транзитивное семейство, то есть переводятся одна в другую движениями мнимого пространства Лобачевского. Мы уже говорили, что орисферы второго рода распадаются на изотропные прямые. Легко показать, что изотропные прямые также образуют транзитивное семейство.

6. Инвариантное интегрирование в пространствах постоянной кривизны. В этом пункте будет определено интегрирование функций, заданных на пространствах постоянной кривизны. Так же, как и для интегралов на группах, естественно потребовать, чтобы интеграл на пространстве постоянной кривизны обладал следующим свойством *инвариантности*:

$$\int f(x)\,dx = \int f(xg)\,dx. \tag{1}$$

Здесь через xg обозначена точка, в которую переходит точка x при движении g.

Таким образом, нужно определить в пространстве элемент объема, который сохранялся бы при движениях пространства. Хорошо известно, что на n-мерной сфере $x_0^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$ этот инвариантный элемент объема (мера) определяется следующей формулой:

$$dx = \frac{R\,dx_1 \ldots dx_n}{|x_0|} = \frac{R\,dx_1 \ldots dx_n}{\sqrt{R^2 - (x_1^2 + \ldots + x_n^2)}}. \tag{2}$$

Выведем аналогичную формулу для пространства Лобачевского. Реализуем это пространство на гиперболоиде

$$[x, x] \equiv x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1, \qquad x_0 > x,$$

в $(n+1)$-мерном пространстве E_{n+1}.

Элемент объема $dv = dx_0 \ldots dx_n$ в пространстве E_{n+1} сохраняется при всех линейных преобразованиях с определителем 1, в том числе при гиперболических поворотах. Введем в области $[x, x] > 0$, $x_0 > 0$, новую систему координат $x_1, \ldots, x_n$ и $r = \sqrt{[x, x]}$. В этих новых переменных элемент объема dv примет следующий вид:

$$dv = \frac{r\,dr\,dx_1 \ldots dx_n}{x_0} = \frac{r\,dr\,dx_1 \ldots dx_n}{\sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}}.$$

Поскольку при гиперболических поворотах в пространстве E_{n+1} сохраняются как dv, так и r, то, следовательно, сохраняется и

$$dx = \frac{dx_1 \ldots dx_n}{x_0} = \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}}. \tag{3}$$

Таким образом, формула для инвариантной меры в пространстве Лобачевского получена. Наряду с выражением (3) можно использовать аналогичные выражения

$$dx = \frac{dx_0 \ldots dx_{k-1}\,dx_{k+1} \ldots dx_n}{|x_k|}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3'}$$

Инвариантный интеграл по гиперболоиду $[x, x] = 1$ можно записать с помощью обобщенной функции $\delta([x, x] - 1)$

Именно, легко показать, что

$$\int f(x)\,dx = 2 \int f(x)\,\delta([x, x] - 1)\,dv\ ^{*)}. \tag{4}$$

Инвариантность интеграла, стоящего в правой части равенства (4), сразу вытекает из инвариантности меры dv и функции $[x, x]$ при гиперболических поворотах в E_{n+1}.

Рассмотрим теперь мнимое пространство Лобачевского. Реализуем его на однополостном гиперболоиде $[x, x] = -1$. Тогда инвариантный элемент объема задается формулой

$$dx = \frac{dx_1 \ldots dx_n}{|x_0|} = \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1}}, \tag{5}$$

вывод которой аналогичен выводу формулы (3). Справедливо легко доказываемое равенство

$$\int f(x)\,dx = 2 \int f(x)\,\delta([x, x] + 1)\,dv, \tag{6}$$

где интеграл в левой части берется по всему гиперболоиду $[x, x] = -1$; при этом следует иметь в виду, что $f(-x) = f(x)$.

Наряду с интегрированием по пространству Лобачевского (верхней поле гиперболоида $[x, x] = 1$) и мнимому пространству Лобачевского (гиперболоиду $[x, x] = -1$) нам придется в дальнейшем интегрировать функции по конусу $[x, x] = 0$. Мера на конусе, инвариантная при гиперболических вращениях пространства E_{n+1}, определяется формулой

$$dx = \frac{dx_1 \ldots dx_n}{|x_0|} = \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}}, \tag{7}$$

аналогичной формулам (3) и (5).

7. Интегрирование по орисфере. В этом пункте будет определено интегрирование по орисфере в пространстве Лобачевского и мнимом пространстве Лобачевского. Если про-

*) Относительно обобщенной функции $\delta(P)$ см. «Обобщенные функции», вып. 1, гл. III, § 1, п. 3, и в частности стр. 276. Само собой разумеется, что в правой части равенства (4) под $f(x)$ подразумевается непрерывное продолжение функции, заданной на гиперболоиде $[x, x] = 1$, на все пространство E_{n+1}.

странство Лобачевского реализовано на верхней поле гиперболоида $[x, x]=1$, то уравнение орисферы в этом пространстве принимает вид $[x, \xi]=1$, где $[\xi, \xi]=0$ (см. п. 4).

Определим теперь интеграл функции $f(x)$ по орисфере ω: $[x, \xi]=1$ формулой

$$\int\limits_{\omega} f(x)\, d\sigma = \int f(x)\, \delta([x, \xi]-1)\, dx, \tag{1}$$

где x — точка пространства Лобачевского, реализованного на гиперболоиде $[x, x]=1$, а dx — инвариантная мера в этом пространстве.

Так как мера dx и функция $[x, \xi]$ сохраняются при одновременном сдвиге точек x и ξ, то определенная таким образом мера сохраняется при сдвиге орисферы. Отсюда следует, что если движение g пространства Лобачевского переводит орисферу ω в орисферу ωg, то имеет место равенство

$$\int\limits_{\omega} f(xg)\, d\sigma = \int\limits_{\omega g} f(x)\, d\sigma_g, \tag{2}$$

где $d\sigma_g$ — мера на орисфере ωg. В частности, если движение g переводит орисферу ω в себя, то

$$\int\limits_{\omega} f(xg)\, d\sigma = \int\limits_{\omega} f(x)\, d\sigma.$$

Интегрирование по орисферам первого рода в мнимом пространстве Лобачевского определим формулой

$$\int\limits_{\omega} f(x)\, d\sigma = \int f(x)\, \delta(|[x, \xi]|-1)\, dx, \tag{3}$$

аналогичной формуле (1). Здесь dx — инвариантная мера в мнимом пространстве Лобачевского. Меры на орисферах первого рода в мнимом пространстве Лобачевского также сохраняются при движениях этого пространства.

Определим теперь интеграл по изотропной прямой в мнимом пространстве Лобачевского. Пусть мнимое пространство Лобачевского реализовано как множество точек гиперболоида

$$[x, x]=-1. \tag{4}$$

Тогда изотропная прямая l (прямолинейная образующая гиперболоида) задается уравнением

$$x = \xi t + b, \tag{5}$$

где b — фиксированная точка образующей, ξ — ее направляющий вектор ($[\xi, \xi]=0$).

Интеграл по изотропной прямой (5) определим как интеграл по t

$$\varphi(\xi, b) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi t + b)\, dt. \tag{6}$$

Очевидно, при таком определении этот интеграл зависит не только от самой прямой l, но и от нормировки направляющего вектора ξ.

Заметим, что в отличие от орисфер первого рода интеграл по изотропной прямой не сохраняется, вообще говоря, при движениях мнимого пространства Лобачевского, а умножается на некоторый постоянный множитель. Это следует из того, что в пространстве E_{n+1} существуют такие гиперболические вращения, которые заданный вектор ξ, $[\xi, \xi]=0$, переводят в вектор $\lambda\xi$, где $\lambda \neq 0$ — произвольное число.

8. Меры на абсолюте. Рассмотрим теперь меры на абсолюте пространства Лобачевского. Мы назвали абсолютом множество прямолинейных образующих конуса $[\xi, \xi]=0$. Поскольку образующая этого конуса однозначно определяется любой лежащей на ней точкой (отличной от начала координат), задать меру на абсолюте означает задать меру $d\sigma$ на любом многообразии $\mathfrak{M}$, лежащем на конусе $[\xi, \xi]=0$ и пересекающем каждую образующую в одной и только одной точке.

Можно показать, что не существует меры на абсолюте, инвариантной относительно всех движений пространства Лобачевского. Легко, однако, построить меру на абсолюте, инвариантную относительно вращений вокруг некоторой точки M пространства Лобачевского (то есть относительно гиперболических поворотов, оставляющих эту точку неподвижной). Напомним, что точкой пространства Лобачевского мы назвали прямую линию в пространстве E_{n+1}, проходящую через начало координат и лежащую внутри конуса $[\xi, \xi]=0$. Выберем на прямой M точку x (отличную от начала координат) и рассмотрим на конусе множество точек ξ, для которых $[x, \xi]=1$ (то есть сечение конуса гиперплоскостью). Легко видеть, что это множество лежит на одной поле конуса и пересекается с каждой образующей конуса в одной и только одной точке. Поэтому для задания меры на абсолюте достаточно задать меру на этом множестве. Определим эту меру формулой

$$\int f(\xi)\, d\sigma = \int f(\xi)\, \delta([x, \xi]-1)\, d\xi, \tag{1}$$

где $d\xi$ — инвариантная мера на конусе, а $f(\xi)$ — функция на абсолюте, то есть функция на конусе, постоянная вдоль прямолинейных образующих.

Покажем, что мера $d\sigma$ инвариантна при вращениях пространства Лобачевского вокруг точки M. Эти вращения являются гиперболическими поворотами пространства E_{n+1}, переводящими в себя прямую линию M. Но эти повороты переводят в себя и точку x, выбранную на прямой. Поэтому для любого вращения g вокруг точки M выполняется равенство $[xg, \xi g]=[x, \xi g]$. Поскольку и мера $d\xi$ инвариантна при движениях пространства Лобачевского, мера $d\sigma$, определенная формулой (1), инвариантна при вращениях вокруг точки M. Иными словами, для любой функции $f(\xi)$ на абсолюте и любого вращения g вокруг точки M выполняется равенство

$$\int f(\xi g)\, d\sigma = \int f(\xi)\, d\sigma.$$

Очевидно, что если бы вместо точки x выбрать на прямой M другую точку, то получилась бы мера на абсолюте, отличающаяся от построенной нами меры лишь постоянным множителем. Этим исчерпываются все меры на абсолюте, инвариантные при вращениях вокруг точки M пространства Лобачевского. В самом деле, такие вращения образуют транзитивную группу преобразований абсолюта, а потому инвариантная при таких вращениях мера на абсолюте однозначно определена с точностью до постоянного множителя.

Мера на абсолюте, инвариантная при вращениях вокруг точки M, называется гармонической мерой. Это связано с тем, что при реализации пространства Лобачевского внутри единичного шара (см. п. 2) мера фиксированного множества абсолюта, инвариантная при вращениях вокруг точки M, является гармонической функцией координат этой точки.

Рассмотрим теперь меры на абсолюте, инвариантные при вращениях вокруг точки M мнимого пространства Лобачевского. Точки мнимого пространства Лобачевского являются, по определению, прямыми пространства E_{n+1}, проходящими через начало координат и лежащими вне конуса $[\xi, \xi]=0$. Выберем на прямой M точку x и зададим меру $d\sigma$ на абсолюте следующей формулой:

$$\int f(\xi)\, d\sigma = c_1 \int\limits_{V_+} f(\xi)\, \delta([x, \xi]-1)\, d\xi + {}$$
$$+ c_2 \int\limits_{V_-} f(\xi)\, \delta([x, \xi]-1)\, d\xi, \tag{2}$$

где V_+ — верхняя пола конуса $[\xi, \xi]=0$, а V_- — нижняя пола этого конуса. Обычно мы будем полагать $c_1=c_2=1$. Эта мера $d\sigma$ инвариантна относительно вращений вокруг точки M, поскольку эти вращения сохраняют меру $d\xi$, выражение $[x, \xi]$ и переводят в себя каждую полу конуса.

Наличие в формуле (2) не одного, а двух слагаемых связано с тем, что множество образующих конуса, пересекающихся с гиперплоскостью $[x, \xi]=1$, распадается на два транзитивных подмножества Ω_+ и Ω_-. Множество Ω_+ состоит из образующих, пересекающих эту гиперплоскость в точках верхней полы конуса V_+; множество Ω_- определяется аналогично.

В множестве образующих конуса есть третье многообразие Ω_0, на котором транзитивно действует группа вращений вокруг точки M мнимого пространства Лобачевского. Оно состоит из образующих, лежащих в плоскости $[x, \xi]=0$, то есть параллельных плоскости $[x, \xi]=1$. На многообразии Ω_0 образующих, параллельных плоскости $[x, \xi]=1$, нет меры, инвариантной при вращениях вокруг точки M. Однако если взять какую-нибудь точку N пространства Лобачевского, то можно построить меру, инвариантную при всех движениях, оставляющих на месте точки M и N. Поскольку образующие, параллельные плоскости $[x, \xi]=1$, лежат в плоскости $[x, \xi]=0$, эта мера определяется формулой

$$\int f(\xi)\, d\sigma_0 = \int f(\xi)\, \delta([x, \xi], [y, \xi] - 1)\, d\xi,$$

где $d\xi$ — инвариантная мера на конусе $[\xi, \xi] = 0$, а y — точка пространства E_{n+1}, лежащая на прямой N *).

Чтобы получить наглядное представление о множествах Ω_+, Ω_- и Ω_0, реализуем мнимое пространство Лобачевского во внешней области единичной сферы Ω. Рассмотрим изотропный конус с вершиной в точке M. При выбранной реализации изотропные прямые изображаются прямыми, касающимися сферы Ω (абсолюта). Поэтому изотропный конус с вершиной в точке M касается сферы Ω вдоль некоторой «окружности». Эта «окружность» и есть Ω_0. Она делит сферу Ω на два сегмента, Ω_+ и Ω_-. Очевидно, что при вращениях мнимого пространства Лобачевского вокруг точки M абсолют и каждая пола изотропного конуса с вершиной в точке M переходят в себя. Тем самым переходят в себя и множества Ω_+, Ω_-, Ω_0.

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО, СВЯЗАННОЕ С ОРИСФЕРАМИ

В главе I было рассмотрено преобразование Радона в евклидовом пространстве. Это преобразование состояло в том, что каждой финитной функции $f(x)$ сопоставлялись ее интегралы по плоскостям. В этом параграфе будет рассмотрен аналог преобразования Радона для пространства Лобачевского, при котором каждой финитной функции $f(x)$ этого пространства сопоставляются ее интегралы по орисферам **).

*) Напомним еще раз, что точками пространства Лобачевского являются прямые, проходящие через начало координат и лежащие внутри конуса $[\xi, \xi] = 0$.

**) Поскольку на орисферах пространства Лобачевского имеет место евклидова геометрия, их можно рассматривать как один из аналогов гиперплоскостей евклидова пространства. Другим аналогом гиперплоскостей евклидова пространства являются плоскости пространства Лобачевского. Соответствующее плоскостям интегральное преобразование также представляет значительный интерес, хотя оно и не связано с задачей о разложении функций в пространстве Лобачевского в аналог интеграла Фурье (см. гл. VI, § 4, п. 6). В данной книге мы это преобразование рассматривать не будем и отошлем читателя к интересной статье Хельгасона [5].

Подобно тому как преобразование Радона тесно связано с разложением функций в евклидовом пространстве в интеграл Фурье, рассматриваемое в этом пункте интегральное преобразование связано с разложением функций в пространстве Лобачевского в интеграл Фурье. Эта связь будет установлена в § 3 следующей главы. Вообще, разложение функций на однородных пространствах в интеграл Фурье во многих случаях удобно связать с предварительным переходом от функции к ее интегралам по орисферам этого однородного пространства.

1. Интегральное преобразование, связанное с орисферами. Сопоставим каждой финитной функции $f(x)$ в пространстве Лобачевского ее интегралы по орисферам

$$h(\omega) = \int_{\omega} f(x)\, d\sigma, \tag{1}$$

где $d\sigma$ — определенная в п. 7 § 1 мера на орисфере ω. Тем самым каждой финитной функции в пространстве Лобачевского сопоставляется другая функция $h(\omega)$, определенная на множестве орисфер этого пространства. Назовем преобразование, переводящее функцию $f(x)$ в функцию $h(\omega)$, *интегральным преобразованием, связанным с орисферами*.

Функцию $h(\omega)$ можно рассматривать как функцию, заданную на верхней поле конуса $[\xi, \xi] = 0$. В самом деле, реализуем пространство Лобачевского на верхней поле гиперболоида $[x, x] = 1$. Тогда каждую орисферу ω можно однозначно задать уравнением $[x, \xi] = 1$, где ξ — точка верхней полы конуса. Поэтому вместо $h(\omega)$ можно писать $h(\xi)$.

Вспоминая определение интеграла по орисфере при реализации пространства Лобачевского на гиперболоиде $[x, x] = 1$ (см. п. 7 § 1), можно записать функцию $h(\xi)$ в следующем виде:

$$h(\xi) = \int f(x)\, \delta([x, \xi] - 1)\, dx, \tag{2}$$

где dx — инвариантная мера в пространстве Лобачевского.

Покажем, что если $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция на гиперболоиде $[x, x] = 1$, то функция

$h(\xi)$ на конусе, определяемая формулой (2), бесконечно дифференцируема, финитна и равна нулю в некоторой окрестности вершины конуса.

Бесконечная дифференцируемость функции $h(\xi)$ очевидна. Чтобы доказать, что она равна нулю в некоторой окрестности вершины конуса, используем неравенство

$$|[x, \xi]| < |x_0\xi_0| + \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}.$$

Если точка x лежит на гиперболоиде $[x, x] = 1$, а точка ξ — на конусе $[\xi, \xi] = 0$, то из этого неравенства следует

$$|[x, \xi]| < |\xi_0| \left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1}\right). \tag{3}$$

Так как функция $f(x)$ по условию финитна, то найдется такое $N > 1$, что $f(x) = 0$ при $|x_0| > N$. В силу неравенства (3) при $|\xi_0| < \left(N + \sqrt{N^2 - 1}\right)^{-1}$, $|x_0| < N$, имеем $|[x, \xi]| < 1$. Поэтому, разбивая интеграл (2) на интегралы по областям $|x_0| < N$ и $|x_0| > N$, убеждаемся, что он равен нулю, если $|\xi_0| < \left(N + \sqrt{N^2 - 1}\right)^{-1}$.

Обращение функции $h(\xi)$ в нуль в некоторой окрестности вершины конуса доказано. Для доказательства финитности этой функции достаточно использовать неравенство

$$|[x, \xi]| > |\xi_0| \left(|x_0| - \sqrt{x_0^2 - 1}\right),$$

доказываемое аналогично неравенству (3).

Основной задачей, решаемой в этом параграфе, является вывод формулы обращения для интегрального преобразования (2). Окончательный результат приведен на стр. 395 (для $n = 3$) и на стр. 400 (для произвольного a). Опишем план вывода формулы обращения.

Способ вывода формулы обращения, который будет здесь дан, близок к способу, примененному в п. 10 § 3 гл. I вып. 1 этой книги для разложения δ-функции в евклидовом пространстве на функции, постоянные на плоскостях.

Чтобы найти значение функции $f(x)$ в точке a пространства Лобачевского, умножим обе части равенства (2) на некоторую функцию $\varphi(a, \xi; \mu)$, зависящую от точки a, точки ξ конуса (или, что то же самое, от орисферы ω) и комплексного параметра μ. Интегрируя обе части полученного равенства по инвариантной мере $d\xi$ на конусе, получим

$$\int \varphi(a, \xi; \mu) h(\xi) d\xi = \int \Phi(x, a; \mu) f(x) dx, \tag{4}$$

где

$$\Phi(x, a; \mu) = \int \varphi(a, \xi; \mu) \delta([x, \xi] - 1) d\xi. \tag{5}$$

Заметим, что подинтегральная функция в (5) сосредоточена на множестве точек ξ конуса $[\xi, \xi] = 0$, для которых $[x, \xi] = 1$; этим точкам соответствуют орисферы ω, проходящие через точку x. Значит, $\Phi(x, a; \mu)$ является интегралом функции $\varphi(a, \xi; \mu)$ по множеству орисфер, проходящих через точку x. При этом, как мы видели в п. 8 § 1, мера $\delta([x, \xi] - 1) d\xi$, по которой интегрируется функция $\varphi(a, \xi; \mu)$, инвариантна при движениях g, оставляющих неподвижной точку x (вращениях вокруг точки x).

Пусть функция $\varphi(a, \xi; \mu)$ остается инвариантной при одновременном сдвиге точек a и ξ,

$$\varphi(a, \xi; \mu) = \varphi(ag, \xi g; \mu).$$

Тогда ядро $\Phi(x, a; \mu)$ также инвариантно относительно одновременного сдвига точек a и x. Но единственным инвариантом пары точек в пространстве Лобачевского является расстояние между ними. Поэтому $\Phi(x, a; \mu)$ является функцией от μ и от расстояния r между a и x.

Предположим еще, что $\varphi(a, \xi; \mu)$ как функция от ξ имеет особенность вида $|[a, \xi] - 1|^{\mu}$. Тогда можно показать, что ядро $\Phi(x, a; \mu)$ как функция от r имеет в окрестности точки a особенность вида Cr^{μ}. Поэтому при $\mu = -n$ ядро $\Phi(x, a; \mu)$ имеет особенность типа δ-функции, сосредоточенной в точке a. Но тогда из равенства (4) при $\mu = -n$, мы получим искомую формулу обращения для интегрального преобразования (2), то есть выражение $f(a)$ через $h(\xi)$.

Мы проведем этот вывод в следующем пункте для случая, когда $n = 3$ (именно этот случай понадобится нам в следующей главе). Случай произвольного n будет рассмотрен в п. 3.

2. Вывод формулы обращения для интегрального преобразования, связанного с орисферами пространства Лобачевского (при $n=3$). Итак, пусть $f(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция в пространстве Лобачевского (реализованном на верхней поле гиперболоида $[x, x]=1$). Мы хотим выразить значение этой функции в точке a через функцию $h(\xi)$, определяемую равенством

$$h(\xi)=\int f(x)\,\delta([x, \xi]-1)\,dx, \tag{1}$$

где dx — инвариантная мера в пространстве Лобачевского. Как было показано в п. 1, определяемая этим равенством функция $h(\xi)$, заданная на конусе $[\xi, \xi]=0$, бесконечно дифференцируема, финитна и обращается в нуль в некоторой окрестности вершины конуса. Поэтому при $\operatorname{Re}\mu>-1$ сходится интеграл

$$\int |[a, \xi]-1|^{\mu}\, h(\xi)\, d\xi,$$

где $d\xi$ — инвариантная мера на конусе $[\xi, \xi]=0$.

Очевидно, что при $\operatorname{Re}\mu>-1$ формула

$$(\Phi, f(x))=\int |[a, \xi]-1|^{\mu}\, h(\xi)\, d\xi \tag{2}$$

определяет линейный функционал в пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$. Найдем явное выражение этого функционала, то есть найдем такую функцию $\Phi(x, a; \mu)$, что

$$\int |[a, \xi]-1|^{\mu}\, h(\xi)\, d\xi=\int \Phi(x, a; \mu)\, f(x)\, dx. \tag{3}$$

Из равенства (1) вытекает, что эта функция $\Phi(x, a; \mu)$ задается формулой

$$\Phi(x, a; \mu)=\int |[a, \xi]-1|^{\mu}\,\delta([x, \xi]-1)\, d\xi, \tag{4}$$

то есть является интегралом от функции $|[a, \xi]-1|^{\mu}$ по множеству орисфер, проходящих через точку x.

Заметим, что мера $\delta([x, \xi]-1)\,d\xi$ есть не что иное, как гармоническая мера на абсолюте, инвариантная при вращениях вокруг точки x (см. п. 8 § 1). Таким образом, тот же множитель $\delta([x, \xi]-1)$, с помощью которого была определена мера на орисфере $[x, \xi]=1$, привел к правильной мере в множестве орисфер, проходящих через точку x.

Вычислим теперь интеграл (4), выражающий функцию $\Phi(x, a; \mu)$. Для этого заметим, что подинтегральное выражение в формуле (4) не меняется при одновременном сдвиге точек a и x, поскольку при таком сдвиге сохраняются мера $d\xi$ и выражения $[a, \xi]$, $[x, \xi]$. Поэтому имеет место равенство

$$\Phi(xg, ag; \mu)=\Phi(x, a; \mu),$$

где g — любое движение в пространстве Лобачевского. Но каждую пару точек x, a пространства Лобачевского можно перевести движением в пару точек вида $x'(1, 0, 0, 0)$, $a'(\operatorname{ch} kr, \operatorname{sh} kr, 0, 0)$, где r — расстояние между a и x *). Поэтому достаточно сосчитать ядро $\Phi(x, a; \mu)$ для точек a' и x'.

Таким образом,

$$\Phi(x, a; \mu)=\Phi(x', a'; \mu)=$$
$$=\int |\xi_0 \operatorname{ch} kr-\xi_1 \operatorname{sh} kr-1|^{\mu}\,\delta(\xi_0-1)\, d\xi, \tag{5}$$

где ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — координаты точки ξ. Так как инвариантная мера на конусе $[\xi, \xi]=0$ задается согласно п. 6 § 1 равенством

$$d\xi=\frac{d\xi_0\, d\xi_1\, d\xi_2}{|\xi_3|},$$

где $\xi_3=\pm\sqrt{\xi_0^2-\xi_1^2-\xi_2^2}$, то формулу (5) можно переписать так:

$$\Phi(x, a; \mu)=2\int_{-1}^{1} |\operatorname{ch} kr-\xi_1 \operatorname{sh} kr-1|^{\mu} \int_{-\sqrt{1-\xi_1^2}}^{\sqrt{1-\xi_1^2}} \frac{d\xi_2\, d\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}}. \tag{5'}$$

*) В самом деле, существует движение g, переводящее точку x в точку x' (1, 0, 0, 0). Пусть при этом точка a переходит в некоторую точку a^*. Поскольку движения сохраняют расстояние в пространстве Лобачевского, то расстояние между точками x' и a^* равно r. Повернем теперь гиперболоид $[x, x]=1$ вокруг оси Ox_0 так, чтобы точка a^* попала на плоскость Ox_0x_1. Очевидно, что тогда она перейдет в точку a' ($\operatorname{ch} kr$, $\operatorname{sh} kr$, 0, 0), чем наше утверждение и доказано.

Интеграл (5′) сходится при $\operatorname{Re}\mu > -1$. Простой подсчет показывает, что

$$\Phi(x,\ a;\ \mu) = \frac{4\pi \operatorname{ch} \frac{(\mu+1)\,kr}{2}}{(\mu+1)\operatorname{ch}^{\mu+1}\frac{kr}{2}} \operatorname{sh}^{\mu} kr. \tag{6}$$

Итак, мы доказали, что при $\operatorname{Re}\mu > -1$ для финитной бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\int |[a,\ \xi]-1|^{\mu} h(\xi)\,d\xi = \int \Phi(x,\ a;\ \mu) f(x)\,dx, \tag{7}$$

где ядро $\Phi(x,\ a;\ \mu)$ определяется формулой (6).

При $\operatorname{Re}\mu < -1$ формула

$$(\Phi,\ f) = \int |[a,\ \xi]-1|^{\mu} h(\xi)\,d\xi, \tag{8}$$

с помощью которой был определен функционал $(\Phi,\ f)$, теряет смысл. Однако, поскольку при финитной функции $f(x)$ функция $h(\xi)$ также финитна и равна нулю в некоторой окрестности вершины конуса $[\xi,\ \xi]=0$, правая часть равенства (8) аналитически зависит от μ в области $\operatorname{Re}\mu > -1$. Это позволяет аналитически продолжить функционал $(\Phi,\ f)$, заданный формулой (8), в область $\operatorname{Re}\mu < -1$. При этом, поскольку поверхность $[a,\ \xi]=1$ не имеет особых точек, этот функционал, рассматриваемый как функция от μ, имеет лишь простые полюсы в точках $\mu=-1,\ -3,\ -5,\ \ldots$ (см. § 4 гл. III вып. 1). В силу единственности аналитического продолжения сохраняет силу равенство (7), причем значение интеграла в правой части также понимается в регуляризованном смысле.

Теперь можно решить основную задачу этого пункта — вывести формулу обращения для интегрального преобразования

$$h(\xi) = \int f(x)\,\delta([x,\ \xi]-1)\,dx,$$

то есть выразить $f(x)$ через $h(\xi)$. С этой целью рассмотрим равенство (7) при $\mu \to -3$. Как мы уже отметили, при этом значении μ обе части указанного равенства имеют простые полюсы. Сравнивая вычеты в этих полюсах, мы и получим искомую формулу обращения.

Рассмотрим левую часть равенства (7), то есть интеграл

$$\int |[a,\ \xi]-1|^{\mu} h(\xi)\,d\xi.$$

Этот интеграл имеет при $\mu=-3$ простой полюс с вычетом

$$\operatorname*{Выч}_{\mu=-3} \int |[a,\ \xi]-1|^{\mu} h(\xi)\,d\xi = \int \delta''([a,\ \xi]-1)\,h(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

В самом деле, обобщенная функция одного переменного $|t|^{\mu}$ имеет при $\mu=-3$ простой полюс с вычетом

$$\operatorname*{Выч}_{\mu=-3} |t|^{\mu} = \delta''(t). \tag{10}$$

Но многообразие, получаемое при пересечении конуса $[\xi,\ \xi]=0$ плоскостью $[a,\ \xi]=1$ компактно и не имеет особых точек. Пользуясь этим, легко вывести из формулы (10), что

$$\operatorname*{Выч}_{\mu=-3} |[a,\ \xi]-1|^{\mu} = \delta''([a,\ \xi]-1).$$

Отсюда непосредственно вытекает формула (9).

Перейдем к рассмотрению правой части равенства (7), то есть интеграла

$$\int \Phi(x,\ a;\ \mu) f(x)\,dx,$$

где $\Phi(x,\ a;\ \mu)$ задается формулой

$$\Phi(x,\ a;\ \mu) = \frac{4\pi \operatorname{ch} \frac{(\mu+1)\,kr}{2}}{(\mu+1)\operatorname{ch}^{\mu+1}\frac{kr}{2}} \operatorname{sh}^{\mu} kr. \tag{11}$$

Мы покажем сейчас, что *обобщенная функция* $\Phi(x,\ a;\ \mu)$ *имеет при* $\mu=-3$ *простой полюс с вычетом*

$$\operatorname*{Выч}_{\mu=-3} \Phi(x,\ a;\ \mu) = -8\pi^2\delta_a(x),$$

где $\delta_a(x)$ есть δ-функция, сосредоточенная в точке a, то есть

$$(\delta_a(x),\ f(x)) = f(a).$$

Так как единственным множителем в выражении (11), имеющим особенность при $\mu=-3$, является $\operatorname{sh}^\mu kr$, нам достаточно найти $\underset{\mu=-3}{\text{Выч}} \operatorname{sh}^\mu kr$. При этом, в силу инвариантности функции $\operatorname{sh}^\mu kr$ относительно движений пространства Лобачевского, мы можем, не теряя общности, считать, что точка a имеет координаты $a(1, 0, 0, 0)$. В этом случае расстояние r задается формулой

$$\operatorname{ch}^2 kr=[a, x]^2=x_0^2. \tag{12}$$

Так как точка x лежит на гиперболоиде $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$, то из формулы (12) вытекает равенство

$$\operatorname{sh}^2 kr=x_1^2+x_2^2+x_3^2. \tag{13}$$

Таким образом, функция $\operatorname{sh}^\mu kr$ в рассматриваемом случае принимает вид $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\mu/2}$.

Итак, нам надо найти вычет при $\mu=-3$ обобщенной функции $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\mu/2}$. Принимая во внимание, что инвариантная мера в пространстве Лобачевского имеет вид

$$dx=\frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{x_0}=\frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}},$$

получаем, что указанная обобщенная функция задается формулой

$$\left((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\mu/2}, f(x)\right)=$$
$$=\int (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\mu/2}\frac{f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}}. \tag{14}$$

Но обобщенная функция $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\mu/2}$ в трехмерном евклидовом пространстве имеет при $\mu=-3$ простой полюс с вычетом

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\mu/2}=4\pi\delta(x_1, x_2, x_3)$$

(см. п. 9 § 3 гл. I вып. 1). Поэтому из формулы (14) вытекает

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}}\left((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\mu/2}, f(x)\right)=4\pi f(0, 0, 0)=4\pi f(a).$$

Тем самым доказано, что для любой точки a

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}} \operatorname{sh}^\mu kr=4\pi\delta_a(x),$$

где $\delta_a(x)$ — обобщенная функция в пространстве Лобачевского, задаваемая формулой

$$(\delta_a(x), f(x))=f(a).$$

Мы уже говорили, что все множители в выражении (11), за исключением $\operatorname{sh}^\mu kr$, не имеют особенности при $\mu=-3$. Поэтому для вычисления вычета обобщенной функции $\Phi(x, a; \mu)$ при $\mu=-3$ можно положить в этих множителях $r=0$, $\mu=-3$. В результате вычисления получаем

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}}\Phi(x, a; \mu)=-8\pi^2\delta_a(x). \tag{15}$$

Из формулы (15) непосредственно следует

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}}\int \Phi(x, a; \mu) f(x)\,dx=-8\pi^2 f(a). \tag{16}$$

Эта формула выведена при $a=a(1, 0, 0, 0)$. Однако, как уже говорилось, в силу инвариантности функции $\Phi(x, a; \mu)$ при сдвиге точек x и a, формула (16) верна для всех точек a.

Вывод формулы обращения по сути дела окончен. Именно, из формул (7), (9), (16) вытекает

$$f(a)=-\frac{1}{8\pi^2}\int \delta''([a, \xi]-1)\,h(\xi)\,d\xi. \tag{17}$$

Эта формула и дает выражение для $f(a)$ через $h(\xi)$.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция в трехмерном пространстве Лобачевского и

$$h(\xi)=\int f(x)\,\delta([x, \xi]-1)\,dx$$

— интеграл этой функции по орисфере $[x, \xi]=1$. Тогда имеет место формула обращения (17).

Эта формула равносильна следующей:

$$\delta_a(x)=-\frac{1}{8\pi^2}\int \delta''([a, \xi]-1)\,\delta([x, \xi]-1)\,d\xi.$$

Ввиду важности полученной формулы обращения укажем еще одну запись этой формулы. Перепишем равенство (17) в виде двойного интеграла

$$f(a) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \int \delta(t-1)\,\delta''([a,\ \xi]-t)\,h(\xi)\,d\xi\,dt.$$

Дважды интегрируя по частям по t, получаем

$$f(a) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \delta''(t-1)\,H(a,\ t)\,dt = -\frac{1}{8\pi^2}H_t''(a,\ 1), \quad (17')$$

где через $H(a,\ t)$ обозначена функция, задаваемая равенством

$$H(a,\ t) = \int h(\xi)\,\delta([a,\ \xi]-t)\,d\xi. \quad (18)$$

Иными словами, $H(a,\ t)$ является интегралом функции $h(\xi)$ по сечению конуса $[\xi,\ \xi]=0$ плоскостью $[a,\ \xi]=t$. Мера $\delta([a,\ \xi]-t)\,d\xi$, по которой ведется интегрирование в формуле (18), инвариантна относительно вращений пространства Лобачевского вокруг точки a. Иными словами, она является гармонической мерой на абсолюте, инвариантной при вращениях вокруг точки a. Легко проверить, что мера всего абсолюта равна $4\pi t$.

Итак, мы доказали, что формулу обращения (17) можно записать в виде

$$f(a) = -\frac{1}{8\pi^2}H_t''(a,\ 1), \quad (17'')$$

где $H(a,\ t)$ — интеграл функции $h(\xi)$ по сечению конуса $[\xi,\ \xi]=0$ плоскостью $[a,\ \xi]=t$ относительно меры $\delta([a,\ \xi]-t)\,d\xi$, инвариантной при вращениях вокруг точки a.

Выясним теперь геометрический смысл функции $H(a,\ t)$. Найдем для этого расстояние τ *) точки a до орисферы $\omega: [x,\ \xi]=1$, задаваемой точкой ξ конуса. Это расстояние должно быть инвариантом точек a и ξ и должно обращаться

*) Расстоянием от точки до орисферы называется наименьшее из расстояний от точки a до точек x, лежащих на орисфере. Это расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки a на орисферу.

в нуль, если точка a лежит на орисфере $[x,\ \xi]=1$, то есть если $[a,\ \xi]=1$. Мы покажем, что это расстояние задается формулой

$$\tau = \frac{1}{k}\,|\ln[a,\ \xi]|. \quad (19)$$

В самом деле, расстояние τ от точки a до орисферы ω не меняется при одновременном сдвиге точки и орисферы. Но уравнение сдвинутой орисферы ωg имеет вид $[x,\ \xi g]=1$; поэтому расстояние τ не меняется при одновременном сдвиге a и ξ. Очевидно, что любую пару точек a, ξ, где a — точка верхней полы гиперболоида $[x,\ x]=1$, а ξ — точка верхней полы конуса $[\xi,\ \xi]=0$, можно перевести движением в пару точек a', ξ', где $a'(1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\xi'(t,\ t,\ 0,\ 0)$ и $t=[a,\ \xi]$. Поэтому достаточно вычислить расстояние от точки $a'(1,\ 0,\ 0,\ 0)$ до орисферы $\omega': [x,\ \xi']=1$, то есть до орисферы $tx_0 - tx_1 = 1$.

Из определения расстояния от точки до орисферы вытекает, что это расстояние равно радиусу сферы с центром в точке a', касающейся орисферы ω'. Но сферы с центром в точке $a'(1,\ 0,\ 0,\ 0)$ являются сечениями гиперболоида $[x,\ x]=1$ плоскостями $x_0=C$. Такое сечение касается орисферы $tx_0 - tx_1 = 1$ в точке этой орисферы, для которой x_0 принимает наименьшее значение. Легко видеть, что такой точкой является точка $y(\operatorname{ch} k\tau,\ \operatorname{sh} k\tau,\ 0,\ 0)$, где $\tau = \frac{1}{k}|\ln t|$. Поскольку расстояние точки a' до точки y равно

$$\tau = \frac{1}{k}\,|\ln t| = \frac{1}{k}\,|\ln[a,\ \xi]|,$$

то расстояние точки a' до орисферы ω' равно τ. Но тогда и расстояние от точки a до орисферы $\omega: [x,\ \xi]=1$ выражается формулой

$$\tau = \frac{1}{k}\,|\ln[a,\ \xi]| = \frac{1}{k}\,|\ln t|.$$

Из этого утверждения вытекает, что орисферы, соответствующие точкам ξ конуса, для которых $[a,\ \xi]=t$, отстоят от точки a на расстоянии $\tau = \frac{1}{k}|\ln t|$. Таким образом, интегрирование в формуле (18) ведется по множеству орисфер, отстоящих от точки a на расстоянии $\tau = \frac{1}{k}|\ln t|$, и потому $H(a,\ t)$ является интегралом функции $h(\xi)$ по этому множеству орисфер.

Поскольку все орисферы, отстоящие от точки a на расстоянии τ, касаются сферы с центром в точке a и радиусом τ, можно сказать, что интегрирование ведется по этой сфере. При этом мера, по которой ведется интегрирование, инвариантна при вращениях вокруг точки a и такова, что мера всей сферы равна $4\pi t$.

Итак, мы получили следующий результат:

Пусть известны интегралы

$$h(\xi)=\int f(x)\,\delta([x,\ \xi]-1)\,dx$$

финитной функции $f(x)$ в пространстве Лобачевского по орисферам $[x, \xi]=1$. Тогда значение функции $f(x)$ в точке a дается формулой

$$f(a)=-\frac{1}{8\pi^2}H_t''(a,\ 1),$$

где $H(a, t)$ — интеграл функции $h(\xi)$ по множеству орисфер, касающихся сферы $\Omega(a, \tau)$ с центром в точке a и радиусом $\tau=\frac{1}{k}|\ln t|$. Это интегрирование сводится к интегрированию по сфере $\Omega(a, \tau)$ относительно меры, инвариантной при вращениях сферы вокруг ее центра a и такой, что мера всей сферы равна $4\pi t$ *).

Покажем в заключение, что функция $H(a, t)$ удовлетворяет соотношению симметрии

$$H(a,\ t)=H(a,\ t^{-1}). \tag{20}$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что в силу формул (1) и (18)

$$\begin{aligned} H(a,\ t)&=\int h(\xi)\,\delta([a,\ \xi]-t)\,d\xi=\\ &=\int f(x)\,\delta([x,\ \xi]-1)\,\delta([a,\ \xi]-t)\,d\xi\,dx. \end{aligned} \tag{21}$$

Очевидно, что ядро $\int \delta([x,\ \xi]-1)\,\delta([a,\ \xi]-t)\,d\xi$ не меняется при одновременном сдвиге точек a и x; в частности; оно сохраняется при перестановке a и x. Из этого свойства вытекает, что рассматриваемое ядро сохраняется также и при замене t на t^{-1} (для доказательства нужно сделать в интеграле замену переменных ξ на $t\xi$). Отсюда сразу следует равенство (20).

*) Поскольку орисферы, касающиеся сферы $\Omega(a, \tau)$, задаются точкой касания с абсолютом, интегрирование можно рассматривать и как интегрирование по абсолюту относительно гармонической меры, инвариантной при вращениях вокруг точки a.

Можно показать, что рассматриваемое ядро совпадает с характеристической функцией области $[a,\ x]>\frac{1}{2}(t+t^{-1})$. Отсюда также видны свойства симметрии этого ядра.

3. Формула обращения для интегрального преобразования, связанного с орисферами пространства Лобачевского любой размерности. Мы рассмотрели подробно случай, когда размерность пространства Лобачевского равна трем. Остановимся кратко на случае пространства Лобачевского любой размерности. И в этом случае общий план вывода формулы обращения для интегрального преобразования

$$h(\xi)=\int f(x)\,\delta([x,\ \xi]-1)\,dx \tag{1}$$

остается тем же самым. Лишь вычисление ядра $\Phi(x,\ a;\ \mu)$ будет несколько сложнее.

Именно, ядро $\Phi(x,\ a;\ \mu)$ задается в этом случае интегралом

$$\begin{aligned} \Phi(x,\ a;\ \mu)&\equiv\int |[a,\ \xi]-1|^{\mu}\,\delta([x,\ \xi]-1)\,d\xi=\\ &=2\int |\operatorname{ch} kr-\xi_1\operatorname{sh} kr-1|^{\mu}\frac{d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}}{\sqrt{1-\xi_1^2-\ldots-\xi_{n-1}^2}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Этот интеграл выражается через гипергеометрическую функцию. Именно, при $\operatorname{Re}\mu>-1$ имеет место равенство

$$\Phi(x,\ a;\ \mu)=\\ =\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right)}\operatorname{sh}^{\mu} kr\,F\left(-\frac{\mu}{2},\ 1-\frac{\mu+n}{2};\ \frac{1}{2};\ \operatorname{th}^2\frac{kr}{2}\right), \tag{3}$$

где r — расстояние между точками a и x, а $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ — гипергеометрическая функция.

Дальнейший вывод формулы обращения совпадает с проведенным при $n=3$. При этом используются следующие утверждения, доказанные в вып. 1: обобщенная функция $(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\mu/2}$ имеет при $\mu=-n$ простой полюс с вычетом

$$\operatorname*{Выч}_{\mu=-n}(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\mu/2}=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\delta(x_1, \ldots, x_n). \quad (4)$$

Обобщенная же функция $|t|^\mu$ одного переменного имеет при $\mu=-n$ простой полюс в случае, когда $n=2m+1$ — нечетное число. В этом случае

$$\operatorname*{Выч}_{\mu=-2m-1}|t|^\mu=\frac{2\delta^{(2m)}(t)}{\Gamma(2m+1)}. \quad (5)$$

Если же $n=2m$ — четное число, то обобщенная функция $|t|^\mu$ регулярна при $\mu=-n$ и принимает значение t^{-2m}.

Отсюда вытекает следующий результат.

Пусть $f(x)$ — финитная функция в n-мерном пространстве Лобачевского и

$$h(\xi)=\int f(x)\delta([x, \xi]-1)\,dx \quad (6)$$

— ее интегралы по орисферам $[x, \xi]=1$ этого пространства. Если размерность n пространства Лобачевского нечетна, $n=2m+1$, то формула обращения для интегрального преобразования (6) *имеет вид*

$$f(a)=\frac{(-1)^m}{2(2\pi)^{2m}}\int\delta^{(2m)}([a, \xi]-1)\,h(\xi)\,d\xi. \quad (7)$$

Если же $n=2m$ — четное число, то формула обращения пишется следующим образом:

$$f(a)=\frac{(-1)^m\Gamma(2m)}{(2\pi)^{2m}}\int([a, \xi]-1)^{-2m}h(\xi)\,d\xi. \quad (8)$$

Здесь интеграл понимается в регуляризованном смысле,

а именно

$$\int([a, \xi]-1)^{-2m}h(\xi)\,d\xi=\int|[a, \xi]-1|^\mu h(\xi)\,d\xi\Big|_{\mu=-2m}.$$

Примечание при корректуре. Если функцию $\varphi(a, \xi; \mu)$ взять не в виде $|[a, \xi]-1|^\mu$, а в виде

$$\varphi(a, \xi; \mu)=[a, \xi]^{-\frac{\mu+n}{2}}|[a, \xi]-1|^\mu,$$

то ядро $\Phi(x, a; \mu)$ выражается в элементарных функциях:

$$\Phi(x, a; \mu)=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right)\operatorname{ch}^{\mu+n-2}\frac{kr}{2}}\operatorname{sh}^\mu kr.$$

4. Функции, зависящие от расстояния точки до орисферы, и их средние. Ядро $\Phi(x, a; \mu)$, которое было введено в предыдущих пунктах, возникает при интегрировании функции $|[a, \xi]-1|^\mu$ по множеству орисфер $\omega:[y, \xi]=1$, проходящих через заданную точку x. Как было показано в п. 2, выражение $[a, \xi]$ имеет простой геометрический смысл — именно, расстояние от точки a до орисферы $\omega:[x, \xi]=1$ выражается формулой $\tau(a, \omega)=\frac{1}{k}|\ln[a, \xi]|$. Поэтому функция $|[a, \xi]-1|^\mu$ является функцией от этого расстояния τ. В этом пункте мы рассмотрим произвольную функцию $\varphi(a, \omega)$ от точки a пространства Лобачевского и орисферы ω, зависящую лишь от расстояния между a и ω, и найдем формулу для интеграла этой функции по множеству орисфер, проходящих через заданную точку x.

Итак, пусть функция $\varphi(a, \omega)$ зависит только от расстояния τ точки a до орисферы $\omega:[y, \xi]=1$. Тогда эту функцию можно рассматривать как функцию от $[a, \xi]$:

$$\varphi(a, \omega)\equiv\varphi(\tau(a, \omega))=\psi([a, \xi]). \quad (1)$$

Возьмем любую точку x пространства Лобачевского и проинтегрируем функцию $\psi([a, \xi])$ по множеству орисфер, проходящих через точку x. В качестве меры в множестве этих орисфер выберем меру, инвариантную при вращениях вокруг точки x. Очевидно, что интеграл функции $\psi([a, \xi])$ по такой мере задается формулой

$$\Phi(x, a) = \int \psi([a, \xi])\, d\sigma = \int \psi([a, \xi])\, \delta([x, \xi] - 1)\, d\xi, \qquad (2)$$

где $d\xi$ — инвариантная мера на конусе $[\xi, \xi] = 0$ (см. п. 6 § 1).

Как и в частном случае, когда $\varphi(a, \xi) = |[a, \xi] - 1|^{\mu}$, легко убедиться, что функция $\Phi(x, a)$ не меняется при одновременном сдвиге точек a и x. Следовательно, она зависит лишь от расстояния r между этими точками.

Запишем функцию $\Phi(r) \equiv \Phi(x, a)$ в виде однократного интеграла. Для этого возьмем точки $x(1, 0, \ldots, 0)$ и $a(\operatorname{ch} kr, \operatorname{sh} kr, 0, \ldots, 0)$, расстояние между которыми равно r. При таком выборе точек получаем

$$\Phi(r) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \psi(\operatorname{ch} kr - \xi_1 \operatorname{sh} kr)\left(1 - \xi_1^2\right)^{\frac{n-3}{2}} d\xi_1.$$

Чтобы найти ядро этого интегрального преобразования, сделаем подстановку $\operatorname{ch} kr - \xi_1 \operatorname{sh} kr = \lambda$. Мы получим

$$\Phi(r) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \operatorname{sh}^{n-2} kr} \int_{e^{-kr}}^{e^{kr}} \psi(\lambda)(\lambda - e^{-kr})^{\frac{n-3}{2}} (e^{kr} - \lambda)^{\frac{n-3}{2}} d\lambda. \qquad (3)$$

Таким образом, ядро интегрального преобразования, переводящего функцию $\psi(\lambda)$ в $\Phi(r)$, равно нулю, если $kr < |\ln \lambda|$, и равно

$$\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \operatorname{sh}^{n-2} kr} (\lambda - e^{-kr})^{\frac{n-3}{2}} (e^{kr} - \lambda)^{\frac{n-3}{2}}, \qquad (4)$$

если $kr \geqslant |\ln \lambda|$.

Особенно простой вид принимает формула (3) при $n = 3$. В этом случае

$$\Phi(r) = \frac{2\pi}{\operatorname{sh} kr} \int_{e^{-kr}}^{e^{kr}} \psi(\lambda)\, d\lambda. \qquad (3')$$

Из формулы (3) легко получить и вид интегрального преобразования, переводящего функцию $\varphi(\tau)$ в функцию $\Phi(r)$. Для этого достаточно вспомнить, что $\psi([a, \xi]) = \varphi(\tau)$, где $\tau = \frac{1}{k} |\ln [a, \xi]|$. Поэтому, полагая в формуле (3) $\lambda = e^{k\tau}$, получаем

$$\Phi(r) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} k}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \operatorname{sh}^{n-2} kr} \times$$
$$\times \int_{-r}^{r} \varphi(\tau)(e^{k\tau} - e^{-kr})^{\frac{n-3}{2}} (e^{kr} - e^{k\tau})^{\frac{n-3}{2}} e^{k\tau}\, d\tau. \qquad (5)$$

В частности, при $n = 3$ имеем

$$\Phi(r) = \frac{2\pi k}{\operatorname{sh} kr} \int_{-r}^{r} \varphi(\tau) e^{k\tau}\, d\tau. \qquad (5')$$

Мы вывели, таким образом, вид интегрального преобразования, переводящего функцию $\varphi(\tau)$, зависящую от расстояния точки a до орисферы ω, в функцию $\Phi(r)$, зависящую от расстояния между точками a и x. Как уже говорилось, при этом интегральном преобразовании функция $\varphi(\tau) \equiv \varphi(\tau(a, \omega))$ интегрируется по множеству всех орисфер ω, проходящих через точку x.

§ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, СВЯЗАННОЕ С ОРИСФЕРАМИ МНИМОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО *)

1. Постановка задачи и предварительные замечания. В этом параграфе будет изучено интегральное преобразование, связанное с орисферами трехмерного мнимого пространства Лобачевского. Как было показано в п. 5 § 1, в этом пространстве есть два транзитивных множества орисфер. Одно из них состоит из орисфер первого рода, имеющих размерность два и аналогичных орисферам пространства Лобачевского, а второе — из изотропных прямых.

*) Этот параграф можно читать после §§ 1—3, гл. VI.

Пусть $f(x)$ — финитная функция в мнимом пространстве Лобачевского. Сопоставим ей две функции $h(\omega)$ и $\varphi(l)$. Функция $h(\omega)$ задана на множестве орисфер первого рода и определяется формулой

$$h(\omega)=\int_{\omega} f(x)\,d\sigma, \tag{1}$$

где $d\sigma$ — инвариантная мера на орисфере ω; функция же $\varphi(l)$ задана на множестве изотропных прямых и определяется (в реализации на гиперболоиде $[x, x]=-1$) формулой

$$\varphi(l)=\int_{l} f(x)\,dl \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(b+t\xi)\,dt \tag{2}$$

(см. п. 7 § 1). Для однозначной определенности интеграла (2) мы будем считать векторы ξ и b нормированными условиями $\xi_0=1$, $b_0=0$. Таким образом, $\varphi(l)$ есть функция от ξ и b, где ξ и b удовлетворяют следующим условиям: $[\xi, \xi]=0$, $[\xi, b]=0$, $[b, b]=-1$, $\xi_0=1$, $b_0=0$ (см. п. 3а § 1).

Соответствие, сопоставляющее функции $f(x)$ пару функций $\{h(\omega), \varphi(l)\}$, назовем *интегральным преобразованием, связанным с орисферами мнимого пространства Лобачевского*. Основной задачей, решаемой в этом параграфе, является вывод формулы обращения для этого преобразования. Выражение функции $f(x)$ через функции $h(\omega)$ и $\varphi(l)$ приведено на стр. 427—428. В следующей главе полученная здесь формула будет использована для разложения функций в мнимом пространстве Лобачевского на функции, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы Лоренца при сдвигах функции $f(x)$ (то есть для разложения представления группы Лоренца, связанного с мнимым пространством Лобачевского, на неприводимые).

Как было показано в п. 5 § 1, каждая орисфера ω задается уравнением $[x, \xi]=1$, где $[\xi, \xi]=0$, $\xi_0>0$. Поэтому функцию $h(\omega)$ можно считать заданной на конусе $[\xi, \xi]=0$, $\xi_0>0$, и вместо $h(\omega)$ писать $h(\xi)$.

Вспоминая определение инвариантной меры на орисфере $\omega:[x, \xi]=1$ (см. п. 7 § 1), перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$h(\xi)=\int f(x)\,\delta(|[x, \xi]|-1)\,dx. \tag{3}$$

В этой формуле dx — инвариантная мера на гиперболоиде $[x, x]=-1$.

Таким образом, соответствие $f(x)\to h(\xi)$ сопоставляет функции $f(x)$, заданной на гиперболоиде $[x, x]=-1$, функцию $h(\xi)$, заданную на верхней поле конуса $[\xi, \xi]=0$. Выясним, какими свойствами обладают функции $h(\xi)$, соответствующие бесконечно дифференцируемым финитным функциям $f(x)$ на гиперболоиде. Из формулы (3) непосредственно вытекает, что функция $h(\xi)$ бесконечно дифференцируема. Далее, точно так же, как и в случае пространства Лобачевского, доказывается, что функция $h(\xi)$ равна нулю в некоторой окрестности вершины конуса. Однако в отличие от пространства Лобачевского в рассматриваемом здесь случае функция $h(\xi)$, вообще говоря, не является финитной. Ее поведение на бесконечности описывается следующим утверждением.

Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция на мнимом пространстве Лобачевского (гиперболоиде $[x, x]=-1$) и $h(\xi)$ — функция на конусе, соответствующая ей в силу формулы (3). *Тогда для любой точки ξ верхней полы конуса функция $h(t\xi)$ имеет при $t\to+\infty$ асимптотическое разложение*

$$h(t\xi)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi)\,t^{-n}, \tag{4}$$

где $a_n(\xi)$ — однородная функция от ξ степени $-n$, причем все функции $a_n(\xi)$ бесконечно дифференцируемы на сечении Ω конуса $[\xi, \xi]=0$ плоскостью $\xi_0=1$. При этом асимптотическое разложение (4) *можно почленно дифференцировать по t.*

Чтобы доказать равенство (4), представим функцию $h(t\xi)$ в следующем виде:

$$h(t\xi)=\int f(x)\,\delta([x, t\xi]-1)\,dx. \tag{5}$$

Из однородности функции $\delta(t)$ вытекает, что

$$h(t\xi)=t^{-1}\int f(x)\,\delta\left([x, \xi]-t^{-1}\right)dx. \tag{6}$$

Разложим $\delta([x, \xi]-t^{-1})$ по степеням t^{-1} и выполним почленное интегрирование. Мы получим асимптотический ряд

$$h(t\xi) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi)\, t^{-n},$$

где

$$a_n(\xi) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int f(x)\, \delta^{(n-1)}([x, \xi])\, dx. \qquad (7)$$

Интегралы (7) сходятся в силу бесконечной дифференцируемости и финитности функции $f(x)$. Таким образом, асимптотическое разложение (4) получено. Однородность коэффициентов $a_n(\xi)$ по ξ и бесконечная дифференцируемость этих коэффициентов на сфере Ω непосредственно вытекают в силу формулы (7) из бесконечной дифференцируемости и финитности функции $f(x)$. Чтобы доказать возможность почленного дифференцирования ряда (4), достаточно продифференцировать равенство (5) по t и разложить интеграл в правой части равенства по степеням t^{-1}.

Заметим, что пространство функций $h(\xi)$, являющихся преобразованиями бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(x)$ на мнимом пространстве Лобачевского, не совпадает с классом бесконечно дифференцируемых функций $h(\xi)$ на конусе, равных нулю в некоторой окрестности вершины конуса и обладающих асимптотическим разложением (4) с указанными выше свойствами. Дело в том, что функции $h(\xi)$, являющиеся преобразованиями бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(x)$, должны удовлетворять дополнительным соотношениям, подобным тем, каким удовлетворяет преобразование Радона финитных функций на плоскости (см. п. 6 § 1 главы I).

Наметим теперь план вывода формулы обращения для интегрального преобразования, связанного с орисферами мнимого пространства Лобачевского. Как и в случае пространства Лобачевского, в основе вывода лежит равенство

$$\int \Phi(x, a; \mu)\, f(x)\, dx = \int (|[a, \xi]| - 1)_+^{\mu}\, h(\xi)\, d\xi, \qquad (8)$$

где dx — инвариантная мера в мнимом пространстве Лобачевского, $d\xi$ — инвариантная мера на конусе, а $\Phi(x, a; \mu)$ — функция, определяемая формулой

$$\Phi(x, a; \mu) = \int (|[a, \xi]| - 1)_+^{\mu}\, \delta(|[x, \xi]| - 1)\, d\xi. \qquad (9)$$

Формула (9) аналогична формуле (3) из п. 2 § 2. Там для вывода формулы обращения мы нашли вычет функции $\Phi(x, a; \mu)$ при $\mu = -3$ и установили, что этот вычет с точностью до постоянного множителя совпадает с δ-функцией, сосредоточенной в точке a. Отсюда, в случае пространства Лобачевского, было получено выражение $f(a)$ через $h(\xi)$.

Здесь, для мнимого пространства Лобачевского, мы также найдем вычет $\Phi(x, a; \mu)$ при $\mu = -3$. Однако на этот раз результат получится иной. Именно, мы получим, кроме δ-функции, сосредоточенной в точке a, еще одно слагаемое, отличное от нуля лишь в области

$$|[a, x]| < 1,$$

то есть лишь в точках x, для которых

$$r^2(a, x) < 0.$$

Иными словами, вычет левой части равенства (8) является, с точностью до постоянного множителя, суммой значения $f(x)$ в точке a и интеграла от $f(x)$ по области $r^2(a, x) < 0$. Мы увидим позже (см. п. 4), что этот интеграл выражается через функцию $\varphi(l)$ — интегралы функции $f(x)$ по изотропным прямым.

Таким образом, в случае мнимого пространства Лобачевского в выражение для $f(a)$ входит не только функция $h(\xi)$ — интегралы от $f(x)$ по орисферам первого рода, но и функция $\varphi(l)$ — интегралы от $f(x)$ по изотропным прямым.

Вывод формулы обращения для мнимого пространства Лобачевского наталкивается на следующее осложнение. В случае пространства Лобачевского интеграл (9), задающий функцию $\Phi(x, a; \mu)$, сходится при $\operatorname{Re}\mu > -1$. Поэтому для определения значений этой функции при всех μ достаточно было использовать метод аналитического продолжения по параметру μ. В отличие от этого в рассматриваемом здесь случае интеграл (9) может для некоторых пар точек a и x (а именно таких, что $r^2(a, x) < 0$) расходиться при всех значениях μ. Точно так же интеграл, стоящий в правой части равенства (8), может в силу нефинитности функции $h(\xi)$ расходиться при всех значениях μ *). Поэтому возникает вопрос о придании смысла этим расходящимся интегралам. Этому вопросу посвящены пп. 2 и 5. В них мы развиваем метод аналитического продолжения по координатам точки.

Мы видели в п. 2 § 2, что интеграл, аналогичный интегралу (9), в случае пространства Лобачевского имеет простой геометрический смысл. Он является интегралом от функции $(|[a, \xi]|-1)_+^\mu$ по всем орисферам, проходящим через точку x, по мере, инвариантной при вращениях вокруг этой точки. Аналогичный смысл имеет и интеграл (9) в рассматриваемом случае с той лишь разницей, что множество направлений, выходящих из точки x мнимого пространства Лобачевского, некомпактно, и потому инвариантная мера в этом множестве не ограничена.

Вопрос об интегрировании функций по некомпактному множеству направлений возникает и в других задачах, например при вычислении свертки двух функций на локально компактной группе Ли, постоянных на двусторонних классах смежности по некомпактной подгруппе, при изучении сферических функций относительно некомпактных подгрупп и т. д. Поэтому метод, с помощью которого определяется здесь интеграл (9), имеет, по-видимому, значение, выходящее за рамки решаемой здесь частной задачи. Отметим еще, что интеграл (9) можно рассматривать как преобразование Радона функции, сосредоточенной на конусе $[\xi, \xi]=0$ и равной в точке ξ этого конуса $(|[a, \xi]|-1)_+^\mu$. Поэтому задача о придании смысла расходящемуся интегралу (9) близка к задачам, изученным в §§ 2 и 3 главы I. Методы, развиваемые в этой главе, могут рассматриваться как дополнение к методам, изученным в этих параграфах главы I.

2. Регуляризация интегралов методом аналитического продолжения по координатам. В этом пункте мы изучим функционал Φ в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(x)$ на мнимом пространстве Лобачевского, определяемый формулой

$$(\Phi, f)=\int \Phi(x, a; \mu) f(x)\, dx, \tag{1}$$

*) Подинтегральная функция в формуле (9) постоянна на многообразиях, получающихся при пересечении конуса $[\xi, \xi]=0$ с двумерными плоскостями ($[x, \xi]=1$, $[a, \xi]=c$). Если $r^2(a, x)<0$, то эти многообразия не ограничены, что и приводит к расходимости интеграла (9) при всех μ. Аналогичное обстоятельство имеет место для интеграла, стоящего в правой части равенства (8).

где dx — инвариантная мера в мнимом пространстве Лобачевского. Здесь $\Phi(x, a; \mu)$ — функция от точек a и x мнимого пространства Лобачевского и комплексного параметра μ, формально определяемая следующим образом. Реализуем мнимое пространство Лобачевского на гиперболоиде $[x, x]=-1$ и положим *)

$$\begin{aligned}\Phi(x, a; \mu)&=\int (|[a, \xi]|-1)_+^\mu \delta(|[x, \xi]|-1)\, d\xi=\\&=\int (|[a, \xi]|-1)_+^\mu \delta([x, \xi]-1)\, d\xi+\\&+\int (|[a, \xi]|-1)_+^\mu \delta([x, \xi]+1)\, d\xi\equiv\\&\equiv \Phi_1(x, a; \mu)+\Phi_2(x, a; \mu),\end{aligned}\tag{2}$$

где $d\xi$ — инвариантная мера на конусе $[\xi, \xi]=0$, а интегралы берутся по верхней поле конуса.

Как уже говорилось в п. 1, интеграл (2) может для некоторых пар точек a и x расходиться при всех значениях μ. Поэтому возникает задача о придании смысла интегралу (2) для таких пар точек, или, как мы говорим, о регуляризации интеграла (2). Решению задачи регуляризации и посвящен этот пункт.

Рассмотрим сначала несколько более простую задачу о регуляризации интеграла

$$J_+(x, b; \mu)=\int [b, \xi]_+^\mu \delta\big([x, \xi]-1\big)\, d\xi. \tag{3}$$

К этой задаче приводится стоящая перед нами задача об интеграле (2). В самом деле, если обращаться с интегралами в формуле (2) как со сходящимися, то можно написать:

$$\Phi_1(x, a; \mu)=\int \{([a, \xi]-1)_+^\mu+\\+(-[a, \xi]-1)_+^\mu\}\, \delta([x, \xi]-1)\, d\xi. \tag{2'}$$

*) Через $(|[a, \xi]|-1)_+^\mu$ обозначена функция, равная $(|[a, \xi]|-1)^\mu$, если $|[a, \xi]|>1$, и равная нулю, если $|[a, \xi]|<1$.

Так как подинтегральная функция сосредоточена на плоскости $[x, \xi]=1$, то формулу (2') можно переписать так:

$$\Phi_1(x, a; \mu)=\int [a-x, \xi]_+^\mu \delta([x, \xi]-1)\, d\xi + \\ + \int [-a-x, \xi]_+^\mu \delta([x, \xi]-1)\, d\xi$$

или, иначе

$$\Phi_1(x, a; \mu)=J_+(x, a-x; \mu)+J_+(x, -a-x; \mu). \qquad (4)$$

Формулу (4) мы примем за определение функции $\Phi_1(x, a; \mu)$. Аналогично определяется $\Phi_2(x, a; \mu)$ и тем самым $\Phi(x, a; \mu)$.

Тем самым задача о регуляризации интеграла (2) для $\Phi(x, a; \mu)$ свелась к задаче о придании смысла интегралу (3) для всех вещественных точек b и x. Изложим решение этой задачи.

Рассмотрим сначала интеграл (3) для таких точек $b(b_0, b_1, b_2, b_3)$, что $[b, b]>0$ и $b_0>0$. Множество таких точек b назовем *положительным конусом*, а принадлежность точки b положительному конусу будем обозначать так: $b>0$. Если точка b принадлежит положительному конусу, а ξ — верхней поле конуса $[\xi, \xi]=0$, то, как легко видеть, выполняется неравенство *)

$$[b, \xi]>\left(b_0-\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\right)\xi_0>0. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что *при $b>0$ интеграл*

$$J_+(x, b; \mu)=\int [b, \xi]_+^\mu \delta([x, \xi]-1)\, d\xi$$

*) В самом деле,

$$[b, \xi]=b_0\xi_0-b_1\xi_1-b_2\xi_2-b_3\xi_3> \\ > b_0\xi_0-\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\cdot\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}.$$

Так как для точек ξ верхней полы конуса $[\xi, \xi]=0$ имеем

$$\xi_0=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2},$$

то

$$[b, \xi]>\left(b_0-\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\right)\xi_0.$$

совпадает с интегралом

$$J(x, b; \mu)=\int [b, \xi]^\mu \delta([x, \xi]-1)\, d\xi, \qquad (6)$$

причем этот интеграл сходится, если $\operatorname{Re}\mu<-1$.

Итак, мы определили значение интеграла $J_+(x, b; \mu)$ при $\operatorname{Re}\mu<-1$ для точек b, принадлежащих положительному конусу. Перейдем теперь к определению этого интеграла для любой точки b из E_4. С этой целью прибегнем к методу аналитического продолжения по координатам b_0, b_1, b_2, b_3 точки b, использованному в гл. III вып. I при изучении обобщенной функции P_+^μ.

Введем четырехмерное комплексное линейное пространство Z_4, состоящее из точек $z(z_0, z_1, z_2, z_3)$. В этом пространстве рассмотрим точки $z=b+ic$, для которых $c>0$ (то есть c принадлежит положительному конусу). Совокупность всех таких точек z назовем *верхней полуплоскостью* в Z_4. Аналогично, нижней полуплоскостью назовем совокупность всех точек $z=b-ic$ из Z_4, для которых $c>0$.

Мы докажем сейчас, что *функцию $J(x, b; \mu)$, определенную формулой* (6) *для точек b положительного конуса, можно аналитически продолжить в верхнюю и нижнюю полуплоскости*. Это продолжение определим формулой

$$J(x, z; \mu)=\int [z, \xi]^\mu \delta([x, \xi]-1)\, d\xi, \qquad (7)$$

где возведение в комплексную степень μ задается равенством

$$t^\mu=e^{\mu\ln|t|+i\mu\arg t}, \quad -\pi<\arg t<\pi.$$

Покажем, что функция $J(x, z; \mu)$, задаваемая формулой (7), аналитически зависит от координат точки z, когда z пробегает верхнюю полуплоскость. Для этого заметим, что если $z=b+ic$, $c>0$, а ξ принадлежит верхней поле конуса $[\xi, \xi]=0$, то $\operatorname{Im}[z, \xi]=[c, \xi]>0$. Поэтому в верхней полуплоскости $[z, \xi]$ не принимает отрицательных значений и, следовательно, функция $[z, \xi]^\mu$ однозначно определена. Далее, легко показать, что интеграл (7) равномерно по b сходится в любой области вида $z=b+ic$, где $c>c'>0$ *), и потому равенство (7) определяет ана-

*) Неравенство $c>c'$ означает, что $c-c'>0$.

литическую функцию от координат z_0, z_1, z_2, z_3 точки z в верхней полуплоскости.

Совершенно так же доказывается, что формула (7) дает аналитическое продолжение функции $J(x, b; \mu)$ в нижнюю полуплоскость.

Итак, значение интеграла

$$J(x, z; \mu) = \int [z, \xi]^{\mu} \delta([x, \xi] - 1)\, d\xi \tag{8}$$

определено для всех точек z, принадлежащих верхней или нижней полуплоскости. Теперь уже нетрудно определить значение интеграла

$$J_+(x, b; \mu) = \int [b, \xi]_+^{\mu} \delta([x, \xi] - 1)\, d\xi \tag{9}$$

для любой вещественной точки b. Для этого сопоставим точке b функции $J(x, b + i0; \mu)$ и $J(x, b - i0; \mu)$, определяемые равенствами

$$J(x, b + i0; \mu) = \lim_{c \to +0} J(x, b + ic; \mu) = \lim_{c \to +0} \int [b + ic, \xi]^{\mu} \delta([x, \xi] - 1)\, d\xi \tag{10}$$

и

$$J(x, b - i0; \mu) = \lim_{c \to +0} J(x, b - ic; \mu) = \lim_{c \to +0} \int [b - ic, \xi]^{\mu} \delta([x, \xi] - 1)\, d\xi \tag{10$'$}$$

(символ $c \to +0$ означает, что c стремится к нулю, оставаясь в положительном конусе. Существование этих пределов будет установлено в п. 5).

Чтобы определить значение интеграла $J_+(x, b; \mu)$, воспользуемся в качестве образца формулой

$$t_+^{\mu} = \frac{e^{i\mu\pi}(t - i0)^{\mu} - e^{-i\mu\pi}(t + i0)^{\mu}}{2i \sin \mu\pi},$$

имеющей место для обобщенных функций одного переменного (см. п. 6 § 3 гл. I вып. 1). Исходя из этой формулы,

определим значение интеграла $J_+(b, x; \mu)$ следующим равенством:

$$J_+(x, b; \mu) = \frac{1}{2i \sin \mu\pi} \left[e^{i\mu\pi} J(x, b - i0; \mu) - e^{-i\mu\pi} J(x, b + i0; \mu) \right]. \tag{11}$$

Таким образом, значение интеграла $J_+(x, b; \mu)$ определено при $\operatorname{Re} \mu < -1$ для любых вещественных точек x и b. Но выше говорилось, что за значение $\Phi_1(x, a; \mu)$ принимается выражение

$$\Phi_1(x, a; \mu) = J_+(x, a - x; \mu) + J_+(x, -a - x; \mu). \tag{12}$$

Таким образом, *значение интеграла*

$$\Phi_1(x, a; \mu) = \int (|[a, \xi]| - 1)_+^{\mu} \delta([x, \xi] - 1)\, d\xi \tag{13}$$

мы определяем при $\operatorname{Re} \mu < -1$ *с помощью равенств* (11) *и* (12), *причем значения функций* $J(x, b+i0; \mu)$ *и* $J(x, b-i0; \mu)$ *задаются формулами* (10) *и* (10$'$). Аналогично определяется функция $\Phi_2(x, a; \mu)$, а тем самым и функция $\Phi(x, a; \mu)$. В результате получаем следующее выражение, которое и принимаем за *определение функции* $\Phi(x, a; \mu)$ *при* $\operatorname{Re} \mu < -1$:

$$\Phi(x, a; \mu) = \frac{1}{2i \sin \mu\pi} \lim_{c \to +0} \int \delta(|[x, \xi]| - 1) \times \\ \times \{ e^{i\mu\pi} [([a - ic, \xi] - 1)^{\mu} + ([-a - ic, \xi] - 1)^{\mu}] - \\ - e^{-i\mu\pi} [([a + ic, \xi] - 1)^{\mu} + ([-a + ic, \xi] - 1)^{\mu}] \}\, d\xi. \tag{14}$$

Нетрудно показать, что при $c > 0$ интеграл в этой формуле сходится абсолютно и равномерно относительно x.

Нам понадобится в дальнейшем явное выражение функции $\Phi(x, a; \mu)$ через расстояние между точками a и x. Чтобы не прерывать изложения, мы проведем вычисление в конце этого параграфа, указав здесь лишь конечный результат.

Пусть a и x — точки мнимого пространства Лобачевского (реализованного на гиперболоиде $[x, x] = -1$). Тогда при $\operatorname{Re} \mu < -1$ *значение функции* $\Phi(x, a; \mu)$ *дается следующими формулами.*

Если $|[a, x]| > 1$, *то*

$$\Phi(x, a; \mu) = -\frac{2\pi e^{(\mu+1)\frac{kr}{2}}}{(\mu+1)\operatorname{ch}^{\mu+1}\frac{kr}{2}} \operatorname{sh}^{\mu} kr, \tag{15_1}$$

где $\operatorname{ch} kr = |[a, x]|$.

Если же $|[a, x]| < 1$, *то*

$$\Phi(x, a; \mu) = \frac{4\pi}{(\mu+1)\sin\mu\pi}\left[\cos\frac{(\mu+1)(\pi-k\rho)}{2}\cos^{-\mu-1}\frac{k\rho}{2} + \right.$$
$$\left. + \cos\frac{(\mu+1)k\rho}{2}\sin^{-\mu-1}\frac{k\rho}{2}\right]\sin^{\mu}k\rho, \tag{15_2}$$

где положено $\cos k\rho = |[a, x]|$.

Напомним, что точки x, для которых $|[a, x]| > 1$, лежат на вещественном расстоянии от точки a. Точки же x, для которых $|[a, x]| < 1$, лежат на мнимом расстоянии $r = \rho i$ от точки a.

Таким образом, указано значение функции $\Phi(x, a; \mu)$ при $\operatorname{Re}\mu < -1$. Ее значение при $\operatorname{Re}\mu > -1$ определяется с помощью аналитического продолжения по μ и дается теми же формулами (15_1), (15_2).

Определим теперь обобщенную функцию (Φ, f), где $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция на мнимом пространстве Лобачевского. При $\operatorname{Re}\mu > -1$ эта обобщенная функция задается равенством

$$(\Phi, f) = \int \Phi(x, a; \mu) f(x)\, dx, \tag{16}$$

где $\Phi(x, a; \mu)$ — функция, определяемая формулами (15_1), (15_2). Интеграл (16) сходится при $\operatorname{Re}\mu > -1$ и при фиксированной функции $f(x)$ является аналитической функцией от μ. При $\operatorname{Re}\mu < -1$ значение (Φ, f) определяется путем аналитического продолжения по μ.

Перейдем к рассмотрению равенства

$$\int \Phi(x, a; \mu) f(x)\, dx = \int (|[a, \xi]| - 1)_+^{\mu} h(\xi)\, d\xi, \tag{17}$$

лежащего в основе вывода формулы обращения для интегрального преобразования, связанного с орисферами мнимого пространства Лобачевского. Вспомним сначала, что функция $\Phi(x, a; \mu)$ была определена при $\operatorname{Re}\mu < -1$ формулой (14). При этом интеграл, стоящий под знаком предела, в этой формуле сходится абсолютно и равномерно по x.

Умножим обе части равенства (14) на $f(x)$, проинтегрируем по x и изменим порядок интегрирования. Так как

$$\int f(x)\,\delta(|[x, \xi]| - 1)\, dx = h(\xi),$$

то мы получим, что

$$\int \Phi(x, a; \mu) f(x)\, dx = \frac{1}{2i\sin\mu\pi}\lim_{c\to+0}\int h(\xi) \times$$
$$\times \left\{e^{i\mu\pi}\left[([a-ic, \xi]-1)^{\mu} + ([-a-ic, \xi]-1)^{\mu}\right] - \right.$$
$$\left. - e^{-i\mu\pi}\left[([a+ic, \xi]-1)^{\mu} + ([-a+ic, \xi]-1)^{\mu}\right]\right\} d\xi, \tag{18}$$

где символ $c \to +0$ означает, что c стремится к нулю, оставаясь в положительном конусе.

Если $c > 0$ и ξ принадлежит верхней поле конуса $[\xi, \xi] = 0$, то $[c, \xi] > 0$. Поэтому, беря вновь за образец формулу

$$t_+^{\mu} = \frac{e^{i\mu\pi}(t-i0)^{\mu} - e^{-i\mu\pi}(t+i0)^{\mu}}{2i\sin\mu\pi},$$

примем правую часть равенства (18) за определение интеграла

$$\int (|[a, \xi]| - 1)_+^{\mu} h(\xi)\, d\xi.$$

Мы доказали таким образом, что имеет место равенство (17), где функция $\Phi(x, a; \mu)$ определена формулой (14), а интеграл справа определен правой частью формулы (18).

3. Вывод формулы обращения для интегрального преобразования, связанного с орисферами мнимого пространства Лобачевского. Перейдем теперь к основной цели этого параграфа — выводу формулы, выражающей финитную функцию $f(x)$, заданную на мнимом пространстве Лобачевского через функции

$$h(\xi) = \int f(x)\,\delta(|[x, \xi]| - 1)\, dx$$

и

$$\varphi(l)=\int f(x)\,dl\equiv\int_{-\infty}^{\infty} f(b+t\xi)\,dt,$$

то есть через ее интегралы по орисферам первого рода и по изотропным прямым.

Как мы уже говорили, в основе этого вывода лежит доказанная в предыдущем пункте формула

$$\int \Phi(x,\ a;\ \mu)\, f(x)\,dx=\int (\,|\,[a,\ \xi]\,|-1)_+^{\mu}\, h(\xi)\,d\xi. \qquad (1)$$

Чтобы получить формулу, выражающую $f(x)$ через $h(\xi)$ и $\varphi(l)$, найдем вычеты обеих частей равенства (1) при $\mu=-3$.

Начнем с рассмотрения выражения, стоящего в левой части равенства (1), то есть найдем

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}}\int \Phi(x,\ a;\ \mu)\, f(x)\,dx.$$

Из формул (15_1)—(15_2) для функции $\Phi(x,\ a;\ \mu)$ видно, что эта функция не меняется при одновременном сдвиге точек a и x. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что в качестве точки a выбрана точка $a(0,\ 0,\ 0,\ 1)$. В этом случае имеем $[a,\ x]=-x_3$, и потому расстояние r между точками a и x дается формулой $\operatorname{ch}^2 kr=x_3^2$.

Так как точка x лежит на гиперболоиде $[x,\ x]=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=-1$, то из полученного выражения для $\operatorname{ch}^2 kr$ вытекает, что

$$\operatorname{sh}^2 kr=x_0^2-x_1^2-x_2^2.$$

При этом очевидно, что $\operatorname{sh}^2 kr>0$, если $|x_3|>1$, и $\operatorname{sh}^2 kr<0$, если $|x_3|<1$. Поэтому при $|x_3|<1$ имеем

$$\sin^2 k\rho=-x_0^2+x_1^2+x_2^2,$$

где $r=\rho i$.

Подставим полученные значения $\operatorname{sh}^2 kr$ и $\sin^2 k\rho$ в формулы (15_1) и (15_2) из пункта 2. Мы получим, что при $a=a\,(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ функция $\Phi(x,\ a;\ \mu)$ имеет следующий вид:

Если $|x_3|>1$, то

$$\Phi(x,\ a;\ \mu)=-\frac{2\pi e^{(\mu+1)\frac{kr}{2}}}{(\mu+1)\operatorname{ch}^{\mu+1}\frac{kr}{2}}\,(x_0^2-x_1^2-x_2^2)_+^{\frac{\mu}{2}}, \qquad (2_1)$$

где $\operatorname{ch} kr=|x_3|$.

Если же $|x_3|<1$, то

$$\Phi(x,\ a;\ \mu)=$$
$$=\frac{4\pi}{(\mu+1)\sin\mu\pi}\left\{\cos\frac{(\mu+1)(\pi-k\rho)}{2}\cos^{-\mu-1}\frac{k\rho}{2}+\right.$$
$$\left.+\cos\frac{(\mu+1)k\rho}{2}\sin^{-\mu-1}\frac{k\rho}{2}\right\}(x_1^2+x_2^2-x_0^2)_+^{\frac{\mu}{2}}, \qquad (2_2)$$

где $\cos k\rho=|x_3|$.

Чтобы найти значение вычета левой части равенства (1) при $\mu=-3$, воспользуемся следующим утверждением, доказанным в п. 4 § 2 гл. III вып. 1.

Обобщенная функция $(x_0^2-x_1^2-x_2^2)_+^{\frac{\mu}{2}}$ имеет при $\mu=-3$ простой полюс с вычетом

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}}\,(x_0^2-x_1^2-x_2^2)_+^{\frac{\mu}{2}}=-4\pi\delta(x_0,\ x_1,\ x_2).$$

Обобщенная же функция $(x_1^2+x_2^2-x_0^2)_+^{\frac{\mu}{2}}$ не имеет особенности при $\mu=-3$.

Рассмотрим теперь множители, стоящие перед этими обобщенными функциями в формулах (2_1) и (2_2). При $\mu=-3$ множитель в формуле (2_1) непрерывен и принимает значение π, когда $r=0$, а множитель в формуле (2_2) имеет простой полюс с вычетом $-2\cos^2 k\rho$.

Заметим, далее, что при нашем выборе точки $a=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ мы имеем

$$\cos^2 k\rho=x_3^2=[a,\ x]^2$$

и

$$\sin^2 k\rho=x_1^2+x_2^2-x_0^2=1-x_3^2=1-[a,\ x]^2.$$

Учитывая сделанные замечания, легко получаем

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}} \int \Phi(x, a; \mu) f(x)\, dx = \underset{\mu=-3}{\text{Выч}} \int\limits_{|[a,x]|>1} \Phi(x, a; \mu) f(x)\, dx +$$

$$+ \underset{\mu=-3}{\text{Выч}} \int\limits_{|[a,x]|<1} \Phi(x, a, \mu) f(x)\, dx =$$

$$= -8\pi^2 f(a) - 2 \int\limits_{|[a,x]|<1} [a, x]^2 (1 - [a, x]^2)^{-\frac{3}{2}} f(x)\, dx. \quad (3)$$

При вычислении первого слагаемого учтено, что $f(-a) = f(a)$. Интеграл во втором слагаемом понимается в смысле регуляризованного значения, а именно, как значение аналитической функции $\int\limits_{|[a,x]|<1} [a, x]^2 (1 - [a, x]^2)^{\frac{\mu}{2}} f(x)\, dx$ при $\mu = -3$.

Формула (3) выведена пока в предположении, что точка a имеет координаты (0, 0, 0, 1). Однако, как уже говорилось, в силу инвариантности функции $\Phi(x, a; \mu)$ при одновременном сдвиге точек a и x, эта формула сохраняет силу для любой точки a мнимого пространства Лобачевского.

Теперь найдем вычет при $\mu = -3$ выражения, стоящего в правой части равенства (1), то есть

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}} \int (|[a, \xi]| - 1)_+^{\mu} h(\xi)\, d\xi.$$

Вспомним, что интеграл в этом выражении является сокращенной записью для правой части формулы (18) из п. 2. Поэтому для вычисления искомого вычета надо найти вычет при $\mu = -3$ правой части формулы (18) из п. 2. Поскольку $\sin \mu\pi$ обращается в нуль при $\mu = -3$, получаем

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}} \int (|[a, \xi]| - 1)_+^{\mu} h(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{c \to +0} \int h(\xi) \left\{ ([a - ic, \xi] - 1)^{-3} + ([-a - ic, \xi] - 1)^{-3} - \right.$$

$$\left. - ([a + ic, \xi] - 1)^{-3} - ([-a + ic, \xi] - 1)^{-3} \right\} d\xi. \quad (4)$$

Легко показать, что интеграл, стоящий под знаком предела, абсолютно сходится.

Перейдем в равенстве (4) к пределу под знаком интеграла (мы опускаем детальное обоснование возможности этого

предельного перехода, связанное с учетом асимптотики $h(t\xi)$ при $t \to \infty$). При этом примем во внимание, что если точка c принадлежит положительному конусу, а точка ξ — верхней поле конуса, то $[c, \xi] > 0$. Поскольку

$$(t - i0)^{-3} - (t + i0)^{-3} = \pi i \delta''(t)$$

(см. п. 6, § 3 гл. I вып. 1), то получаем равенство

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}} \int (|[a, \xi]| - 1)_+^{\mu} h(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} \int h(\xi) \delta''(|[a, \xi]| - 1)\, d\xi. \quad (5)$$

Формулу (5) можно было бы сразу получить формально, использовав равенство

$$\underset{\mu=-3}{\text{Выч}} t_+^{\mu} = \frac{1}{2} \delta''(t).$$

Сравним теперь полученные выражения для вычетов обеих частей равенства (1) (см. формулы (3) и (5)). Мы получим после несложных преобразований, что

$$f(a) = -\frac{1}{16\pi^2} \int h(\xi) \delta''(|[a, \xi]| - 1)\, d\xi -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{|[a,x]|<1} [a, x]^2 (1 - [a, x]^2)^{-\frac{3}{2}} f(x)\, dx. \quad (6)$$

В первом слагаемом этой формулы интегрирование ведется по верхней поле конуса $[\xi, \xi] = 0$, $\xi_0 > 0$, а во втором — по области $|[a, x]| < 1$ гиперболоида $[x, x] = -1$. При этом второй интеграл в формуле (6) понимается в смысле регуляризованного значения (см. предыдущую страницу).

Полученное равенство (6) является вторым существенным шагом в нахождении формулы обращения (первый шаг — вывод формулы (17) п. 2). Проанализируем полученное равенство.

Первое слагаемое в формуле (6) совпадает по виду с правой частью формулы обращения в случае обычного пространства Лобачевского (см. формулу (17) п. 2 § 2). Второе же слагаемое есть интеграл функции $f(x)$ по области $|[a, x]| < 1$, то есть по множеству точек, находящихся на мнимом расстоянии от точки a. Мы покажем в следующем пункте, что это слагаемое может быть выражено через интегралы функции $f(x)$ по изотропным прямым, то есть через функцию $\varphi(l)$. Тем самым будет получен окончательный вид формулы обращения.

Поясним, почему формулы обращения для обычного и для мнимого пространств Лобачевского имеют различный вид. В основе вывода этих формул лежит вычисление вычета функции $\operatorname{sh}^{\mu} kr$ при $\mu=-3$. В случае пространства Лобачевского функция $\operatorname{sh}^{\mu} kr$ ведет себя как $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\mu/2}$, а потому при $\mu=-3$ она имеет простой полюс с вычетом, пропорциональным δ-функции. В случае же мнимого пространства Лобачевского расстояние r может быть не только вещественным, но и мнимым. Поэтому приходится рассматривать не одну, а две функции: $\operatorname{sh}^{\mu} kr$ и $\sin^{\mu} k\rho$. Первая из этих функций ведет себя как $(x_0^2-x_1^2-x_2^2)_+^{\mu/2}$, и потому также имеет при $\mu=-3$ простой полюс с вычетом, пропорциональным δ-функции. Функция же $\sin^{\mu} k\rho$ ведет себя как $(x_1^2+x_2^2-x_0^2)_+^{\mu/2}$ и потому она регулярна при $\mu=-3$ (полюс возникает лишь за счет коэффициента, стоящего при этой функции).

Покажем, что первое слагаемое в формуле (6), то есть интеграл

$$\int h(\xi)\,\delta''(|[a,\xi]|-1)\,d\xi, \tag{7}$$

абсолютно сходится. Для этого перепишем сначала интеграл (7) в другом виде, а именно так, чтобы интегрирование велось по сфере Ω — пересечению конуса $[\xi,\xi]=0$ с гиперплоскостью $\xi_0=1$.

Пусть ξ — точка конуса $[\xi,\xi]=0$. Проведем через нее образующую l и обозначим через η точку пересечения образующей l со сферой Ω. Тогда $\xi=q\eta$, где $q=\xi_0$. Примем число q и точку η сферы Ω за новые параметры, определяющие точку ξ. В этих параметрах инвариантная мера $d\xi$ на конусе выражается формулой $d\xi=q\,dq\,d\omega$, где $d\omega$ — евклидова мера на сфере Ω.

Сделав в интеграле (7) подстановку $\xi=q\eta$, мы получим после элементарных преобразований

$$\int h(\xi)\,\delta''(|[a,\xi]|-1)\,d\xi = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 h(t^{-1}\eta)}{\partial t^2}\bigg|_{t=[a,\eta]} + \frac{\partial^2 h(t^{-1}\eta)}{\partial t^2}\bigg|_{t=-[a,\eta]} \right\} d\omega, \tag{8}$$

где $d\omega$ — евклидова мера на сфере Ω *).

*) Аналогичная формула имеет место и в случае обычного пространства Лобачевского. Именно,

$$\int h(\xi)\,\delta''([a,\xi]-1)\,d\xi = \int_\Omega \frac{\partial^2 h(t^{-1}\eta)}{\partial t^2}\bigg|_{t=[a,\eta]} d\omega.$$

Нам надо, таким образом, доказать, что интеграл в правой части равенства (8) абсолютно сходится для любой функции $h(\xi)$ вида

$$h(\xi)=\int f(x)\,\delta(|[x,\xi]|-1)\,dx,$$

где $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция на мнимом пространстве Лобачевского. Очевидно, что этот интеграл может иметь особенность только на множестве точек η, для которых $[a,\eta]=0$. Чтобы показать, что подинтегральная функция ограничена также и в окрестности этого множества, воспользуемся асимптотическим разложением

$$h(t^{-1}\eta)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\eta)\,t^n, \tag{9}$$

имеющим место при $t\to 0$ (ср. формулу (4) п. 1). В формуле (9) $a_n(\eta)$ — бесконечно дифференцируемые функции на сфере Ω.

Как было отмечено в п. 1, разложение (9) можно почленно дифференцировать по t. Поэтому в окрестности сечения сферы Ω плоскостью $[a,\eta]=0$ имеет место асимптотическое разложение

$$\frac{\partial^2 h(t^{-1}\eta)}{\partial t^2}\bigg|_{t=[a,\eta]} \sim \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n(\eta)\,[a,\eta]^{n-2}.$$

Из этого разложения и вытекает, что функция $\dfrac{\partial^2 h(t^{-1}\eta)}{\partial t^2}\bigg|_{t=[a,\eta]}$ ограничена в рассматриваемой окрестности. Точно так же доказывается, что в этой окрестности ограничена и функция $\dfrac{\partial^2 h(t^{-1}\eta)}{\partial t^2}\bigg|_{t=-[a,\eta]}$. Итак, интеграл (8) является интегралом от ограниченной функции по компактному множеству, а следовательно, абсолютно сходится.

4. Вывод формулы обращения для интегрального преобразования, связанного с орисферами мнимого пространства Лобачевского (продолжение). Мы уже говорили в предыдущем пункте, что для завершения вывода формулы обращения нам нужно выразить интеграл

$$I=\int\limits_{|[a,x]|<1} [a,x]^2\,(1-[a,x]^2)^{-\frac{3}{2}} f(x)\,dx \tag{1}$$

через интегралы функции $f(x)$ по изотропным прямым, то есть через функцию $\varphi(l)$. Эта задача и будет решена в данном пункте.

Заметим, что ядро $[a,x](1-[a,x]^2)^{-\frac{3}{2}}$ постоянно на плоскостях $[a,x]=p$. Поэтому, чтобы вычислить интеграл (1), мы можем сначала проинтегрировать функцию $f(x)$

по сечению гиперболоида $[x, x] = -1$ плоскостью $[a, x] = p$, $|p| < 1$, а затем полученное выражение проинтегрировать по p. Таким образом,

$$I = \int_{-1}^{1} p^2 (1-p^2)^{-\frac{3}{2}}\, dp \int_{[a, x]=p} f(x)\, d\sigma. \tag{2}$$

Здесь через $d\sigma$ обозначена мера на сечении гиперболоида $[x, x] = -1$ плоскостью $[a, x] = p$, определяемая формулой $dx = dp\, d\sigma$.

Мы покажем ниже, что интеграл

$$I(p) \equiv \int_{[a, x]=p} f(x)\, d\sigma$$

выражается через интегралы по изотропным прямым. Чтобы пояснить это, заметим, что сечение трехмерного гиперболоида $[x, x] = -1$ плоскостью $[a, x] = p$ является двумерным гиперболоидом. При $|p| < 1$ этот двумерный гиперболоид оказывается однополостным. Поэтому он расслаивается (и даже двумя способами) на прямолинейные образующие, то есть на изотропные прямые. Таким образом, при $|p| < 1$ мы можем свести интеграл $I(p)$ к интегралам $\varphi(l)$ по изотропным прямым *).

Итак, нам надо выразить интеграл $I(p)$ через $\varphi(l)$. Мы решим сначала эту задачу в частном случае, когда точка a имеет координаты $a(0, 0, 0, 1)$. В этом случае $[a, x] = x_3$ и потому

$$I(p) \equiv \int_{[a, x]=p} f(x)\, d\sigma = \int_{x_3=p} f(x)\, d\sigma. \tag{3}$$

Введем вместо p параметр θ, положив $p = \cos\theta$ (в п. 4а будет указан геометрический смысл этого параметра).

*) В терминах геометрии мнимого пространства Лобачевского точки x, для которых $|[a, x]| < 1$, находятся на мнимом расстоянии от точки a, определяемом формулой $r = \rho i$, где $\cos^2 k\rho = [a, x]^2$. Таким образом, при реализации мнимого пространства Лобачевского на однополостном гиперболоиде (с отождествленными диаметрально противоположными точками x и $-x$) однополостные двумерные гиперболоиды являются сферами мнимого радиуса, а двуполостные гиперболоиды ($|p| > 1$) — сферами вещественного радиуса. Как мы видим, сферы мнимого радиуса расслаиваются на изотропные прямые.

Выясним, какие изотропные прямые лежат в плоскости $x_3 = \cos\theta$. Уравнение изотропной прямой при реализации на гиперболоиде $[x, x] = -1$ имеет вид $x = b + t\xi$, где

$$[b, b] = -1, \quad [b, \xi] = 0, \quad [\xi, \xi] = 0, \tag{4}$$

и векторы b, ξ нормированы условиями $b_0 = 0$, $\xi_0 = 1$ (см. п. 3а § 1). Так как прямая l лежит в плоскости $x_3 = \cos\theta$, то вектор ξ имеет координаты $\xi(1, \xi_1, \xi_2, 0)$, а точка b — координаты $b(0, b_1, b_2, \cos\theta)$. Из соотношений (4) имеем

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 = \sin^2\theta, \quad b_1\xi_1 + b_2\xi_2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\xi = (1, \cos\alpha, \sin\alpha, 0) \tag{5}$$

и

$$b = (0, \pm\sin\theta\sin\alpha, \mp\sin\theta\cos\alpha, \cos\theta), \tag{6}$$

где параметр α, задающий изотропную прямую, меняется от 0 до 2π. Два знака в формуле (6) связаны с тем, что однополостный гиперболоид $[x, x] = -1$ двояким образом расслаивается на прямолинейные образующие. Мы будем брать в этой формуле лишь верхние знаки, рассматривая, таким образом, при каждом θ лишь одно семейство изотропных прямых, покрывающих двумерный гиперболоид $[x, x] = -1$, $x_3 = \cos\theta$ *).

Чтобы получить выражение интеграла $I(\cos\theta) = \int_{x_3=\cos\theta} f(x)\, d\sigma$ через функцию $\varphi(l)$, перейдем в этом интеграле к новым переменным. Именно, заметим, что точка $x = b + t\xi$, где векторы b и ξ задаются формулами (5) и (6), пробегает один раз весь двумерный гиперболоид $[x, x] = -1$, $x_3 = \cos\theta$, когда α меняется от 0 до 2π, а t от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому числа α и t можно принять за новые переменные интегрирования.

*) Фактически мы не теряем и второго семейства образующих. Это семейство мы получаем при замене $\cos\theta$ на $-\cos\theta$ (гиперболоиды $[x, x] = -1$, $x_3 = \cos\theta$ и $[x, x] = -1$, $x_3 = -\cos\theta$ совпадают, поскольку точки x и $-x$ считаются отождествленными).

Заметив, что

$$x_0 = t,$$
$$x_1 = \sin\theta\sin\alpha + t\cos\alpha,$$
$$x_2 = -\sin\theta\cos\alpha + t\sin\alpha,$$
$$x_3 = \cos\theta,$$

мы легко получаем $d\sigma \equiv \frac{dx_1\,dx_2}{|x_0|} = dt\,d\alpha$.

В новых переменных интеграл (3) записывается так:

$$I(\cos\theta) = \int\limits_{x_3=\cos\theta} f(x)\,d\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(b+t\xi)\,dt, \tag{7}$$

где

$$\xi \equiv \xi(\alpha) = (1,\ \cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0) \tag{8}$$

и

$$b \equiv b(\theta,\ \alpha) = (0,\ \sin\theta\sin\alpha,\ -\sin\theta\cos\alpha,\ \cos\theta). \tag{9}$$

Но по определению интеграла по изотропной прямой $x = b + t\xi$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(b+t\xi)\,dt = \varphi(\xi,\ b) \equiv \varphi(l).$$

Поэтому при $a = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$ выражение интеграла (7) через $\varphi(\xi,\ b)$ имеет следующий вид:

$$I(\cos\theta) = \int\limits_0^{2\pi} \varphi[\xi(\alpha),\ b(\theta,\ \alpha)]\,d\alpha. \tag{10}$$

Итак, мы получили выражение для интеграла функции $f(x)$ по двумерному гиперболоиду $[x,\ x] = -1$, $[a,\ x] = \cos\theta$ через функцию $\varphi(\xi,\ b)$ для случая, когда точка a имеет координаты $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$.

Мы хотим теперь получить соответствующую формулу для общего случая. Для этого сначала преобразуем формулу (10), записав ее в инвариантном виде. Заметим, что подинтегральная функция в формуле (10) зависит фактически лишь от вектора $\xi(\alpha)$ (так как при фиксированном θ вектор $b(\theta,\ \alpha)$ однозначно определяется вектором $\xi(\alpha)$). Поэтому в дальнейшем мы будем обозначать функцию $\varphi[\xi(\alpha),\ b(\theta,\ \alpha)]$ через $\varphi(\xi,\ \theta)$.

Итак,

$$I(\cos\theta) = \int\limits_0^{2\pi} \varphi[\xi(\alpha),\ \theta]\,d\alpha. \tag{11}$$

Заметим, что точки $\xi(\alpha) = (1,\ \cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$ лежат на сечении сферы Ω: $[\xi,\ \xi] = 0$, $\xi_0 = 1$ плоскостью $\xi_3 = [a,\ \xi] = 0$. Значит, интеграл (11) может быть записан как интеграл по ξ, взятый по этому сечению. Применяя обычную символику δ-функций, мы можем также записать его как интеграл, взятый по всей сфере Ω: $[\xi,\ \xi] = 0$, $\xi_0 = 1$, а именно:

$$I(\cos\theta) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\xi,\ \theta)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega, \tag{12}$$

где $d\omega$ — евклидова мера на сфере. Чтобы получить инвариантную запись этой формулы, нам осталось заменить интегрирование по сфере Ω интегрированием по любому «контуру» Γ на конусе $[\xi,\ \xi] = 0$.

До сих пор мы считали, что вектор ξ нормирован условием $\xi_0 = 1$. Откажемся от этого условия. Пусть ξ — произвольный вектор на конусе $[\xi,\ \xi] = 0$, а вектор b удовлетворяет, как и раньше, условиям $[b,\ b] = -1$, $[b,\ \xi] = 0$, $b_0 = 0$. Определим функцию $\varphi(\xi,\ b)$ равенством

$$\varphi(\xi,\ b) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(b+t\xi)\,dt. \tag{13}$$

Если изотропная прямая $x = b + t\xi$ лежит в плоскости $x_3 = [a,\ x] = \cos\theta$, то, как и раньше, вектор b однозначно определяется заданием вектора ξ и притом не зависит от нормировки этого вектора. Поэтому мы можем снова вместо $\varphi(\xi,\ b)$ писать $\varphi(\xi,\ \theta)$. Ясно, что $\varphi(\xi,\ \theta)$ является однородной функцией от ξ степени однородности -1.

Итак, подинтегральная функция $\varphi(\xi,\ \theta)\,\delta([a,\ \xi])$ в формуле (12) определена теперь на всем конусе $[\xi,\ \xi] = 0$. Очевидно, что она однородна по ξ и имеет степень однородности -2. Теперь уже можно заменить в формуле (12) интегрирование по сфере Ω интегрированием по любой поверхности Γ, пересекающей каждую образующую конуса.

Определим интеграл по поверхности Г формулой

$$\int_{\Gamma} \varphi(\xi, \theta)\,\delta([a, \xi])\,d\omega, \tag{14}$$

где

$$d\omega = |\xi_0|^{-1}(\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3 - \xi_2\,d\xi_1\,d\xi_3 + \xi_3\,d\xi_1\,d\xi_2). \tag{15}$$

Этот интеграл не зависит от выбора Г. В самом деле подинтегральная функция $\varphi(\xi, \theta)\delta([a, \xi])$ имеет степень однородности -2, а форма $d\omega$ — степень однородности 2. Значит, все подинтегральное выражение сохраняется при замене ξ на $\alpha\xi$ $(\alpha > 0)$. Отсюда непосредственно следует, что значение интеграла (14) сохраняется при любой деформации поверхности Г*).

Легко видеть, что если в качестве поверхности интегрирования взять сферу Ω, то мы получим в точности интеграл (12) (так как при $\xi_0 = 1$ формула (15) задает евклидову меру на сфере).

Итак, мы получили следующую формулу:

$$I(\cos\theta) \equiv \int_{[a, x]=\cos\theta} f(x)\,d\sigma = \int_{\Gamma} \varphi(\xi, \theta)\,\delta([a, \xi])\,d\omega, \tag{16}$$

где Г — любая поверхность на конусе $[\xi, \xi] = 0$, пересекающая все образующие, а форма $d\omega$ задается формулой (15). Формула (16) и является инвариантной записью формулы (10), то есть записью, не зависящей от выбора точки a. Чтобы убедиться в этом, нужно применить формулу (16) к функции $f(xg)$ и учесть, что при одновременном сдвиге точек a, x и ξ выражения $[a, x]$ и $[a, \xi]$ не меняются, а интеграл в правой части формулы (16) не зависит от выбора поверхности Г. Поэтому формула (16) остается справедливой для любой точки a мнимого пространства Лобачевского.

Таким образом, мы выразили интеграл $I(\cos\theta) \equiv \equiv \int_{[a, x]=\cos\theta} f(x)\,d\sigma$ через интегралы функции $f(x)$ по изо-

---

*) Ср. Добавление § 2, п. 5. Полезно отметить, что если поверхность Г задана уравнением $P(\xi) = 1$, то форма $d\omega$ на поверхности $P(\xi) = 1$ удовлетворяет соотношению $d\xi = dP\,d\omega$. Интеграл (14) есть вычет однородной функции $\varphi(\xi, \theta)\,\delta([a, \xi])$, заданной на поверхности $[\xi, \xi] = 0$.

тропным прямым. Вернемся теперь к формуле (2):

$$I = \int_{-1}^{1} p^2(1 - p^2)^{-\frac{3}{2}}\,dp \int_{[a, x]=p} f(x)\,d\sigma.$$

Положим в этом интеграле $p = \cos\theta$ и подставим в него найденное выражение для $I(\cos\theta)$. Мы получим

$$I = \int_{0}^{\pi} \operatorname{ctg}^2\theta\,d\theta \int_{\Gamma} \varphi(\xi, \theta)\,\delta([a, \xi])\,d\omega. \tag{17}$$

Итак, мы решили задачу, поставленную в начале этого пункта — выразить интеграл

$$I \equiv \int_{|[a, x]| < 1} [a, x]^2(1 - [a, x]^2)^{-\frac{3}{2}} f(x)\,dx$$

через интегралы функции $f(x)$ по изотропным прямым. Тем самым завершен вывод формулы обращения. Сформулируем окончательный результат.

Пусть $f(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция на мнимом пространстве Лобачевского. Будем интегрировать эту функцию по орисферам первого рода и по изотропным прямым. Эти интегралы определяются (в реализации на гиперболоиде $[x, x] = -1$) следующими формулами:

$$h(\xi) = \int f(x)\,\delta(|[x, \xi]| - 1)\,dx, \tag{18}$$

где $[\xi, \xi] = 0$, $\xi_0 > 0$ (интеграл по орисфере первого рода $|[x, \xi]| = 1$) и

$$\varphi(\xi, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(b + t\xi)\,dt, \tag{19}$$

где $[b, b] = -1$, $[b, \xi] = [\xi, \xi] = 0$, $b_0 = 0$ (интеграл по изотропной прямой $x = b + t\xi$).

Тогда значение функции $f(x)$ в точке a мнимого пространства Лобачевского выражается через функции $h(\xi)$

и $\varphi(\xi, b)$ *по следующей формуле обращения:*

$$f(a) = -\frac{1}{16\pi^2}\int h(\xi)\,\delta''(|[a, \xi]| - 1)\,d\xi + \\ + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi} \mathrm{ctg}^2\,\theta\,d\theta \int_{\Gamma} \varphi(\xi, \theta)\,d\omega. \quad (20)$$

Здесь $d\xi = \frac{d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3}{|\xi_0|}$ — инвариантная мера на конусе $[\xi, \xi] = 0$. Через $\varphi(\xi, \theta)$ обозначено значение функции $\varphi(\xi, b)$ для изотропной прямой $x = b + t\xi$, лежащей в плоскости $[a, x] = \cos\theta$, то есть такой, что $[a, b] = \cos\theta$ *). Интегрирование во втором слагаемом ведется по произвольной поверхности Γ на конусе $[\xi, \xi] = 0$, пересекающей все образующие конуса; мера $d\omega$ определяется формулой

$$d\omega = |\xi_0|^{-1}(\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3 - \xi_2\,d\xi_1\,d\xi_3 + \xi_3\,d\xi_1\,d\xi_2).$$

Отметим в заключение этого пункта, что функции $h(\xi)$ и $\varphi(\xi, b)$ удовлетворяют соотношениям симметрии. Для функции $h(\xi)$ это соотношение напоминает соотношение симметрии для случая обычного пространства Лобачевского. Оно записывается в виде

$$H(a, t) = H(a, t^{-1}), \quad (21)$$

где

$$H(a, t) = \int h(\xi)\,\delta(|[a, \xi]| - t)\,d\xi\,^{**}). \quad (22)$$

Вывода этого соотношения мы приводить не будем.

---

*) На каждом сечении $[a, x] = \cos\theta$ гиперболоида $[x, x] = -1$ выбирается о д н о семейство образующих. Для $a = (0, 0, 0, 1)$ оно было выбрано на стр. 423. Для других a оно однозначно определяется требованием непрерывной зависимости от a. При заданном a образующая $b + t\xi$ однозначно определяется величинами ξ и θ.

**) Заметим, что, в отличие от обычного пространства Лобачевского, интеграл (22) расходится, а потому его нужно понимать в смысле регуляризованного значения. Именно, как мы знаем (см. конец п. 3), интеграл $H_t''(a, t) = \int h(\xi)\,\delta''(|[a, \xi]| - t)\,d\xi$ абсолютно сходится. Функция $H(a, t)$ однозначно определяется по своей производной $H_t''(a, t)$ при дополнительных условиях, что $H(a, 1) = H_t'(a, 1) = 0$.

Для функции же $\varphi(\xi, b)$ соотношение симметрии имеет вид

$$\int_{\Gamma} \varphi(\xi, \theta)\,\delta([a, \xi])\,d\omega = \int_{\Gamma} \varphi(\xi, \pi - \theta)\,\delta([a, \xi])\,d\omega. \quad (23)$$

Чтобы доказать это соотношение, достаточно заметить, что гиперболоиды $[x, x] = -1$, $[a, x] = \cos\theta$ и $[x, x] = -1$, $[a, x] = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ совпадают, поскольку точки x и $-x$ гиперболоида $[x, x] = -1$ считаются отождествленными.

4а. Параллельные изотропные прямые. Рассмотрим подробнее второе слагаемое в формуле обращения (20) п. 4. Мы уже знаем, что в этом слагаемом интеграл берется по множеству изотропных прямых, лежащих на всевозможных сферах мнимого радиуса с центром в точке a (однополостных двумерных гиперболоидах в реализации $[x, x] = -1$). Это множество прямых допускает другое геометрическое описание, которое будет дано в этом пункте.

Чтобы получить это описание, введем понятие параллельности изотропных прямых. *Назовем две изотропные прямые параллельными, если их направляющие векторы пропорциональны.* Посмотрим, что означает это понятие в различных реализациях мнимого пространства Лобачевского.

Мы знаем (см. п. 3а § 1), что изотропная прямая изображается двумерной плоскостью в E_{n+1}, касающейся конуса $[x, x] = 0$ вдоль некоторой образующей; направляющий вектор изотропной прямой направлен по этой образующей. Таким образом, параллельные изотропные прямые изображаются двумерными плоскостями, касающимися конуса $[x, x] = 0$ вдоль одной и той же образующей.

Очевидно, что при реализации мнимого пространства Лобачевского на гиперболоиде $[x, x] = -1$ параллельные изотропные прямые изображаются параллельными образующими этого гиперболоида. Если же мнимое пространство Лобачевского реализовано на плоскости $x_0 = 1$, то есть во внешности единичной сферы, то параллельные изотропные прямые изображаются прямыми, касающимися этой сферы (абсолюта) в одной и той же точке.

Покажем, что любая изотропная прямая, лежащая на сфере мнимого радиуса с центром в точке a, параллельна одной из образующих изотропного конуса с вершиной в точке a (то есть одной из изотропных прямых, проходящих через точку a). Воспользуемся для этого реализацией мнимого пространства Лобачевского на гиперболоиде $[x, x]=-1$. В этой реализации изотропная прямая задается уравнением $x=b+t\xi$, где $[b, b]=-1$, $[b, \xi]=[\xi, \xi]=0$. Легко видеть, что все точки этой прямой тогда и только тогда лежат на одном и том же расстоянии от точки a, когда $[a, \xi]=0$. Но в этом случае $x=a+t\xi$ также является уравнением изотропной прямой, причем эта прямая проходит через точку a и параллельна прямой $x=b+t\xi$.

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение: любая изотропная прямая, параллельная одной из образующих изотропного конуса с вершиной в точке a, лежит на некоторой сфере мнимого радиуса с центром в точке a.

Итак, мы показали, что *интегрирование в формуле* (20) п. 4 *ведется по множеству изотропных прямых, параллельных образующим изотропного конуса с вершиной в точке* a.

Простой геометрический смысл имеет и величина θ в формуле (20) п. 4. Именно, $r=\frac{\theta i}{k}$ есть радиус сферы с центром в точке a, на которой лежит изотропная прямая $l\equiv l(\xi, \theta)$. Иными словами, $r=\frac{\theta i}{k}$ есть расстояние от точки a до любой точки прямой l.

Итак, вычисление интеграла

$$\int_0^\pi \int_\Gamma \operatorname{ctg}^2\theta\, \varphi(\xi, \theta)\, \delta([a, \xi])\, d\theta\, d\omega \tag{1}$$

может быть проведено в следующем порядке. Мы берем изотропный конус с вершиной в точке a. Каждой образующей l' конуса сопоставляется пучок параллельных ей изотропных прямых. Функцию $\varphi(l)\equiv\varphi(\xi, \theta)$ мы интегрируем сначала по множеству прямых этого пучка с весом $\operatorname{ctg}^2\theta$, где $r=\frac{\theta i}{k}$ — расстояние от точки a до прямой l. В результате получаем функцию, заданную на множестве образующих изотропного конуса с вершиной в точке a (или, что то же самое, на множестве точек касания этого конуса с абсолютом). Интегрируя полученную функцию по этому множеству (с соответствующей мерой), мы получаем интеграл (1).

Введем понятие расстояния между параллельными изотропными прямыми. Докажем прежде, что *расстояние между любыми двумя точками параллельных изотропных прямых не зависит от выбора этих точек.* В самом деле, возьмем параллельные изотропные прямые $x=a+t\xi$ и $y=b+t'\xi$. Так как $[a, \xi]=[b, \xi]=[\xi, \xi]=0$, то имеем $[x, y]=[a, b]$. Поскольку расстояние $r(x, y)$ между точками x, y задается формулой $\operatorname{ch}^2 kr=[x, y]^2$, то $r(x, y)=r(a, b)$, а потому $r(x, y)$ не зависит от выбора точек x, y на наших прямых.

Назовем расстоянием между параллельными изотропными прямыми расстояние между любыми двумя точками этих прямых.

Пусть $r=\frac{\theta i}{k}$ — расстояние между двумя параллельными изотропными прямыми. Тогда θ равно углу между изображениями этих прямых при реализации мнимого пространства Лобачевского во внешности единичной сферы. Наметим доказательство этого утверждения.

Параллельные изотропные прямые изображаются в выбранной реализации прямыми, касающимися абсолюта в одной и той же точке. Но движения мнимого пространства Лобачевского являются при этом проективными преобразованиями трехмерного пространства, переводящими абсолют (единичную сферу) в себя. Легко показать, что эти преобразования абсолюта являются конформными и, значит, сохраняют углы между прямыми, касающимися сферы в одной и той же точке. С другой стороны, при движениях мнимого пространства Лобачевского не меняются и расстояния между параллельными изотропными прямыми.

Таким образом, наше утверждение достаточно доказать для какой-нибудь одной пары параллельных изотропных прямых, находящихся на заданном расстоянии $r=\frac{\theta i}{k}$. Читатель без труда сможет проверить это утверждение для пары прямых, касающихся абсолюта в точке $(1, 0, 0, 1)$ и проходящих соответственно через точки $(1, 1, 0, 1)$ и $(1, \cos\theta, \sin\theta, 1)$.

5. Вычисление функции $\Phi(x, a; \mu)$. При выводе формулы обращения для интегрального преобразования, связанного с орисферами мнимого пространства Лобачевского, мы использовали функцию $\Phi(x, a; \mu)$. Эта функция формально определяется равенством

$$\Phi(x, a; \mu)=\int (|[a, \xi]|-1)_+^\mu\, \delta(|[x, \xi]|-1)\, d\xi, \tag{1}$$

где a и x — точки гиперболоида $[x, x]=-1$, а ξ — точка верхней полы конуса $[\xi, \xi]=0$. Поскольку интеграл (1) может при некоторых a и x расходиться для всех μ, мы определили значение этого интеграла следующим образом:

$$\Phi(x, a; \mu) = \Phi_1(x, a; \mu) + \Phi_2(x, a; \mu),$$

где

$$\Phi_1(x, a; \mu) = J_+(x, a - x; \mu) + J_+(x, -a - x; \mu), \quad (2)$$

где в свою очередь

$$J_+(x, b; \mu) = \int [b, \xi]_+^{\mu}\, \delta([x, \xi] - 1)\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{2i \sin \mu\pi} \lim_{c \to +0} \int \delta([x, \xi] - 1) \cdot \{e^{i\mu\pi}[b - ic, \xi]^{\mu} - e^{-i\mu\pi}[b + ic, \xi]^{\mu}\}\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{2i \sin \mu\pi} \{e^{i\mu\pi} J(x, b - i0; \mu) - e^{-i\mu\pi} J(x, b + i0; \mu)\} \quad (3)$$

(см. п. 2 формулы (4), (10), (10′) и (11)). Символ $c \to +0$ в формуле (3) означает, что точка c стремится к нулю, оставаясь в положительном конусе, то есть что $[c, c] > 0$ и $c_0 > 0$. Функция $\Phi_2(x, a; \mu)$ определяется аналогично.

В этом пункте мы найдем явное выражение функции $\Phi(x, a; \mu)$ через координаты точек a и x (мы уже пользовались этим выражением в п. 3). Так как интегралы в правой части равенства (3) не изменяются при одновременном сдвиге точек b и x, то функция $\Phi(x, a; \mu)$ также инвариантна при таких сдвигах

$$\Phi(x, a; \mu) = \Phi(xg, ag; \mu).$$

Так как любую точку x гиперболоида $[x, x] = -1$ можно сдвинуть в точку $x(0, 0, 0, 1)$, то достаточно вычислить функцию $\Phi(x, a; \mu)$ при $x = x(0, 0, 0, 1)$.

Из равенства (2) следует, что нахождение значения функции $\Phi(x, a; \mu)$ сводится к вычислению интеграла

$$J(x, z; \mu) = \int [z, \xi]^{\mu}\, \delta([x, \xi] - 1)\, d\xi \quad (4)$$

для любой комплексной точки $z(z_0, z_1, z_2, z_3)$, лежащей в верхней или нижней полуплоскости (то есть такой, что либо $z = b + ic$, где $c > 0$, либо $z = b - ic$, где $c > 0$ *)). При этом, как было уже сказано, мы можем ограничиться случаем, когда $x = x(0, 0, 0, 1)$. В этом случае интеграл (4) принимает вид

$$J(x, z; \mu) = \int [z, \xi]^{\mu}\, \delta(\xi_3 + 1)\, d\xi. \quad (5)$$

*) Символ $c > 0$ означает, что точка c лежит в положительном конусе, то есть что $[c, c] > 0$ и $c_0 > 0$.

Мы начнем вычисление интеграла (5) со случая, когда точка z принадлежит положительному конусу, $z = b > 0$. В этом случае мы имеем

$$J(x, b; \mu) = \int [b, \xi]^{\mu}\, \delta(\xi_3 + 1)\, d\xi, \quad (6)$$

где $b > 0$. Но если $b > 0$ и ξ принадлежит верхней поле конуса $[\xi, \xi] = 0$, то выполняется неравенство $[b, \xi] > 0$. Отсюда легко следует, что интеграл (6) сходится при $\operatorname{Re} \mu < -1$.

Чтобы найти значение интеграла (6), заметим, что для любой точки $b > 0$ найдется движение g, оставляющее на месте точку $x(0, 0, 0, 1)$ и переводящее точку b в точку $bg = (\sqrt{P}, 0, 0, b_3)$, где $P = b_0^2 - b_1^2 - b_2^2$. Так как это движение не меняет значения интеграла (6), то

$$J(x, b; \mu) = \int (\sqrt{P}\, \xi_0 - b_3 \xi_3)^{\mu}\, \delta(\xi_3 + 1)\, d\xi,$$

где

$$d\xi = \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3}{\xi_0} = \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}.$$

Простое вычисление показывает, что

$$J(x, b; \mu) = -\frac{2\pi(\sqrt{P} + b_3)^{\mu+1}}{(\mu + 1)\sqrt{P}}, \quad (7)$$

где, напомним, $x = x(0, 0, 0, 1)$ и $P = b_0^2 - b_1^2 - b_2^2$.

Таким образом, функция $J(x, z; \mu)$ определена в случае, когда $x = x(0, 0, 0, 1)$, а точка z лежит в положительном конусе. Определим теперь функцию

$$J(x, z; \mu) = \int [z, \xi]^{\mu}\, \delta(\xi_3 + 1)\, d\xi \quad (8)$$

для точек z из верхней полуплоскости, то есть для точек $z = b + ic$ таких, что c лежит в положительном конусе.

28 Зак. 2905. И. М. Гельфанд и др., вып. 5

Мы определяем возведение комплексного числа $[z, \xi]$ в степень μ формулой

$$[z, \xi]^{\mu} = e^{\mu \ln |[z, \xi]| + i\mu \arg [z, \xi]}, \tag{9}$$

где $-\pi < \arg [z, \xi] < \pi$.

При таком определении $[z, \xi]^{\mu}$ интеграл (8) является аналитическим продолжением интеграла (6) п. 2. Поэтому для нахождения его значения достаточно продолжить в верхнюю полуплоскость выражение (7). Нетрудно показать, рассматривая сначала интеграл (8) при $z = bi$, $b > 0$, что это продолжение задается формулой

$$J(x, z; \mu) = -\frac{2\pi}{\mu+1} e^{\frac{i\mu\pi}{2}} (-P)^{-\frac{1}{2}} \left\{(-P)^{\frac{1}{2}} - iz_3\right\}^{\mu+1}, \tag{10}$$

где $P = z_0^2 - z_1^2 - z_2^2$ (мы опускаем несложное, но длинное доказательство того, что функция $J(x, z; \mu)$, определенная формулой (10), аналитически зависит в верхней полуплоскости от координат точки z и от μ; это сводится к доказательству того, что в верхней полуплоскости выражения $-P$ и $(-P)^{\frac{1}{2}} - iz_3$ не принимают отрицательных значений).

Совершенно так же доказывается, что аналитическое продолжение функции $J(x, b; \mu)$ в нижнюю полуплоскость дается формулой

$$J(x, b; \mu) = -\frac{2\pi}{\mu+1} e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} (-P)^{-\frac{1}{2}} \left\{(-P)^{\frac{1}{2}} + iz_3\right\}^{\mu+1}, \tag{10'}$$

где $P = z_0^2 - z_1^2 - z_2^2$.

Вычислим теперь для любой вещественной точки b функцию

$$J(x, b+i0; \mu) = \lim_{c \to +0} J(x, b+ic; \mu).$$

Для этого подставим в формулу (10) вместо z точку $b + ic_\varepsilon$, где $c_\varepsilon = (\varepsilon, 0, 0, 0)$, $\varepsilon > 0$, и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. После простого вычисления получаем

$$(x, b+i0; \mu) = -\frac{2\pi}{\mu+1} e^{\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \mp i0)^{-\frac{1}{2}} \left\{(-P \mp i0)^{\frac{1}{2}} - ib_3\right\}^{\mu+1}, \tag{11}$$

где верхний знак имеет место, если $b_0 > 0$, а нижний — если $b_0 < 0$; $P = b_0^2 - b_1^2 - b_2^2$. Совершенно так же доказывается, что

$$J(x, b - i0; \mu) = -\frac{2\pi}{\mu+1} e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} (-P \pm i0)^{-\frac{1}{2}} \left\{(-P \pm i0)^{\frac{1}{2}} + ib_3\right\}^{\mu+1}. \tag{11'}$$

Подставим эти значения для $J(x, b+i0; \mu)$ и $J(x, b-i0; \mu)$ в формулу (3) для $J_+(x, b; \mu)$. Мы получим выражение $J_+(x, b; \mu)$ через координаты точек $b(b_0, b_1, b_2, b_3)$ и $x(0, 0, 0, 1)$. После этого с помощью формулы (2) найдем значение $\Phi_{\mathrm{I}}(x, a; \mu)$. В результате получается следующая формула (при $x = (0, 0, 0, 1)$):

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{I}}(x, a; \mu) = {} & \frac{\pi i}{(\mu+1)\sin \mu\pi} \times \\ & \times \Bigg\{(-P \pm i0)^{-\frac{1}{2}} \Bigg[e^{\frac{i\mu\pi}{2}} \left\{(-P \pm i0)^{\frac{1}{2}} + i(a_3 - 1)\right\}^{\mu+1} - \\ & - e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} \left\{(-P \pm i0)^{\frac{1}{2}} + i(a_3 + 1)\right\}^{\mu+1}\Bigg] - \\ & - (-P \mp i0)^{-\frac{1}{2}} \Bigg[e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} \left\{(-P \mp i0)^{\frac{1}{2}} - i(a_3 - 1)\right\}^{\mu+1} - \\ & - e^{\frac{i\mu\pi}{2}} \left\{(-P \mp i0)^{\frac{1}{2}} - i(a_3 + 1)\right\}^{\mu+1}\Bigg]\Bigg\},\end{aligned}$$

где $P = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2$ и верхний знак берется при $a_0 > 0$, а нижний — при $a_0 < 0$.

Упростим полученное выражение, приняв во внимание формулы

$$(-P \pm i0)^{\frac{1}{2}} = P_-^{\frac{1}{2}} \pm iP_+^{\frac{1}{2}} \tag{12$_1$}$$

и

$$(-P \pm i0)^{-\frac{1}{2}} = P_-^{-\frac{1}{2}} \mp iP_+^{-\frac{1}{2}} \tag{12$_2$}$$

(см. п. 4 § 2 гл. III вып. 1). Так как диаметрально противоположные точки гиперболоида $[x, x] = -1$ отождествлены, мы можем считать, что $a_3 > 0$. При упрощении выражения следует иметь в виду, что в области, где $P > 0$, выполняется неравенство

$$a_3 - 1 < \sqrt{P} < a_3 + 1. \tag{13}$$

В самом деле, так как точка a лежит на гиперболоиде $[x, x] = -1$, то $P = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 = a_3^2 - 1$. Так как $P > 0$, то $a_3^2 > 1$. Отсюда в силу того, что $a_3 > 0$, и следует неравенство (13).

Учитывая это неравенство при упрощении интеграла, получаем без труда следующее утверждение.

Если $x = x(0, 0, 0, 1)$, то функция $\Phi_1(x, a; \mu)$ задается при $P > 0$, $a_0 > 0$ формулой

$$\Phi_1(x, a; \mu) = \frac{-2\pi P^{\frac{\mu}{2}}}{(\mu+1)}\left(1 + \frac{a_3 - 1}{P^{\frac{1}{2}}}\right)^{\mu+1}. \tag{14$_1$}$$

В области $P > 0$, $a_0 < 0$ функция $\Phi_1(x, a; \mu)$ равна нулю, а в области $P < 0$ она выражается формулой

$$\Phi_1(x, a; \mu) = \frac{\pi i (-P)^{\frac{\mu}{2}}}{(\mu+1)\sin \mu\pi} \times$$
$$\times \left\{ e^{\frac{i\mu\pi}{2}} \left[\left(1 - \frac{i(1-a_3)}{(-P)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\mu+1} + \left(1 - \frac{i(1+a_3)}{(-P)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\mu+1}\right] - \right.$$
$$\left. - e^{-\frac{i\mu\pi}{2}} \left[\left(1 + \frac{i(1-a_3)}{(-P)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\mu+1} + \left(1 + \frac{i(1+a_3)}{(-P)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\mu+1}\right]\right\}. \tag{14$_2$}$$

В этих формулах через P обозначено выражение $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2$.

Аналогичные формулы справедливы для $\Phi_2(x, a; \mu)$ и, значит, для $\Phi(x, a; \mu)$.

Теперь уже легко получить значение функции $\Phi(x, a; \mu)$ для любых двух точек a и x, лежащих на гиперболоиде $[x, x] = -1$. Для этого заметим, что если $x = x(0, 0, 0, 1)$, то $[a, x] = -a_3$. Но по определению расстояния между

двумя точками мнимого пространства Лобачевского имеем $\operatorname{ch}^2 kr = [a, x]^2$. Поэтому $\operatorname{ch}^2 kr = a_3^2$. Поскольку на гиперболоиде $[x, x] = -1$ выполняется равенство $P = a_3^2 - 1$, то $P = \operatorname{sh}^2 kr$. Подставляя эти значения a_3 и P в формулы (14$_1$) и (14$_2$), мы получим выражение функции $\Phi(x, a; \mu)$ через расстояние r между точками a и x для случая, когда $x = x(0, 0, 0, 1)$. Но значение функции $\Phi(x, a; \mu)$ не меняется при одновременном сдвиге точек a и x. Поэтому получающиеся выражения имеют место для любых двух точек мнимого пространства Лобачевского.

В результате мы и получаем выражения для $\Phi(x, a; \mu)$, которые были приведены в п. 2.

ГЛАВА VI

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, СВЯЗАННЫХ С ГРУППОЙ ЛОРЕНЦА

§ 1. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

1. Однородные пространства. Напомним некоторые основные определения. Говорят, что группа G является *группой преобразований* некоторого пространства X, если любому элементу g этой группы отвечает взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование этого пространства. При этом предполагается, что единичному элементу e группы отвечает тождественное преобразование в X и что для любого элемента x из X и любых элементов g_1, g_2 из G выполняется равенство

$$x(g_1 g_2) = (xg_1) g_2.$$

Через xg обозначается здесь точка пространства X, в которую переводится точка x преобразованием g. Если группа G непрерывна, то обычно еще требуется, чтобы отображение $x \to xg$ было при всех x непрерывно относительно g.

Если любую точку x пространства X можно перевести в любую другую точку y с помощью некоторого преобразования g из G, то группа G называется *транзитивной группой движений* пространства X, а само пространство X называется *однородным пространством* с группой движений G. Например, n-мерная сфера является однородным пространством относительно группы вращений $(n+1)$-мерного евклидова пространства. Рассмотренные в главе V n-мерное пространство Лобачевского и n-мерное мнимое пространство Лобачевского являются однородными пространствами относительно группы линейных преобразований в E_{n+1} с определи-

телем 1, сохраняющих форму $[x, x] = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$ и переводящих в себя каждую полу конуса $[x, x] = 0$.

2. Представления группы Лоренца, связанные с однородными пространствами. Пусть X — однородное пространство, в котором действует группа Лоренца G. Свяжем с этим пространством представление группы G. Представление строится в некотором пространстве функций $f(x)$ на X. Оно состоит в том, что каждому элементу g группы G сопоставляется оператор $T(g)$ в пространстве функций $f(x)$ следующего вида:

$$T(g) f(x) = f(xg)\, \alpha(x, g). \tag{1}$$

Через xg обозначена здесь та точка пространства, в которую переводится x движением g *).

Представления, связанные с некоторыми однородными пространствами, были уже рассмотрены в этой книге. Так, в главе III были изучены операторно неприводимые представления группы Лоренца. Все эти представления строятся в пространствах функций $f(z)$ на комплексной проективной прямой (см. стр. 445). Операторы представлений задаются следующей формулой:

$$T_\chi(g) = f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)(\beta z + \delta)^{n_1 - 1}(\overline{\beta z + \delta})^{n_2 - 1}, \tag{2}$$

где $\chi = (n_1, n_2)$ — пара комплексных чисел, задающая представление (их разность $n_1 - n_2$ всегда предполагается целым числом). В общем случае представления, связанные с однородными пространствами, приводимы. Наша задача состоит в том, чтобы разложить эти представления на неприводимые представления. Тем самым будет получено разложение функции $f(x)$ в однородном пространстве по функ-

---

*) Условие того, что операторы $T(g)$ образуют представление группы, то есть что для любых двух элементов группы g_1, g_2 выполняется равенство

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)\, T(g_2),$$

можно записать в виде функционального уравнения для множителя $\alpha(x, g)$:

$$\alpha(x, g_1 g_2) = \alpha(x, g_1)\, \alpha(x g_1, g_2).$$

циям, преобразующимся по неприводимым представлениям группы G (аналог разложения функции на прямой в интеграл Фурье). Собственно говоря, именно эта задача решалась в главе IV, где в качестве однородного пространства была взята сама группа Лоренца. Там было получено разложение функций на группе в интеграл Фурье.

Аналогичная задача будет здесь решена для других однородных пространств.

3. О связи теории представлений с интегральной геометрией. В теории представлений особенно важно изучать интегральные преобразования, упрощающие представление. Эти преобразования связаны с переходом от точек однородного пространства X к новым объектам этого пространства. Именно, в пространстве X выделяется некоторая система Y объектов (линии, поверхности и т. д.). После этого каждой функции $f(x)$ в пространстве X сопоставляется функция $\check{f}(y)$ в пространстве объектов Y: $\check{f}(y)$ определяется как интеграл исходной функции $f(x)$ по объекту y.

Эта новая система объектов Y выбирается всегда так, что соответствие $f(x) \to \check{f}(y)$, относящее функции f в пространстве X функцию $\check{f}$ в пространстве объектов Y, является взаимно однозначным. Иными словами, зная интеграл функции $f(x)$ по каждому из объектов y, мы можем однозначным образом восстановить эту функцию.

Роль интегральной геометрии в теории представлений как раз и состоит в переходе от пространства одних объектов к пространству других объектов. Оказывается, в большинстве однородных пространств *) существуют такие объекты, что переход к пространству этих объектов весьма упрощает представление. Эти объекты мы назовем *орисферами*.

Причина такого названия в том, что в случае обычного пространства Лобачевского этими объектами являются настоящие орисферы. Поскольку орисферы в пространстве Лобачевского задаются точками конуса

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad x_0 > 0,$$

*) Во всяком случае, в любом однородном пространстве, связанном с полупростой комплексной группой Ли.

то однородное пространство орисфер тождественно этому конусу. Тем самым изучение представления, связанного с пространством Лобачевского, сводится к изучению значительно более простого представления, связанного с конусом.

Возникает вопрос, что представляют собой орисферы в разных случаях. Общее определение орисферы, пригодное, во всяком случае, для любой комплексной полупростой группы Ли, будет дано в п. 6. Для группы Лоренца это определение сводится к следующему: рассмотрим подгруппу матриц вида $\begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Орисферами в однородном пространстве, связанном с группой Лоренца, называются поверхности, порожденные движениями, принадлежащими подгруппе матриц $\begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, а также все поверхности, полученные их сдвигами.

В множестве орисфер однородного пространства X, связанного с группой Лоренца, также действует эта группа преобразований (быть может и не транзитивно). Оказывается, что однородные подпространства пространства орисфер всегда либо тождественны комплексной аффинной плоскости *), либо получаются из нее «сужением» (то есть отождествлением некоторых точек, например всех точек вида $(e^{i\varphi}z_1, e^{i\varphi}z_2)$, где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$). Поэтому разложение представления группы Лоренца, связанного с пространством орисфер, сводится к элементарно решаемой задаче о разложении представления, связанного с комплексной аффиной плоскостью (относительно этой задачи см. § 2). По сути дела, разложение этих представлений на неприводимые сводится к обычному преобразованию Фурье.

Столь же просто решается задача о разложении представления в пространстве функций на множестве орисфер любого однородного пространства, в котором транзитивно действует полупростая группа Ли.

Чтобы от разложения представлений, связанных с пространствами орисфер, вернуться к разложению исходного представления, связанного с данным однородным пространством X, надо выразить финитные функции $f(x)$ пространства X через их интегралы по орисферам. Иными словами, надо

*) Определение комплексной аффинной плоскости дано в п. 5.

решить задачу интегральной геометрии, связанную с орисферами данного однородного пространства.

Мы видим, что задачи интегральной геометрии и теории представлений близки к классическим идеям геометрии (Плюкер, Клейн и др.), строящей, как мы сейчас говорим, новые однородные пространства из объектов старого пространства. Однако в интегральной геометрии задачи рассматриваются в современном аспекте: переход от одного пространства к другому совершается с одновременным преобразованием запаса функций. Это можно сравнить с различием между классической и квантовой механикой: преобразования классической механики — точечные, а преобразования квантовой механики осуществляются в пространствах функций.

В интегральной геометрии уже решено много интересных задач, которые привели к новым, глубоким формулам интегральных преобразований. Эти первые задачи интегральной геометрии напоминают (на новом уровне) начальный этап развития алгебраической геометрии. Ряд таких задач и разобран в этой книге.

4. Однородные пространства и соответствующие им стационарные подгруппы. В этом пункте будет показано, как можно описать все однородные пространства, на которых транзитивно действует группа G, в терминах самой группы.

Пусть X — однородное пространство. Зафиксируем в нем точку x_0. Каждой точке пространства x сопоставим множество преобразований, переводящих x_0 в x. Выясним, что это за множество. Рассмотрим сначала те преобразования, которые переводят x_0 в x_0. Ясно, что они образуют подгруппу. Мы назовем ее *стационарной подгруппой* точки x_0. Если теперь g — одно из преобразований, переводящих точку x_0 в x, то совокупность преобразований hg, где h пробегает стационарную подгруппу точки x_0, также переводит x_0 в x. Легко показать, что этим исчерпываются преобразования, переводящие x_0 в x. Таким образом, множество преобразований, переводящих x_0 в x, образует правый класс смежности группы преобразований по стационарной подгруппе точки x_0. Следовательно, имеет место соответствие между точками однородного пространства и правыми классами смежности группы преобразований по стационарной подгруппе

точки x_0. Это соответствие взаимно однозначно. Очевидно, что преобразованию g в исходном пространстве отвечает умножение классов смежности на g.

Итак, *каждое однородное пространство, связанное с группой G, может быть получено следующим образом. Берется подгруппа H группы G. Точками пространства объявляются правые классы смежности группы G по подгруппе H. Движение, отвечающее элементу g группы G, определяется как умножение классов смежности справа на g.*

Мы установили, что каждое однородное пространство определяется некоторой стационарной подгруппой. В нашей конструкции имеется, однако, произвол — точка x_0, которая фиксируется в пространстве. Взяв другую точку, мы получим то же самое пространство. Легко видеть, что при переходе от одной точки пространства к другой стационарная подгруппа переходит в сопряженную подгруппу. Именно, если H — стационарная подгруппа точки x_0, а преобразование g переводит x_0 в x, то стационарной подгруппой точки x будет $g^{-1}Hg$. Следовательно, *пространства, связанные с сопряженными подгруппами, тождественны между собой.* Классификация однородных пространств сводится тем самым к классификации всех, с точностью до перехода к сопряженной, подгрупп данной группы.

Для тех однородных пространств, которые рассматриваются в этой книге, стационарные подгруппы не дискретны. Случай дискретной стационарной подгруппы также представляет значительный интерес. Изучение представлений, связанных с пространствами с дискретной стационарной подгруппой, приводит к теории автоморфных функций (см., например, И. М. Гельфанд и И. И. Пятецкий-Шапиро [28], И. М. Гельфанд и С. В. Фомин [29], Годман [4]). Однако этого случая мы касаться не будем.

5. Примеры однородных пространств, связанных с группой Лоренца. В этой главе будут рассмотрены однородные пространства, для которых группой движений является группа Лоренца, то есть группа комплексных матриц второго порядка $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ с определителем $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Приведем некоторые примеры таких пространств.

Рассмотрим комплексную плоскость, то есть пространство пар (z_1, z_2) комплексных чисел. Исключим из этой плоскости точку (0, 0) *) и сопоставим каждому элементу $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, группы Лоренца аффинное преобразование

$$(z_1, z_2) \to (\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2). \qquad (1)$$

Легко убедиться, что комплексная плоскость (с исключенной точкой (0, 0)) является однородным пространством относительно группы Лоренца. Будем называть это пространство *комплексной аффинной плоскостью.*

Найдем стационарную подгруппу комплексной аффинной плоскости. Зафиксируем на плоскости точку (0,1). Ясно, что совокупность преобразований аффинной плоскости

$$(z_1, z_2) \to (\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2),$$

оставляющих на месте точку (0, 1), состоит из матриц вида $\begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Таким образом, *стационарная подгруппа комплексной аффинной плоскости есть группа матриц вида* $\begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Рассмотрим теперь пространство, элементами которого являются прямые комплексной аффинной плоскости, проходящие через начало координат. При аффинных преобразованиях плоскости эти прямые переходят друг в друга. Таким образом, комплексные прямые на плоскости, проходящие через начало координат, сами образуют однородное пространство относительно группы Лоренца. Это пространство назовем *комплексной проективной прямой.*

Заметим, что каждая прямая $z_1 = kz_2$ на комплексной плоскости, проходящая через начало координат, задается своим угловым коэффициентом k (при этом прямой $z_2 = 0$ отвечает угловой коэффициент $k = \infty$). Тем самым комплексную проективную прямую можно реализовать и как совокупность всех комплексных чисел, к которой добавлена бесконечно удаленная точка. Движениями являются здесь дробно-линейные преобразования

$$z' = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}. \qquad (2)$$

Найдем стационарную подгруппу комплексной проективной прямой. Зафиксируем на прямой точку $z = 0$. Очевидно, что дробно-линейные преобразования прямой, оставляющие эту точку на месте, имеют вид

$$z' = \frac{\alpha z}{\beta z + \delta}.$$

Следовательно, *стационарная подгруппа комплексной проективной прямой* есть группа матриц вида $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{Vmatrix}$.

Рассмотрим далее пространство, состоящее из *пар точек* (z_1, z_2), $z_1 \neq z_2$, комплексной проективной прямой. Каждой матрице $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ сопоставим преобразование

$$(z_1, z_2) \to \left(\frac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta}, \frac{\alpha z_2 + \gamma}{\beta z_2 + \delta}\right). \qquad (3)$$

Это пространство пар также однородно *).

Легко убедиться, что стационарная подгруппа пространства пар (z_1, z_2) точек проективной прямой есть группа диагональных матриц $\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{Vmatrix}$ (если в пространстве зафиксировать точку $(0, \infty)$).

Другими важными примерами однородных пространств, связанных с группой Лоренца, являются трехмерное пространство Лобачевского, трехмерное мнимое пространство Лобачевского и изотропный конус. Все эти пространства были определены в главе III, а в главе V были указаны их различные реализации.

*) Точку (0, 0) мы исключили, чтобы добиться транзитивности.

*) Если бы мы не наложили требования $z_1 \neq z_2$, то получившееся пространство не было бы однородным — оно распадалось бы на две однородные компоненты — пространство пар (z_1, z_2), где $z_1 \neq z_2$, и пространство пар (z, z), изоморфное комплексной проективной прямой.

Напомним, как строятся эти пространства. Пространство Лобачевского может быть реализовано как совокупность всех положительно определенных эрмитовых матриц

$$h = \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix}$$

с определителем $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$. Каждой матрице $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, сопоставляется движение в пространстве Лобачевского, которое переводит эрмитову матрицу h в матрицу

$$h' = g^*hg. \tag{4}$$

Аналогично, мнимое пространство Лобачевского состоит из всех эрмитовых матриц h с определителем $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -1$. При этом матрицы h и $-h$ предполагаются отождествленными.

Наконец, изотропный конус состоит из всех эрмитовых матриц $h \geqslant 0$ с определителем $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Движения в мнимом пространстве Лобачевского и на изотропном конусе определяются так же, как и в пространстве Лобачевского.

Другую реализацию этих пространств мы получим, сопоставив каждой эрмитовой матрице $h = \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix}$ точку $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ четырехмерного пространства E_4. Тогда пространство Лобачевского реализуется как верхняя пола двуполостного гиперболоида

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \qquad x_0 > 0.$$

Мнимое пространство Лобачевского реализуется как поверхность однополостного гиперболоида

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -1,$$

на которой отождествлены диаметрально противоположные точки x и $-x$. Наконец, изотропный конус состоит из точек верхней полы конуса

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0, \qquad x_0 > 0.$$

Движения в этих пространствах индуцируются гиперболическими вращениями пространства E_4, то есть линейными преобразованиями с определителем 1, сохраняющими форму $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ и переводящими в себя каждую полу изотропного конуса.

Теперь найдем стационарные подгруппы для пространства Лобачевского и конуса. Реализуем эти пространства как пространства эрмитовых матриц. В пространстве Лобачевского зафиксируем матрицу $e = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Подгруппа движений пространства Лобачевского, оставляющих на месте матрицу e, состоит из матриц g, удовлетворяющих условию

$$g^*g = e,$$

то есть из унитарных матриц. Итак, *стационарная подгруппа пространства Лобачевского есть группа унитарных матриц*

$$u = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{Vmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

В мнимом пространстве Лобачевского зафиксируем матрицу $\sigma = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$. Подгруппа движений мнимого пространства Лобачевского, оставляющих на месте матрицу σ, состоит из всех матриц g, удовлетворяющих условию

$$g^*\sigma g = \pm\sigma$$

(мы пишем $\pm\sigma$, поскольку матрицы σ и $-\sigma$ предполагаются отождествленными).

Отсюда получаем непосредственно, что *стационарная подгруппа мнимого пространства Лобачевского есть подгруппа матриц вида* $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} \beta & \alpha \\ -\bar{\alpha} & -\bar{\beta} \end{Vmatrix}$, где $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ *).

*) Нетрудно убедиться, что связная компонента единицы в этой стационарной подгруппе, то есть подгруппа матриц $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{Vmatrix}$, где $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, изоморфна подгруппе *вещественных матриц*.

Наконец, на конусе мы зафиксируем матрицу $h_0=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$. Легко убедиться, что подгруппа движений, оставляющих на месте матрицу h_0, состоит из матриц вида $\begin{Vmatrix}e^{-i\varphi} & 0\\ \zeta & e^{i\varphi}\end{Vmatrix}$. Итак, *стационарная подгруппа конуса есть группа матриц вида* $\begin{Vmatrix}e^{-i\varphi} & 0\\ \zeta & e^{i\varphi}\end{Vmatrix}$.

Приведем еще один пример однородного пространства, связанного с группой Лоренца, элементами которого являются уже не точки, а прямые.

Именно, рассмотрим мнимое пространство Лобачевского, реализованное как поверхность однополостного гиперболоида

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=-1$$

в четырехмерном пространстве. Возьмем все прямолинейные образующие этой поверхности (то есть изотропные прямые мнимого пространства Лобачевского). Легко убедиться, что движениями в мнимом пространстве Лобачевского можно каждую из этих прямых перевести в любую другую. Таким образом прямолинейные образующие поверхности

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=-1$$

сами образуют однородное пространство относительно группы Лоренца.

Найдем стационарную подгруппу этого пространства. Для этого реализуем мнимое пространство Лобачевского как совокупность эрмитовых матриц с определителем -1. Изотропной прямой в этой реализации служит любая совокупность таких матриц h, элементы которых — линейные функции вещественного параметра t.

Зафиксируем изотропную прямую

$$h_t=\begin{Vmatrix}t & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix},\quad -\infty<t<\infty.$$

Найдем движения в мнимом пространстве Лобачевского, которые оставляют эту прямую на месте. Эти движения задаются такими матрицами g, что для любого t

$$g^*h_tg=\pm h_{t'},\quad -\infty<t'<+\infty.$$

Легко убедиться, что матрицы g, удовлетворяющие этому условию, имеют вид $\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ \zeta & \lambda^{-1}\end{Vmatrix}$, где $\lambda\neq 0$ — вещественное или чисто мнимое число.

Итак, *стационарная группа пространства всех изотропных прямых мнимого пространства Лобачевского есть группа матриц вида* $\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ \zeta & \lambda^{-1}\end{Vmatrix}$, *где λ—вещественное или чисто мнимое число.* Поскольку эта подгруппа имеет вещественную размерность 3, а размерность группы Лоренца 6, то, следовательно, *размерность пространства изотропных прямых мнимого пространства Лобачевского есть* $6-3=3$.

В таблице на стр. 450—451 даны основные сведения о рассмотренных выше однородных пространствах, связанных с группой Лоренца.

6. Теоретико-групповое определение орисфер. Рассмотрим теперь понятие орисферы не только с геометрической, но и с групповой точки зрения. Такой подход имеет ряд преимуществ перед геометрическим. Дело в том, что, в то время как при геометрическом подходе орисферы естественным образом определяются в однородных пространствах, снабженных римановой (или псевдоримановой) метрикой, групповое определение годится и для других однородных пространств *).

Мы изложим групповое определение орисфер на примере группы комплексных унимодулярных матриц второго порядка. Как было показано в главе III, эта группа изоморфна

*) Правда, геометрическое определение орисфер (его лучше всего дать исходя из ортогональных траекторий для пучков параллельных геодезических линий) можно перенести и на ряд неоднородных пространств, во всяком случае — на римановы пространства переменной кривизны. При этом можно рассматривать для таких пространств соответствующие задачи интегральной геометрии. Было бы интересно решить задачу, аналогичную рассмотренной в § 2 гл. V, для двумерного риманова многообразия переменной кривизны, такого, что его кривизна заключена между двумя константами. Несомненно, интересны такие задачи и для пространств более высокой размерности.

	Название	Элементы	Преобразования, соответствующие матрице $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$	Стационарная подгруппа
1	Комплексная аффинная плоскость	Пары комплексных чисел (z_1, z_2), где $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$	$(z_1, z_2) \to (\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$	Матрицы вида $\begin{Vmatrix}1 & \zeta \\ 0 & 1\end{Vmatrix}$
2	Комплексная проективная прямая	Комплексные числа z, к которым добавлена бесконечно удаленная точка	$z \to \dfrac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}$	Матрицы вида $\begin{Vmatrix}\alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1}\end{Vmatrix}$
3	Пространство пар точек комплексной проективной прямой	Пары вида (z_1, z_2), где z_1 и z_2 — точки комплексной проективной прямой, $z_1 \neq z_2$	$(z_1, z_2) \to \left(\dfrac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta}, \dfrac{\alpha z_2 + \gamma}{\beta z_2 + \delta}\right)$	Матрицы вида $\begin{Vmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}\end{Vmatrix}$
4 [1]	Трехмерное пространство Лобачевского	Положительно определенные эрмитовы матрицы h с определителем 1	$h \to g^* hg$	Унитарные матрицы $\begin{Vmatrix}\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{Vmatrix}$, $\lvert\alpha\rvert^2 + \lvert\beta\rvert^2 = 1$
5 [1]	Трехмерное мнимое пространство Лобачевского	Эрмитовы матрицы h с определителем -1, причем матрицы h и $-h$ отождествлены	$h \to g^* hg$	Матрицы вида $\begin{Vmatrix}\alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix}\beta & \alpha \\ -\bar{\alpha} & -\bar{\beta}\end{Vmatrix}$, $\lvert\alpha\rvert^2 - \lvert\beta\rvert^2 = 1$
6 [1]	Конус	Эрмитовы матрицы h с нулевым определителем, причем матрицы h и $-h$ отождествлены	$h \to g^* hg$	Матрицы вида $\begin{Vmatrix}e^{-i\varphi} & 0 \\ \zeta & e^{i\varphi}\end{Vmatrix}$
7	Пространство изотропных прямых трехмерного мнимого пространства Лобачевского	Совокупности l эрмитовых матриц h с определителем -1, элементы которых являются линейными функциями вещественного переменного t	$l \to g^* lg$	Матрицы вида $\begin{Vmatrix}\lambda & 0 \\ \zeta & \lambda^{-1}\end{Vmatrix}$, где λ — вещественное или чисто мнимое число

[1]) Эти пространства допускают также реализацию в виде поверхностей в четырехмерном линейном пространстве, а именно: пространство Лобачевского реализуется на верхней поле гиперболоида $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$; мнимое пространство Лобачевского — на гиперболоиде $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -1$ с отождествленными диаметрально противоположными точками; а конус — на верхней поле конуса $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. Движениями при такой реализации являются гиперболические вращения в E_4.

группе Лоренца. Пусть X — однородное пространство, связанное с этой группой. Мы определим сейчас понятие орисферы в пространстве X, совпадающее для случая, когда X — пространство Лобачевского или мнимое пространство Лобачевского с геометрическим понятием, введенным в § 1 главы V.

Орисферой в однородном пространстве X, связанном с группой комплексных унимодулярных матриц второго порядка, называется орбита любой точки x этого пространства при действии на нее преобразований, соответствующих элементам подгруппы Z матриц вида $\begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ или некоторой сопряженной с ней подгруппы.

Из этого определения следует, что всякое транзитивное семейство орисфер имеет в качестве стационарной подгруппы подгруппу Z или некоторое ее расширение. Значит, такое семейство является однородным пространством весьма простой структуры — оно изоморфно комплексной аффинной плоскости или некоторому ее «сужению».

Как мы видим, орисфера ω задается точкой x пространства X и элементом g группы Лоренца и состоит из всех элементов вида $xg^{-1}\zeta g$, где ζ пробегает подгруппу Z.

Пусть орисфера ω задается точкой x и элементом g группы Лоренца. Обозначим через y элемент xg^{-1}. Тогда все точки орисферы ω записываются в виде $y\zeta g$. В дальнейшем мы будем использовать обычно эту запись элементов орисферы.

Данное здесь групповое определение орисфер в однородных пространствах, связанных с группой Лоренца, совпадает с данным в § 1 главы V геометрическим определением для случаев, когда X — трехмерное пространство Лобачевского или трехмерное мнимое пространство Лобачевского. Докажем это сначала для пространства Лобачевского.

Реализуем пространство Лобачевского с помощью эрмитовых матриц и рассмотрим в нем орисферу ω (в групповом смысле), задаваемую эрмитовой матрицей y и единичным элементом группы Лоренца. Эта орисфера состоит из точек x вида $x = y\zeta$, где ζ пробегает подгруппу Z. Поскольку при выбранной реализации движениями являются преобразования вида $y \to g^*yg$, орисфера ω состоит из эрмитовых матриц вида

$$x = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\zeta} & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Легко видеть, что все эти матрицы имеют один и тот же левый верхний элемент, то есть для них $x_{11} = C$. Запишем это уравнение при реализации пространства Лобачевского на гиперболоиде $[x, x] = 1$. Если $x = x(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — точка гиперболоида, соответствующая матрице $x = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{Vmatrix}$, то $x_0 - x_3 = x_{11}$. Поэтому для всех точек $x(x_0, x_1, x_2, x_3)$, лежащих на орисфере ω, имеем $x_0 - x_3 = C$, то есть $[x, \xi] = C$, где $\xi = (1, 0, 0, 1)$. Так как точка ξ лежит на конусе $[\xi, \xi] = 0$, то уравнение $[x, \xi] = C$ является уравнением орисферы в геометрическом смысле.

Таким образом, орисфера ω, задаваемая единичным элементом группы Лоренца, является орисферой в геометрическом смысле. Но любая орисфера, задаваемая каким-нибудь другим элементом g группы Лоренца, может быть получена движением из орисферы, задаваемой единичным элементом. Поэтому все орисферы трехмерного пространства Лобачевского в групповом смысле являются орисферами в геометрическом смысле. Обратное утверждение непосредственно вытекает из транзитивности множества орисфер в геометрическом смысле.

Итак, *для трехмерного пространства Лобачевского групповое определение орисфер совпадает с данным в главе V геометрическим определением.*

Рассмотрим теперь мнимое пространство Лобачевского. Рассуждая точно так же, как и выше, убеждаемся, что орисферы, состоящие из точек $y\zeta$, где y — эрмитова матрица с ненулевым элементом y_{11}, являются орисферами первого рода в геометрическом смысле. Пусть теперь y — эрмитова матрица вида

$$y = \begin{Vmatrix} 0 & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix}.$$

При преобразовании $x \to \zeta^* y \zeta$, где $\zeta = \begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, она переходит в матрицу

$$\begin{Vmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\zeta} & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

такую, что $x_{12}=y_{12}$. Таким образом, орисфера ω, задаваемая точкой $y=\begin{Vmatrix} 0 & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix}$ мнимого пространства Лобачевского и единичным элементом группы Лоренца, состоит из матриц x, для которых $x_{11}=0$, $x_{12}=C$ ($|C|=1$).

Реализуем теперь мнимое пространство Лобачевского на гиперболоиде $[x, x]=-1$. Точке $x(x_0, x_1, x_2, x_3)$ этого пространства соответствует при этом эрмитова матрица $x=\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{Vmatrix}$, такая, что $x_{12}=x_2-ix_1$. Поэтому уравнение $x_{12}=C$ принимает при этой реализации вид $x_2-ix_1=C$, то есть $x_1=C_1$, $x_2=C_2$. Итак, орисфера ω, задаваемая эрмитовой матрицей $y=\begin{Vmatrix} 0 & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix}$ и единичным элементом группы Лоренца, изображается прямолинейной образующей гиперболоида $[x, x]=-1$, задаваемой уравнениями $x_0=x_3$, $x_1=C_1$, $x_2=C_2$ $(C_1^2+C_2^2=1)$. Иными словами, она является изотропной прямой в мнимом пространстве Лобачевского.

Поскольку орисфера вида $\{y\zeta g\}$, где $y=\begin{Vmatrix} 0 & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix}$, является сдвигом орисферы $\{y\zeta\}$, все такие орисферы изображаются изотропными прямыми. Таким образом, мы доказали, что орисферы (в групповом смысле) мнимого пространства Лобачевского распадаются на два класса. Если орисфера ω задается эрмитовой матрицей y, для которой $y_{11}\neq 0$, то она является двумерным многообразием — орисферой первого рода в геометрическом смысле. Орисферы же, задаваемые эрмитовыми матрицами вида $y=\begin{Vmatrix} 0 & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix}$, являются изотропными прямыми. Тем самым доказано совпадение группового определения орисфер с геометрическим и для трехмерного мнимого пространства Лобачевского *).

Рассмотрим в заключение орисферы (в групповом смысле) в пространстве пар (z_1, z_2), $z_1\neq z_2$, точек комплексной проективной прямой.

*) Теперь становится понятным, почему в случае мнимого пространства Лобачевского мы назвали орисферой второго рода не изотропную плоскость $[x, \xi]=0$, а прямые, на которые она расслаивается.

Рассмотрим сначала орисферы ω_0 вида $\{yz\}$, где $y=(y_1, y_2)$ — некоторый элемент пространства пар, а z пробегает подгруппу Z матриц вида $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{Vmatrix}$ (эта подгруппа сопряжена с подгруппой Z, так как

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}).$$

Так как движениями в пространстве пар являются преобразования

$$(z_1, z_2)\to\left(\frac{\alpha z_1+\gamma}{\beta z_1+\delta}, \frac{\alpha z_2+\gamma}{\beta z_2+\delta}\right),$$

то орисфера ω_0 состоит из пар вида $(z_1, z_2)=(y_1+z, y_2+z)$. Уравнение такой орисферы записывается следующим образом:

$$z_1-z_2=C, \tag{1}$$

где $C\neq 0$, так как $z_1\neq z_2$.

Возьмем теперь любую орисферу ω. Пусть эта орисфера состоит из точек вида yzg, где g — любой элемент группы Лоренца, то есть комплексная матрица $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ с определителем, равным единице. Эта орисфера получается из орисферы $\omega_0=\{yz\}$ движением g в пространстве пар (z_1, z_2). Поэтому, чтобы найти ее уравнение, надо выразить z_1 и z_2 из соотношений

$$z_1'=\frac{\alpha z_1+\gamma}{\beta z_1+\delta}, \quad z_2'=\frac{\alpha z_2+\gamma}{\beta z_2+\delta}, \tag{2}$$

подставить в уравнение (1) и отбросить штрихи. После простых преобразований получаем уравнение вида

$$z_1-z_2=(a-bz_1)(a-bz_2), \tag{3}$$

где a и b — комплексные числа, зависящие от элементов матрицы g и числа C, $(a, b)\neq(0, 0)$.

Итак, мы доказали, что каждая орисфера ω в пространстве пар (z_1, z_2) точек комплексной проективной прямой задается уравнением (3). Таким образом, она однозначно определяется заданием пары комплексных чисел (a, b), причем пары (a, b) и $(-a, -b)$ задают одну и ту же орисферу.

Найдем теперь, как преобразуется пара чисел (a, b), задающая орисферу, при движениях g, то есть при преобразованиях вида (2). Для этого заменим в уравнении (3) z_1 и z_2 их выражениями через z'_1, z'_2 и затем отбросим штрихи. Мы получим после простых преобразований

$$z_1 - z_2 = [(\alpha a + \gamma b) - (\beta a + \delta b) z_1] \cdot [(\alpha a + \gamma b) - (\beta a + \delta b) z_2].$$

Таким образом, параметры a, b, задающие орисферу, преобразуются при движении g по тем же формулам

$$\begin{aligned} a' &= \alpha a + \gamma b, \\ b' &= \beta a + \delta b, \end{aligned} \tag{4}$$

по которым преобразуются точки комплексной аффинной плоскости.

Итак, мы доказали, что *пространство орисфер в пространстве пар* (z_1, z_2), $z_1 \neq z_2$, *точек комплексной проективной прямой совпадает с комплексной аффинной плоскостью, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки.*

Данное здесь групповое определение орисфер без труда переносится на группу G комплексных матриц любого порядка с определителем, равным единице. Именно, пусть X — однородное пространство, в котором действует эта группа. Орисферой в X называется совокупность точек вида $y\zeta g$, где y — некоторая точка пространства X, g — элемент группы G, а ζ пробегает подгруппу Z матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & \zeta_{12} & \ldots & \zeta_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \zeta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

или (вырожденный случай) какую-нибудь подгруппу клеточных матриц, в диагональных клетках которых стоят единичные матрицы, а в клетках под диагональю — нулевые.

При переходе к любой комплексной полупростой группе Ли G вместо подгруппы матриц вида (5) надо взять любую

максимальную нильпотентную подгруппу группы G *) (для группы комплексных унимодулярных матриц порядка n максимальной нильпотентной подгруппой и является подгруппа Z матриц вида (5)). Подгруппы же клеточных треугольных матриц (вырожденный случай) заменяются некоторыми немаксимальными нильпотентными подгруппами (их точного описания, даваемого в терминах корневых векторов, мы приводить не будем).

Дадим другое определение орисферы, годное уже для произвольной группы Ли G. Пусть $g(t)$ — однопараметрическая подгруппа в G. Назовем *орисферической подгруппой*, связанной с $g(t)$, совокупность элементов ζ из G таких, что $\lim\limits_{t \to +\infty} g(-t)\zeta g(t) = e$ (e — единица группы). *Орисферами* в однородном пространстве назовем траектории, порождаемые орисферическими подгруппами.

В случае комплексной полупростой группы Ли орисферическими являются все максимальные нильпотентные подгруппы, а также (вырожденный случай) некоторые немаксимальные. Таким образом, для комплексных полупростых групп Ли данное определение совпадает с предыдущим.

7. Разложение функций на однородных пространствах в интеграл Фурье. Основной целью этой главы является разложение некоторых пространств функций, заданных на однородных пространствах, на неприводимые подпространства, инвариантные относительно движений. Это разложение является аналогом разложения пространства функций $f(x)$ на прямой линии на одномерные подпространства, инвариантные при сдвигах. В случае прямой линии такое разложение дается интегралом Фурье. Поэтому разложения, которые будут получены в этой главе, являются разложениями в интеграл Фурье на однородных пространствах.

Мы сформулируем здесь основные результаты, которые будут получены в дальнейшем.

---

*) Пусть G — некоторая группа. Определим в ней множества G_k, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, следующим образом: положим $G_0 = e$, где e — единица группы; если уже определено множество G_k, то через G_{k+1} обозначим множество элементов s группы G, таких, что для любого элемента t из G элемент $s^{-1}t^{-1}st$ принадлежит G_k. Группа G называется *нильпотентной*, если найдется такое n, что G совпадает с G_n.

Начнем с пространства функций $f(z_1, z_2)$, заданных на комплексной аффинной плоскости. Сопоставим каждой функции $f(z_1, z_2)$ с интегрируемым квадратом однородные функции $F(z_1, z_2; \rho, n)$, определяемые формулой

$$F(z_1, z_2; \rho, n) = \frac{i}{2}\int f(\lambda z_1, \lambda z_2)\lambda^{-n_1}\bar{\lambda}^{-n_2}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}, \tag{1}$$

где $n_1 = \frac{n+i\rho}{2}$, $n_2 = \frac{-n+i\rho}{2}$ (n — целое, ρ — вещественное). При сдвигах

$$T(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$$

функции $F(z_1, z_2; \rho, n)$ преобразуются по унитарному неприводимому представлению основной серии

$$T_\chi(g) F(z_1, z_2; \rho, n) = F(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2; \rho, n), \tag{2}$$

где $\chi = (n_1, n_2)$. Функция $f(z_1, z_2)$ выражается через «компоненты Фурье» *) $F(z_1, z_2; \rho, n)$ по формуле

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(z_1, z_2; \rho, n)\,d\rho. \tag{3}$$

При этом имеет место аналог формулы Планшереля (см. формулу (10) из п. 1 § 2).

Рассмотрим теперь функции $f(x)$ на конусе $[x, x] = 0$. В этом случае компоненты Фурье задаются формулами

$$F(x; \rho) = \int_0^\infty f(tx)\,t^{-\frac{i\rho}{2}}\,dt, \tag{4}$$

а разложение функции $f(x)$ по этим компонентам — формулой

$$f(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x; \rho)\,d\rho. \tag{5}$$

При сдвиге $f(x) \to f(xg)$ функции на конусе ее компоненты Фурье $F(x; \rho)$ преобразуются по представлениям

$$T_\chi(g) F(x; \rho) = F(xg; \rho), \tag{6}$$

*) Функции $F(z_1, z_2; \rho, n)$ аналогичны отдельным членам $a_n e^{in\varphi}$ ряда Фурье. Поэтому мы и называем их компонентами Фурье функции $f(z_1, z_2)$.

эквивалентным неприводимым унитарным представлениям основной серии, для которых $\chi = \left(\frac{i\rho}{2}, -\frac{i\rho}{2}\right)$.

Напишем теперь формулу разложения в интеграл Фурье для функции $f(x)$, заданной на пространстве Лобачевского. Реализуем это пространство на гиперболоиде $[x, x] = 1$. Тогда компонентами Фурье функции $f(x)$ являются функции $F(\xi; \rho)$, заданные на конусе $[\xi, \xi] = 0$ и определяемые равенствами

$$F(\xi; \rho) = \int f(y)[y, \xi]^{\frac{i\rho}{2}-1}\,dy. \tag{7}$$

Эти функции однородны по ξ и имеют степень однородности $\frac{i\rho}{2} - 1$. При сдвиге $f(x) \to f(xg)$ функции $f(x)$ ее компоненты Фурье преобразуются по представлениям

$$T_\chi(g) F(\xi; \rho) = F(\xi g; \rho), \tag{8}$$

которые эквивалентны неприводимым унитарным представлениям основной серии с $\chi = \left(\frac{i\rho}{2}, \frac{i\rho}{2}\right)$.

Функция $f(x)$ выражается через свои компоненты Фурье $F(\xi; \rho)$ по формуле

$$f(x) = \frac{1}{64\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int F(\xi; \rho)\,\delta([x, \xi] - 1)\,d\xi. \tag{9}$$

Замечательно, что формуле (7) можно придать другой вид, аналогичный формуле преобразования Фурье функции $f(x)$ в n-мерном евклидовом пространстве. Именно, так как $[y, \xi] = e^{k\tau(y, \xi)}$, где $\tau(y, \xi)$ — расстояние от точки y до орисферы $[x, \xi] = 1$ (см. п. 2 § 2 главы V), то

$$F(\xi; \rho) = \int f(y)\,e^{\left(\frac{i\rho}{2}-1\right)k\tau(y, \xi)}\,dy. \tag{10}$$

Компоненты Фурье функции $f(x)$ в n-мерном евклидовом пространстве можно записать в виде

$$F(\xi) = \int f(y)\,e^{i|\xi|\tau(y, \xi)}\,dy, \tag{11}$$

где

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad (x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n,$$
$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2},$$

а $\tau(y, \xi)$ — расстояние от точки y до плоскости $(x, \xi)=0$. Очевидно сходство формулы (10) с формулой (11) (см. также стр. 475).

Наконец, рассмотрим мнимое пространство Лобачевского. В этом пространстве существуют два вида компонент Фурье. При реализации мнимого пространства Лобачевского на гиперболоиде $[x, x]=-1$ компоненты Фурье первого рода являются функциями на конусе $[\xi, \xi]=0$. Они задаются формулами

$$F(\xi; \rho)=\int f(y)\,|[y, \xi]|^{\frac{i\rho}{2}-1}\,dy, \tag{12}$$

где dy — инвариантная мера в мнимом пространстве Лобачевского. Компоненты же второго рода являются функциями на множестве прямолинейных образующих l гиперболоида $[x, x]=-1$. Они задаются формулами

$$F(l; 2n)=\int f(y)\,\delta([y, \xi])\,e^{-2in\theta}\,dy. \tag{13}$$

Здесь ξ — направляющий вектор прямой l, нормированный так, что $\xi=(1, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $\theta=-ikr$, где r — расстояние в мнимом пространстве Лобачевского от точки y до изотропной прямой l.

При сдвигах $f(x)\to f(xg)$ компоненты Фурье $F(\xi, \rho)$ преобразуются по неприводимым унитарным представлениям

$$T_\chi(g)\,F(\xi; \rho)=F(\xi g; \rho). \tag{14}$$

Эти представления эквивалентны неприводимым унитарным представлениям группы Лоренца, для которых $\chi=\left(\frac{i\rho}{2}, \frac{i\rho}{2}\right)$. Компоненты же $F(l; 2n)$ преобразуются по представлениям, эквивалентным представлениям $T_\chi(g)$, $\chi=(2n, 2n)$.

Функция $f(x)$ на мнимом пространстве Лобачевского выражается через компоненты Фурье $F(\xi; \rho)$ и $F(l; 2n)$ по формуле

$$f(x)=\frac{1}{128\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Omega F(\eta; \rho)\,|[x, \eta]|^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\sigma+$$
$$+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty n\int_\Omega F(l; 2n)\,e^{2in\theta}\,\delta([x, \eta])\,d\sigma,$$

точный смысл всех обозначений см. в пп. 4 и 5 § 4 этой главы.

Заметим, что и в случае мнимого пространства Лобачевского можно придать формулам преобразования Фурье вид, аналогичный формуле преобразования Фурье в евклидовом пространстве.

§ 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА, СВЯЗАННЫЕ С КОМПЛЕКСНОЙ АФФИННОЙ ПЛОСКОСТЬЮ И С КОНУСОМ И ИХ РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1. Унитарное представлеиие группы Лоренца, связанное с комплексной аффинной плоскостью. Мы уже отмечали в п. 3 § 1, что разложение любого представления группы Лоренца G, связанного с однородным пространством, можно свести к разложению представления, связанного с комплексной аффинной плоскостью или с некоторым ее «сужением».

В этом параграфе будет показано, как разложить представление, связанное с комплексной аффинной плоскостью, на неприводимые представления.

Для простоты рассмотрим унитарное представление группы G. Это представление реализуется в гильбертовом пространстве H функций $f(z_1, z_2)$ двух комплексных переменных, для которых сходится интеграл

$$\|f\|^2=\left(\frac{i}{2}\right)^2\int |f(z_1, z_2)|^2\,dz_1\,d\bar{z}_1\,dz_2\,d\bar{z}_2. \tag{1}$$

Представление состоит в том, что каждому элементу $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$ группы Лоренца сопоставляется оператор $T(g)$, определяемый формулой

$$T(g)\,f(z_1, z_2)=f(\alpha z_1+\gamma z_2, \beta z_1+\delta z_2). \tag{2}$$

Очевидно, что $T(g_1g_2)=T(g_1)\,T(g_2)$, то есть операторы $T(g)$ действительно образуют представление группы G. Это представление унитарно, поскольку преобразование

$$(z_1, z_2)\to(\alpha z_1+\gamma z_2, \beta z_1+\delta z_2), \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

не меняет элемента объема комплексной аффинной плоскости.

Неприводимые представления группы Лоренца задаются той же формулой

$$T_\chi(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2), \tag{3}$$

но они строятся в пространствах D_χ однородных функций. Поэтому разложение унитарного представления $T(g)$ группы Лоренца, определяемого формулой (2), сводится к разложению функций $f(z_1, z_2)$ из пространства H на однородные компоненты.

Найдем эти однородные компоненты функции $f(z_1, z_2)$. Пусть $f(z_1, z_2)$ — финитная функция на аффинной плоскости, равная нулю в некоторой окрестности начала координат. Сопоставим функции $f(z_1, z_2)$ однородную функцию $F(z_1, z_2; \chi)$, где $\chi = (n_1, n_2)$ — пара комплексных чисел, разность которых равна целому числу. Эту функцию $F(z_1, z_2; \chi)$ определим следующей формулой:

$$F(z_1, z_2; \chi) = \frac{i}{2}\int f(\lambda z_1, \lambda z_2)\lambda^{-n_1}\bar\lambda^{-n_2}\, d\lambda\, d\bar\lambda. \tag{4}$$

Очевидно, что в силу сделанного предположения о функции f интеграл (4) сходится для любых n_1, n_2. Будем называть функцию F *преобразованием Меллина* функции $f(z_1, z_2)$. Из определения получаем непосредственно следующие свойства функции $F(z_1, z_2; \chi)$:

1) *Функция F однородна относительно z_1, z_2 степени однородности* $(n_1 - 1, n_2 - 1)$. Это значит, что для любого $a \neq 0$ имеем

$$F(az_1, az_2; \chi) = a^{n_1-1}\bar a^{n_2-1} F(z_1, z_2; \chi). \tag{5}$$

2) *При переходе от функции $f(z_1, z_2)$ к функции*

$$T(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$$

функция $F(z_1, z_2; \chi)$ преобразуется в функцию

$$T_\chi(g) F(z_1, z_2; \chi) = F(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2; \chi). \tag{6}$$

Найдем разложение функции $f(z_1, z_2)$ по однородным функциям $F(z_1, z_2; \chi)$. В это разложение войдут не все функции $F(z_1, z_2; \chi)$, а только те, у которых $\chi = \left(\frac{n+i\rho}{2}, \frac{-n+i\rho}{2}\right)$, где n — целое число, а ρ — любое вещественное число. Напомним, что этим значениям χ отвечают неприводимые

унитарные представления группы G, принадлежащие основной серии.

Сведем преобразование Меллина (4) к обычному преобразованию Фурье. Для этого положим в формуле (4)

$$\lambda = e^{\sigma + i\tau}, \quad n_1 = \frac{n+i\rho}{2}, \quad n_2 = \frac{-n+i\rho}{2}.$$

Мы получим

$$F(z_1, z_2; \rho, n) \equiv F(z_1, z_2; \chi) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} f(e^{\sigma+i\tau}z_1, e^{\sigma+i\tau}z_2)\, e^{-i(\rho\sigma+n\tau)+2\sigma}\, d\tau\, d\sigma. \tag{7}$$

Мы видим, что функция $F(z_1, z_2; \rho, n)$ является преобразованием Фурье (по σ и τ) функции

$$e^{2\sigma} f(e^{\sigma+i\tau}z_1, e^{\sigma+i\tau}z_2).$$

Отсюда по формуле обращения для преобразования Фурье получаем

$$e^{2\sigma} f(e^{\sigma+i\tau}z_1, e^{\sigma+i\tau}z_2) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(z_1, z_2; \rho, n)\, e^{i(\rho\sigma+n\tau)}\, d\rho.$$

Положив в этом равенстве $\sigma = \tau = 0$, получим, что *функция $f(z_1, z_2)$ выражается через свое преобразование Меллина следующей формулой*:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(z_1, z_2; \rho, n)\, d\rho. \tag{8}$$

Мы видим, что в разложение функции $f(z_1, z_2)$ входят только те функции $F(z_1, z_2; \chi)$, которые преобразуются по представлениям основной серии.

Докажем, что формулы (4) и (8) задают разложение унитарного представления $T(g)$ на неприводимые представления. Для этого нужно получить аналог формулы Планшереля. Иными словами, надо доказать, что при соответствующем определении скалярных произведений в пространствах функций $F(z_1, z_2; \rho, n)$ и меры $d\mu(\rho, n)$ выполняется равенство вида

$$\|f\|^2 = \int \|F(z_1, z_2; \rho, n)\|_\chi^2 \, d\mu(\rho, n). \tag{9}$$

Применим к преобразованию Фурье (7) обычное равенство Планшереля. Мы получим

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(e^{\sigma+i\tau}z, e^{\sigma+i\tau})|^2 e^{4\sigma} \, d\sigma \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(z, 1; \rho, n)|^2 \, d\rho.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по z и $\bar{z}$ и сделаем подстановку $e^{\sigma+i\tau}z = z_1$, $e^{\sigma+i\tau} = z_2$. В результате получим следующее равенство:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |f(z_1, z_2)|^2 \, dz_1 \, d\bar{z}_1 \, dz_2 \, d\bar{z}_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int |F(z, 1; \rho, n)|^2 \, dz \, d\bar{z}. \tag{10}$$

Это и есть искомый аналог формулы Планшереля. Если теперь в пространстве функций $F(z_1, z_2; \rho, n)$ ввести норму по формуле

$$\|F(z_1, z_2; \rho, n)\|_\chi^2 = \frac{i}{2} \int |F(z, 1; \rho, n)|^2 \, dz \, d\bar{z}, \tag{11}$$

а интегрирование по мере $d\mu(\rho, n)$ определить формулой

$$\int G(\rho, n) \, d\mu(\rho, n) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\rho, n) \, d\rho, \tag{12}$$

то равенство (10) принимает следующий вид:

$$\|f\|^2 = \int \|F(z_1, z_2; \rho, n)\|_\chi^2 \, d\mu(\rho, n). \tag{10'}$$

В силу формулы Планшереля отображение $f(z_1, z_2) \to F(z_1, z_2; \rho, n)$ изометрично относительно норм

$$\|f\|^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |f(z_1, z_2)|^2 \, dz_1 \, d\bar{z}_1' dz_2 \, d\bar{z}_2 \tag{13}$$

и

$$\|F\|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int |F(z, 1; \rho, n)|^2 \, dz \, d\bar{z}. \tag{14}$$

Мы определили это отображение пока только для финитных функций $f(z_1, z_2)$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. Однако поскольку такие функции образуют всюду плотное множество в пространстве H всех функций f с интегрируемым квадратом модуля, то отображение $f \to F$ можно продолжить на все пространство H.

Тем самым доказано, что *формулы*

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(z_1, z_2; \rho, n) \, d\rho \tag{15}$$

и

$$F(z_1, z_2; \rho, n) = \frac{i}{2} \int f(\lambda z_1, \lambda z_2) \lambda^{-n_1} \bar{\lambda}^{-n_2} \, d\lambda \, d\bar{\lambda}, \tag{16}$$

где $n_1 = \frac{n + i\rho}{2}$, $n_2 = \frac{-n + i\rho}{2}$, *определяют разложение унитарного представления*

$$T(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2) \tag{17}$$

группы Лоренца на неприводимые представления.

При этом *в разложение входят только неприводимые унитарные представления, принадлежащие основной серии.* Заметим, что каждое из представлений основной серии входит в это разложение дважды, поскольку представления T_χ, $\chi = (n_1, n_2)$ и $T_{-\chi}$, $-\chi = (-n_1, -n_2)$ эквивалентны.

2. Унитарное представление группы Лоренца, связанное с конусом. Теперь мы изучим представление группы Лоренца, связанное с другим однородным пространством, рассмотренным в § 1. Это пространство есть множество точек верхней полы конуса

$$[x, x] \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0, \qquad x_0 > 0, \tag{1}$$

в четырехмерном вещественном пространстве E_4. Движения в нем индуцируются линейными преобразованиями пространства E_4 с определителем 1, сохраняющими форму $[x, x]$ и переводящими в себя каждую полу конуса (1). Для краткости мы называем это однородное пространство *конусом*.

Покажем, что *конус можно получить «сужением» комплексной аффинной плоскости. Именно, если на комплексной аффинной плоскости отождествить между собой все точки вида* $(e^{i\varphi}z_1, e^{i\varphi}z_2)$, *где* $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, *то мы получим однородное пространство, тождественное конусу*.

Для доказательства отнесем каждой точке $x(x_0, x_1, x_2, x_3)$ пространства E_4 эрмитову матрицу

$$h = \left\| \begin{matrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{matrix} \right\|.$$

Точкам конуса $[x, x] = 0$ будут при этом соответствовать неотрицательно определенные эрмитовы матрицы с нулевым определителем. Как мы уже знаем, при таком соответствии движениям конуса (то есть линейным преобразованиям пространства E_4, сохраняющим форму $[x, x]$ и переводящим каждую полу конуса в себя) соответствуют преобразования в пространстве эрмитовых матриц, переводящие матрицу h в матрицу g^*hg, $g = \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\|$.

Сопоставим теперь каждой точке $z = (z_1, z_2)$ комплексной аффинной плоскости точку конуса

$$h_z = \left\| \begin{matrix} \bar{z}_1 & 0 \\ \bar{z}_2 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} z_1 & z_2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} z_1\bar{z}_1 & \bar{z}_1 z_2 \\ z_1\bar{z}_2 & z_2\bar{z}_2 \end{matrix} \right\|.$$

Очевидно, что при этом любая точка конуса является образом некоторой точки комплексной аффинной плоскости.

Заметим также, что когда точки аффинной плоскости подвергаются преобразованию

$$(z_1, z_2) \to (\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2),$$

соответствующие им эрмитовы матрицы h_z подвергаются преобразованию $h_z \to g^*h_z g$, где $g = \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{matrix} \right\|$. Таким образом, движениям аффинной плоскости соответствуют при этом отображении движения на конусе.

Посмотрим, наконец, какие точки плоскости переходят при этом отображении в одну и ту же точку конуса. Пусть точки (z_1, z_2) и (z_1', z_2') отображаются в одну и ту же точку конуса. Это означает, что $|z_1|^2 = |z_1'|^2$, $|z_2|^2 = |z_2'|^2$, $\bar{z}_1 z_2 = \bar{z}_1' z_2'$, $z_1\bar{z}_2 = z_1'\bar{z}_2'$. Отсюда следует, что $z_1' = e^{i\varphi}z_1$, $z_2' = e^{i\varphi}z_2$.

Таким образом, все точки вида $(e^{i\varphi}z_1, e^{i\varphi}z_2)$ и только они отображаются в одну и ту же точку конуса.

Итак, доказано, что конус можно получить из комплексной аффинной плоскости путем отождествления точек $(e^{i\varphi}z_1, e^{i\varphi}z_2)$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Свяжем с конусом унитарное представление группы Лоренца. Это представление строится в пространстве функций $f(x)$ на конусе, для которых сходится интеграл

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2 dx, \tag{2}$$

где dx — инвариантная мера на конусе (см. п. 6 § 1 гл. V).

Представление состоит в том, что каждому элементу g группы Лоренца сопоставляется оператор сдвига

$$T(g) f(x) = f(xg) \tag{3}$$

(xg обозначает, как обычно, точку пространства E_4, в которую переводится x движением g)*). Это представление унитарно, поскольку ввиду инвариантности меры dx имеем

$$\|T(g) f\|^2 = \int |f(xg)|^2 dx = \int |f(x)|^2 dx = \|f\|^2.$$

Задача состоит в том, чтобы разложить это унитарное представление на неприводимые представления.

Поскольку конус является «сужением» аффинной плоскости, то эта задача сводится к решенной уже задаче о разложении представления, связанного с аффинной плоскостью.

Именно, каждой функции $f(x)$ на конусе соответствует функция $f(z_1, z_2)$ на комплексной аффинной плоскости, удовлетворяющая условию

$$f(e^{i\varphi}z_1, e^{i\varphi}z_2) = f(z_1, z_2). \tag{4}$$

*) Явная форма преобразования $x \to xg$ дана в п. 1 § 1 гл. III.

Поэтому достаточно воспользоваться разложением функции $f(z_1, z_2)$ в интеграл Фурье, полученным в п. 1. Это разложение имеет следующий вид:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(z_1, z_2; \rho, n)\, d\rho, \tag{5}$$

где компоненты Фурье определяются формулой

$$F(z_1, z_2; \rho, n) = \frac{i}{2} \int f(\lambda z_1, \lambda z_2)\, \lambda^{-n_1} \bar{\lambda}^{-n_2}\, d\lambda\, d\bar{\lambda}, \tag{6}$$

$$n_1 = \frac{n + i\rho}{2}, \qquad n_2 = \frac{-n + i\rho}{2}.$$

Так как функция $f(z_1, z_2)$ удовлетворяет соотношению (4), то, очевидно, среди ее компонент Фурье отличны от нуля лишь те компоненты, для которых $n = 0$. Для этих компонент формула (6) принимает вид

$$F(z_1, z_2; \rho, 0) = 2\pi \int_0^{\infty} f(tz_1, tz_2)\, t^{1-i\rho}\, dt. \tag{7}$$

Пространство функций $F(z_1, z_2; \rho, 0)$ замечательно тем, что в нем существует вектор, инвариантный относительно операторов представления, отвечающих унитарным матрицам (то есть элементам максимальной компактной подгруппы группы Лоренца). Таким инвариантным вектором является функция $(|z_1|^2 + |z_2|^2)^{\frac{i\rho}{2} - 1}$.

Если в пространстве неприводимого представления полупростой группы Ли существует вектор, инвариантный относительно операторов, отвечающих элементам максимальной компактной подгруппы, то такое представление обычно называют представлением класса 1.

Итак, *если функция* $f(z_1, z_2)$ *на комплексной аффинной плоскости удовлетворяет соотношению*

$$f(e^{i\varphi} z_1, e^{i\varphi} z_2) = f(z_1, z_2),$$

то ее разложение в интеграл Фурье имеет вид

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(z_1, z_2; \rho)\, d\rho, \tag{8}$$

где компоненты Фурье $F(z_1, z_2; \rho)$ *определяются по формуле*

$$F(z_1, z_2; \rho) = 2\pi \int_0^{\infty} f(tz_1, tz_2)\, t^{1-i\rho}\, dt.$$

Согласно п. 1, *имеет место следующий аналог формулы Планшереля*:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |f(z_1, z_2)|^2\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int |F(z, 1; \rho)|^2\, dz\, d\bar{z}. \tag{9}$$

Сопоставив точкам (z_1, z_2) комплексной аффинной плоскости точки конуса

$$[x, x] \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0, \qquad x_0 > 0, \tag{10}$$

получим следующий окончательный результат.

Представление

$$T(g) f(x) = f(xg) \tag{11}$$

группы Лоренца в пространстве функций $f(x)$ *на конусе* (10), *для которых сходится интеграл*

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2\, dx, \tag{12}$$

разлагается на неприводимые представления основной серии класса 1, *то есть на представления с весами* $\chi = \left(\frac{i\rho}{2}, \frac{i\rho}{2}\right)$.

Компоненты Фурье функции $f(x)$ задаются формулой

$$F(x; \rho) = \int_0^{\infty} f(tx)\, t^{-\frac{i\rho}{2}}\, dt. \tag{13}$$

Они являются однородными функциями на конусе степени однородности $\frac{i\rho}{2} - 1$:

$$F(ax; \rho) = a^{\frac{i\rho}{2} - 1} F(x; \rho). \tag{14}$$

При сдвиге $f(x) \to f(xg)$ функция $F(x;\rho)$ преобразуется по представлению

$$T_\chi(g) F(x;\rho) = F(xg;\rho), \tag{15}$$

эквивалентному неприводимому унитарному представлению основной серии, для которого $\chi = \left(\frac{i\rho}{2}, \frac{i\rho}{2}\right)$.

Функция $f(x)$ выражается через компоненты Фурье $F(x;\rho)$ по формуле

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x;\rho)\, d\rho. \tag{16}$$

Имеет место следующий аналог формулы Планшереля:

$$\int |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} |F(\omega;\rho)|^2\, d\omega\, d\rho, \tag{17}$$

где интеграл берется по сфере Ω, получающейся при пересечении конуса $[x, x] = 0$ плоскостью $x_0 = 1$, $d\omega$ — евклидова мера на этой сфере.

Заметим в заключение, что неприводимые представления (15) можно реализовать в пространстве функций на сфере Ω, получающейся при пересечении конуса с плоскостью $x_0 = 1$. Это вытекает из того, что однородные функции $F(x;\rho)$ однозначно задаются своими значениями на Ω. Получим явную формулу для операторов $T_\chi(g)$ в этой реализации. Пусть ω — точка этой сферы. Обозначим через ωg точку конуса, в которую переходит точка ω при движении g, а через ω_g — точку сферы, лежащую на одной образующей конуса с точкой ωg. В силу однородности функции $F(x;\rho)$ справедливо равенство

$$F(\omega g;\rho) = (\omega_0')^{\frac{i\rho}{2}-1} F(\omega_g;\rho),$$

где ω_0' — первая координата точки ωg. Поэтому из равенства (15) вытекает, что

$$T_\chi(g) F(\omega;\rho) = (\omega_0')^{\frac{i\rho}{2}-1} F(\omega_g;\rho).$$

Эта формула и задает реализацию представления (15) на сфере Ω.

С помощью формул (3) из п. 1 § 1 гл. III, задающих линейное преобразование в пространстве E_4, соответствующее матрице $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, легко написать выражения для координат точки ω_g и коэффициента $(\omega_0')^{\frac{i\rho}{2}-1}$. Мы предоставляем читателю получить эти формулы.

§ 3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА, СВЯЗАННОГО С ПРОСТРАНСТВОМ ЛОБАЧЕВСКОГО

1. Представление группы Лоренца, связанное с пространством Лобачевского. С пространством Лобачевского X свяжем унитарное представление группы Лоренца следующего вида. Представление строится в пространстве H функций $f(x)$ на X, для которых сходится интеграл

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2\, dx \tag{1}$$

(dx — инвариантная мера в пространстве Лобачевского). Оператор представления $T(g)$ определим как оператор сдвига:

$$T(g) f(x) = f(xg). \tag{2}$$

Ясно, что $T(g)$ является унитарным представлением группы Лоренца. Задача состоит в том, чтобы разложить это представление на неприводимые. Результат см. на стр. 479.

Эта задача может быть решена многими различными способами. Один из этих способов основан на сведении к регулярному представлению группы Лоренца. Регулярным представлением называется представление в пространстве функций $f(g)$ на всей группе G, для которых $\int |f(g)|^2\, dg < +\infty$; оператор представления задается как оператор сдвига:

$$T(g_0) f(g) = f(gg_0). \tag{3}$$

Так как стационарные подгруппы точек пространства Лобачевского изоморфны подгруппе унитарных матриц U, то это пространство можно реализовать как пространство G/U классов смежности группы Лоренца G по подгруппе унитарных матриц U. Тем самым каждую функцию $f(x)$ в пространстве Лобачевского можно рассматривать как функцию $f(g)$ на группе G, постоянную на классах смежности по подгруппе U. Так как подгруппа U компактна, то функция $f(g)$ имеет интегрируемый квадрат на всей группе, если исходная функция $f(x)$ имеет интегрируемый квадрат в пространстве Лобачевского. Тем самым пространство, на котором действует представление $T(g)$, оказывается инвариантным подпространством пространства регулярного представления.

Отсюда, используя полученное в главе IV разложение регулярного представления группы Лоренца на неприводимые представления, легко получить разложение представления, связанного с пространством Лобачевского.

Указанный способ разложения представления неудобен, однако, тем, что он не переносится на мнимое пространство Лобачевского, где стационарные подгруппы уже некомпактны. Поэтому разложение представления, связанного с пространством Лобачевского, будет получено здесь на основе общего метода орисфер. Коротко об этом методе мы уже говорили в § 1.

2. Разложение представления группы Лоренца, связанного с пространством Лобачевского, на неприводимые представления (метод орисфер). Как говорилось, разложение представления группы Лоренца, связанное с пространством Лобачевского, будет получено на основе общего метода орисфер. Этот же метод будет использован позже в § 4 и для случая мнимого пространства Лобачевского.

Сопоставим функции $f(x)$ в пространстве Лобачевского ее интеграл по орисфере ω

$$h(\omega)=\int_{\omega} f(x)\,d\sigma, \tag{1}$$

где $d\sigma$ — инвариантная мера на орисфере ω. Тем самым мы отнесем функции $f(x)$ в пространстве Лобачевского функцию $h(\omega)$ на множестве орисфер.

Выясним, как преобразуется функция $h(\omega)$ при сдвиге $f(x)\to f(xg)$ исходной функции. Обозначим через $h_g(\omega)$ преобразование функции $f(xg)$. Так как меры на орисферах сохраняются при сдвигах (см. п. 7 § 1), справедливо равенство

$$h_g(\omega)=\int_{\omega} f(xg)\,d\sigma=\int_{\omega g} f(x)\,d\sigma_g=h(\omega g),$$

где ωg обозначает образ орисферы ω при движении g, а $d\sigma_g$ — меру на ωg.

Таким образом, *операторам сдвига*

$$T(g)f(x)=f(xg) \tag{2}$$

в пространстве функций $f(x)$ отвечают операторы сдвига в пространстве функций $h(\omega)$

$$Q(g)h(\omega)=h(\omega g). \tag{3}$$

Тем самым задача о разложении представления, связанного с пространством Лобачевского, свелась, по существу, к двум следующим задачам:

1) получить формулу обращения, выражающую функцию $f(x)$ в пространстве Лобачевского через ее интегралы по орисферам;

2) разложить представление (3), связанное с пространством орисфер, на неприводимые представления.

Первая из этих задач есть задача интегральной геометрии, уже решенная в § 2 гл. V. Вторая задача фактически была решена в § 2 гл. VI.

В самом деле, мы видели в § 2 гл. V, что функцию $h(\omega)$ можно рассматривать как функцию $h(\xi)$, заданную на верхней поле конуса $[\xi,\xi]=0$ (для этого надо задать каждую орисферу ω уравнением $[x,\xi]=1$). Движениям $\omega\to\omega g$ в пространстве орисфер отвечают при таком соответствии движения $\xi\to\xi g$ на конусе. Поэтому операторы $Q(g)$ сдвига в пространстве орисфер записываются как операторы сдвига на конусе

$$Q(g)h(\xi)=h(\xi g). \tag{4}$$

Таким образом, задача о разложении представления (3) сводится к решенной в § 2 задаче о разложении представления группы Лоренца, связанного с функциями на конусе (или, что то же самое, с функциями на комплексной аффинной плоскости, на которой отождествлены точки, отличающиеся общим множителем вида $e^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi<2\pi$).

Заметим, что представление (4) не эквивалентно представлению, связанному с конусом (см. п. 2 § 2). Дело в том, что преобразования $h(\xi)$ функций $f(x)$ пространства Лобачевского удовлетворяют установленному в п. 2 § 2 главы V условию симметрии

$$\int h(\xi)\,\delta([a,\xi]-t)\,d\xi=\int h(\xi)\,\delta\left([a,\xi]-t^{-1}\right)d\xi. \tag{5}$$

Поэтому представление (4) реализуется в пространстве функций $h(\xi)$ на конусе, удовлетворяющих дополнительному условию (5).

Получим теперь формулы для разложения представления группы Лоренца, связанного с пространством Лобачевского. Сначала выведем формулы для компонент Фурье функции $f(x)$ на этом пространстве. Для этого сопоставим функции $f(x)$ ее преобразование

$$h(\xi)=\int f(x)\,\delta([x,\ \xi]-1)\,dx. \tag{6}$$

Это преобразование является функцией на конусе. Как было показано в п. 2 § 2, компоненты Фурье функции $h(\xi)$ даются формулами

$$F(\xi;\ \rho)=\int_0^\infty h(t\xi)\,t^{-\frac{i\rho}{2}}\,dt. \tag{7}$$

Подставляя в формулу (7) выражение (6), получаем

$$F(\xi;\ \rho)=\int_0^\infty \int f(x)\,\delta([x,\ t\xi]-1)\,t^{-\frac{i\rho}{2}}\,dx\,dt. \tag{8}$$

Как было показано в п. 2 § 2, компоненты Фурье $F(\xi;\ \rho)$ являются однородными функциями на конусе. При сдвиге $f(x)\to f(xg)$ эти функции преобразуются по неприводимому представлению группы Лоренца

$$T_\chi(g)\,F(\xi;\ \rho)=F(\xi g;\ \rho),$$

где $\chi=\left(\frac{i\rho}{2},\ \frac{i\rho}{2}\right)$.

Упростим полученную формулу для $F(\xi;\ \rho)$. Для этого изменим порядок интегрирования и воспользуемся очевидным равенством

$$\int_0^\infty t^{-\frac{i\rho}{2}}\delta([x,\ t\xi]-1)\,dt=[x,\ \xi]^{\frac{i\rho}{2}-1}.$$

Мы получим тогда

$$F(\xi;\ \rho)=\int f(x)\,[x,\ \xi]^{\frac{i\rho}{2}-1}\,dx. \tag{9}$$

Укажем еще один вид формулы для $F(\xi;\ \rho)$, напоминающий формулу преобразования Фурье в евклидовом пространстве. Для этого вспомним, что $[x,\ \xi]=e^{k\tau(x,\ \xi)}$, где

$\tau(x,\ \xi)$ — расстояние от точки x до орисферы ω: $[x,\ \xi]=1$ (см. п. 2 § 2 гл. V). Отсюда вытекает, что формулу (9) можно представить в виде

$$F(\xi;\ \rho)=\int f(x)\,e^{\left(\frac{i\rho}{2}-1\right)k\tau(x,\ \xi)}\,dx. \tag{10}$$

К аналогичному виду может быть приведена формула преобразования Фурье в евклидовом пространстве, имеющая вид

$$F(\xi)=\int f(x)\,e^{i(x,\ \xi)}\,dx.$$

В самом деле,

$$(x,\ \xi)=x_1\xi_1+\ \dots\ +x_n\xi_n=|\xi|\,\tau(x,\ \xi),$$

где $|\xi|=\left(\xi_1^2+\ \dots\ +\xi_n^2\right)^{1/2}$, а $\tau(x,\ \xi)$ — расстояние от точки x до плоскости $(x,\ \xi)=0$. Поэтому

$$F(\xi)=\int f(x)\,e^{i|\xi|\tau(x,\ \xi)}\,dx. \tag{11}$$

Очевидно сходство между формулами (10) и (11).

Установим теперь соотношение симметрии, которому удовлетворяют компоненты Фурье $F(\xi;\ \rho)$ функции $f(x)$ в пространстве Лобачевского. Воспользуемся для этого соотношением симметрии

$$\int h(\xi)\,\delta([a,\ \xi]-t)\,d\xi=\int h(\xi)\,\delta\left([a,\ \xi]-t^{-1}\right)d\xi \tag{12}$$

для функции $h(\xi)$, где a — любая точка пространства Лобачевского. Это соотношение можно записать в следующем виде:

$$\int h(t\xi)\,\delta([a,\ \xi]-1)\,d\xi=t^{-2}\int h\left(t^{-1}\xi\right)\delta([a,\ \xi]-1)\,d\xi. \tag{13}$$

Умножим обе части равенства (13) на $t^{-\frac{i\rho}{2}}$ и проинтегрируем по t от 0 до ∞. Принимая во внимание формулу (8) для $F(\xi;\ \rho)$, получаем

$$\int F(\xi;\ \rho)\,\delta([a,\ \xi]-1)\,d\xi=\int F(\xi;\ -\rho)\,\delta([a,\ \xi]-1)\,d\xi. \tag{14}$$

Таким образом, мы доказали, что компоненты Фурье $F(\xi;\ \rho)$ функции $f(x)$ должны удовлетворять соотношению симметрии (14), где a — любая точка пространства Лобачевского. Существование этого соотношения связано с эквивалентностью представлений

$$T_\chi(g), \quad \chi=\left(\frac{i\rho}{2}, \frac{i\rho}{2}\right) \quad \text{и} \quad T_{-\chi}(g), \quad -\chi=\left(-\frac{i\rho}{2}, -\frac{i\rho}{2}\right).$$

Мы вывели формулы, выражающие компоненты Фурье функции $f(x)$, и установили соотношение симметрии для этой функции. Выведем теперь формулу, выражающую функцию $f(x)$ через ее компоненты Фурье. Для этого нам понадобится выражение

$$h(\xi)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi;\ \rho)\,d\rho \tag{15}$$

функции $h(\xi)$ через $F(\xi;\ \rho)$ (см. п. 2 § 2) и установленная в п. 2 § 2 гл. V формула обращения

$$f(x)=-\frac{1}{8\pi^2}\int h(\xi)\,\delta''([x,\ \xi]-1)\,d\xi \tag{16}$$

для интегрального преобразования, связанного с орисферами.

Подставим выражение (15) в формулу (16). Мы получим

$$f(x)=-\frac{1}{32\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi;\ \rho)\,\delta''([x,\ \xi]-1)\,d\xi\,d\rho. \tag{17}$$

Таким образом, выражение функции $f(x)$ через ее компоненты Фурье получено.

Упростим формулу (17). Для этого перепишем ее в виде

$$f(x)=-\frac{1}{32\pi^3}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi;\ \rho)\,\delta(t-1)\,\delta''([x,\ \xi]-t)\,d\rho\,dt\,d\xi.$$

Проинтегрируем дважды это выражение по частям по t и сделаем подстановку $\xi=t\eta$. Так как $F(t\eta;\ \rho)=t^{\frac{i\rho}{2}-1}F(\eta,\ \rho)$, а $\delta(x)$ — однородная функция степени однородности -1, то после простых преобразований получаем формулу

$$f(x)=\frac{1}{64\pi^3}\int_0^{\infty}\rho^2\,d\rho\int F(\xi;\ \rho)\,\delta([x,\ \xi]-1)\,d\xi \tag{18}$$

(при выводе формулы (18) мы использовали соотношение симметрии (14) для функции $F(\xi;\ \rho)$).

Внутренний интеграл в формуле (18) берется фактически по сечению конуса $[\xi,\ \xi]=0$ плоскостью $[x,\ \xi]=1$. Мы покажем, что его можно записать как интеграл по произвольной поверхности Γ на конусе $[\xi,\ \xi]=0$ (пересекающей по одному разу каждую образующую конуса), а именно:

$$\int F(\xi;\ \rho)\,\delta([x,\ \xi]-1)\,d\xi=\int_\Gamma F(\xi;\ \rho)\,[x,\ \xi]^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega. \tag{19}$$

Здесь форма $d\omega$ определяется из соотношения $d\xi=dP\,d\omega$, где $P(\xi)=1$ — уравнение поверхности Γ.

В самом деле, поскольку подинтегральная функция $F(\xi;\ \rho)\,[x,\ \xi]^{-\frac{i\rho}{2}-1}$ имеет степень однородности -2, то интеграл в правой части равенства (19) не зависит от выбора поверхности Γ (ср. рассуждение в п. 4 § 3 гл. V). В частности, если в качестве Γ взять сечение конуса плоскостью $[x,\ \xi]=1$, то мы получим в точности левую часть равенства (19).

Итак, имеем следующую формулу:

$$f(x)=\frac{1}{64\pi^3}\int_0^{\infty}\rho^2\,d\rho\int_\Gamma F(\xi;\ \rho)\,[x,\ \xi]^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega, \tag{20}$$

где Γ — произвольный «контур» на конусе $[\xi,\ \xi]=0$ (то есть поверхность, пересекающаяся с каждой образующей конуса), а $d\omega$ определяется из соотношения $d\xi=dP\,d\omega$ ($P(\xi)=1$ — уравнение поверхности Γ).

Если в качестве «контура» интегрирования взять сферу Ω: $[\xi,\ \xi]=0$, $\xi_0=1$, то $d\omega$ будет евклидовой мерой на сфере Ω.

Итак, мы установили, что *преобразование Фурье функции* $f(x)$, *заданной на пространстве Лобачевского, имеет вид*

$$F(\xi;\ \rho)=\int f(x)\,[x,\ \xi]^{\frac{i\rho}{2}-1}\,dx, \tag{21}$$

причем функция $f(x)$ *выражается через свои компоненты Фурье* $F(\xi;\ \rho)$ *по формуле* (20).

3. Аналог формулы Планшереля для пространства Лобачевского. Мы вывели формулы для преобразования Фурье функций в пространстве Лобачевского. Чтобы установить, что эти формулы определяют разложение представления

$$T(g)\,f(x)=f(xg)$$

на неприводимые, надо доказать аналог формулы Планшереля. Мы ограничимся нестрогим выводом этой формулы (не обосновывая допустимости перестановок порядка интегрирования).

Заменим в интеграле

$$\int |f(x)|^2\,dx=\int f(x)\,\overline{f(x)}\,dx \tag{1}$$

функцию $\overline{f(x)}$ ее разложением в интеграл Фурье для пространства Лобачевского. При этом мы используем формулу (20) из п. 2. После изменения порядка интегрирования получим

$$\int |f(x)|^2\,dx=\frac{1}{64\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\int_\Gamma \overline{F(\xi;\,\rho)}\int [x,\,\xi]^{\frac{i\rho}{2}-1} f(x)\,dx\,d\omega\,d\rho.$$

Применяя формулу (21) п. 2, получаем искомый аналог формулы Планшереля. Он имеет вид

$$\int |f(x)|^2\,dx=\frac{1}{64\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Gamma |F(\xi;\,\rho)|^2\,d\omega, \tag{2}$$

где Γ — произвольный «контур» на конусе $[\xi,\,\xi]=0$, а $d\omega$ — соответствующая форма.

Формулу (2) можно записать в виде

$$\int |f(x)|^2\,dx=\int \|F\|_\rho^2\,d\mu, \tag{3}$$

где

$$\|F\|_\rho^2=\int_\Gamma |F(\xi;\,\rho)|^2\,d\omega \tag{4}$$

и $d\mu=\frac{1}{64\pi^3}\rho^2\,d\rho$.

Следовательно, отображение $f(x)\to F(\xi;\,\rho)$ изометрично относительно норм

$$\|f\|^2=\int |f(x)|^2\,dx \tag{5}$$

и

$$\|F\|^2=\int \|F\|_\rho^2\,d\mu. \tag{6}$$

Это означает, что соответствие $f(x)\to F(\xi;\,\rho)$ задает разложение пространства H функций $f(x)$ на пространстве Лобачевского, имеющих конечную норму $\|f\|$, в непрерывную прямую сумму пространств H_ρ, состоящих из функций $F(\xi;\,\rho)$ с конечной нормой $\|F\|_\rho$. При этом, когда функции $f(x)$ преобразуются операторами $T(g): f(x)\to f(xg)$, функции $F(\xi;\,\rho)$ преобразуются операторами неприводимых унитарных представлений $T_\chi(g)$, $\chi=\left(\frac{i\rho}{2},\,\frac{i\rho}{2}\right)$ группы Лоренца.

Возникает вопрос, каковы все те функции $F(\xi;\,\rho)$, которые отвечают функциям $f(x)$ с интегрируемым квадратом. Можно доказать, что это будут все функции $F(\xi;\,\rho)$, $0\leqslant\rho<\infty$, для которых сходится интеграл (6). Если же рассматривать функции $F(\xi;\,\rho)$, определяемые формулой (15) из п. 2 для всех вещественных значений ρ, то функциям $f(x)$ с интегрируемым квадратом соответствуют функции, для которых сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Gamma |F(\xi;\,\rho)|^2\,d\omega$$

и которые, кроме того, удовлетворяют условию симметрии (11) из п. 2.

Сформулируем окончательный результат. Установлено, что *представление*

$$T(g)\,f(x)=f(xg)$$

группы Лоренца, связанное с пространством Лобачевского, разлагается на неприводимые представления основной серии класса 1, *то есть на представления веса* $\chi=\left(\frac{i\rho}{2},\,\frac{i\rho}{2}\right)$, $0\leqslant\rho<\infty$. *Каждое из этих представлений входит в разложение с кратностью* 1.

Разложение любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом модуля в интеграл Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{64\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Gamma F(\xi;\,\rho)\,[x,\,\xi]^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega, \tag{7}$$

где Γ: $P(\xi)=1$ — *«контур» на конусе* $[\xi,\,\xi]=0$, *а* $d\omega$ — *форма, определяемая равенством* $d\xi=dP\,d\omega$. *Здесь*

$$F(\xi;\,\rho)=\int f(x)\,[x,\,\xi]^{\frac{i\rho}{2}-1}\,dx. \tag{8}$$

Имеет место аналог формулы Планшереля

$$\int|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{64\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Gamma|F(\xi;\,\rho)|^2\,d\omega. \tag{9}$$

Отображение $f(x)\to F(\xi;\,\rho)$, *определяемое формулой* (8), *есть изометрическое отображение пространства всех функций* $f(x)$, *для которых*

$$\|f\|^2\equiv\int|f(x)|^2\,dx<\infty,$$

на пространство всех функций $F(\xi;\,\rho)$, $0\leqslant\rho<\infty$, *для которых*

$$\|F\|^2\equiv\frac{1}{64\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Gamma|F(\xi;\,\rho)|^2\,d\omega<\infty.$$

Функция $F(\xi;\,\rho)$, *рассматриваемая на всей вещественной оси, удовлетворяет для любой точки* a *пространства Лобачевского следующему соотношению симметрии*:

$$\int F(\xi;\,\rho)\,\delta([a,\,\xi]-1)\,d\xi=\int F(\xi;\,-\rho)\,\delta([a,\,\xi]-1)\,d\xi. \tag{10}$$

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА, СВЯЗАННОГО С МНИМЫМ ПРОСТРАНСТВОМ ЛОБАЧЕВСКОГО

1. Представление группы Лоренца, связанное с мнимым пространством Лобачевского. Представление группы Лоренца, связанное с трехмерным мнимым пространством Лобачевского, строится точно так же, как и представление, связанное с пространством Лобачевского. Именно, рассмотрим гильбертово пространство H функций $f(x)$ на мнимом пространстве Лобачевского, для которых

$$\|f\|^2=\int|f(x)|^2\,dx<+\infty \tag{1}$$

(здесь dx — инвариантная мера в мнимом пространстве Лобачевского). Оператор $T(g)$ определим как оператор сдвига

$$T(g)\,f(x)=f(xg). \tag{2}$$

В силу инвариантности меры dx *операторы* $T(g)$ *образуют унитарное представление группы Лоренца.*

Для разложения этого представления нельзя применить прием, намеченный в п. 1 § 3, то есть перейти от представления, связанного с мнимым пространством Лобачевского, к регулярному представлению, связанному со всей группой. Дело в том, что стационарная подгруппа мнимого пространства Лобачевского некомпактна. Поэтому функциям, имеющим интегрируемый квадрат на этом пространстве, соответствуют функции на группе, не имеющие интегрируемого квадрата модуля. Однако метод интегральных преобразований, связанных с орисферами, проходит и в рассматриваемом случае без существенных изменений.

В отличие от случая пространства Лобачевского в мнимом пространстве Лобачевского есть два транзитивных многообразия орисфер (см. п. 5 § 1 гл. V). Одно из этих многообразий состоит из орисфер первого рода, имеющих размерность два, а второе — из изотропных прямых. В соответствии с этим представлению (2) сопоставляются два представления — в пространстве функций на множестве орисфер первого рода и в пространстве функций на множестве изотропных прямых.

2. Представление группы Лоренца, связанное с орисферами первого рода, и разложение этого представления на неприводимые. В соответствии с общим методом, описанным в п. 3 § 1, сопоставим каждой финитной бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в мнимом пространстве Лобачевского функцию $h(\omega)$, заданную на множестве орисфер

31 Зак. 2905. И. М. Гельфанд и др., вып. 5

первого рода и определяемую формулой

$$h(\omega)=\int\limits_{\omega} f(x)\,d\sigma, \tag{1}$$

где $d\sigma$ — инвариантная мера на орисфере ω.

Найдем оператор $Q(g)$ в пространстве функций $h(\omega)$, соответствующий оператору сдвига

$$T(g)f(x)=f(xg) \tag{2}$$

исходных функций. По определению, функции $f(xg)$ соответствует функция

$$h_g(\omega)=\int\limits_{\omega} f(xg)\,d\sigma$$

на множестве орисфер первого рода. Поскольку при сдвиге $x\to xg$ сохраняются меры на орисферах первого рода (см. п. 7 § 1 главы V), то

$$h_g(\omega)=\int\limits_{\omega g} f(x)\,d\sigma=h(\omega g).$$

Таким образом, оператору сдвига (2) в пространстве функций $f(x)$ соответствует оператор сдвига

$$Q(g)h(\omega)=h(\omega g) \tag{3}$$

в пространстве функций $h(\omega g)$ на множестве орисфер первого рода. Очевидно, что операторы $Q(g)$ дают представление группы Лоренца.

Итак, мы сопоставили представлению $T(g)$, связанному с мнимым пространством Лобачевского, представление $Q(g)$, связанное с орисферами первого рода в этом пространстве. Разложим теперь представление $Q(g)$ на неприводимые. Мы покажем сейчас, что эта задача сводится к решенной в п. 2 § 2 задаче о разложении представления группы Лоренца, связанного с конусом.

В самом деле, реализуем мнимое пространство Лобачевского на гиперболоиде $[x, x]=-1$. Как было показано в п. 5 § 1 гл. V, при такой реализации орисферы первого рода задаются уравнением $|[x, \xi]|=1$, где ξ — точка верхней полы конуса $[\xi, \xi]=0$. Поэтому функцию $h(\omega)$ можно рассматривать как функцию, заданную на верхней поле конуса, и писать $h(\xi)$ вместо $h(\omega)$.

Очевидно, что уравнение сдвинутой орисферы ωg имеет вид $|[x, \xi g]|=1$. Поэтому оператор $Q(g)$ принимает вид

$$Q(g)h(\xi)=h(\xi g). \tag{3'}$$

Тем самым задача о разложении представления группы Лоренца, связанного с орисферами первого рода, свелась к задаче о разложении представления этой группы, связанного с конусом, решенной в § 2.

Напомним, что компонентами Фурье функции $h(\xi)$, заданной на конусе, являются функции

$$F(\xi;\rho)=\int\limits_0^{\infty} h(t\xi)\,t^{-\frac{i\rho}{2}}\,dt. \tag{4}$$

Эти функции однородны по ξ со степенью однородности $\frac{i\rho}{2}-1$ и преобразуются при сдвигах $h(\xi)\to h(\xi g)$ функции $h(\xi)$ по неприводимым представлениям группы Лоренца, эквивалентным представлениям $T_\chi(g)$, $\chi=\left(\frac{i\rho}{2}, \frac{i\rho}{2}\right)$, основной серии. Функция $h(\xi)$ выражается через функции $F(\xi, \rho)$ по формуле

$$h(\xi)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\xi;\rho)\,d\rho. \tag{5}$$

Таким образом, чтобы разложить представление $Q(g)h(\omega)=h(\omega g)$ группы Лоренца, связанное с орисферами мнимого пространства Лобачевского, мы реализуем это представление в пространстве функций $h(\xi)$ на конусе, где ξ — точка конуса, определяющая орисферу $\omega:|[x, \xi]|=1$. После этого функцию $h(\xi)$ мы разлагаем на компоненты Фурье $F(\xi;\rho)$, определяемые формулой (4). Функция $h(\xi)$ (а тем самым и функция $h(\omega)$) выражается через компоненты Фурье $F(\xi;\rho)$ по формуле (5). В разложение представления группы Лоренца, связанного с орисферами первого рода, входят представления $T_\chi(g)$, для которых $\chi=\left(\frac{i\rho}{2}, \frac{i\rho}{2}\right)$, то есть лишь представления класса 1.

Заметим, что в рассматриваемом здесь случае интеграл (4), вообще говоря, расходится, и значение его понимается в регуляризованном смысле. Это значение определяется следующим образом. Сделаем в интеграле (4) подстановку $t=e^{\tau}$. Мы получим

$$F(\xi;\rho)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}h(e^{\tau}\xi)\,e^{-\frac{i\rho\tau}{2}}\,d\tau.$$

Но, как было показано в п. 1 § 3 главы V, функция $h(\xi)$, являющаяся преобразованием бесконечно дифференцируемой финитной функции в мнимом пространстве Лобачевского, равна нулю в некоторой окрестности вершины конуса и допускает при $t\to+\infty$ асимптотическое разложение вида

$$h(t\xi)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\xi)\,t^{-n}.$$

Поэтому функция $e^{\tau}h(e^{\tau}\xi)$ равна нулю для всех τ, меньших некоторого числа N, и имеет конечный предел $a_1(\xi)$ при $\tau\to+\infty$. Отсюда следует, что

$$F(\xi;\rho)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{\tau}h(e^{\tau}\xi)-\theta(\tau)\,a_1(\xi)\right]e^{-\frac{i\rho\tau}{2}}\,d\tau+a_1(\xi)\int_0^{\infty}e^{-\frac{i\rho\tau}{2}}\,d\tau,$$

где $\theta(\tau)=1$ при $\tau>0$ и $\theta(\tau)=0$ при $\tau<0$. Первое слагаемое в этом равенстве является сходящимся интегралом, а значение второго слагаемого дается формулой

$$\int_0^{\infty}e^{-\frac{i\rho\tau}{2}}\,d\tau=-\frac{2i}{\rho}+2\pi\delta(\rho)$$

(см. формулу (23) на стр. 447, вып. 1). Тем самым определено значение компонент Фурье $F(\xi;\rho)$ для любой функции $h(\xi)$, являющейся преобразованием бесконечно дифференцируемой финитной функции $f(x)$ в мнимом пространстве Лобачевского. При таком определении $F(\xi;\rho)$ формула (5) остается справедливой, хотя функция $h(\xi)$ не является финитной.

3. Представление группы Лоренца, связанное с изотропными прямыми, и разложение этого представления на неприводимые. Мы построили в предыдущем пункте представление группы Лоренца, связанное с орисферами первого рода, и разложили его на неприводимые. В случае пространства Лобачевского этого было достаточно для раз-

ложения связанного с ним представления

$$T(g)\,f(x)=f(xg)\tag{1}$$

на неприводимые. В рассматриваемом случае этого уже недостаточно, поскольку для нахождения значения функции $f(x)$, кроме интегралов $h(\omega)$ этой функции по орисферам первого рода, надо еще знать ее интегралы по изотропным прямым (см. п. 4 § 3 гл. V). Поэтому, кроме представления $Q(g)\,h(\omega)=h(\omega g)$, рассмотренного в предыдущем пункте, нам надо рассмотреть представление, связанное с изотропными прямыми мнимого пространства Лобачевского, и разложить его на неприводимые.

Построим представление, связанное с изотропными прямыми мнимого пространства Лобачевского. Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция в мнимом пространстве Лобачевского. Сопоставим ей функцию $\varphi(l)$, заданную на множестве изотропных прямых, а именно, интеграл функции $f(x)$ по изотропной прямой l:

$$\varphi(l)=\int_l f(x)\,dl.$$

Напомним, что интеграл по прямой l определяется формулой

$$\int_l f(x)\,dl=\int_{-\infty}^{\infty}f(b+t\xi)\,dt,\tag{2}$$

где b — некоторая точка на прямой l, а ξ — нормированный направляющий вектор этой прямой ($\xi_0=1$) *).

Выясним теперь, как преобразуется функция $\varphi(l)$ при сдвиге $f(x)\to f(xg)$ исходной функции. Обозначим через $\varphi_g(l)$ функцию, соответствующую функции $f(xg)$,

$$\varphi_g(l)=\int_l f(xg)\,dl=\int_{-\infty}^{\infty}f(bg+t\xi g)\,dt.$$

*) Если это не оговорено особо, мы будем считать, что мнимое пространство Лобачевского реализовано на гиперболоиде $[x,x]=-1$.

Очевидно, что множество точек $bg+t\xi g$, $-\infty<t<\infty$, совпадает с изотропной прямой lg, в которую переходит прямая l при движении g. Если ξ_g — нормированный направляющий вектор прямой lg, то мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(bg+t\xi g)\,dt = \\ =\beta^{-1}(l,\ g)\int_{-\infty}^{\infty} f(bg+t\xi_g)\,dt=\beta^{-1}(l,\ g)\,\varphi(lg),$$

где $\beta(l,\ g)$ — отношение векторов ξg и ξ_g.

Итак, мы доказали, что *оператору сдвига* $T(g)f(x)=f(xg)$ *исходной функции соответствует оператор*

$$R(g)\varphi(l)=\beta^{-1}(l,\ g)\,\varphi(lg) \tag{3}$$

в пространстве функций $\varphi(l)$, *заданных на множестве изотропных прямых*. Здесь $\beta(l,\ g)$ равно отношению векторов ξg и ξ_g, где ξ — нормированный направляющий вектор прямой l, а ξ_g — нормированный направляющий вектор прямой lg, в которую переходит прямая при движении g.

Поскольку направляющие векторы изотропных прямых нормированы так, что их первые координаты ξ_0 равны единице, $\xi=(1,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$, то $\beta(l;\ g)$ равно первой координате вектора ξg. Заметим, что при указанной нормировке направляющих векторов коэффициент $\beta(l,\ g)$ имеет одно и то же значение для любых двух параллельных изотропных прямых *).

Очевидно, что операторы $R(g)$ также образуют представление группы Лоренца. Мы будем называть его представлением, связанным с изотропными прямыми мнимого пространства Лобачевского.

Разложим представление, связанное с изотропными прямыми, на неприводимые. Построим сначала для функции $\varphi(l)$ ее компоненты Фурье. Это делается следующим образом. Рассмотрим изотропную прямую l и пучок параллельных ей изотропных прямых. Как было показано в п. 4а

*) Относительно параллельных изотропных прямых см. п. 4а § 3 гл. V.

§ 3 гл. V, при реализации во внешней области единичной сферы эти прямые изображаются прямыми, касающимися абсолюта в той же точке, что и прямая l. При этом расстояние r от прямой l до произвольной прямой l_1 этого пучка равно $\frac{\theta i}{k}$, где θ — ориентированный угол между соответствующими касательными. Отсюда следует, что любая прямая l_1 нашего пучка однозначно задается числом θ, причем числа θ и $\theta+\pi$ задают одну и ту же прямую. Итак, $\varphi(l_1)$ является функцией от l и θ, $\varphi(l_1)\equiv\varphi(l,\ \theta)$, причем $\varphi(l,\ \theta+\pi)=\varphi(l,\ \theta)$.

Для разложения представления (3) на неприводимые разложим функцию $\varphi(l,\ \theta)$ в ряд Фурье по переменной θ. Так как функция $\varphi(l,\ \theta)$ имеет по θ период π, то это разложение записывается следующим образом:

$$\varphi(l,\ \theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(l;\ 2n)\,e^{2in\theta}, \tag{4}$$

где

$$F(l;\ 2n)=\int_0^{\pi}\varphi(l,\ \theta)\,e^{-2in\theta}\,d\theta. \tag{5}$$

Функции $F(l;\ 2n)$ мы и будем называть компонентами Фурье функции $\varphi(l)$ (основание для этого будет выяснено несколько ниже). Если положить в формуле (4) $\theta=0$ и принять во внимание, что $\varphi(l,\ 0)\equiv\varphi(l)$, то получим формулу

$$\varphi(l)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(l;\ 2n), \tag{6}$$

аналогичную формуле (5) из п. 2 § 2.

Эта формула дает выражение функции $\varphi(l)$ через ее компоненты Фурье $F(l;\ 2n)$.

Покажем теперь, что функции $F(l;\ 2n)$ действительно являются компонентами Фурье для $\varphi(l)$, то есть, что при преобразованиях

$$R(g)\varphi(l)=\beta^{-1}(l,\ g)\,\varphi(lg) \tag{7}$$

они преобразуются по неприводимым представлениям группы Лоренца.

Заметим сначала, что функции $F(l;\ 2n)$ обладают следующим свойством: если расстояние от изотропной прямой l_1 до параллельной прямой l_2 равно r, $r=\frac{\theta i}{k}$, то

$$F(l_2;\ 2n)=e^{2in\theta}F(l_1;\ 2n). \tag{8}$$

Это свойство непосредственно вытекает из формулы (5) и периодичности функции $\varphi(l,\ \theta)$ по θ.

Найдем теперь вид операторов, действующих на функции $F(l;\ 2n)$, когда функция $\varphi(l)$ преобразуется по формуле (7). Эти операторы определяются формулой

$$R_{2n}(g)F(l;\ 2n)=\int_0^\pi R(g)\varphi(l,\ \theta)e^{-2in\theta}\,d\theta=$$
$$=\int_0^\pi \beta^{-1}(l,\ \theta;\ g)\varphi(lg,\ \theta)e^{-2in\theta}\,d\theta, \tag{9}$$

где $\beta^{-1}(l,\ \theta;\ g)$ — значение $\beta^{-1}(l_1,\ g)$ для прямой l_1, параллельной прямой l и отстоящей от нее на расстоянии $r=\frac{\theta i}{k}$.

Так как движение g сохраняет параллельность изотропных прямых, а коэффициент $\beta^{-1}(l,\ g)$ имеет одно и то же значение для всех прямых, параллельных друг другу, то из формулы (9) имеем

$$R_{2n}(g)F(l;\ 2n)=\beta^{-1}(l,\ g)\int_0^\pi \varphi(lg,\ \theta)e^{-2in\theta}\,d\theta=$$
$$=\beta^{-1}(l,\ g)F(lg;\ 2n).$$

Итак, мы доказали, что *когда функция $\varphi(l)$ преобразуется по формуле* (7), *ее компоненты Фурье $F(l;\ 2n)$ преобразуются по формуле*

$$R_{2n}(g)F(l;\ 2n)=\beta^{-1}(l,\ g)F(lg;\ 2n). \tag{10}$$

Операторы $R_{2n}(g)$ образуют представление группы Лоренца. Это представление действует в пространстве функций, заданных на множестве изотропных прямых. Мы докажем сейчас, что это представление эквивалентно неприводимому

унитарному представлению $T_\chi(g)$ группы Лоренца, для которого $\chi=(2n,\ -2n)$.

Как мы знаем, представления $T_\chi(g)$ строятся в пространствах однородных функций $f(z_1,\ z_2)$ комплексных переменных z_1, z_2 (см. п. 4 § 2 гл. III). Поэтому, чтобы установить эквивалентность представлений $T_\chi(g)$ и $R_{2n}(g)$, нужно сначала найти связь между изотропными прямыми l и парами комплексных чисел $(z_1,\ z_2)$.

Сопоставим каждой паре $(z_1,\ z_2)\neq(0,\ 0)$ изотропную прямую l. Для этого прежде сопоставим паре $(z_1,\ z_2)$ унитарную матрицу $\begin{Vmatrix} u & v \\ -\bar v & \bar u \end{Vmatrix}$, где $u=cz_1$, $v=cz_2$, $c=(|z_1|^2+|z_2|^2)^{-\frac{1}{2}}$. Как мы знаем из п. 5 § 1, комплексным унимодулярным матрицам второго порядка, и в частности унитарным матрицам, отвечают движения мнимого пространства Лобачевского. Зафиксируем изотропную прямую $l_0: x=b^0+t\xi^0$, где $b^0=(0,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\xi^0=(1,\ 0,\ 0,\ -1)$. Сопоставим паре $(z_1,\ z_2)$ изотропную прямую $l\equiv l(z_1,\ z_2)$, в которую переходит l_0 при движении, отвечающем унитарной матрице $\begin{Vmatrix} u & v \\ -\bar v & \bar u \end{Vmatrix}$. Легко убедиться, что при этом мы получим все изотропные прямые (так как движениями, отвечающими унитарным матрицам, любую изотропную прямую можно перевести в любую другую).

Выразим через z_1, z_2 координаты направляющего вектора $\xi=(1,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ и точки $b=(0,\ b_1,\ b_2,\ b_3)$ изотропной прямой $l(z_1,\ z_2): x=b+t\xi$. Для этого установим, во что переходят направляющий вектор $\xi^0=(1,\ 0,\ 0,\ -1)$ и точка $b^0=(0,\ 0,\ 1,\ 0)$ прямой l_0 при движении $\begin{Vmatrix} u & v \\ -\bar v & \bar u \end{Vmatrix}$, где $u=cz_1$, $v=cz_2$, $c=(|z_1|^2+|z_2|^2)^{-\frac{1}{2}}$. Элементарным подсчетом получаем

$$\xi_1=i(\bar u v-u\bar v),\quad \xi_2=\bar u v+u\bar v,\quad \xi_3=|v|^2-|u|^2,$$
$$b_1=\frac{i}{2}(\bar u^2+\bar v^2-u^2-v^2),\quad b_2=\frac{1}{2}(u^2+v^2+\bar u^2+\bar v^2),$$
$$b_3=uv+\bar u\bar v.$$

Итак, каждой паре комплексных чисел $(z_1, z_2)\neq(0, 0)$ мы сопоставили изотропную прямую $l(z_1, z_2): x=b+t\xi$, $b=(0, b_1, b_2, b_3)$, $\xi=(1, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где координаты точек b и ξ выражаются приведенными выше формулами.

Установленное соответствие обладает следующими свойствами:

1. $l(z_1, z_2)=l(z_1', z_2')$ тогда и только тогда, когда $z_1'=\lambda z_1$, $z_2'=\lambda z_2$, где $\lambda\neq 0$ — вещественное или чисто мнимое число.

2. Прямые $l(z_1, z_2)$ и $l\left(e^{\frac{i\theta}{2}}z_1, e^{\frac{i\theta}{2}}z_2\right)$ параллельны. Расстояние r между ними равно $\frac{\theta i}{k}$.

3. Сдвигу
$$(z_1, z_2)\to(\alpha z_1+\gamma z_2, \beta z_1+\delta z_2) \tag{11}$$
в комплексной аффинной плоскости отвечает сдвиг $l\to lg$ в пространстве изотропных прямых, где g — движение, отвечающее матрице $\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

Проверка этих свойств предоставляется читателю.

В силу установленного соответствия функции на множестве изотропных прямых можно рассматривать как функции $f(z_1, z_2)$ на комплексной аффинной плоскости, такие, что
$$f(\lambda z_1, \lambda z_2)=f(z_1, z_2) \tag{12}$$
для любого вещественного или чисто мнимого числа $\lambda\neq 0$.

Выясним теперь, какими свойствами обладают функции, соответствующие функциям $F(l; 2n)$. Мы видели, что функции $F(l; 2n)$ удовлетворяют соотношению
$$F(l_2; 2n)=e^{2in\vartheta}F(l_1; 2n),$$
где $r=\frac{\theta i}{k}$ — расстояние от прямой l_1 до параллельной ей прямой l_2. Поскольку параллельным прямым соответствуют пары (z_1, z_2), отличающиеся множителем $e^{\frac{i\theta}{2}}$, то функция $f(z_1, z_2)$, соответствующая $F(l; 2n)$, удовлетворяет условию
$$f\left(e^{\frac{i\theta}{2}}z_1, e^{\frac{i\theta}{2}}z_2\right)=e^{2in\vartheta}f(z_1, z_2). \tag{13}$$

Из равенств (12) и (13) следует, что *функции $F(l; 2n)$ соответствует такая функция $f(z_1, z_2)$, что для любого комплексного числа $\alpha=0$ выполняется соотношение*
$$f(\alpha z_1, \alpha z_2)=\alpha^{2n}\bar{\alpha}^{-2n}f(z_1, z_2).$$
Иными словами, $f(z_1, z_2)$ является однородной функцией степени $(2n, -2n)$.

Выясним теперь, как записывается оператор
$$R_{2n}(g)F(l; 2n)=\beta^{-1}(l, g)F(lg; 2n)$$
при переходе к функциям $f(z_1, z_2)$. Так как сдвигу $l\to lg$ соответствует сдвиг (11) на комплексной аффинной плоскости, то функции $F(lg; 2n)$ соответствует функция
$$f(\alpha z_1+\gamma z_2, \beta z_1+\delta z_2). \tag{14}$$

Поэтому нам надо лишь найти выражение коэффициента $\beta(l, g)$ через z_1, z_2 и g.

Напомним, что коэффициент $\beta(l, g)$ равен первой координате вектора ξg, где ξ — нормированный направляющий вектор прямой l, $\xi=(1, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Используя полученное выше выражение вектора ξ через $u=cz_1$, $v=cz_2$, где $c=(|z_1|^2+|z_2|^2)^{-\frac{1}{2}}$, легко получаем
$$\beta(l, g)=\frac{|\alpha z_1+\gamma z_2|^2+|\beta z_1+\delta z_2|^2}{|z_1|^2+|z_2|^2}. \tag{15}$$

Таким образом, выражение $\beta(l, g)$ через z_1, z_2 и g получено.

Из формул (14) и (15) вытекает, что операторы $R_{2n}(g)$, реализованные в пространстве функций $f(z_1, z_2)$, для которых
$$f(\alpha z_1, \alpha z_2)=\alpha^{2n}\bar{\alpha}^{-2n}f(z_1, z_2), \tag{16}$$
записываются следующим образом:
$$R_{2n}(g)f(z_1, z_2)=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{|\alpha z_1+\gamma z_2|^2+|\beta z_1+\delta z_2|^2}\times f(\alpha z_1+\gamma z_2, \beta z_1+\delta z_2). \tag{17}$$

Чтобы перейти от этой записи к обычной реализации

$$T_\chi(g) f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$$

представлений группы Лоренца, сопоставим функции $f(z_1, z_2)$ функцию

$$f_1(z_1, z_2) = \frac{f(z_1, z_2)}{|z_1|^2 + |z_2|^2}.$$

В силу равенства (16) функция $f_1(z_1, z_2)$ удовлетворяет следующему условию однородности:

$$f_1(\alpha z_1, \alpha z_2) = \alpha^{2n-1}\bar{\alpha}^{-2n-1} f_1(z_1, z_2), \tag{18}$$

то есть принадлежит пространству D_χ, $\chi=(2n, -2n)$ (см. гл. III, § 2, п. 2).

Оператору же $R_{2n}(g)$, задаваемому формулой (17), соответствует оператор

$$T_\chi(g) f_1(z_1, z_2) = f_1(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2)$$

в пространстве D_χ.

Тем самым доказано, что представление

$$R_{2n}(g) F(l; 2n) = \beta^{-1}(l, g) F(lg; 2n)$$

эквивалентно представлению $T_\chi(g)$, $\chi = (2n, -2n)$ группы Лоренца. Отсюда следует, в частности, неприводимость представления $R_{2n}(g)$.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Представление

$$R(g)\varphi(l) = \beta^{-1}(l, g)\varphi(lg) \tag{19}$$

в пространстве функций на множестве изотропных прямых (оно соответствует представлению $T(g) f(x) = f(xg)$, связанному с мнимым пространством Лобачевского) следующим образом разлагается на неприводимые представления.

Компоненты Фурье функции $\varphi(l)$ задаются формулой

$$F(l; 2n) = \int_0^\pi \varphi(l, \theta) e^{-2in\theta} d\theta, \tag{20}$$

где $\varphi(l, \theta)$ — значение функции φ для изотропной прямой, параллельной прямой l и отстоящей от нее на расстоянии $r = \frac{\theta i}{k}$.

Эти компоненты удовлетворяют соотношению

$$F(l_2; 2n) = e^{2in\theta} F(l_1, 2n), \tag{21}$$

где l_2 — изотропная прямая, параллельная l_1 и отстоящая от нее на расстоянии $\frac{\theta i}{k}$. Если функция $\varphi(l)$ преобразуется по формуле (19), то ее компоненты Фурье $F(l; 2n)$ преобразуются по формулам

$$R_{2n}(g) F(l; 2n) = \beta^{-1}(l, g) F(lg; 2n). \tag{22}$$

Представление $R_{2n}(g)$ группы Лоренца, определяемое формулой (22), эквивалентно неприводимому унитарному представлению $T_\chi(g)$ этой группы, для которого $\chi = (2n, -2n)$.

Функция $\varphi(l)$ выражается через компоненты Фурье по формуле

$$\varphi(l) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(l; 2n).$$

4. Разложение представления группы Лоренца, связанного с мнимым пространством Лобачевского, на неприводимые. Перейдем теперь к решению основной задачи этого параграфа — разложению представления

$$T(g) f(x) = f(xg) \tag{1}$$

группы Лоренца, связанного с мнимым пространством Лобачевского, на неприводимые представления.

Мы уже сопоставили в предыдущих пунктах представлению $T(g)$ представления

$$Q(g) h(\xi) = h(\xi g) \tag{2}$$

и

$$R(g)\varphi(l) = \beta^{-1}(l, g)\varphi(lg). \tag{3}$$

Первое из них связано с пространством орисфер первого рода, а второе — с пространством изотропных прямых. Эти представления были разложены на неприводимые. Теперь надо получить разложение представления (1).

Выразим сначала через $f(x)$ компоненты Фурье функции $h(\xi)$. В п. 2 было показано, что компоненты Фурье функции $h(\xi)$ выражаются формулами

$$F(\xi;\ \rho)=\int_0^\infty h(t\xi)\,t^{-\frac{i\rho}{2}}\,dt. \tag{4}$$

Но функция $h(\xi)$ — интеграл функции $f(x)$ по орисфере $\omega:|[x,\ \xi]|=1$ выражается через $f(x)$ по формуле

$$h(\xi)=\int f(x)\,\delta(|[x,\ \xi]|-1)\,dx, \tag{5}$$

где dx — инвариантная мера в мнимом пространстве Лобачевского (см. п. 1 § 3 гл. V).

Подставим в формулу (4) выражение (5). Мы получим, что

$$F(\xi;\ \rho)=\int_0^\infty t^{-\frac{i\rho}{2}}\,dt\int f(x)\,\delta(|[x,\ t\xi]|-1)\,dx. \tag{6}$$

Это равенство и дает выражение компоненты Фурье $F(\xi;\ \rho)$ через функцию $f(x)$. Чтобы упростить это выражение, переставим порядок интегрирования. Так как

$$\int_0^\infty t^{-\frac{i\rho}{2}}\,\delta(|[x,\ t\xi]|-1)\,dt=|[x,\ \xi]|^{\frac{i\rho}{2}-1},$$

имеем

$$F(\xi;\ \rho)=\int f(x)\,|[x,\ \xi]|^{\frac{i\rho}{2}-1}\,dx; \tag{7}$$

эта формула аналогична формуле (6) из п. 2 § 3. Как и в случае пространства Лобачевского, выведенную формулу можно записать также в виде:

$$F(\xi;\ \rho)=\int f(x)\,e^{\left(\frac{i\rho}{2}-1\right)k\tau(x,\ \xi)}\,dx, \tag{8}$$

где $\tau(x,\xi)$ — расстояние от точки x до орисферы $\omega:|[x,\xi]|=1$.

Теперь найдем выражение через функцию $f(x)$ для компонент Фурье $F(l;\ 2n)$ представления, связанного с изотропными прямыми. Как было показано в п. 3, эти компоненты

выражаются через функцию $\varphi(l)$ следующим образом:

$$F(l;\ 2n)=\int_0^\pi \varphi(l,\ \theta)\,e^{-2in\theta}\,d\theta, \tag{9}$$

где $\varphi(l,\ \theta)$ — значение функции φ для изотропной прямой l_θ, параллельной прямой l и отстоящей от нее на расстоянии $r=\frac{\theta i}{k}$. Функция же $\varphi(l)$ выражается через $f(x)$ так:

$$\varphi(l)\equiv\varphi(\xi,\ b)=\int_{-\infty}^{\infty} f(b+t\xi)\,dt, \tag{10}$$

где ξ — нормированный направляющий вектор прямой l, а b — точка на этой прямой.

Подставим выражение (10) в формулу (9). Мы получим, что

$$F(l;\ 2n)=\int_0^\pi e^{-2in\theta}\,d\theta\int_{-\infty}^{\infty} f(b_\theta+t\xi_\theta)\,dt, \tag{11}$$

где b_θ — точка на изотропной прямой l_θ, параллельной прямой l и отстоящей от нее на расстоянии $\tau=\frac{\theta i}{k}$, а ξ_θ — нормированный направляющий вектор этой прямой. Поскольку у параллельных изотропных прямых нормированные направляющие векторы совпадают, то

$$F(l;\ 2n)=\int_0^\pi e^{-2in\theta}\,d\theta\int_{-\infty}^{\infty} f(b_\theta+t\xi)\,dt. \tag{11'}$$

Таким образом, мы получили выражение для компоненты Фурье $F(l;\ 2n)$ через функцию $f(x)$. Полученную формулу можно представить в виде интеграла по всему гиперболоиду $[x,\ x]=-1$. Заметим для этого, что когда θ меняется от 0 до π, а t меняется от $-\infty$ до ∞, точка $b_\theta+t\xi$ пробегает множество точек мнимого пространства Лобачевского, лежащих на изотропных прямых, параллельных прямой l. Легко проверить, что это множество точек является сечением гиперболоида $[x, x] = -1$ плоскостью $[x, \xi] = 0$, где ξ — направляющий вектор прямой l.

Итак, доказано, что $F(l; 2n)$ является интегралом функции $f(x)$ по сечению гиперболоида плоскостью $[x, \xi] = 0$. Покажем теперь, что мера $dt\,d\theta$, по которой ведется интегрирование в формуле (11′), может быть представлена в виде

$$dt\,d\theta = \delta([x, \xi])\,dx, \tag{12}$$

где dx — инвариантная мера в мнимом пространстве Лобачевского, а ξ — нормированный направляющий вектор прямой l. В самом деле, очевидно, что обе части равенства (12) остаются инвариантными при одновременном повороте точек x и ξ вокруг оси Ox_0. Но таким вращением можно перевести любую образующую l гиперболоида в образующую, проходящую через точку $M(0, 1, 0, 0)$ и имеющую направляющий вектор $\xi(1, 0, 0, 1)$. В этом случае доказываемое равенство (12) принимает вид

$$dt\,d\theta = \delta(x_0 - x_3)\frac{dx_0\,dx_1\,dx_3}{|x_2|}. \tag{12′}$$

Чтобы доказать это равенство, достаточно заметить, что координаты точки $b_0 + t\xi$ задаются формулами

$$x_0 = t, \quad x_1 = \cos\theta, \quad x_2 = \sin\theta, \quad x_3 = t,$$

и перейти в правой части равенства (12′) к координатам t, θ. Таким образом, имеет место равенство (12′), а тогда, как мы говорили, верно и равенство (12).

Из формулы (12) вытекает, что формулу (11′) можно переписать в виде

$$F(l; 2n) = \int f(x)\,e^{-2in\theta}\delta([x, \xi])\,dx, \tag{13}$$

аналогичном формуле (7) для $F(\xi; \rho)$.

Нетрудно получить и формулу для $F(l; 2n)$, аналогичную формуле (8) для $F(\xi; \rho)$. С этой целью заметим, что $\theta i = k\tau(l, x)$, где $\tau(l, x)$ — расстояние от изотропной прямой l до точки x (или, что то же самое, расстояние до точки x от любой точки y прямой l). Поэтому формулу (13) можно записать следующим образом:

$$F(l; 2n) = \int f(x)\,e^{-2n\tau(l, x)}\delta([x, \xi])\,dx. \tag{14}$$

Полученное равенство аналогично формуле (8) для $F(\xi; \rho)$ *). Напомним, что через ξ обозначен здесь нормированный направляющий вектор прямой l.

В дальнейшем нам будет удобнее считать ξ ненормированным вектором. В этом случае введем функцию $F(\xi, b; 2n)$, которую определим по-прежнему формулой (13), где ξ — произвольный направляющий вектор прямой $l: x = b + t\xi$ и $\cos\theta = [a, b]$. Заметим, что функция $F(\xi, b; 2n)$ (как и функция $\varphi(\xi, b)$, введенная в п. 4 § 3 гл. V) есть однородная функция от ξ степени однородности -1.

Итак, мы получили выражения для компонент Фурье $F(\xi; \rho)$ и $F(l; 2n)$ функции $f(x)$ на мнимом пространстве Лобачевского. Выведем теперь выражение функции $f(x)$ через ее компоненты Фурье. Для этого воспользуемся формулой обращения, выражающей функцию $f(x)$ через функции $h(\xi)$ и $\varphi(l)$. Как было показано в п. 4 § 3 гл. V, эта формула имеет следующий вид:

$$f(a) = -\frac{1}{16\pi^2}\int h(\xi)\,\delta''(|[a, \xi]| - 1)\,d\xi - \\ - \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\operatorname{ctg}^2\theta\,d\theta\int_{\Gamma}\varphi(\xi, \theta)\,\delta([a, \xi])\,d\omega. \tag{15}$$

Здесь $d\xi$ — инвариантная мера на конусе $[\xi, \xi] = 0$, Γ — произвольная поверхность на конусе, пересекающая каждую образующую, $d\omega$ — форма, определяемая равенством $d\xi = dP\,d\omega$, где $P(\xi) = 1$ — уравнение поверхности Γ. Через $\varphi(\xi, \theta)$ обозначено значение функции $\varphi(\xi, b)$ для изотропной прямой $l: x = b + t\xi$, отстоящей от точки a на расстоянии $r = \frac{\theta i}{k}$ (см. п. 4 § 3 гл. V).

*) Заметим, что расстояние $\tau(l, x)$ от изотропной прямой l до точки x определено лишь в случае, когда точка x и прямая l лежат в одной изотропной плоскости, в противном случае расстояние до точки x от некоторой точки y прямой l зависит от выбора точки y. Это, однако, не имеет значения, так как множитель $\delta([x, \xi])$ отличен от нуля лишь для точек плоскости $[x, \xi] = 0$, где выражение $\tau(x, l)$ определено.

Подставим в формулу (15) выражения

$$h(\xi)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi;\ \rho)\,d\rho, \tag{16}$$

и

$$\varphi(\xi,\ b)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\xi,\ b;\ 2n) \tag{17}$$

функций $h(\xi)$ и $\varphi(l)$ через их компоненты Фурье (см. формулу (5) из п. 2 и формулу (6) из п. 3).

Мы получим тогда следующее выражение для $f(a)$ через $F(\xi,\ \rho)$ и $F(\xi,\ b;\ 2n)$:

$$f(a)=-\frac{1}{64\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi;\ \rho)\,\delta''(|[a,\ \xi]|-1)\,d\xi\,d\rho-$$

$$-\frac{1}{4\pi^3}\int_0^{\pi}\operatorname{ctg}^2\theta\,d\theta\int_{\Gamma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\xi,\ \theta;\ 2n)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega. \tag{18}$$

Здесь $F(\xi,\ \theta;\ 2n)$ — значение функции $F(\xi,\ b;\ 2n)$ для изотропной прямой $l=l(\xi,\ \theta)$ с направляющим вектором ξ, отстоящей от точки a на расстоянии $r=\frac{\theta i}{k}$.

Упростим полученное выражение для $f(a)$, использовав соотношения однородности, которым удовлетворяют функции $F(\xi,\ \rho)$ и $F(l;\ 2n)$. Начнем с первого слагаемого в формуле (18). Рассуждая точно так же, как и в п. 2 § 3, получим, что первое слагаемое J_1 формулы (7) можно записать следующим образом:

$$J_1=\frac{1}{256\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\rho+2i)\,d\rho\int_{\Gamma}F(\xi;\ \rho)\,|[a,\ \xi]|^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega. \tag{19}$$

Так же, как и для пространства Лобачевского, можно доказать, что компоненты Фурье $F(\xi;\ \rho)$ функции $f(x)$ удовлетворяют соотношению симметрии

$$\int F(\xi;\ \rho)\,\delta(|[a,\ \xi]|-1)\,d\xi=\int F(\xi;\ -\rho)\,\delta(|[a,\ \xi]|-1)\,d\xi. \tag{20}$$

Поскольку $F(\xi;\ \rho)$ — однородная функция от ξ степени однородности $\frac{i\rho}{2}-1$, то это соотношение можно записать в виде

$$\int_{\Gamma}F(\xi;\ \rho)\,|[a,\ \xi]|^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega=\int_{\Gamma}F(\xi;\ -\rho)\,|[a,\ \xi]|^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega, \tag{20'}$$

где Γ — произвольная поверхность на конусе $[\xi,\ \xi]=0$, пересекающая каждую образующую, а форма $d\omega$ определяется соотношением $d\xi=dP\,d\omega$, где $P(\xi)=1$ — уравнение поверхности Γ (ср. стр. 426). В силу соотношения симметрии (20′) формулу (19) можно представить в следующем виде:

$$J_1=\frac{1}{128\pi^3}\int_0^{\infty}\rho^2\,d\rho\int_{\Gamma}F(\xi;\ \rho)\,|[a,\ \xi]|^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega. \tag{21}$$

Преобразуем теперь второе слагаемое в формуле (18),

$$J_2=-\frac{1}{4\pi^3}\int_0^{\pi}\operatorname{ctg}^2\theta\,d\theta\int_{\Gamma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\xi,\ \theta;\ 2n)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega. \tag{22}$$

Здесь $F(\xi,\ \theta;\ 2n)$ есть, по определению, значение функции $F(\xi,\ b;\ 2n)$ для изотропной прямой с направляющим вектором ξ, отстоящей от точки a на расстоянии $r=\frac{\theta i}{k}$. Но функция $F(l;\ 2n)$ удовлетворяет соотношению

$$F(l_2;\ 2n)=e^{2in\theta}F(l_1;\ 2n), \tag{23}$$

где $\frac{\theta i}{k}$ — расстояние от изотропной прямой l_1 до параллельной ей изотропной прямой l_2. Поэтому

$$F(\xi,\ \theta;\ 2n)=e^{2in\theta}F(\xi,\ a;\ 2n).$$

Подставим полученное выражение для $F(\xi,\ \theta;\ 2n)$ в формулу (22). Мы получим, что

$$J_2=-\frac{1}{4\pi^3}\int_0^{\pi}\operatorname{ctg}^2\theta\,d\theta\int_{\Gamma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2in\theta}F(\xi,\ a;\ 2n)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega. \tag{24}$$

Мы видим, что J_2 выражается через значения функции $F(l;\,2n)$ на множестве изотропных прямых, проходящих через точку a.

Переставим в формуле (24) порядок интегрирования и суммирования (как и выше, мы не даем строгого обоснования возможности такой перестановки). Мы получим, что

$$J_2 = -\frac{1}{4\pi^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,\sin^{-2}\theta\,e^{2in\theta}\,d\theta\times$$
$$\times\int_\Gamma F(\xi,\ a;\ 2n)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega. \qquad (24')$$

Но из соотношения симметрии

$$\int_\Gamma \varphi(\xi,\ \theta)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega = \int_\Gamma \varphi(\xi,\ \pi-\theta)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega,$$

которому удовлетворяет функция $\varphi(\xi,\ \theta)$ (см. п. 4 § 4 гл. V), легко вытекает соотношение симметрии

$$\int_\Gamma F(\xi,\ a;\ 2n)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega = \int_\Gamma F(\xi,\ a;\ -2n)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega \quad (25)$$

для компонент Фурье $F(\xi;\,2n)$. Пользуясь этим соотношением, перепишем формулу (24′) в виде

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\int_\Gamma F(\xi,\ a;\ 2n)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega, \qquad (24'')$$

где

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\sin^{-2}\theta\,\cos 2n\theta\,d\theta. \qquad (26)$$

Интеграл (26), определяющий значение α_n, расходится. Его значение мы понимаем в регуляризованном смысле как значение при $\lambda=-2$ интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\sin^{\lambda}\theta\,\cos 2n\theta\,d\theta.$$

Этот интеграл легко вычисляется с помощью формулы *)

$$\int_0^{\pi}\sin^q x\cos px\,dx = \frac{\pi q}{2^{q-2}(q^2-p^2)}\,\frac{\cos\frac{p\pi}{2}}{B\left(\frac{q+p}{2},\ \frac{q-p}{2}\right)}.$$

Пользуясь этой формулой, находим, что

$$\alpha_n = -4\pi\,|n|.$$

Таким образом, второе слагаемое J_2 в формуле (18) преобразовано к следующему виду:

$$J_2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\int_\Gamma F(\xi,\ a;\ 2n)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega. \qquad (27)$$

Мы нашли, таким образом, выражения для обоих слагаемых в формуле (18) (см. полученные выше формулы (21) и (27)). Подставим найденные значения для J_1 и J_2 в формулу (18). Мы получим, что

$$f(a) = \frac{1}{128\pi^3}\int_0^{\infty}\rho^2\,d\rho\int_\Gamma F(\xi;\ \rho)\,|[a,\ \xi]|^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega +$$
$$+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\int_\Gamma F(\xi,\ a;\ 2n)\,\delta([a,\ \xi])\,d\omega, \qquad (28)$$

где Γ — произвольная поверхность на конусе $[\xi,\ \xi]=0$, пересекающая каждую его образующую, форма $d\omega$ определяется из соотношения $d\xi = dP\,d\omega$ (где $d\xi$ — инвариантная мера на конусе; $P(\xi)=1$ — уравнение поверхности Γ).

В силу соотношения (23) для функций $F(l;\,2n)$ (имеющего место и для функций $F(\xi,\ b;\ 2n)$) в формуле (28) можно заменить прямую $l: x = a + t\xi$ любой прямой $l: x = b + t\xi$, умножив при этом подинтегральную функцию на $e^{2in\theta}$, где $\cos\theta = [a,\ b]$ $\left(\frac{\theta i}{k}\right.$ — расстояние от прямой $x = b + t\xi$ до точки a).

*) См. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, М. — Л., 1951, стр. 182, формула 3.454 (4).

Итак, мы доказали, что

$$f(a)=\frac{1}{128\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Gamma F(\xi;\ \rho)\,|\,[a,\ \xi]\,|^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty n\int_\Gamma F(\xi,\ b;\ 2n)\,e^{2in\theta}\delta([a,\ \xi])\,d\omega,\quad (28')$$

где $\cos\theta=[a,\ b]$.

Сформулируем полученный результат.

Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция в мнимом пространстве Лобачевского. Эта функция обладает двумя сериями компонент Фурье. Компоненты Фурье $F(\xi;\ \rho)$, $0\leqslant\rho<\infty$, принадлежащие непрерывной серии выражаются через функцию $f(x)$ по формулам

$$F(\xi;\ \rho)=\int f(x)\,|[x,\ \xi]|^{\frac{i\rho}{2}-1}\,dx.\qquad(29)$$

Компоненты Фурье $F(\xi,\ b;\ 2n)$, принадлежащие дискретной серии, выражаются формулами

$$F(\xi,\ b;\ 2n)=\int f(x)\,e^{-2in\theta}\delta([x,\ \xi])\,dx,\qquad(30)$$

где $\frac{\theta i}{k}$ — расстояние от изотропной прямой $l: y=b+t\xi$ до точки x. Если вектор ξ нормирован ($\xi_0=1$), будем писать $F(l;\ 2n)$ вместо $F(\xi,\ b;\ 2n)$.

Функция $F(\xi;\ \rho)$ является однородной функцией на конусе $[\xi,\ \xi]=0$, $\xi_0>0$, со степенью однородности $\frac{i\rho}{2}-1$. Функция $F(l;\ 2n)$ является функцией на множестве изотропных прямых, удовлетворяющей соотношению

$$F(l_2;\ 2n)=e^{2in\theta}F(l_1;\ 2n),\qquad(31)$$

где $\frac{i\theta}{k}$ — расстояние от изотропной прямой l_1 до параллельной ей изотропной прямой l_2.

Когда на функцию $f(x)$ действуют операторы представления

$$T(g)f(x)=f(xg)\qquad(32)$$

группы Лоренца, функции $F(\xi;\ \rho)$ преобразуются по неприводимым унитарным представлениям

$$Q(g)F(\xi;\ \rho)=F(\xi g;\ \rho),\qquad(33)$$

эквивалентным представлениям $T_\chi(g)$, $\chi=\left(\frac{i\rho}{2},\ \frac{i\rho}{2}\right)$ основной серии. Функции же $F(l;\ 2n)$ преобразуются при этом по неприводимым унитарным представлениям вида

$$R_{2n}(g)F(l;\ 2n)=\beta^{-1}(l,\ g)\,F(lg;\ 2n),\qquad(34)$$

которые эквивалентны представлениям $T_\chi(g)$, $\chi=(2n,\ -2n)$ (см. стр. 492).

Функция $f(x)$ выражается через свои компоненты Фурье $F(\xi,\ \rho)$ и $F(\xi,\ b;\ 2n)$ по формуле

$$f(x)=\frac{1}{128\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Gamma F(\xi;\ \rho)\,[x,\ \xi]^{-\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty n\int_\Gamma F(\xi,\ b;\ 2n)\,e^{2in\theta}\delta([x,\ \xi])\,d\omega,\qquad(35)$$

где ξ, Γ и $d\omega$ имеют указанный ранее смысл, а $\frac{i\theta}{k}$ — расстояние от прямой $y=b+t\xi$ до точки x.

Заметим, что первое и второе слагаемые в формуле (35) очень похожи. Это связано с тем, что пространство орисфер первого рода и пространство изотропных прямых родственны друг другу. Именно, они являются расслоенными пространствами с одной и той же базой — двумерной сферой Ω (сферу Ω можно, конечно, заменить любой гомеоморфной ей поверхностью Γ). Слоем в пространстве орисфер первого рода является луч (то есть мультипликативная группа вещественных положительных чисел). В пространстве же изотропных прямых слоем является окружность (то есть мультипликативная группа комплексных чисел z, $|z|=1$). Естественно оба этих пространства называть «к о н у с а м и».

Заметим, что как пространство орисфер первого рода, так и пространство изотропных прямых можно получить из комплексной аффинной плоскости, отождествляя некоторые ее точки. Именно, если отождествить точки $(e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$, где $0 \leqslant \theta < 2\pi$, то мы получим пространство орисфер первого рода. Если же отождествить точки $(\lambda z_1, \lambda z_2)$, где $\lambda \neq 0$ пробегает вещественные и чисто мнимые числа, то мы придем к пространству изотропных прямых.

5. Аналог формулы Планшереля для преобразования Фурье в мнимом пространстве Лобачевского. В заключение этого параграфа установим формулу Планшереля для преобразования Фурье в мнимом пространстве Лобачевского. При этом, как и в § 3, мы дадим нестрогий вывод этой формулы, не обосновывая возможности перемены порядка интегрирования.

Аналог формулы Планшереля в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$\int |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{128\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho \int_\Gamma |F(\xi;\rho)|^2\,d\omega + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty n\int_\Gamma |F(\xi;2n)|^2\,d\omega. \qquad (1)$$

Здесь, как и всегда, Γ — произвольная поверхность на конусе $[\xi,\xi]=0$, пересекающая каждую образующую; $d\omega$ — форма, определяемая равенством $d\xi = dP\,d\omega$, где $P(\xi)=1$ — уравнение поверхности Γ; $F(\xi;2n)$ — значение функции $F(\xi, b; 2n)$ для одной из изотропных прямых l с направляющим вектором ξ (поскольку все эти значения различаются лишь множителем вида $e^{2in\theta}$, то $|F(\xi;2n)|$ не зависит от выбора прямой l с направляющим вектором ξ).

Чтобы доказать формулу (1), рассмотрим интеграл

$$\int |f(x)|^2\,dx = \int f(x)\,\overline{f(x)}\,dx.$$

Заменим в этом интеграле $\overline{f(x)}$ выражением (35) из п. 4.

Мы получим, что

$$\int |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{128\pi^3}\int f(x)\,dx \int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Gamma \overline{F(\xi;\rho)}\,|[x,\xi]|^{\frac{i\rho}{2}-1}\,d\omega + \frac{4}{\pi^2}\int f(x)\,dx\left[\sum_{n=1}^\infty n\int_\Gamma \overline{F(\xi,b;2n)}\,e^{-2in\theta}\delta([x,\xi])\,d\omega\right] \qquad (2)$$

(смысл обозначений указан выше).

Рассмотрим первое слагаемое I_1 в правой части этого равенства. Изменим в этом слагаемом порядок интегрирования. Так как по формуле (29) из п. 4

$$\int f(x)\,|[x,\xi]|^{\frac{i\rho}{2}-1}\,dx = F(\xi;\rho),$$

то

$$I_1 = \frac{1}{128\pi^3}\int_0^\infty \rho^2\,d\rho\int_\Gamma |F(\xi;\rho)|^2\,d\omega.$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое I_2. В этом слагаемом также переставим порядок интегрирования и суммирования. Мы получим, что

$$I_2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty n\int_\Gamma \overline{F(\xi,b;2n)}\,d\omega\int f(x)\,e^{-2in\theta}\delta([x,\xi])\,dx,$$

где θ — расстояние от прямой l до точки x.

Но по формуле (30) из п. 4 имеем

$$\int f(x)\,e^{-2in\theta}\delta([x,\xi])\,dx = F(\xi,b;2n).$$

Поэтому

$$I_2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \int_\Gamma |F(\xi,b;2n)|^2\,d\omega.$$

Подставим найденные значения I_1 и I_2 в формулу (2).

Мы получим, что

$$\int |f(x)|^2 dx = \frac{1}{128\pi^3}\int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_\Gamma |F(\xi;\rho)|^2 d\omega + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty n \int_\Gamma |F(\xi; 2n)|^2 d\omega,$$

где через $F(\xi; 2n)$ обозначено значение функции $F(\xi, b; 2n)$ для одной из изотропных прямых l с направляющим вектором ξ (как мы указывали, значение $|F(\xi; 2n)|$ не зависит от выбора этой прямой).

Тем самым формула (1) доказана.

Из формулы (1) вытекает следующее утверждение. Обозначим через H гильбертово пространство функций $f(x)$ на мнимом пространстве Лобачевского, для которых сходится интеграл

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2 dx, \tag{3}$$

а через H_1 — пространство пар функций $\{F(\xi, \rho);\ F(\xi, b; 2n)\}$, для которых выражение

$$\|F\|^2 = \frac{1}{128\pi^3}\int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_\Gamma |F(\xi;\rho)|^2 d\omega + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty n \int_\Gamma |F(\xi; 2n)|^2 d\omega \tag{4}$$

имеет конечное значение*).

Тогда отображение

$$f(x) \to \{F(\xi;\rho);\ F(\xi, b; 2n)\},$$

где

$$F(\xi;\rho) = \int f(x)|[\xi, x]|^{\frac{i\rho}{2}-1} dx,$$

$$F(\xi, b; 2n) = \int f(x) e^{-2in\theta}\delta([x, \xi])\, dx$$

*) Через $F(\xi; 2n)$ обозначено одно из значений функции $F(l; 2n)$ для прямых l с направляющим вектором ξ.

является изометрическим вложением пространства H в пространство H_1.

Можно показать, что образ пространства H при этом отображении состоит из всех пар функций $\{F(\xi;\rho);\ F(\xi, b; 2n)\}$, для которых конечно выражение (4).

Если же рассматривать функции $F(\xi;\rho)$ и $F(\xi, b; 2n)$ как для положительных, так и для отрицательных значений ρ и n, то они должны, кроме того, удовлетворять следующим условиям симметрии:

Для любой точки x мнимого пространства Лобачевского

$$\int_\Gamma F(\xi;\rho)|[x, \xi]|^{-\frac{i\rho}{2}-1} d\omega = \int_\Gamma F(\xi; -\rho)|[x, \xi]|^{\frac{i\rho}{2}-1} d\omega$$

и

$$\int_\Gamma F(\xi; 2n)\delta([x, \xi])\, d\omega = \int_\Gamma F(\xi; -2n)\delta([x, \xi])\, d\omega.$$

6. Интегральные преобразования, связанные с плоскостями пространства Лобачевского. Мы получили в этой главе разложение функций в обычном и в мнимом пространствах Лобачевского в интеграл Фурье. В основе примененного здесь метода лежало интегральное преобразование, сопоставляющее функциям в пространстве Лобачевского функции в пространстве орисфер. С точки зрения интегральной геометрии интересно также рассмотреть интегральные преобразования, связанные с плоскостями в обычном и в мнимом пространствах Лобачевского. Однако в данной книге мы их не будем изучать и укажем лишь, чем эти преобразования интересны.

Сначала рассмотрим обычное пространство Лобачевского. Как уже отмечалось в п. 4 § 1 гл. V, плоскость в пространстве Лобачевского задается уравнением $[x, \xi] = 0$, где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — однородные координаты в пространстве Лобачевского и $[\xi, \xi] < 0$. (Если $[\xi, \xi] \geqslant 0$, то $[x, \xi] > 0$ для любой точки x.) Легко убедиться, что множество плоскостей пространства Лобачевского есть однородное пространство, тождественное мнимому пространству Лобачевского. Таким образом, *интегрируя по плоскостям функцию f в пространстве Лобачевского мы сопоставляем функции f в пространстве Лобачевского, функцию φ в мнимом пространстве Лобачевского*. Заметим, что φ не может быть «любой» функцией в мнимом пространстве Лобачевского, так как в разложение функций в мнимом пространстве Лобачевского входит больше неприводимых представлений, чем в обычном пространстве Лобачевского. Существует формула обращения, выражающая функцию f через функцию φ. (Эта формула выводится тем же методом, что и в главе V для преобразований, связанных с орисферами.)

Теперь рассмотрим мнимое пространство Лобачевского. Плоскостями в этом пространстве назовем, по аналогии с обычным пространством Лобачевского, поверхности $[x, \xi]=0$. В отличие от обычного пространства Лобачевского ξ может быть произвольным вектором. Таким образом, множество плоскостей мнимого пространства Лобачевского распадается на три семейства: плоскости первого рода, для которых $[\xi, \xi]>0$, плоскости второго рода, для которых $[\xi, \xi]=0$, и плоскости третьего рода, для которых $[\xi, \xi]<0$. Легко показать, что каждое из этих семейств однородно, причем множество плоскостей первого рода тождественно обычному пространству Лобачевского, множество плоскостей второго рода тождественно абсолюту и множество плоскостей третьего рода тождественно мнимому пространству Лобачевского. Легко показать также, что плоскости второго и третьего рода расслаиваются на изотропные прямые; плоскости первого рода являются компактными многообразиями.

Рассмотрим теперь плоскости первого рода. *Интегрируя функцию f в мнимом пространстве Лобачевского по плоскостям первого рода, мы сопоставим тем самым функции f в мнимом пространстве Лобачевского функцию φ в обычном пространстве Лобачевского.* Отображение $f \to \varphi$ не взаимно однозначно (так как в противном случае функции φ разлагались бы по тем же неприводимым представлениям, что и функции f, а это, как мы знаем, неверно). Следовательно, зная интегралы функции f по плоскостям первого рода, мы не можем однозначно восстановить функцию f.

Можно показать, что если дополнительно задать интегралы функции f по изотропным прямым мнимого пространства Лобачевского, то отсюда уже функция f будет однозначно определена. Формула обращения может быть получена тем же методом, что и в главе V для преобразований, связанных с орисферами. Заметим, что на основании этой формулы обращения задача о разложении функции в мнимом пространстве Лобачевского в интеграл Фурье может быть сведена к более простым задачам о разложении в интеграл Фурье функции в обычном пространстве Лобачевского и в пространстве изотропных прямых мнимого пространства Лобачевского.

§ 5. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАР (z_1, z_2), $z_1 \neq z_2$, ТОЧЕК КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим пространство пар (z_1, z_2), $z_1 \neq z_2$, точек комплексной проективной прямой. Сопоставим каждой комплексной матрице $g=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, следующее преобразование в этом пространстве:

$$(z_1, z_2) \to \left(\frac{\alpha z_1+\gamma}{\beta z_1+\delta}, \frac{\alpha z_2+\gamma}{\beta z_1+\delta}\right). \qquad (1)$$

Можно показать, что такими преобразованиями мы можем любую пару (z_1, z_2) перевести в любую другую. Таким образом, *пары (z_1, z_2), $z_1 \neq z_2$, точек комплексной проективной прямой образуют однородное пространство относительно группы преобразований* (1).

Свяжем с пространством пар (z_1, z_2) унитарное представление группы Лоренца. Это представление будет строиться в пространстве функций $f(z_1, z_2)$, для которых

$$\|f\|^2=\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |f(z_1, z_2)|^2\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2 < \infty. \qquad (2)$$

Оператор представления задается следующим образом:

$$T(g) f(z_1, z_2)=f\left(\frac{\alpha z_1+\gamma}{\beta z_1+\delta}, \frac{\alpha z_2+\gamma}{\beta z_2+\delta}\right) \times$$
$$\times (\beta z_1+\delta)^{n_1'-1}\,\overline{(\beta z_1+\delta)}^{n_2'-1}\,(\beta z_2+\delta)^{n_1''-1}\,\overline{(\beta z_2+\delta)}^{n_2''-1}, \qquad (3)$$

где $n_1'=-\bar{n}_2'$, $n_1''=-\bar{n}_2''$. Это представление называется *кронекеровским произведением* двух неприводимых унитарных представлений (основной серии)

$$T_1(g) f(z)=f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)(\beta z+\delta)^{n_1'-1}\,\overline{(\beta z+\delta)}^{n_2'-1}$$

и

$$T_2(g) f(z)=f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)(\beta z+\delta)^{n_1''-1}\,\overline{(\beta z+\delta)}^{n_2''-1}.$$

Задача состоит в том, чтобы разложить функции $f(z_1, z_2)$ в интеграл Фурье, то есть, иными словами, разложить представление (3) на неприводимые представления.

Мы покажем здесь, как решить эту задачу, применяя методы интегральной геометрии. При этом мы будем ограничиваться лишь формулировкой результатов (их подробное доказательство читатель найдет в [19], где аналогичная задача решалась для произвольной комплексной полупростой группы).

Сформулируем для пространства пар (z_1, z_2), $z_1 \neq z_2$, задачу интегральной геометрии. Рассмотрим орисферы в этом пространстве, то есть многообразия, порожденные движениями из подгруппы матриц вида $\begin{Vmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ или из подгруппы, ей сопряженной. Задача состоит в том, чтобы, зная интегралы функции $f(z_1, z_2)$ по всевозможным орисферам, восстановить эту функцию. (Точная постановка задачи будет дана несколько позже.)

Как было показано в п. 6, § 1, орисферы в пространстве пар z_1, z_2 задаются уравнениями

$$z_1 - z_2 = (a - bz_1)(a - bz_2),$$

где $(a, b) \neq (0, 0)$.

При сдвиге $(z_1, z_2) \to \left(\frac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta}, \frac{\alpha z_2 + \gamma}{\beta z_2 + \delta}\right)$ параметры a и b, задающие орисферу ω, преобразуются по формулам

$$a' = \alpha a + \gamma b,$$
$$b' = \beta a + \delta b.$$

Таким образом, *множество всех орисфер в пространстве пар* (z_1, z_2) *есть однородное пространство. Это пространство тождественно комплексной аффинной плоскости, на которой отождествлены диаметрально противоположные точки* (a, b), $(-a, -b)$ (*поскольку эти точки задают одну и ту же орисферу*). Поэтому разложение функций на пространстве орисфер в интеграл Фурье осуществляется элементарно.

Теперь определим интеграл по орисфере

$$z_1 - z_2 = (a - bz_1)(a - bz_2). \tag{4}$$

Пусть (z_1^0, z_2^0) — какая-либо точка в пространстве пар. Будем предполагать, что $z_1^0 \neq 0$, $z_2^0 \neq 0$. Тогда орисферу (4), при условии что $b \neq 0$, можно задать следующими параметрическими уравнениями:

$$z_1 = \frac{u}{v} + \frac{z_1^0}{v^2(z_1^0\zeta + 1)}, \quad z_2 = \frac{u}{v} + \frac{z_2^0}{v^2(z_2^0\zeta + 1)}, \tag{5}$$

где ζ — комплексный параметр и

$$u = s^{\frac{1}{2}}a, \quad v = s^{\frac{1}{2}}b,$$

где $s = z_1^0 z_2^0 (z_1^0 - z_2^0)^{-1}$, а $s^{\frac{1}{2}}$ — любое из значений квадратного корня.

Пусть $f(z_1, z_2)$ — бесконечно дифференцируемая функция, сосредоточенная в достаточно малой окрестности точки (z_1^0, z_2^0) *). Определим интеграл функции $f(z_1, z_2)$ по орисфере (5) следующей формулой:

$$\varphi(u, v) = \frac{i}{2}\int f\left(\frac{u}{v} + \frac{z_1^0}{v^2(\zeta z_1^0 + 1)}, \quad \frac{u}{v} + \frac{z_2^0}{v^2(\zeta z_2^0 + 1)}\right) \times$$
$$\times\, a\left(v(\zeta z_1^0 + 1), v(\zeta z_2^0 + 1)\right) d\zeta\, d\bar{\zeta}, \tag{6}$$

где для краткости обозначено

$$a(z_1, z_2) = z_1^{n_1'-1}\bar{z}_1^{n_2'-1} z_2^{n_1''-1}\bar{z}_2^{n_2''-1}. \tag{7}$$

Можно показать, что при таком определении интеграла по орисфере функция $\varphi(u, v)$ обладает следующим свойством. Если к функции $f(z_1, z_2)$ применить оператор представления $T(g)$, определяемый формулой (3), то соответствующая ей функция $\varphi(u, v)$ перейдет в функцию

$$T(g)\varphi(u, v) = \varphi(u\alpha + v\gamma, u\beta + v\delta). \tag{8}$$

Иными словами, при отображении $f(z_1, z_2) \to \varphi(u, v)$ представление в пространстве функций $f(z_1, z_2)$ переходит в представление (8).

Задача интегральной геометрии состоит в том, чтобы по функции $\varphi(u, v)$ восстановить функцию $f(z_1, z_2)$. Приведем без вывода решение этой задачи. Ограничимся тем, что запишем выражение для $f(z_1^0, z_2^0)$ через $\varphi(u, v)$ (для целей гармонического анализа этой формулы вполне достаточно). Имеет место следующая формула обращения:

$$f(z_1^0, z_2^0) = \frac{i}{2}\int |w_1 w_2|\, a^{-\frac{1}{2}}(w_1 w_2^{-1}, w_2 w_1^{-1}) \times$$
$$\times \frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\bar{\lambda}}\left\{|\lambda|^2 \varphi(\lambda\sqrt{w_1 w_2} z, \lambda\sqrt{w_1 w_2})\right\}_{\lambda=1} dz\, d\bar{z}, \tag{9}$$

где $w_1 = z_1^0(z_1^0 - z)^{-1}$, $w_2 = z_2^0(z_2^0 - z)^{-1}$, а $\sqrt{w_1 w_2}$ — любое из значений квадратного корня.

*) При этом предположении сходятся все интегралы, которые пишутся дальше.

Из формулы (9) легко получить выражение для функции f в произвольной точке (z_1, z_2). Для этого нужно применить формулу (9) к функции $T(g)f$ и учесть при этом, что функции $T(g)f$ отвечает функция $T(g)\varphi(u, v) = \varphi(u\alpha + v\gamma, u\beta + v\delta)$.

На основании формулы обращения (9) мы можем легко решить основную задачу — разложить функцию $f(z_1, z_2)$ в интеграл Фурье.

Для этого рассмотрим преобразование Фурье функции $\varphi(u, v)$ на комплексной аффинной плоскости (которое в п. 1 § 2 мы называли преобразованием Меллина; ср. стр. 462, где это преобразование записано в однородных координатах). Имеем:

$$\psi(z; \chi) \equiv \psi(z; \rho, n) = \alpha^{-1}(\chi)\frac{i}{2}\int \varphi(\lambda z, \lambda)\lambda^{-n_1}\bar{\lambda}^{-n_2}\, d\lambda\, d\bar{\lambda}, \tag{10}$$

где

$$n_1 = \frac{n + i\rho}{2}, \quad n_2 = \frac{-n + i\rho}{2}$$

(n — целое, а ρ — произвольное вещественное число); разложение функции $\varphi(u, v)$ в интеграл Фурье имеет следующий вид:

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \alpha(\chi)\psi\left(\frac{u}{v}; \chi\right)v^{n_1-1}\bar{v}^{n_2-1}\, d\chi, \tag{11}$$

где интеграл по χ нужно понимать как интеграл по ρ и сумму по n.

Для удобства мы ввели в формулы (10) и (11) нормирующий множитель $\alpha(\chi)$:

$$\alpha(\chi) = \left(z_1^0\right)^{\frac{1}{2}(n_1'-n_1''-n_1-1)}\left(\overline{z_1^0}\right)^{\frac{1}{2}(n_2'-n_2''-n_2-1)}\left(z_2^0\right)^{\frac{1}{2}(n_1''-n_1'-n_1-1)}\times$$
$$\times\left(\overline{z_2^0}\right)^{\frac{1}{2}(n_2''-n_2'-n_2-1)}\left(z_2^0-z_1^0\right)^{\frac{1}{2}(n_1'+n_1''+n_1-1)}\left(\overline{z_2^0-z_1^0}\right)^{\frac{1}{2}(n_2'+n_2''+n_2-1)}. \tag{12}$$

Заметим, что функция $\varphi(u, v)$, определяемая по формуле (6), удовлетворяет дополнительно следующему условию четности:

$$\varphi(-u, -v) = a(-1, -1)\varphi(u, v) = (-1)^{(n_1'-n_2')+(n_1''-n_2'')}\varphi(u, v).$$

Отсюда следует, что в разложение (11) входят функции $\psi(z; \chi) \equiv \psi(z; \rho, n)$ либо только с четными n (когда числа $n_1' - n_2'$ и $n_1'' - n_2''$ имеют одинаковую четность и, значит, φ — четная функция), либо только с нечетными n (когда числа $n_1' - n_2'$ и $n_1'' - n_2''$ имеют различную четность и, значит, φ — нечетная функция).

Выразим функцию $\psi(z, \chi)$ непосредственно через исходную функцию $f(z_1, z_2)$. Для этого нам нужно подставить в формулу (10) вместо функции $\varphi(u, v)$ ее выражение через функцию $f(z_1, z_2)$. В результате, после элементарных преобразований, мы получим

$$\psi(z; \chi) = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^2\int A(z_1 - z, z_2 - z; \chi) f(z_1, z_2)\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2, \tag{13}$$

где положено

$$A(z, z'; \chi) = z^{\frac{1}{2}(n_1''-n_1'+n_1-1)}\,\bar{z}^{\frac{1}{2}(n_2''-n_2'+n_2-1)}\,z'^{\frac{1}{2}(n_1'-n_1''+n_1-1)}\times$$
$$\times\bar{z}'^{\frac{1}{2}(n_2'-n_2''+n_2-1)}(z'-z)^{\frac{1}{2}(-n_1'-n_1''-n_1-1)}\,\overline{(z'-z)}^{\frac{1}{2}(-n_2'-n_2''-n_2-1)}. \tag{14}$$

Мы видим, что благодаря подходящему выбору нормирующего множителя $\alpha(\chi)$ функция $\psi(z, \chi)$ не зависит от выбора точки (z_1^0, z_2^0).

Нам осталось найти выражение функции $f(z_1, z_2)$ через функцию $\psi(z; \chi)$, то есть получить искомое разложение функции $f(z_1, z_2)$ в интеграл Фурье. Для этого нужно подставить в формулу обращения (9) вместо функции $\varphi(u, v)$ ее выражение через функцию $\psi(z; \chi)$. В результате мы получим после элементарных преобразований следующую *формулу разложения функции* $f(z_1, z_2)$ *в интеграл Фурье*:

$$f(z_1^0, z_2^0) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{i}{2}\int n_1 n_2\,\overline{A(z_1^0 - z, z_2^0 - z; \chi)}\,\psi(z; \chi)\, dz\, d\bar{z}\, d\chi, \tag{15}$$

где ядро $A(z_1^0 - z, z_2^0 - z; \chi)$ выражается по формуле (14).

Из формул (13) и (15) можно также легко получить следующий *аналог формулы Планшереля для функции* $f(z_1, z_2)$

и ее преобразования Фурье $\psi(z;\ \chi)$:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |f(z_1,\ z_2)|^2 dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2 = \\ = -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int n_1 n_2\, |\psi(z;\ \chi)|^2 dz\, d\bar{z}\, d\chi\ ^{*)}.$$

В силу формулы Планшереля отображение $f(z_1,\ z_2) \to \psi(z;\ \chi)$ изометрично относительно норм

$$\|f\|^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |f(z_1,\ z_2)|^2 dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2$$

и

$$-\frac{1}{\pi^2}\,\frac{i}{2} \int n_1 n_2\, |\psi(z;\ \chi)|^2\, dz\, d\bar{z}\, d\chi.$$

Мы определили пока это отображение только для финитных функций $f(z_1,\ z_2)$, сосредоточенных в достаточно малой области. Однако ввиду изометричности это отображение можно продолжить на все функции $f(z_1,\ z_2)$, для которых $\|f\| < \infty$.

Интересен вопрос о том, каковы все те функции $\psi(z;\ \chi)$, которые являются преобразованием Фурье функций $f(z_1,\ z_2)$ с интегрируемым квадратом модуля. Однако этого вопроса мы здесь касаться не будем.

---

*) Напомним, что $-n_1 n_2 = |n_1|^2 = \dfrac{n^2+\rho^2}{4}$.

ГЛАВА VII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Настоящая глава представляет собой очерк, посвященный теории представлений группы вещественных матриц второго порядка с определителем 1. Мы ограничиваемся здесь конструкцией неприводимых представлений и изучением их свойств, оставляя в стороне вопросы гармонического анализа. Таким образом, по своему содержанию глава VII близка к главе III, где рассматривались аналогичные вопросы для группы комплексных матриц.

По сравнению с группой комплексных матриц представления группы вещественных матриц обладают рядом специфических особенностей. Основные из них — более сложная структура представлений в целых точках и существование представлений, реализуемых в пространстве аналитических функций. Об этих особенностях представлений группы вещественных матриц мы расскажем подробнее в § 2, где дана сводка результатов этой главы.

Как и в главе III, исследование ведется единым методом, основанным на изучении инвариантных билинейных функционалов. В известном смысле это исследование проще, чем для комплексного случая, поскольку мы имеем здесь дело с функциями не от комплексного, а от вещественного переменного.

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Описание пространств D_χ однородных функций. В этом параграфе мы рассмотрим представления группы G вещественных матриц $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. По аналогии *и ее преобразования Фурье* $\psi(z;\ \chi)$:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |f(z_1,\ z_2)|^2 dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2 =$$
$$= -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{i}{2}\right)^2 \int n_1 n_2\, |\psi(z;\ \chi)|^2\, dz\, d\bar{z}\, d\chi\ ^{*)}.$$

В силу формулы Планшереля отображение $f(z_1, z_2) \to \psi(z;\ \chi)$ изометрично относительно норм

$$\|f\|^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int |f(z_1,\ z_2)|^2\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2$$

и

$$-\frac{1}{\pi^2}\,\frac{i}{2} \int n_1 n_2\, |\psi(z;\ \chi)|^2\, dz\, d\bar{z}\, d\chi.$$

Мы определили пока это отображение только для финитных функций $f(z_1, z_2)$, сосредоточенных в достаточно малой области. Однако ввиду изометричности это отображение можно продолжить на все функции $f(z_1, z_2)$, для которых $\|f\| < \infty$.

Интересен вопрос о том, каковы все те функции $\psi(z;\ \chi)$, которые являются преобразованием Фурье функций $f(z_1, z_2)$ с интегрируемым квадратом модуля. Однако этого вопроса мы здесь касаться не будем.

---

*) Напомним, что $-n_1 n_2 = |n_1|^2 = \dfrac{n^2 + \rho^2}{4}$.

ГЛАВА VII

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Настоящая глава представляет собой очерк, посвященный теории представлений группы вещественных матриц второго порядка с определителем 1. Мы ограничиваемся здесь конструкцией неприводимых представлений и изучением их свойств, оставляя в стороне вопросы гармонического анализа. Таким образом, по своему содержанию глава VII близка к главе III, где рассматривались аналогичные вопросы для группы комплексных матриц.

По сравнению с группой комплексных матриц представления группы вещественных матриц обладают рядом специфических особенностей. Основные из них — более сложная структура представлений в целых точках и существование представлений, реализуемых в пространстве аналитических функций. Об этих особенностях представлений группы вещественных матриц мы расскажем подробнее в § 2, где дана сводка результатов этой главы.

Как и в главе III, исследование ведется единым методом, основанным на изучении инвариантных билинейных функционалов. В известном смысле это исследование проще, чем для комплексного случая, поскольку мы имеем здесь дело с функциями не от комплексного, а от вещественного переменного.

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Описание пространств D_χ однородных функций. В этом параграфе мы рассмотрим представления группы G вещественных матриц $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. По аналогии с группой комплексных матриц эти представления будут строиться в пространствах однородных функций $f(x_1, x_2)$, но уже не от комплексных, а от вещественных переменных.

Функция $f(x_1, x_2)$ двух вещественных переменных x_1 и x_2, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, называется *однородной функцией степени однородности* s, где s — произвольное комплексное число, если для любого вещественного числа $a > 0$ выполняется равенство

$$f(ax_1, ax_2) = a^s f(x_1, x_2).$$

Введем еще понятие четной и нечетной функций. Именно, скажем, что $f(x_1, x_2)$ есть *четная* функция, если

$$f(-x_1, -x_2) = f(x_1, x_2).$$

Если же

$$f(-x_1, -x_2) = -f(x_1, x_2),$$

то будем говорить, что $f(x_1, x_2)$ есть *нечетная* функция.

Рассмотрим всевозможные пары чисел $\chi = (s, \varepsilon)$, где s — произвольное комплексное число, а $\varepsilon = 0, 1$. Каждой такой паре $\chi = (s, \varepsilon)$ мы сопоставим пространство функций D_χ. Это пространство состоит из функций $f(x_1, x_2)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1. Функции $f(x_1, x_2)$ однородны степени однородности $s - 1$ *) и имеют заданную четность. Именно, при $\varepsilon = 0$ они предполагаются четными, а при $\varepsilon = 1$ — нечетными функциями.

Иными словами, для любого $a \neq 0$ выполняется соотношение

$$f(ax_1, ax_2) = |a|^{s-1} \operatorname{sign}^\varepsilon a \, f(x_1, x_2).$$

2. Функции $f(x_1, x_2)$ бесконечно дифференцируемы по x_1 и x_2 во всей плоскости, за исключением точки (0, 0).

Введем в пространстве D_χ топологию. Последовательность функций $\{f_n\}$ из пространства D_χ назовем *сходящейся к нулю*, если на любом ограниченном замкнутом множестве, не содержащем точки (0, 0), функции f_n равномерно сходятся к нулю вместе с производными любого порядка. Можно показать, что пространство D_χ полно относительно этой топологии.

*) Мы берем функции степени однородности $s - 1$, а не степени однородности s, поскольку это оказывается более удобным для дальнейшего.

Возможны другие реализации пространства D_χ. Рассмотрим на плоскости линию l, пересекающую каждую прямую, проходящую через точку (0, 0). Ввиду однородности и условия четности функции $f(x_1, x_2)$ однозначно определены своими значениями на линии l. Тем самым D_χ можно задавать не как пространство однородных функций заданной четности, а как пространство функций на линии l. Отметим, что эти функции на линии l не вполне произвольны. Именно, если прямая $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ пересекает линию l в нескольких точках, то значения функции в этих точках различаются между собой множителями, не зависящими от выбора функции.

2. Две удобные реализации пространства D_χ. Приведем две полезные для дальнейшего реализации пространства D_χ.

Рассмотрим прямую $x_2 = 1$ на плоскости (x_1, x_2). Очевидно, что каждая однородная функция $f(x_1, x_2)$ заданной четности ε однозначно определяется своими значениями на прямой $x_2 = 1$. Сопоставим каждой функции $f(x_1, x_2)$ на D_χ функцию одного переменного

$$\varphi(x) = f(x, 1). \tag{1}$$

Очевидно, что функция $f(x_1, x_2)$ восстанавливается по функции $\varphi(x)$ следующей формулой:

$$f(x_1, x_2) = |x_2|^{s-1} \operatorname{sign}^\varepsilon x_2 \, \varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right). \tag{2}$$

Тем самым мы реализуем пространство D_χ как совокупность функций $\varphi(x)$ одного вещественного переменного x. Нетрудно установить, из каких именно функций $\varphi(x)$ состоит пространство D_χ. Именно, пространство D_χ состоит из функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) функции $\varphi(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями от x;

2) функции $\hat{\varphi}(x) = |x|^{s-1} \operatorname{sign}^\varepsilon x \, \varphi\left(-\frac{1}{x}\right)$ также являются бесконечно дифференцируемыми функциями от x.

Второе условие характеризует поведение функций $\varphi(x)$ при $|x| \to \infty$. В частности, из него следует, что функции $\varphi(x)$ имеют при $|x| \to \infty$ следующую асимптотику:

$$\varphi(x) \sim C |x|^{s-1} \operatorname{sign}^\varepsilon x.$$

Укажем еще одну удобную реализацию пространства D_χ. Рассмотрим окружность $x_1^2+x_2^2=1$. Каждая однородная функция из D_χ однозначно определяется своими значениями на окружности. Тем самым мы можем реализовать D_χ как пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\theta)$, заданных на окружности $x_1^2+x_2^2=1$ (θ — полярный угол). Эти функции удовлетворяют дополнительно условию четности

$$\varphi(\theta+\pi)=(-1)^\varepsilon\varphi(\theta).$$

Исходная однородная функция $f(x_1, x_2)$ восстанавливается по соответствующей ей функции $\varphi(\theta)$ следующей формулой:

$$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=r^{s-1}\varphi(\theta).$$

3. Представления группы G в пространствах D_χ. Теперь определим представление группы G вещественных унимодулярных матриц в пространстве D_χ. Каждая вещественная матрица $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, задает на плоскости (x_1, x_2) линейное преобразование

$$x_1'=\alpha x_1+\gamma x_2,\quad x_2'=\beta x_1+\delta x_2.$$

Этому линейному преобразованию отвечает преобразование

$$f(x_1, x_2)\to f(\alpha x_1+\gamma x_2,\ \beta x_1+\delta x_2)$$

в пространстве функций $f(x_1, x_2)$.

Ясно, что если функция $f(x_1, x_2)$ принадлежит пространству D_χ, то и $f(\alpha x_1+\gamma x_2,\ \beta x_1+\delta x_1)$ также принадлежит D_χ. Именно, вместе с функцией $f(x_1, x_2)$ функция $f(\alpha x_1+\gamma x_2, \beta x_1+\delta x_2)$ бесконечно дифференцируема и имеет ту же степень однородности и ту же четность, что и функция $f(x_1, x_2)$.

Таким образом, указанное преобразование является линейным преобразованием в пространстве D_χ. Мы обозначим это преобразование через $T_\chi(g)$, то есть положим

$$T_\chi(g)f(x_1, x_2)=f(\alpha x_1+\gamma x_2,\ \beta x_1+\delta x_2),$$

где f принадлежит D_χ. Нетрудно проверить, что преобразование $T_\chi(g)$ непрерывно в топологии пространства D_χ. Кроме того, это преобразование непрерывно зависит от g: если $\lim\limits_{m\to\infty} g_m=g$, то для любой функции $f(x_1, x_2)$ из пространства D_χ выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} T_\chi(g_m)f=T_\chi(g)f.$$

Легко убедиться, что для любых двух элементов g_1 и g_2 группы G выполняется равенство

$$T_\chi(g_1g_2)=T_\chi(g_1)T_\chi(g_2).$$

Таким образом, $T_\chi(g)$ является представлением группы G.

Итак, *каждой паре чисел — комплексному числу s и $\varepsilon=0, 1$ — сопоставлено представление $T_\chi(g)$, $\chi=(s, \varepsilon)$ группы G. Это представление строится в пространстве D_χ бесконечно дифференцируемых однородных функций $f(x_1, x_2)$ степени однородности $s-1$ и заданной четности (четных в случае $\varepsilon=0$ и нечетных в случае $\varepsilon=1$). Оператор представления задается формулой*

$$T_\chi(g)f(x_1, x_2)=f(\alpha x_1+\gamma x_2,\ \beta x_1+\delta x_2). \qquad (1)$$

4. Операторы $T_\chi(g)$ в других реализациях пространства D_χ. В п. 2 было отмечено, что пространство D_χ можно реализовать также как пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ одного переменного. Переход от однородных функций $f(x_1, x_2)$ к функциям $\varphi(x)$ осуществляется по формуле

$$f(x_1, x_2)=|x_2|^{s-1}\operatorname{sign}^\varepsilon x_2\,\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Отсюда легко установить, как выглядит оператор представления $T_\chi(g)$ в этой реализации пространства D_χ (рассуждения здесь дословно те же, что и в гл. III для случая группы комплексных матриц). Именно,

$$T_\chi(g)\varphi(x)=|\beta x+\delta|^{s-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(\beta x+\delta)\,\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right).$$

Рассмотрим еще случай, когда D_χ реализовано как пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\theta)$ на окружности (θ — полярный угол). Эти функции имеют заданную четность: $\varphi(\theta+\pi)=(-1)^{\varepsilon}\varphi(\theta)$. Переход от однородных функций $f(x_1, x_2)$ к функциям $\varphi(\theta)$ осуществляется по формуле

$$\varphi(\theta)=f(\cos\theta, \sin\theta).$$

Отсюда легко найти вид оператора представления в этой реализации пространства D_χ:

$$T_\chi(g)\varphi(\theta)=\varphi(\theta')\rho^{s-1}(\theta, g),$$

где

$$\rho^2(\theta, g)=(\alpha\cos\theta+\gamma\sin\theta)^2+(\beta\cos\theta+\delta\sin\theta)^2,$$

а угол θ' определяется из соотношений

$$\cos\theta'=\frac{\alpha\cos\theta+\gamma\sin\theta}{\rho(\theta, g)}, \quad \sin\theta'=\frac{\beta\cos\theta+\delta\sin\theta}{\rho(\theta, g)}.$$

Нетрудно написать оператор $T_\chi(g)$ и для общего случая, когда D_χ реализовано как пространство функций на некоторой линии l. Будем предполагать, что любая прямая $a_1x_1+a_2x_2=0$ пересекает линию l. Тогда любой паре чисел $(x_1, x_2)\neq(0, 0)$ отвечают точка $M(\omega_1, \omega_2)$ на l и число $\rho(x_1, x_2)$, такие, что

$$x_1=\rho(x_1, x_2)\omega_1, \quad x_2=\rho(x_1, x_2)\omega_2.$$

Формула для оператора представления имеет следующий вид:

$$T_\chi(g)f(\omega_1, \omega_2)=f\left(\frac{\alpha\omega_1+\gamma\omega_2}{\rho_g(\omega_1, \omega_2)}, \frac{\beta\omega_1+\delta\omega_2}{\rho_g(\omega_1, \omega_2)}\right)\times$$
$$\times|\rho_g(\omega_1, \omega_2)|^{s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}\rho_g(\omega_1, \omega_2),$$

где $\rho_g(\omega_1, \omega_2)=\rho(\alpha\omega_1+\gamma\omega_2, \beta\omega_1+\delta\omega_2)$.

5. Сопряженные представления. В п. 1 мы определили представления $T_\chi(g)$ в пространстве D_χ. Определим теперь представления в пространствах, сопряженных к D_χ.

Пусть D'_χ — пространство, сопряженное к D_χ, то есть пространство линейных функционалов F на пространстве D_χ. Тогда в сопряженном пространстве D'_χ мы можем задать представление $\tilde{T}_\chi(g)$ группы G следующим образом:

$$(\tilde{T}_\chi(g)F, \varphi)=(F, T_\chi^{-1}(g)\varphi).$$

Здесь (F, φ) обозначает, как обычно, значение функционала F, отвечающее функции φ. Операторы $\tilde{T}_\chi(g)$ образуют представление, то есть $\tilde{T}_\chi(g_1g_2)=\tilde{T}_\chi(g_1)\tilde{T}_\chi(g_2)$ для любых g_1, g_2; это проверяется непосредственной выкладкой.

Это представление $\tilde{T}_\chi(g)$ назовем *сопряженным* к представлению $T_\chi(g)$. Пусть нам задано представление $T_\chi(g)$, $\chi=(s, \varepsilon)$. Покажем, что *сопряженное представление* $\tilde{T}_\chi(g)$ *является расширением представления* $T_{-\chi}(g)$, $-\chi=(-s, \varepsilon)$. Это значит, что пространство $D_{-\chi}$ можно так вложить в пространство D'_χ, что операторы $\tilde{T}_\chi(g)$ совпадут на подпространстве $D_{-\chi}$ с операторами $T_{-\chi}(g)$.

В самом деле, каждая функция $\psi(x)$ из $D_{-\chi}$ определяет в пространстве D_χ линейный функционал следующего вида:

$$(\psi, \varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi\in D_\chi\ ^{*)}.$$

Тем самым пространство $D_{-\chi}$ вкладывается в сопряженное пространство D'_χ. Далее, непосредственной выкладкой мы можем убедиться в справедливости равенства

$$(T_{-\chi}(g)\psi, \varphi)=(\psi, T_\chi^{-1}(g)\varphi).$$

Следовательно,

$$(T_{-\chi}(g)\psi, \varphi)=(\tilde{T}_\chi(g)\psi, \varphi),$$

а потому $\tilde{T}_\chi(g)\psi=T_{-\chi}(g)\psi$, что и требовалось доказать.

§ 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ D_χ

В этом параграфе формулируются основные результаты о представлениях группы вещественных матриц в пространствах D_χ. Эти результаты будут получены позже в §§ 4 и 5.

Во многих отношениях представления группы вещественных матриц схожи с представлениями группы комплексных матриц, изученными уже в главе III. В то же время у пред-

*) В сходимости интеграла легко убедиться, учитывая асимптотику функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $|x|\to\infty$ (см. п. 2).

ставлений группы вещественных матриц имеется ряд специфических особенностей по сравнению с группой комплексных матриц. Представления группы вещественных матриц и проще и сложнее, чем представления группы комплексных матриц, подобно тому как вещественные числа и проще и сложнее комплексных чисел. Поэтому, несмотря на сходство приводимых ниже результатов с результатами главы III, мы излагаем их почти столь же подробно. Это позволяет читать главу VII независимо от главы III.

1. Неприводимость представлений в пространствах D_χ. В § 4 будет доказано, что единственными непрерывными операторами в пространстве D_χ, перестановочными с операторами представления, являются операторы, кратные единичному оператору. Это свойство пространства представления мы назвали в главе III операторной неприводимостью. При этом было отмечено, что операторная неприводимость не есть настоящая неприводимость. Так, представление может быть операторно неприводимым и в то же время в пространстве представления могут существовать инвариантные подпространства.

В гл. III, § 3, были даны более сильные определения неприводимости. Можно было бы доказать, что представление в D_χ, когда χ не является *целой* точкой, неприводимо и в смысле этих более сильных определений. Впрочем, доказывать этот результат мы не будем.

Особую роль играют представления D_χ, $\chi=(s, \varepsilon)$, в *целых* точках χ, то есть когда s — целое число той же четности, что и $\varepsilon+1$. Операторы этих представлений имеют следующий вид:

$$T_s(g) f(x) = f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{s-1} \text{*}). \tag{1}$$

По причине, которая будет ясна из дальнейшего, мы называем эти представления *аналитическими представлениями*. Мы увидим сейчас, что в целых точках $\chi=(s, \varepsilon)$ в пространствах $D_s \equiv D_\chi$ существуют инвариантные подпространства.

*) Такие представления однозначно определяются числом s. Поэтому мы часто будем обозначать их через $T_s(g)$, а соответствующие пространства через D_s.

При этом, в отличие от случая комплексной группы, таких инвариантных подпространств будет уже не одно, а три.

Сначала рассмотрим случай, когда $s=0, 1, 2, \ldots$ Очевидно, в этом случае в пространстве D_s имеется инвариантное подпространство E_s, состоящее из многочленов степени $\leqslant s-1$ *). В самом деле, операторы $T_s(g)$ переводят эти многочлены снова в многочлены степени $\leqslant s-1$. Размерность этого пространства многочленов есть s.

Поскольку подпространство E_s инвариантно, то представление группы G можно также реализовать в фактор-пространстве D_s/E_s, то есть в пространстве функций из D_s, определенных с точностью до многочленов степени $\leqslant s-1$.

В § 3 мы покажем, что имеется еще два инвариантных подпространства D_s^+ и D_s^- в пространстве D_s. Первое из них состоит из функций, которые с точностью до многочленов степени $\leqslant s-1$ граничны к функциям, аналитическим в верхней полуплоскости. Аналогично определяется второе пространство D_s^-. Мы увидим, что пересечение пространств D_s^+ и D_s^- есть подпространство многочленов E_s, а их сумма — все пространство D_s. Таким образом, фактор-пространство D_s/E_s распадается в прямую сумму инвариантных подпространств D_s^+/E_s и D_s^-/E_s. Можно показать, что в пространствах D_s^+/E_s и D_s^-/E_s уже нет инвариантных подпространств.

Теперь опишем структуру пространства D_{-s}, $s=1, 2, \ldots$, то есть пространства, в котором оператор представления имеет следующий вид:

$$T_{-s}(g) f(x) = f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{-s-1}.$$

Рассмотрим в пространстве D_{-s} подпространство F_{-s} таких функций $f(x)$, для которых равны нулю моменты

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx = 0,$$

где $k=0, 1, \ldots, s-1$. Можно без труда показать, что если к функции $f(x)$ применить оператор представления $T_{-s}(g)$, то ее моменты b_k $(k=0, \ldots, s-1)$ подвергнутся

*) Подразумевается, что $E_s=0$ при $s=0$.

линейному преобразованию. Следовательно, подпространство F_{-s} функций, у которых эти моменты равны нулю, инвариантно. Так как подпространство F_{-s} инвариантно, то представление группы G можно также реализовать в фактор-пространстве D_{-s}/F_{-s}. Ясно, что элементы этого фактор-пространства однозначно определяются моментами b_k ($k=0, 1, \ldots, s-1$). Таким образом, фактор-пространство D_{-s}/F_{-s} конечномерно и имеет размерность s.

Мы увидим в § 4, что в пространстве D_{-s} имеются еще два инвариантных подпространства, а именно, подпространство F^{+}_{-s} функций, граничных к функциям, аналитическим в верхней полуплоскости, и подпространство F^{-}_{-s} функций, граничных к функциям, аналитическим в нижней полуплоскости. Можно показать, что эти пространства F^{+}_{-s} и F^{-}_{-s} уже не содержат инвариантных подпространств.

Заметим, что пересечение подпространств F^{+}_{-s} и F^{-}_{-s} есть нуль. Мы увидим в § 4, что их сумма есть подпространство F_{-s}. Таким образом, подпространство F_{-s} функций, у которых равны нулю первые s моментов, есть прямая сумма инвариантных подпространств F^{+}_{-s} и F^{-}_{-s}.

2. Эквивалентность представлений в пространствах D_χ и роль целых точек. В гл. III (стр. 207) мы ввели понятие эквивалентности представлений. В § 4 будет показано, что *два представления D_{χ_1} и D_{χ_2} эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1) $\chi_1=\chi_2$;

2) $\chi_1=(s, \varepsilon)$, $\chi_2=(-s, \varepsilon)$, *причем χ_1 не есть целая точка, то есть s не является целым числом, имеющим ту же четность, что и $\varepsilon+1$.*

Там же будет доказано, что оператор A_1, отображающий пространство D_{χ_1} на пространство D_{χ_2} и удовлетворяющий условию перестановочности

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A, \tag{1}$$

определен в каждом из этих случаев однозначно с точностью до множителя.

В первом, тривиальном, случае, когда $\chi_1=\chi_2$, то есть пространства D_{χ_1} и D_{χ_2} совпадают, этот оператор кратен единичному оператору. Во втором случае, когда $\chi_1=(s, \varepsilon)$, $\chi_2=(-s, \varepsilon)$, оператор A имеет следующий вид:

$$A\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x|^{-s-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(x_1-x)\varphi(x_1)\,dx_1, \tag{2}$$

где интеграл нужно понимать в смысле регуляризованного значения.

В частности, при $s=0, 1, \ldots$ ε имеет ту же четность, что и s, и формула для оператора A принимает, с точностью до множителя, вид

$$A\varphi(x)=\varphi^{(s)}(x).$$

Формулу для оператора B, обратного оператору A, с точностью до постоянного множителя, мы получим, заменив в формуле (2) s на $-s$:

$$B\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x|^{s-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(x_1-x)\varphi(x_1)\,dx_1. \tag{2'}$$

Будем дальше считать существенно различными лишь неэквивалентные представления. Тогда мы можем говорить о множестве представлений группы G. Точками этого множества служат классы эквивалентных между собой представлений. Поскольку каждое представление $T_\chi(g)$ задается степенью однородности $s-1$ и четностью $\varepsilon=0, 1$, то мы можем ввести понятие *«римановой поверхности»* пространства представлений. Точки этой римановой поверхности задаются комплексным числом s и числом $\varepsilon=0, 1$. Тем самым универсальной накрывающей пространства представлений служит пара плоскостей комплексного переменного s.

Точкой ветвления римановой поверхности пространства представлений назовем такую точку, в любой сколь угодно малой окрестности которой содержатся эквивалентные между собой представления. Естественным образом определяется порядок ветвления. В силу сказанного выше единственными точками ветвления на римановой поверхности пространства представлений являются точки $s=0$ ($\varepsilon=0, 1$). Обе эти точки имеют порядок ветвления 2.

3. Вопрос об эквивалентности представлений в целых точках. Теперь рассмотрим представления

$$T_s f(x) = f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{s-1},$$

$$T_{-s} f(x) = f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{-s-1},$$

действующие соответственно в пространствах D_s и D_{-s}, где $s \neq 0$ — целое число. Для определенности будем предполагать число s положительным.

Мы увидим в § 4, что существует оператор A, отображающий пространство D_{-s} в пространство D_s и перестановочный с представлением. Он определен однозначно (с точностью до множителя) и имеет следующий вид:

$$A\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - x)^{s-1}\varphi(x_1)\,dx_1.$$

Очевидно, что оператор A уже не осуществляет изоморфизма пространств D_{-s} и D_s, поскольку он переводит любую функцию $\varphi(x)$ из D_{-s} в многочлен степени $\leqslant s-1$. Таким образом, представления в пространствах D_s и D_{-s} не эквивалентны.

Заметим, что ядром отображения A является подпространство F_{-s} функций $\varphi(x)$, у которых равны нулю моменты

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x)\,dx$$

при $k = 0, 1, \ldots, s-1$. Таким образом, оператор A осуществляет изоморфизм $D_{-s}/F_{-s} \cong E_s$, где E_s — пространство многочленов степени $\leqslant s-1$.

Теперь рассмотрим линейные отображения пространства D_s в пространство D_{-s}, перестановочные с представлением. Здесь картина оказывается более интересной. Именно, как мы покажем в § 4, существует два линейно независимых линейных оператора A_+, A_-, отображающих пространство D_s в пространство D_{-s} и перестановочных с представлением.

Эти операторы имеют следующий вид:

$$A_+\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1 - x - i0},$$

$$A_-\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1 - x + i0}.$$

В § 4 мы найдем ядро и образ отображений A_+ и A_-. Будет показано, что ядро отображения A_+ есть подпространство D_s^- функций $\varphi(x)$, которые с точностью до многочлена степени $\leqslant s-1$ являются граничными к аналитическим функциям из нижней полуплоскости. Образ отображения A_+ есть подпространство F_{-s}^+ функций, граничных к аналитическим функциям из верхней полуплоскости. Итак, отображение A_+ осуществляет изоморфизм $D_s/D_s^- \cong F_{-s}^+$. Аналогично оператор A_- осуществляет изоморфизм $D_s/D_s^+ \cong F_{-s}^-$.

Мы увидим в § 4, что не существует других пар представлений, кроме описанных в пп. 2 и 3, обладающих перестановочными операторами.

В гл. III, § 3 мы назвали два неприводимых представления ближайшими родственниками, если они индуцируются некоторым операторно неприводимым представлением — одно в инвариантном подпространстве, а другое в соответствующем фактор-пространстве. Мы назвали также два неприводимых представления родственниками, если их можно соединить конечной цепочкой ближайших родственников.

Можно легко показать, что конечномерное представление в пространстве E_s многочленов степени $\leqslant s-1$ является ближайшим родственником представлениям в подпространствах F_{-s}^+ и F_{-s}^- пространства D_{-s}. Тем самым представления в подпространствах F_{-s}^+ и F_{-s}^- оказываются родственниками. Можно было бы доказать, что представления в подпространствах F_{-s}^+ и F_{-s}^- не являются ближайшими родственниками и что не существует других родственных связей между неприводимыми представлениями группы G.

4. Унитарность представлений. В § 5 будут найдены условия, при которых в пространстве представления существует эрмитов положительно определенный функционал (φ, ψ), инвариантный относительно представления. В тех случаях, когда такой функционал существует, его можно рассматривать как скалярное произведение. Пополняя пространство по этому скалярному произведению, мы получим унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве.

В § 5 будет доказано, что скалярное произведение в пространстве D_χ, $\chi=(s, \varepsilon)$, можно ввести в следующих случаях:

а) $s=i\rho$ — мнимое число, $\varepsilon=0, 1$. В этом случае скалярное произведение имеет вид

$$(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

Представление в D_χ, $\chi=(i\rho, \varepsilon)$, будем называть представлением *основной серии.*

б) $\varepsilon=0$, $s\neq 0$ — вещественное число, лежащее в интервале $-1<s<1$. В этом случае скалярное произведение имеет вид

$$(\varphi, \psi)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x_1-x_2|^{-s-1}\varphi(x_1)\overline{\psi(x_2)}\,dx_1\,dx_2.$$

Представление в D_χ, $\chi=(s, 0)$, $-1<s<1$, $s\neq 0$, будем называть представлением *дополнительной серии.*

Примечательно, что этими двумя случаями еще не исчерпываются неприводимые унитарные представления группы G. Существуют еще унитарные представления, которые реализуются в инвариантных подпространствах пространства D_{-s}, $s=0, 1, \ldots$ Напомним, что через D_{-s} мы обозначили пространство, в котором действует представление

$$T_{-s}(g)=f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{-s-1}.$$

В этом пространстве D_{-s} имеются инвариантные подпространства F_{-s}^{+}, F_{-s}^{-}. Первое состоит из функций, граничных к функциям, аналитическим в верхней полуплоскости, второе — из функций, граничных к функциям, аналитическим в нижней полуплоскости.

Мы увидим в § 5, что на всем пространстве D_{-s} нельзя ввести скалярное произведение, но что его можно ввести в каждом из подпространств F_{-s}^{+} и F_{-s}^{-}. Приведем формулу для этого скалярного произведения.

Пространство F_{-s}^{+} удобно реализовать не как пространство функций на вещественной оси, граничных к аналитическим, а как пространство функций $\varphi(z)$, аналитических в верхней полуплоскости. В этой реализации скалярное произведение в пространстве F_{-s}^{+} задается следующей формулой:

$$(\varphi, \psi)=\frac{1}{\Gamma(s)}\,\frac{i}{2}\int \varphi(z)\overline{\psi(z)}(\operatorname{Im} z)^{s-1}\,dz\,d\bar{z},$$

где интеграл берется по верхней полуплоскости. Аналогичной формулой задается скалярное произведение в пространстве F_{-s}^{-}. Представления в пространствах F_{-s}^{+} и F_{-s}^{-}, $s=0, 1, \ldots$, будем называть представлениями *дискретной серии.*

§ 3. ИНВАРИАНТНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

В § 2 были сформулированы результаты о представлениях $T_\chi(g)$ группы G. Все эти результаты будут получены единым методом, связанным с изучением инвариантных билинейных функционалов.

Именно, решим сначала следующую задачу. Пусть заданы два представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ группы G. Спрашивается, когда эти представления обладают инвариантным билинейным функционалом? Напомним, что билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$, где $\varphi\in D_{\chi_1}$ и $\psi\in D_{\chi_2}$, называется инвариантным, если

$$B(T_{\chi_1}(g)\varphi,\ T_{\chi_2}(g)\psi)=B(\varphi, \psi)$$

для любого элемента g группы G.

Поставленная задача будет решена в этом параграфе. Ее решение будет проведено по существу так же, как и для группы комплексных матриц в гл. III. Именно, будем рассматривать не все матрицы группы G, а лишь матрицы следующего вида:

$$g_1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x_0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad g_2=\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{Vmatrix}, \quad g_3=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}\text{*)}.$$

*) Эти матрицы определяют на прямой соответственно преобразование сдвига $x\to x+x_0$, подобия $x\to\alpha^2 x$ и инверсии $x\to -\dfrac{1}{x}$.

Можно показать, что любая матрица группы G представима в виде произведения таких матриц. Поэтому при выяснении, является ли некоторый билинейный функционал инвариантным, достаточно ограничиться операторами $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$, отвечающими этим матрицам.

1. Отыскание билинейного функционала, инвариантного относительно операторов сдвига и подобия. Пусть заданы два представления группы G

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(x) = |\beta x+\delta|^{s_1-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon_1}(\beta x+\delta)\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right) \qquad (1)$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\varphi(x) = |\beta x+\delta|^{s_2-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon_2}(\beta x+\delta)\psi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right), \qquad (1')$$

действующие соответственно в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2}. Будем искать билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$, инвариантный относительно операторов $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$, где g — матрицы вида $g=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x_0 & 1\end{Vmatrix}$ и $g=\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}\end{Vmatrix}$.

Рассмотрим пока функционал $B(\varphi, \psi)$ только на множестве финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Матрицам $g=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x_0 & 1\end{Vmatrix}$ отвечают операторы сдвига

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(x) = \varphi(x+x_0),$$
$$T_{\chi_2}(g)\psi(x) = \psi(x+x_0).$$

Тем самым условие инвариантности билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ относительно операторов сдвига имеет вид

$$B(\varphi, \psi) = B(\varphi(x+x_0), \quad \psi(x+x_0)).$$

Теперь воспользуемся следующим результатом. Всякий билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ в пространстве K финитных бесконечно дифференцируемых функций, инвариантный относительно сдвигов, имеет следующий вид:

$$B(\varphi, \psi) = (B_0, \omega). \qquad (2)$$

Здесь B_0 — линейный функционал на K, а $\omega(x)$ — функция, определяемая равенством

$$\omega(x) = \int \varphi(x_1)\psi(x+x_1)\,dx_1\ ^{*)}. \qquad (3)$$

Итак, мы нашли общий вид билинейного функционала, инвариантного относительно операторов сдвига.

Потребуем теперь, чтобы функционал $B(\varphi, \psi)$ был также инвариантен относительно операторов $T_{\chi}(g)$, где

$$g=\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}\end{Vmatrix}.$$

Эти операторы имеют следующий вид:

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(x) = |\alpha|^{-s_1+1}\operatorname{sign}^{\varepsilon_1}\alpha\,\varphi(\alpha^2 x)$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\psi(x) = |\alpha|^{-s_2+1}\operatorname{sign}^{\varepsilon_2}\alpha\,\varphi(\alpha^2 x).$$

Условие инвариантности билинейного функционала $B(\varphi, \psi)$ относительно операторов $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ записывается так:

$$B(\varphi, \psi) = |\alpha|^{-s_1-s_2+2}\operatorname{sign}^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\alpha B[\varphi(\alpha^2 x), \ \psi(\alpha^2 x)]. \qquad (4)$$

Прежде всего заметим, что *представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ должны иметь одинаковую четность.* В самом деле, подставляя в (4) $\alpha=-1$, получим

$$B(\varphi, \psi) = (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}B(\varphi, \psi),$$

откуда $\varepsilon_1=\varepsilon_2$.

Заменим теперь в равенстве (4) билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ его выражением $B(\varphi, \psi) = (B_0, \omega)$. Принимая во внимание, что

$$\int \varphi(\alpha^2 x_1)\psi[\alpha^2(x+x_1)]\,dx_1 =$$
$$= \alpha^{-2}\int \varphi(x_1)\psi(\alpha^2 x+x_1)\,dx_1 = \alpha^{-2}\omega(\alpha^2 x),$$

мы получим

$$(B_0, \omega) = |\alpha|^{-s_1-s_2}(B_0, \omega(\alpha^2 x)).$$

*) См. стр. 218.

Считая, что $\alpha > 0$ и заменяя α на $\alpha^{1/2}$, мы можем переписать это условие в виде

$$(B_0, \omega) = \alpha^{-\frac{s_1+s_2}{2}} (B_0, \omega(\alpha x)). \tag{5}$$

Равенство (5) означает, что B_0 есть однородная обобщенная функция степени однородности $\lambda = -\frac{s_1+s_2}{2} - 1$.

Напомним читателю основные факты, касающиеся однородных обобщенных функций одного переменного *).

Для каждого комплексного числа λ существуют, с точностью до постоянного множителя, одна четная и одна нечетная однородная обобщенная функция степени однородности λ; любая другая однородная функция есть их линейная комбинация. Эти функции определяются следующим образом. В случае, когда $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, четная однородная функция $|x|^\lambda$ степени однородности λ задается интегралом

$$(|x|^\lambda, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\lambda \varphi(x)\, dx;$$

нечетная однородная функция $|x|^\lambda \operatorname{sign} x$ задается интегралом

$$(|x|^\lambda \operatorname{sign} x, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\lambda \operatorname{sign} x\, \varphi(x)\, dx.$$

Оба интеграла сходятся, если $\operatorname{Re}\lambda > -1$. При $\operatorname{Re}\lambda < -1$ их нужно понимать в смысле регуляризованного значения (именно, в смысле аналитического продолжения по λ). Если же $\lambda = -k$, $k = 1, 2, \ldots$, то мы имеем две линейно независимые функции степени однородности λ: $\delta^{(k-1)}(x)$ и x^{-k}. Одна из этих функций является четной, а другая — нечетной.

Итак, нами установлено, что *инвариантный билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ может существовать только у представлений $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$ одинаковой четности. Этот функционал (если он существует) задается для каждой пары финитных функций φ, ψ формулой*

$$B(\varphi, \psi) = \int B_0(x) \int \varphi(x + x_1) \psi(x)\, dx_1\, dx,$$

*) См. «Обобщенные функции», вып. 1, стр. 109—110.

где $B_0(x)$ — обобщенная однородная функция степени однородности $-\frac{s_1+s_2}{2} - 1$. Эта функция $B_0(x)$ имеет следующий вид:

если $\frac{s_1+s_2}{2} \neq 0, 1, 2, \ldots$, то

$$B_0(x) = C_1 |x|^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1} + C_2 |x|^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1} \operatorname{sign} x;$$

если же $\frac{s_1+s_2}{2} = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$B_0(x) = C_1 \delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x) + C_2 x^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}.$$

2. Необходимые и достаточные условия существования инвариантного билинейного функционала. Выясним теперь, для каких показателей s_1, s_2 может существовать инвариантный билинейный функционал. Предположим, что такой функционал существует. Тогда, как следует из п. 1, для финитных функций φ, ψ он задается формулой

$$B(\varphi, \psi) = \int B_0(x_1 - x_2) \varphi(x_1) \psi(x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

где $B_0(x)$ — однородная обобщенная функция степени однородности $-\frac{s_1+s_2}{2} - 1$. Эту формулу мы получили из условия инвариантности билинейного функционала относительно операторов сдвига и подобия.

Установим, какие ограничения на степень однородности налагает инвариантность функционала относительно операторов $T_{\chi_1}(g_0)$ и $T_{\chi_2}(g_0)$, отвечающих матрице $g_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$. Эти операторы имеют следующий вид:

$$T_{\chi_1}(g_0)\varphi(x) = |x|^{s_1-1} \operatorname{sign}^\varepsilon x\, \varphi\left(-\frac{1}{x}\right), \tag{1}$$

$$T_{\chi_2}(g_0)\psi(x) = |x|^{s_2-1} \operatorname{sign}^\varepsilon x\, \psi\left(-\frac{1}{x}\right). \tag{1'}$$

Поскольку преобразования (1) и (1′) переводят, вообще говоря, финитные функции в нефинитные, мы наложим на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ добавочное ограничение. Именно, потребуем, чтобы функции φ и ψ обращались в нуль в некоторой окрестности точки $x=0$. Тогда $T_{\chi_1}(g_0)\varphi$ и $T_{\chi_2}(g_0)\psi$ также являются финитными функциями.

Условие инвариантности билинейного функционала относительно операторов $T_{\chi_1}(g_0)$ и $T_{\chi_2}(g_0)$ принимает следующий вид:

$$\int B_0(x_1-x_2)\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2 = \\ = \int B_0(x_1-x_2)|x_1|^{s_1-1}|x_2|^{s_2-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(x_1x_2)\times \\ \times\varphi\left(-\frac{1}{x_1}\right)\psi\left(-\frac{1}{x_2}\right)dx_1\,dx_2. \qquad (2)$$

Сделаем замену переменных $x_1=-\frac{1}{x_1'}$, $x_2=-\frac{1}{x_2'}$. Тогда равенство (2) примет вид

$$\int\int B_0(x_1-x_2)\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2 = \\ = \int B_0\left(\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right)|x_1|^{-s_1-1}|x_2|^{-s_2-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(x_1x_2)\times \\ \times\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2, \qquad (2')$$

где $B_0(x)$ — однородная функция степени однородности $-\frac{s_1+s_2}{2}-1$. Спрашивается, для каких пар s_1 и s_2 это равенство возможно.

Рассмотрим сначала случай, когда $\frac{s_1+s_2}{2}\neq 0, 1, \ldots$ В этом случае обобщенная функция $B_0(x)$ есть линейная комбинация функций $|x|^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}$ и $|x|^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}\operatorname{sign} x$. Мы предположим, что

$$B_0(x)=|x|^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}\operatorname{sign}^\nu x, \quad \nu=0, 1\ ^*).$$

*) Казалось бы, нужно рассмотреть и общий случай, когда $B_0(x)=c_1|x|^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}+c_2|x|^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}\operatorname{sign} x$. Можно показать, однако, что если $c_1\neq 0$, $c_2\neq 0$, то соответствующий билинейный функционал никогда не будет инвариантным.

Чтобы интеграл (2′) сходился в обычном смысле, мы сделаем дополнительные предположения о функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Именно, предположим, что они имеют попарно непересекающиеся носители. Это значит, что на прямой существуют такие замкнутые множества A_1, A_2 без общих точек, что $\varphi(x)=0$ вне A_1 и $\psi(x)=0$ вне A_2. Тогда оба интеграла в (2′) будут сходиться и мы получим

$$\int|x_1-x_2|^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}\operatorname{sign}^\nu(x_1-x_2)\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2 = \\ = \int|x_1-x_2|^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}\operatorname{sign}^\nu(x_1-x_2)|x_1|^{\frac{s_2-s_1}{2}}|x_2|^{\frac{s_1-s_2}{2}}\times \\ \times\operatorname{sign}^{\varepsilon-\nu}(x_1x_2)\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Ясно, что это равенство справедливо лишь при условии, что $\nu=\varepsilon$ и $s_1=s_2$.

Итак, *пусть $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ — представления группы G одинаковой четности ε с показателями s_1 и s_2 соответственно, причем $\frac{s_1+s_2}{2}\neq 0, 1, \ldots$ Тогда билинейный функционал, инвариантный относительно представлений $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$, может существовать лишь при условии, что $s_1=s_2$. Этот функционал (если он существует) определяется однозначно, с точностью до постоянного множителя. Для финитных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ он задается следующей формулой:*

$$B(\varphi, \psi)=\int|x_1-x_2|^{-s_1-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(x_1-x_2)\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2. \qquad (3)$$

(При $\operatorname{Re} s_1>0$ интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения.)

Теперь рассмотрим случай, когда $\frac{s_1+s_2}{2}=0, 1, \ldots$ В этом случае обобщенная однородная функция $B_0(x)$ есть линейная комбинация функций $\delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x)$ и $x^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}$. Предположим сначала, что

$$B_0(x)=\delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x).$$

Тогда равенство (2′) принимает вид

$$\int \delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x_1 - x_2)\,\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$
$$= \int \delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right)|x_1|^{-s_1-1}\,|x_2|^{-s_2-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}(x_1 x_2)\times$$
$$\times\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2. \qquad (4)$$

Это равенство можно упростить. Именно, пользуясь тем, что $\varphi(x_1)\psi(x_2)=0$ в окрестности прямых $x_1=0$ и $x_2=0$, мы можем вынести $x_1 x_2$ в соответствующей степени за знак δ-функции *). В результате получим

$$\int \delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x_1 - x_2)\,\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$
$$= \int \delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x_1 - x_2)|x_1|^{-s_1}|x_2|^{-s_2}(x_1 x_2)^{\frac{s_1+s_2}{2}}\operatorname{sign}^{\varepsilon}(x_1 x_2)\times$$
$$\times\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

откуда

$$\int \varphi^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x)\,\psi(x)\,dx =$$
$$= \int\left[|x|^{\frac{s_2-s_1}{2}}\varphi(x)\right]^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}|x|^{\frac{s_1-s_2}{2}}\psi(x)\,dx.$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$\varphi^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x) = |x|^{\frac{s_1-s_2}{2}}\left[|x|^{\frac{s_2-s_1}{2}}\varphi(x)\right]^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}.$$

Это равенство заведомо справедливо в случае, когда $s_1 = s_2$. Если же $s_1 \neq s_2$, то должно быть $s_1 = -s_2$, ибо в противном случае, дифференцируя произведение, стоящее в правой части, мы получили бы более одного слагаемого.

Итак, *если* $\frac{s_1+s_2}{2} = 0, 1, \ldots$ *и билинейный функционал задается ядром* $\delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x_1 - x_2)$, *то этот функционал может оказаться инвариантным лишь в следующих двух случаях*:

1) $s_1 = s_2$,
2) $s_1 = -s_2$.

Предположим теперь, что

$$B_0(x) = x^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}\ {}^{*)}.$$

Тогда, при условии, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют непересекающиеся носители, равенство (2′) дает

$$\int (x_1 - x_2)^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$
$$= \int (x_1 - x_2)^{-\frac{s_1+s_2}{2}-1}|x_1|^{-s_1-1}|x_2|^{-s_2-1}(x_1 x_2)^{\frac{s_1+s_2}{2}+1}\times$$
$$\times\operatorname{sign}^{\varepsilon}(x_1 x_2)\,\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2. \qquad (5)$$

Ясно, что равенство возможно лишь при условии, что $s_1 = s_2 (=0, 1, \ldots)$ и притом $s_1 + 1$ имеет ту же четность, что и ε. Эти условия на s_1, s_2 уже встречались ранее, когда мы рассматривали функционал с ядром $\delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x_1 - x_2)$.

Заметим, что в случае, о котором идет сейчас речь, операторы представлений задаются следующими формулами:

$$T_\chi(g)\,\varphi(x) = (\beta x + \delta)^{s_1-1}\varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right),$$
$$T_\chi(g)\,\psi(x) = (\beta x + \delta)^{s_2-1}\psi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right),$$

где s_1, s_2 — целые числа. Такие представления мы называем *аналитическими представлениями* **). Мы видим, что

---

*) См. аналогичное рассуждение в гл. III на стр. 231.

*) Казалось бы, что нужно рассмотреть и общий случай, когда $B_0(x) = c_1\delta^{\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}(x) + c_2 x^{-\frac{s_2+s_2}{2}-1}$. Можно, однако, показать, что ничего нового мы при этом не получим.

**) Как отмечалось в п. 1 § 2, пространства, в которых действуют эти представления, содержат инвариантные подпространства. Именно, при $s_1 = 0, -1, -2, \ldots$ в пространстве представления существуют два инвариантных подпространства, одно из которых состоит из функций, граничных к функциям, аналитическим в верхней полуплоскости, а другое — из функций, граничных к аналитическим в нижней полуплоскости. Похожая картина имеет место и при $s_1 = 1, 2, \ldots$

для аналитических представлений могут, вообще говоря, существовать два различных билинейных функционала.

В этом специфика вещественной группы. В случае комплексной группы, как мы уже знаем из главы III, инвариантный билинейный функционал в пространстве представления D_χ определен однозначно, с точностью до множителя.

Итак, мы нашли необходимые условия существования инвариантных билинейных функционалов для случая, когда $\frac{s_1+s_2}{2}=0, 1, \ldots$ Именно, *чтобы два представления* $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(s_1, \varepsilon_1)$, и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(s_2, \varepsilon_2)$, *где* $\frac{s_1+s_2}{2}=0, 1, \ldots$ *обладали инвариантным билинейным функционалом, необходимо, чтобы они имели одинаковую четность, то есть* $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$, *и чтобы было либо* $s_1=s_2$, *либо* $s_1=-s_2$. Инвариантный билинейный функционал, если он существует, определен однозначно, с точностью до постоянного множителя. Единственным исключением является особый случай, когда $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$ — аналитические представления с одинаковыми показателями $s_1=s_2=0, 1, \ldots$; в этом случае могут существовать два независимых инвариантных билинейных функционала.

Можно показать, что найденные необходимые условия являются также и достаточными условиями существования инвариантного билинейного функционала. Рассуждения здесь ведутся почти дословно так же, как и для группы комплексных матриц (см. гл. III, § 4). Поэтому мы их здесь опустим и ограничимся формулировкой окончательного результата.

Пусть заданы два представления вещественной группы

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(x)=|\beta x+\delta|^{s_1-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon_1}(\beta x+\delta)\,\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\psi(x)=|\beta x+\delta|^{s_2-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon_2}(\beta x+\delta)\,\psi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right).$$

Для того чтобы эти представления обладали инвариантным билинейным функционалом, необходимо и достаточно, чтобы

они имели одинаковую четность (то есть $\varepsilon_1=\varepsilon_2$) и чтобы выполнялось одно из условий

1) $s_1=s_2$,
2) $s_1=-s_2$.

Инвариантный билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$ определяется следующим образом: в случае, когда $s_1=-s_2$,

$$B(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\psi(x)\,dx. \tag{6}$$

В случае, когда $s_1=s_2$, причем $s_1\neq 0, 1, \ldots$, для финитных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$,

$$B(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1-x_2|^{-s_1-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon_1}(x_1-x_2)\,\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2 \tag{7}$$

(при $\operatorname{Re}s_1>0$ интеграл понимается в смысле регуляризованного значения). Для произвольных функций φ, ψ значение $B(\varphi, \psi)$ определяется на основании свойств билинейности и инвариантности (ср. гл. III, § 4, п. 4).

В случае, когда $s_1=s_2=0, 1, \ldots$, но представления не являются аналитическими,

$$B(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{(s_1)}(x)\psi(x)\,dx\,^{*}). \tag{8}$$

В особом случае, когда $s_1=s_2=0, 1, \ldots$ и представления являются аналитическими, кроме функционала (8), существует еще один инвариантный билинейный функционал

$$B(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-x_2)^{-s_1-1}\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2 \tag{9}$$

(интеграл понимается здесь в смысле регуляризованного значения).

---

*) Легко показать, что этот интеграл сходится для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

3. Вырождение инвариантных билинейных функционалов для аналитических представлений. Изучим подробнее инвариантные билинейные функционалы для аналитических представлений группы G, то есть для представлений вида

$$T_s(g)\varphi(x)=(\beta x+\delta)^{s-1}\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right),$$

где s — целое число.

Сначала рассмотрим случай, когда $s=0, 1, 2, \ldots$ В этом случае инвариантный билинейный функционал определяется для *финитных* функций формулой

$$B(\varphi, \psi)=\int B_0(x_1-x_2)\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

где $B_0(x)$ — произвольная однородная функция степени однородности $-s-1$. Таким образом, имеются два линейно независимых инвариантных билинейных функционала. Постараемся получить формулы, определяющие билинейный функционал для *любых* функций из пространства D_s. Выберем следующие линейно независимые однородные функции степени однородности $-s-1$: $(x-i0)^{-s-1}$, $(x+i0)^{-s-1}$ *) и рассмотрим отвечающие им инвариантные билинейные функционалы. Для финитных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ эти функционалы определяются следующими формулами:

$$B_+(\varphi, \psi)=\int (x_1-x_2-i0)^{-s-1}\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2, \quad (1)$$

$$B_-(\varphi, \psi)=\int (x_1-x_2+i0)^{-s-1}\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2. \quad (1')$$

Придадим формулам (1) и (1′) несколько иной вид с тем, чтобы они сохраняли смысл для любых функций из пространства D_s. Для этого сопоставим каждой финитной функции $\varphi(x)$ две функции —

$$\varphi_+(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(x_1)}{x_1-x-i0}\,dx_1, \quad (2)$$

$$\varphi_-(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(x_1)}{x_1-x+i0}\,dx_1. \quad (2')$$

*) См. «Обобщенные функции», вып. 1, стр. 83—85.

Эти функции являются граничными к функциям, аналитическим соответственно в верхней и в нижней полуплоскостях, причем

$$\varphi(x)=\varphi_+(x)+\varphi_-(x).$$

Очевидно, что выражения для $B_+(\varphi, \psi)$ и $B_-(\varphi, \psi)$ можно представить следующим образом:

$$B_+(\varphi, \psi)=\int \varphi_+^{(s)}(x)\psi(x)\,dx, \quad (3)$$

$$B_-(\varphi, \psi)=\int \varphi_-^{(s)}(x)\psi(x)\,dx\ ^{*)}. \quad (3')$$

Написанные интегралы (3) и (3′) заведомо сходятся, если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — финитные функции. Покажем, что *интегралы* (3) *и* (3′) *сходятся для любых функций* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *из пространства* D_s. *Тем самым они определяют инвариантные билинейные функционалы на всем пространстве* D_s.

Докажем сначала, что функции $\varphi_+^{(s)}(x)\equiv[\varphi^{(s)}(x)]_+$ и $\varphi_-^{(s)}(x)\equiv[\varphi^{(s)}(x)]_-$ определены для любой функции $\varphi(x)$ из D_s. В самом деле, функция $\varphi(x)$ имеет при $|x|\to\infty$ следующее асимптотическое разложение:

$$\varphi(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{s-1}a_kx^k. \quad (4)$$

Дифференцированием ряда (4) мы получаем

$$\varphi^{(s)}(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{-s-1}b_kx^k.$$

Итак, при $|x|\to\infty$ функция $\varphi^{(s)}(x)$ имеет асимптотику

$$\varphi^{(s)}(x)\sim Cx^{-s-1},$$

а потому для нее определены функции $\varphi_+^{(s)}(x)$ и $\varphi_-^{(s)}(x)$.

Легко убедиться, что при $|x|\to\infty$

$$\varphi_+^{(s)}(x)\sim C_1x^{-s-1},\quad \varphi_-^{(s)}(x)\sim C_2x^{-s-1}.$$

Так как, с другой стороны, при $|x|\to\infty$,

$$\psi(x)\sim Cx^{s-1},$$

*) Постоянные множители мы отбрасываем.

то отсюда непосредственно следует сходимость интегралов (3) и (3′).

Итак, *для аналитического представления*

$$T_s(g)\,\varphi(x)=(\beta x+\delta)^{s-1}\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right),$$

где $s=0,\ 1,\ \ldots,$ *мы построили два инвариантных билинейных функционала* $B_+(\varphi,\ \psi)$ *и* $B_-(\varphi,\ \psi)$. *Эти функционалы задаются на всем пространстве* D_s *следующими формулами*:

$$B_+(\varphi,\ \psi)=\int \varphi_+^{(s)}(x)\,\psi(x)\,dx, \tag{5}$$

$$B_-(\varphi,\ \psi)=\int \varphi_-^{(s)}(x)\,\psi(x)\,dx, \tag{5′}$$

где

$$\varphi_+^{(s)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi^{(s)}(x_1)}{x_1-x-i0}\,dx_1,$$

$$\varphi_-^{(s)}(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi^{(s)}(x_1)}{x_1-x+i0}\,dx_1.$$

Из этого результата мы получим сейчас интересный вывод о структуре пространства D_s. Заметим, что функционалы $B_+(\varphi,\ \psi)$ и $B_-(\varphi,\ \psi)$ являются вырожденными. Именно, существует подпространство D_s^- функций $\varphi(x)$ таких, что $B_+(\varphi,\ \psi)=0$ для любой функции ψ из D_s. Из формулы (5) непосредственно следует, что это подпространство D_s^- состоит из всех функций $\varphi(x)$, для которых $\varphi_+^{(s)}(x)=0$, то есть $\varphi^{(s)}(x)=\varphi_-^{(s)}(x)$. Очевидно, что это условие на функцию $\varphi(x)$ означает, что $\varphi(x)$, с точностью до многочлена степени $s-1$, гранична к функции, аналитической в нижней полуплоскости.

Подпространство D_s^- инвариантно; это следует непосредственно из инвариантности билинейного функционала $B_+(\varphi,\ \psi)$.

Аналогично, второй функционал $B_-(\varphi,\ \psi)$ вырождается на подпространстве D_s^+ функций $\varphi(x)$, которые с точностью до многочлена степени $s-1$ граничны к функциям, аналитическим в верхней полуплоскости.

Пересечение подпространств D_s^+ и D_s^- есть конечномерное подпространство E_s всех многочленов степени, не превышающей $s-1$.

Итак, мы видим, что пространство D_s, в котором действует представление аналитической серии

$$T_s(g)\,f(x)=(\beta x+\delta)^{s-1}f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right),$$

$s=1,\ 2,\ \ldots,$ содержит три инвариантных подпространства: конечномерное подпространство многочленов степени, не превышающей $s-1$, и два бесконечномерных подпространства.

Теперь мы рассмотрим представления

$$T_s(g)\,\varphi(x)=(\beta x+\delta)^{s-1}\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right),$$

где $s=-1,\ -2,\ \ldots$ В этом случае с точностью до постоянного множителя существует только один инвариантный билинейный функционал, именно

$$B(\varphi,\ \psi)=\int (x_1-x_2)^{-s-1}\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2. \tag{6}$$

Заметим, что интеграл сходится для любых функций из пространства D_s. Тем самым формула (6) определяет билинейный функционал на всем пространстве.

Очевидно, что функционал $B(\varphi,\ \psi)$ вырождается на подпространстве F_s всех функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int x^k\varphi(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad k=0,\ \ldots,\ -s-1.$$

Это подпространство F_s инвариантно. Позже в § 4 мы увидим, что пространство F_s есть прямая сумма инвариантных подпространств F_s^+ и F_s^-. Таким образом, и в этом случае пространство D_s содержит три инвариантных подпространства.

4. Условно инвариантные билинейные функционалы. В предыдущем пункте было показано, что инвариантные билинейные функционалы для аналитических представлений группы G вырождаются на некоторых инвариантных подпространствах. Можно показать, что на этих подпространствах существуют новые инвариантные билинейные функционалы. Укажем вид этих функционалов для различных случаев.

Сначала рассмотрим представления вида

$$T_s(g)\varphi(x)=(\beta x+\delta)^{s-1}\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right),$$

где $s=-1, -2, \ldots$ В этом случае инвариантный билинейный функционал на всем пространстве D_s имеет вид

$$B(\varphi, \psi)=\int (x_1-x_2)^{-s-1}\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Он вырождается на инвариантном подпространстве F_s, состоящем из всех функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int x^k\varphi(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad k=0, 1, \ldots, -s-1.$$

В подпространстве F_s существуют два инвариантных билинейных функционала. Их ядрами являются однородные присоединенные функции

$$(x_1-x_2)^{-s-1}\ln(x_1-x_2-i0) \text{ и } (x_1-x_2)^{-s-1}\ln(x_1-x_2+i0).$$

Эти функционалы имеют следующий вид:

$$B_+(\varphi, \psi)=\int (x_1-x_2)^{-s-1}\ln(x_1-x_2-i0)\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2$$

и

$$B_-(\varphi, \psi)=\int (x_1-x_2)^{-s-1}\ln(x_1-x_2+i0)\varphi(x_1)\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2$$

(инвариантность этих функционалов можно проверить непосредственной выкладкой). Заметим, что функционал $B_+(\varphi, \psi)$ вырождается на подпространстве F_s^- функций из F_s, граничных к аналитическим в нижней полуплоскости; функционал $B_-(\varphi, \psi)$ вырождается на подпространстве F_s^+ функций из F_s, граничных к аналитическим в верхней полуплоскости.

Можно показать (см. § 4, п. 3), что все пространство F_s является прямой суммой подпространств F_s^+ и F_s^-. При этом $B_+(\varphi, \psi)$ есть невырожденный инвариантный функционал на подпространстве F_s^+, а $B_-(\varphi, \psi)$ — невырожденный инвариантный функционал на подпространстве F_s^-.

Теперь разберем случай, когда $s=1, 2, \ldots$ В этом случае в пространстве D_s существует два линейно независимых инвариантных билинейных функционала. Оба они вырождаются на подпространстве многочленов

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{s-1}a_kx^k.$$

Будем искать инвариантный билинейный функционал в этом подпространстве многочленов. Пусть $C(\varphi, \psi)$ — искомый функционал. Очевидно, что он однозначно задается числами

$$c_{kl}=C(x^k, x^l), \quad k, l=0, \ldots, s-1.$$

Покажем сначала, что $c_{k,l}=0$, если $k+l\neq s-1$. Воспользуемся для этого инвариантностью билинейного функционала относительно преобразований, отвечающих матрице $g=\left\|\begin{matrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{matrix}\right\|$. Мы получим

$$c_{kl}=\alpha^{2(k+l)-2(s-1)}c_{kl}.$$

Следовательно, $c_{kl}=0$ при $k+l\neq s-1$. Остается определить числа $c_{k,s-1-k}$. Запишем условие инвариантности функционала $C(\varphi, \psi)$ относительно преобразований, отвечающих матрице $\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ x_0 & 1\end{matrix}\right\|$. Мы получим

$$0=C(x^k, x^{s-k})=C((x+x_0)^k, (x+x_0)^{s-k}).$$

Разлагая правую часть по степеням x_0, получим

$$kc_{k-1,s-k}+(s-k)c_{k,s-1-k}=0.$$

Из этого соотношения находим сразу коэффициенты $c_{k,s-1-k}$:

$$c_{k,s-1-k}=(-1)^k\frac{k!(s-1-k)!}{(s-1)!}$$

(мы положили $c_{0,s-1}=1$). Итак, для многочленов

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{s-1}a_kx^k \quad \text{и} \quad \psi(x)=\sum_{k=0}^{s-1}b_kx^k$$

мы построили билинейный функционал $C(\varphi, \psi)$ следующего вида:

$$C(\varphi, \psi)=\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k \frac{k!(s-1-k)!}{(s-1)!} a_k b_{s-1-k}. \qquad (1)$$

Нетрудно проверить, что этот функционал инвариантен.

§ 4. УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В этом параграфе будут найдены условия, при которых два представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ вещественной группы G эквивалентны.

1. Перестановочные операторы. Пусть даны два оператора представления

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)|\beta x+\delta|^{s_1-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon_1}(\beta x+\delta)$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\psi(x)=\psi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)|\beta x+\delta|^{s_2-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon_2}(\beta x+\delta),$$

действующие соответственно в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2}. Мы установим сначала, при каких условиях на χ_1 и χ_2 существует оператор A, непрерывно отображающий пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} и такой, что

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A.$$

Напомним, что представления называются эквивалентными, если такой оператор A отображает D_{χ_1} на все пространство D_{χ_2} и притом взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Установим связь между перестановочными операторами A и инвариантными билинейными функционалами. Пусть оператор A отображает непрерывно пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2}. Рассмотрим тогда инвариантный билинейный функционал (ψ, φ), заданный на паре пространств $D_{-\chi_2}$, $-\chi_2=(-s_2, \varepsilon_2)$, и D_{χ_2}. Как было показано в § 3, такой инвариантный функционал существует и задается формулой

$$(\psi, \varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\varphi(x)\,dx, \quad \psi\in D_{-\chi_2}, \quad \varphi\in D_{\chi_2}.$$

Сопоставим оператору A билинейный функционал $B(\varphi, \psi)$, заданный на паре пространств D_{χ_1} и $D_{-\chi_2}$,

$$B(\varphi, \psi)=(\psi, A\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)A\varphi(x)\,dx,$$

$$\varphi\in D_{\chi_1}, \quad \psi\in D_{-\chi_2}.$$

Тогда справедливо следующее утверждение. Оператор A тогда и только тогда перестановочен с операторами $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$, то есть

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A,$$

когда соответствующий билинейный функционал $B(\varphi, \psi)=(\psi, A\varphi)$ инвариантен относительно представлений $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{-\chi_2}(g)$ *).

Условия существования инвариантных билинейных функционалов были уже получены в § 3. Заменив в этих условиях $\chi_2=(s_2, \varepsilon_2)$ на $-\chi_2=(-s_2, \varepsilon_2)$, мы получаем следующие условия существования перестановочного оператора A:

Два представления $T_{\chi_1}(g)$, $\chi_1=(s_1, \varepsilon_1)$, *и* $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_2=(s_2, \varepsilon_2)$, *обладают перестановочным оператором, то есть оператором* $A\neq 0$, *непрерывно отображающим пространство* D_{χ_1} *в пространство* D_{χ_2} *и таким, что*

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A,$$

тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую четность $\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2$, *и либо* $s_1=s_2$, *либо* $s_1=-s_2$.

Найдем операторы A, перестановочные с представлениями $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$. Рассмотрим сначала случай, когда $s_1=s_2$, то есть представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ совпадают (обозначим $\chi=\chi_1=\chi_2$). В этом случае всякий билинейный функционал, инвариантный относительно представлений $T_\chi(g)$ и $T_{-\chi}(g)$ имеет следующий вид:

$$B(\varphi, \psi)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\varphi(x)\,dx.$$

*) Доказательство этого утверждения проводится так же, как и в случае комплексной группы.

Сопоставляя это выражение с формулой

$$B(\varphi,\ \psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,A\varphi(x)\,dx,$$

мы заключаем: *единственными операторами в пространстве D_χ, перестановочными с операторами представления $T_\chi(g)$, являются операторы, кратные единичному оператору. Таким образом, все представления $T_\chi(g)$ операторно неприводимы.*

Теперь рассмотрим случай, когда $s_1=-s_2=s$. Предположим сначала, что представление $T_{\chi_1}(g)$ не является аналитическим представлением с показателем $s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ В этом случае всякий билинейный функционал, инвариантный относительно представлений $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{-\chi_2}(g)$, имеет следующий вид:

Если $s\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то

$$B(\varphi,\ \psi)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x_2|^{-s-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(x_1-x_2)\,\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2;$$

если $s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то

$$B(\varphi,\ \psi)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{(s)}(x)\,\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

Отсюда заключаем: *оператор A, перестановочный с представлениями $T_\chi(g)$, $\chi=(s,\ \varepsilon)$, и $T_{-\chi}(g)$, $-\chi=(-s,\ \varepsilon)$, $s\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ (то есть такой оператор A, отображающий D_χ в $D_{-\chi}$, что $AT_\chi(g)=T_{-\chi}(g)A$,) задается следующим образом:*

Если $s\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то

$$A\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x|^{-s-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(x_1-x)\,\varphi(x_1)\,dx_1 \tag{2}$$

(при $\operatorname{Re}s>0$ интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения).

Если $s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, но представление $T_\chi(g)$ не является аналитическим представлением, то

$$A\varphi(x)=\varphi^{(s)}(x). \tag{3}$$

Эти формулы для оператора A можно записать в виде единой формулы

$$A\varphi(x)=\frac{1}{2\Gamma(-s)}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x|^{-s-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(x_1-x)\,\varphi(x_1)\,dx_1. \tag{4}$$

Нам осталось рассмотреть случай, когда представления $T_\chi(g)$ и $T_{-\chi}(g)$ имеют следующий вид:

$$T_\chi(g)\,\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{s-1},$$

$$T_{-\chi}(g)\,\psi(x)=\psi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{-s-1}, \tag{5}$$

где $s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ В этом случае любой инвариантный билинейный функционал в пространстве $D_\chi\equiv D_s$ задается, как было показано в § 3, п. 2 формулой

$$B(\varphi,\ \psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lambda_1\varphi_+^{(s)}(x)+\lambda_2\varphi_-^{(s)}(x)\right)\psi(x)\,dx,$$

где

$$\varphi_+^{(s)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi^{(s)}(x_1)}{x_1-x-i0}\,dx_1,$$

$$\varphi_-^{(s)}(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi^{(s)}(x_1)}{x_1-x+i0}\,dx_1,$$

а λ_1 и λ_2 — произвольные постоянные. Отсюда заключаем: *любой оператор A, перестановочный с аналитическими представлениями* (5), *имеет следующий вид*:

$$A\varphi(x)=\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)}{x_1-x-i0}\,dx_1-\frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)}{x_1-x+i0}\,dx_1,$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные постоянные.

2. Условия эквивалентности двух представлений. Теперь найдем необходимые и достаточные условия, при которых два представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ оказываются эквивалентными. В предыдущем пункте мы нашли необходимые и достаточные условия, при которых представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ с различными χ_1 и χ_2 обладают коммутирующим оператором. Именно они должны иметь одинаковую четность, а их показатели s_1 и s_2 должны различаться только знаком. Чтобы эти представления были эквивалентны, нужно, чтобы оператор A, коммутирующий с ними, отображал пространство D_{χ_1} на все пространство D_{χ_2} и притом взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Итак, пусть заданы два представления, обладающие коммутирующим оператором

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)|\beta x+\delta|^{s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}(\beta x+\delta) \qquad (1)$$

и

$$T_{\chi_2}(g)\psi(x)=\psi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)|\beta x+\delta|^{-s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}(\beta x+\delta). \qquad (1')$$

Мы покажем сейчас, что *в неособом случае, когда представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ не являются аналитическими, эти представления эквивалентны.*

Как было показано в п. 1, существует оператор A, отображающий непрерывно пространство D_{χ_1} в пространство D_{χ_2} и такой, что

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A. \qquad (2)$$

Аналогично, существует оператор A_1, отображающий непрерывно пространство D_{χ_2} в пространство D_{χ_1} и такой, что

$$T_{\chi_1}(g)A_1=A_1T_{\chi_2}(g). \qquad (2')$$

Рассмотрим оператор A_1A. Этот оператор отображает пространство D_{χ_1} на себя. Кроме того, из условий (2) и (2′) следует, что

$$A_1AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_1}(g)A_1A,$$

то есть оператор A_1A перестановочен с операторами представления $T_{\chi_1}(g)$. В силу операторной неприводимости представления $T_{\chi_1}(g)$ отсюда следует, что он кратен единичному оператору

$$A_1A=\lambda_1E.$$

Покажем, что $\lambda_1\neq 0$. Сначала предположим, что s не является целым числом. В этом случае операторы A и A_1 можно

записать в виде:

$$A\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\int|x-x_1|^{-s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}(x-x_1)\varphi(x_1)\,dx_1,$$

$$A_1\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int|x-x_1|^{s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}(x-x_1)\varphi(x_1)\,dx_1.$$

Будем рассматривать только функции $\varphi(x)$, быстро убывающие вместе со всеми производными и такие, что их преобразования Фурье $\tilde{\varphi}(\sigma)$ обращаются в нуль в окрестности точки $\sigma=0$.

Перейдем от функций $\varphi(x)$ к их преобразованиям Фурье. Тогда операторы свертки A и A_1 перейдут в операторы умножения соответственно на преобразования Фурье функций $|x|^{-s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}x$ и $|x|^{s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}x$. Эти преобразования Фурье вычисляются на основании следующих формул:

$$\widetilde{\frac{|x|^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}}=-2\sin\frac{\lambda\pi}{2}|\sigma|^{-\lambda-1},$$

$$\widetilde{\frac{|x|^{\lambda}\operatorname{sign}x}{\Gamma(\lambda+1)}}=2i\cos\frac{\lambda\pi}{2}|\sigma|^{-\lambda-1}\operatorname{sign}\sigma\ ^{*}).$$

Отсюда следует, что $\widetilde{A_1A\varphi(x)}=\lambda_1\tilde{\varphi}(\sigma)$, где $\lambda_1=4\cos^2\frac{s\pi}{2}$, если $\varepsilon=0$ и $s\neq\pm 1,\ \pm 3,\ \ldots$, и $\lambda_1=4\sin^2\frac{s\pi}{2}$, если $\varepsilon=1$ и $s\neq 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \ldots$ В обоих случаях $\lambda_1\neq 0$.

Итак, установлено, что оператор A_1A имеет вид

$$A_1A=\lambda_1E,$$

где E — единичный оператор, и $\lambda_1\neq 0$. Из тех же соображений следует, что

$$AA_1=\lambda_2E,$$

где $\lambda_2\neq 0$. Но тогда очевидно, что каждый из операторов A и A_1 осуществляет отображение на все пространство и притом взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Тем самым эквивалентность представлений (1) и (1′) доказана.

---

*) См. «Обобщенные функции», вып. 1, стр. 446—447.

Теперь рассмотрим особый случай, когда $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ — аналитические представления, то есть

$$T_{\chi_1}(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{s-1}, \tag{3}$$

$$T_{\chi_2}(g)\psi(x)=\psi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{-s-1}, \tag{3'}$$

где s — целое число. *Покажем, что (при $s\neq 0$) эти представления не эквивалентны.* Предположим для определенности, что $s>0$. Тогда всякий оператор A, отображающий пространство D_{χ_1} на пространство D_{χ_2} и такой, что

$$AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A,$$

имеет следующий вид:

$$A\varphi(x)=\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1-x-i0}-\frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1-x+i0}.$$

Ясно, что этот оператор вырождается на подпространстве многочленов $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{s-1}a_kx^k$, а потому отображение A не является взаимно однозначным. Этим доказано, что аналитические представления (3) и (3′) не эквивалентны.

Итак, доказано, что *два представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$, $\chi_1\neq\chi_2$, эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены условия*:

а) *представления имеют одинаковую четность*,

б) *их показатели s_1, s_2 связаны соотношением $s_2=-s_1$*,

в) *представления не являются аналитическими*.

3. Частично эквивалентные представления. Мы уже видели в п. 2, что аналитические представления

$$T_s(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{s-1}$$

и

$$T_{-s}(g)\psi(x)=\psi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{-s-1}\,^{*)},$$

где $s\neq 0$ — целое число, обладают коммутирующим оператором и в то же время неэквивалентны. Здесь будет более подробно изучена связь этих представлений. Для определенности будем предполагать, что $s>0$.

Мы видели в § 2, п. 1, что представления $T_s(g)$ и $T_{-s}(g)$ являются пространственно приводимыми. Именно, в пространстве D_s *существует конечномерное инвариантное подпространство E_s, состоящее из многочленов*

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{s-1}a_kx^k.$$

В пространстве же D_{-s} *существует инвариантное подпространство F_{-s}, состоящее из всех функций $\psi(x)$, для которых*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\psi(x)\,dx=0 \quad \textit{при} \quad k=0,\ \ldots,\ s-1.$$

Тем самым каждое из представлений $T_s(g)$, $T_{-s}(g)$ индуцирует по два представления группы G — в инвариантном подпространстве и в фактор-пространстве по этому подпространству.

Докажем следующие утверждения:

1) *Представление $T_s(g)$, рассматриваемое в подпространстве многочленов E_s, и представление $T_{-s}(g)$, рассматриваемое в фактор-пространстве D_{-s}/F_{-s}, эквивалентны между собой.*

2) *Представление $T_s(g)$, рассматриваемое в фактор-пространстве D_s/E_s, и представление $T_{-s}(g)$, рассматриваемое в подпространстве F_{-s}, эквивалентны между собой.*

---

*) Напомним, что операторы $T_\chi(g)$, $\chi=(s,\varepsilon)$, аналитических представлений мы условились обозначать просто через $T_s(g)$, а соответствующие пространства — через D_s.

Сначала докажем первое утверждение. Рассмотрим оператор A_1, отображающий пространство D_{-s} в пространство D_s, и такой, что

$$A_1 T_{-s}(g) = T_s(g) A_1. \tag{1}$$

Этот оператор имеет следующий вид:

$$A_1\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - x)^{s-1} \varphi(x_1)\, dx_1.$$

Ясно, что ядро отображения A_1 есть подпространство F_{-s} функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, \ldots, s-1.$$

С другой стороны, образами функций $\varphi(x)$ при отображении A_1 являются многочлены степени $s-1$ и притом, очевидно, всевозможные такие многочлены. Этим доказано, что оператор A_1 задает непрерывное взаимно однозначное отображение фактор-пространства D_{-s}/F_{-s} на подпространство многочленов E_s. Эквивалентность представлений в фактор-пространстве D_{-s}/F_{-s} и в подпространстве E_s следует теперь непосредственно из условия перестановочности (1) для оператора A_1.

Теперь докажем второе утверждение. Мы знаем, что оператор A:

$$A\varphi(x) = \varphi^{(s)}(x),$$

отображает пространство D_s в пространство D_{-s} и удовлетворяет условию перестановочности

$$AT_s(g) = T_{-s}(g) A. \tag{2}$$

Найдем ядро и образ отображения A. Очевидно, что ядром отображения A является подпространство E_s многочленов $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{s-1} a_k x^k$. Покажем, что оператор A отображает пространство D_s в подпространство F_{-s} функций $\psi(x)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, s-1.$$

В самом деле, пусть сначала $\varphi(x)$ — финитная функция. Тогда путем почленного интегрирования получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi^{(s)}(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Следовательно, образ финитной функции $\varphi(x)$ при отображении A принадлежит подпространству F_{-s}. Ввиду инвариантности подпространства F_{-s} и условия перестановочности (2), ему принадлежит также образ любой функции вида $T_s(g)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — финитная функция. Но любую функцию $\varphi(x)$ из D_s можно всегда представить в виде линейной комбинации функций вида $T_s(g_k)\varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ — финитные функции. Следовательно, образ любой функции $\varphi(x)$ из D_s при отображении A принадлежит подпространству F_{-s}.

Итак, доказано, что оператор A отображает пространство D_s в подпространство F_{-s}. Покажем, что образом пространства D_s при отображении A является все подпространство F_{-s}. Поскольку любая функция из F_{-s} является суммой финитной функции и инверсии финитной функции, принадлежащих F_{-s}, и поскольку F_{-s} инвариантно, достаточно показать, что любая *финитная* функция из F_{-s} является образом некоторой функции из D_s. Итак, пусть $\psi(x)$ — финитная функция из F_{-s}. Рассмотрим оператор интегрирования

$$B\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\, dt.$$

Из условия, что $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x)\, dx = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, s-1$ непосредственно следует, что функции $B\psi(x), \ldots, B^s\psi(x)$ являются вместе с $\psi(x)$ финитными функциями. Применяя теперь к функции $B^s\psi(x)$ оператор $A = \frac{d^s}{dx^s}$, мы, очевидно, получим исходную функцию $\psi(x)$. Следовательно, любая финитная функция $\psi(x)$ из F_{-s} является образом некоторой функции из пространства D_s.

Мы доказали, что ядром оператора $A=\frac{d^s}{dx^s}$ является подпространство многочленов E_s, а образом пространства D_s при отображении A — подпространство F_{-s} всех функций из D_{-s}, для которых $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k\varphi(x)\,dx=0$ при $k=0,1,\ldots,s-1$. Следовательно, оператор A задает непрерывное взаимно однозначное отображение фактор-пространства D_s/E_s на подпространство F_{-s}. В силу условия перестановочности $AT_s(g)=T_s(g)A$ отсюда следует, что представления в фактор-пространстве D_s/E_s и в подпространстве F_{-s} между собой эквивалентны.

Покажем теперь, что *представления группы G в пространствах D_s/E_s и F_{-s} приводимы*. Именно, *каждое из этих пространств распадается в прямую сумму двух инвариантных подпространств*.

Для доказательства введем операторы

$$A_+\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1-x-i0}$$

и

$$A_-\varphi(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1-x+i0}.$$

(Сумма операторов A_+ и A_- равна оператору $A=\frac{d^s}{dx^s}$.) Эти операторы, как было показано в п. 1, отображают пространство D_s в пространство D_{-s} и перестановочны с операторами представлений, то есть

$$A_+T_s(g)=T_{-s}(g)A_+ \quad \text{и} \quad A_-T_s(g)=T_{-s}(g)A_-.$$

Любой же другой оператор, перестановочный с представлениями $T_s(g)$ и $T_{-s}(g)$, является линейной комбинацией операторов A_+ и A_-. Пусть D_s^- — ядро отображения A_+;

D_s^+ — ядро отображения A_-. Ясно, что подпространства D_s^- и D_s^+ инвариантны. Из определения операторов A_+ и A_- непосредственно следует, что пересечение подпространств D_s^+ и D_s^- есть подпространство E_s многочленов $\varphi(x)=\sum\limits_{k=0}^{s-1}a_kx^k$. Можно показать, что сумма подпространств D_s^+ и D_s^- есть все пространство D_s.

В самом деле, пусть $\varphi(x)$ — произвольная функция из D_s. Эта функция при $|x|\to\infty$ разлагается в асимптотический ряд

$$\varphi(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{s-1}a_kx^k.$$

Не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что члены с неотрицательными степенями x в этом разложении отсутствуют (в противном случае нам надо было бы вычесть из $\varphi(x)$ многочлен степени $s-1$, который заведомо принадлежит подпространствам D_s^+ и D_s^-). Но тогда функция $\varphi(x)$ имеет интегрируемый квадрат, а потому может быть разложена в сумму

$$\varphi(x)=\varphi_+(x)+\varphi_-(x),$$

где $\varphi_+(x)$ гранична к функции, аналитической в верхней полуплоскости, а $\varphi_-(x)$ — гранична к функции, аналитической в нижней полуплоскости. Легко видеть, что эти функции также принадлежат пространству D_s. Очевидно, что $A_+\varphi_-(x)=0$ и $A_-\varphi_+(x)=0$, то есть $\varphi_-(x)\in D_s^-$ и $\varphi_+(x)\in D_s^+$. Тем самым доказано, что сумма пространств D_s^- и D_s^+ есть все пространство D_s.

Из доказанного следует, что *пространство D_s/E_s распадается в прямую сумму инвариантных подпространств*,

$$D_s/E_s=D_s^+/E_s+D_s^-/E_s.$$

Пусть теперь F_{-s}^+ и F_{-s}^- — образы пространств D_s^+ и D_s^- при отображениях A_+ и A_- соответственно. Очевидно, что эти подпространства инвариантны относительно $T_{-s}(g)$ и имеют нулевое пересечение. Сумма этих пространств есть подпространство F_{-s} функций $\varphi(x)$ из D_{-s}, для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^k\varphi(x)\,dx=0 \quad \text{при } k=0,1,\ldots,s-1.$$

Дадим внутреннее определение подпространств F_{-s}^+ и F_{-s}^-. Именно, покажем, что F_{-s}^+ *есть подпространство всех* *функций из D_{-s}, граничных к функциям, аналитическим в верхней полуплоскости. Аналогично, F_{-s}^{-} есть подпространство всех функций из D_{-s}, граничных к функциям, аналитическим в нижней полуплоскости.*

В самом деле, мы знаем, что F_{-s}^{+} есть подпространство всех функций из F_{-s}, граничных к аналитическим в верхней полуплоскости. Таким образом, нужно лишь показать, что всякая функция $\varphi(x)$ из D_{-s}, граничная к аналитической в верхней полуплоскости, принадлежит F_{-s}, то есть для нее

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ s-1.$$

Итак, пусть функция $\varphi(x)$ из D_{-s} гранична к аналитической в верхней полуплоскости. Рассмотрим ее преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(\xi)$. Из асимптотики для функции $\varphi(x)$ при $|x| \to \infty$ следует, что функция $\tilde{\varphi}(\xi)$ имеет непрерывные производные до $s-1$-го порядка включительно, причем $i^k \tilde{\varphi}^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx$. Но $\tilde{\varphi}(\xi) = 0$ при $\xi > 0$, поскольку $\varphi(x)$ гранична к функции, аналитической в верхней полуплоскости. Значит, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = 0$ при $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ s-1$, что и требовалось доказать.

Сформулируем окончательные результаты исследования, проведенного в этом пункте. Мы рассмотрели аналитические представления

$$T_s(g)\varphi(x) = \varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)(\beta x + \delta)^{s-1}$$

и

$$T_{-s}(g)\psi(x) = \psi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)(\beta x + \delta)^{-s-1},$$

действующие в пространствах D_s и D_{-s}, $s = 1,\ 2,\ \ldots$

Установлено, что в пространстве D_s имеются три инвариантных подпространства:

а) подпространство E_s всех многочленов степени $\leqslant s-1$;

б) подпространство D_s^{+} всех функций $\varphi(x)$, для которых $A_{-}\varphi(x) = 0$;

в) подпространство D_s^{-} всех функций $\varphi(x)$, для которых $A_{+}\varphi(x) = 0$.

Здесь A_{+} и A_{-} — операторы, отображающие пространство D_s в пространство D_{-s}, следующего вида:

$$A_{+}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1 - x - i0},$$

$$A_{-}\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1 - x + i0}.$$

Пересечение пространств D_s^{+} и D_s^{-} есть подпространство многочленов E_s; их сумма есть все пространство D_s. (D_s^{+} и D_s^{-} можно охарактеризовать так же, как подпространства функций из D_s, которые, с точностью до многочлена степени $\leqslant s-1$, граничны к функциям, аналитическим соответственно в верхней и в нижней полуплоскости.)

В пространстве D_{-s} также существуют три инвариантных подпространства следующего вида:

а) подпространство F_{-s} всех функций $\varphi(x)$, для которых $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = 0$ при $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ s-1$;

б) подпространство F_{-s}^{+} всех функций из D_{-s}, граничных к функциям, аналитическим в верхней полуплоскости;

в) подпространство F_{-s}^{-} всех функций из D_{-s}, граничных к функциям, аналитическим в нижней полуплоскости.

Пространство F_{-s} является прямой суммой подпространств F_{-s}^{+} и F_{-s}^{-} *).

Установлена также эквивалентность представлений в следующих парах пространств:

1) E_s и D_{-s}/F_{-s}; отображение пространства D_{-s}/F_{-s} на E_s осуществляется оператором вида

$$A\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - x)^{s-1} \varphi(x_1)\,dx_1;$$

*) Пространство D_0 устроено проще: оно есть прямая сумма двух инвариантных подпространств $D_0^{+} \equiv F_0^{+}$ и $D_0^{-} \equiv F_0^{-}$.

2) D_s/E_s и F_{-s}; отображение пространства D_s/E_s на F_{-s} осуществляется оператором дифференцирования $\frac{d^s}{dx^s}$;

3) D_s^+/E_s и F_{-s}^+ (соответственно D_s^-/E_s и F_{-s}^-); отображение одного пространства на другое осуществляется оператором A_+ (соответственно оператором A_-).

Можно показать, что операторы B_+ и B_-, обратные к операторам A_+ и A_-, отображающие пространства F_{-s}^+ и F_{-s}^- соответственно на пространства D_s^+/E_s и D_s^-/E_s, задаются следующими формулами:

$$B_+\varphi(x) = c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - x)^{s-1} \ln(x_1 - x - i0)\, \varphi(x_1)\, dx_1,$$

$$B_-\varphi(x) = c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - x)^{s-1} \ln(x_1 - x + i0)\, \varphi(x_1)\, dx_1.$$

4. Другие реализации пространств F_s^+ и F_s^-. В п. 3 мы рассмотрели представления группы G в пространствах F_s^+ и F_s^-, $s = -1, -2, \ldots$ Эти пространства определяются следующим образом.

Пространство F_s^+ состоит из функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) функции $\varphi(x)$ и их «инверсии» $\hat{\varphi}(x) = x^{s-1}\varphi\left(-\frac{1}{x}\right)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями;

2) функции $\varphi(x)$ граничны к функциям $\varphi(z) = \varphi(x + iy)$, аналитическим в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Аналогично определяется подпространство F_s^-.

Оператор представления $T_s(g)$ как в подпространстве F_s^+, так и в подпространстве F_s^-, задается формулой

$$T_s(g)\varphi(x) = \varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)(\beta x + \delta)^{s-1}.$$

Естественно, однако, вместо функций $\varphi(x)$ на прямой, граничных к функциям $\varphi(z) = \varphi(x + iy)$, аналитическим в полуплоскости, рассматривать сами аналитические функции $\varphi(z)$. Тем самым мы получаем другую реализацию пространств F_s^+ и F_s^-. Пространство F_s^+ мы можем считать состоящим из функций $\varphi(z)$, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Оператор представления $T_s(g)$ в пространстве F_s^+ задается формулой

$$T_s(g)\varphi(z) = \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)(\beta z + \delta)^{s-1}.$$

Подчеркнем, что пространство F_s^+ состоит не из всех функций $\varphi(z)$, аналитических в верхней полуплоскости, а лишь из функций, удовлетворяющих дополнительным условиям. Именно, функции $\varphi(z)$ должны быть бесконечно дифференцируемыми вместе с их «инверсиями»

$$\hat{\varphi}(z) = z^{s-1}\varphi\left(-\frac{1}{z}\right)$$

в замкнутой верхней полуплоскости.

Полезна еще реализация пространства F_s^+ как пространства функций, аналитических внутри единичного круга. Для этого заменим функции $\varphi(z)$, аналитические в верхней полуплоскости, функциями

$$\varphi_1(w) = (1 - w)^{s-1}\varphi\left(i\frac{1 + w}{1 - w}\right),$$

аналитическими внутри единичного круга, и будем рассматривать F_s^+ как пространство функций $\varphi_1(w)$. Можно показать, что пространство F_s^+ в этой реализации состоит из тех и только тех функций $\varphi_1(w)$, которые аналитичны в круге $|w| < 1$ и бесконечно дифференцируемы в замкнутом круге.

Запишем формулу для оператора представления в пространстве F_s^+, реализованном как пространство функций, аналитических в круге.

Пусть $g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$. Положим

$$a = \frac{(\alpha + \delta) + i(\gamma - \beta)}{2}, \quad b = \frac{(\alpha - \delta) - i(\gamma + \beta)}{2}.$$

Тогда оператор представления $T_s(g)$ задается следующей формулой:

$$T_s(g)\varphi(w) = \varphi\left(\frac{aw + b}{\bar{b}w + \bar{a}}\right)(\bar{b}w + \bar{a})^{s-1}\ ^{*)}.$$

Вывод этой формулы предоставляется читателю.

*) Преобразование $w' = \frac{aw + b}{\bar{b}w + \bar{a}}$ переводит, как известно, единичный круг $|w| < 1$ в себя.

§ 5. УСЛОВИЯ УНИТАРНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ G

В этом параграфе будут найдены условия, при которых в пространстве представления можно задать скалярное произведение, инвариантное относительно операторов представления. Напомним, что скалярным произведением называется эрмитов положительно определенный функционал.

1. Условия существования инвариантного эрмитова функционала. Сначала найдем условия, при которых в пространстве D_χ существует эрмитов функционал (φ, ψ) (не обязательно положительно определенный), обладающий свойством инвариантности

$$(\varphi, \psi) = (T_\chi(g)\varphi, \ T_\chi(g)\psi).$$

Для этого установим связь между эрмитовыми инвариантными функционалами и инвариантными билинейными функционалами, изученными в § 2.

Пусть задан эрмитов функционал (φ, ψ) в пространстве D_χ, $\chi = (s, \varepsilon)$. Тогда ему можно сопоставить билинейный функционал

$$B(\varphi, \psi) = (\varphi, \overline{\psi}), \tag{1}$$

определенный для пары пространств

$$D_\chi, \ \chi = (s, \varepsilon), \quad \text{и} \quad D_{\overline{\chi}}, \quad \overline{\chi} = (\overline{s}, \varepsilon).$$

Ясно, что эрмитов функционал (φ, ψ) инвариантен тогда и только тогда, когда инвариантен соответствующий ему билинейный функционал $B(\varphi, \psi) = (\varphi, \overline{\psi})$. Условия существования инвариантного билинейного функционала для пространств D_{χ_1} и D_{χ_2} были найдены в § 3. Полагая в них $\chi_1 = \chi$, $\chi_2 = \overline{\chi}$, мы получаем следующее условие существования инвариантного эрмитова функционала.

Инвариантный эрмитов функционал (φ, ψ) существует в тех и только тех пространствах D_χ, $\chi = (s, \varepsilon)$, для которых число s удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $s = \overline{s}$,

2) $s = -\overline{s}$.

Иными словами, *s должно быть либо вещественным, либо чисто мнимым числом.*

На основании результатов § 3 мы получаем также непосредственно выражение для инвариантного эрмитова функционала (φ, ψ).

Если $s = i\rho$ — мнимое число, $\rho \neq 0$, то

$$(\varphi, \psi) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx. \tag{2}$$

Если s — вещественное число, $s \neq 0, 1, \ldots$, то

$$(\varphi, \psi) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |x_1 - x_2|^{-s-1} \operatorname{sign}^\varepsilon(x_1 - x_2) \times \\ \times \varphi(x_1)\overline{\psi(x_2)}\,dx_1\,dx_2, \tag{3}$$

где ε — четность представления (при $\operatorname{Re} s > 0$ интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения).

Если $s = 0, 1, \ldots$, то в неособом случае, то есть когда $T_\chi(g)$ не является аналитическим представлением,

$$(\varphi, \psi) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(s)}(x)\overline{\psi(x)}\,dx\ ^{*)}. \tag{4}$$

В особом случае, когда $T_\chi(g)$ — аналитическое представление, причем $s = 0, 1, \ldots$, инвариантный эрмитов функционал зависит от двух произвольных постоянных. Именно,

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lambda_1\varphi_+^{(s)}(x) + \lambda_2\varphi_-^{(s)}(x)\right]\overline{\psi}(x)\,dx, \tag{5}$$

---

*) Заметим, что формулы (3), (4) могут быть записаны в виде единой формулы

$$(\varphi, \psi) = \lambda \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{-\infty}^{\infty} |x_1 - x_2|^{-s-1} \operatorname{sign}^\varepsilon(x_1 - x_2)\,\varphi(x_1)\overline{\psi(x_2)}\,dx_1\,dx_2.$$

где

$$\varphi_{+}^{(s)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1-x-i0},$$

$$\varphi_{-}^{(s)}(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1-x+i0},$$

а λ_1, λ_2 — произвольные постоянные.

2. Условия положительной определенности инвариантных эрмитовых функционалов (неособый случай). Выясним теперь, при каких дополнительных условиях на показатель s и на ε инвариантный эрмитов функционал оказывается положительно определенным. Заметим, что если s — мнимое число, то инвариантный эрмитов функционал имеет вид

$$(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx. \qquad (1)$$

Ясно, что этот функционал является положительно определенным. Таким образом, нам нужно рассмотреть только случаи, когда s — вещественное число.

В этом пункте мы рассмотрим неособый случай, когда представление $T_\chi(g)$ не является аналитическим. Особый случай будет рассмотрен отдельно в следующем пункте.

Заметим, что в неособом случае представления $T_\chi(g)$, $\chi=(s, \varepsilon)$, и $T_{-\chi}(g)$, $-\chi=(-s, \varepsilon)$, эквивалентны. Поэтому, не нарушая общности, можно предполагать, что $s<0$.

При $s<0$ инвариантный эрмитов функционал задается сходящимся интегралом

$$(\varphi, \psi)=i^{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x_2|^{-s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}(x_1-x_2)\,\varphi(x_1)\overline{\psi(x_2)}\,dx_1\,dx_2. \qquad (2)$$

Запишем выражение для инвариантного эрмитова функционала в однородных координатах, предполагая, что пространство D_s реализовано как пространство однородных функций.

Мы получим

$$(\varphi, \psi)=i^{\varepsilon}\int|x_1x_2'-x_2x_2'|^{-s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}(x_1x_2'-x_2x_1')\times$$
$$\times\varphi(x_1, x_2)\overline{\psi(x_1', x_2')}\,d\omega\,d\omega'. \qquad (2')$$

Здесь интегрирование ведется по контурам ω на плоскости (x_1, x_2) и ω' на плоскости (x_1', x_2'), пересекающимися со всеми прямыми, проходящими через начало;

$$d\omega=x_1\,dx_2-x_2\,dx_1;\quad d\omega'=x_1'\,dx_2'-x_2'\,dx_1'.$$

Первоначальная формула (2) есть частный случай формулы (2′), когда в качестве контуров интегрирования взяты прямые $x_2=1$ и $x_2'=1$. Мы хотим выяснить, при каких условиях на s и ε этот функционал является знакоопределенным. Для этого в качестве контуров интегрирования удобно взять окружности $x_1=\cos\theta$, $x_2=\sin\theta$ и $x_1'=\cos\theta'$, $x_2'=\sin\theta'$. Тогда, если обозначить для краткости через $\varphi(\theta)$ значение однородной функции $\varphi(x_1, x_2)$ в точке $x_1=\cos\theta$, $x_2=\sin\theta$, мы получим

$$(\varphi, \psi)=i^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin(\theta-\theta')|^{-s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}\sin(\theta-\theta')\times$$
$$\times\varphi(\theta)\overline{\psi(\theta')}\,d\theta\,d\theta'.$$

Разложим функции $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ в ряды Фурье

$$\varphi(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{ik\theta},\quad \psi(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_k e^{ik\theta}.$$

По определению пространства D_χ (см. стр. 519—520), при $\varepsilon=0$ эти разложения содержат только члены с четными k, а при $\varepsilon=1$ — только с нечетными.

Тогда функционал (φ, ψ) можно представить в виде эрмитовой формы от a_k и b_k. Именно,

$$(\varphi, \psi)=4\pi^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_{-k}a_k\overline{b}_k, \qquad (3)$$

где λ_k — коэффициент Фурье для $i^{\varepsilon}|\sin\theta|^{-s-1}\operatorname{sign}^{\varepsilon}\sin\theta$.

В эту сумму при $\varepsilon=0$ входят только члены с четными индексами, а при $\varepsilon=1$ — только с нечетными.

Мы будем называть такую запись эрмитова функционала канонической.

Чтобы установить, когда форма (φ, ψ) знакоопределенна, нам остается вычислить коэффициенты λ_k. Значения этих коэффициентов выражаются следующими формулами.

Для представлений с $\varepsilon=0$

$$\lambda_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{-s-1}\theta\cos 2k\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{2^{s+1}\Gamma(-s)(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}-k\right)}. \qquad (4)$$

Для представлений с $\varepsilon=1$

$$\lambda_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{-s-1}\theta\sin(2k+1)\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{2^{s+1}\Gamma(-s)(-1)^k}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}-k\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}+k+1\right)}\text{*)}. \qquad (4')$$

Отсюда, прежде всего, видно, что если представление не является аналитическим (то есть $s\neq-1, -3, \ldots$ в случае, когда $\varepsilon=0$, и $s\neq-2, -4, \ldots$ в случае, когда $\varepsilon=1$), то коэффициенты формы (3) отличны от нуля.

Таким образом, в неособом случае (то есть когда представление не аналитично) инвариантная эрмитова форма является невырожденной.

Теперь определим знаки коэффициентов λ_k в канонической записи эрмитова функционала. В случае представлений с $\varepsilon=0$ мы имеем

$$\operatorname{sign}\lambda_{2k}=(-1)^k\operatorname{sign}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}-k\right).$$

Отсюда непосредственно следует, что $\operatorname{sign}\lambda_{2k}=\operatorname{sign}\lambda_{-2k}$ и

*) См., например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, стр. 181, формулы 3.454.

что при $|k|>\frac{-s-1}{2}$ коэффициенты λ_{2k} имеют постоянный знак, а при $|k|<\frac{-s+1}{2}$ знаки коэффициентов чередуются. Тем самым доказано, что если $\chi=(s, 0)$, где $s<0$ и $s\neq-1, -3, \ldots$ (то есть представление $T_\chi(g)$ не является аналитическим), то инвариантный эрмитов функционал

$$(\varphi, \psi)=\int|x_1-x_2|^{-s-1}\varphi(x_1)\overline{\psi(x_2)}\,dx_1\,dx_2$$

является положительно определенным только при $0>s>-1$. В интервале $-4n-1>s>-4n-3$ этот функционал имеет в канонической записи $2n+1$ положительных коэффициентов; остальные коэффициенты отрицательны. В интервале $-4n+1>s>-4n-1$ функционал имеет в канонической записи $2n$ отрицательных коэффициентов; остальные коэффициенты положительны.

Пусть теперь $\chi=(s, 1)$, где $s<0$ и $s\neq-2, -4, \ldots$ Тогда, как легко видеть из формулы (4′) для λ_{2k+1},

$$\operatorname{sign}\lambda_{2k+1}=-\operatorname{sign}\lambda_{-2k+1}$$

для достаточно больших $|k|$ $\left(\text{именно, для таких } k, \text{ для которых } \operatorname{sign}\left(-\frac{s}{2}-k\right)=-\operatorname{sign}\left(-\frac{s}{2}+k\right)\right)$. Таким образом, инвариантная эрмитова форма для представлений $T_\chi(g)$, $\chi=(s, 1)$, содержит в канонической записи как бесконечное число членов со знаком плюс, так и бесконечное число членов со знаком минус.

Итак, установлен следующий результат. *Инвариантным положительно определенным функционалом обладают среди неаналитических представлений только представления следующих классов*:

1) *Представления, для которых s есть чисто мнимое число. Эти представления будем называть представлениями основной серии.*

2) *Представления с $\varepsilon=0$ и с вещественным $s\neq0$, где $|s|<1$. Эти представления мы будем называть представлениями дополнительной серии.*

Инвариантный положительно определенный функционал задается следующим образом.

Для представлений основной серии

$$(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx;$$

для представлений дополнительной серии при $s<0$

$$(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1-x_2|^{-s-1}\varphi(x_1)\overline{\psi(x_2)}\,dx_1\,dx_2$$

(при $s>0$ следует изменить знак перед интегралом).

3. Инвариантные эрмитовы функционалы в случае аналитических представлений. Теперь мы исследуем инвариантные эрмитовы функционалы в особом случае, когда представление аналитическое. Это значит, что оператор представления $T_s(g)$ задается формулой

$$T_s(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)(\beta x+\delta)^{s-1},$$

где s — целое число. Сначала рассмотрим случай, когда $s=0, 1, \ldots$ В этом случае, как было показано в п. 1, любой инвариантный эрмитов функционал в пространстве D_s есть линейная комбинация следующих функционалов:

$$(\varphi, \psi)_+=i^{-s}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_+^{(s)}(x)\overline{\psi(x)}\,dx$$

и

$$(\varphi, \psi)_-=i^{s}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_-^{(s)}(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

Здесь

$$\varphi_+^{(s)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1-x-i0},$$

$$\varphi_-^{(s)}(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi^{(s)}(x_1)\,dx_1}{x_1-x+i0}.$$

Каждый из этих функционалов является вырожденным. Именно, функционал $(\varphi, \psi)_+$ вырождается на подпространстве D_s^- всех функций $\varphi(x)$, для которых $\varphi_+^{(s)}(x)=0$ (это значит, что для любой функции $\psi\in D_s$ и для любой функции $\varphi\in D_s^-$ имеем $(\varphi, \psi)_+=0$). Аналогично, функционал $(\varphi, \psi)_-$ вырождается на подпространстве D_s^+ всех функций $\varphi(x)$, для которых $\varphi_-^{(s)}(x)=0$. Подпространства D_s^+ и D_s^- мы уже рассматривали в п. 3 § 4. Мы установили, что их пересечение есть подпространство E_s многочленов степени $\leqslant s-1$, а их сумма совпадает со всем пространством D_s. Тем самым фактор-пространство D_s/E_s является прямой суммой пространств D_s^+/E_s и D_s^-/E_s:

$$D_s/E_s=D_s^+/E_s+D_s^-/E_s.$$

Кроме того, было показано, что подпространства D_s^+ и D_s^- инвариантны.

Будем рассматривать $(\varphi, \psi)_+$ как эрмитов функционал в пространстве D_s^+/E_s. Ясно, что в пространстве D_s^+/E_s этот функционал не вырождается. Покажем, что *функционал $(\varphi, \psi)_+$, рассматриваемый в фактор-пространстве D_s^+/E_s, является положительно определенным.* Для этого перейдем от функций $\varphi(x)$ к их преобразованиям Фурье

$$\tilde{\varphi}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{i\xi x}\,dx. \tag{1}$$

Заметим, что интеграл (1), вообще говоря, не сходится, поскольку при $|x|\to\infty$ функция $\varphi(x)$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\varphi(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{s-1}a_kx^k.$$

Однако поскольку эта функция определена с точностью до многочлена степени $s-1$, то можно всегда предполагать, что ее асимптотический ряд начинается с члена $a_{-1}x^{-1}$, и значит, $\varphi(x)$ имеет интегрируемый квадрат. Тогда интеграл (1) определен в смысле сходимости в среднем.

Имеем $\widetilde{\varphi^{(s)}(x)} = (-i)^s \xi^s \tilde{\varphi}(\xi)$. Отсюда легко получаем *)

$$\widetilde{\varphi_+^{(s)}(x)} = i^s \xi_-^s \tilde{\varphi}(\xi).$$

Следовательно, в силу формулы順Планшереля имеем

$$(\varphi, \psi)_+ \equiv$$

$$\equiv i^{-s} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_+^{(s)}(x) \overline{\psi(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} |\xi|^s \tilde{\varphi}(\xi) \overline{\tilde{\psi}(\xi)}\, d\xi. \qquad (2)$$

Заметим, что, поскольку функция $\varphi(x)$ гранична к аналитической в верхней полуплоскости, ее преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(\xi)$ есть функция, сосредоточенная на полуоси $-\infty < \xi < 0$.

Из формулы (2) непосредственно следует, что функционал $(\varphi, \psi)_+$ положительно определен в пространстве D_s/E_s. Такими же рассуждениями можно показать, что *функционал* $(\varphi, \psi)_-$, *рассматриваемый в фактор-пространстве* D_s^-/E_s, *является положительно определенным.* Именно, этот функционал выражается через преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следующим образом:

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \xi^s \tilde{\varphi}(\xi) \overline{\tilde{\psi}(\xi)}\, d\xi.$$

Итак, мы рассмотрели аналитические представления $T_s(g)$ для случая, когда $s = 0, 1, \ldots$

Пространство представления D_s содержит в этом случае три инвариантных подпространства — пространство E_s многочленов степени $\leqslant s-1$, пространство D_s^+ всех функций $\varphi(s)$, для которых

$$\varphi_-^{(s)}(x) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^{(s)}(x_1)\, dx_1}{x_1 - x + i0} = 0,$$

*) «Обобщенные функции», вып. 1, стр. 448. По определению, $\xi_-^s = |\xi|^s$ при $\xi < 0$ и $\xi_-^s = 0$ при $\xi > 0$.

и пространство D_s^- всех функций $\varphi(x)$, для которых

$$\varphi_+^{(s)}(x) \equiv -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^{(s)}(x_1)\, dx_1}{x_1 - x - i0} = 0.$$

Мы установили, что *в пространствах* D_s^+/E_s *и* D_s^-/E_s *существует инвариантный эрмитов положительно определенный функционал. В пространстве* D_s^+/E_s *этот функционал задается формулой*

$$(\varphi, \psi)_+ = i^{-s} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_+^{(s)}(x) \overline{\psi(x)}\, dx.$$

В пространстве же D_s^-/E_s *он задается формулой*

$$(\varphi, \psi) = i^s \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_-^{(s)}(x) \overline{\psi(x)}\, dx.$$

Рассмотрим теперь представления $T_s(g)$ при $s = -1, -2, \ldots$ В этом случае инвариантный эрмитов функционал в пространстве D_s задается формулой

$$(\varphi, \psi) = \int (x_1 - x_2)^{-s-1} \varphi(x_1) \overline{\psi(x_2)}\, dx_1\, dx_2.$$

Ясно, что этот функционал вырождается на подпространстве F_s всех таких функций $\varphi(x)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\, dx = 0$$

при $k = 0, 1, \ldots, -s-1$.

Мы видели уже в п. 3 § 4, что подпространство F_s есть прямая сумма двух инвариантных подпространств: подпространства F_s^+ функций из F_s, граничных к функциям, аналитическим в верхней полуплоскости, и подпространства F_s^- функций из F_s, граничных к функциям, аналитическим в нижней полуплоскости. *В каждом из подпространств* F_s^+ и F_s^- *можно задать инвариантный эрмитов положительно определенный функционал.* Это непосредственно следует из того, что представления в пространствах F_s^+ и F_s^- эквивалентны соответственно представлениям в пространствах D_{-s}^+/E_{-s} и D_{-s}^-/E_{-s}, $s=-1, \ -2, \ldots$ (см. п. 3 § 4). В последних же, как мы установили, существует инвариантный эрмитов положительно определенный функционал.

Приведем без вывода выражения для инвариантного эрмитова положительно определенного функционала в пространствах F_s^+ и F_s^-, $s=-1, -2, \ldots$ (случай пространств $F_0^+ \equiv D_0^+$ и $F_0^- \equiv D_0^-$ рассмотрен выше).

Инвариантный положительно определенный функционал в подпространстве F_s^+ *задается формулой*

$$(\varphi, \psi)_+ = \int (x_1 - x_2)^{-s-1} \ln (x_1 - x_2 - i0)\, \varphi(x_1) \overline{\psi(x_2)}\, dx_1\, dx_2. \tag{3}$$

Инвариантный положительно определенный функционал в подпространстве F_s^- *задается формулой*

$$(\varphi, \psi)_- = \int (x_1 - x_2)^{-s-1} \ln (x_1 - x_2 + i0)\, \varphi(x_1) \overline{\psi(x_2)}\, dx_1\, dx_2. \tag{3'}$$

Формулы (3) и (3′) можно получить сразу из выражений для инвариантных функционалов в пространствах D_{-s}^+/E_{-s} и D_{-s}^-/E_{-s}, поскольку операторы A_+ и A_- перехода от этих пространств к пространствам F_s^+ и F_s^- нам известны (см. формулы на стр. 559). Впрочем, нетрудно и непосредственно убедиться в том, что функционалы (3) и (3′) инвариантны и положительно определены *).

Мы условимся называть представления группы G в подпространствах $F_s^+ \cong D_{-s}^+/E_{-s}$ и $F_s^- \cong D_{-s}^-/E_{-s}$ ($s=0, -1, -2, \ldots$) *представлениями дискретной серии.*

4. Инвариантные положительно определенные эрмитовы функционалы в пространствах аналитических функций F_s^+ и F_s^-. Теперь рассмотрим другие реализации пространств F_s^+ и F_s^- и найдем выражения для инвариантных эрмитовых функционалов в этих реализациях. Напомним, что пространство F_s^+ можно задать как пространство функций $\varphi(z)$, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и бесконечно дифференцируемых в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ вместе с функциями $\hat{\varphi}(z) = z^{s-1}\varphi\left(-\frac{1}{z}\right)$. Оператор представления в этой реализации пространства F_s^+ задается формулой

$$T_s(g)\, \varphi(z) = \varphi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)(\beta z + \delta)^{s-1},$$

где $s=0, -1, -2, \ldots$

Найдем инвариантный эрмитов положительно определенный функционал в пространстве F_s^+, реализованном как пространство аналитических функций. Этот функционал можно было бы, конечно, найти, используя формулы для инвариантного функционала в старой реализации пространства F_s^+. Однако проще вычислить его непосредственно.

Именно, будем при $s<0$ искать инвариантный функционал в следующей форме:

$$(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int\limits_{\operatorname{Im} z > 0} \varphi(z) \overline{\psi(z)}\, \omega(z)\, dz\, d\bar{z}, \tag{1}$$

где $\omega(z)$ — подлежащая определению положительная функция. Заменяя здесь $\varphi(z)$ на $T_s(g)\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на $T_s(g)\psi(z)$, мы получим:

$$(T_s(g)\varphi,\ T_s(g)\psi) = \\ = \frac{i}{2} \int\limits_{\operatorname{Im} z>0} \varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right) \overline{\psi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)}\, |\beta z+\delta|^{2s-2}\, \omega(z)\, dz\, d\bar{z}.$$

Заменой переменной $\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta} = w$ этот интеграл приводится к виду

$$(T_s(g)\varphi,\ T_s(g)\psi) = \\ = \frac{i}{2} \int\limits_{\operatorname{Im} z>0} \varphi(w) \overline{\psi(w)}\, |\alpha - \beta w|^{-2s-2}\, \omega\left(\frac{\delta w-\gamma}{-\beta w+\alpha}\right) dw\, d\bar{w}.$$

*) На самом деле, формулы (3) и (3′) определяют функционалы на всем пространстве D_s. Однако рассматриваемые на всем пространстве D_s эти функционалы не инвариантны и не положительно определены.

Таким образом, условие инвариантности функционала имеет следующий вид:

$$\frac{i}{2}\int\limits_{\operatorname{Im} z>0}\varphi(z)\overline{\psi(z)}\,\omega(z)\,dz\,d\bar{z}=$$

$$=\frac{i}{2}\int\limits_{\operatorname{Im} z>0}\varphi(z)\overline{\psi(z)}\,|\alpha-\beta z|^{-2s-2}\omega\left(\frac{\delta z-\gamma}{-\beta z+\alpha}\right)dz\,d\bar{z}. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что функционал (φ, ψ) инвариантен тогда и только тогда, когда функция $\omega(z)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\omega\left(\frac{\delta z-\gamma}{-\beta z+\alpha}\right)=\omega(z)\,|\alpha-\beta z|^{2s+2}. \qquad (3)$$

Найдем из этого соотношения функцию $\omega(z)$. Подставим в (3) $z=i$ и положим $\omega(i)=1$. Мы получим

$$\omega\left(\frac{\delta i-\gamma}{-\beta i+\alpha}\right)=|\alpha-\beta i|^{2s+2}=|\alpha^2+\beta^2|^{s+1}.$$

Разделив вещественную и мнимую части числа $\dfrac{\delta i-\gamma}{-\beta i+\alpha}$, получим

$$\omega\left(-\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{i}{\alpha^2+\beta^2}\right)=|\alpha^2+\beta^2|^{s+1}.$$

Следовательно,

$$\omega(z)=(\operatorname{Im} z)^{-s-1}.$$

Нетрудно убедиться, что найденная функция $\omega(z)$ действительно удовлетворяет условию (3).

Итак, *инвариантный эрмитов функционал в пространстве* F_s^+ *функций* $\varphi(z)$, *аналитических в полуплоскости* $\operatorname{Im} z>0$, *задается* при $s=-1, -2, \ldots$ *формулой*

$$(\varphi, \psi)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\frac{i}{2}\int\limits_{\operatorname{Im} z>0}\varphi(z)\overline{\psi(z)}(\operatorname{Im} z)^{-s-1}dz\,d\bar{z}.\ ^{*)} \qquad (4)$$

*) Множитель $1/\Gamma(-s)$ введен для того, чтобы формула (4) сохраняла смысл и при $s=0$. Именно, так как $y_+^{-s-1}/\Gamma(-s)|_{s=0}=\delta(y)$, то при $s=0$ имеем

$$(\varphi, \psi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

(Этот функционал инвариантен — ср. стр. 571.)

Рассмотрим теперь реализацию пространства F_s^+ как пространства функций $\varphi_1(w)$, аналитических в круге $|w|<1$. Переход от функций $\varphi(z)$, аналитических в верхней полуплоскости, к функциям $\varphi_1(w)$ осуществляется по формуле

$$\varphi_1(w)=(1-w)^{s-1}\varphi\left(i\,\frac{1+w}{1-w}\right).$$

Пространство F_s^+ в этой реализации состоит из тех и только тех функций $\varphi_1(w)$, которые внутри круга $|w|<1$ являются аналитическими, а на границе круга бесконечно дифференцируемыми. В частности, эти функции $\varphi_1(w)$ являются ограниченными в круге. Оператор представления в этой реализации пространства F_s^+ задается следующей формулой:

$$T_s(g)\,\varphi(w)=\varphi\left(\frac{aw+b}{\bar{b}w+\bar{a}}\right)(\bar{b}w+\bar{a})^{s-1}, \qquad (5)$$

где для матрицы $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$ параметры a и b определяются следующим образом:

$$a=\frac{(\alpha+\delta)+i(\gamma-\beta)}{2}, \qquad b=\frac{(\alpha-\delta)-i(\gamma+\beta)}{2}$$

(см. стр. 561).

Найдем вид инвариантного эрмитова функционала в этой реализации пространства F_s^+. Сделав в формуле (4) для эрмитова функционала подстановку $z=i\,\dfrac{1+w}{1-w}$, мы сразу получим

$$(\varphi, \psi)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\frac{i}{2}\int\limits_{|w|<1}\varphi(w)\overline{\psi(w)}(1-w\bar{w})^{-s-1}dw\,d\bar{w}. \qquad (6)$$

Заметим, что поскольку функции $\varphi(w)$ ограничены в круге, то $(\varphi, \varphi)<\infty$ для любой функции $\varphi(w)$ из F_s^+.

Формулу для функционала (φ, ψ) можно также представить в виде ряда. Для этого заметим, что функции $1, w, w^2, \ldots$ образуют полную ортогональную систему относительно скалярного произведения (6) в пространстве F_s^+. При этом

$$(w^k, w^k)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\frac{i}{2}\int\limits_{|w|<1}|w|^{2k}(1-|w|^2)^{-s-1}dw\,d\bar{w}=\pi\frac{k!}{(k-s)!}.$$

Следовательно, для функций $\varphi(w)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$, $\psi(w)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k$ из пространства F_s^+ функционал (φ, ψ) можно записать в виде ряда

$$(\varphi, \psi)=\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-s)!} a_k \bar{b}_k.$$

Отсюда видно, что *пополняя пространство F_s^+ по норме $\|\varphi\|=(\varphi, \varphi)^{1/2}$, мы получим пространство всех функций, аналитических в круге $|w|<1$, для которых $(\varphi, \varphi)<\infty$.*

5. Унитарные представления группы G операторами в гильбертовом пространстве. В пп. 2 и 3 были найдены условия, при которых в пространстве D_χ или, в особом случае, в некотором его инвариантном подпространстве существует эрмитов положительно определенный функционал (φ, ψ), инвариантный относительно операторов $T_\chi(g)$, то есть такой, что

$$(\varphi, \psi)=(T_\chi(g)\varphi, T_\chi(g)\psi).$$

Напомним, что такой функционал существует в трех случаях: 1) $\chi=(s, \varepsilon)$, s — чисто мнимое число, $\varepsilon=0, 1$, 2) $\chi=(s, 0)$, $-1<s<1$, $s\neq 0$, 3) $\chi=(s, \varepsilon)$, $s=0, -1, -2, \ldots$, $s+1$ одинаковой четности с ε. (В этом случае D_χ содержит два инвариантных подпространства, на каждом из которых существует свой инвариантный положительно определенный эрмитов функционал.)

В каждом из этих случаев эрмитов функционал можно рассматривать как скалярное произведение в соответствующем пространстве. Пополняя затем это пространство по норме

$$\|\varphi\|^2=(\varphi, \varphi),$$

мы получим гильбертово пространство H, в котором исходное пространство образует всюду плотное подмножество. Операторы представления $T_\chi(g)$ могут быть теперь однозначно продолжены до унитарных операторов на всем гильбертовом пространстве H. Эти операторы мы по-прежнему будем обозначать через $T_\chi(g)$.

Ясно, что продолженные на все гильбертово пространство операторы $T_\chi(g)$ по-прежнему удовлетворяют соотношению

$$T_\chi(g_1 g_2)=T_\chi(g_1)\, T_\chi(g_2).$$

Следовательно, они образуют представление группы G.

Итак, каждому представлению $T_\chi(g)$, обладающему инвариантным эрмитовым положительно определенным функционалом, соответствует представление группы G унитарными операторами в гильбертовом пространстве. Покажем, что при этом соответствии *эквивалентные представления переходят в унитарно эквивалентные, а неэквивалентные — в неэквивалентные.*

Мы разберем здесь неособый случай, когда рассматриваемые представления не принадлежат дискретной серии. Представления дискретной серии будут рассмотрены отдельно в п. 6.

Итак, предположим, что представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$, заданные в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2}, эквивалентны и обладают положительно определенными инвариантными функционалами. Эквивалентность представлений означает, что существует оператор A, взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображающий пространство D_{χ_1} на пространство D_{χ_2} и такой, что $AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A$. Пусть $(\varphi, \psi)_1$ и $(\varphi, \psi)_2$ — инвариантные эрмитовы функционалы в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2} соответственно. Эти функционалы определены с точностью до множителя однозначно. Поэтому они связаны соотношением

$$(\varphi, \psi)_1=c\,(A\varphi, A\psi)_2, \qquad c>0.$$

Следовательно, оператор A, нормированный подходящим образом, осуществляет изометрическое отображение пространства D_{χ_1} на пространство D_{χ_2}. Но тогда отображение A можно продолжить до изометрического отображения гильбертова пространства H_1 (пополнения D_{χ_1}) на гильбертово пространство H_2 (пополнение D_{χ_2}). Ясно, что свойство перестановочности $AT_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)A$ при этом сохранится.

Итак, доказано, что если представления $T_{\chi_1}(g)$, $T_{\chi_2}(g)$ эквивалентны и продолжаются до унитарных представлений в гильбертовых пространствах H_1 и H_2, то представления в пространствах H_1 и H_2 унитарно эквивалентны.

Обратно, пусть представления $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$ индуцируют в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 унитарно эквивалентные представления. Тогда существует такой изометрический оператор $\hat{A}$, отображающий пространство H_1 на H_2, что $\hat{A}\,T_{\chi_1}(g)=T_{\chi_2}(g)\,\hat{A}$. Пусть (φ,ψ) — инвариантное скалярное произведение в пространстве H_2. Введем эрмитов билинейный функционал на паре пространств H_1 и H_2:

$$B(\varphi,\psi)=(\hat{A}\varphi,\psi).$$

Этот функционал инвариантен относительно представлений $T_{\chi_1}(g)$ и $T_{\chi_2}(g)$. В частности, функционал $B(\varphi,\psi)$ можно рассматривать как инвариантный эрмитов функционал для пары пространств D_{χ_1} и D_{χ_2}. Но такой функционал может существовать лишь в том случае, когда представления одинаковой четности и либо $s_1=-\overline{s_2}$, либо $s_1=\overline{s_2}$. Из этих соотношений следует, что либо $s_1=s_2$, либо $s_1=-s_2$ (поскольку у рассматриваемых представлений s_1 и s_2 — вещественные или чисто мнимые числа). Следовательно, представления в пространствах D_{χ_1} и D_{χ_2} эквивалентны.

Приведем теперь классификацию унитарных представлений группы G.

Представления основной (непрерывной) серии. Представления строятся в гильбертовом пространстве функций $\varphi(x)$ на прямой, для которых

$$(\varphi,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\overline{\varphi(x)}\,dx<\infty.$$

Оператор представления задается формулой

$$T_\chi(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)|\beta x+\delta|^{i\rho-1}\operatorname{sign}^\varepsilon(\beta x+\delta).$$

Здесь ρ может принимать любые вещественные значения, и $\varepsilon=0,\ 1,\ \chi=(i\rho,\ \varepsilon)$.

Мы показали, что два представления основной серии эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую четность, а отвечающие им числа ρ либо совпадают, либо различаются знаком.

Представления дополнительной серии. Представления задаются вещественным параметром s, $-1<s<1$, $s\neq 0$. Для каждого заданного s представление строится в пространстве функций $\varphi(x)$ на прямой со скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\int|x_1-x_2|^{-s-1}\varphi(x_1)\overline{\psi(x_2)}\,dx_1\,dx_2$$

(при $0<s<1$ интеграл надо понимать в смысле регуляризованного значения). Оператор представления задается формулой

$$T_\chi(g)\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)|\beta x+\delta|^{s-1},$$

где $\chi=(s,\ 0)$.

Мы показали, что два представления дополнительной серии эквивалентны тогда и только тогда, когда отвечающие им числа s совпадают, либо различаются знаком.

Представления дискретной серии. Представления задаются целым числом $s=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ Каждому s отвечают два представления. Одно представление реализуется в пространстве функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, для которых

$$(\varphi,\ \psi)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\frac{i}{2}\int\limits_{\operatorname{Im} z>0}\varphi(z)\overline{\psi(z)}(\operatorname{Im} z)^{-s-1}dz\,d\bar{z}<\infty.$$

Другое представление реализуется в пространстве функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$, для которых

$$(\varphi,\ \psi)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\frac{i}{2}\int\limits_{\operatorname{Im} z<0}\varphi(z)\overline{\psi(z)}|\operatorname{Im} z|^{-s-1}dz\,d\bar{z}<\infty.$$

Оператор представления задается в обоих случаях формулой

$$T_s(g)\,\psi(z)=\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)(\beta z+\delta)^{s-1}.$$

В п. 6 будет показано, что представления дискретной серии попарно неэквивалентны.

6. Неэквивалентность представлений дискретной серии. Покажем, что представления дискретной серии попарно неэквивалентны. Для этого рассмотрим операторы $T_s(g)$, отвечающие матрицам $g=\begin{Vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{Vmatrix}$, и найдем собственные функции и собственные значения (спектр) этих операторов.

Мы покажем, что спектры операторов $T_s(g)$, отвечающих различным представлениям дискретной серии, оказываются различными. Отсюда вытекает неэквивалентность различных представлений дискретной серии.

Рассмотрим сначала представления $T_s(g)$ дискретной серии, которые реализуются в пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости. Удобно перейти к другой реализации этих представлений, а именно, реализовать представление в пространстве функций, аналитических внутри круга $|w|<1$; тогда согласно п. 4, скалярное произведение задается формулой

$$(\varphi,\ \psi)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\,\frac{i}{2}\int\limits_{|w|<1}\varphi(w)\,\overline{\psi(w)}\,(1-w\overline{w})^{-s-1}\,dw\,d\overline{w},$$

а оператор представления имеет следующий вид:

$$T_s(g)\,\varphi(w)=\varphi\left(\frac{aw+b}{\overline{b}\,w+\overline{a}}\right)(\overline{b}w+\overline{a})^{s-1}\,{}^{*)},$$

где для матрицы $g=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$ параметры a, b задаются следующим образом:

$$a=\frac{(\alpha+\delta)+i(\gamma-\beta)}{2},\qquad b=\frac{(\alpha-\delta)-i(\gamma+\beta)}{2}.$$

*) Напомним, что $s=0,\ -1,\ -2,\dots$

В частности, если $g=\begin{Vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{Vmatrix}$, то $a=e^{i\theta}$, $b=0$, а потому оператор представления, отвечающий этой матрице, задается следующей формулой:

$$T_s(g)\,\varphi(w)=\varphi(e^{2i\theta}w)\,e^{-i(s-1)\theta}.$$

Отсюда ясно, что собственные функции оператора $T_s(g)$ суть $1,\ w,\ \dots,\ w^k,\dots$ Им отвечают собственные значения

$$e^{-i(s-1)\theta},\ e^{-i(s-3)\theta},\ \dots,\ e^{-i(s-2k-1)\theta},\ \dots\ {}^{*)}.$$

Заметим, что все собственные значения оператора $T_s(g)$ имеют кратность 1; иными словами, оператор $T_s(g)$ имеет простой спектр.

Совершенно аналогично найдем, что если представление $T_s(g)$ реализуется в пространстве функций, аналитических в нижней полуплоскости, то собственными значениями оператора $T_s(g)$ будут

$$e^{i(s-1)\theta},\ e^{i(s-3)\theta},\ \dots,\ e^{i(s-2k-1)\theta},\ \dots$$

Мы видим, что у операторов $T_s(g)$ различных представлений дискретной серии спектры различны. Следовательно, и сами эти представления попарно неэквивалентны.

7. Пространственная неприводимость унитарных представлений. Мы покажем, что унитарные представления основной, дополнительной и дискретной серий являются пространственно неприводимыми. Это значит, что в пространстве представления не существует инвариантного подпространства, отличного от нулевого пространства и от всего пространства.

Доказательство пространственной неприводимости унитарных представлений основной и дополнительной серий проводится дословно так же, как и в п. 6 § 6 гл. III для группы комплексных матриц. Поэтому мы его опустим и остановимся на случае представлений дискретной серии. Реализуем представление в пространстве аналитических функций внутри

*) Собственные значения оператора $T_s(g)$, отвечающего матрице $g=\begin{Vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{Vmatrix}$, называют часто весами представления.

единичного круга. Оператор представления задается в этом случае формулой

$$T_s(g)\,\varphi(w)=\varphi\left(\frac{aw+b}{\bar{b}w+\bar{a}}\right)(\bar{b}w+\bar{a})^{s-1}.$$

Предположим, что представление пространственно приводимо. Тогда пространство представления распадается в прямую сумму попарно ортогональных инвариантных подпространств H_1 и H_2. Рассмотрим снова функции

$$1,\ w,\ w^2,\ \ldots$$

Эти функции являются собственными функциями операторов $T_s(g)$, $g=\begin{Vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{Vmatrix}$, причем отвечающие им собственные значения операторов $T_s(g)$ попарно различны.

Функции w^n образуют ортогональный базис. Заметим, что каждая из этих функций принадлежит одному из пространств H_1 и H_2. В самом деле, если бы это было не так, то мы имели бы для некоторой функции w^n разложение

$$w^n=h_1+h_2,\qquad h_1\neq 0,\ h_2\neq 0,$$

где $h_1\in H_1$, $h_2\in H_2$. Легко видеть, что тогда h_1, h_2 также были бы собственными функциями операторов $T_s(g)$, $g=\begin{Vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{Vmatrix}$ и притом с тем же собственным значением, что и w^n. Но это невозможно, поскольку, как было показано в п. 6, оператор $T_s(g)$ имеет простой спектр.

Предположим для определенности, что функция $\varphi(w)\equiv 1$ лежит в подпространстве H_2. Тогда в разложении любой функции $\varphi(w)$ из H_1 в ряд по степеням w отсутствует свободный член. Тем самым все функции $\varphi(w)$ из H_1 равны нулю при $w=0$. Поскольку пространство H_1 непусто, то в нем содержится по крайней мере одна из функций $w,\ w^2,\ \ldots$, скажем w^k. Применим к функции w^k оператор $T_s(g)$, где $g=\begin{Vmatrix}\lambda^{-1} & 0\\ 0 & \lambda\end{Vmatrix}$. Мы получим снова функцию из подпространства H_1, а потому эта функция должна обращаться в нуль при $w=0$.

Между тем

$$T_s(g)\,w^k=\frac{(aw+b)^k}{(bw+a)^{k-s+1}},$$

где

$$a=\frac{\lambda+\lambda^{-1}}{2},\qquad b=\frac{\lambda-\lambda^{-1}}{2}.$$

Следовательно, $T_s(g)\,w^k|_{w=0}\neq 0$. Итак, предположив, что представление дискретной серии пространственно приводимо, мы пришли бы к противоречию.

ДОБАВЛЕНИЕ

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Это Добавление является, по существу, кратким введением в теорию обобщенных функций одного и многих комплексных переменных. По своему построению и результатам оно тесно примыкает к содержанию выпуска 1, где рассматривались обобщенные функции вещественных переменных, и может читаться независимо от остального содержания книги.

Часть излагаемых здесь результатов используется в гл. II—IV. Для чтения этих глав следует ознакомиться с пп. 1—7 § 1 и пп. 1, 2, 3, 5, 7 § 2.

§ 1. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Переменные z и $\bar{z}$. Функции $f(x, y)$ двух вещественных переменных x и y удобнее в ряде случаев рассматривать как функции одного комплексного переменного $z = x + iy$. В связи с этим вместо операторов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ будем употреблять операторы дифференцирования по z и $\bar{z}$: $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Эти операторы $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ определим так, чтобы для них выполнялись обычные правила дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).$$

Отсюда получаются следующие выражения для операторов $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1'}$$

Заметим, что оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ выражается через операторы $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ следующим образом:

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}.$$

Приведем несколько примеров на дифференцирование по z и $\bar{z}$:

1) $\frac{\partial}{\partial z}|z|^2 = \frac{\partial}{\partial z}(z\bar{z}) = \bar{z}$. Аналогично, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|z|^2 = z$.

2) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^n = 0$.

3) Пусть $P(x, y)$ — многочлен от x и y. Подставив в него $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, мы представим $P(x, y)$ как многочлен от z и $\bar{z}$: $P(x, y) = P_1(z, \bar{z})$. Нетрудно убедиться, что дифференцирование многочлена $P_1(z, \bar{z})$ по z и $\bar{z}$ производится так, как если бы z и $\bar{z}$ были независимыми переменными.

Когда мы будем пользоваться символами z и $\bar{z}$, то вместо $f(x, y)$ будем писать $f_1(z, \bar{z})$, понимая под этим, что

$$f_1(z, \bar{z}) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right). \tag{2}$$

При таком способе записи будем обозначать аналитические функции через $f(z)$. Основание для этого в том, что условия Коши — Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ для функции $f = u + iv$ можно записать в виде $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Аналогично, функции антианалитические определяются условием $\frac{\partial f}{\partial z}=0$. Поэтому их естественно обозначать через $f(\bar z)$ *). (Отметим, что если f — аналитическая функция, то $\bar f$ — антианалитическая.)

Напишем теперь ряд Маклорена по степеням z и $\bar z$ для произвольной функции $f(x, y)=f_1(z, \bar z)$. Пусть

$$f(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0)=$$

$$=\sum_{j, k=0}^{\infty}\frac{\partial^{j+k}f(0, 0)}{\partial x^j\,\partial y^k}\,\frac{x^j y^k}{j!\,k!}.$$

Мы легко убеждаемся, что

$$x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}=z\frac{\partial}{\partial z}+\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}.$$

Поэтому в переменных z, $\bar z$ ряд Маклорена имеет следующий вид (вместо f_1 мы пишем f):

$$f(z, \bar z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(z\frac{\partial}{\partial z}+\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^n f(0, 0)=$$

$$=\sum_{j, k=0}^{\infty}\frac{f^{(j, k)}(0, 0)}{j!\,k!}\,z^j\bar z^k, \tag{3}$$

где введено следующее обозначение:

$$f^{(j, k)}(z, \bar z)\equiv\frac{\partial^{j+k}f(z, \bar z)}{\partial z^j\,\partial \bar z^k}.$$

В частности, для аналитических функций этот ряд не содержит членов с $\bar z$, а для антианалитических функций — членов с z.

При *интегрировании* функций $f(z, \bar z)$ удобно вместо дифференциальной формы $dx\,dy$ рассматривать форму $dz\,d\bar z$. Эта форма определяется как внешнее произведение дифферен-

*) Этого соглашения мы будем придерживаться только первое время, пока читатель не привыкнет к символике. В дальнейшем мы часто будем ради краткости обозначать через $f(z)$ любую (а не только аналитическую) функцию от z, $\bar z$.

циальных форм $dz=dx+i\,dy$ и $d\bar z=dx-i\,dy$, то есть

$$dz\,d\bar z=(dx+i\,dy)(dx-i\,dy)=-2i\,dx\,dy.$$

Таким образом, имеем

$$dx\,dy=\frac{i}{2}\,dz\,d\bar z. \tag{4}$$

При интегрировании по комплексной плоскости справедливо следующее правило замены переменных.

Пусть $z=\varphi(\zeta)$ — аналитическая функция от ζ, отображающая взаимно однозначно область D_ζ плоскости ζ на область D_z плоскости z. Тогда

$$\frac{i}{2}\int_{D_z} f(z, \bar z)\,dz\,d\bar z=\frac{i}{2}\int_{D_\zeta} f[\varphi(\zeta), \overline{\varphi(\zeta)}]\,|\varphi'(\zeta)|^2\,d\zeta\,d\bar\zeta. \tag{5}$$

В самом деле, в этом случае $dz=\varphi'(\zeta)\,d\zeta$, $d\bar z=\overline{\varphi'(\zeta)}\,d\bar\zeta$.

Легко проверяется также формула интегрирования по частям

$$\frac{i}{2}\int \varphi^{(j, k)}(z, \bar z)\,f(z, \bar z)\,dz\,d\bar z=$$

$$=(-1)^{j+k}\,\frac{i}{2}\int \varphi(z, \bar z)\,f^{(j, k)}(z, \bar z)\,dz\,d\bar z, \tag{6}$$

где $\varphi(z, \bar z)$ и $f(z, \bar z)$ — достаточно гладкие финитные функции.

2. Однородные функции комплексного переменного. Пусть λ и μ — любые комплексные числа, разность которых $\lambda-\mu$ есть целое число. *Функция $F(z, \bar z)$ называется однородной функцией степени однородности* (λ, μ), *если для любого комплексного числа $a\neq 0$ выполняется соотношение*

$$F(az, \overline{az})=a^\lambda\bar a^\mu F(z, \bar z)\ ^{*)}. \tag{1}$$

Казалось бы, можно определить однородные функции более общим условием

$$F(az, \overline{az})=\alpha(a)\,F(z, \bar z). \tag{1'}$$

Однако из соотношения (1′) вытекает, что функция $\alpha(a)$ должна

*) По определению, $a^\lambda\bar a^\mu\equiv|a|^{\lambda+\mu}e^{i(\lambda-\mu)\arg a}$; при целом $\lambda-\mu$ это — однозначная функция от a.

удовлетворять функциональному уравнению

$$\alpha(ab)=\alpha(a)\,\alpha(b).$$

Решая это уравнение (например, переходом к полярным координатам), мы получаем, что

$$\alpha(a)=a^{\lambda}\bar{a}^{\mu},$$

где λ и μ — любые комплексные числа, связанные лишь условием, что $\lambda-\mu$ — целое число.

Однородную *обобщенную* функцию $F(z,\bar{z})$ степени однородности (λ,μ) мы определим тем же соотношением (1).

Чтобы придать этому соотношению смысл, перепишем его в том виде, который годится для обобщенных функций. Функции $F(z,\bar{z})$ отвечает функционал

$$(F,\varphi)=\frac{i}{2}\int F(z,\bar{z})\,\varphi(z,\bar{z})\,dz\,d\bar{z}.$$

С помощью формальной замены переменных получаем

$$\left(F,\ \varphi\left(\frac{z}{a},\ \frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)\right)=a\bar{a}\,\frac{i}{2}\int F(az,\overline{az})\,\varphi(z,\bar{z})\,dz\,d\bar{z}.$$

Следовательно, условие, что F — однородная обобщенная функция степени однородности (λ,μ), выражается следующим образом:

$$\left(F,\ \varphi\left(\frac{z}{a},\ \frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)\right)=a^{\lambda+1}\bar{a}^{\mu+1}(F,\ \varphi(z,\bar{z})). \tag{2}$$

Мы покажем в дальнейшем (п. 6), что для любой пары комплексных чисел λ, μ разность между которыми — целое число, существует с точностью до множителя одна и только одна однородная обобщенная функция степени однородности (λ,μ).

3. Однородные обобщенные функции $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$. В этом пункте мы определим однородные обобщенные функции $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$ в пространстве K финитных бесконечно дифференцируемых функций. Пусть сначала $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>-2$. Тогда *определим обобщенную функцию $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$ сходящимся интегралом*

$$(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},\ \varphi)=\frac{i}{2}\int z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\varphi(z,\bar{z})\,dz\,d\bar{z}, \tag{1}$$

где φ — финитная бесконечно дифференцируемая функция. Ясно, что $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$ является однородной функцией степени однородности (λ,μ).

Теперь нам нужно определить обобщенную функцию $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$ для случая, когда $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)<-2$. Формула (1) для такого определения уже не годится, поскольку интеграл в этой формуле расходится. Однако мы покажем, что этот интеграл можно регуляризовать, причем регуляризованное значение интеграла задает однородную обобщенную функцию.

Введем новые обозначения $\lambda+\mu=s$, $\lambda-\mu=n$ (напомним читателю, что n — всегда целое число, а s может быть любым комплексным числом). Переходя в формуле (1) к полярным координатам, $z=re^{i\alpha}$, мы получим

$$(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},\ \varphi)=\int_0^{\infty} r^{s+1}\varphi_n(r)\,dr, \tag{2}$$

где положено

$$\varphi_n(r)=\int_0^{2\pi}\varphi(re^{i\alpha},\ re^{-i\alpha})\,e^{in\alpha}\,d\alpha.$$

Будем теперь считать, что финитная бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(z,\bar{z})$ и целое число n фиксированы. Тогда выражение $(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},\ \varphi)$, определенное формулой (2), является аналитической функцией от s при $\operatorname{Re}s>-2$. Продолжим эту функцию аналитически на область $\operatorname{Re}s<-2$. Это аналитическое продолжение (в точках регулярности, то есть при $s\neq-2,-3,\ldots$) мы и примем за определение функционала $(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},\ \varphi)$ при $\operatorname{Re}s<-2$.

Ясно, что при аналитическом продолжении по s сохраняется свойство однородности, выражаемое формулой

$$\left(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},\ \varphi\left(\frac{z}{a},\ \frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)\right)=a^{\lambda+1}\bar{a}^{\mu+1}\left(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},\ \varphi(z,\bar{z})\right).$$

Таким образом, функционал $(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi)$ определяет в точках регулярности по s однородную обобщенную функцию. Эту обощенную функцию и будем обозначать через $z^\lambda \bar z^\mu$.

Итак, *однородную обобщенную функцию $z^\lambda \bar z^\mu$ мы определили интегралом*

$$(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi) = \frac{i}{2}\int z^\lambda \bar z^\mu \varphi(z, \bar z)\, dz\, d\bar z.$$

Этот интеграл сходится, когда $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) > -2$, и является аналитической функцией от $s=\lambda+\mu$ при $\operatorname{Re} s > -2$. При $\operatorname{Re} s < -2$ этот интеграл нужно понимать в смысле аналитического продолжения по s (при фиксированном значении разности $\lambda-\mu$).

Найдем теперь выражение для обобщенной функции $z^\lambda \bar z^\mu$. Для этого преобразуем интеграл $(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi)$, $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) > -2$, к виду

$$(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi) =$$
$$= \frac{i}{2}\int\limits_{|z|\leqslant 1} z^\lambda \bar z^\mu \left[\varphi(z, \bar z) - \sum_{k+l=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k,l)}(0,0)}{k!\,l!} z^k \bar z^l\right] dz\, d\bar z +$$
$$+ \frac{i}{2}\int\limits_{|z|>1} z^\lambda \bar z^\mu \varphi(z, \bar z)\, dz\, d\bar z +$$
$$+ \sum_{k+l=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k,l)}(0,0)}{k!\,l!} \frac{i}{2}\int\limits_{|z|\leqslant 1} z^{\lambda+k} \bar z^{\mu+l}\, dz\, d\bar z. \qquad (3)$$

Последние интегралы можно непосредственно вычислить. Именно, переходя к полярным координатам, имеем

$$\frac{i}{2}\int\limits_{|z|\leqslant 1} z^{\lambda+k}\bar z^{\mu+l}\, dz\, d\bar z = \int_0^1 r^{k+l+s+1}\, dr \int_0^{2\pi} e^{i(k-l+n)\alpha}\, d\alpha =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2\pi}{k+l+s+2}, & \text{если } k-l=-n, \\ 0, & \text{если } k-l\neq -n. \end{cases}$$

Таким образом, формулу для $(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi)$ при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) > -2$ можно представить в следующем виде:

$$(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi) = \frac{i}{2}\int\limits_{|z|\leqslant 1} z^\lambda \bar z^\mu \left[\varphi(z, \bar z) - \sum_{k+l=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k,l)}(0,0)}{k!\,l!} z^k \bar z^l\right] dz\, d\bar z +$$
$$+ \frac{i}{2}\int\limits_{|z|>1} z^\lambda \bar z^\mu \varphi(z, \bar z)\, dz\, d\bar z + 2\pi \sum_{\substack{k+l=0\\ k-l=-n}}^{m-1} \frac{\varphi^{(k,l)}(0,0)}{k!\,l!\,(k+l+s+2)}. \qquad (4)$$

Равенство (4) определяет обобщенную функцию $z^\lambda \bar z^\mu$ при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) > -m-2$. Первое и второе слагаемые в этом равенстве — аналитические функции от $s=\lambda+\mu$ при $\operatorname{Re} s > -m-2$. Поэтому единственные особенности обобщенной функции $z^\lambda \bar z^\mu$ — это особенности третьего слагаемого при $s=-k-l-2$, $-n=k-l$, то есть при $\lambda=-k-1$, $\mu=-l-1$. Итак, *обобщенная функция $z^\lambda \bar z^\mu$ регулярна всюду, за исключением точек $\lambda, \mu = -1, -2, \ldots$ В этих точках обобщенная функция $z^\lambda \bar z^\mu$, рассматриваемая как функция от $s=\lambda+\mu$ (при фиксированном целом числе $n=\lambda-\mu$), имеет простые полюсы.* В точках регулярности, принадлежащих области $\operatorname{Re} s > -m-2$, функционал $(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi)$ задается формулой (4). Вычет функции $(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi)$ в особых точках $\lambda=-k-1$, $\mu=-l-1$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$ задается формулой

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} (z^\lambda \bar z^\mu, \varphi) = \frac{2\pi}{k!\,l!}\varphi^{(k,l)}(0,0)\text{*)}. \qquad (5)$$

Это равенство можно записать также следующим образом:

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} z^\lambda \bar z^\mu = 2\pi \frac{(-1)^{k+l}}{k!\,l!}\delta^{(k,l)}(z, \bar z), \qquad (6)$$

где дельта-функция $\delta(z, \bar z)$ определяется формулой

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0, 0)$$

---

*) Этот вычет нужно понимать как вычет функции от $s=\lambda+\mu$ при фиксированном значении $\lambda-\mu$.

и

$$\delta^{(k,l)}(z, \bar z) = \frac{\partial^{k+l}\delta(z, \bar z)}{\partial z^k \partial \bar z^l}\ ^{*)}.$$

Отметим, что в области $-m-2 < \operatorname{Re}(\lambda+\mu) < -m-1$ выражение для $(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi)$ можно привести к более простому виду:

$$(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi) = \frac{i}{2}\int z^\lambda \bar z^\mu \left[\varphi(z, \bar z) - \sum_{k+l=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k,l)}(0, 0)}{k!\,l!} z^k \bar z^l\right] dz\, d\bar z. \qquad (7)$$

Вместо обобщенной функции $z^\lambda \bar z^\mu$ удобно ввести нормированную ей обобщенную функцию

$$\frac{z^\lambda \bar z^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)},$$

где $s=\lambda+\mu$, $n=\lambda-\mu$. Функция $\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)$ имеет простые полюсы в точках $s=-k-l-2$, $-n=k-l$, $k, l=0, 1, 2, \ldots$, то есть при $\lambda, \mu=-1, -2, \ldots$, а, значит, в тех же точках, что и функция $z^\lambda \bar z^\mu$. Ее вычеты в этих точках выражаются формулой

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} \Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right) = \frac{2(-1)^j}{j!}, \qquad (8)$$

где $j=\frac{(k+l)-|k-l|}{2}=\min(k, l)$. Отсюда следует, что

$$\frac{z^\lambda \bar z^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)}$$

является целой аналитической функцией от $s=\lambda+\mu$ при любом фиксированном значении $\lambda-\mu$. Эта функция является однородной функцией от z и $\bar z$ степени однородности (λ, μ).

*) Производные обобщенной функции f определяются следующей формулой:

$$\left(\frac{\partial^{k+l} f}{\partial z^k \partial \bar z^l}, \varphi\right) = (-1)^{k+l}\left(f, \frac{\partial^{k+l}\varphi}{\partial z^k \partial \bar z^l}\right).$$

В силу (8) значение этой функции при $\lambda=-k-1$, $\mu=-l-1$ задается следующей формулой:

$$\left.\frac{z^\lambda \bar z^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)}\right|_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} = \frac{\pi(-1)^{k+l+j}\,j!}{k!\,l!}\,\delta^{(k,l)}(z, \bar z), \qquad (9)$$

где $j=\frac{(k+l)-|k-l|}{2}=\min(k, l)$.

Таким образом, *для каждой пары комплексных чисел* λ *и* μ *разность между которыми — целое число, мы построили однородную обобщенную функцию степени однородности* (λ, μ). Если хотя бы одно из чисел λ, μ отлично от $-1, -2, \ldots$, то эта обобщенная функция распределена по всей плоскости z. Если же $\lambda, \mu=-1, -2, \ldots$, то эта функция сосредоточена в точке $z=0$.

В п. 6 мы покажем, что других однородных обобщенных функций не существует.

4. Обобщенная функция z^{-k-1} и формулы ее дифференцирования. Как мы видели в п. 3, обобщенная функция $z^\lambda \bar z^\mu$, рассматриваемая как аналитическая функция от λ, μ, регулярна при $\lambda=-1, -2, \ldots$ и $\mu=0$. Таким образом, существует обобщенная однородная функция z^{-k-1}, где $k=0, 1, \ldots$ Эта обобщенная функция определяется как регуляризованное значение интеграла

$$(z^{-k-1}, \varphi) = \frac{i}{2}\int z^{-k-1}\varphi(z, \bar z)\,dz\,d\bar z, \qquad (1)$$

а именно, выполняя k раз интегрирование по частям по z в равенстве

$$(z^\lambda \bar z^\mu, \varphi) = \frac{i}{2}\int z^\lambda \bar z^\mu \varphi(z, \bar z)\,dz\,d\bar z$$

и полагая затем $\lambda=-k-1$, $\mu=0$, мы получаем

$$(z^{-k-1}, \varphi) = \frac{1}{k!}\,\frac{i}{2}\int z^{-1}\varphi^{(k,0)}(z, \bar z)\,dz\,d\bar z. \qquad (2)$$

Равенство (2) означает, что

$$z^{-k-1}=(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^k(z^{-1})}{\partial z^k}.$$

Вычислим производную обобщенной функции z^{-k-1} по $\bar{z}$. На первый взгляд может показаться, что эта производная равна нулю. Однако это не так, ибо функция z^{-k-1} не аналитична в точке $z=0$, где она имеет полюс. Поэтому при дифференцировании функции z^{-k-1} по $\bar{z}$ должна получиться обобщенная функция, сосредоточенная в точке $z=0$.

Для отыскания производной $\frac{\partial(z^{-k-1})}{\partial\bar{z}}$ воспользуемся формулой

$$\frac{\partial z^{-k-1+\alpha}\bar{z}^{\alpha}}{\partial\bar{z}}=\alpha z^{-k-1+\alpha}\bar{z}^{\alpha-1}.$$

Устремим α к нулю. Согласно п. 3 имеем

$$\lim_{\alpha\to 0}\alpha z^{-k-1+\alpha}\bar{z}^{\alpha-1}=\frac{1}{2}\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-1}} z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}=(-1)^k\frac{\pi}{k!}\delta^{(k,0)}(z,\bar{z}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial(z^{-k-1})}{\partial\bar{z}}=(-1)^k\frac{\pi}{k!}\delta^{(k,0)}(z,\bar{z}). \tag{3}$$

5. Присоединенные однородные функции. Обобщенная функция $F(z,\bar{z})$ называется *присоединенной однородной функцией* первого порядка степени однородности (λ,μ), если для любого комплексного числа $a\neq 0$ выполняется равенство

$$F(az,\overline{az})=a^{\lambda}\bar{a}^{\mu}[F(z,\bar{z})+\ln|a|F_0(z,\bar{z})], \tag{1}$$

где $F_0(z,\bar{z})$ — некоторая однородная обобщенная функция той же степени однородности. Аналогично можно определить присоединенные однородные обобщенные функции более высоких порядков.

Найдем присоединенные однородные функции степени однородности (λ,μ).

Пусть сначала λ, μ не являются одновременно целыми отрицательными числами. Тогда обобщенная функция $z^{\lambda+\frac{s}{2}}\bar{z}^{\mu+\frac{s}{2}}$ регулярна в окрестности точки $s=0$. Разлагая ее в окрестности этой точки в ряд Тэйлора, мы получим

$$z^{\lambda+\frac{s}{2}}\bar{z}^{\mu+\frac{s}{2}}=z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}+sz^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln|z|+\frac{s^2}{2!}z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln^2|z|+\ldots \tag{2}$$

Легко убедиться, что коэффициенты этого разложения, то есть обобщенные функции $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln|z|$, $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln^2|z|,\ldots$, являются присоединенными функциями соответственно первого, второго и т. д. порядков. Отметим, что в явном виде обобщенная функция $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln^m|z|$ задается формулой

$$(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln^m|z|,\varphi)=\frac{i}{2}\int z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}\ln^m|z|\varphi(z,\bar{z})\,dz\,d\bar{z}, \tag{3}$$

где интеграл следует понимать в смысле регуляризованного значения *).

Теперь рассмотрим особый случай, когда $\lambda=-k-1$, $\mu=-l-1$ $(k,l=0,1,\ldots)$. В этом случае обобщенная функция $z^{\lambda+\frac{s}{2}}\bar{z}^{\mu+\frac{s}{2}}$ имеет простой полюс при $s=0$. Разложим эту функцию в ряд Лорана по степеням s. Коэффициенты этого разложения снова будут присоединенными функциями. Свободный член ряда Лорана — присоединенную функцию первого порядка — мы будем обозначать через $z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}$; эта функция задается следующей формулой:

$$(z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1},\varphi)=$$
$$=\frac{i}{2}\int z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}\Bigg[\varphi(z,\bar{z})-\sum_{i+j=0}^{k+l-1}\frac{\varphi^{(i,j)}(0,0)}{i!\,j!}z^i\bar{z}^j-$$
$$-\theta(1-|z|)\sum_{i+j=k+l}\frac{\varphi^{(i,j)}(0,0)}{i!\,j!}z^i\bar{z}^j\Bigg]dz\,d\bar{z}, \tag{4}$$

где $\theta(x)=0$ при $x<0$ и $\theta(x)=1$ при $x>0$.

Эта формула непосредственно получается из выражения для $(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},\varphi)$, приведенного в п. 3 (формула (4)).

*) Регуляризация интеграла (3) определяется так же, как и регуляризация интеграла $(z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},\varphi)$, см. п. 3.

6. Теорема единственности для однородных обобщенных функций. В п. 3 мы построили для каждой пары комплексных чисел λ, μ, разность которых — целое число, однородную обобщенную функцию степени однородности (λ, μ) в пространстве K бесконечно дифференцируемых финитных функций. Здесь будет показано, что этими функциями исчерпываются все (с точностью до постоянного множителя) однородные обобщенные функции от z и $\bar{z}$. Иными словами, мы покажем, что с точностью до постоянного множителя существует одна и только одна однородная функция заданной степени однородности.

Сначала мы составим дифференциальные уравнения для однородных обобщенных функций. Пусть F — однородная обобщенная функция степени однородности (λ, μ), то есть

$$F(az, \overline{az}) = a^{\lambda}\bar{a}^{\mu} F(z, \bar{z}). \tag{1}$$

Дифференцируя равенство (1) по a и полагая $a = 1$, получаем

$$z\frac{\partial F}{\partial z} = \lambda F. \tag{2}$$

Аналогично, дифференцируя равенство (1) по $\bar{a}$ и полагая $\bar{a} = 1$, получаем

$$\bar{z}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \mu F. \tag{2'}$$

Таким образом, *однородные обобщенные функции* $F(z, \bar{z})$ *степени однородности* (λ, μ) *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений* (2), (2′). Решим эту систему уравнений. Перейдя к полярным координатам $z = re^{\alpha i}$; $\bar{z} = re^{-\alpha i}$, приведем систему уравнений к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[r\frac{\partial F}{\partial r} - i\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right] &= \lambda F, \\ \frac{1}{2}\left[r\frac{\partial F}{\partial r} + i\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right] &= \mu F. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При $r \neq 0$ эту систему можно интегрировать обычным способом. После несложных выкладок получаем

$$D = Cr^{\lambda+\mu}e^{i(\lambda-\mu)\alpha} = Cz^{\lambda}\bar{z}^{\mu}. \tag{4}$$

Итак, мы доказали, что *при* $z \neq 0$ *обобщенная однородная функция* $F(z, \bar{z})$ *степени однородности* (λ, μ) *совпадает с функцией* $Cz^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$.

Докажем теперь единственность обобщенной однородной функции для неособого случая $(\lambda, \mu) \neq (-k-1, -l-1)$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае обобщенная функция $z^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$, построенная в п. 3, отлична от нуля в окрестности любой точки z. Предположим, что $\Phi(z, \bar{z})$ также является однородной обобщенной функцией степени однородности (λ, μ). Как мы только что показали, в области $z \neq 0$ обобщенная функция $\Phi(z, \bar{z})$ должна иметь вид $\Phi(z, \bar{z}) = Cz^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$. Следовательно, функция

$$\Phi_1(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) - Cz^{\lambda}\bar{z}^{\mu}$$

сосредоточена в точке $z = 0$. Осталось показать, что $\Phi_1(z, \bar{z}) \equiv 0$. Для этого воспользуемся известным результатом *) о том, что всякая обобщенная функция двух переменных, сосредоточенная в точке $x = 0$, $y = 0$, является линейной комбинацией производных от $\delta(x, y)$.

Отсюда следует, что обобщенную функцию $\Phi_1(z, \bar{z})$, сосредоточенную в точке $z = 0$, можно представить в виде

$$\Phi_1(z, \bar{z}) = \sum_{k, l=0}^{n} c_{kl}\delta^{(k, l)}(z, \bar{z}).$$

Слагаемые этой суммы $c_{kl}\delta^{(k, l)}(z, \bar{z})$ являются однородными функциями степени однородности $(-k-1, -l-1)$. Следовательно, функция $\Phi_1(z, \bar{z})$, имеющая степень однородности (λ, μ), где $(\lambda, \mu) \neq (-k-1, -l-1)$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, равна нулю. Таким образом, установлено, что любая однородная обобщенная функция $\Phi(z, \bar{z})$ степени однородности (λ, μ), где $(\lambda, \mu) \neq (-k-1, -l-1)$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$, имеет вид

$$\Phi(z, \bar{z}) = Cz^{\lambda}\bar{z}^{\mu}.$$

Рассмотрим теперь особый случай, когда $\lambda = -k-1$, $\mu = -l = 1$, где $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае суще-

*) См. «Обобщенные функции», вып. 2, стр. 149.

ствует однородная обобщенная функция степени однородности $(-k-1, -l-1)$

$$\delta^{(k, l)}(z, \bar{z}) = \frac{\partial^{k+l}\delta(z, \bar{z})}{\partial z^k \partial \bar{z}^l},$$

сосредоточенная в точке $z=0$. Легко видеть, что других однородных обобщенных функций степени однородности $(-k-1, -l-1)$, сосредоточенных в точке $z=0$, не существует.

Покажем, что не существует также однородных обобщенных функций степени однородности $(-k-1, -l-1)$, распределенных по всей плоскости z. В самом деле, предположим, что $\Phi(z, \bar{z})$ — такая функция. Тогда эта обобщенная функция в области $z \neq 0$ совпадает с $Cz^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}$, $C \neq 0$. С другой стороны, существует, как мы видели в п. 5, однородная присоединенная функция $z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}$ степени однородности $(-k-1, -l-1)$. Эта обобщенная функция совпадает с функцией $z^{-k-1}\bar{z}^{-l-1}$ при $z \neq 0$ *). Разность

$$\Phi_1(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) - Cz^{-l-1}\bar{z}^{-k-1}$$

является присоединенной однородной функцией, сосредоточенной в точке $z=0$. Однако все обобщенные функции, сосредоточенные в точке $z=0$, являются линейными комбинациями однородных функций $\delta^{(k, l)}(z, \bar{z})$, а потому не могут быть присоединенными однородными функциями. Тем самым доказано, что однородная обобщенная функция степени однородности $(-k-1, -l-1)$ должна быть сосредоточена в точке $z=0$.

Итак, установлено, что каждой паре комплексных чисел λ, μ, разность которых — целое число, отвечает, с точностью до множителя, одна и только одна однородная обобщенная функция степени однородности (λ, μ).

Нетрудно показать теми же рассуждениями, что каждой паре комплексных чисел λ, μ ($\lambda - \mu$ — целое) отвечает, с точностью до однородного слагаемого, одна и только одна обобщенная присоединенная однородная функция любого порядка степени однородности (λ, μ).

*) См. формулу (4) п. 5.

7. Преобразование Фурье основных и обобщенных функций. Преобразованием Фурье бесконечно дифференцируемой финитной функции $\varphi(z, \bar{z})$ назовем функцию $\tilde{\varphi}(w, \bar{w})$, определенную формулой

$$\tilde{\varphi}(w, \bar{w}) = \frac{i}{2}\int \varphi(z, \bar{z})\, e^{i\operatorname{Re}(zw)}\, dz\, d\bar{z} = \frac{i}{2}\int \varphi(z, \bar{z})\, e^{\frac{i}{2}(zw + \bar{z}\bar{w})}\, dz\, d\bar{z}. \quad (1)$$

Если перейти от комплексных переменных z, w к вещественным, положив $z = x + iy$, $w = u + iv$, то формула (1) принимает следующий вид:

$$\tilde{\varphi}(u, v) = \int \varphi(x, y)\, e^{i(xu - yv)}\, dx\, dy. \quad (1')$$

Таким образом, с точностью до знака аргумента v, функция $\tilde{\varphi}$ совпадает с обычным преобразованием Фурье функции φ, если последнюю рассматривать как функцию двух вещественных переменных x и y *).

Если $\varphi(z, \bar{z})$ и $f(z, \bar{z})$ — две основные функции, а $\tilde{\varphi}(w, \bar{w})$ и $\tilde{f}(w, \bar{w})$ — их преобразования Фурье, то имеет место соотношение

$$\frac{i}{2}\int f(z, \bar{z})\overline{\varphi(z, \bar{z})}\, dz\, d\bar{z} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{i}{2}\int \tilde{f}(w, \bar{w})\overline{\tilde{\varphi}(w, \bar{w})}\, dw\, d\bar{w}. \quad (2)$$

Его называют равенством Планшереля. Это равенство показывает, что $\tilde{f}(w, \bar{w})$, как обобщенная функция, действует на функцию $\overline{\tilde{\varphi}(w, \bar{w})}$ по формуле

$$(\tilde{f}, \bar{\tilde{\varphi}}) = 4\pi^2 (f, \bar{\varphi}). \quad (3)$$

*) Иногда удобно определять преобразование Фурье другой формулой:

$$\tilde{\varphi}(w, \bar{w}) = \frac{i}{2}\int \varphi(z, \bar{z})\, e^{\frac{i}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)}\, dz\, d\bar{z}.$$

При таком определении функция $\tilde{\varphi}$ совпадает с обычным преобразованием Фурье функции φ, рассматриваемой как функция x и y. В данной книге мы будем пользоваться как первым, так и вторым определениями.

Нетрудно видеть, что функция $\overline{\widetilde{\varphi}(w, \bar{w})}$ является преобразованием Фурье функции $\overline{\varphi(-z, -\bar{z})}$. Таким образом, если заменить в равенстве (3) функцию $\widetilde{\varphi}$ на $\overline{\widetilde{\varphi}}$, то получим

$$(\widetilde{f}, \widetilde{\varphi}) = 4\pi^2 (f, \varphi(-z, -\bar{z})). \tag{4}$$

Равенство (4) может служить определением преобразования Фурье обобщенной функции $F(z, \bar{z})$. Именно, *преобразованием Фурье обобщенной функции* $F(z, \bar{z})$ будем называть обобщенную функцию $\widetilde{F}(w, \bar{w})$, определяемую равенством

$$(\widetilde{F}, \widetilde{\varphi}) = 4\pi^2 (F, \varphi_1), \tag{5}$$

где $\widetilde{\varphi}(w, \bar{w})$ — преобразование Фурье функции $\varphi(z, \bar{z})$, а $\varphi_1(z, \bar{z}) = \varphi(-z, -\bar{z})$.

Отметим, что $\widetilde{F}$ является обобщенной функцией не в пространстве K финитных бесконечно дифференцируемых функций, а в пространстве Z, состоящем из преобразований Фурье таких функций. Впрочем, если рассматривать обобщенные функции в пространстве S бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих вместе с производными любого порядка, то F и $\widetilde{F}$ оказываются определенными в одном и том же пространстве основных функций.

Покажем, что *преобразование Фурье* $\widetilde{F}$ *однородной обобщенной функции* F *степени однородности* (λ, μ) *является однородной обобщенной функцией степени однородности* $(-\lambda-1, -\mu-1)$. Действительно, если $\widetilde{\varphi}(w, \bar{w})$ — преобразование Фурье функции $\varphi(z, \bar{z})$, то преобразованием Фурье функции $\varphi\left(\frac{z}{a}, \frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)$ будет $|a|^2 \widetilde{\varphi}(aw, \overline{aw})$. Таким образом, если $F(z, \bar{z})$ — обобщенная однородная функция степени однородности (λ, μ), то

$$|a|^2 (\widetilde{F}, \widetilde{\varphi}(aw, \overline{aw})) = 4\pi^2 \left(F, \varphi\left(-\frac{z}{a}, -\frac{\bar{z}}{\bar{a}}\right)\right) =$$
$$= 4\pi^2 a^{\lambda+1} \bar{a}^{\mu+1} (F, \varphi(-z, -\bar{z})) = a^{\lambda+1} \bar{a}^{\mu+1} (\widetilde{F}, \widetilde{\varphi}).$$

Заменяя в этом равенстве a на a^{-1}, получаем равенство

$$\left(\widetilde{F}, \widetilde{\varphi}\left(\frac{w}{a}, \frac{\bar{w}}{\bar{a}}\right)\right) = a^{-\lambda} \bar{a}^{-\mu} (\widetilde{F}, \widetilde{\varphi}). \tag{6}$$

Следовательно, $\widetilde{F}$ является однородной обобщенной функцией степени однородности $(-\lambda-1, -\mu-1)$.

Мы показали в п. 3, что однородная обобщенная функция степени однородности (λ, μ) задается формулой

$$F(z, \bar{z}) = \frac{z^\lambda \bar{z}^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)},$$

где $s = \lambda + \mu$, $n = \lambda - \mu$. Таким образом,

$$\frac{\widetilde{z^\lambda \bar{z}^\mu}}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)} = c(\lambda, \mu) \frac{w^{-\lambda-1} \bar{w}^{-\mu-1}}{\Gamma\left(\frac{-s+|n|}{2}\right)}, \tag{7}$$

где $c(\lambda, \mu)$ — некоторая постоянная. Эту постоянную можно вычислить, сравнив между собой выражения $(F, \varphi(-z, -\bar{z}))$ и $(\widetilde{F}, \widetilde{\varphi})$ для какой-нибудь фиксированной основной функции $\varphi(z, \bar{z})$. Оказывается, что

$$c(\lambda, \mu) = 2^{\lambda+\mu+2} \pi i^{|\lambda-\mu|}. \tag{8}$$

Итак, *преобразование Фурье обобщенной однородной функции задается формулой*

$$\frac{\widetilde{z^\lambda \bar{z}^\mu}}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)} = 2^{\lambda+\mu+2} \pi i^{|\lambda-\mu|} \frac{w^{-\lambda-1} \bar{w}^{-\mu-1}}{\Gamma\left(\frac{-s+|n|}{2}\right)}, \tag{9}$$

где $s = \lambda + \mu$, $n = \lambda - \mu$.

Проведем вычисление постоянной $c(\lambda, \mu)$. Предположим, для определенности, что $n = \lambda - \mu \geqslant 0$. Возьмем основную функцию

$$\varphi(z, \bar{z}) = \bar{z}^{\lambda-\mu} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \text{*)}.$$

Вычислим преобразование Фурье этой функции. Непосредственной выкладкой получаем

$$\frac{i}{2} \int e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} e^{\frac{i}{2}(zw + \bar{z}\bar{w})} dz\, d\bar{z} = 2\pi e^{-\frac{w\bar{w}}{2}}.$$

---

*) Эта функция не является финитной. Однако, поскольку функция $z^\lambda \bar{z}^\mu$ имеет степенной рост, то функционал $(z^\lambda \bar{z}^\mu, \varphi)$ можно распространить на все быстро убывающие функции φ и, в частности, на выбранную нами функцию.

Продифференцировав это равенство n раз по $\bar w$ ($n=\lambda-\mu$), мы получим, что

$$\left(\frac{i}{2}\right)^{\lambda-\mu+1}\int \bar z^{\lambda-\mu} e^{-\frac{z\bar z}{2}} e^{\frac{i}{2}(zw+\bar z\bar w)}\, dz\, d\bar z = 2\pi\left(-\frac{w}{2}\right)^{\lambda-\mu} e^{-\frac{w\bar w}{2}}.$$

Отсюда

$$\widetilde{\bar z^{\lambda-\mu} e^{-\frac{z\bar z}{2}}} = 2\pi i^{\lambda-\mu} w^{\lambda-\mu} e^{-\frac{w\bar w}{2}}.$$

Подставим выражения для $\widetilde{\bar z^{\lambda-\mu} e^{-\frac{z\bar z}{2}}}$ и $\dfrac{\widetilde{z^\lambda \bar z^\mu}}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)}$ в равенство

$$\left(\frac{\widetilde{z^\lambda \bar z^\mu}}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)},\ \widetilde{\bar z^{\lambda-\mu} e^{-\frac{z\bar z}{2}}}\right) = 4\pi^2\left(\frac{z^\lambda \bar z^\mu}{\Gamma\left(\frac{s+|n|+2}{2}\right)},\ (-\bar z)^{\lambda-\mu} e^{-\frac{z\bar z}{2}}\right).$$

Мы получим

$$\frac{2\pi i^{\lambda-\mu} c(\lambda, \mu)}{\Gamma(-\mu)}\left(w^{-\lambda-1}\bar w^{-\mu-1},\ w^{\lambda-\mu} e^{-\frac{w\bar w}{2}}\right) = (-1)^{\lambda-\mu}\frac{4\pi^2}{\Gamma(\lambda+1)}\left(z^\lambda \bar z^\mu,\ \bar z^{\lambda-\mu} e^{-\frac{z\bar z}{2}}\right). \quad (10)$$

Выражения, стоящие в левой и правой частях равенства, легко подсчитать, воспользовавшись формулой

$$\frac{i}{2}\int (z\bar z)^{\alpha-1} e^{-\frac{z\bar z}{2}}\, dz\, d\bar z = 2\pi\int_0^\infty r^{2\alpha-1} e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = 2^\alpha \pi\Gamma(\alpha)$$

(при $\operatorname{Re}\alpha < 0$ интеграл нужно понимать в смысле регуляризованного значения). Имеем

$$\left(z^\lambda \bar z^\mu,\ \bar z^{\lambda-\mu} e^{-\frac{z\bar z}{2}}\right) = \frac{i}{2}\int (z\bar z)^\lambda e^{-\frac{z\bar z}{2}}\, dz\, d\bar z = 2^{\lambda+1}\pi\Gamma(\lambda+1)$$

и

$$\left(w^{-\lambda-1}\bar w^{-\mu-1},\ w^{\lambda-\mu} e^{-\frac{w\bar w}{2}}\right) = 2^{-\mu}\pi\Gamma(-\mu).$$

Подставив эти выражения в равенство (10), получим искомую формулу $c(\lambda, \mu) = 2^{\lambda+\mu+2}\pi i^{\lambda-\mu}$. Формула получена нами в предположении, что $\lambda-\mu \geqslant 0$. В случае, когда $\lambda-\mu < 0$, в этой формуле надо поменять местами λ и μ. Поэтому имеет место единая формула $c(\lambda, \mu) = 2^{\lambda+\mu+2}\pi i^{|\lambda-\mu|}$.

В качестве примера приведем формулы преобразования Фурье для случаев, когда λ и μ — целые числа одного знака:

$$\widetilde{z^k \bar z^l} = 4\pi^2(-2i)^{k+l}\delta^{(k,\,l)}(w,\ \bar w)$$

и

$$\widetilde{\delta^{(k,\,l)}(z,\ \bar z)} = (2i)^{-k-l} w^k \bar w^l,$$

$k,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

8. Обобщенная функция $f^\lambda(z)\bar f^\mu(z)$, где $f(z)$ — мероморфная функция. Определим обобщенную функцию $f^\lambda(z)\bar f^\mu(z)$, где $f(z)$ — мероморфная функция от z, а λ, μ — комплексные числа, такие, что их разность $\lambda-\mu$ — целое число.

Сначала рассмотрим более простой случай, когда $f(z)$ — целая функция. В этом случае обобщенную функцию $f^\lambda(z)\bar f^\mu(z)$ определим формулой

$$(f^\lambda \bar f^\mu,\ \varphi) = \frac{i}{2}\int f^\lambda(z)\bar f^\mu(z)\varphi(z,\ \bar z)\, dz\, d\bar z. \quad (1)$$

При заданном $\lambda-\mu = n$ интеграл (1) сходится, когда $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) > 0$ и является в этой области аналитической функцией от $\lambda+\mu$. При $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) < 0$ будем понимать интеграл в смысле аналитического продолжения по $\lambda+\mu$. Наша задача — придать смысл интегралу (1), когда $f(z)$ — мероморфная функция. Предыдущее определение здесь уже не годится, поскольку в этом случае интеграл (1), вообще говоря, не сходится ни при каких λ, μ.

Любую функцию $\varphi(z,\ \bar z)$ из основного пространства K финитных функций можно представить в виде линейной комбинации функций из K, сосредоточенных в достаточно малых областях. Поэтому прежде всего нужно придать смысл интегралу (1) для функций $\varphi(z, \bar z)$, сосредоточенных в достаточно малой области.

Пусть функция $\varphi(z, \bar z)$ сосредоточена в области, содержащей один нуль кратности k функции $f(z)$ и не содержащей полюсов функции $f(z)$. Тогда при заданном $\lambda-\mu$ интеграл (1) заведомо сходится при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>0$ и является в этой области аналитической функцией от $\lambda+\mu$. При $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)<0$ определим его путем аналитического продолжения по $\lambda+\mu$.

Найдем особенности функции $(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)$ для этого случая. Не нарушая общности, предположим, что нулем функции $f(z)$ является точка $z=0$ и что функция $\varphi(z)$ сосредоточена в окрестности этой точки. Тогда

$$f(z)=z^k f_1(z),$$

где функция $f_1(z)$ регулярна в окрестности точки $z=0$, причем $f_1(0)\neq 0$. Следовательно,

$$(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)=\frac{i}{2}\int z^{k\lambda}\bar z^{k\mu} f_1^\lambda(z)\,\bar f_1^\mu(z)\,\varphi(z, \bar z)\,dz\,d\bar z.$$

Отсюда видно, что особые точки функции $(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)$ совпадают с особыми точками обобщенной однородной функции $z^{k\lambda}\bar z^{k\mu}$, рассматриваемой как функция от λ, μ. Применяя результаты п. 3, заключаем: *если функция $\varphi(z)$ сосредоточена в окрестности нуля кратности k функции $f(z)$, то единственными особенностями интеграла $(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)$ (рассматриваемого как аналитическая функция от λ, μ) являются простые полюсы в точках* $(\lambda, \mu)=\left(-\frac{p}{k}, -\frac{q}{k}\right)$, $p, q=1, 2, \ldots$ ($\lambda-\mu$ — целое).

Пусть теперь функция $\varphi(z)$ сосредоточена в области, содержащей один полюс кратности l функции $f(z)$ и не содержащей нулей функции $f(z)$. Тогда интеграл $(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)$ заведомо сходится при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)<0$; при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>0$ определим его путем аналитического продолжения по $\lambda+\mu$. Повторяя предыдущие рассуждения, легко заключаем: *если функция $\varphi(z)$ сосредоточена в окрестности полюса кратности l функции $f(z)$, то единственными особенностями интеграла $(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)$ (рассматриваемого как аналитическая функция от λ, μ) являются простые полюсы в точках* $(\lambda, \mu)=\left(\frac{p}{l}, \frac{q}{l}\right)$, $p, q=1, 2, \ldots$ ($\lambda-\mu$ — целое).

Итак, мы придали смысл интегралу $(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)$ для случая, когда функция φ сосредоточена в такой области, которая содержит только один нуль или один полюс функции $f(z)$.

Определим, наконец, интеграл $(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)$ для произвольной финитной функции $\varphi(z, \bar z)$. Представим функцию $\varphi(z, \bar z)$ в виде конечной суммы

$$\varphi(z, \bar z)=\sum_i \varphi_i(z, \bar z) \tag{2}$$

финитных функций $\varphi_i(z, \bar z)$, каждая из которых сосредоточена в области, содержащей не более одного нуля или полюса функции $f(z)$. Поскольку интегралам $(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi_i)$ мы уже придали смысл, то положим

$$(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)=\sum_i (f^\lambda \bar f^\mu, \varphi_i). \tag{3}$$

Легко видеть, что $(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi)$ не зависит от выбора разложения функции $\varphi(z, \bar z)$. В самом деле, пусть $\varphi=\sum \varphi_j'$ и $\varphi=\sum \varphi_j''$ — два таких разложения, причем функции, соответствующие одному и тому же нулю или полюсу функции $f(z)$, обозначены одинаковыми индексами. Тогда функции $\varphi_j'-\varphi_j''$ обращаются в нуль в окрестности каждого нуля и полюса функции $f(z)$, а потому при любых λ, μ имеем

$$(f^\lambda \bar f^\mu, \varphi_j'-\varphi_j'')=\frac{i}{2}\int f^\lambda \bar f^\mu\left[\varphi_j'(z)-\varphi_j''(z)\right]dz\,d\bar z,$$

где в правой части стоит сходящийся интеграл. Поскольку $\sum(\varphi_j'-\varphi_j'')=0$, то, суммируя эти интегралы по j, получим нуль. Следовательно,

$$\sum_j (f^\lambda \bar f^\mu, \varphi_j')-\sum_j (f^\lambda \bar f^\mu, \varphi_j'')=\sum_j (f^\lambda \bar f^\mu, \varphi_j'-\varphi_j'')=0.$$

Итак, мы определили обобщенную функцию $f^\lambda \bar f^\mu$, где $f(z)$ — произвольная мероморфная функция. *Обобщенная функция $f^\lambda \bar f^\mu$ является аналитической функцией от λ, μ*

всюду, за исключением точек

$$(\lambda,\ \mu)=\left(-\frac{p}{k},\ -\frac{q}{k}\right) \text{ и } (\lambda,\ \mu)=\left(\frac{p}{l},\ \frac{q}{l}\right),$$

где k пробегает кратности нулей функции $f(z)$, l — кратности ее полюсов и p, $q=1,\ 2,\ \ldots$ ($\lambda-\mu$ — целое). В этих точках функция $f^{\lambda}\bar{f}^{\mu}$ имеет простые полюсы.

В частности, мы видим, что обобщенная функция $f^{\lambda}\bar{f}^{\mu}$, рассматриваемая как функция от λ, μ, регулярна при $\lambda=k$, $\mu=0$, $k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ Таким образом, для каждой мероморфной функции $f(z)$ мы определили обобщенную функцию f^k, $k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

§ 2. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ m КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Обобщенные функции $\delta(P)$ и $\delta^{(k,\ l)}(P)$. Начнем с определения обобщенных функций в m-мерном комплексном пространстве, сосредоточенных на поверхности S вещественной размерности $2m-2$.

Рассмотрим поверхность S, заданную уравнением

$$P(z)\equiv P(z_1,\ \ldots,\ z_m)=0,$$

где $P(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция (от z и $\bar{z}$) *). Будем предполагать, что дифференциальная форма $dP\,d\bar{P}$ нигде не обращается в нуль на поверхности $P=0$.

Это требование имеет простой геометрический смысл. Именно, будем рассматривать пространство переменных $z_1,\ \ldots,\ z_m$ как вещественное $2m$-мерное пространство переменных x_k, y_k ($z_k=x_k+iy_k$), $k=1,\ \ldots,\ m$. Поверхность S задается в вещественном пространстве системой двух уравнений $\operatorname{Re}P=0$, $\operatorname{Im}P=0$. Требование, наложенное на функцию P, означает, что поверхности $\operatorname{Re}P=\xi$ и $\operatorname{Im}P=\eta$ образуют «правильную сетку», то есть в окрестности каждой точки поверхности S можно ввести локальные вещественные координаты так, чтобы две из них совпадали с ξ и η.

При этом условии в вып. 1 на стр. 293 была определена функция $\delta(\operatorname{Re}P,\ \operatorname{Im}P)$, сосредоточенная на поверхности S. Здесь мы обозначим эту функцию через $\delta(P)$. Удобно, однако, определить функцию $\delta(P)$, не переходя к терминологии вещественного пространства, что и будет сейчас сделано.

*) Правильнее было бы обозначить эту функцию через $P(z,\ \bar{z})$. Однако, чтобы не усложнять записи, мы условимся дальше обозначать функции m комплексных переменных просто через $P(z)$.

Обобщенную функцию $\delta(P)$ определим следующей формулой:

$$(\delta(P),\ \varphi)=\int\limits_{P=0}\varphi\omega, \tag{1}$$

где ω — дифференциальная форма порядка $2m-2$, определяемая соотношением

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m dz\,d\bar{z}=\frac{i}{2}\,dP\,d\bar{P}\,\omega \text{*)}. \tag{2}$$

Здесь приняты обозначения

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m dz\,d\bar{z}\equiv\left(\frac{i}{2}\right)^m dz_1\,d\bar{z}_1\ \ldots\ dz_m\,d\bar{z}_m.$$

Таким образом, $\left(\frac{i}{2}\right)^m dz\,d\bar{z}$ есть сокращенное обозначение дифференциальной формы:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m dz_1\,d\bar{z}_1\ \ldots\ dz_m\,d\bar{z}_m\equiv dx_1\,dy_1\ \ldots\ dx_m\,dy_m.$$

При замене переменных под знаком интеграла удобнее изменить порядок дифференциалов и писать эту форму следующим образом:

$$\frac{i^{m^2}}{2^m}\,dz_1\ \ldots\ dz_m\,d\bar{z}_1\ \ldots\ d\bar{z}_m.$$

Далее,

$$dP=\sum\frac{\partial P}{\partial z_k}\,dz_k+\frac{\partial P}{\partial\bar{z}_k}\,d\bar{z}_k.$$

Определим теперь производные $\delta^{(k,\ l)}(P)=\dfrac{\partial^{k+l}\delta(P)}{\partial P^k\,\partial\bar{P}^l}$ обобщенной функции $\delta(P)$. Эти обобщенные функции будут определены как интегралы по поверхности $P=0$ от некоторых дифференциальных форм $\omega_{k,\ l}(\varphi)$, зависящих от функции P и от основной функции φ вместе с ее производными.

*) Краткие сведения по теории дифференциальных форм в вещественном пространстве даны в вып. 1, стр. 265 и далее. Переходя к вещественному пространству, мы легко убеждаемся, что дифференциальная форма ω, удовлетворяющая условию (2), существует и что обобщенная функция $\delta(P)$ определяется формулой (1) однозначно (хотя сама форма ω определена неоднозначно).

Обозначим через $\omega_{0,0}(\varphi)$ дифференциальную форму $\varphi\omega$, где дифференциальная форма ω определена равенством (2). Введем формы $\omega_{k,l}(\varphi)$ ($k, l = 0, 1, \ldots$) с помощью следующих рекуррентных формул:

$$d\,(d\bar{P}\,\omega_{k-1,l}(\varphi)) = dP\,d\bar{P}\,\omega_{k,l}(\varphi), \tag{3}$$

$$d\,(dP\,\omega_{k,l-1}(\varphi)) = -\,dP\,d\bar{P}\,\omega_{k,l}(\varphi)\ ^{*)}. \tag{4}$$

Обобщенную функцию $\delta^{(k,l)}(P) \equiv \dfrac{\partial^{k+l}\delta(P)}{\partial P^k\,\partial\bar{P}^l}$ *определим следующей формулой*:

$$(\delta^{(k,l)}(P), \varphi) = (-1)^{k+l}\int\limits_{P=0}\omega_{k,l}(\varphi). \tag{5}$$

Можно показать, что формы $\omega_{k,l}(\varphi)$ существуют и что они определяются из равенств (3), (4) с точностью до слагаемых вида $d\tau + \alpha\,dP + \beta\,d\bar{P}$, где τ, α, β — формы порядков $2m-3$. Отсюда, в силу теоремы Стокса, вытекает, что функция $\delta^{(k,l)}(P)$ определена формулой (5) однозначно. Доказательство этого ведется дословно, так же как и в случае вещественного пространства (см. вып. 1, гл. III, § 1, п. 9).

Приведем некоторые свойства функции $\delta^{(k,l)}(P)$ **).

1. Обобщенную функцию $\delta^{(k,l)}(P)$ можно дифференцировать как сложную функцию

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\delta^{(k,l)}(P) = \frac{\partial P}{\partial z_i}\delta^{(k+1,l)}(P) + \frac{\partial\bar{P}}{\partial z_i}\delta^{(k,l+1)}(P), \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\delta^{(k,l)}(P) = \frac{\partial P}{\partial\bar{z}_i}\delta^{(k+1,l)}(P) + \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{z}_i}\delta^{(k,l+1)}(P). \tag{6'}$$

2. Имеют место следующие тождества, связывающие функцию $\delta(P)$ и ее производные:

$$P\delta(P) = \bar{P}\delta(P) = 0, \tag{7}$$

$$P\delta^{(k,l)}(P) + k\delta^{(k-1,l)}(P) = 0, \tag{8}$$

$$\bar{P}\delta^{(k,l)}(P) + l\delta^{(k,l-1)}(P) = 0. \tag{8'}$$

*) Для вещественного пространства аналогичные формы были подробно изучены в гл. III, § 1, п. 9 вып. 1.

**) Их доказательство проводится так же, как в вып. 1 для случая вещественного пространства.

3. Если поверхности $P = 0$, $Q = 0$ не имеют особых точек и не пересекаются, так что поверхность $PQ = 0$ не имеет особых точек, то

$$\delta(PQ) = P^{-1}\bar{P}^{-1}\delta(Q) + Q^{-1}\bar{Q}^{-1}\delta(P). \tag{9}$$

В частности, если функция $a(z)$ вообще не обращается в нуль, то

$$\delta(aP) = a^{-1}\bar{a}^{-1}\delta(P). \tag{10}$$

Новые интересные формулы получаются при дифференцировании равенства (10).

Так, если функция P аналитична $\left(\dfrac{\partial P}{\partial\bar{z}_i} = 0\right)$, то

$$\delta^{(k,l)}(aP) = a^{-k-1}\bar{a}^{-l-1}\delta^{(k,l)}(P), \tag{11}$$

какова бы ни была функция $a(z)$, нигде не обращающаяся в нуль. Вывод этой формулы мы предоставляем читателю.

2. Обобщенные функции $G^\lambda\bar{G}^\mu$. Здесь будут определены обобщенные функции, связанные с целой аналитической функцией G. Пусть $G(z_1, \ldots, z_m)$ — произвольная целая аналитическая функция. Если λ, μ — комплексные числа, такие, что их разность — целое число, то функция

$$G^\lambda\bar{G}^\mu = |G|^{\lambda+\mu}e^{i(\lambda-\mu)\arg G} \tag{1}$$

есть однозначная функция от $z_1, \ldots, z_m$.

Сопоставим функции $G^\lambda\bar{G}^\mu$ обобщенную функцию $G^\lambda\bar{G}^\mu$, определенную следующим образом:

$$(G^\lambda\bar{G}^\mu, \varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m\int G^\lambda(z)\,\bar{G}^\mu(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\bar{z}, \tag{2}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $dz\,d\bar{z} = dz_1 d\bar{z}_1 \ldots dz_m\,d\bar{z}_m$ (интегрирование ведется по всему комплексному пространству). Интеграл (2) заведомо сходится, когда $\operatorname{Re}(\lambda+\mu) > 0$, и является при заданном $\lambda - \mu$ аналитической функцией от $\lambda+\mu$. Продолжая аналитически эту функцию по $\lambda+\mu$, мы определим функционал $(G^\lambda\bar{G}^\mu, \varphi)$ для других значений λ, μ.

Мы хотим изучить обобщенную функцию $G^\lambda\bar{G}^\mu$ как аналитическую функцию от λ, μ. Особые точки этой аналитической функции тесно связаны с характером поверхности $G(z_1, \ldots, z_n) = 0$. В этом пункте мы рассмотрим простейший случай, когда на поверхности $G(z_1, \ldots, z_n) = 0$ нет особых точек, то есть производные $\frac{\partial G}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial z_m}$ не обращаются одновременно в нуль в точках поверхности.

Общий случай, когда на поверхности $G = 0$ имеются особые точки, будет разобран позже, в п. 9.

Если поверхность $G(z_1, \ldots, z_n) = 0$ *не имеет особых точек, то единственными особенностями обобщенной функции* $G^\lambda \overline{G}^\mu$, *рассматриваемой как функция от* λ, μ, *являются простые полюсы в точках*

$$(\lambda, \mu) = (-k-1, -l-1), \qquad k, l = 0, 1, \ldots,$$

с вычетами

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} G^\lambda \overline{G}^\mu = (-1)^{k+l} \frac{2\pi}{k!\,l!} \delta^{(k, l)}(G)\,^{*)}. \tag{3}$$

В самом деле, если поверхность $G(z_1, \ldots, z_n) = 0$ не имеет особенностей, то в окрестности U любой точки этой поверхности можно ввести локальные координаты $w_1, \ldots, w_{m-1}$, ζ, где $\zeta = G(z_1, \ldots, z_m)$. Если теперь функция $\varphi(z)$ сосредоточена в окрестности U, то

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int G^\lambda(z) \overline{G}^\mu(z) \varphi(z)\, dz\, d\overline{z} = \frac{i}{2} \int \zeta^\lambda \overline{\zeta}^\mu \Phi(\zeta)\, d\zeta\, d\overline{\zeta},$$

где через $\Phi(\zeta)$ обозначен интеграл функции $\varphi(z)$ по совокупности переменных $w_1, \ldots, w_{m-1}$ (при заданном ζ).

Но, как мы уже видели в § 1, единственными особенностями обобщенной функции $\zeta^\lambda \overline{\zeta}^\mu$, рассматриваемой как аналитическая функция от λ, μ, являются простые полюсы в точках

$$(\lambda, \mu) = (-k-1, -l-1), \qquad k, l = 0, 1, \ldots,$$

с вычетами

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} \zeta^\lambda \overline{\zeta}^\mu = (-1)^{k+l} \frac{2\pi}{k!\,l!} \delta^{(k, l)}(\zeta).$$

*) Напоминаем, что вычет следует понимать как вычет по $s = \lambda + \mu$ при фиксированном значении $\lambda - \mu$.

Следовательно, то же самое справедливо и для функции $G^\lambda \overline{G}^\mu$.

Именно, единственными особенностями обобщенной функции $G^\lambda \overline{G}^\mu$, рассматриваемой как функция от λ, μ, являются простые полюсы в точках $(\lambda, \mu) = (-k-1, -l-1)$, $k, l = 0, 1, \ldots$ Как легко видеть,

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} G^\lambda \overline{G}^\mu = (-1)^{k+l} \frac{2\pi}{k!\,l!} \delta^{(k, l)}(G).$$

Примечание. Ввиду локальности рассуждений тот же результат имеет место и тогда, когда рассматриваются функции не во всем пространстве переменных $z_1, \ldots, z_m$, а на некоторой аналитической поверхности, не имеющей особых точек.

3. Однородные обобщенные функции. Функцию $f(z)$ $z = (z_1, \ldots, z_m)$, m комплексных переменных назовем однородной степени однородности (λ, μ), если для любого комплексного числа $\alpha \neq 0$ выполняется соотношение

$$f(\alpha z) = \alpha^\lambda \overline{\alpha}^\mu f(z). \tag{1}$$

Предполагается, что разность чисел λ и μ есть целое число. При этом условии произведение $\alpha^\lambda \overline{\alpha}^\mu$ однозначно определено.

Однородную *обобщенную* функцию $f(z)$ степени однородности (λ, μ) определим тем же равенством (1). Перепишем это равенство в том виде, который годится для обобщенных функций.

Сопоставим функции $f(z)$ функционал

$$(f, \varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int f(z) \varphi(z)\, dz\, d\overline{z}, \tag{2}$$

где $dz\, d\overline{z} = dz_1 d\overline{z}_1 \ldots dz_m d\overline{z}_m$. Очевидно, что условие однородности (1) равносильно следующему соотношению:

$$\left(f, \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right) = \alpha^{\lambda+m} \overline{\alpha}^{\mu+m} (f, \varphi(z)). \tag{3}$$

Приведем важный пример обобщенной однородной функции. Определим обобщенную функцию $\delta(z)$ равенством

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Очевидно, что функция $\delta(z)$ однородна и имеет степень однородности $(-m, -m)$. Ее производные $\frac{\partial^{k+l}\delta(z)}{\partial z_i^k\,\partial \bar{z}_j^l}$ являются однородными функциями степени однородности $(-m-k, -m-l)$.

Покажем, что не существует, кроме $\delta(z)$, других однородных обобщенных функций степени однородности $(-m, -m)$, сосредоточенных в точке $z=0$. В самом деле, всякая обобщенная функция, сосредоточенная в точке $z=0$, есть линейная комбинация функции $\delta(z)$ и ее производных *). Но производные функции $\delta(z)$ имеют степень однородности, отличную от $(-m, -m)$. Следовательно, если функция f, сосредоточенная в точке 0, однородна степени однородности $(-m, -m)$, то она должна совпадать с точностью до множителя с функцией $\delta(z)$.

Приведем без доказательства несколько простых свойств однородных обобщенных функций.

1. Произведение однородной обобщенной функции f степени однородности (λ, μ) на бесконечно дифференцируемую однородную функцию степени однородности (λ', μ') есть однородная обобщенная функция степени однородности $(\lambda+\lambda', \mu+\mu')$.

2. Производная $\frac{\partial^{k+l} f(z)}{\partial z_i^k\,\partial \bar{z}_j^l}$ однородной обобщенной функции $f(z)$ степени однородности (λ, μ) есть однородная обобщенная функция степени однородности $(\lambda-k, \mu-l)$.

3. Для того чтобы обобщенная функция f была однородной степени однородности (λ, μ), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла системе уравнений Эйлера

$$\sum_{k=1}^{m} z_k\frac{\partial f}{\partial z_k}=\lambda f, \qquad \sum_{k=1}^{m} \bar{z}_k\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}=\mu f.$$

4. Присоединенные однородные функции. Присоединенной однородной функцией первого порядка степени однородности (λ, μ) назовем функцию $f_1(z)$, удовлетворяющую для любого комплексного числа $\alpha\neq 0$ следующему условию:

$$f_1(\alpha z)=\alpha^{\lambda}\bar{\alpha}^{\mu}[f_1(z)+\ln|\alpha|\,f_0(z)], \tag{1}$$

где $f_0(z)\not\equiv 0$ — однородная функция степени однородности (λ, μ).

*) См. «Обобщенные функции», вып. 2, гл. II, § 4, п. 5.

Например, $\ln|z_1|$ есть однородная присоединенная функция первого порядка степени однородности (0, 0), поскольку

$$\ln|\alpha z_1|=\ln|z_1|+\ln|\alpha|.$$

Однородную обобщенную присоединенную функцию первого порядка степени однородности (λ, μ) определим тем же условием (1). Чтобы придать этому условию вид, пригодный для обобщенных функций, перейдем от функции $f_1(z)$ к функционалу (f_1, φ). Тогда условие (1) оказывается равносильным следующему соотношению:

$$\left(f_1, \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right)=\alpha^{\lambda+m}\bar{\alpha}^{\mu+m}(f_1, \varphi(z))+\alpha^{\lambda+m}\bar{\alpha}^{\mu+m}\ln|\alpha|\,(f_0, \varphi(z)), \tag{2}$$

где $f_0\not\equiv 0$ — обобщенная однородная функция степени однородности (λ, μ).

Дадим индуктивное определение присоединенной функции k-го порядка. Скажем, что функция f_k является обобщенной однородной присоединенной функцией k-го порядка степени однородности (λ, μ), если для любого $\alpha\neq 0$ выполняется условие

$$\left(f_k, \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right)=\alpha^{\lambda+m}\bar{\alpha}^{\mu+m}(f_k, \varphi)+\alpha^{\lambda+m}\bar{\alpha}^{\mu+m}\ln|\alpha|\,(f_{k-1}, \varphi), \tag{3}$$

где f_{k-1} — однородная обобщенная присоединенная функция $(k-1)$-го порядка степени однородности (λ, μ).

Присоединенные функции можно получить из однородных обобщенных функций следующим образом. Пусть $f_{\lambda,\mu}$ — обобщенная однородная функция степени однородности (λ, μ), дифференцируемая по параметру $s=\lambda+\mu$ *). Тогда производная $\frac{\partial f_{\lambda,\mu}}{\partial s}$ будет присоединенной функцией первого порядка. Аналогично, производная по s от присоединенной функции k-го порядка будет присоединенной функцией $(k+1)$-го порядка.

Для доказательства достаточно продифференцировать обе части равенства (3) по s, принимая во внимание, что

$$\alpha^{\lambda}\bar{\alpha}^{\mu}=|\alpha|^{s}e^{i(\lambda-\mu)\arg\alpha}.$$

5. Вычет однородной функции. Многие факты теории однородных функций удобно формулировать на основе понятия вычета однородной функции.

Сначала напомним определение вычета однородной функции для вещественного пространства (см. вып. 1, стр. 372).

*) Точнее, для каждого фиксированного значения $\lambda-\mu$ функция $f_{\lambda,\mu}$ дифференцируема по $s=\lambda+\mu$.

Пусть задана однородная функция $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_m)$, степени однородности $-m$, то есть такая, что

$$f(\alpha x)=\alpha^{-m} f(x)$$

для любого $\alpha>0$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна всюду, кроме начала координат. Тогда *вычетом однородной функции* $f(x)$ (в начале координат) *называется следующее выражение*:

$$\text{Выч}\, f(x)=\int_{\Gamma} f(x)\,\omega, \tag{1}$$

где

$$\omega=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1} x_k\, dx_1 \ldots dx_{k-1}\, dx_{k+1} \ldots dx_m,$$

а интеграл берется по произвольной замкнутой поверхности Г, *охватывающей начало координат.*

Дифференциальная форма ω имеет простой геометрический смысл. Именно, $\frac{1}{n}\omega$ выражает объем конуса с вершиной в точке $x=0$, опирающегося на элементарную площадку. Отсюда видно, что Выч $f(x)$ не зависит от выбора поверхности Г, а потому вполне определяется заданием самой функции $f(x)$. В частности, если $f(x)>0$, то, беря в качестве Г замкнутую поверхность $f(x)=1$, мы получим

$$\text{Выч}\, f(x)=\int_{\Gamma}\omega=nV,$$

где V — объем области $f(x)\geqslant 1$, содержащей начало координат.

Заметим, что через вычет удобно выражается интеграл произвольной функции $f(x)$ по всему пространству. Пусть Г — произвольная поверхность, пересекающая в одной точке каждый луч, выходящий из начала. Тогда любая точка пространства однозначно представима в виде

$$x=\alpha y,$$

где $\alpha>0$, а y — точка поверхности Г. Пару α, y можно рассматривать как обобщенные полярные координаты точки x. Чтобы проинтегрировать функцию $f(x)$ по всему пространству, мы можем проинтегрировать ее сначала по лучам, выходящим из точки $x=0$, а затем полученное выражение проинтегрировать по поверхности Г.

Именно,

$$\int f(x)\,dx=\int_{\Gamma}\left(\int_0^{\infty} f(\alpha y)\,\alpha^{m-1}\,d\alpha\right)\omega(y)=\text{Выч}\int_0^{\infty} f(\alpha x)\,\alpha^{m-1}\,d\alpha\,^{*}). \tag{2}$$

Формулу (2) можно рассматривать как формулу перехода к обобщенным полярным координатам под знаком интеграла.

Вычет однородной обобщенной функции в комплексном пространстве определим по аналогии с вещественным случаем. Именно, пусть задана однородная функция $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_m)$, степени однородности $(-m, -m)$, то есть такая, что

$$f(\alpha z)=\alpha^{-m}\bar{\alpha}^{-m} f(z)$$

для любого комплексного числа $\alpha\neq 0$. Предположим, что функция $f(z)$ непрерывна всюду, кроме начала координат. Введем в пространстве дифференциальную форму

$$\omega=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1} z_k\, dz_1 \ldots dz_{k-1}\, dz_{k+1} \ldots dz_m. \tag{3}$$

Вычетом однородной функции $f(z)$ *степени однородности* $(-m, -m)$ *назовем следующее выражение*:

$$\text{Выч}\, f(z)=\frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}}\int_{\Gamma} f(z)\,\omega\bar{\omega}. \tag{4}$$

Здесь интеграл берется по произвольной поверхности Г, *пересекающейся в одной точке с каждой комплексной прямой, проходящей через начало* (кроме, быть может, множества комплексных прямых, имеющего более низкую размерность) **). Можно показать, что ограниченной замкнутой поверхности, обладающей указанным свойством, не существует. Поэтому поверхность Г составляется, вообще говоря, из конечного числа кусков гладких поверхностей. Покажем, как ее построить.

---

*) Эта формула непосредственно следует из дифференциального соотношения

$$dx=\alpha^{m-1}\,d\alpha\,\omega(y),$$

которое проверяется непосредственной выкладкой.

**) Подчеркнем, что в комплексном пространстве нет понятия луча комплексной прямой. Поэтому, в отличие от вещественного случая, в определении вычета фигурируют не лучи, а сами прямые.

Разобьем комплексное пространство на конечное число «достаточно узких» конусов C_i с вершиной в начале (то есть на области, содержащие вместе с каждой точкой z всю комплексную прямую, проходящую через начало и через точку z). В каждом конусе C_i зададим сечение Γ_i, то есть кусок поверхности, пересекающийся в одной точке с каждой прямой из C_i, проходящей через начало. Тогда в качестве Γ можно взять совокупность всех сечений Γ_i. Таким образом,

$$\frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}} \int\limits_{\Gamma} f(z)\,\omega\bar{\omega} = \sum_i \frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_i} f(z)\,\omega\bar{\omega}. \qquad (5)$$

Заметим, что интеграл (4) не зависит от выбора «поверхности» Γ (точнее говоря, он не зависит от способа разбиения пространства на конусы с вершиной в начале и от выбора сечений в этих конусах). В самом деле, подинтегральное выражение $f\omega\bar{\omega}$ имеет степень однородности (0, 0), то есть оно сохраняется при замене z на αz, где $\alpha \neq 0$. Следовательно, интеграл $\int f\omega\bar{\omega}$ будет сохраняться при любой деформации поверхности Γ.

Поскольку дифференциальная форма $f(z)\,\omega\bar{\omega}$ сохраняется при замене z на αz, где $\alpha \neq 0$, то ее можно трактовать как дифференциальную форму, заданную в пространстве комплексных прямых, проходящих через начало. Тем самым интеграл (4) можно рассматривать как интеграл по проективному пространству всех комплексных прямых, проходящих через начало координат.

Отметим следующее свойство дифференциальной формы

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} z_k\, dz_1 \ldots dz_{k-1} dz_{k+1} \ldots dz_m.$$

Если $z = \alpha u$, *где* α — *комплексное переменное, а* u — *точка некоторой аналитической поверхности* Γ, *то*

$$dz \equiv dz_1 \ldots dz_m = \alpha^{m-1} d\alpha\,\omega(u)\ ^{*}). \qquad (6)$$

Отсюда получается удобная формула перехода от декартовых координат $z_1, \ldots, z_m$ к обобщенным полярным координатам. А именно, будем рассматривать комплексное число α и точку u поверхности Γ как обобщенные полярные координаты точки $z = \alpha u$. Тогда имеем

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int \varphi(z)\,dz\,d\bar{z} = \underset{z}{\text{Выч}} \frac{i}{2} \int \varphi(\alpha z)\,\alpha^{m-1}\bar{\alpha}^{m-1} d\alpha\, d\bar{\alpha} =$$
$$= \frac{i^{(m-1)^2+1}}{2^m} \int\limits_{\Gamma} \left(\int \varphi(\alpha u)\,\alpha^{m-1}\bar{\alpha}^{m-1} d\alpha\, d\bar{\alpha} \right) \omega\bar{\omega}. \qquad (7)$$

П р и м е ч а н и е. Понятие однородной функции и понятие вычета однородной функции может быть введено не только для функций, заданных на всем пространстве, но и для функций, заданных на некоторой конической поверхности с вершиной в начале. (Поверхность называется конической, если вместе с каждой точкой z она содержит всю комплексную прямую, проходящую через начало и точку z.)

6. Обобщенные однородные функции степени однородности $(-m, -m)$. Рассмотрим обычную однородную функцию $f(z)$ степени однородности $(-m, -m)$, то есть такую, что для любого $\alpha \neq 0$

$$f(\alpha z) = \alpha^{-m}\bar{\alpha}^{-m} f(z),$$

где m — размерность пространства. Будем предполагать, что функция $f(z)$ непрерывна всюду, кроме точки $z = 0$. Чтобы определить соответствующую обобщенную функцию и тем самым регуляризовать расходящийся интеграл

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int f(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\bar{z},$$

выберем произвольную ограниченную область G, содержащую начало координат, и положим

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int f(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\bar{z} = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{G} f(z)\,[\varphi(z) - \varphi(0)]\,dz\,d\bar{z} +$$
$$+ \left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{C-G} f(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\bar{z}, \qquad (1)$$

*) В самом деле, $dz \equiv dz_1 \ldots dz_m = \prod (\alpha\, du_i + u_i\, d\alpha) = \alpha^{m-1} d\alpha\,\omega(u)$, поскольку $du_1 \ldots du_m = 0$.

где через C обозначено все пространство (таким образом $C - G$ есть дополнение области G). Определенное таким образом регуляризованное значение интеграла

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int f(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\bar{z}$$

зависит, естественно, от выбора области G.

Обозначим полученную обобщенную функцию через $f(z)|_G$ и выясним, что происходит с этой функцией при замене области G другой областью G_1. Непосредственно очевидно, что при замене G на $G_1 \subset G$ функционал изменится на

$$\varphi(0)\left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{G-G_1} f(z)\,dz\,d\bar{z}.$$

Таким образом,

$$f|_G - f|_{G_1} = \delta(z)\left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{G-G_1} f(z)\,dz\,d\bar{z}. \qquad (2)$$

Мы видим, что разность $f|_G - f|_{G_1}$ является однородной обобщенной функцией степени однородности $(-m,\ -m)$. Поэтому однородность или неоднородность обобщенной функции, определенной формулой (1), не зависит от выбора области G.

Выясним теперь, когда обобщенная функция, определенная формулой (1), будет однородной степени однородности $(-m,\ -m)$, то есть когда выполняется условие

$$\left(f,\ \varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right) = (f,\ \varphi(z)).$$

Оказывается, для этого необходимо и достаточно, чтобы вычет (обычной) однородной функции f был равен нулю.

Доказательство. Заменой переменных $\frac{z_k}{\alpha} = z'_k$ мы получаем следующее равенство:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_G f(z)\left[\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right) - \varphi(0)\right] dz\,d\bar{z} + \left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{C-G} f(z)\,\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right) dz\,d\bar{z} =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{\alpha G} f(z)\,[\varphi(z) - \varphi(0)]\,dz\,d\bar{z} + \left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{C-\alpha G} f(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\bar{z},$$

где через αG обозначена область, полученная из области G подобным преобразованием с коэффициентом α. Отсюда видно, что для однородности обобщенной функции $f|_G$ необходимо и достаточно, чтобы было

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{G-\alpha G} f(z)\,dz\,d\bar{z} = 0$$

для любого α. Преобразуем полученный интеграл. Разобьем все комплексное пространство на конусы C_i и будем предполагать, что внутри каждого конуса граница области G состоит из всех точек вида

$$e^{i\varphi}u,$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, а точка u пробегает некоторый кусок Γ_i аналитической поверхности, пересекающейся в одной точке с каждой комплексной прямой из C_i, проходящей через начало. Тогда, переходя к обобщенным полярным координатам, получим

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{G-\alpha G} f(z)\,dz\,d\bar{z} =$$

$$= \sum \frac{i^{(m-1)^2+1}}{2^m} \int\limits_{\Gamma_i} \left(\int\limits_{|\alpha| \leqslant |\lambda| \leqslant 1} f(\lambda z)\,\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^{-m-1}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}\right) \omega\bar{\omega},$$

где

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} z_k\,dz_1 \ldots dz_{k-1}\,dz_{k+1} \ldots dz_m.$$

Поскольку $f(\lambda z) = \lambda^{-m}\bar{\lambda}^{-m} f(z)$, имеем отсюда:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int\limits_{G-\alpha G} f(z)\,dz\,d\bar{z} = \frac{i}{2} \int\limits_{|\alpha| \leqslant |\lambda| \leqslant 1} |\lambda|^{-2}\,d\lambda\,d\bar{\lambda} \times$$

$$\times \sum \frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}} \int\limits_{\Gamma_i} f(z)\,\omega\bar{\omega} = 2\pi \ln|\alpha|\ \text{Выч}\, f(z).$$

Таким образом, *для того чтобы обычной однородной функции $f(z)$ степени однородности $(-m, -m)$ отвечала однородная обобщенная функция, необходимо и достаточно, чтобы вычет функции $f(z)$ был равен нулю.*

Мы видим, что о вычете однородной функции так же не совсем правильно говорить, как и о вычете аналитической функции. А именно, существование вычета у аналитической функции $f(z)$ связано с тем, что соответствующая обобщенная функция не аналитична*). Подобно этому, существование вычета у однородной функции $f(z)$ связано с тем, что соответствующая обобщенная функция $f(z)$ не является однородной.

7. Обобщенные функции $P^\lambda \bar{P}^\mu$, где P — невырожденная квадратичная форма. Пусть задана невырожденная квадратичная форма от m комплексных переменных $z_1, \ldots, z_m$

$$P = \sum_{i,\,j=1}^{m} g_{ij} z_i z_j. \tag{1}$$

Изучим однородную функцию $P^\lambda \bar{P}^\mu$, то есть функционал

$$(P^\lambda \bar{P}^\mu, \varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int P^\lambda(z)\, \bar{P}^\mu(z)\, \varphi(z)\, dz\, d\bar{z}, \tag{2}$$

как аналитическую функцию от λ, μ (разность $\lambda - \mu$ — целое число).

Заметим, что на поверхности $P = 0$ имеется особая точка $z = 0$. Поэтому рассуждения, проведенные в п. 2, здесь не годятся.

Формула (2) дает выражение для функции $P^\lambda \bar{P}^\mu$, лишь когда $\operatorname{Re}(\lambda + \mu) > 0$. Найдем выражение для обобщенной функции $P^\lambda \bar{P}^\mu$ при $\operatorname{Re}(\lambda + \mu) < 0$. Для этого выразим обобщенную функцию $P^\lambda \bar{P}^\mu$ через обобщенную функцию $P^{\lambda+k} \bar{P}^{\mu+l}$. Введем дифференциальные операторы

$$L_P = \sum_{i,\,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i\, \partial z_j} \quad \text{и} \quad \bar{L}_P = \sum_{i,\,j=1}^{m} \overline{g^{ij}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i\, \partial \bar{z}_j}, \tag{3}$$

*) Так, равенство $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^{-1}) = \pi\delta(z)$ (см. § 1, п. 4) показывает, что обобщенная функция z^{-1} не является аналитической.

где коэффициенты g^{ij} определяются из соотношений

$$\sum_{j=1}^{m} g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$$

($\delta_k^i = 1$ при $i = k$ и $\delta_k^i = 0$ при $i \neq k$). Таким образом, матрица $\|g^{ij}\|$ коэффициентов оператора L_P является обратной к матрице $\|g_{ij}\|$ квадратичной формы. Имеем тогда

$$L_P P^{\lambda+1} \bar{P}^\mu = 4(\lambda + 1)\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) P^\lambda \bar{P}^\mu.$$

В справедливости этого соотношения можно убедиться непосредственной проверкой.

Применяя это соотношение k раз, получим

$$L_P^k P^{\lambda+k} \bar{P}^\mu = 4^k (\lambda+1) \ldots (\lambda+k) \times \\ \times \left(\lambda + \frac{m}{2}\right) \ldots \left(\lambda + \frac{m}{2} + k - 1\right) P^\lambda \bar{P}^\mu. \tag{4}$$

Аналогично,

$$\bar{L}_P^l P^\lambda \bar{P}^{\mu+l} = 4^l (\mu+1) \ldots (\mu+l) \times \\ \times \left(\mu + \frac{m}{2}\right) \ldots \left(\lambda + \frac{m}{2} + l - 1\right) P^\lambda \bar{P}^\mu. \tag{5}$$

Из формул (4) и (5) получаем непосредственно: *обобщенная функция $P^\lambda \bar{P}^\mu$ следующим образом выражается через обобщенную функцию $P^{\lambda+k} \bar{P}^{\mu+l}$* $(k, l = 0, 1, \ldots)$

$$P^\lambda \bar{P}^\mu = c(\lambda, k)\, c(\mu, l)\, L_P^k \bar{L}_P^l P^{\lambda+k} \bar{P}^{\mu+l}, \tag{6}$$

где

$$c(\nu, p) = \left\{4^p (\nu+1) \ldots (\nu+p)\left(\nu + \frac{m}{2}\right) \ldots \left(\nu + \frac{m}{2} + p - 1\right)\right\}^{-1}.$$

Следовательно,

$$(P^\lambda \bar{P}^\mu, \varphi) = c(\lambda, k)\, c(\mu, l)\left(P^{\lambda+k} \bar{P}^{\mu+l}, L_P^k \bar{L}_P^l \varphi\right). \tag{7}$$

Формула (7) дает искомое выражение для обобщенной функции $P^\lambda \bar{P}^\mu$ при $\operatorname{Re}(\lambda + \mu) > -k - l$, где k, l — целые неотрицательные числа.

Исследуем теперь особенности обобщенной функции $P^\lambda \bar{P}^\mu$, рассматриваемой как функция от λ, μ. Из формулы (6) непосредственно видно, что *обобщенная функция $P^\lambda \bar{P}^\mu$ имеет* *две серии особых точек*:

$$(\lambda, \mu) = (-k-1, \ -l-1), \ k, l = 0, 1, 2, \ldots,$$

и

$$(\lambda, \mu) = \left(-\frac{m}{2} - k, \ -\frac{m}{2} - l\right), \qquad k, l = 0, 1, \ldots$$

Если точка (λ, μ) *принадлежит только одной из этих серий, то в ней обобщенная функция* $P^\lambda \bar{P}^\mu$ *имеет простой полюс. Если же точка* (λ, μ) *принадлежит одновременно обеим сериям, что возможно лишь для пространств четной размерности, то в ней обобщенная функция* $P^\lambda \bar{P}^\mu$ *имеет полюс кратности* 2.

Изучим особенности $P^\lambda \bar{P}^\mu$ в каждом из этих случаев.

1. *Особая точка* $\lambda = -k-1$, $\mu = -l-1$ *принадлежит первой серии особых точек, но не принадлежит второй серии.* В этом случае

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} P^\lambda \bar{P}^\mu$$

есть некоторая обобщенная функция, сосредоточенная на поверхности $P = 0$.

Мы знаем уже, что если f — аналитическая функция, такая, что на поверхности $f = 0$ нет особых точек, то

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} f^\lambda \bar{f}^\mu = 2\pi \frac{(-1)^{k+l}}{k!\, l!} \delta^{(k,\, l)}(f) \text{ *)}.$$

По аналогии естественно ввести обобщенные функции $\delta^{(k,\, l)}(P)$, сосредоточенные на поверхности $P = 0$,

$$\delta^{(k,\, l)}(P) \equiv \frac{1}{2\pi}(-1)^{k+l} k!\, l! \operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-1\\ \mu=-l-1}} P^\lambda \bar{P}^\mu. \tag{8}$$

Отметим следующую формулу для функции $\delta^{(k,\, l)}(P)$:

$$\delta^{(k,\, l)}(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - k - 1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2} - l - 1\right)}{4^{k+l}\, \Gamma^2\left(\frac{m}{2} - 1\right)} L_P^k \bar{L}_P^l \delta(P). \tag{9}$$

*) Напоминаем, что вычет нужно понимать как вычет функции от $s = \lambda + \mu$ при фиксированном целом значении $\lambda - \mu$.

Эта формула непосредственно получается из рекуррентного соотношения (6) для $P^\lambda \bar{P}^\mu$.

2. *Точка* (λ, μ) *принадлежит ко второй серии особых точек, но не принадлежит первой серии*, то есть

$$\lambda = -\frac{m}{2} - k, \quad \mu = -\frac{m}{2} - l,$$

причем размерность пространства m — нечетное число. Мы покажем, что в этом случае Выч $P^\lambda \bar{P}^\mu$ есть обобщенная функция, сосредоточенная в точке $z = 0$, а именно,

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-\frac{m}{2}-k\\ \mu=-\frac{m}{2}-l}} P^\lambda \bar{P}^\mu = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{-m-2k-2l+1} \pi^{m+1}}{k!\, l!\, \Gamma\left(\frac{m}{2} + k\right)\Gamma\left(\frac{m}{2} + l\right) |\Delta|} L_P^k \bar{L}_P^l \delta(z), \tag{10}$$

где Δ — дискриминант квадратичной формы P.

Вычислим сначала $\operatorname*{Выч}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} P^\lambda \bar{P}^\mu$. Ясно, что $\operatorname*{Выч}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} P^\lambda \bar{P}^\mu$ есть однородная обобщенная функция степени однородности $(-m, -m)$. Покажем, что эта функция сосредоточена в точке $z = 0$.

В самом деле, $z = 0$ есть единственная особая точка поверхности $P = 0$. Поэтому если функция φ равна нулю в окрестности точки $z = 0$, то, как было показано в п. 2, $(P^\lambda \bar{P}^\mu, \varphi)$ есть регулярная функция от λ, μ в точке $\lambda = \mu = -\frac{m}{2}$, то есть $\operatorname*{Выч}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} (P^\lambda \bar{P}^\mu, \varphi) = 0$.

Итак, $\operatorname*{Выч}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} P^\lambda \bar{P}^\mu$ есть обобщенная функция, сосредоточенная в точке $z = 0$. Так как, кроме того, эта функция однородна степени однородности $(-m, -m)$, то, следовательно,

$$\operatorname*{Выч}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} P^\lambda \bar{P}^\mu = c_m \delta(z). \tag{11}$$

Остается вычислить постоянную c_m. Оказывается, что

$$c_m = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{-m+1} \pi^{m+1}}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right) |\Delta|}, \tag{12}$$

где Δ — дискриминант квадратичной формы P.

Вычисление постоянной c_m. Постоянная c_m определяется из равенства

$$c_m \varphi(0) = \underset{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}}{\text{Выч}} (P^\lambda \overline{P}^\mu, \varphi) = \underset{s=-m}{\text{Выч}} (|P|^s, \varphi),$$

где φ — какая-либо основная функция. Сделаем в пространстве z линейное преобразование переменных, переводящее квадратичную форму P к виду $z_1^2 + \ldots + z_m^2$. Мы получим

$$c_m \varphi(0) = \frac{1}{|\Delta|} \underset{s=-m}{\text{Выч}} \left(\frac{i}{2}\right)^m \int |z_1^2 + \ldots + z_m^2|^s \varphi(z)\, dz\, d\bar{z},$$

где Δ — дискриминант квадратичной формы.

Положим $\varphi = e^{-z_1\bar{z}_1 - \ldots - z_m\bar{z}_m}$. Тогда имеем

$$c_m = \frac{1}{|\Delta|} \underset{s=-m}{\text{Выч}} \left(\frac{i}{2}\right)^m \int |z_1^2 + \ldots + z_m^2|^s e^{-z_1\bar{z}_1 - \ldots - z_m\bar{z}_m} dz\, d\bar{z}. \tag{13}$$

Вычислим интеграл

$$f(\lambda) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int |z_1^2 + \ldots + z_m^2|^{2\lambda} e^{-z_1\bar{z}_1 - \ldots - z_m\bar{z}_m} dz\, d\bar{z}. \tag{14}$$

При этом число m можно считать как четным, так и нечетным.

На основании формулы $L_P P^{\lambda+1}\overline{P}^\lambda = 4(\lambda+1)\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) P^\lambda \overline{P}^\lambda$ легко получаем соотношение для функции $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \frac{1}{4(\lambda+1)\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)} f(\lambda+1). \tag{15}$$

Следовательно,

$$f(\lambda) = 4^\lambda \Gamma(\lambda+1)\, \Gamma\left(\lambda + \frac{m}{2}\right) f_1(\lambda), \tag{16}$$

где $f_1(\lambda)$ — периодическая функция:

$$f_1(\lambda+1) = f_1(\lambda).$$

Покажем, что $f_1(\lambda) = \text{const}$. Для этого заметим, что, как было уже установлено, функция $f(\lambda)$ имеет те же особенности, что и функция $\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)$. Отсюда следует, что $f_1(\lambda)$ — целая функция.

Оценим рост функции $f_1(\lambda) = f_1(\sigma + i\tau)$ при $|\tau| \to \infty$. Ввиду периодичности функции f_1 можно предполагать, что $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Исходная функция $f(\lambda) = f(\sigma + i\tau)$ ограничена при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Поэтому, применяя известную асимптотическую оценку для Γ-функции

$$|\Gamma(\sigma + i\tau)| \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|} |\tau|^{\sigma - \frac{1}{2}}\ ^{*)}$$

при $|\tau| \to \infty$, мы получим из формулы (16)

$$|f_1(\sigma + i\tau)| \leqslant C e^{\pi|\tau|} \tag{17}$$

при $|\tau| \to \infty$. Однако для целой функции $f_1(\lambda)$ с периодом 1 такая оценка может иметь место, лишь когда $f_1(\lambda) = \text{const}$. (Чтобы в этом убедиться, достаточно разложить $f_1(\lambda)$ в ряд Лорана по степеням $z = e^{2\pi i\lambda}$ и рассмотреть поведение $g(z) \equiv f_1(\lambda)$ в окрестности точек $z = 0$ и $z = \infty$.) Следовательно, $f_1(\lambda) = \text{const}$.

Итак, установлено, что

$$f(\lambda) = c 4^\lambda \Gamma(\lambda+1)\, \Gamma\left(\lambda + \frac{m}{2}\right). \tag{18}$$

Положим в равенстве (18) $\lambda = 0$. Так как

$$f(0) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int e^{-z_1\bar{z}_1 - \ldots - z_m\bar{z}_m} dz\, d\bar{z} = \pi^m,$$

то получаем из (18)

$$c = \frac{\pi^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Таким образом, получена следующая формула:

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \int |z_1^2 + \ldots + z_m^2|^{2\lambda} e^{-z_1\bar{z}_1 - \ldots - z_m\bar{z}_m} dz\, d\bar{z} = \frac{\pi^m 4^\lambda \Gamma(\lambda+1)\, \Gamma\left(\lambda + \frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}. \tag{19}$$

Отсюда для нечетного m на основании формулы (13) находим

*) См. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы, М. — Л., 1951, стр. 322, формула (6.328).

значение постоянной c_m:

$$c_m = \frac{\pi^m}{|\Delta|} \operatorname*{Выч}_{s=-m} \frac{2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{-m+1}\pi^{m+1}}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}.$$

Для вычисления Выч $P^\lambda \overline{P}^\mu$ при $\lambda = -\frac{m}{2} - k$, $\mu = -\frac{m}{2} - l$ воспользуемся рекуррентной формулой (6). Мы получаем: *если размерность пространства m — нечетное число, то обобщенная функция $P^\lambda \overline{P}^\mu$ имеет в точках* $(\lambda, \mu) = \left(-\frac{m}{2} - k, -\frac{m}{2} - l\right)$, $k, l = 0, 1, \ldots$, *простые полюсы с вычетами*

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-k-\frac{m}{2}\\ \mu=-l-\frac{m}{2}}} P^\lambda \overline{P}^\mu = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{-m-2k-2l+1}\pi^{m+1}}{k!\, l!\, \Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+l\right)|\Delta|} L_P^k \overline{L}_P^l \delta(z), \quad (20)$$

где

$$L_P = \sum g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}, \quad \overline{L}_P = \sum \overline{g}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}_i \partial \overline{z}_j},$$

а Δ — дискриминант квадратичной формы P.

3. *Точка* (λ, μ) *принадлежит одновременно двум сериям особых точек,* то есть $\lambda = -\frac{m}{2} - k$, $\mu = -\frac{m}{2} - l$, и размерность пространства m — четное число. В этом случае обобщенная функция $P^\lambda \overline{P}^\mu$ разлагается в окрестности точки $\left(-\frac{m}{2} - k, \ -\frac{m}{2} - l\right)$ в ряд Лорана (по $\lambda + \mu$)

$$P^\lambda \overline{P}^\mu = \frac{a_{kl}(z)}{((\lambda+\mu)+(m+k+l))^2} + \frac{b_{kl}(z)}{(\lambda+\mu)+(m+k+l)} + \ldots, \quad (21)$$

где многоточием обозначена регулярная часть.

Повторяя почти дословно рассуждения, проведенные для случая 2, мы получим, что

$$a_{kl}(z) = \alpha_{kl} L_P^k \overline{L}_P^l \delta(z), \quad (22)$$

где

$$\alpha_{kl} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1} 2^{-m-2k-2l+2}\pi^m}{k!\, l!\, \Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+l\right)|\Delta|}. \quad (23)$$

С другой стороны, коэффициент $b_{kl}(z)$ в разложении (21) есть некоторая функция, сосредоточенная на поверхности $P = 0$. По аналогии со случаем, когда поверхность $P = 0$ не имеет особых точек, введем обобщенную функцию $\delta^{\left(\frac{m}{2}+k-1,\ \frac{m}{2}+l-1\right)}(P)$, определив ее следующим образом:

$$\operatorname*{Выч}_{\substack{\lambda=-\frac{m}{2}-k\\ \mu=-\frac{m}{2}-l}} P^\lambda \overline{P}^\mu = \beta_{kl} \delta^{\left(\frac{m}{2}+k-1,\ \frac{m}{2}+l-1\right)}(P), \quad (24)$$

где

$$\beta_{kl} = \frac{2\pi(-1)^{k+l}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+l\right)} \quad (25)$$

(ср. со случаем 1, где мы имели дело с простыми полюсами).

Итак, *если точка* (λ, μ) *принадлежит одновременно обеим сериям особых точек, то есть* $\lambda = -\frac{m}{2} - k$, $\mu = -\frac{m}{2} - l$, *где размерность пространства m — четное число, то обобщенная функция $P^\lambda \overline{P}^\mu$ имеет в этой точке полюс кратности 2. Разложение функции $P^\lambda \overline{P}^\mu$ в ряд Лорана имеет в окрестности точки* $\lambda = -\frac{m}{2} - k$, $\mu = -\frac{m}{2} - l$ *следующий вид:*

$$P^\lambda \overline{P}^\mu = \frac{\alpha_{kl}}{((\lambda+\mu)+(m+k+l))^2} L_P^k \overline{L}_P^l \delta(z) + \\ + \frac{\beta_{kl}}{(\lambda+\mu)+(m+k+l)} \delta^{\left(\frac{m}{2}+k-1,\ \frac{m}{2}+l-1\right)}(P) + \ldots, \quad (26)$$

где $\delta^{\left(\frac{m}{2}+k-1,\ \frac{m}{2}+l-1\right)}(P)$ — *обобщенная функция, сосредоточенная на поверхности* $P=0$, *а коэффициенты* α_{kl} *и* β_{kl} *определяются формулами* (23) *и* (25) (*многоточием обозначена регулярная часть ряда*).

8. Фундаментальные решения линейных дифференциальных уравнений в комплексной области. Применим результаты п. 7 к отысканию фундаментальных решений уравнения

$$L^k u = f(z), \tag{1}$$

где L — однородный линейный дифференциальный оператор вида

$$L=\sum_{i,\,j=1}^{m} g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial z_j} \tag{2}$$

с невырожденной симметрической матрицей $\|g^{ij}\|$ и $k=1,\ 2,\ \dots$

Напомним, что фундаментальным решением уравнения (1) называется такая обобщенная функция K, что

$$L^k K = \delta(z).$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$P=\sum_{i,\,j=1}^{m} g_{ij}z_i z_j, \tag{3}$$

матрица которой $\|g_{ij}\|$ обратна матрице оператора L. Покажем, что *за исключением случая, когда размерность пространства* m — *четное число и* $k<\frac{m}{2}$, *функция* $P^{-\frac{m}{2}+k}\overline{P}^{-\frac{m}{2}}$ *является, с точностью до постоянного множителя, фундаментальным решением уравнения* $L^k u=f(z)$.

Для доказательства воспользуемся соотношением, установленным в п. 7 (см. п. 7, формула (4)),

$$L^k P^{\lambda+k}\overline{P}^{\lambda}=4^k(\lambda+1)\dots(\lambda+k)\times$$
$$\times\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)\dots\left(\lambda+\frac{m}{2}+k-1\right)P^{\lambda}\overline{P}^{\lambda}. \tag{4}$$

Если размерность пространства — нечетное число, то при $\lambda=-\frac{m}{2}$ получаем из (4)

$$L^k P^{-\frac{m}{2}+k}\overline{P}^{-\frac{m}{2}}=4^k\left(1-\frac{m}{2}\right)\dots\left(k-\frac{m}{2}\right)(k-1)!\times$$
$$\times\lim_{\lambda=-\frac{m}{2}}\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)P^{\lambda}\overline{P}^{\lambda}. \tag{5}$$

Но при нечетном m

$$\underset{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}}{\text{Выч}}\ P^{\lambda}\overline{P}^{\mu}=\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{-m+1}\pi^{m+1}}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}\,\delta(z)\ ^{*)},$$

где Δ — дискриминант квадратичной формы P. Следовательно, в случае пространства нечетной размерности функция

$$K=\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}+k}2^{m-2k}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-k\right)|\Delta|}{\pi^{m+1}(k-1)!}\,P^{-\frac{m}{2}-k}\overline{P}^{-\frac{m}{2}} \tag{6}$$

является фундаментальным решением уравнения (1).

Если размерность пространства m — четное число и $k\geqslant\frac{m}{2}$, то из (4) получаем при $\lambda=-\frac{m}{2}$

$$L^k P^{-\frac{m}{2}+k}\overline{P}^{-\frac{m}{2}}=$$
$$=4^k(-1)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{m}{2}-1\right)!\left(k-\frac{m}{2}\right)!(k-1)!\lim_{\lambda=-\frac{m}{2}}\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)^2P^{\lambda}\overline{P}^{\lambda}.$$

Но для пространства четной размерности m имеем:

$$\lim_{\lambda=-\frac{m}{2}}\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)^2P^{\lambda}\overline{P}^{\lambda}=\frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1}2^{-m}\pi^m}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}\,\delta(z).$$

---

*) См. примечание на стр. 622.

Следовательно, в случае пространства четной размерности при $k \geqslant \frac{m}{2}$ функция

$$K = \frac{2^{m-2k}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}{\pi^m (k-1)!\left(k-\frac{m}{2}\right)!} P^{-\frac{m}{2}+k}\overline{P}^{-\frac{m}{2}} \tag{7}$$

является фундаментальным решением уравнения (1). Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь особый случай, когда размерность пространства — четное число и $k < \frac{m}{2}$. Как было показано в п. 7, обобщенная функция $P^{\lambda+k}\overline{P}^{\mu}$ имеет в этом случае при $\lambda = \mu = -\frac{m}{2}$ простой полюс, причем

$$\operatorname*{Выч}_{\lambda=\mu=-\frac{m}{2}} P^{\lambda+k}\overline{P}^{\mu} = \frac{2\pi(-1)^k}{\left(\frac{m}{2}-k-1\right)!\left(\frac{m}{2}-1\right)!}\,\delta^{\left(\frac{m}{2}-k-1,\ \frac{m}{2}-1\right)}(P). \tag{8}$$

Умножая обе части равенства (4) на $2\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)$ и переходя затем к пределу при $\lambda \to -\frac{m}{2}$, получим

$$\frac{2\pi(-1)^k}{\left(\frac{m}{2}-k-1\right)!\left(\frac{m}{2}-1\right)!} L^k \delta^{\left(\frac{m}{2}-k-1,\ \frac{m}{2}-1\right)}(P) =$$

$$= 2^{2k+1}\left(1-\frac{m}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{m}{2}\right)(k-1)!\lim_{\lambda=-\frac{m}{2}}\left(\lambda+\frac{m}{2}\right)^2 P^{\lambda}\overline{P}^{\lambda} =$$

$$= 2^{2k+1}\left(1-\frac{m}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{m}{2}\right)(k-1)!\,\frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1}\,2^{-m}\pi^m}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)|\Delta|}\,\delta(z).$$

Таким образом, *в особом случае, когда размерность пространства m — четное число и $k < \frac{m}{2}$, фундаментальным решением уравнения* (1) *является обобщенная функция, сосредоточенная на поверхности $P=0$,*

$$K = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1}\,2^{m-2k}|\Delta|}{\pi^{m-1}(k-1)!}\,\delta^{\left(\frac{m}{2}-k-1,\ \frac{m}{2}-1\right)}(P). \tag{9}$$

Примечание. Аналогичными рассуждениями легко получить также фундаментальное решение уравнения

$$L^k\overline{L}^l u = f(z),$$

где $L = \sum g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z^i\,\partial z^j}$, $\overline{L} = \sum \overline{g}^{ij}\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^i\,\partial \overline{z}^j}$ и $k,\ l = 1, 2, \ldots$ Проведение этого исследования предоставляется читателю.

9. Исследование обобщенной функции $G^{\lambda}\overline{G}^{\mu}$ (общий случай). Пусть $G(z_1, \ldots, z_m)$ — целая аналитическая функция. Рассмотрим обобщенную функцию $G^{\lambda}\overline{G}^{\mu}$, то есть изучим функционал

$$(G^{\lambda}\overline{G}^{\mu}, \varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int G^{\lambda}(z)\,\overline{G}^{\mu}(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\overline{z} \tag{1}$$

как аналитическую функцию от λ, μ. Простейший случай, когда поверхность $G=0$ не имеет особых точек, был уже разобран в п. 2. Здесь будет рассмотрен случай, когда на поверхности $G=0$ могут существовать особые точки.

Мы не будем заниматься случаем, когда поверхность $G(z)=0$ совершенно произвольна, а ограничимся важным случаем, когда эта поверхность состоит из *приводимых* точек. Определение приводимой точки на аналитической поверхности аналогично определению для вещественного случая (см. «Обобщенные функции», вып. 1).

Скажем, что переменные $\zeta_1 = f_1(z_1, \ldots, z_m), \ldots, \zeta_m = f_m(z_1, \ldots, z_m)$ образуют локальную систему координат в некоторой окрестности U точки M, если выполнены следующие требования:

1) функции $f_i(z)$ аналитичны в окрестности точки M;
2) якобиан $\frac{D(\zeta)}{D(z)}$ отличен от нуля в окрестности U;
3) точке M отвечают значения $\zeta_1 = \ldots = \zeta_m = 0$.

Функцию $G(z)$ назовем эквивалентной однородной функции в окрестности точки M, если в этой окрестности существует локальная система координат $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, в которой функция G превращается в однородную функцию (многочлен). Условимся эти координаты всегда выбирать так, чтобы функция G зависела от наименьшего возможного числа переменных. Это число переменных назовем **порядком** точки M.

Ясно, что понятие функции, эквивалентной однородной, можно ввести не только, когда эта функция задана во всем комплексном пространстве, но и когда она задана на любой аналитической поверхности.

Определение приводимой точки поверхности дадим индуктивно по числу измерений пространства или поверхности. Это определение будет локальным. Иными словами, определение приводимой точки связано с рассмотрением поверхности в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Итак, предположим, что для поверхностей в пространстве (или на аналитической поверхности) комплексной размерности, меньшей чем m, определение приводимых точек уже дано. Точку M поверхности $G(z_1, \ldots, z_m) = 0$ назовем приводимой, если найдется достаточно малая окрестность U точки M, для которой выполнены следующие требования:

1) Функция G эквивалентна в U однородной функции (многочлену).

2) Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ — координаты в U, в которых G есть однородная функция. Рассмотрим в U элемент P аналитической поверхности, такой, что любая комплексная прямая (в координатной системе $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$), проходящая через точку M, пересекается с P не более чем в одной точке. Требуется, чтобы, каково бы ни было P, пересечение поверхности $G = 0$ с поверхностью P давало поверхность, каждая точка которой приводима на P.

Введем в окрестности приводимой точки M поверхности $G = 0$ локальные координаты $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, в которых функция G есть однородная функция степени однородности k, зависящая от $n \leqslant m$ комплексных переменных. Тогда скажем, что M есть точка n-го порядка и степени k.

Итак, каждой точке поверхности $G = 0$ мы относим два натуральных числа — порядок n и степень k. В частности, если на поверхности $G = 0$ производные $\dfrac{\partial G}{\partial z_i}$ нигде одновременно не обращаются в нуль, то каждая точка этой поверхности будет точкой 1-го порядка и степени 1. Действительно, в окрестности такой точки можно за одну из новых координат принять G.

Исследуем особенности обобщенной функции $G^{\lambda}\overline{G}^{\mu}$, рассматриваемой как функция от λ, μ для случая, когда все точки поверхности $G = 0$ приводимы.

Для простоты предположим, что $G(z_1, \ldots, z_m)$ есть многочлен. Справедливо следующее утверждение, которое мы приведем без доказательства.

Если $G(z_1, \ldots, z_m)$ — многочлен и поверхность $G = 0$ состоит лишь из приводимых точек, то эта поверхность разлагается на конечное число связных компонент, каждая из которых состоит из точек одного и того же порядка и одной и той же степени.

Теорема. *Пусть $G(z)$ — многочлен такой, что все точки поверхности $G(z) = 0$ приводимы. Тогда обобщенная функция $G^{\lambda}\overline{G}^{\mu}$ есть мероморфная функция от λ, μ* *). *Ее полюсы лежат на конечном числе последовательностей. Именно, каждой связной компоненте поверхности $G = 0$, состоящей из точек порядка r и степени k, отвечает множество полюсов функционала $G^{\lambda}\overline{G}^{\mu}$, расположенных в точках*

$$(\lambda, \mu) = \left(-\frac{r+p}{k}, \ -\frac{r+q}{k}\right), \quad p, q = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \lambda - \mu \text{ — целое.} \tag{2}$$

При этом, если имеются две, три и более последовательные инцидентные друг другу связные компоненты поверхности $G = 0$, состоящие из точек различных порядков, и (λ_0, μ_0) принадлежит двум, трем и более последовательностям (2), отвечающим этим компонентам, то в точке (λ_0, μ_0) обобщенная функция $G^{\lambda}\overline{G}^{\mu}$ имеет соответственно полюс 2-го, 3-го и более порядков.

---

*) Напомним, что числа λ, μ не произвольны, их разность — целое число. Утверждение теоремы означает, что $G^{\lambda}\overline{G}^{\mu}$ есть мероморфная функция от $\lambda + \mu$ при любом фиксированном значении $\lambda - \mu$.

Доказательство этой теоремы по существу есть повторение доказательства аналогичной теоремы для вещественного случая (см. «Обобщенные функции», вып. 1, гл. III, § 4). Поэтому мы проведем его кратко, опуская некоторые детали.

Предположим, что полюсы по $\lambda+\mu$ интеграла

$$(G^{\lambda}\overline{G}^{\mu},\ \varphi)=\left(\frac{i}{2}\right)^m\int G^{\lambda}(z)\,\overline{G}^{\mu}(z)\,\varphi(z)\,dz\,d\overline{z}, \tag{1}$$

возникающие благодаря точкам порядка, меньшего чем m, нам уже известны. Тогда достаточно исследовать интеграл (1), взятый по сколь угодно малой окрестности точки M m-го порядка. В окрестности точки M существует локальная система координат, в которых G есть однородный многочлен степени k от m комплексных переменных. Не нарушая общности, можно предполагать, что уже само $G(z)$ есть однородный многочлен от z (причем $z=0$ в точке M).

Перейдем в (1) к обобщенным полярным координатам (см. п. 5). Мы получим

$$(G^{\lambda}\overline{G}^{\mu},\ \varphi)=$$
$$=\sum\frac{i^{(m-1)^2+1}}{2^m}\int_{\Gamma_i}\left(\int G^{\lambda}(\alpha z)\,\overline{G}^{\mu}(\alpha z)\,\varphi(\alpha z)\,\alpha^{m-1}\overline{\alpha}^{m-1}\,d\alpha\,d\overline{\alpha}\right)\omega\overline{\omega}=$$
$$=\sum\frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}}\int_{\Gamma_i}G^{\lambda}(z)\,\overline{G}^{\mu}(z)\,\Phi_{\lambda,\,\mu}(z)\,\omega\overline{\omega}, \tag{3}$$

где обозначено

$$\Phi_{\lambda,\,\mu}(z)=\frac{i}{2}\int\alpha^{k\lambda+m-1}\,\overline{\alpha}^{k\mu+m-1}\varphi(\alpha z)\,d\alpha\,d\overline{\alpha}. \tag{4}$$

Интегралы в (3) берутся по кускам Γ_i аналитических поверхностей, пересекающимся не более чем в одной точке с каждой комплексной прямой, проходящей через точку M.

Интегралы (3) и (4) сходятся при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>0$, а при $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)<0$ их нужно понимать в смысле аналитического продолжения по $\lambda+\mu$. Найдем сначала особенности интеграла $\Phi_{\lambda,\,\mu}(z)$, рассматриваемого как аналитическая функция от λ, μ. Поскольку при $z\neq 0$ подинтегральная функция $\varphi(\alpha z)$ финитна и бесконечно дифференцируема относительно α, то мы заключаем на основании п. 2, что *единственными особенностями интеграла* $\Phi_{\lambda,\,\mu}(z)$ *являются простые полюсы в точках* $(\lambda,\ \mu)=\left(-\frac{m+p}{k},\ -\frac{m+q}{k}\right)$, $p,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ ($\lambda-\mu$ — *целое*).

Очевидно, что если $(\lambda,\ \mu)$ не принадлежит этой последовательности, то $\Phi_{\lambda,\,\mu}(z)$ является однородной функцией от z, непрерывной и бесконечно дифференцируемой всюду, кроме точки $z=0$.

Найдем теперь особенности интеграла

$$\frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}}\int_{\Gamma_i}G^{\lambda}(z)\,\overline{G}^{\mu}(z)\,\Phi_{\lambda,\,\mu}(z)\,\omega\overline{\omega}. \tag{5}$$

Для этого введем вспомогательный функционал

$$I_{\lambda,\,\mu;\,\lambda',\,\mu'}[\varphi]=\frac{i^{(m-1)^2}}{2^{m-1}}\int_{\Gamma_i}G^{\lambda}(z)\,\overline{G}^{\mu}(z)\,\Phi_{\lambda',\,\mu'}(z)\,\omega\overline{\omega}. \tag{6}$$

Очевидно, что при $\lambda'=\lambda$, $\mu'=\mu$ интеграл (6) обращается в исходный интеграл (5), и нам достаточно исследовать особенности функционала $I_{\lambda,\,\mu;\,\lambda',\,\mu'}[\varphi]$ *).

Особые точки функции $I_{\lambda,\,\mu;\,\lambda',\,\mu'}$ по $(\lambda',\ \mu')$ были уже определены раньше. Это — точки $(\lambda',\ \mu')=\left(-\frac{m+p}{k},\ -\frac{m+q}{k}\right)$, $p,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Особые точки функции I по $(\lambda,\ \mu)$ могут возникнуть лишь от тех точек поверхности Γ_i, в которых $G(z)=0$. По условию, эти точки приводимы и имеют притом порядок, не больший чем $m-1$. Следовательно, в силу индуктивного предположения, нам известны полюсы функции I, рассматриваемой как функция от $(\lambda,\ \mu)$, и кратности этих полюсов.

Тем самым доказано, что интеграл (2) имеет, кроме полюсов по λ, μ, возникающих из-за точек порядка, меньшего чем m, еще полюсы в точках $(\lambda,\ \mu)=\left(-\frac{m+p}{k},\ -\frac{m+q}{k}\right)$, $p,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

---

*) Этот прием, основанный на «расщеплении» переменных, был применен в вып. 1 при доказательстве аналогичной теоремы для вещественного случая.

Остается проверить утверждение теоремы относительно кратности полюсов функции $G^\lambda \overline{G}^\mu$. Это утверждение непосредственно вытекает из следующего замечания *).

Если функция $I_{\lambda,\,\mu;\,\lambda',\,\mu'}$, рассматриваемая как функция от λ, μ, имеет при $(\lambda, \mu) = (\lambda_0, \mu_0)$ полюс кратности j, а рассматриваемая как функция от λ', μ' она имеет при $(\lambda', \mu') = (\lambda_0, \mu_0)$ полюс кратности j', то функция $I_{\lambda,\,\mu;\,\lambda,\,\mu}$ имеет при $(\lambda, \mu) = (\lambda_0, \mu_0)$ полюс кратности не выше чем $j + j'$.

Итак, мы выяснили, каковы особенности обобщенной функции $G^\lambda \overline{G}^\mu$ для случая, когда $G(z)$ есть многочлен, такой, что все точки поверхности $G = 0$ приводимы.

Доказанная теорема, вообще говоря, не имеет места, если $G(z)$—произвольная целая аналитическая функция, такая, что все точки поверхности $G = 0$ приводимы.

Однако, повторяя рассуждения теоремы, легко убедиться, что если $G(z)$ — целая аналитическая функция, то для нее тем не менее справедливо более слабое утверждение. А именно, любая особая точка обобщенной функции $G^\lambda \overline{G}^\mu$ есть всегда точка вида $(\lambda, \mu) = \left(-\frac{r_1}{k}, -\frac{r_2}{k}\right)$, где r_1, r_2, k — натуральные числа. В частности, в точках $\lambda = -1, -2, \ldots$, $\mu = 0$ обобщенная функция $G^\lambda \overline{G}^\mu$ будет регулярна.

Таким образом, *если G — целая аналитическая функция, такая, что все точки поверхности $G = 0$ являются приводимыми, то существует обобщенная функция G^{-k}.* Эта обобщенная функция определяется как значение функционала

$$(G^\lambda \overline{G}^\mu, \varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int G^\lambda(z) \overline{G}^\mu(z) \varphi(z)\, dz\, d\bar{z}$$

при $\lambda = -k$, $\mu = 0$.

Примечание. Вместо аналитических функций $G(z)$ можно также рассматривать произвольные непрерывные бесконечно дифференцируемые функции $G(z)$ от z и $\bar{z}$. В таком случае определение функции, эквивалентной однородной, несколько видоизменяется. Именно, новые комплексные переменные, в которых функция G оказывается однородной, могут уже быть любыми бесконечно дифференцируемыми (но не обязательно аналитическими) функциями от старых переменных. Соответственно видоизменяется и определение приводимой точки. Если $G(z)$ — многочлен от z и $\bar{z}$ такой, что все точки поверхности $G(z) = 0$ приводимы, то для обобщенной функции $G^\lambda \overline{G}^\mu$ имеет место теорема, аналогичная приведенной на стр. 633. (Точной формулировки этой теоремы приводить не будем.)

*) См. аналогичное рассуждение в вып. 1, стр. 399.

10. Обобщенные функции, отвечающие мероморфным функциям m комплексных переменных. Пусть задана мероморфная функция $f(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$, то есть такая функция, которую в достаточно малой окрестности произвольной точки можно представить как отношение $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ функций, аналитических в этой окрестности.

Мы покажем, что *функции $f(z)$ можно сопоставить обобщенную функцию $F(z)$.* Естественно потребовать, чтобы обобщенная функция $F(z)$ удовлетворяла следующему условию: если $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ в некоторой (замкнутой) окрестности U, где $p(z)$, $q(z)$ — аналитические в U функции, то для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(z)$, сосредоточенной в U, справедливо равенство

$$(F, q\varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int p(z) \varphi(z)\, dz\, d\bar{z}. \tag{1}$$

Будет показано, что такая обобщенная функция $F(z)$, удовлетворяющая условию (1), всегда существует. Заметим, что обобщенная функция $F(z)$ определяется условием (1) с точностью до произвольного слагаемого F_1, удовлетворяющего условию

$$(F_1, q\varphi) = 0, \tag{2}$$

где φ — любая финитная функция, сосредоточенная в U. Ясно, что такая функция F_1 сосредоточена на множестве особых точек функции $f(z)$.

Перейдем к построению обобщенной функции $F(z)$. Сначала построим обобщенную функцию F_U в подпространстве функций $\varphi(z)$, сосредоточенных в достаточно малой окрестности U заданной точки z_0.

Представим функцию f в виде отношения

$$f(z) = \frac{p_0(z)}{q_0(z)}$$

двух функций, аналитических в U. Взяв от функции $q_0(z)$ производную по z достаточно высокого порядка, мы получим аналитическую функцию

$$q_1(z) = \frac{\partial^k q_0(z)}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_m^{k_m}}, \qquad k = k_1 + \ldots + k_m,$$

не имеющую нулей в U (окрестность U предполагается достаточно малой). Обобщенную функцию F_U в пространстве функций $\varphi(z)$, сосредоточенных в окрестности U, зададим сходящимся интегралом

$$(F_U, \varphi) = (-1)^k \left(\frac{i}{2}\right)^m \int f(z)\, \overline{q_0(z)}\, \frac{\partial^k \left[\varphi(z)\, \overline{q_1^{-1}(z)}\right]}{\partial \bar{z}_1^{k_1} \ldots \partial \bar{z}_m^{k_m}}\, dz\, d\bar{z}. \qquad (3)$$

По функциям F_U построим теперь функционал F на всем пространстве основных функций. Для этого сопоставим каждой точке z_0 достаточно малую окрестность U. Затем из множества окрестностей U выберем локально конечное покрытие всего пространства *). Пусть это будут окрестности $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ Разложим единицу в сумму

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(z)$$

бесконечно дифференцируемых функций $g_i(z)$, сосредоточенных в окрестностях U_i **).

Тогда для любой основной функции $\varphi(z)$ имеет место разложение в сумму функций, сосредоточенных в окрестностях U_i

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(z)\, g_i(z).$$

(Заметим, что для каждой финитной функции $\varphi(z)$ эта сумма содержит лишь конечное число отличных от нуля слагаемых.)

Определим обобщенную функцию $F(z)$ следующей формулой:

$$(F, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(F_{U_i}, \varphi g_i\right).$$

Ясно, что функционал F непрерывен. Покажем, что он удовлетворяет условию (2). В самом деле, пусть в некоторой (замкнутой) окрестности U

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

где $p(z)$ и $q(z)$ — аналитические функции в U. Пусть функция $\varphi(z)$ сосредоточена в окрестности U. Тогда из определения обобщенной

*) То есть любая ограниченная область пересекается лишь с конечным числом окрестностей семейства.

**) Конструкция такого разложения описана, например, в «Обобщенных функциях», вып. 1, добавление 1 к гл. I.

функции F_{U_i} (формула (3)) получаем в результате сокращения на $q(z)$ и интегрирования по частям

$$\left(F_{U_i}, q\varphi g_i\right) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int p(z)\, \varphi g_i\, dz\, d\bar{z}.$$

Суммируя полученные равенства по i, получим

$$(F, q\varphi) = \left(\frac{i}{2}\right)^m \int p(z)\, \varphi(z)\, dz\, d\bar{z},$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К § 1 гл. I. Задача о выражении функции через ее интегралы по плоскостям рассматривалась рядом авторов (Радон [12], Йон [7], [8], позже А. Хачатуров [46], П. Костелянец и Ю. Решетняк [38]). Решение этой задачи с помощью обобщенных функций дано в вып. 1. Приведенный в книге вывод формулы обращения принадлежит И. М. Гельфанду и М. И. Граеву, публикуется здесь впервые. Формулу Планшереля получил Ю. Решетняк. Аналог теоремы Пэли — Винера получен И. М. Гельфандом и М. И. Граевым [24]. Асимптотика преобразований Фурье для характеристических функций множества получена Ф. Йоном [8].

К §§ 2 и 3 гл. I. Результаты этих параграфов принадлежат И. М. Гельфанду и М. И. Граеву. Частично они изложены в их статье [24], частично публикуются впервые. Понятие обобщенной гипергеометрической функции принадлежит И. М. Гельфанду.

К § 1 гл. II. Результаты принадлежат И. М. Гельфанду и М. И. Граеву [25]. Частные случаи получены раньше: для прямых, пересекающих кривую второго порядка, — И. М. Гельфандом [16], а для прямых, пересекающих произвольную кривую, — А. А. Кирилловым [36].

К § 2 гл. II. По существу, рассматриваемая здесь задача была решена И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [27]. В той геометрической форме, которая дается здесь и принадлежит И. М. Гельфанду и М. И. Граеву, публикуется впервые.

К § 3 гл. II. Результаты принадлежат И. М. Гельфанду и М. И. Граеву. Частично они изложены в их статье [24], частично публикуются впервые.

К гл. III. Результаты этой главы получены (для унитарных представлений группы Лоренца) И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком и опубликованы в [27]. Метод исследования, основанный на изучении билинейных форм, применялся Брюа [3], который не рассматривал, однако, случая целых точек. Результаты о поведении представления в целых точках принадлежат И. М. Гельфанду и Н. Я. Виленкину, публикуются впервые. Им же принадлежит понятие пространства D_χ. Понятие тензорной неприводимости представления ввел И. М. Гельфанд.

К гл. IV. Результаты §§ 1—3 этой главы принадлежат И. М. Гельфанду и М. А. Наймарку [27], а метод изложения — авторам книги. Результаты § 5 (теорема Пэли — Винера) принадлежат И. М. Гельфанду [17] и Д. П. Желобенко [33]. Эти результаты были обобщены в дальнейшем на полупростые комплексные группы И. М. Гельфандом и М. И. Граевым [20]. Теорему Пэли—Винера

для вещественной группы Лоренца ранее получили (в иной форме) Эренпрейс и Маутнер [6].

О современном состоянии теории бесконечномерных представлений групп можно прочитать в интересной обзорной статье Макки [47].

К гл. V. В основе главы лежит статья И. М. Гельфанда и М. И. Граева [21], где авторы пользовались матричной реализацией пространств. Геометрическое изложение, публикуемое здесь, принадлежит авторам данной книги. Аналогичные задачи для плоскостей в пространствах Лобачевского и Римана рассматривали Хельгасон [5] и В. И. Семянистый [43], [44].

К гл. VI. Общее определение орисферы в однородном пространстве, где действует комплексная полупростая группа, дано в статье И. М. Гельфанда и М. И. Граева [19], там же выяснена связь теории представлений с интегральной геометрией. Понятие орисферы тесно связано с понятием границы симметрического пространства, введенным Ф. И. Карпелевичем [35]. Результаты §§ 2, 3 и 4 впервые опубликованы в статье И. М. Гельфанда и М. И. Граева. Публикуемое здесь геометрическое изложение результатов принадлежит авторам данной книги. Результаты § 5 принадлежат И. М. Гельфанду и М. И. Граеву [19] (эти результаты были получены в [19] для произвольной комплексной полупростой группы). Другим методом эти результаты были ранее получены М. А. Наймарком [40]. Недавно Н. Я. Виленкин установил связь метода орисфер с преобразованием Фока-Меллера.

К гл. VII. Результаты этой главы принадлежат в основном В. Баргману [1]. В той форме, которая дается здесь и принадлежит авторам данной книги, публикуются впервые. Результаты о поведении представлений в целых точках принадлежат авторам, публикуются впервые. По вопросам гармонического анализа на группе вещественных матриц см. интересные работы Эренпрейса и Маутнера [6], Кунце и Штейна [9] и Пуканского [48].

К Добавлениям. Содержащийся здесь материал в основном является перенесением на комплексный случай результатов И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро [30]. В той форме, которая дана здесь, публикуется впервые. Форму ω впервые ввел Лере [10], формы ω_{ij} (для вещественного пространства) ввели независимо Лере и И. М. Гельфанд и З. Я. Шапиро [30].

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Bargmann V., Representations of the Lorentz group, Annals of Math. 48 (1947), 568—640.
[2] Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.
[3] Bruhat F., Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), 97—205.
[4] Godement R., Seminaire H. Cartan Ecole norm. supér, 1957—1958, Paris, 1958.
[5] Helgason S., Differential operators on homogeneous spaces, Acta Math. 102 (1959), 239—299.

[6] Ehrenpreis L. and Mautner F., Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups, I, Annals of Math. **61** (1955), 406—439; II, Trans. of the Amer. Math. Soc. **84** (1957), 1—55.
[7] John F., Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. **109** (1934), 488—520.
[8] John F., Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion, Math. Ann. **111** (1935), 541—559.
[9] Kunze R. A. and Stein E. M., Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2x2 real unimodular group, Amer. J. of Math. **82** (1960), 1—62.
[10] Leray J., Les solutions élémentaires d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants, C. R. Acad. Sci., Paris, **234** (1952), 1112—1115. См. также его книгу Hiperbolic differential equations, New-York, 1955.
[11] Leray J., Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Probleme de Cauchy, III), Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 81—180. Русский перевод: Ж. Лере, Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном многообразии, ИЛ, 1961.
[12] Radon J., Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwärte längs gewisser Mäannigfrltigkeiten, Ber. Verh. Sächs. Akad. **69** (1917), 262—277.
[13] Бляшке В., Лекции по интегральной геометрии, Успехи матем. наук, V (1938), 97—149.
[14] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения ИЛ, 1950.
[15] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
[16] Гельфанд И. М., Интегральная геометрия и ее связь с теорией представлений, Успехи матем. наук **15**, вып. 2 (1960), 155—164.
[17] Гельфанд И. М., О структуре кольца быстро убывающих функций на группе Ли, Докл. АН СССР **124** (1959), 19—21.
[18] Гельфанд И. М. и Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства («Обобщенные функции», вып. 4), Физматгиз, 1961.
[19] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, I, Труды Моск. матем. об-ва 8 (1959), 321—390.
[20] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Преобразование Фурье быстро убывающих функций на комплексных полупростых группах Ли, Докл. АН СССР **131** (1960), 496—499.
[21] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Применение метода орисфер к спектральному анализу функций в обычном и в мнимом пространствах Лобачевского, Труды Моск. матем. об-ва, **11** (1962).
[22] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Об одном общем методе разложения регулярного представления группы Ли на неприводимые представления, Докл. АН СССР **92** (1953), 221—224.

[23] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Аналог формулы Планшереля для классических групп, Труды Моск. матем. об-ва **4** (1955), 375—404.
[24] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Интегралы по гиперплоскостям основных и обобщенных функций, Докл. АН СССР **135** (1960), 1307—1310.
[25] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Интегральные преобразования, связанные с комплексами прямых в комплексном аффинном пространстве, Докл. АН СССР **138**, № 6 (1961).
[26] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
[27] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Известия АН СССР (серия матем.) **11** (1947), 411—504.
[28] Гельфанд И. М. и Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и теория автоморфных функций, Успехи матем. наук **14**, вып. 2 (1959), 171—194.
[29] Гельфанд И. М. и Фомин С. В., Геодезические потоки на многообразиях постоянной кривизны, Успехи матем. наук **7**, вып. 1 (1952), 118—137.
[30] Гельфанд И. М. и Шапиро З. Я., Однородные функции и их приложения, Успехи матем. наук **10**, вып. 3 (1955), 3—70.
[31] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними («Обобщенные функции», вып. 1), 2-е изд., Физматгиз, 1959.
[32] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций («Обобщенные функции», вып. 2), Физматгиз, 1958.
[33] Желобенко Д. П., Строение группового кольца группы Лоренца, Докл. АН СССР **126** (1959), 482—485.
[34] Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, 1958.
[35] Карпелевич Ф. И., Геодезические линии и гармонические функции на симметрических пространствах, Докл. АН СССР **124** (1959), 1199—1202.
[36] Кириллов А. А., Об одной задаче И. М. Гельфанда, Докл. АН СССР **137**, № 2 (1961).
[37] Клейн Ф., Высшая геометрия, ГОНТИ, 1939.
[38] Костелянец П. О и Решетняк Ю. Г., Определение вполне аддитивной функции ее значениями на полупространствах, Успехи матем. наук **9** (1954), вып. 3 (61), 135—140.
[39] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
[40] Наймарк М. А., Разложение тензорного произведения неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления, Труды Моск. матем. об-ва **8** (1959), 121—154.
[41] Сантало, Введение в интегральную геометрию, ИЛ, 1956.

[42] Селберг А., Гармонический анализ и дискретные группы в слабосимметрических римановых пространствах; приложения к теории рядов Дирихле, Математика (сборник переводов), ИЛ, 1:4 (1957), 3—28.
[43] Семянистый В. И., О некоторых интегральных преобразованиях в евклидовом пространстве, Докл. АН СССР 134 (1960), 536—539.
[44] Семянистый В. И., Однородные функции и некоторые задачи интегральной геометрии в пространствах постоянной кривизны, Докл. АН СССР 136 (1961), 288—291.
[45] Титчмарш Е., Теория функций, Гостехиздат, 1951.
[46] Хачатуров А. А., Определение значения меры для области n-мерного пространства по ее значениям для всех полупространств, Успехи матем. наук 9 (1954), № 3 (61), 205—212.

Дополнительная литература

[47] Mackey G. W., Infinite dimensional group representations, Colloquium Lecture given at Stillwater, Oklahoma, August 29 — September 1 at the Sixty — Sixth Summer Meeting of the Amer. Math. Soc. 1961. (Готовится русский перевод.)
[48] Pukánszky L., On Kronecker products of irreducible representations of the 2×2 real unimodular group, part I, Trans. Amer. Math. Soc. 100: 1 (1961), 116—152.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ *)

*) Тире заменяет слово, тильда ~ — группу слов (не обязательно весь предыдущий термин; в этом случае конец заменяемой группы слов отмечен вертикальной черточкой |).